

T. 1177

ECOLE CENTRALE DE LYON

**LABORATOIRE DE MÉCANIQUE
DES FLUIDES**

LABORATOIRE DE RECHERCHE
Associé au C. N. R. S.

36, Avenue Guy de Collongue

69130 ECULLY (FRANCE)

N° d'ordre : ECL 84-10

Année 1984

ÉCOLE CENTRALE DE LYON
CENTRE D'INFORMATION
B.P. 163 - 69131 ÉCULLY CEDEX
FRANCE

THESE



présentée devant
l'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir
le titre de DOCTEUR-INGÉNIEUR
Spécialité : MECANIQUE

par

Georges KAKOUROS

DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE DE CALCUL
DIFFERENTIELLE
EN VUE DE LA DETERMINATION
DES ECOULEMENTS SECONDAIRES
DANS LES TURBOMACHINES

soutenue le 4 mai 1984 devant la Commission d'examen

Jury : MM J. MATHIEU, Président
K.D. PAPAILIOU
F. LEBOEUF
G. KARADIMAS
F. DETANNE

T 1177

ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTEUR A. MOIROUX
DIRECTEUR ADJOINT R. RICHE

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A DIRIGER DES THESES A L'E.C.L.

Mathématiques-Informatique-Systèmes

C.M. BRAUNER	Professeur 2e Classe
B. DAVID	Professeur 2e Classe
J.F. MAITRE	Professeur 2e Classe
F. CONRAD	Maître Assistant ENSM-St-Etienne
G. THOMAS	Maître Assistant

Physicochimie des Matériaux

P. CLECHET	Professeur 2e Classe
J. CURRAN	Professeur Associé
N. JAFFREZIC	Chargée de Recherche au CNRS
J. JOSEPH	Maître Assistant
Cl. MARTELET	Maître Assistant
J.R. MARTIN	Maître Assistant
R. OLIER	Maître Assistant
R. PHILIPPE	Maître Assistant IUT-St-Etienne
A. TAILLAND	Maître Assistant

Métallurgie et Physique des Matériaux

P. GUIRALDENQ	Professeur 1ère Classe
D. TREHEUX	Professeur 2e Classe
B. COQUILLET	Assistant
D. JUVE (Mme)	Ingénieur Contr. 3 A
NGUYEN Du	Assistant Associé

Electronique

J.J. URGELL	Professeur 2e Classe (détaché dans l'Industrie)
P. VIKTOROVITCH	Maître de Recherche au CNRS
R. BLANCHET	Professeur 2e Classe
S. KRAWCZYK	Professeur Associé
O. BONNAUD	Maître Assistant
J. BOREL	Direct. Technique Sté E.F.C.I.S.
J.P. CHANTE	Maître Assistant

Electrotechnique

Ph. AURIOL	Professeur 2e Classe
A. FOGGIA	Professeur 2e Classe
A. NICOLAS	Maître Assistant
G. ROJAT	Maître Assistant

Mécanique des Solides

F. SIDOROFF	Professeur 2e Classe
B. CAMBOU	Professeur 2e Classe
Cl. SURRY	Maître Assistant
L. VINCENT	Maître Assistant

Mécanique des Surfaces

J.M. GEORGES	Professeur 2e Classe
J. DIMNET	Professeur Lyon I
J. SABOT	Professeur 2e Classe
Ph. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
T. MATHIA	Chargé de Recherche au CNRS
J.M. MARTIN	Maître Assistant
H. MONTES	Maître Assistant

Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur Classe Exceptionnelle
J. BATAILLE	Professeur Lyon I
B. GAY	Professeur Lyon I
J.N. GENCE	Professeur Lyon I
D. JEANDEL	Professeur 2e Classe
J.P. SCHON	Professeur IUT-St- Etienne
E. ALCARAZ	Maître Assistant
R. MOREL	Maître Assistant INSA
Cl. CAMBON	Attaché de Recherche au CNRS
G. CHARNAY	Maître de Recherche au CNRS

Acoustique

(Mlle)	G. COMTE-BELLOT	Professeur Classe Exceptionnelle
	M. SUNYACH	Professeur IUT-Lyon
	H. ARBEY	Maître Assistant

Machines Thermiques

X. LYS	Professeur Associé
M. BRUN	Professeur 2e Classe
A. HAUPAIS	Maître Assistant

L'étude présentée ici a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Fluides dans le cadre des travaux développés par le Groupe Turbomachines.

Je tiens à remercier Mr le Professeur J. MATHIEU qui a bien voulu m'accueillir dans son Laboratoire et qui m'a accordé les facilités pour la réalisation de cette recherche.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Mr K.D. PAPAILIOU, Professeur à l'Université Technique Nationale d'Athènes, qui m'a orienté vers ce travail de recherche, m'a fait bénéficier de ses vastes connaissances et m'a apporté son soutien moral lors de nombreux entretiens pendant toute cette période.

J'exprime ma profonde gratitude à Mr F. LEBOEUF, Maître Assistant à l'E.C.L., qui a assuré la direction de mon travail et qui a mis à ma disposition toute sa compétence scientifique et sa présence morale tout au long de cette étude.

Je remercie vivement Mr G. KARADIMAS, Chef du Département Aérodynamique de la S.N.E.C.M.A., qui me fait l'honneur de participer au Jury de thèse et pour l'intérêt constant qu'il porte à ce travail.

J'adresse également mes remerciements à Mr F. DETANNE, Ingénieur à l'ALSTHOMÉ ATLANTIQUE, qui m'honore par sa participation au sein du Jury.

Je suis reconnaissant envers Mme J. CARO qui m'a accordé son expérience et a contribué en particulier à la réalisation et présentation des figures du présent travail.

Je suis heureux de remercier Mr G. BOIS ainsi que tous mes collègues du groupe Turbomachines qui m'ont accueilli chaleureusement au sein du groupe.

J'adresse également mes remerciements à Mme C. LANCE qui a assuré avec soin, compétence et dévouement le travail dactylographique de ce mémoire.

En dernier lieu, je souhaite remercier ma femme pour son aide tant morale que matérielle, ainsi que mes parents pour leur constant soutien tout au long de mes recherches en France.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES SYMBOLES

CHAPITRE I

INTRODUCTION.....	1
I.1. INTRODUCTION GENERALE.....	3
I.2. MODELES DE CALCUL DES ECOULEMENTS SECONDAIRES	4
I.3. APPROCHE PARABOLIQUE POUR LE CALCUL DES ECOULEMENTS.....	10
I.4. PRESENTATION DE LA METHODE ACTUELLE.....	12

CHAPITRE II

FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME.....	15
II.1. INTRODUCTION.....	17
II.2. LES EQUATIONS DE BASE.....	18
II.2.1. Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible.....	19
II.2.1.1. Forme vectorielle des équations.....	19
II.2.1.2. Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes.....	19
II.2.1.3. Forme conservative de Navier-Stokes dans un système cylindrique.....	21
II.2.1.4. L'hypothèse d'une enthalpie d'arrêt constante	25
II.2.2. Modifications des équations pour un écoulement incompressible.....	26
II.2.3. Fermeture turbulente du problème.....	27
II.2.3.1. Modèle $k - \epsilon$	28
II.2.3.2. Modèle de la viscosité turbulente μ_t	29
II.2.4. Les équations pour le calcul du plan transversal.....	33
II.2.4.1. L'équation de la vortacité secondaire.....	33
II.2.4.2. Détermination du champ de vitesse induit....	36
II.3. TRAITEMENT MATHEMATIQUE DES EQUATIONS DE BASE	39
II.3.1. Transformation des équations dans un nouveau système de coordonnées.....	39
II.3.2. Intégration des équations dans la direction azimutale	44

II.3.3.	Approximation parabolique de l'écoulement moyen	48
II.3.4.	Nouvelles expressions des composantes de l'équation de quantité de mouvement.....	49
II.3.4.1.	Traitement du terme de pression D_{1p}	49
II.3.4.2.	Utilisation d'une relation cinématique.....	51
II.4.	CONCLUSIONS.....	54

CHAPITRE III

	METHODE NUMERIQUE.....	55
III.1.	INTRODUCTION.....	57
III.2.	DISCRETISATION EN TEMPS - LINEARISATION PAR RAPPORT AU TEMPS DES EQUATIONS DANS LE PLAN LONGITUDINAL.....	58
III.3.	CHOIX DU MAILLAGE - DISCRETISATION SPATIALE DE L'EQUATION VECTORIELLE.....	62
III.4.	ALGORITHME DE LA RESOLUTION.....	71
III.5.	INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ALGORITHME DE LA RESOLUTION.....	73
III.5.1.	Écoulement incompressible.....	73
III.5.2.	Écoulement compressible.....	82
III.5.3.	Résumé des conditions aux limites utilisées en pratique dans le présent calcul.....	85
III.6.	ANALYSE DE STABILITE.....	86
III.6.1.	Schémas explicites centrés.....	86
III.6.2.	Schémas explicites décentrés.....	91
III.6.3.	Schémas implicites.....	94
III.6.4.	Schémas paraboliques implicites.....	98
III.6.5.	Stabilité de l'algorithme de la résolution.....	99
III.6.6.	Stabilité de la présente méthode.....	100
III.7.	DISCRETISATION SPATIALE - METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS DANS LE PLAN TRANSVERSAL.....	102
III.7.1.	L'équation de la vorticité secondaire.....	102
III.7.2.	L'équation de Poisson pour le calcul de ζ	103
III.8.	COUPLAGE DE LA RESOLUTION DANS LE PLAN TRANSVERSAL - ORGANISATION GENERALE DU CALCUL	110
III.9.	CONCLUSIONS.....	114

CHAPITRE IV

RESULTATS DU CALCUL.....	115
IV.1. INTRODUCTION.....	116
IV.2. PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS.....	119

CHAPITRE V

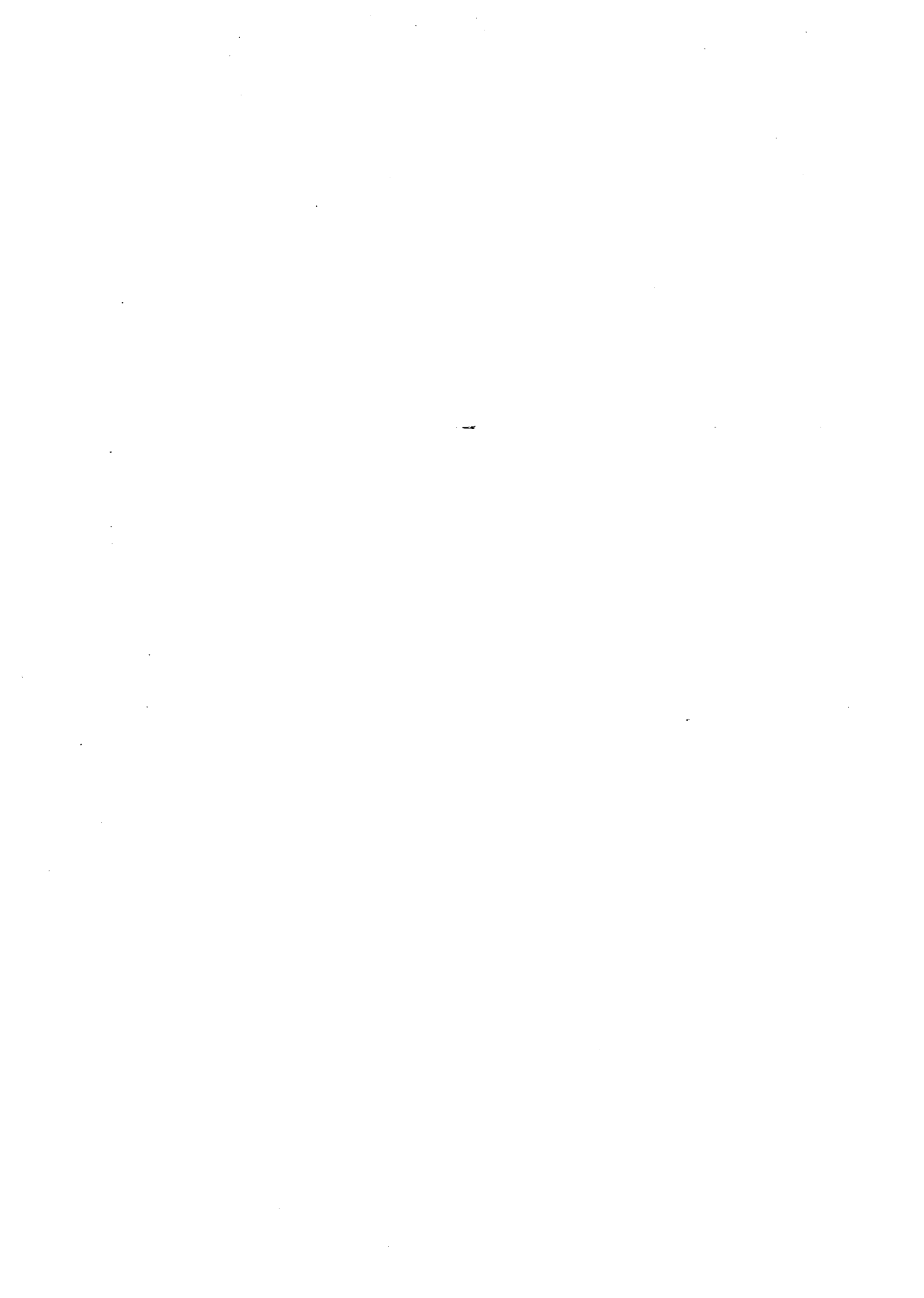
CONCLUSIONS.....	124
BIBLIOGRAPHIE.....	127
ANNEXE 1.....	144
ANNEXE 2.....	157
ANNEXE 3.....	166

FIGURES

CHAPITRE I

-

INTRODUCTION



I.1. INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement réel dans une turbomachine a un caractère très complexe. Il est instationnaire, visqueux et tridimensionnel. L'outil le plus approprié afin de décrire ces écoulements est constitué par les équations de Navier Stokes. Celles-ci posent cependant des problèmes lors de leurs applications à des cas pratiques qui intéressent l'ingénieur. Des modèles approximatifs ont ainsi été développés, pour la simplification des équations initiales.

Les calculs des turbomachines se sont d'abord orientés vers des calculs non visqueux. Plusieurs méthodes ont été développées pour le calcul de l'écoulement dont la plus courante est celle de WU [1] qui substitue au problème tridimensionnel deux problèmes bidimensionnels couplés. Le premier est résolu sur une surface de courant dite "méridienne", et le second sur une surface de courant dite "aube à aube". La superposition de deux calculs donne la solution dite quasi-tridimensionnelle du problème. Ce type de démarche a été utilisé par différents auteurs [2,3,4]. Une analyse et une critique des méthodes bidimensionnelles, quasi-tridimensionnelles et tridimensionnelles ont été données dans la référence [5].

Des considérations visqueuses ont également été utilisées pour le calcul de l'écoulement dans les turbomachines. Dans ce domaine, le caractère visqueux se manifeste près de l'aubage ainsi que près du carter et du moyeu de la machine. Bien que l'étude des couches visqueuses se développant sur les aubes, à l'aide d'une approche classique de type couche limite, ait été fructueuse, une démarche similaire n'est pas entièrement possible pour les couches visqueuses situées à proximité du moyeu et du carter. Ces couches ont une nature beaucoup plus complexe et seront désignées dans ce qui suit par le terme d' "écoulements secondaires". Nous nous proposons dans ce travail de présenter une méthode de calcul des écoulements secondaires. Mais tout d'abord, nous donnons une présentation des différents modèles de calcul des écoulements secondaires, ainsi que des méthodes numériques utilisées pour les déterminer.

I.2. MODELES DE CALCUL DES ECOULEMENTS SECONDAIRES

A) Pour étudier les écoulements secondaires, deux modèles ont été développés. Ils seront employés simultanément. Le premier modèle, dit de trois zones, se base sur les deux principes suivants :

- i) L'existence d'un écoulement sain qui se définit comme un écoulement non visqueux, rotationnel dans lequel on inclut les effets de la viscosité associés aux aubages uniquement.
- ii) L'introduction d'une pseudo-couche limite pariétale près du carter et du moyeu de la machine, de type couche limite classique, qui traduit les effets de la viscosité dans ces régions.

Le deuxième modèle décrit les écoulements secondaires et utilise deux principes :

- i) Il associe un caractère privilégié à la direction locale imposée par l'écoulement sain en ce sens que l'évolution de l'écoulement sera étudiée selon cette direction, ce qui entraînera des conséquences sur la fermeture turbulente. Cette approximation a été utilisée plus ou moins explicitement par différents auteurs et a été définie clairement par PAPAILIOU [6,7]. Dans la suite de ce texte, la composante de la vitesse réelle selon cette direction privilégiée sera appelée "composante longitudinale"; les composantes selon les directions perpendiculaires seront nommées les "composantes transversales de la vitesse".
- ii) Il donne l'hypothèse que le champ transversal de la vitesse est uniquement induit par la vorticité Ω_S qui se développe selon la direction S de l'écoulement sain.

B) Il est intéressant, à partir d'une étude bibliographique, d'étudier l'utilisation de ces quatre principes dans le développement des méthodes pour le calcul des écoulements secondaires.

Initialement, les deux principes, qui serviront de base au modèle des écoulements secondaires, ont été utilisés séparément.

Le premier, d'abord utilisé par RAILLY et HOWARD [8], met l'accent sur les effets de la viscosité. Ces auteurs ont traité la couche limite pariétale du carter et du moyeu comme une couche limite classique en vue de déterminer les pertes de pression d'arrêt dans ces zones. L'écoulement a été moyenné circonférentiellement; cette opération a fait apparaître des termes supplémentaires dont nous parlerons plus loin. Le succès relatif de ce modèle a conduit à l'apparition, dans la même voie, des méthodes plus élaborées telles que celle de STRATFORD [9], SMITH [10,11], HORLOCK et PERKINS [12], MELLOR et WOOD [13] et DE RUYCK, HIRSCH, KOOL [14].

Le deuxième principe détermine le champ de vitesse transversal par Ω_s ; il a été initié par SQUIRE et WINTER [15]. Il traite l'écoulement secondaire sur une base non visqueuse en utilisant un transport de la vorticité d'origine visqueuse par un écoulement extérieur (sain). Son objectif était de déterminer la variation de direction du vecteur de vitesse dans la direction normale à la paroi. HAWTHORN [16,17] a donné une équation pour la composante longitudinale de la vorticité associée à un écoulement moyenné circonférentiellement et il a introduit une fonction de courant Ψ_s liée à l'écoulement secondaire induit dans le plan transversal. La détermination de Ψ_s est obtenue grâce à une équation de Poisson résolue en développant la fonction de courant en série de Fourier. SMITH [18] a proposé un modèle légèrement différent de celui de HAWTHORN dans la définition de l'écoulement primaire. L'équation de la composante longitudinale de la vorticité pour le calcul des écoulements secondaires a aussi été utilisée par MARRIS [19,20,21], MARSH [22] et HORLOCK [23].

Les travaux théoriques de LAKSHMINARAYANA et HORLOCK [24,25,26,27] ont contribué à la compréhension des écoulements secondaires dans les turbomachines. L'utilisation d'un repère de FRESNET associé à la vitesse locale a permis de déterminer le développement de la composante longitudinale Ω_s de la vorticité liée à la déflexion des lignes de courant ainsi qu'à l'existence d'une composante normale Ω_n de la vorticité. Une expression générale a ainsi été obtenue pour le calcul de Ω_s dans un écoulement visqueux, compressible dans une machine tournante. Notons que leur étude met l'accent sur l'importance de la résolution successive des deux équations pour les deux composantes Ω_s et Ω_n de la vorticité et a été longtemps considérée comme référence par divers auteurs.

Pour la plupart des auteurs cités précédemment, utilisant l'équation de transport de Ω_s de base du modèle des écoulements secondaires, les effets de la viscosité se produisent uniquement par une couche limite avant l'entrée dans les aubes. Dans le passage interaube, seuls les gradients de pression jouent le rôle important tandis que l'influence de la viscosité sur les écoulements secondaires est alors négligeable. Tout récemment, POUAGARE et LAKSHMINARAYANA [28] ont réalisé une application de cette approche classique en introduisant les effets de la viscosité complétés de ceux de la rotation et des gradients de la masse volumique sur le développement de Ω_s ; malgré tout, le traitement de Ω_w reposait toujours sur un calcul approximatif numérique.

Mentionnons au passage une deuxième origine de la vorticité secondaire, moins étudiée pour le cas des turbomachines, qui est associée à l'interaction turbulente des tensions de Reynolds. Elle a été étudiée en particulier par GESSNER [29] pour l'écoulement dans un coin et elle doit être considérée comme une conséquence directe de la viscosité et de la turbulence.

La complémentarité des approches de types "couche limite" et "transport de la vorticité secondaire", a conduit au développement des méthodes les utilisant simultanément. Parmi les travaux les plus importants dans ce domaine, nous pouvons isoler ceux de HORLOCK [30,31,32,33], et ceux effectués au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Lyon [34,35,36,37,38,39,40].

C) L'application du modèle de calcul des écoulements secondaires dans le cadre des turbomachines est malgré tout délicate, ce qui nécessite des traitements particuliers. Différents auteurs ont ainsi procédé à des intégrations des équations selon des directions appropriées. Dans les nouvelles équations, les inconnues correspondent à des quantités globales de l'écoulement et les pertes d'informations engendrées par les intégrations successives doivent être restituées par des hypothèses supplémentaires portant sur ces quantités intégrales.

En plus d'une intégration selon la normale à la paroi, RAILLY et HOWARD [8] ont effectué les premiers une intégration circonferentielle afin d'étudier le problème à un niveau plus global. Cette opération est en fait semblable à celle effectuée par HIRSCH et WARZEE [2] pour un écoulement sain. Elle a conduit à l'apparition d'inconnues supplémentaires et en particulier à celle des forces d'aubage et des termes dits "de fluctuations spatiales" que

RAILLY et HOWARD ont complètement négligés. Les méthodes qui se sont ensuite développées se distinguent par la modélisation de ces nouvelles inconnues et par l'écriture plus ou moins correcte des équations.

Deux approches existent pour le calcul des termes de déficit de force :

- La première approche utilise des formules analytiques qui relient chaque composante du déficit de force à diverses quantités intégrales. HORLOCK et ses collaborateurs [12,31] ont utilisé une expression analytique pour le calcul de la composante circonférentielle qui a été vérifiée expérimentalement par PAPAILIOU, FLOT, MATHIEU [34]. La base de cette expression est la composante azimutale de l'équation intégrale de quantité de mouvement, combinée avec considérations sur le profil de vitesse transversale. Pour le calcul de la composante axiale, HORLOCK et MARCH [30] ont utilisé une relation liant les deux composantes du déficit de force vérifiée expérimentalement elle aussi [34]. Dans la même catégorie, DE RUYCK, HIRSCH, KOOL [14] ont résolu les deux composantes de l'équation intégrale de quantité de mouvement simultanément en utilisant une relation empirique pour modéliser les termes de déficit de force.
- La deuxième approche utilise une relation entre les deux composantes du déficit de force telle celle utilisée par HORLOCK et MARCH. Cette démarche, en combinant les deux composantes de l'équation intégrale de mouvement selon les directions axiale et circonférentielle, permet d'obtenir une nouvelle équation où ces termes n'existent pas. Cette approche est plus générale que la première. Elle a été tout d'abord suivie par MELLOR et WOOD [13] qui, à la suite de difficultés au niveau de la modélisation de ces termes, ont effectué une deuxième intégration dans la direction axiale entre l'amont et l'aval des aubes. Cette approche était aussi à la base de la méthode développée à l'Ecole Centrale de Lyon [34]-[40].

Dans les deux approches mentionnées plus haut, seule la modélisation des termes du déficit de force a été tentée, les termes des fluctuations spatiales et l'écart de pression moyenne entre les écoulements sain et secondaire étant négligés.

Dans le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Lyon, les recherches se sont orientées vers le développement théorique d'une méthode de calcul, basée sur l'expérience acquise par des nombreuses mesures effectuées sur un compresseur axial [41,42,43] et en grille d'aubes [44]. PAPAÏIOU et ses collaborateurs [34,35,36] ont amélioré la méthode de MELLOR et WOOD [13] que LÉBOEUF [5] a utilisée pour le calcul de l'écoulement dans un compresseur axial. COMTE [37] a développé une méthode pour le calcul de l'écoulement dans une grille d'aubes que OHAYON [38] a améliorée pour la prise en compte de l'effet du jeu radial. La méthode a été ensuite modifiée en accord avec la formulation de VOUILLARMET [39]. Dans cette méthode, les deux modèles de calcul des écoulements secondaires mentionnés précédemment sont utilisés simultanément. Le caractère visqueux de l'écoulement est principalement considéré dans la direction longitudinale tandis que le champ de vitesse transversal est considéré comme le résultat de la présence de la vorticité secondaire. Le premier modèle permet d'aborder le problème sous une forme parabolique de type couche limite, le deuxième restitue le caractère elliptique de l'écoulement dans le plan transersal. Le couplage successif de deux calculs donne la solution du problème. Une des bases de cette méthode est l'hypothèse de l'existence d'une direction privilégiée, définie par l'écoulement sain local. Dans cette direction, les propriétés de l'écoulement cisailé sont exprimées à l'aide des lois de similitude au niveau de la composante longitudinale de la vitesse. Une moyenne circonférentielle des équations a été effectuée ; les termes des fluctuations spatiales sont alors apparus exprimant la non-uniformité azimuthale de l'écoulement. Puis l'équation de continuité et de quantité de mouvement ont été exprimées sous une forme d cificitaire par rapport à l'écoulement sain local et une intégration dans le sens normal à la paroi a été effectuée. Ces deux équations sont r solv es simultanément avec l'équation de la vorticité secondaire. La fermeture du problème a été basée sur un ensemble d'informations semi-empiriques. Sous cette forme intégro-différentielle la méthode a été appliquée au cas d'un compresseur axial transsonique [45]. Malgré les nombreuses approximations faites afin de l'appliquer dans une machine tournante, elle a donné des résultats en général satisfaisants. Très récemment, L BOEUF [40] a présenté une étude théorique qui modifie le calcul dans le plan

transversal de cette méthode qui a jusqu'ici utilisé la formule de LAKSHMINARAYANA et HORLOCK [25]. Dans son travail, l'équation de la vorticité secondaire proposée relie celle-ci non seulement à la déflexion des lignes de courant de l'écoulement sain mais aussi à la variation longitudinale de la valeur RV_θ . En outre, une équation pour la composante transversale de la vorticité Ω_N permet de corriger l'hypothèse restrictive d'un écoulement type couche limite dans la direction longitudinale et de traiter plus correctement le transfert des informations lors des changements de repère.

Les méthodes de calcul des écoulements secondaires présentées jusqu'ici résolvent les équations sous une forme intégrale dans la direction de la couche limite. Les inconnues sont les quantités globales de l'écoulement. A l'usage, ces équations présentent moins de difficultés au niveau numérique que les équations initiales. Pour des raisons que nous détaillerons plus loin, le développement des méthodes différentielles pour le calcul des écoulements secondaires dans les turbomachines semble une idée très attirante. Des travaux ont été déjà entrepris dans cette voie. ANDERSON [46], suivant un travail de BRILEY et Mc DONALD [47], a présenté une analyse pour le calcul d'un écoulement tridimensionnel, laminaire, visqueux, dans un passage interaube avec des écoulements secondaires forts. Elle se base sur la décomposition du champ de vitesse en une composante "visqueuse" et en une "non visqueuse". L'équation de la vorticité secondaire est utilisée pour le calcul d'une vitesse secondaire "non visqueuse" qui sert à la correction de la vitesse potentielle. Une équation de mouvement parabolisée dans la direction longitudinale, couplée avec une équation pour l'énergie et une équation globale de continuité sont utilisées pour la correction visqueuse de la pression et de la vitesse longitudinale. Dans la référence [48], BRILEY et Mc DONALD ont étendu ce travail en conservant les mêmes principes de base. Leur analyse superpose un écoulement primaire qui définit une direction prépondérante avec un champ de vitesse secondaire transversal. Plus précisément, la méthode corrige un écoulement primaire non visqueux, connu a priori pour prendre en compte les effets visqueux, ceux des écoulements secondaires et de la modification de la pression d'arrêt et l'effet du blocage. Elle a été appliquée pour le calcul des écoulements dans des tuyaux courbés et le passage interaube. ABDALLAH et HAMED [49,50] ont développé une méthode pour le calcul d'un écoulement tridimensionnel, rotationnel, non visqueux, dans un tuyau courbé en suivant l'évolution de la vorticité. Ils calculent la vorticité et la composante longitudinale de la vitesse par une équation de

mouvement, et une équation de transport de la vorticité, négligeant les termes dissipatifs et résolvant les deux équations en utilisant une procédure évolutive dans la direction longitudinale. Les composantes secondaires de la vitesse sont alors déterminées par la résolution simultanée de l'équation de la continuité pour la partie potentielle de la vitesse et des équations de Poisson pour la partie rotationnelle. Des conditions aux limites de type Dirichlet sont utilisées pour ces deux parties. ARNAL et COUSTEIX [51], partant d'une conception analogue, ont envisagé le problème d'un écoulement dans l'angle de deux parois. Leur système des équations comprend l'équation de quantité de mouvement dans la direction longitudinale, l'équation de la composante longitudinale de la vorticité et deux équations du type Poisson pour le calcul des composantes secondaires de la vitesse au plan transversal.

Les méthodes décrites précédemment ont en commun l'utilisation d'une direction d'évolution particulière pour le calcul. Nous allons détailler ce point dans le paragraphe suivant.

1.3. APPROCHE PARABOLIQUE POUR LE CALCUL DES ECOULEMENTS

Les schémas paraboliques que nous allons utiliser dans ce travail sont une des approximations les plus utilisées des équations de Navier-Stokes. Ils répondent à la demande contemporaine du développement des méthodes simples et rapides pour le calcul de l'écoulement dans de nombreux cas d'intérêt pratique.

Ces écoulements, dont un cas particulier est par exemple une couche limite, ont les caractéristiques suivantes :

- i) Les phénomènes de diffusion du mouvement, de la masse et de la chaleur, sont négligeables dans une direction prépondérante.
- ii) Le champ de pression statique en aval influence peu les conditions en amont.

Par conséquent, une intégration de l'amont vers l'aval peut être utilisée dans la direction de l'écoulement. En résolvant les équations correspondant, appelées aussi équations de Navier-Stokes Parabolis es (N.S.P.), une réduction importante du temps de calcul et de la taille nécessaire en mémoire de l'ordinateur peut être obtenue.

La réduction des équations de Navier-Stokes de type elliptique à type parabolique a les conséquences suivantes :

- i) Une partie du mécanisme de propagation des perturbations de l'aval vers l'amont est négligée.
- ii) Certaines conditions aux limites (par rapport à un problème elliptique) sont éliminées. Par conséquent, la méthode du traitement parabolique devrait être intégrée dans un processus globalement elliptique si les conditions aux limites avalées sont à prendre en compte.

Un grand nombre de chercheurs ont utilisé l'approche parabolique des équations de Navier-Stokes en suivant différentes méthodes pour leur résolution numérique [52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64].

Une étude approfondie sur les problèmes que présente la solution du système parabolique a été présentée par RUBIN et LIN [57]. Ils reconnaissent en effet que les équations N.S.P., dans le cas d'un écoulement subsonique, ne sont pas vraiment paraboliques mais elles conservent un caractère faiblement elliptique. Cette ellipticité s'introduit par le terme du gradient axial de la pression dans la composante axiale de l'équation de quantité de mouvement et par l'interaction avec l'effet de déplacement qui apparaît dans la composante normale de cette équation. La résolution de ce problème faiblement elliptique par une procédure de calcul de l'amont vers l'aval conduit à l'apparition d'une instabilité ; ce phénomène est généralement nommé "effet de départ" ("departure effect"). Si le terme dp/dx est a priori connu, ou peut être négligé, les équations deviennent purement paraboliques. Si ce terme de pression n'est pas négligeable, un pas d'intégration vers l'aval minimum existe d'après RUBIN et LIN [57], au-delà duquel la solution est stable . Ce pas est en effet lié à l'étendue de la "zone elliptique". PATANKAR et SPALDING [52] ont traité le problème de la pression d'une manière différente. Ils ont décomposé le champ de pression en deux parties dont l'une dans le plan longitudinal et l'autre dans le plan transversal. La première est issue d'une conservation globale du débit tandis que la deuxième est le résultat de l'utilisation de la continuité locale. Malgré l'inconsistance de ce découplage du champ de la pression du point de vue physique, le schéma a donné de bons résultats dans certains cas. PRATAP et SPALDING [53] ont modifié la méthode ci-dessus pour le calcul des écoulements appelés "partiellement paraboliques". Dans ce cas, des transferts de

perturbations de l'aval en amont par l'intermédiaire de la pression sont permis. La pression est alors calculée comme dans un écoulement elliptique. Des comparaisons entre les résultats des deux méthodes "parabolique" et "partiellement parabolique" ont montré des différences significatives. Enfin, pour le cas d'une couche limite tridimensionnelle développée sur un corps en rotation, AGUILAR [54] a montré en utilisant la théorie des surfaces caractéristiques que les équations réduites qui décrivent l'écoulement, même dans le cas stationnaire, sont clairement paraboliques. Cela est le résultat de l'élimination des termes diffusifs axiaux ainsi que du gradient axial de la pression.

1.4. PRESENTATION DE LA METHODE ACTUELLE

Le travail que nous allons présenter a pour but le développement d'une méthode complètement différentielle pour le calcul des écoulements secondaires. Une telle formulation répond à plusieurs objectifs reliés à une description plus fine de l'écoulement. L'application de la méthode intégrale développée à l'Ecole Centrale de Lyon sur une machine tournante a montré sa limitation partielle pour décrire certains phénomènes particuliers [45,65]. Il est possible de penser que des phénomènes pourraient être abordés plus correctement avec une méthode différentielle. Il s'agit en particulier de :

- i) l'effet de vrillage des aubages ;
- ii) l'effet du passage de l'écoulement d'un repère fixe à un repère mobile ou vice-versa ;
- iii) l'effet du cisaillement à la paroi ;
- iv) tous les cas où les effets visqueux ne peuvent être décrits par une loi analytique à travers un profil de vitesse.

Nous avons conservé les idées de base de la méthode intégrale précédente [36,37,39] qui sont :

- i) le traitement d'un écoulement moyenné dans la direction circonférentielle ;

- ii) l'utilisation de l'équation de la vorticité secondaire pour le calcul du champ transversal.

La démarche principale de cette méthode est présentée ci-après.

En partant des équations de Navier-Stokes sous une forme vectorielle conservative, écrites dans un système orthogonal cylindrique, tournant à la vitesse constante $\vec{\omega}$, nous avons transformé ces équations afin de les traiter dans un nouveau domaine de calcul constitué d'un maillage uniforme. A la suite de cette transformation, les dérivées ont été discr tiss es dans le nouveau maillage, alors que les variables sont toujours associées au repère cylindrique. Une intégration azimutale a été ensuite effectuée et la projection des équations moyennées selon deux directions particulières est réalisée, ce qui conduit à l'élimination des termes de force d'aubage.

Une des caractéristiques importantes des écoulements secondaires est leur nature elliptique dans le plan transversal. Afin de restituer ce caractère, nous avons remplacé la composante azimutale de l'équation de mouvement par une relation cinématique qui relie la composante transversale de la vitesse avec les composantes de la vitesse dans le repère cylindrique. Cette composante est déterminée par la résolution d'une équation de Poisson qui introduit l'effet elliptique de la vorticité secondaire, elle-même déjà calculée par une équation de transport.

La direction perpendiculaire au plan transversal est considérée comme privilégiée et l'écoulement selon celle-ci est déterminé par un schéma parabolique. Le calcul dans cette direction suit une procédure de relaxation dans le temps. LIN et RUBIN [58] ont trouvé que cette technique introduit un effet de relaxation dépendant du temps et supprimant "l'effet de départ" mentionné précédemment. Avec cette procédure, le système des équations conduit à un problème bien posé à conditions initiales. Les désavantages de cette approche par rapport à une méthode intégrale se situent dans une augmentation légère du stockage en mémoire de l'ordinateur et un accroissement des temps de calcul par suite de la relaxation temporelle. Nous avons suivi cette procédure de calcul de l'amont vers l'aval en relaxant à chaque pas les termes pseudo-instationnaires jusqu'à la convergence qui nous fournit l'approximation stationnaire des équations. Afin de traiter ces équations, fortement non linéaires, nous avons effectué une linéarisation par rapport à ce temps fictif (numérique), procédure

habituelle lors de la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Le couplage entre le calcul parabolique dans le plan longitudinal et le calcul elliptique dans le plan transversal nous a donné la solution du problème.

Dans les chapitres suivants, nous présentons en détail les équations, la méthode numérique utilisée et les résultats de l'application de cette méthode au cas pratique. Dans le chapitre II, nous exposons le traitement mathématique des équations initiales, qui aboutit à une forme appropriée de ces équations pour notre problème. Dans le chapitre III, nous présentons la méthode numérique que nous utilisons pour la résolution des équations transformées. La forme discrétisée, l'algorithme de la résolution, l'introduction des conditions aux limites dans l'algorithme ainsi qu'une analyse de stabilité y sont donnés. Les résultats d'application de la méthode dans des cas divers sont considérés dans le chapitre IV. Des écoulements bidimensionnels classiques laminaires et turbulents ainsi que des écoulements se développant en grille d'aube ou dans des machines tournantes sont étudiés. Dans le chapitre V, une critique de la méthode développée est entreprise sur la base des résultats obtenus. L'efficacité de l'algorithme ainsi que ses insuffisances et ses possibilités d'amélioration sont examinées.

CHAPITRE II

-

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

II.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons développer les équations de base pour un écoulement visqueux, tridimensionnel, compressible ou incompressible dans un système des coordonnées adapté à notre problème. Les équations initiales sont les équations de Navier Stokes : l'équation de continuité, les trois composantes de l'équation de quantité de mouvement et une équation pour l'énergie interne d'arrêt. Dans sa forme finale, le système utilisé comportera une équation pour la vorticité secondaire qui prendra ainsi la place d'une composante de l'équation de quantité de mouvement.

Nous résumons ici brièvement la procédure que nous avons suivie afin d'amener nos équations à la forme qui nous a semblée appropriée pour notre cas.

Partant des équations de Navier-Stokes sous une forme vectorielle, nous les avons projetées sous une forme faiblement conservative dans un repère curviligne orthogonal cylindrique (z, R, θ) tournant à la vitesse constante $\vec{\omega}$. Une moyenne statistique appliquée à ces équations a fait apparaître des inconnues supplémentaires turbulentes, les tensions de Reynolds. Pour la fermeture turbulente, nous utilisons une modélisation que nous décrirons en détail dans le paragraphe (II.2.3). Nous effectuons ensuite une transformation de notre repère cylindrique en un repère (ξ, η, ζ) de calcul, a priori quelconque mais que nous supposons par la suite lié au maillage utilisé. Cette technique nous permet d'utiliser des schémas numériques sur un maillage uniforme dans le plan transformé. Dans ce nouveau système, nous utilisons l'hypothèse d'un écoulement parabolique selon une direction privilégiée que nous assimilons à ξ , hypothèse qui permettra de négliger certains termes et guidera notre choix pour une méthode numérique appropriée à la résolution des équations. Une moyenne massique a été ensuite appliquée dans la direction ζ que nous avons assimilée avec la direction circonférentielle θ . Cette moyenne a fait apparaître des termes de "fluctuations spatiales" ainsi que le terme de force d'aubage due à la pression. Pour éliminer le terme de pression qui est inconnu, nous avons projeté l'équation de quantité de mouvement sur deux directions indépendantes, proprement choisies, \vec{N} et \vec{L} . L'ensemble des équations fourni par l'équation de continuité, les deux composantes de l'équation de quantité de mouvement selon les directions \vec{N} et \vec{L} et l'équation de l'énergie d'arrêt, forment un système de base noté système (I) dans la suite. A la place de la troisième composante de l'équation de mouvement, nous avons utilisé une équation moyennée en θ , de

transport de la vorticité secondaire $\widehat{\Omega}_s$. Cette équation est choisie, faisant peu intervenir la pression statique et permettant de prendre en compte assez correctement les conditions aux limites associées aux aubages, malgré sa forme moyennée en θ . Elle ne contient pas de termes additionnels mais tient compte du caractère elliptique de l'écoulement dans le plan transversal. L'information contenue dans $\widehat{\Omega}_s$ est ensuite transférée dans la composante transversale moyenne \widehat{W}_n de la vitesse par le biais d'une variable de transfert $\widehat{\Psi}_s$. Cette variable apparaît comme une composante d'une fonction rotationnelle qui est déterminée en fonction de $\widehat{\Omega}_s$ à l'aide d'une équation de Poisson. L'ensemble de ces équations sera nommé système (II) des équations. Le lien entre le système d'équations de base (I) et le système annexe (II) est assuré simplement par une relation cinématique entre les composantes de la vitesse dans les repères (ξ, R, θ) et (s, B, N) .

II.2. LES EQUATIONS DE BASE

Les équations de base, formant deux systèmes d'équations distincts, sont données ci-après :

- l'équation de continuité ;
- l'équation de quantité de mouvement (deux composantes) ;
- l'équation pour l'énergie interne d'arrêt ;
- les équations pour la fermeture turbulente.

Les équations ci-dessus constituent le système (I) qui est écrit sous une forme vectorielle, conservative.

Le système (II) est formé par les équations suivantes :

- l'équation pour la vorticité secondaire $\widehat{\Omega}_s$;
- l'équation de Poisson pour le calcul de $\widehat{\Psi}_s$;
- l'équation reliant la composante transversale moyenne \widehat{W}_n de la vitesse à $\widehat{\Psi}_s$.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons la forme initiale des équations que nous allons utiliser et leur traitement mathématique qui permettra de développer les équations de base présentées dessus.

II.2.1. Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible :

II.2.1.1. Forme vectorielle des équations :

Nous donnons la forme conservative des équations de Navier-Stokes, comme elle a été décrite par PEYRET et VIVIAND [66].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \operatorname{div}(\rho \vec{V} \vec{V} - \underline{\underline{\sigma}}) = \vec{f}_e \quad (b) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}(\rho E \vec{V} - \underline{\underline{\sigma}} \vec{V}) = \vec{f}_e \cdot \vec{V} \quad (c)$$

Les variables indépendantes dans ces équations sont la masse volumique ρ , le vecteur vitesse \vec{V} et l'énergie interne d'arrêt E . Pour un fluide Newtonien, le tenseur des tensions est une fonction linéaire du gradient de vitesse, ce que nous exprimons par la loi de Newton

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (a) \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} + \mu \operatorname{def} \vec{V} \quad (b)$$

avec $\operatorname{def} \vec{V} = \operatorname{grad} \vec{V} + (\operatorname{grad} \vec{V})^t$ = le tenseur de taux de déformation.

Les deux coefficients de viscosité se relient par la relation de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.3)$$

II.2.1.2. Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes :

Le problème que sous-entend l'adimensionnalisation est essentiellement numérique. Il s'agit, lors de la résolution des équations, de disposer d'une méthode qui fasse évoluer de manière comparable les différentes variables inconnues. Ceci est lié à l'adimensionnalisation des équations qui doit conduire à un système bien conditionné.

Pour définir les variables adimensionnelles, des valeurs caractéristiques sont construites pour toutes les variables intervenant dans les équations, basées sur certaines valeurs de référence. La nature du problème qui est envisagé et la méthode numérique utilisée pour la résolution, jouent un rôle important dans le choix de ces valeurs. Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur l'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes et sur l'influence de celle-ci sur la méthode numérique que nous utilisons. Nous allons montrer comment le choix des valeurs de référence, en fonction du type de l'écoulement étudié, conduit à un système bien conditionné.

Pour le cas d'une couche limite bidimensionnelle, l'analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes montre que le rapport des ordres de grandeur de la composante normale et de la composante axiale de l'équation de quantité de mouvement est de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite δ/L . Lorsque δ/L est très petit, les deux composantes sont d'un ordre de grandeur différent. Les variables adimensionnelles peuvent alors être définies comme suit :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{\delta} \quad , \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_{\infty}} \quad , \quad \tilde{v} = \frac{v}{u_{\infty}} \cdot \frac{L}{\delta}$$

afin que les deux composantes soient de même ordre de grandeur. Cette adimensionnalisation est utilisée tant pour une couche limite [67] que pour l'écoulement dans une conduite [68].

Un autre facteur qui influence le choix des valeurs de référence est le nombre de Mach M de l'écoulement. Pour un écoulement à un nombre de Mach élevé, une vitesse de référence pour l'adimensionnalisation des vitesses peut être la vitesse extérieure du son $u_{ref} = c_{\infty} = \sqrt{\gamma \tau T_{\infty}}$. Pour un écoulement incompressible où M est très petit devant 1, le choix d'une telle vitesse de référence conduit à l'apparition de problèmes lors de la résolution numérique. Pour que la méthode numérique soit stable et convergente, il faut que les termes des matrices Jacobiennes de la résolution soient du même ordre de grandeur, ce qui n'est pas obtenu si les variables adimensionnelles sont très différentes. Par conséquent, pour un écoulement incompressible, une vitesse caractéristique de l'ordre de grandeur des vitesses dans l'écoulement peut être utilisée pour l'adimensionnalisation. Or, même dans ce cas, des problèmes se présentent si la pression est calculée par la formule (2.9) ou (2.11) car les termes $e = c_v T$ ou

$h=c_p T$ adimensionnalisés par u_∞^2 sont beaucoup plus grands que les termes \tilde{u}^2 . Nous allons voir dans le chapitre IV comment ce problème peut être traité.

Considérons maintenant le choix que nous proposons. Pour la longueur de référence L , nous avons choisi une longueur caractéristique dans la direction axiale mais qui est en plus du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche limite δ . Les autres valeurs de référence que nous avons utilisées sont données ensuite. Comme vitesse u_{ref} une vitesse extérieure u_∞ donnée pour un écoulement incompressible et la vitesse extérieure du son $c_\infty = \sqrt{\gamma \tau_0}$ pour un écoulement compressible. Comme ρ_{ref} et μ_{ref} une masse volumique ρ_∞ et une viscosité μ_∞ qui pour le cas d'un gaz parfait sont fonctions de température d'arrêt liée à l'écoulement. Toutes les autres valeurs caractéristiques sont dérivées à partir de ces valeurs de référence. Pour le temps t c'est la valeur L/u_{ref} , pour la pression p la valeur $(\rho u^2)_{ref}$, pour les tensions de cisaillement $\underline{\underline{\tau}}$ la valeur $(\mu u)_{ref}/L$, pour les forces \vec{f}_e la valeur $(\rho u^2)_{ref}/L$ et pour l'énergie E ou l'enthalpie H la valeur u_{ref}^2 . Après l'adimensionnalisation, les formules (2.2) deviennent

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \frac{1}{Re} \underline{\underline{\tau}} \quad (2.4)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \operatorname{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} + \mu \operatorname{def} \vec{V}$$

où $Re = (u_{ref} L / \mu)$ un nombre de Reynolds caractéristique.

II.2.1.3. Forme conservative de Navier-Stokes dans un système cylindrique :

Nous allons écrire les équations (2.1) sous une forme telle qu'elles soient utilisées aussi bien dans un système cylindrique que cartésien ; ceci permet de décrire la plupart des cas d'intérêt pratique en turbomachines, bien que les équations y soient écrites sous une forme faiblement conservative. Le caractère faiblement conservatif ne semble pas créer de problèmes au niveau numérique. Les équations analogues obtenues, à partir des mêmes équations initiales, par VOUILLARMET [39] dans un système curviligne orthogonal (m, n, θ) n'ont pas ce caractère conservatif et elles peuvent présenter plus de difficultés dans la résolution numérique par une méthode différentielle [69]. Dans notre cas, les équations sont exprimées pour un écoulement non stationnaire dans un repère relatif tournant, lié aux aubages. Nous les présentons sous une forme adimensionnelle, vectorielle, et faiblement conservative dans un système

cylindrique. Les détails des calculs sont donnés en Annexe 1.

$$\frac{\partial R\tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial R\tilde{F}}{\partial z} + \frac{\partial R\tilde{G}}{\partial R} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \theta} + j\tilde{H} = \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R\tilde{F}_v}{\partial z} + \frac{\partial R\tilde{G}_v}{\partial R} + \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \theta} + j\tilde{H}_v \right) + R\tilde{D}$$

où

$$\tilde{W} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_R \\ \rho u_\theta \\ \rho E \end{vmatrix} \quad \tilde{F} = \begin{vmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho u_z u_R \\ \rho u_z u_\theta \\ (\rho E + p) u_z \end{vmatrix} \quad \tilde{G} = \begin{vmatrix} \rho u_R \\ \rho u_R u_z \\ \rho u_R^2 + p \\ \rho u_R u_\theta \\ (\rho E + p) u_R \end{vmatrix} \quad \tilde{E} = \begin{vmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_\theta u_z \\ \rho u_\theta u_R \\ \rho u_\theta^2 + p \\ (\rho E + p) u_\theta \end{vmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho u_\theta^2 - p \\ \rho u_R u_\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{F}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zR} \\ \tau_{z\theta} \\ \beta_z \end{vmatrix} \quad \tilde{G}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{Rz} \\ \tau_{RR} \\ \tau_{R\theta} \\ \beta_R \end{vmatrix} \quad \tilde{E}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{\theta R} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \beta_\theta \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$\tilde{H}_v = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ \tau_{R\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{f}_e \cdot \vec{i}_z \\ \vec{f}_e \cdot \vec{i}_R \\ \vec{f}_e \cdot \vec{i}_\theta \\ \vec{f}_e \cdot \vec{V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \omega^2 R + 2\rho \omega u_\theta \\ -2\omega \rho u_R \\ \omega^2 \rho R u_R \end{vmatrix}$$

Les tensions visqueuses sont données par les formules suivantes :

$$(a) \tau_{zz} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$(b) \tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right)$$

$$(c) \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \cdot \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)$$

(2.7)

$$(d) \tau_{rr} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_R}{\partial R}$$

$$(e) \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \mu \cdot \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{u_\theta}{R} \right) \right] = \mu \cdot \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - j \frac{u_\theta}{R} \right]$$

$$(f) \tau_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{2\mu}{R} \cdot \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + j u_R \right)$$

Les termes visqueux dans l'équation de l'énergie sont :

$$\beta_z = \tau_{zi} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \quad (2.8)$$

$$\beta_R = \tau_{Ri} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{\partial e}{\partial R}$$

$$\beta_\theta = \tau_{\theta i} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

La pression est calculée par une équation de gaz parfait

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \left(E - \frac{u_z^2 + u_R^2 + u_\theta^2}{2} \right) \quad (2.9)$$

Dans le terme \tilde{D} , la force \vec{f}_e regroupe d'une part la force de Coriolis $-2\vec{\omega} \wedge \vec{V}$, d'autre part la force centrifuge $-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \nabla(\omega^2 R^2/2)$. Ces deux forces s'exercent par suite de la rotation de la machine. Les forces de gravité sont négligées.

Les termes non conservatifs H et H_v sont liés au choix d'un repère cylindrique. Pour un système Cartésien, ils s'annulent. L'équation (2.5) est écrite de manière à pouvoir être utilisée aussi bien dans un système cylindrique que dans un système Cartésien. Pour un système cylindrique, il suffit de prendre le coefficient $j = 1$. Pour un système Cartésien, nous aurons $R = 1$ et le coefficient $j = 0$. On peut voir par les formules (2.7) que le choix de l'un ou de l'autre système influence aussi la forme des tensions visqueuses. Cette possibilité de choix entre les deux systèmes par une simple modification de certains coefficients rend la méthode souple et utilisable, aussi bien dans le cas d'une grille d'aubes plane que dans le cas d'une machine tournante.

Remarque :

Il est possible, à la place de l'équation pour l'énergie interne d'arrêt, d'utiliser une équation pour l'enthalpie d'arrêt définie par la formule suivante :

$$H = C_p T_o = h + \frac{V_t^2}{2} = E + \frac{P}{\rho}$$

Si cette formule est introduite dans l'équation pour E , nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial R \rho H}{\partial t} - \frac{\partial R P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (R \rho u_z H) + \frac{\partial}{\partial R} (R \rho u_R H) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta H) =$$

$$\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R \beta_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R \beta_R) + \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho \omega^2 R^2 u_R$$

Nous pouvons remarquer, par rapport à l'équation pour E, que les termes convectifs ne contiennent plus la pression. Ceci constitue peut être un grand avantage pour la méthode numérique car les termes de pression $\partial p / \partial \rho$ disparaissent des matrices Jacobiennes. Cependant, un terme supplémentaire non stationnaire $\partial p / \partial t$ apparaît ici dont le traitement n'est pas évident.

Si à la place de l'enthalpie d'arrêt H nous utilisons la ronthalpie $H_r = H - \frac{\omega^2 R^2}{2}$, nous pourrions obtenir une équation totalement conservative puisque le terme $\frac{\omega^2 R^2}{2}$ entrerait dans les dérivées.

Dans notre méthode, nous utilisons en pratique un écoulement à enthalpie d'arrêt constante ; ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

II.2.1.4. L'hypothèse d'une enthalpie d'arrêt constante :

Pour un gaz parfait, avec un rapport γ de chaleurs spécifiques constant, l'enthalpie d'arrêt H définie précédemment, peut s'exprimer par la formule

$$H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P}{\rho} + \frac{V_t^2}{2} \quad (2.10)$$

Dans un grand nombre de problèmes d'intérêt pratique, on peut supposer que l'enthalpie d'arrêt est constante si il n'y a pas de transfert de chaleur [70,71]. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de résoudre une équation instationnaire pour l'énergie E ou pour l'enthalpie H. La pression est calculée en fonction de la masse volumique, de la vitesse et de l'enthalpie d'arrêt.

$$P = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \rho \cdot \left(H - \frac{V_t^2}{2} \right) \quad (2.11)$$

avec H = constante. Cette hypothèse peu restrictive d'une enthalpie totale constante dans l'écoulement, permet de diminuer le nombre des équations incluses dans l'équation vectorielle (2.5) et par conséquent de réduire l'effort numérique exigé, le temps de calcul et la taille en mémoire de l'ordinateur demandée pour sa résolution.

Nous avons utilisé cette hypothèse de H = constante pour nos calculs. La pression a été calculée par la formule (2.11).

II.2.2. Modifications des équations pour un écoulement incompressible :

Pour le calcul des écoulements stationnaires, deux sortes de méthodes existent. Celles qui utilisent des équations stationnaires et celles qui utilisent des équations instationnaires où le temps tend vers l'infini. Pour ces dernières, il est demandé que la solution atteigne la solution stationnaire à la convergence. Par conséquent, il n'est pas nécessaire que la méthode utilisée décrive correctement l'état transitoire mais seulement la solution finale où l'état stationnaire a été atteint.

Des problèmes cependant se présentent lors d'un calcul d'un écoulement incompressible avec cette méthode. On peut remarquer grâce à l'équation (2.5) que, pour un tel écoulement, dans la première composante qui exprime l'équation de continuité, le terme instationnaire disparaît puisque la masse volumique est partout constante. L'intégration de l'équation de continuité devient alors difficile. Pour traiter ce problème, CHORIN [72] a proposé la "méthode de la compressibilité artificielle". L'équation de continuité est remplacée par une équation de divergence perturbée, qui s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.12)$$

où β est une constante arbitraire. Cette équation n'a pas de sens physique avant que l'état stationnaire soit atteint. La continuité classique pour un écoulement incompressible $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ est satisfaite seulement à la convergence. Le paramètre β doit être choisi de manière à assurer l'existence d'une solution numérique stationnaire pour le système des équations de la continuité (2.12) et de quantité de mouvement. La méthode est appelée "méthode de la compressibilité artificielle" car les équations correspondantes peuvent être dérivées des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible avec une équation d'état $p = \beta p$ avec β constant. L'équation (2.12) tend vers l'équation $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ si β^{-1} tend vers zéro, ce qui en pratique se traduit par $\beta \gg 1$. Cependant, d'après PEYRET et TAYLOR [73], l'utilisation des valeurs très grandes pour le paramètre β conduit souvent à l'apparition de difficultés numériques.

Cette méthode de la compressibilité artificielle pour le calcul d'un écoulement incompressible a été utilisée avec différentes modifications par FORTIN, PEYRET et TEMAM [74], STEGER et KUTLER [75], GANOULIS et THIRRIOT [76], DE SAINT-VICTOR et COUSTEIX [77].

Nous avons suivi cette méthode pour le calcul des écoulements secondaires incompressibles. Le vecteur des inconnues principales est $W = (P_v, u_z, u_R, u_\theta)^T$. Nous allons expliquer plus bas la signification du terme P_v . La forme générale de l'équation vectorielle (2.5) reste la même mais les termes de la première composante qui exprime la continuité, sont modifiés.

$$\tilde{W}_1 = P_v, \quad \tilde{F}_1 = \beta u_z, \quad \tilde{G}_1 = \beta u_R, \quad \tilde{E}_1 = \beta u_\theta$$

De plus, l'équation pour l'énergie est éliminée.

Avant de présenter quelques problèmes numériques liés au choix des valeurs de β , nous allons expliquer comment nous traitons la pression pour le calcul des écoulements secondaires incompressibles.

Pour tenir compte de l'effet des écoulements secondaires, nous séparons la pression statique en deux parties

$$P = P_\phi + P_v \quad (2.13)$$

La première partie P_ϕ , qui est la plus importante, est associée au champ de vitesse de l'écoulement sain ou au champ potentiel de vitesse. Elle constitue une donnée de notre problème. La deuxième partie P_v est associée à l'effet secondaire. Puisque nous étudions l'écoulement avec une méthode parabolisée, selon la direction longitudinale, nous pouvons supposer que P_v dépend principalement de l'écoulement dans le plan transversal. Le calcul de P_v , par conséquent, nous donne la correction de la pression statique associée aux écoulements secondaires.

II.2.3. Fermeture turbulente du problème :

Pour un écoulement turbulent compressible, il est habituel d'appliquer une moyenne statistique pondérée par la masse [78,79] sur les équations de mouvement. Cette moyenne fait apparaître les tensions de Reynolds $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ qui sont des inconnues supplémentaires. Une analyse théorique de certaines approches pour la modélisation de ces termes a été effectuée par GENGE, JEANDEL et MATHIEU [80]. Parmi les nombreux modèles de fermeture

turbulente qui existent, nous avons considéré deux modèles différents. Le premier est le modèle $k-\varepsilon$ à deux équations écrit sous une forme adaptée à notre problème et le deuxième est le modèle simple de la viscosité turbulente.

II.2.3.1. Modèle $k-\varepsilon$:

Nous présentons ce modèle, utilisé entre autres par HAH et LAKSHMINARAYANA [81] dans le domaine des turbomachines. Ceux-ci en ont proposé trois versions, toutes trois se basant sur l'utilisation des quantités k et ε . La première version comprend deux équations pour le calcul direct de k et de ε tandis que les deux autres utilisent les équations de transport pour les tensions de Reynolds. Nous avons choisi la forme simple suivante écrite pour un système cylindrique.

Pour l'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} \frac{\partial R \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[R \left(\rho \bar{u}_z k - \frac{M_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\rho \bar{u}_R k - \frac{M_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial R} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \bar{u}_\theta k - \frac{M_t}{\sigma_k} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = \rho R (P - \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour la dissipation turbulente

$$\begin{aligned} \frac{\partial R \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[R \left(\rho \bar{u}_z \varepsilon - \frac{M_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\rho \bar{u}_R \varepsilon - \frac{M_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \bar{u}_\theta \varepsilon - \frac{M_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) = \rho R \left(S - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

où la viscosité turbulente est donnée par l'expression

$$\mu_t = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon} \quad (2.16)$$

le terme de production \mathcal{P} est donné par

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{P} &= \overline{u_z^2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \overline{u_r^2} \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial R} + \frac{\overline{u_\theta^2}}{R} \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \bar{u}_r \right) \\
 &+ \overline{u_z' u_r'} \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial R} \right) + \overline{u_z' u_\theta'} \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \theta} \right) \\
 &+ \overline{u_r' u_\theta'} \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \bar{u}_\theta \right)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour le terme S dans l'équation (2.2), HAH et LAKSHMINARAYANA [81] ont proposé deux formes différentes

$$S_1 = c_1 \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \mathcal{P} \tag{a} \tag{2.18}$$

$$S_2 = c_2 \frac{\varepsilon^2}{k^3} \left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \left(\overline{u_j' u_i'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \tag{b}$$

En utilisant le modèle $k-\varepsilon$, nous supposons que, dans les équations de Navier-Stokes, sous leur forme moyenne statistique, les termes de tensions regroupent aussi bien les tensions visqueuses que les tensions turbulentes. La viscosité totale est égale à la somme de la viscosité laminaire μ_l et la viscosité turbulente μ_t donnée par l'expression (2.16). Le système formé des équations de Navier-Stokes moyennées, de la relation (2.16) sur la viscosité turbulente μ_t et de deux équations (2.14) et (2.15) pour k et ε , est un système fermé qui peut être résolu numériquement.

Ce modèle n'a pas fait l'objet d'essais numériques dans notre méthode, ainsi seul le second modèle sera finalement considéré.

II.2.3.2. Modèle de la viscosité turbulente μ_t :

Nous avons choisi le modèle de CEBECI-SMITH [78,82,83] qui est une extension du modèle de VAN DRIEST ; il s'applique dans des écoulements compressibles ou incompressibles avec des gradients de pression. Il se base sur l'hypothèse classique de Boussinesq qui relie les tensions turbulentes au gradient du champ de vitesse moyenne. Malgré sa simplicité, ce modèle semble donner des résultats globalement satisfaisants dans des cas divers [54,84,85,86].

Nous décrivons ensuite ses principes de base. La couche limite est séparée en deux régions : une région intérieure et une région extérieure dans lesquelles deux expressions différentes pour la viscosité turbulente sont définies.

1. Région intérieure :

CEBECCI et SMITH [78] supposent que, dans la région intérieure, la viscosité turbulente cinématique est donnée par la formule

$$(\nu_t)_i = (k y)^2 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]^2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.19)$$

pour un écoulement bidimensionnel dans un système cartésien. k est une constante $k = 0,4$. A est un paramètre qui, pour le cas général d'un écoulement compressible avec gradient de pression avec transfert de chaleur et de masse, se définit par l'expression suivante :

$$A = 26 \cdot \frac{\nu}{N} \cdot \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} \quad (a) \quad (2.20)$$

$$\text{où } N^2 = \frac{\mu}{\mu_e} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 \cdot \frac{p^+}{u_{y_w}^+} \cdot \left[1 - \exp\left(11.8 \frac{\mu_w}{\mu} u_{y_w}^+\right) \right] + \exp\left(11.8 \frac{\mu_w}{\mu} u_{y_w}^+\right) \quad (b)$$

$$\text{et } p^+ = \frac{\nu_e u_{x_e}}{u_z^3} \cdot \frac{d u_{x_e}}{d x} \quad (c)$$

$$u_z = (\tau_w / \rho_w)^{1/2} \quad (d)$$

$$u_{y_w}^+ = u_{y_w} / u_z \quad (e)$$

Pour les couches limites axisymétriques, CEBECCI et SMITH [78] ont proposé l'expression suivante pour le calcul de la viscosité turbulente :

$$(\nu_t)_i = L^2 \cdot \frac{R}{R_o} \cdot \frac{d \bar{u}_z}{d R} \quad (2.21)$$

$$\text{où } L = k R_0 \ln \frac{R}{R_0} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{R_0}{A} \cdot \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \right] \right\} \quad (2.22)$$

et R_0 le rayon du cylindre.

AGUILAR [54] a utilisé cette formulation mais avec une extension pour prendre en compte la rotation du système et la torsion de la couche limite qui devient tridimensionnelle.

$$(\nu_t)_i = \ell^2 J \quad (2.23)$$

avec $\ell^2 = L^2 \cdot \frac{R}{R_0}$ et L donnée par (2.22).

$$J^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial R} - \frac{\bar{u}_\theta}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial R} \right)^2 \quad (2.24)$$

Pour le calcul du paramètre A , il a utilisé la formule simple

$$A = 26 \cdot \frac{\nu_e}{u_z} = 26 \left(\frac{\nu_e}{J_0} \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

$$\text{où } \tau_w = \mu_e \cdot J(R_0, z) = \mu_e \cdot J_0$$

Pour notre problème, nous employons l'expression d'AGUILAR (2.23) avec les relations (2.24) et (2.25).

2. Région extérieure :

La viscosité turbulente dans cette région est donnée par la relation suivante :

$$(\nu_t)_e = \alpha \bar{u}_e \delta^* \gamma \quad (2.26)$$

où \bar{u}_e est la vitesse moyenne extérieure de l'écoulement

$$\alpha = \begin{cases} 0.168 & \text{si } > 5000 \\ 0.168 \cdot \frac{1.55}{1 + \Gamma} & \text{si } < 5000 \end{cases}$$

et $\Pi = .55 [1 - \exp(-.243 z^{1/2} - .298 z)]$

avec $z = \frac{R_0}{425} - 1.$

Les quantités intégrales de la couche limite pour un écoulement bidimensionnel sur un système cartésien sont données par les expressions suivantes :

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \right) dy \quad \text{-- l'épaisseur de déplacement (a)}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \cdot \left(1 - \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \right) dy \quad \text{l'épaisseur de mouvement (b) (2.27)}$$

$$\gamma = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \quad \text{le facteur d'intermittence (c)}$$

Pour calculer ces quantités, pour une couche limite tridimensionnelle se développant sur un système axisymétrique tournant, AGUILAR a employé les expressions :

$$\delta^* = \left[R_0^2 + 2 \int_{R_0}^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \right) R \, dR \right]^{1/2} - R_0 \quad \text{(a)}$$

(2.28)

$$\theta = \left[R_0^2 + 2 \int_{R_0}^\infty \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \cdot \left(1 - \frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_e} \right) R \, dR \right]^{1/2} - R_0 \quad \text{(b)}$$

Dans notre méthode, nous avons utilisé l'expression (2.26) pour le calcul de $(\nu_t)_e$. Pour le cas d'un écoulement bidimensionnel, nous avons pris comme \bar{u}_e la vitesse extérieure axiale u_{ze} . Pour le cas d'un écoulement tridimensionnel se développant dans le passage interaube, nous avons pris comme \bar{u}_e la vitesse extérieure longitudinale w_{se} . Pour le calcul des quantités intégrales, nous avons employé les formules (2.27), les vitesses longitudinales remplaçant les vitesses axiales pour un écoulement tridimensionnel.

II.2.4. Les équations pour le calcul du plan transversal :

II.2.4.1. L'équation de la vorticité secondaire :

L'équation qui régit le développement de la vorticité secondaire peut être dérivée directement de l'équation vectorielle de la vorticité dans un système de coordonnées intrinsèques [25]. Elle nous permet de calculer la variation de la composante longitudinale moyenne de la vorticité $\widehat{\Omega}_s$, qui est responsable du profil de vitesse moyenne \widehat{W}_N . Son intérêt, pour l'utilisation de cette équation, est de faire intervenir faiblement la pression statique.

L'équation de la vorticité est obtenue en appliquant l'opérateur rotationnel ($\nabla \wedge$) à l'équation vectorielle de quantité de mouvement dans un repère relatif pour un écoulement stationnaire.

$$\begin{aligned}
 (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{\Omega} &= (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{W} - \vec{\Omega} (\nabla \cdot \vec{W}) \\
 &- \nabla \wedge (\nabla p / \rho) - \nabla \wedge (2 \vec{\omega} \wedge \vec{W}) + \nabla \wedge \vec{f}
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

où $\vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{W}$ le vecteur de vorticité relative.

Pour dériver l'expression de la vorticité secondaire, nous allons utiliser un système de coordonnées intrinsèques (s, ν, b) lié à la ligne de courant de l'écoulement sain. Le vecteur \vec{s} est tangent à la ligne de courant, le vecteur $\vec{\nu}$ se trouve dans un plan normal à cette ligne et le vecteur \vec{b} crée avec les deux autres un trièdre direct (système de Fresnet). L'équation pour la composante longitudinale de la vorticité Ω_s est le résultat de la projection de l'équation pour la vorticité sur la direction \vec{s} . Elle est développée par LAKSHMINARAYANA et HORLOCK [25].

$$\begin{aligned}
 d_s \left(\frac{\Omega_s}{\rho W_s} \right) &= \underbrace{2 \cdot \frac{\Omega_\nu}{\rho W_s} \cdot d\nu}_{(1)} \\
 &- \underbrace{\frac{1}{\rho^3 W_s} \left(\frac{\partial p}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b} \cdot \frac{\partial p}{\partial \nu} \right) ds}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial f_b}{\partial \nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial b} \right) ds}_{(3)} \\
 &+ \underbrace{\frac{2 \omega_s}{\rho^2 W_s} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} ds}_{(4)} + \underbrace{2 \frac{\vec{\omega} \cdot \nabla W_s}{\rho W_s^2} ds}_{(5)}
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Le membre de gauche représente l'évolution de la vorticité secondaire. Les termes du membre de droite représentent les différentes productions de la vorticité Ω_s . Le terme (1) de l'équation (2.30) exprime le transfert d'une partie de la composante transversale Ω_v dans la direction longitudinale à cause de la déflexion $d\gamma$ de la ligne de courant dans le plan (\vec{v}, \vec{s}) . Les termes (2) et (4) expriment les effets de la compressibilité de l'écoulement. Le terme (3) caractérise les contraintes visqueuses et turbulentes. Une formulation a été récemment proposée par POUAGARE et LAKSHMINARAYANA [28] pour la prise en compte des effets des tensions turbulentes pour le calcul de la vorticité secondaire. Le terme (5) caractérise les forces de Coriolis à cause de la rotation de la machine et son effet peut être important [21].

Nous allons exprimer l'équation (2.30) pour Ω_s dans un repère intrinsèque (S,N,B) suivant en cela COMTE [37] et VOUILLARMET [39], (figure 1). La déflexion $d\gamma$ de la ligne de courant est constituée par une déflexion $d\phi$ dans le plan méridien et par une déflexion $d\beta$ sur la surface aube à aube. La composante Ω_v aussi peut être séparée en deux autres composantes Ω_B et Ω_N . Mais comme nous traitons un écoulement moyenné circonferentiellement, nous prenons en compte seulement la composante Ω_N , résultat de la couche visqueuse pariétale [39].

Après les calculs, la forme suivante pour Ω_s est obtenue

$$d_s \left(\frac{\Omega_s}{\rho W_s} \right) = \frac{2 \Omega_N}{\rho W_s} d\beta + \frac{2\omega}{\rho W_s^2} \left[\cos\phi \left(\cos\beta_e \frac{\partial W_s}{\partial S} - \sin\beta_e \frac{\partial W_s}{\partial N} \right) + \sin\phi \frac{\partial W_s}{\partial B} \right] ds + \left(\frac{\partial f_N}{\partial B} - \frac{\partial f_B}{\partial N} \right) ds \quad (2.31)$$

Cette équation sera considérée en l'appliquant aux quantités moyennes de l'écoulement. Son caractère est parabolique, mais il devient hyperbolique si les termes de dissipation sont négligés.

LEBOEUF [40] a proposé une équation pour la composante longitudinale de la vorticité différente de celle de LAKSHMINARAYANA et HORLOCK [25]. Il a projet  l'équation vectorielle de la vorticité dans un repère curviligne (S,N,B) associé à l'écoulement sain et il a ensuite appliqué une moyenne selon la direction circonferentielle θ . Les termes d'aubages, les termes

des fluctuations selon θ et le terme de pression ont été négligés. L'équation pour la vorticité secondaire obtenue, écrite pour un système curviligne (m, B, θ) lié à la machine tournante à la vitesse $\vec{\omega}$, est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho \widehat{W}_m}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{b}{\rho} \cdot \widehat{\Omega}_{SR} \right) + \frac{\rho \widehat{W}_b}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{b}{\rho} \cdot \widehat{\Omega}_{SR} \right) \\
 & - \left(\frac{\cos \beta_e}{b} \cdot \frac{\partial b W_s}{\partial m} + K_{SB} \widehat{W}_B + K_{SN} \widehat{W}_N \right) (\widehat{\Omega}_{SR} + 2\omega_s) + \\
 & \left(\widehat{W}_S K_{SB} - \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial b \widehat{W}_S}{\partial B} \right) (\widehat{\Omega}_{BR} + 2\omega_B) + \left(\widehat{W}_S K_{SN} + \frac{\sin \beta_e}{b} \cdot \frac{\partial b \widehat{W}_S}{\partial m} \right) (\widehat{\Omega}_{NR} + 2\omega_N) \\
 & \hspace{20em} (2.32) \\
 & = 2\omega_s \left(\frac{\widehat{W}_B}{b\rho} \cdot \frac{\partial b\rho}{\partial B} - \frac{\widehat{W}_N}{b\rho} \cdot \sin \beta_e \cdot \frac{\partial b\rho}{\partial m} \right) \\
 & + 2\omega_B (\widehat{W}_S K_{SB} - \widehat{W}_B K_{BS}) + 2\omega_N (\widehat{W}_S K_{SN} - \widehat{W}_N K_{NS}) \\
 & + \left[\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \wedge \nabla P \right] \cdot \vec{l}_s + \left(\frac{M}{\rho} \nabla^2 \widehat{\Omega}_R \right) \cdot \vec{l}_s
 \end{aligned}$$

Une équation analogue a été écrite pour la composante transversale $\widehat{\Omega}_{NR}$ de la vorticité.

Si nous assimilons le repère de Fresnet utilisé par LAKSHMINARAYANA et HORLOCK au repère lié à l'écoulement sain, une comparaison entre les deux formes (2.31) et (2.32) proposées pour la vorticité secondaire peut être effectuée. On voit que, dans l'équation proposée par LEBOEUF, la production de $\widehat{\Omega}_{SR}$ est associée d'une part à la déflexion de l'écoulement sain $d\beta_e/ds$, d'autre part à la variation de $R\widehat{V}_\theta$ selon la direction m tandis que, dans la formulation de LAKSHMINARAYANA et HORLOCK, la production $\widehat{\Omega}_{SR}$ est associée seulement à la déflexion $2d\beta_e/ds$. La formulation de LEBOEUF peut trouver son intérêt en particulier dans le cas de veines centrifuges, et dans le cas de veines libres d'aubages en général.

II.2.4.2. Détermination du champ de vitesse induit :

Dans ce paragraphe, nous allons exposer la procédure théorique pour le calcul du champ de vitesse moyen transversal. Cette procédure a été utilisée dans la version améliorée de la méthode intégrale développée à l'Ecole Centrale de Lyon [34-40] et elle a été incorporée sans modification dans la méthode différentielle que nous développons.

La composante longitudinale moyenne de la vorticité induit un champ de vitesse secondaire sur une surface normale aux lignes de courant. Bien que la géométrie de cette surface soit assez compliquée, nous l'assimilons à un plan afin de ramener notre problème à un problème bidimensionnel.

Dans le cas général de l'étude d'un écoulement tridimensionnel où nous traitons plusieurs lignes de courant de l'écoulement sain selon la direction circonferentielle Θ , nous divisons chacune des composantes de vitesse dans le plan transversal (B,N) en deux parties. Une partie potentielle W_ϕ et une partie rotationnelle W_Ω comme suit.

$$W_N = W_{N\phi} + W_{N\Omega} \quad (a)$$

$$W_B = W_{B\phi} + W_{B\Omega} \quad (b) \quad (2.33)$$

Par hypothèse, le champ de vitesse transversal peut alors être considéré comme le résultat d'une superposition d'une rotation et d'un gradient d'un potentiel.

$$\vec{W}_{sec} = \vec{W}_N + \vec{W}_B = \nabla \wedge (\psi_s \vec{l}_s) + \nabla \phi_s = \vec{W}_\Omega + \vec{W}_\phi \quad (2.34)$$

La composante longitudinale de la vorticité s'exprimant par la relation

$$\Omega_s = \frac{1}{h_B h_N} \left[\frac{\partial (h_N W_N)}{\partial u_B} - \frac{\partial (h_B W_B)}{\partial u_N} \right] \quad (2.35)$$

les deux composantes de la vitesse dans le plan transversal sont alors données par les expressions suivantes :

$$W_N = \frac{1}{h_N} \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial u_N} - \frac{1}{h_s h_B} \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_B} \quad (a)$$

(2.36)

$$W_B = \frac{1}{h_B} \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial u_B} + \frac{1}{h_s h_N} \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_N} \quad (b)$$

En reportant ces relations dans l'expression (2.35) de la composante longitudinale de la vorticité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_N h_B} \cdot \frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{h_N}{h_s h_B} \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_B} \right) \\ & + \frac{1}{h_N h_B} \cdot \frac{\partial}{\partial u_N} \left(\frac{h_B}{h_s h_N} \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_N} \right) = -\Omega_s \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si les expressions (2.36) sont introduites dans l'équation de la continuité locale, l'équation suivante est obtenue

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_s} \left(h_B h_N \rho W_s \right) + \frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{h_s h_N}{h_B} \cdot \rho \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial u_B} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial u_N} \left(\frac{h_s h_B}{h_N} \cdot \rho \cdot \frac{\partial \phi_s}{\partial u_N} \right) = \frac{\partial}{\partial u_N} \left(\rho \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_B} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial u_B} \left(\rho \cdot \frac{\partial h_s \psi_s}{\partial u_N} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les deux derniers termes de (2.38) se compensent en général, sauf pour des cas fortement compressibles.

L'équation (2.37) permet de calculer la fonction de courant Ψ_s après avoir calculé Ω_s par (2.31) ou (2.32). Cette équation est de type Poisson et elle est résolue dans un domaine défini par l'intersection de la surface $s = \text{constant}$ avec le moyeu, le couvercle et le contour de deux aubes voisines. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur Ψ_s . L'équation (2.38) sert à déterminer le potentiel Φ_s . En connaissant les fonctions Ψ_s et Φ_s , nous pouvons calculer les composantes transversales W_N et W_B par les expressions (2.36).

ANDERSON [46] et BRILEY et Mac DONALD [47] donnent, pour le calcul du potentiel Φ_s , une équation analogue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_N} \left(\frac{h_s h_B}{h_N} \cdot \frac{\partial \Phi_s}{\partial u_N} \right) + \frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{h_s h_N}{h_B} \cdot \frac{\partial \Phi_s}{\partial u_B} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial u_N} \left(h_s h_B W_{N\Phi} \right) - \frac{\partial}{\partial u_B} \left(h_s h_N W_{B\Phi} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans notre cas, nous traitons un écoulement moyenné selon la direction circonférentielle. Nous assimilons cette moyenne à celle obtenue dans la direction transversale N bien que cette hypothèse ne soit pas rigoureusement vérifiée. Nous pouvons alors supposer que le tourbillon du passage $\Omega_{s\phi}$ est centré au milieu du passage entre deux aubes voisines. Par conséquent, pour un maillage sur une surface plane, la partie rotationnelle moyenne $\widehat{W}_{B\Omega} = \widehat{W}_B(\Psi_s)$ de la composante normale W_B sera nulle [65]. L'effet tourbillonnaire dû à Ψ_s s'exprime alors seulement par la composante transversale moyenne $\widehat{W}_{N\Omega}$. Si nous supposons aussi que la couche visqueuse selon \vec{s} a une évolution identique pour toutes les positions azimutales, alors la partie potentielle moyenne $\widehat{W}_{N\Phi} = \widehat{W}_N(\Phi_s)$ de la composante transversale W_N sera aussi nulle. Dans ce cas, l'effet du blocage est associé seulement à la composante normale visqueuse à laquelle est lié l'épaississement de la couche limite. Pour une méthode différentielle dans le plan longitudinal, cette composante peut être déterminée par l'utilisation d'une équation locale de continuité (2.38) ou (2.1.a); elle traduit ainsi l'effet du blocage introduit par le déficit de masse dans la direction \vec{s} . Nous avons alors pour le cas d'un écoulement moyenné dans la direction azimutale

$$\widehat{W}_{B\Omega} = 0 \quad , \quad \widehat{W}_{N\Phi} = 0 \quad (2.39)$$

Dans le cas général d'un écoulement non moyenné selon θ , le tourbillon sera déplacé vers le coin et la partie tourbillonnaire normale $W_{B,\Omega}$ ne sera pas nulle. La partie potentielle transversale $W_{N,\phi}$ ne sera pas nulle également et dans ce cas l'effet du blocage est associé à l'action combinée de deux parties potentielles $W_{B,\phi}$ et $W_{N,\phi}$ [65].

II.3. TRAITEMENT MATHÉMATIQUE DES ÉQUATIONS DE BASE

Nous allons exposer, dans cette partie, le traitement mathématique de nos équations, afin de les transformer sous une forme adaptée à l'étude des écoulements secondaires dans une turbomachine. Le traitement qui suit est assez lourd et conduit à des équations compliquées. Il est cependant nécessaire car il présente beaucoup d'avantages pour la résolution numérique des équations ainsi obtenues. Il permet ainsi :

- 1) une discrétisation simple des équations ;
- 2) une meilleure approche de la fermeture ;
- 3) un traitement du champ de vitesse moyenné dans la direction azimutale.

En plus, il conduit à un algorithme performant numériquement car il permet de maintenir l'aspect conservatif des équations.

II.3.1. Transformation des équations dans un nouveau système de coordonnées :

Nous allons transformer l'espace physique occupé par l'écoulement en domaine de calcul dans lequel une solution par différences finies sera recherchée à l'aide des équations différentielles développées au paragraphe II.2.1.

Les équations transformées ont une forme plus compliquée que celle des équations initiales mais elles présentent beaucoup d'avantages. L'avantage principal est que, aux limites du domaine, des surfaces complexes dans le domaine physique peuvent être représentées par des surfaces rectangulaires dans le domaine transformé. Un autre aspect important de cette transformation est que les points du maillage peuvent se concentrer dans des régions où les gradients des quantités de l'écoulement changent rapidement.

HINDMAN [87] a montré que la forme sous laquelle les équations transformées sont écrites est très importante et peut influencer le développement d'un algorithme consistant ainsi que le nombre des opérations numériques pour l'application de l'algorithme. Ces formes sont :

- 1) la forme non conservative (F.N.C.) qui peut être représentée par une équation générale de type

$$A(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + B(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + C(U) = 0$$

- 2) les formes conservatives qui peuvent être représentées par une équation de type

$$a \cdot \frac{\partial A(U)}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial B(U)}{\partial y} + C(U) = 0$$

Pour ces dernières, différentes formes sont possibles. La forme fortement conservative (F.F.R.C.), la forme faiblement conservative (F.F.L.C.) et la forme conservative par permutation cyclique (F.C.P.C.). HINDMAN [87] a décrit l'erreur induite géométriquement à cause de la difficulté de l'algorithme dans le domaine transformé à satisfaire certaines conditions de consistance et il a prouvé que la forme F.C.P.C. demande moins d'opérations pour la résolution numérique que les trois autres.

VIVIAND [88] a montré que la forme conservative d'un système d'équations peut être préservée après une transformation de coordonnées arbitraire et non singulière et dépendante du temps. Il applique cette transformation à des équations pour le calcul des écoulements transsoniques, instationnaires autour des objets en mouvement non uniforme ou se déformant. Dans un tel cas, il est avantageux de se ramener à un domaine de calcul à frontières fixes par une transformation des coordonnées dépendant du temps.

Cette transformation du domaine physique en un domaine de calcul a été utilisée par plusieurs chercheurs, comme THOMAS et LOMBARD [69], LAPIDUS [89], VINOKUR [90], pour la résolution des équations de Navier-Stokes sur des maillages en mouvement, STEGER [75,91,92] pour le calcul des écoulements subsoniques ou supersoniques, avec ou sans onde de choc, KUTLER et alii [86] pour un écoulement supersonique, HOLST [93,94] pour des écoulements transsoniques.

Nous allons utiliser cette procédure et transformer le système cylindrique (z, R, θ) en un nouveau système (ξ, η, ζ) quelconque qui nous permettra d'utiliser des schémas numériques plus simples et de mieux ajuster nos hypothèses à la physique des phénomènes. L'équation (2.5) devient, après cette transformation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial R \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial R \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \zeta} + j \bar{M} \\ = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial R \bar{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial R \bar{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

où $\bar{W} = \tilde{W} / \gamma$, $\bar{M} = \left(\tilde{H} - R \tilde{D} - \frac{\tilde{H}_v}{Re} \right) / \gamma$

$$\bar{F} = (\xi_t \tilde{W} + \xi_z \tilde{F} + \xi_R \tilde{G} + \xi_\theta \tilde{E}) / \gamma$$

$$\bar{G} = (\eta_t \tilde{W} + \eta_z \tilde{F} + \eta_R \tilde{G} + \eta_\theta \tilde{E}) / \gamma$$

$$\bar{E} = (\zeta_t \tilde{W} + \zeta_z \tilde{F} + \zeta_R \tilde{G} + \zeta_\theta \tilde{E}) / \gamma$$

(2.41)

$$\bar{F}_v = (\xi_z \tilde{F}_v + \xi_R \tilde{G}_v + \xi_\theta \tilde{E}_v) / \gamma$$

$$\bar{G}_v = (\eta_z \tilde{F}_v + \eta_R \tilde{G}_v + \eta_\theta \tilde{E}_v) / \gamma$$

$$\bar{E}_v = (\zeta_z \tilde{F}_v + \zeta_R \tilde{G}_v + \zeta_\theta \tilde{E}_v) / \gamma$$

qui donne plus précisément

$\bar{W} = \frac{1}{j}$	P	$\bar{F} = \frac{1}{j}$	ρU	$\bar{G} = \frac{1}{j}$	ρV
	ρu_z		$\rho u_z U + \xi_z P$		$\rho u_z V + \eta_z P$
	ρu_R		$\rho u_R U + \xi_R P$		$\rho u_R V + \eta_R P$
	ρu_θ		$\rho u_\theta U + \xi_\theta P$		$\rho u_\theta V + \eta_\theta P$
	ρE		$(\rho E + p) U - \xi_t P$		$(\rho E + p) V - \eta_t P$

$\bar{E} = \frac{1}{j}$	ρW	$\bar{F}_V = \frac{1}{j}$	0	(2.42)
	$\rho u_z W + \xi_z P$		$\xi_z \tau_{zz} + \xi_R \tau_{zR} + \xi_\theta \tau_{z\theta}$	
	$\rho u_R W + \xi_R P$		$\xi_z \tau_{Rz} + \xi_R \tau_{RR} + \xi_\theta \tau_{R\theta}$	
	$\rho u_\theta W + \xi_\theta P$		$\xi_z \tau_{\theta z} + \xi_R \tau_{\theta R} + \xi_\theta \tau_{\theta\theta}$	
	$(\rho E + p) W - \xi_t P$		$\xi_z \beta_z + \xi_R \beta_R + \xi_\theta \beta_\theta$	

$\bar{G}_V = \frac{1}{j}$	0	$\bar{E}_V = \frac{1}{j}$	0
	$\eta_z \tau_{zz} + \eta_R \tau_{zR} + \eta_\theta \tau_{z\theta}$		$\xi_z \tau_{zz} + \xi_R \tau_{zR} + \xi_\theta \tau_{z\theta}$
	$\eta_z \tau_{Rz} + \eta_R \tau_{RR} + \eta_\theta \tau_{R\theta}$		$\xi_z \tau_{Rz} + \xi_R \tau_{RR} + \xi_\theta \tau_{R\theta}$
	$\eta_z \tau_{\theta z} + \eta_R \tau_{\theta R} + \eta_\theta \tau_{\theta\theta}$		$\xi_z \tau_{\theta z} + \xi_R \tau_{\theta R} + \xi_\theta \tau_{\theta\theta}$
	$\eta_z \beta_z + \eta_R \beta_R + \eta_\theta \beta_\theta$		$\xi_z \beta_z + \xi_R \beta_R + \xi_\theta \beta_\theta$

$\bar{M} = \frac{1}{j}$	0
	0
	$-\rho u_\theta^2 - p - 2\rho\omega R u_\theta - \rho\omega^2 R^2 + \tau_{\theta\theta}/Re$
	$\rho u_R u_\theta + 2\rho\omega R u_R - \tau_{R\theta}/Re$
	$-\rho\omega^2 R^2 u_R$

Dans ces relations, U, V, W sont les vitesses contravariantes du système (ξ, η, ζ) et sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_\zeta u_\zeta + \xi_R u_R + \xi_\theta u_\theta \\ V &= \eta_t + \eta_\zeta u_\zeta + \eta_R u_R + \eta_\theta u_\theta \\ W &= \zeta_t + \zeta_\zeta u_\zeta + \zeta_R u_R + \zeta_\theta u_\theta \end{aligned} \quad (2.43)$$

Les métriques de la transformation sont calculées par un développement en permutation cyclique des termes $\zeta_\xi, R_\xi, \theta_\xi \dots$ et déterminées à partir de $\xi_\zeta, \xi_R, \xi_\theta \dots$. Finalement, on obtient la forme générale suivante pour les métriques

$$\begin{aligned} \xi_\zeta &= J \cdot (R_\eta \theta_\zeta - R_\zeta \theta_\eta) & \eta_\zeta &= J \cdot (\theta_\xi R_\zeta - R_\xi \theta_\zeta) \\ \xi_R &= J \cdot (\theta_\eta \zeta_\zeta - \zeta_\eta \theta_\zeta) & \eta_R &= J \cdot (\zeta_\xi \theta_\zeta - \zeta_\zeta \theta_\xi) \\ \xi_\theta &= J \cdot (\zeta_\eta R_\zeta - R_\eta \zeta_\zeta) & \eta_\theta &= J \cdot (R_\xi \zeta_\zeta - \zeta_\xi R_\zeta) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \zeta_\zeta &= J \cdot (R_\xi \theta_\eta - \theta_\xi R_\eta) & \xi_t &= -\zeta_t \xi_\zeta - R_t \xi_R - \theta_t \xi_\theta \\ \zeta_R &= J \cdot (\zeta_\eta \theta_\xi - \zeta_\xi \theta_\eta) & \eta_t &= -\zeta_t \eta_\zeta - R_t \eta_R - \theta_t \eta_\theta \\ \zeta_\theta &= J \cdot (\zeta_\xi R_\eta - R_\xi \zeta_\eta) & \zeta_t &= -\zeta_t \zeta_\zeta - R_t \zeta_R - \theta_t \zeta_\theta \end{aligned}$$

et J est le Jacobien de la transformation avec

$$J^{-1} = \frac{D(\zeta, R, \theta)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \zeta_\xi & \zeta_\eta & \zeta_\zeta \\ R_\xi & R_\eta & R_\zeta \\ \theta_\xi & \theta_\eta & \theta_\zeta \end{vmatrix} \quad (2.44.a)$$

En général, ces métriques ne sont pas connues analytiquement et seront calculées numériquement pour chaque point du maillage.

Les termes visqueux contiennent des dérivées qui doivent être exprimées dans le nouveau système. La transformation de ces dérivées de l'ancien système au nouveau s'effectue par une permutation cyclique (voir Annexe 1) et les tensions visqueuses peuvent alors être exprimées dans le nouveau repère.

II.3.2. Intégration des équations dans la direction azimutale :

Nous allons maintenant effectuer une moyenne massique selon la direction circonférentielle θ , que nous assimilerons à la direction ζ , ce qui nous permettra de restreindre notre traitement à un écoulement moyen. Nous définissons une moyenne massique comme suit

$$\hat{\rho} \hat{A} = \frac{1}{\theta_s - \theta_p} \int_p^s \rho A d\theta = \frac{1}{2\pi b/N_s} \int_p^s \rho A d\theta$$

Cette procédure est similaire à la moyenne massique temporelle utilisée pour le calcul de la turbulence par FAVRE [79] et par CEBECCI et SMITH [78]. Ces derniers ont exposé ses avantages par rapport à une moyenne statistique ordinaire. Dans notre cas, l'emploi d'une moyenne massique par rapport à une moyenne géométrique comme celle utilisée par VOUILLARMET [39], se justifie car la masse volumique ρ intervient dans tous les termes des équations, hors les tensions visqueuses, du fait de l'emploi particulier d'une forme conservative.

Après avoir décomposé chaque grandeur A en une valeur moyenne \hat{A} et une valeur fluctuante A^*

$$A(\xi, \eta, \theta) = \hat{A}(\xi, \eta) + A^*(\xi, \eta, \theta)$$

nous effectuons l'intégration azimutale, puis nous identifions la direction ζ avec la direction θ , ce qui permet de simplifier la formulation finale. L'équation moyennée obtenue ainsi à partir de l'équation (2.40) est la suivante :

$$\frac{\partial b R \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial b R \bar{F}}{\partial \zeta} + \frac{\partial b R \bar{G}}{\partial \eta} + j b \bar{M} = \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{\partial b R \bar{F}_v}{\partial \zeta} + \frac{\partial b R \bar{G}_v}{\partial \eta} \right) + D_1 + D_2$$

Dans l'équation ci-dessus, par souci de simplification, nous avons supprimé les indices (\sim) mais toutes les grandeurs qui apparaissent sont des moyennes spatiales. Les détails de l'intégration sont donnés Annexe 1.

On peut constater que, dans l'équation (2.45), des termes nouveaux D_1 et D_2 apparaissent par rapport à l'équation initiale (2.40). Le terme D_1 exprime la force exercée par l'aubage sur l'écoulement; elle est le résultat de la contribution simultanée de la pression et des tensions de cisaillement sur l'aubage.

Dans le cas d'une zone non aubée, la périodicité impose $D_1 = 0$. Dans une zone aubée, s'il n'y a pas d'injection de fluide dans l'écoulement par les parois des aubages ($U = V = W = 0$), ce terme a la forme suivante :

$$D_1 = D_{1p} + D_{1\tau} = \frac{N_a}{2\pi} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left\{ p_s \begin{vmatrix} 0 \\ R p \theta_\zeta \\ R p \theta_R \\ -p \\ -R p \theta_t \end{vmatrix}_s - p_p \begin{vmatrix} 0 \\ R p \theta_\zeta \\ R p \theta_R \\ -p \\ -R p \theta_t \end{vmatrix}_p \right\} \quad (2.46)$$

$$- \frac{N_a}{2\pi} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \left\{ p_s \begin{vmatrix} 0 \\ R \theta_\zeta \tau_{\zeta\zeta} + R \theta_R \tau_{\zeta R} - \tau_{\zeta\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{R\zeta} + R \theta_R \tau_{RR} - \tau_{R\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{\theta\zeta} + R \theta_R \tau_{\theta R} - \tau_{\theta\theta} \\ R \theta_\zeta \beta_\zeta + R \theta_R \beta_R - \beta_\theta \end{vmatrix}_s - p_p \begin{vmatrix} 0 \\ R \theta_\zeta \tau_{\zeta\zeta} + R \theta_R \tau_{\zeta R} - \tau_{\zeta\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{R\zeta} + R \theta_R \tau_{RR} - \tau_{R\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{\theta\zeta} + R \theta_R \tau_{\theta R} - \tau_{\theta\theta} \\ R \theta_\zeta \beta_\zeta + R \theta_R \beta_R - \beta_\theta \end{vmatrix}_p \right\}$$

La force due à la pression exercée par une face de l'aube sur le fluide environnant est alors

$$\frac{N_k}{2\pi} \cdot P_j \cdot \left(R \frac{\partial \theta_j}{\partial z}, R \frac{\partial \theta_j}{\partial R}, -1 \right)$$

où $j = p$ côté intrados de l'aubage,
 $j = s$ côté extrados de l'aubage.

Cette force est donc normale à la surface de l'aube. Si nous utilisons l'hypothèse des aubes minces, nous pouvons approcher la force totale résultante des forces de pression sur chaque côté par la formule suivante

$$D_{1p} = \frac{N_k}{2\pi} \cdot (P_s - P_p) \cdot \left(R \frac{\partial \theta_m}{\partial z}, R \frac{\partial \theta_m}{\partial R}, -1 \right)$$

qui est normale à la surface moyenne θ_m de l'aube. Au contraire, la force due aux tensions de cisaillement $D_{1\tau}$ n'est pas perpendiculaire à la face de l'aube ainsi que la force totale D_1 .

Le terme D_2 contient les fluctuations spatiales du type $\widehat{u_i^* u_j^*}$, résultat de la distorsion azimutale de l'écoulement due à la présence des aubes. Ce terme a la forme suivante :

$$D_2 = \begin{vmatrix} D_{21} \\ D_{22} \\ D_{23} \\ D_{24} \\ D_{25} \end{vmatrix}$$

où $D_{21} = 0$

$$D_{22} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \cdot \left(\widehat{\bar{p} u_z^* U^*} + \widehat{\bar{p} \frac{L}{\rho^*} \xi_\xi} \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \cdot \left(\widehat{\bar{p} u_z^* V^*} + \widehat{\bar{p} \frac{L}{\rho^*} \eta_\xi} \right) \right]$$

$$D_{23} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \left(\hat{p} \widehat{u_R^* U^*} + \hat{p} \widehat{p^* \frac{L}{\rho^*} \xi_R} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \left(\hat{p} \widehat{u_R^* V^*} + \hat{p} \widehat{p^* \frac{L}{\rho^*} \eta_R} \right) \right]$$

$$+ b \left(-\hat{p} \widehat{u_\theta^* u_\theta^*} - \hat{p} \widehat{p^* \frac{L}{\rho^*}} + \frac{L}{Re} \hat{p} \widehat{\tau_{\theta\theta}^* \frac{1}{\rho^*}} \right)$$

$$D_{24} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \left(\hat{p} \widehat{u_\theta^* U^*} + \hat{p} \widehat{p^* \frac{L}{\rho^*} \xi_\theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \left(\hat{p} \widehat{u_\theta^* V^*} + \hat{p} \widehat{p^* \frac{L}{\rho^*} \eta_\theta} \right) \right]$$

$$+ b \left(\hat{p} \widehat{u_R^* u_\theta^*} - \frac{L}{Re} \hat{p} \widehat{\tau_{R\theta}^* \frac{1}{\rho^*}} \right) \quad (2.47)$$

$$D_{25} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \left(\hat{p} \widehat{E^* U^*} + \hat{p} \widehat{U} \widehat{p^* \frac{1}{\rho^*}} + \hat{p} \widehat{p} \widehat{U^* \frac{1}{\rho^*}} + \widehat{p^* U^*} + \hat{p} \widehat{p^* U^* \frac{1}{\rho^*}} \right) \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \left(\hat{p} \widehat{E^* V^*} + \hat{p} \widehat{V} \widehat{p^* \frac{1}{\rho^*}} + \hat{p} \widehat{p} \widehat{V^* \frac{1}{\rho^*}} + \widehat{p^* V^*} + \hat{p} \widehat{p^* V^* \frac{1}{\rho^*}} \right) \right]$$

On peut remarquer que ce terme D_2 contient des termes dont la forme rappelle celle des tensions turbulentes. Sa structure permet en outre de le distribuer dans les termes \overline{F}_v , \overline{G}_v et \overline{M} [95]. Dans ce qui suit, nous allons ignorer la contribution de ce terme de fluctuations. Nous pouvons cependant remarquer que sa contribution peut devenir significative dans quelques cas particuliers. Tout d'abord dans certaines grilles de turbine, comportant une forte déflexion, pour lesquelles le champ de vitesse secondaire emporte une partie significative de la quantité de mouvement; en outre, dans le cas où des interactions visqueuses ou turbulentes tridimensionnelles deviennent importantes [96]. Mais dans ce cas les effets locaux doivent être pris en compte et il est probable qu'un modèle tridimensionnel, même parabolisé, soit préférable à un modèle moyenné.

En ce qui concerne la fraction du terme de force d'aubage D_{1z} qui contient les tensions, il est possible de la relier à des informations globales issues de calcul des couches visqueuses sur l'aubage. Ainsi, en première approximation, nous allons utiliser l'hypothèse d'HORLOCK [97] qui suppose

$$D_{1z} = k \vec{W} \quad (2.48)$$

où \vec{W} le vecteur de la vitesse relative moyennée selon θ et k un coefficient relié au changement de l'entropie moyennée en θ , associé aux couches visqueuses des aubages.

$$k = - \frac{T_s}{W^2} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (2.49)$$

$$\text{et } \frac{ds}{dt} = \vec{W} \cdot \nabla s = u_z \frac{ds}{dz} + u_r \frac{ds}{dr} + u_\theta \frac{ds}{r d\theta} \quad (2.49.a)$$

et le changement de l'entropie de la station 1 à la station 2 est donnée par l'expression

$$\Delta S_1^2 = S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_{OR2}}{T_{OR1}} - \gamma \ln \frac{P_{OR2}}{P_{OR1}} \quad (2.49.b)$$

II.3.3. Approximation parabolique de l'écoulement moyen :

La nature de l'écoulement que nous allons étudier satisfait les conditions déjà décrites dans l'introduction pour l'utilisation d'une approximation parabolique. Nous allons alors négliger les termes diffusifs dans la direction ξ , que nous considérons faibles par rapport aux termes diffusifs dans la direction η . Les dérivées de deuxième ordre selon ξ ainsi que les dérivées mixtes seront éliminées. Nous n'avons pas, cependant, suivi la théorie d'une couche limite classique puisque nous conservons la deuxième équation de mouvement dans la direction normale et l'hypothèse d'une pression constante dans la couche limite n'est pas a priori utilisée.

L'hypothèse d'un écoulement parabolique selon ξ donne un rôle prépondérant à cette direction qui devient privilégiée par rapport aux directions η et ζ . Le choix correct de cette direction est donc essentiel si nous voulons reproduire correctement les effets visqueux de l'écoulement. La direction longitudinale S associée à l'écoulement sain local pourrait être définie comme telle.

Après l'élimination des termes diffusifs selon ξ l'équation (2.45) prend la forme suivante

$$\frac{\partial bR\bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial bR\bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial bR\bar{G}}{\partial \eta} + j b\bar{M} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bR\bar{G}_v}{\partial \eta} + D_1 \quad (2.50)$$

II.3.4. Nouvelles expressions des composantes de l'équation de quantité de mouvement :

II.3.4.1. Traitement du terme de pression D_{1p} :

L'équation (2.50) contient le terme D_1 qui dépend d'une part de la force de pression exercée par l'aubage sur le fluide D_{1p} , d'autre part de la force due aux tensions de cisaillement sur l'aubage $D_{1\tau}$. Nous allons rechercher une formulation qui soit exempte du terme D_{1p} .

Dans leur méthode intégrale, COMTE [37] et VOUILLARMET [38] ont aussi cherché une équation ne contenant pas un terme de déficit de force qui traduit la variation de la force d'aubage à l'intérieur de la couche visqueuse. Dans ce but, ils ont utilisé une relation validée par l'expérience [34] qui relie la composante axiale de ce déficit de force à la composante circonférentielle par l'intermédiaire de l'angle de la cambrure moyenne de l'aube. Cette relation, que nous présentons plus bas, leur a permis, en combinant deux composantes de l'équation de mouvement sous une forme intégrale, d'éliminer le terme du déficit de force. Une démarche analogue a été suivie par MELLOR et WOOD [13] et par HORLOCK [31].

Nous allons aboutir à un résultat analogue en suivant une procédure mathématique qui ne fait appel à aucune hypothèse. Nous projetons les trois composantes de l'équation de mouvement selon un vecteur \vec{N} (N_z, N_R, N_θ) qui est tangent à la surface moyenne de l'aube. Puisque le vecteur de la force de la pression D_{1p} est normale à cette surface, le produit scalaire de celui-ci et du vecteur \vec{N} sera nul et par conséquent

$$(p_s - p_p) \cdot (R \theta_z N_z + R \theta_R N_R - N_\theta) = 0 \quad (2.51)$$

L'équation de mouvement alors projetée selon \vec{N} ne comporte plus le terme de force d'aubage qui dépend de la pression. Ceci est la généralisation au cas des aubages vrillés de l'expression utilisée par VOUILLARMET pour le déficit de force

$$\Delta D_{1m} = - \operatorname{tg} \beta' \cdot \Delta D_{1e}$$

qui à notre terminologie pourrait s'exprimer comme suit

$$(p_s - p_p) (R \theta_z N_z - N_\theta) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{N_\theta}{N_z} = \operatorname{tg} \beta'$$

Après la projection selon \vec{N} , l'équation obtenue est la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{b R \rho u_z}{j} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{b R}{j} (\rho u_N U + p \xi_N) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{b R}{j} (\rho u_N V + p \eta_N) \right] \\ + j b M_N = \frac{L}{R e} \left[b R (\bar{G}_{v_2} N_z + \bar{G}_{v_3} N_R + \bar{G}_{v_4} N_\theta) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\text{où} \quad b M_N = b (\bar{M}_2 N_z + \bar{M}_3 N_R + \bar{M}_4 N_\theta)$$

$$\begin{aligned} - b R \left(\bar{F}_2 \frac{\partial N_z}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \frac{\partial N_\theta}{\partial \xi} \right) - b R \left(\bar{G}_2 \frac{\partial N_z}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \frac{\partial N_\theta}{\partial \eta} \right) \\ - \frac{b R}{R e} \left(\bar{G}_{v_2} \frac{\partial N_z}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_3} \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_4} \frac{\partial N_\theta}{\partial \eta} \right) - (D_{1\tau_z} N_z + D_{1\tau_R} N_R + D_{1\tau_\theta} N_\theta) \end{aligned}$$

et
$$u_N = u_\zeta N_\zeta + u_R N_R + u_\theta N_\theta$$

$$\xi_N = \xi_\zeta N_\zeta + \xi_R N_R + \xi_\theta N_\theta$$

$$\eta_N = \eta_\zeta N_\zeta + \eta_R N_R + \eta_\theta N_\theta$$

Nous pouvons trouver encore une équation indépendante analogue à (2.52) en projetant l'équation de mouvement selon une direction \vec{L} tangente à la surface moyenne de l'aubage et normale à la direction \vec{N} . Les vecteurs \vec{N} et \vec{L} seront déterminés en fonction de la géométrie de l'aubage. La nouvelle équation selon L a une forme complètement analogue à celle de l'équation (2.52).

II.3.4.2. Utilisation d'une relation cinématique :

Dans le paragraphe II.3.4.1., nous avons éliminé le terme de force d'aubage de l'équation de quantité de mouvement. Dans les deux composantes de cette équation selon \vec{N} et \vec{L} , seuls des termes de pression moyenne en θ sont alors conservés. Nous avons décidé d'utiliser une équation de transport de la vorticité secondaire Ω_s qui fait peu intervenir cette pression moyenne. Cette équation nous permet de déterminer une composante de vitesse normale à ξ dans le plan (ξ, θ)   partir de l'utilisation d'une fonction rotationnelle Ψ_s . Pour le couplage du calcul de l'équation de quantité de mouvement et de l'équation de la vorticité secondaire, deux voies sont possibles

- i) Soit effectuer une résolution simultanée des systèmes (I) et (II) des équations, définis dans le paragraphe II.1. Dans ce cas, nous avons à résoudre une équation vectorielle qui contient les équations des deux systèmes.
- ii) Soit découpler le calcul des deux systèmes qui seront reliés par une relation cinématique du type $w_N = f(u_\zeta, u_R, u_\theta)$ traitée dans le système (I) des équations principales.

Nous avons décidé de suivre cette deuxième voie. La relation cinématique que nous allons utiliser permet donc le transfert des informations associées au caractère elliptique de l'écoulement dans le plan transversal (η, θ) (calculé par le système (II)) sur le champ moyenné selon θ (calculé par le système (I)). Nous allons ensuite présenter l'utilisation de cette relation dans le système vectoriel (I).

Dans la couche visqueuse, les composantes longitudinale W_s et transversale W_N de la vitesse sont liées aux composantes u_z et u_θ de la manière suivante [39]

$$W_s = u_z \cos \beta_e + u_\theta \sin \beta_e \quad (2.53)$$

$$W_N = -u_z \sin \beta_e + u_\theta \cos \beta_e$$

On peut en déduire

$$- \operatorname{tg} \beta_e \rho u_z + \rho u_\theta - \frac{\rho W_N}{\cos \beta_e} = 0 \quad (2.54)$$

qui est la relation cinématique que nous allons utiliser. Nous l'introduisons dans la quatrième ligne du terme non conservatif M_N .

Après les calculs, nous obtenons la forme finale de notre équation vectorielle qui est la suivante

$$\frac{\partial bRW}{\partial t} + \frac{\partial bRF}{\partial \xi} + \frac{\partial bRG}{\partial \eta} + j b M = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} \quad (2.55)$$

où

$$W = [W_1, W_2, W_3, 0, W_5]^T$$

$$F = [F_1, F_2, F_3, 0, F_5]^T$$

$$G = [G_1, G_2, G_3, 0, G_5]^T$$

$$G_v = [0, G_{v2}, G_{v3}, 0, G_{v5}]^T$$

$$M = [0, M_2, M_3, M_4, M_5]^T$$

et

$$W_1 = \bar{W}_1, \quad F_1 = \bar{F}_1, \quad G_1 = \bar{G}_1$$

$$W_5 = \bar{W}_5, \quad F_5 = \bar{F}_5, \quad G_5 = \bar{G}_5$$

$$W_2 = \bar{W}_2 N_{\beta} + \bar{W}_3 N_R + \bar{W}_4 N_{\theta}$$

$$W_3 = \bar{W}_2 L_{\beta} + \bar{W}_3 L_R + \bar{W}_4 L_{\theta}$$

$$F_2 = \bar{F}_2 N_{\beta} + \bar{F}_3 N_R + \bar{F}_4 N_{\theta}$$

$$F_3 = \bar{F}_2 L_{\beta} + \bar{F}_3 L_R + \bar{F}_4 L_{\theta}$$

$$G_2 = \bar{G}_2 N_{\beta} + \bar{G}_3 N_R + \bar{G}_4 N_{\theta}$$

$$G_3 = \bar{G}_2 L_{\beta} + \bar{G}_3 L_R + \bar{G}_4 L_{\theta}$$

$$G_{v_2} = \bar{G}_{v_2} N_{\beta} + \bar{G}_{v_3} N_R + \bar{G}_{v_4} N_{\theta}$$

$$G_{v_3} = \bar{G}_{v_2} L_{\beta} + \bar{G}_{v_3} L_R + \bar{G}_{v_4} L_{\theta}$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \bar{M}_2 N_{\beta} + \bar{M}_3 N_R + \bar{M}_4 N_{\theta} - R \left(\bar{F}_2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \xi} \right) \\ & - R \left(\bar{G}_2 \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \eta} \right) + \frac{R}{Re} \left(\bar{G}_{v_2} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_3} \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_4} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{L}{b} \left(D_{1z\beta} N_{\beta} + D_{1zR} N_R + D_{1z\theta} N_{\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 = & \bar{M}_2 L_{\beta} + \bar{M}_3 L_R + \bar{M}_4 L_{\theta} - R \left(\bar{F}_2 \frac{\partial L_{\beta}}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \frac{\partial L_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \frac{\partial L_{\theta}}{\partial \xi} \right) \\ & - R \left(\bar{G}_2 \frac{\partial L_{\beta}}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \frac{\partial L_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \frac{\partial L_{\theta}}{\partial \eta} \right) + \frac{R}{Re} \left(\bar{G}_{v_2} \frac{\partial L_{\beta}}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_3} \frac{\partial L_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_4} \frac{\partial L_{\theta}}{\partial \eta} \right) \\ & - \frac{L}{b} \left(D_{1z\beta} L_{\beta} + D_{1zR} L_R + D_{1z\theta} L_{\theta} \right) \end{aligned}$$

$$M_4 = -\operatorname{tg} \beta_e \frac{p u_{\beta}}{j} + \frac{p u_{\theta}}{j} - \frac{p W_N}{j \cos \beta_e}$$

II.4. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations initiales et leur traitement mathématique qui nous a permis d'obtenir deux systèmes des équations de base pour notre problème.

Le premier système contient les équations dans le plan longitudinal, moyennées selon la direction circonférentielle θ . L'hypothèse d'un écoulement parabolique dans la direction longitudinale est utilisée. De plus, un traitement spécial de l'équation de quantité de mouvement a conduit à l'élimination du terme inconnu de force de la pression.

Le deuxième système contient les équations pour le calcul des inconnues sur le plan transversal. Des variables moyennées en θ sont ici aussi considérées.

Les deux systèmes sont liés par une relation cinématique qui assure le transfert des informations associées au caractère elliptique de l'écoulement dans le plan transversal sur le plan longitudinal.

Dans le chapitre qui suit, la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations de base sera exposée.

CHAPITRE III

-

METHODE NUMERIQUE

III.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons développé les équations qui régissent l'écoulement secondaire pour les amener à une forme adéquate pour notre cas. Nous avons créé deux systèmes d'équations dont le couplage nous donnera la solution du problème étudié. Le premier système comprend l'équation vectorielle (2.55) écrite sous une forme faiblement conservative pour un système curviligne (ξ, η, ζ) , moyennée dans la direction ζ et avec une diffusion longitudinale négligée selon ξ . L'équation de quantité de mouvement est projetée selon deux directions \vec{N} et \vec{L} proprement choisies. Le deuxième système comprend l'équation pour la vorticité secondaire et une équation de type Poisson pour le calcul de la fonction de courant Ψ_s et des vitesses transversales. Dans ce chapitre, nous allons préciser le schéma numérique que nous utilisons pour la résolution de ces deux systèmes de équations.

L'équation vectorielle (2.55) dans le plan (ξ, η)

$$\frac{\partial bRW}{\partial t} + \frac{\partial bRF}{\partial \xi} + \frac{\partial bRG}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} + j bM = 0 \quad (3.1)$$

est non-linéaire. Pour sa résolution, nous allons suivre une procédure de linéarisation par rapport à un temps fictif utilisée habituellement lors de la résolution de systèmes non-linéaires d'équations différentielles ordinaires [98,99]. Pour effectuer cette linéarisation, nous introduisons tout d'abord un schéma de différentiation que nous appliquons à une discrétisation de l'équation en temps, et en calculant au passage les matrices Jacobiennes nécessaires à la linéarisation.

Un schéma aux différences finies est appliqué sur les dérivées spatiales pour tous les points intérieurs du maillage. L'équation (3.1) est ainsi remplacée par un système des équations discrétisées qui conduit à une matrice tridiagonale par blocs, elle-même traitée à l'aide d'un algorithme adapté. Une analyse détaillée des conditions aux limites possibles et de leurs introductions dans l'algorithme sont données. Enfin, une analyse de la stabilité de la méthode est donnée.

Nous présentons ensuite le traitement numérique du deuxième système des équations, dans le plan transversal. Pour l'équation de la vorticité secondaire un schéma simple aux différences finies est utilisé. Pour l'équation de

Poisson et le calcul des vitesses transversales nous avons utilisé, d'une part le développement en séries de Fourier dans la direction transversale, d'autre part des schémas aux différences finies dans la direction normale qui nous donnent un système tridiagonal.

Différents schémas de couplage entre les deux systèmes des équations dans le plan longitudinal et le plan transversal sont enfin proposés et leurs avantages ainsi que leurs inconvénients seront exposés.

III.2. DISCRETISATION EN TEMPS - LINEARISATION PAR RAPPORT AU TEMPS DES EQUATIONS DANS LE PLAN LONGITUDINAL

La variable temporelle t est discrétisée comme $t = n \Delta t$ où Δt est le pas dans le temps et $W(t) = W(n \Delta t) = W^n$. La dérivée du vecteur des inconnues en temps peut s'écrire sous une forme générale de PADE utilisée par BEAM et WARMING [100] comme suit :

$$\frac{\partial W^n}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{(1 + \omega) \Delta - \omega \nabla}{1 + \theta \Delta} W^n \quad (3.2)$$

$$+ (\theta - \omega - \frac{1}{2}) \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

où Δ est un opérateur des différences vers le futur,
 ∇ est un opérateur des différences vers le passé.

La combinaison de différentes valeurs des paramètres ω et θ donne des schémas des différents ordres d'approximation. Dans notre cas, nous allons utiliser le schéma implicite trapézoïdal avec $\theta = 1/2$ et $\omega = 0$ qui donne des différences centrées autour du point temporel $n + 1/2$ avec deuxième ordre d'approximation. En introduisant ces paramètres dans la formule (3.2), nous prenons

$$\frac{\Delta W^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^n, \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^{n+1} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.3)$$

Si cette relation est introduite dans l'équation (3.1), la forme suivante est obtenue

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta bRW^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial bRF}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial bRF}{\partial \xi} \right)^n \right] \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial bRG}{\partial \eta} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial bRG}{\partial \eta} \right)^n \right] + \frac{1}{2} \cdot j \cdot b(M^{n+1} + M^n) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \left[\left(\frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

La présence des vecteurs non-linéaires F, G et M ne permet pas une résolution directe de l'équation (3.4) pour calculer le vecteur inconnu W^{n+1} . Nous procédons alors à une linéarisation de cette équation en utilisant un développement en séries de Taylor autour d'un nouveau vecteur inconnu noté ici \mathcal{P} et définit comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\rho, \rho u_z, \rho u_r, \rho u_\theta, \rho E)^T / j = (\bar{\rho}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{e}, \bar{E})^T \quad \text{cas compressible} \\ \text{ou} \\ \mathcal{P} &= (\rho_v, u_z, u_r, u_\theta)^T / j = (\bar{\rho}_v, \bar{m}, \bar{n}, \bar{e})^T \quad \text{cas incompressible} \end{aligned}$$

Ceci nous permettra d'obtenir un schéma numérique de la même précision temporelle mais qui est en plus linéaire par rapport à \mathcal{P}^{n+1}

$$\begin{aligned} W^{n+1} &= W^n + \mathcal{W}^n (\mathcal{P}^{n+1} - \mathcal{P}^n) + O(\Delta t^2) \\ F^{n+1} &= F^n + \mathcal{F}^n (\mathcal{P}^{n+1} - \mathcal{P}^n) + O(\Delta t^2) \\ G^{n+1} &= G^n + \mathcal{G}^n (\mathcal{P}^{n+1} - \mathcal{P}^n) + O(\Delta t^2) \\ G_v^{n+1} &= G_v^n + \mathcal{G}_v^n (\mathcal{P}^{n+1} - \mathcal{P}^n) + O(\Delta t^2) \\ M^{n+1} &= M^n + \mathcal{M}^n (\mathcal{P}^{n+1} - \mathcal{P}^n) + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\mathcal{W}^n, \mathcal{F}^n, \mathcal{y}^n, \mathcal{y}_v^n$ et \mathcal{M}^n sont les matrices Jacobiennes de la linéarisation temporelle définies ainsi

$$\mathcal{W}^n = \left(\frac{\partial W}{\partial \mu} \right)^n, \quad \mathcal{F}^n = \left(\frac{\partial F}{\partial \mu} \right)^n, \quad \mathcal{y}^n = \left(\frac{\partial G}{\partial \mu} \right)^n, \quad \mathcal{y}_v^n = \left(\frac{\partial G_v}{\partial \mu} \right)^n, \quad \mathcal{M}^n = \left(\frac{\partial M}{\partial \mu} \right)^n$$

et dont le calcul détaillé est donné à l'Annexe 2.

En introduisant les formules (3.5) dans l'équation (3.4), nous obtenons l'équation suivante qui est linéaire en

$$\left\{ bR\mathcal{W}^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (bR\mathcal{F}^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (bR\mathcal{y}^n) - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR\mathcal{y}_v^n) + j b\mathcal{M}^n \right] \right\} \mu^{n+1} = \left\{ bR\mathcal{W}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (bR\mathcal{F}^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (bR\mathcal{y}^n) - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR\mathcal{y}_v^n) + j b\mathcal{M}^n \right] \right\} \mu^n - \Delta t \cdot Res \quad (3.6)$$

$$\text{où } Res = \frac{\partial bRF^n}{\partial \xi} + \frac{\partial bRG^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v^n}{\partial \eta} + j bM^n$$

est le résidu obtenu à l'étape n. Sa valeur indique la précision atteinte à cette étape par l'équation (3.1).

Remarques :

1. Si le vecteur W est identique au vecteur des inconnues μ (cas d'un écoulement bidimensionnel), la matrice Jacobiienne \mathcal{W} est réduite à la matrice unité I .
2. La dérivation spatiale dans l'équation (3.6) s'applique tant aux matrices Jacobiennes qu'au vecteur des inconnues μ .

Dans l'équation (3.6), on peut noter que les coefficients matriciaux des vecteurs \mathcal{F}^n et \mathcal{F}^{n+1} sont identiques. Par conséquent, nous pouvons écrire l'équation sous une autre forme plus compacte appelée "formulation delta" qui utilise comme nouvelle inconnue la variation temporelle $\Delta \mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{n+1} - \mathcal{F}^n$. Nous obtenons alors la forme suivante

$$\left\{ bR \omega^n + \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (bR \mathcal{F}^n) + \frac{\partial}{\partial \eta} (bR \mathcal{G}^n) - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR \mathcal{G}_v^n) \pm j bM^n \right] \right\} \cdot \Delta \mathcal{F}^n = -\Delta t \cdot Res \quad (3.7)$$

Les avantages de l'équation ci-dessus sous forme delta par rapport à l'équation (3.6) pour les méthodes implicites ont été étudiés en détail par BEAM et WARMING [100]. Nous les mentionnons ici brièvement.

a) A la convergence, l'état stationnaire qui a été atteint

$$\frac{\partial bRF}{\partial \xi} + \frac{\partial bRG}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} + j bM = 0$$

est indépendant de la grandeur du pas temporel Δt puisque le vecteur variable $\Delta \mathcal{F}^n = 0$. Pour une méthode à pas fractionnaires, au contraire, dans certains cas, la solution stationnaire dépend de Δt .

b) Si les conditions aux limites sont de type Dirichlet, elles peuvent être facilement introduites dans l'algorithme en mettant $\Delta \mathcal{F}^n_{limites} = 0$.

c) La forme delta demande moins d'opérations que la forme classique.

d) L'utilisation de formule de PADE (3.2) pour la différenciation en temps conduit à une dérivation immédiate de l'algorithme à cause de la commutativité des dérivations en temps et en espace.

e) Il y a une possibilité d'appliquer différentes discrétisations spatiales dans le nombre de droite et dans celui de gauche de l'équation (3.7) en vue d'améliorer la propriété de convergence de la solution sans que cela perturbe, au moins en pratique, la solution stationnaire.

III.3. CHOIX DU MAILLAGE - DISCRETISATION SPATIALE DE L'EQUATION VECTORIELLE

Dans ce paragraphe, nous allons exposer le type du maillage utilisé et présenter la discrétisation de l'équation (3.7).

Pour remplacer les dérivées de l'équation (3.7) par des différences finies, nous établissons un maillage sur lequel nous allons discrétiser cette équation. La précision de la solution calculée dépend souvent du choix du maillage notamment dans des régions où des gradients importants des inconnues existent. Dans ces régions, l'utilisation d'un maillage non uniforme, dense, peut améliorer la solution.

Deux sortes de maillage non uniforme existent pour le calcul des couches limites. Dans la première, le domaine de calcul est divisé en plusieurs régions avec un maillage uniforme sur chacune mais à pas différents entre elles [54]. Dans la deuxième, la densité du maillage évolue continuellement de manière analogue à l'évolution de la vitesse [87,101].

ROBERTS [101] a proposé une transformation analytique des coordonnées qui introduit un maillage non-uniforme. Elle est donnée par la formule suivante

$$\eta(R) = N + (N - 1) \cdot \frac{\log \frac{\alpha - (Y_N - Y)}{\alpha + (Y_N - Y)}}{\log \frac{\alpha + Y_N}{\alpha - Y_N}} \quad (3.8)$$

où
$$\alpha^2 = \frac{Y_N^2}{1 - \frac{Y_\sigma}{Y_N}}$$

Y_σ l'épaisseur de la région où des gradients forts existent ;

N le nombre de points du maillage dans la direction Y .

Si l'équation (3.8) est résolue par rapport à Y , nous trouvons pour la coordonnée initiale la relation suivante

$$R(\eta) = \frac{(\alpha + \gamma_N) \cdot 10^A + (\gamma_N - \alpha)}{10^A + 1} \quad (3.9)$$

où
$$A = \frac{\eta - N}{N - 1} \cdot \log \frac{\alpha + \gamma_N}{\alpha - \gamma_N}$$

Nous avons appliqué la formule (3.9) pour générer notre maillage. Différentes valeurs de Y_σ ont été testées et l'influence d'un maillage fin près de la paroi sur la solution a ainsi été constatée.

Pour la résolution numérique de l'équation (3.7), nous approchons les dérivées spatiales par des différences finies écrites entre les noeuds du maillage.

L'approximation parabolique utilisée lors de l'écriture des équations nous permet de réaliser une première discrétisation selon la direction ξ . Nous obtenons alors une équation portant sur la correction de la solution dans le nouveau plan $(i + 1)$ à ξ constant et dépendant de la solution en (i) . Si nous considérons l'équation (3.7), écrite autour d'un point $(i + 1/2)$, et nous remplaçons la dérivée selon ξ par une différence centrée de précision de deuxième ordre, nous obtenons la forme suivante :

$$\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{(b R \mathcal{F}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{i+1} - (b R \mathcal{F}^n \Delta \mathcal{P}^n)_i}{\Delta \xi} + \mathcal{L}_{i+1/2} \Delta \mathcal{P}^n_{i+1/2} = -\Delta t \cdot \text{Res}_{i+1/2} \quad (3.10)$$

$$\text{où } \mathcal{L}_{i+1/2} = bR\omega_{i+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (bR\psi^n) - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR\psi_v^n) + j b M^n \right]_{i+1/2}$$

est un opérateur appliqué au vecteur $\Delta \mathcal{P}_{i+1/2}^n$ au point $(i + 1/2)$

$$\text{et } Res_{i+1/2} = \frac{(bRF)_{i+1} - (bRF)_i}{\Delta \xi} + \left(\frac{\partial bRG^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v^n}{\partial \eta} + j b M^n \right)_{i+1/2}$$

Nous recherchons la solution stationnaire de l'équation (3.10). Dans ce cas, le temps Δt n'a pas le caractère d'un temps physique -comme ce serait le cas pour le traitement d'un écoulement instationnaire- mais il représente un pas de calcul numérique. A la convergence au pas n de ce temps fictif, la solution stationnaire de notre problème sera \mathcal{P}^n . En plus, $\mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n$ et par conséquent $\Delta \mathcal{P}^n = 0$. Nous avons déjà noté que l'hypothèse d'un écoulement parabolique dans la direction ξ s'exprime par le fait que le vecteur des inconnues au point $(i + 1)$ ne dépend que des valeurs des variables au pas précédent (i) déjà calculées. Dans ce plan, puisque la solution a convergé, nous avons $\Delta \mathcal{P}_i^* = 0$.

Supposons que nous ayons calculé au pas $(i + 1)$ le vecteur \mathcal{P}_{i+1}^n en temps n et nous recherchons le vecteur $\Delta \mathcal{P}_{i+1/2}^n = \mathcal{P}_{i+1}^n - \mathcal{P}_i^n$ par l'équation (3.10). Le membre de droite de cette équation est calculé en fonction des valeurs du vecteur \mathcal{P}_i^n et caractérise le résidu de l'équation au pas temporel n . Dans le membre de gauche, l'opérateur $\mathcal{L}_{i+1/2}$ sera approché linéairement en fonction des opérateurs \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_{i+1} , appliqués aux points (i) et $(i + 1)$.

$$\mathcal{L}_{i+1/2} \Delta \mathcal{P}_{i+1/2}^n = \frac{\mathcal{L}_i \Delta \mathcal{P}_i^* + \mathcal{L}_{i+1} \Delta \mathcal{P}_{i+1}^n}{2}$$

Or $\Delta \mathcal{P}_i^* = 0$ et la relation ci-dessus se réduit à

$$\mathcal{L}_{i+1/2} \Delta \mathcal{P}_{i+1/2}^n = \frac{\mathcal{L}_{i+1} \Delta \mathcal{P}_{i+1}^n}{2}$$

En introduisant cette relation dans l'équation (3.10), nous obtenons le schéma suivant

$$\left\{ bR \omega^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{bR \mathcal{F}^n}{\Delta \xi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR \mathcal{Y}^n) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (bR \mathcal{Y}_v^n) + j \cdot \frac{(bM^n)}{2} \right]_{i+1} \right\} \Delta \mathcal{N}_{i+1}^n =$$

$$- \Delta t \left\{ \frac{(bRF^n)_{i+1} - (bRF^n)_i}{\Delta \xi} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial bRG^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v^n}{\partial \eta} + j bM^n \right]_{i+1} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial bRG^n}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v^n}{\partial \eta} + j bM^n \right]_i \right\} \quad (3.11)$$

Cette équation représente le schéma de base de notre calcul. Nous allons ensuite discrétiser les dérivées selon la direction η en utilisant des formules d'approximation qui nous conduisent au traitement d'un système tridiagonal par blocs pour la résolution duquel des méthodes efficaces existent.

Les dérivées des termes convectifs au point (j) pour le résidu seront approchées par différences centrées qui font intervenir les variables aux points (j + 1) et (j - 1). Pour le premier membre de l'équation (3.11), des différences décentrées pour ces termes pourront être utilisées. Les termes diffusifs, écrits aux points (j + 1/2) et (j - 1/2), seront approchés par différences centrées qui font intervenir les variables aux points (j - 1), (j) et (j + 1). Après la discrétisation des dérivées selon la direction η de la façon décrite dessus, l'équation (III.1) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{bR\omega^n}{2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{bR\mathcal{F}^n}{\Delta\xi} \right]_{i+1,j} \Delta\mathcal{A}_{i+1,j} \\
 & + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(bR\mathcal{E}^n \Delta\mathcal{A}^n)_{i+1,j+1} - (bR\mathcal{E}^n \Delta\mathcal{A}^n)_{i+1,j-1}}{2\Delta\eta} \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR\mathcal{E}_v^n \Delta\mathcal{A}^n)_{i+1,j+1/2} - (bR\mathcal{E}_v^n \Delta\mathcal{A}^n)_{i+1,j-1/2}}{\Delta\eta} \\
 & + j \cdot \frac{(b\mathcal{M}^n)_{i+1,j}}{2} = -\Delta t \cdot \left[\frac{(bRF^n)_{i+1,j} - (bRF)_{ij}}{\Delta\xi} \right. \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \frac{(bRG^n)_{i+1,j+1} - (bRG^n)_{i+1,j-1}}{2\Delta\eta} \\
 & - \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(bRG_v^n)_{i+1,j+1/2} - (bRG_v^n)_{i+1,j-1/2}}{\Delta\eta} \\
 & \left. + j \cdot \frac{(bM^n)_{i+1,j}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(bRG^n)_{i,j+1} - (bRG^n)_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bRG_v^n)_{i,j+1/2} - (bRG_v^n)_{i,j-1/2}}{\Delta\eta} + j \cdot \frac{(bM^n)_{ij}}{2} \right] \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Le membre de gauche de (3.12) ne contient que des variables au point $(i+1)$ et pour simplification nous allons supprimer l'indice $(i+1)$. On peut noter aussi que dans le membre de droite, ce résidu se compose de deux parties. L'une fixe qui comprend les variables au point (i) et ne change pas avec les itérations ; l'autre écrite au point $(i+1)$ qui varie à chaque itération en temps ; nous écrivons par conséquent

$$Res_{i+1/2}^n = R_1^n(i+1) + R_2^*(i)$$

L'équation (3.12) est une équation matricielle tridiagonale. Les détails de l'analyse qui suit sont donnés dans l'Annexe 3.

Les matrices Jacobiennes des termes diffusifs \mathcal{G}_{v_j} contiennent des dérivées des variables dans la direction η multipliées par les métriques de la transformation. La différence de ces matrices entre les points $(j + 1/2)$ et $(j - 1/2)$ peut s'exprimer de la façon suivante

$$\begin{aligned} G_{V_j} &= (\mathcal{G}_{v_{j+1/2}}^n \Delta \vec{r}^n)_{j+1/2} - (\mathcal{G}_{v_{j-1/2}}^n \Delta \vec{r}^n)_{j-1/2} = \\ &= (\mathcal{G}_{v_{j+1}}^n \Delta \vec{r}^n)_{j+1} + (\mathcal{G}_{v_j}^n \Delta \vec{r}^n)_j + (\mathcal{G}_{v_{j-1}}^n \Delta \vec{r}^n)_{j-1} \end{aligned} \quad (3.13.a)$$

où $\mathcal{G}_{v_\ell}^{(k)}$ la partie du terme G_{V_j} au point (K)
avec $\ell = (1, 0, 1)$ pour $K = (j - 1, j, j + 1)$ respectivement.

La matrice \mathcal{M}_j^n associée au terme non conservatif contient également des dérivées selon η qui font apparaître les variables aux points $(j - 1)$, (j) et $(j + 1)$. De façon analogue à celle utilisée pour la matrice $\mathcal{G}_{v_j}^n$ nous écrirons

$$\begin{aligned} M_j &= (\mathcal{M}^n \Delta \vec{r}^n)_j \\ &= (\mathcal{M}_{-1}^n \Delta \vec{r}^n)_{j-1} + (\mathcal{M}_0^n \Delta \vec{r}^n)_j + (\mathcal{M}_1^n \Delta \vec{r}^n)_{j+1} \end{aligned} \quad (3.13.b)$$

où $\mathcal{M}_\ell^{(k)}$ la partie du terme M_j au point (K).

En introduisant les relations (3.13) dans l'équation (3.12) le schéma suivant est obtenu

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{bR \omega^n}{2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{bR \mathcal{F}^n}{\Delta \xi} \right]_j \Delta \mathcal{P}_j^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{(bR \mathcal{Y}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j+1} - (bR \mathcal{Y}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j-1}}{4 \Delta \eta} \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR \mathcal{Y}_{v_1}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j+1} + (bR \mathcal{Y}_{v_0}^n \Delta \mathcal{P}^n)_j + (bR \mathcal{Y}_{v_{11}}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j-1}}{2 \Delta \eta} \\
 & + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{(b\mathcal{M}_1^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j+1} + (b\mathcal{M}_0^n \Delta \mathcal{P}^n)_j + (b\mathcal{M}_{11}^n \Delta \mathcal{P}^n)_{j-1}}{2} \\
 & = - \Delta t \cdot Res_j \equiv RS_j
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

qui après le réarrangement des termes nous donne la forme finale tridiagonale par blocs au point (j)

$$[A_j] \Delta \mathcal{P}_{j-1} + [B_j] \Delta \mathcal{P}_j + [C_j] \Delta \mathcal{P}_{j+1} = RS_j \tag{3.15}$$

où les coefficients matriciaux sont donnés par les formules suivantes

$$[A_j] = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[- \frac{(bR \mathcal{Y}^n)_{j-1}}{4 \Delta \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR \mathcal{Y}_{v_{11}}^n)_{j-1}}{2 \Delta \eta} + j \cdot \frac{(b\mathcal{M}_{11}^n)_{j-1}}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 [B_j] = & \frac{(bR \omega^n)_j}{2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{(bR \mathcal{F}^n)_j}{\Delta \xi} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR \mathcal{Y}_{v_0}^n)_j}{2 \Delta \eta} + j \cdot \frac{(b\mathcal{M}_0^n)_j}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$[C_j] = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{(bR \mathcal{Y}^n)_{j+1}}{4 \Delta \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR \mathcal{Y}_{v_1}^n)_{j+1}}{2 \Delta \eta} + j \cdot \frac{(b\mathcal{M}_1)_{j+1}}{2} \right]$$

Dans certains cas, par suite de problèmes de stabilité numérique dont nous parlerons dans un prochain paragraphe, nous approcherons la dérivée selon η du terme convectif y par une différence décentrée en arrière. Dans ce cas, l'équation discrétisée est légèrement différente de l'équation (3.12) et également les matrices $|A_j|$, $|B_j|$ et $|C_j|$ de l'équation (3.16).

$$[A_j] = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[- \frac{(bR y^n)_{j-1}}{2\Delta\eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR y_{v_{j-1}}^n)_{j-1}}{2\Delta\eta} + j \cdot \frac{(bM_{11}^n)_{j-1}}{2} \right]$$

$$[B_j] = \frac{(bR w^n)_j}{2} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{(bR F^n)_j}{\Delta\xi} + \frac{(bR y^n)_j}{2\Delta\eta} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR y_{v_0}^n)_j}{2\Delta\eta} + j \cdot \frac{(bM_0^n)_j}{2} \right] \quad (3.17)$$

$$[C_j] = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[- \frac{1}{Re} \cdot \frac{(bR y_{v_1}^n)_{j+1}}{2\Delta\eta} + j \cdot \frac{(bM_1^n)_{j+1}}{2} \right]$$

Si nous étudions un écoulement adiabatique à enthalpie d'arrêt constante et uniforme dans le domaine de calcul, nous utilisons une forme stationnaire de l'équation de l'enthalpie, et les matrices de résolution $|A|$, $|B|$, $|C|$ sont de dimensions (4×4) . Pour le cas d'un écoulement non adiabatique où une inconnue supplémentaire existe, une forme instationnaire de l'équation pour l'énergie doit être utilisée, et les matrices de résolution sont de dimension (5×5) .

Pour chaque point intérieur du maillage de $j = 2$ à $j = N - 1$, une équation matricielle de type (3.15) doit être écrite. Pour les points $j = 1$ et $j = N$ des conditions aux limites seront imposées ; nous les décrirons dans la suite. En regroupant les équations (3.15) pour tous les points intérieurs du maillage de $j = 2$ et $j = N - 1$, la forme globale de notre système tridiagonal par blocs pour le pas $(i+1)$ peut être obtenue.

(3.18)

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc} [B_2] & [C_2] \\ [A_3] & [B_3] & [C_3] \\ & & [A_j] & [B_j] & [C_j] \\ & & & & [A_{N-2}] & [B_{N-2}] & [C_{N-2}] \\ & & & & & [B_{N-1}] & [C_{N-1}] \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \vec{\Delta}_{\cancel{1}_2} \\ \vec{\Delta}_{\cancel{1}_3} \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_{\cancel{1}_j} \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_{\cancel{1}_{N-2}} \\ \vec{\Delta}_{\cancel{1}_{N-1}} \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \vec{RS}_2 \\ \vec{RS}_3 \\ \vdots \\ \vec{RS}_j \\ \vdots \\ \vec{RS}_{N-2} \\ \vec{RS}_{N-1} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Après cette analyse qui nous a donné le schéma de résolution (3.18), nous récapitulons le processus de calcul que nous allons suivre dans le plan longitudinal (ξ, η).

- 1) La solution ϕ_{ij} au pas (i) pour tous les points du maillage (j) dans la direction η connue, nous cherchons la solution $\phi_{i+1,j}$ au pas (i + 1).
- 2) Nous supposons pour la première itération $\phi_{i+1,j}^1 = \phi_{ij}^*$. La partie du résidu à (i + 1) est calculée avec les valeurs $\phi_{i+1,j}^1$ et les métriques calculées à (i+1).
- 3) Le schéma discrétisé (3.18) nous donne un système tridiagonal par blocs à résoudre. A l'itération (n), il faut calculer le vecteur $\Delta \phi_{i+1,j}^n$ pour tous les points dans la direction η . La méthode numérique de la résolution sera exposée plus bas.
- 4) Après avoir calculé $\Delta \phi_{i+1,j}^n$, le vecteur des inconnues pour l'itération (n+1) est obtenu par

$$\phi_{i+1,j}^{n+1} = \phi_{i+1,j}^n + \Delta \phi_{i+1,j}^n$$

- 5) Le résidu est déterminé à partir des nouvelles valeurs $\phi_{i+1,j}^{n+1}$.
- 6) Cette procédure est répétée jusqu'à la convergence où $\Delta \phi_{i+1,j}^* = 0$, qui nous donne la solution $\phi_{i+1,j}^*$ au pas (i+1) et nous avançons au prochain pas (i + 2) jusqu'à l'extrémité de la zone de calcul.

III.4. ALGORITHME DE LA RESOLUTION

Dans ce paragraphe, la méthode numérique utilisée dans la résolution de l'équation (3.18) sera exposée. Pour l'inversion de la matrice tridiagonale par blocs de cette équation, nous utiliserons une méthode de récurrence souvent connue sous le nom d' "algorithme de Thomas". Elle est une technique efficace d'élimination Gauss dont l'application à des problèmes divers a été donnée par ROACHE [102] et YANENKO [103].

La formule de récurrence pour un point j du maillage est

$$\vec{\Delta} \phi_j = [X_j] \vec{\Delta} \phi_{j+1} + \vec{Y}_j \quad (3.19)$$

En introduisant la relation (3.19) écrite au point (j - 1) dans l'équation (3.15), nous obtenons l'équation suivante

$$([A_j][X_{j-1}] + [B_j]) \vec{\Delta \mu}_j + [C_j] \vec{\Delta \mu}_{j+1} = RS_j - [A_j] \vec{Y}_{j-1}$$

qui après sa résolution par rapport à $\vec{\Delta \mu}_j$ donne

$$\begin{aligned} \vec{\Delta \mu}_j &= - ([A_j][X_{j-1}] + [B_j])^{-1} [C_j] \vec{\Delta \mu}_{j+1} \\ &+ ([A_j][X_{j-1}] + [B_j])^{-1} (RS_j - [A_j] \vec{Y}_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En comparant les expressions (3.19) et (3.20), nous en déduisons

$$\begin{aligned} [X_j] &= - ([A_j][X_{j-1}] + [B_j])^{-1} [C_j] \\ \vec{Y}_j &= ([A_j][X_{j-1}] + [B_j])^{-1} (RS_j - [A_j] \vec{Y}_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Les coefficients matriciaux $[X_j]$ et \vec{Y}_j pour $j = 2$ ne seront pas calculés par les formules de récurrence (3.21) mais directement à partir de l'équation (3.15) écrite à $j = 2$ dans laquelle les conditions aux limites à $j = 1$ sont introduites.

Les différentes étapes de l'algorithme pour la résolution du système (III.10) sont résumées ci-après.

- 1) Nous calculons les coefficients $[X_2]$ et \vec{Y}_2 à $j = 2$ en utilisant l'équation (3.15) et les conditions aux limites sur la paroi $j = 1$.
- 2) Les coefficients $[X_j]$ et \vec{Y}_j avec les formules (3.21) de $j = 3$ à $j = N - 2$ ou $j = N - 1$ sont obtenus. Le choix entre $j = N - 1$ et $j = N - 2$ dépend des conditions aux limites sur la frontière extérieure $j = N$.

- 3) Si des conditions Neumann sont utilisées à $j = N$, les $[X_j]$ et \vec{Y}_j sont calculés jusqu'à $j = N - 2$. Le vecteur $\Delta \mathcal{A}_{N-1}$ est calculé par une relation (présentée dans le paragraphe III.5.1.) résultant de la combinaison de l'équation matricielle (3.15) écrite à $j = N - 1$ où les conditions aux limites à $j = N$ sont introduites et de la relation de récurrence (3.19) entre $\Delta \mathcal{A}_{N-1}$ et $\Delta \mathcal{A}_{N-2}$. Si des conditions Dirichlet sont utilisées à $j = N$, les coefficients $[X_j]$ et \vec{Y}_j sont calculés jusqu'à $j = N - 1$. Le vecteur $\Delta \mathcal{A}_{N-1}$ est alors calculé directement par la formule (3.19).
- 4) Le vecteur $\vec{\Delta \mathcal{A}}_j$ est calculé de $j = N - 2$ à $j = 2$ en descendant dans la couche limite de l'extérieur vers la paroi, par la formule de récurrence (3.19).

Cet algorithme de la résolution du système (3.18) est introduit dans l'étape (3) du processus général de la résolution du problème dans le plan longitudinal pour chaque pas (i).

III.5 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES DANS L'ALGORITHME DE LA RESOLUTION

Dans ce paragraphe, les conditions aux limites seront présentées ainsi que leur introduction dans l'algorithme de résolution. Les conditions utilisées sont issues soit d'un choix arbitraire mais qui est justifié par la physique de l'écoulement, soit de l'application directe des équations sur les frontières. Nous examinons séparément le cas d'un écoulement incompressible et celui d'un écoulement compressible puisque les variables sont un peu différentes dans les deux cas.

III.5.1. Écoulement incompressible :

A) Conditions sur la paroi :

Pour un écoulement visqueux sur une paroi imperméable, la condition de non-glissement sur la paroi donne $u_y = u_x = u_\theta = 0$. Il faut imposer une condition supplémentaire pour la quatrième variable indépendante qui est la pression. Celle-ci ne peut être choisie arbitrairement mais elle doit satisfaire les équations de Navier-Stokes sur la paroi. Dans ce paragraphe, un inventaire des

conditions à la paroi pour la pression p sera exposé. PULLIAM et STEGER [91] ont donné une expression pour le gradient de la pression dans la direction normale à la paroi en combinant les trois composantes de l'équation de mouvement dans le domaine transformé. Cette expression pour un écoulement tridimensionnel, non visqueux, est la suivante

$$\begin{aligned}
 p_n (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2 + \eta_{\theta}^2) &= (\xi_{\xi} \eta_{\xi} + \xi_R \eta_R + \xi_{\theta} \eta_{\theta}) \cdot p_{\xi} \\
 &+ (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2 + \eta_{\theta}^2) \cdot p_{\eta} + (\xi_{\xi} \eta_{\xi} + \xi_R \eta_R + \xi_{\theta} \eta_{\theta}) \cdot p_{\xi} \\
 &= -\rho U [\eta_{\xi} (u_{\xi})_{\xi} + \eta_R (u_R)_{\xi} + \eta_{\theta} (u_{\theta})_{\xi}] \\
 &- \rho W [\eta_{\xi} (u_{\xi})_{\xi} + \eta_R (u_R)_{\xi} + \eta_{\theta} (u_{\theta})_{\xi}]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

où (n) est la direction normale à la paroi sur le domaine physique et $\eta = ct$ est la direction sur laquelle la surface est transformée dans le nouveau système. Pour un écoulement visqueux, la même expression a été proposée avec la condition pour les vitesses contravariantes sur la paroi $U = V = W = 0$. Cette expression devient

$$\begin{aligned}
 p_n (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2 + \eta_{\theta}^2)^{1/2} &= (\xi_{\xi} \eta_{\xi} + \xi_R \eta_R + \xi_{\theta} \eta_{\theta}) \cdot p_{\xi} \\
 &+ (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2 + \eta_{\theta}^2) p_{\eta} + (\xi_{\xi} \eta_{\xi} + \xi_R \eta_R + \xi_{\theta} \eta_{\theta}) p_{\xi} = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour un écoulement moyenné dans la direction ξ comme dans notre cas, la relation ci-dessus donne

$$p_n (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2)^{1/2} = (\xi_{\xi} \eta_{\xi} + \xi_R \eta_R) p_{\xi} + (\eta_{\xi}^2 + \eta_R^2) p_{\eta} = 0 \tag{3.24}$$

qui est équivalente à la condition suivante

$$p_n = 0 \tag{3.24.a}$$

Les expressions (3.23), et aussi (3.24.a) qui en est déduite, sont une approximation dans laquelle les termes visqueux des trois composantes de l'équation de mouvement ont été négligés. Pour un écoulement de type couche limite à un nombre de Reynolds élevé, l'approximation (3.24.a) $\partial p / \partial \eta = 0$ est bonne et elle a été souvent utilisée comme condition pour la pression sur la paroi [59,66].

Une approche plus correcte serait d'utiliser une expression analogue à (3.23) qui en plus contient les termes visqueux. Pour un système (ξ, η, ζ) non orthogonal aux frontières, l'expression correspondante est assez compliquée. Nous faisons alors l'hypothèse que la direction η est normale à la paroi (et par conséquent elle est supposée coïncider avec la direction n sur la paroi). Dans ce cas, nous pouvons utiliser directement la deuxième composante de l'équation de mouvement écrite sur la paroi pour le calcul du gradient de la pression sur ce point.

Dans le cas d'un système transformé, cette composante écrite sur la paroi donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{P} \xi_R)_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{P} \eta_R)_1 = \\ \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{j} \left[\eta_\zeta \mu \left[\eta_R \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{j \bar{u}}{P} \right) + \eta_\zeta \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{j \bar{v}}{P} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_R \left\{ \eta_R \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R j \bar{v}}{P} \right) + 2\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{j \bar{v}}{P} \right) \right] + \eta_\zeta \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R j \bar{u}}{P} \right) \right\} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

La discrétisation du membre de droite de l'expression (3.25) demande l'utilisation des différences décentrées en amont de précision de premier ordre, pour l'approximation des dérivées de deuxième ordre dans la direction η . Pour un écoulement à nombre de Reynolds élevé, nous pouvons considérer que les termes de droite de (3.25) sont faibles et nous retrouvons la relation (3.24.a) $\partial p / \partial \eta = 0$.

Une autre possibilité pour calculer la pression sur la paroi est d'utiliser l'équation de continuité comme elle est écrite dans le paragraphe (II.2.2.) par la méthode de la compressibilité artificielle

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (bRF)_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (bRG)_1}{\partial \eta} = 0$$

En appliquant la formule trapézoïdale dans l'équation ci-dessus, nous avons

$$\frac{\Delta \bar{p}_1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial (b R F^{n+1})_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (b R F^n)_1}{\partial \xi} + \frac{\partial (b R G^{n+1})_1}{\partial \eta} + \frac{\partial (b R G^n)_1}{\partial \eta} \right] = 0$$

Après avoir introduit les formules

$$F_1^{n+1} = F_1^n + \Delta F_1^n$$

$$G_1^{n+1} = G_1^n + \Delta G_1^n$$

dans cette équation et avoir remplacé F_1 , G_1 par ses expressions, nous obtenons une nouvelle forme de l'équation de continuité qui, écrite sur la paroi, donne une condition pour la pression

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[\frac{\partial (b R \beta \eta_z \Delta \bar{m})}{\partial \eta} + \frac{\partial (b R \beta \eta_R \Delta \bar{n})}{\partial \eta} \right] \\ = - \Delta t \cdot \left[\frac{\partial (b R \beta \eta_z \bar{m}^n)}{\partial \eta} + \frac{\partial (b R \beta \eta_R \bar{n}^n)}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cette expression est sous une forme implicite compatible avec la forme implicite de l'algorithme. Une autre expression simplifiée pour la pression sur la paroi est celle déduite de la continuité mais écrite sous une forme explicite

$$\Delta \bar{p} = - \Delta t \cdot \left[\frac{\partial (b R \beta \eta_z \bar{m}^n)}{\partial \eta} + \frac{\partial (b R \beta \eta_R \bar{n}^n)}{\partial \eta} \right] \quad (3.27)$$

On peut remarquer que la relation explicite (3.27) peut être directement déduite de la relation (3.26) si les deux termes implicites du premier membre sont supprimés. L'utilisation d'une condition explicite (3.27) pour le calcul de la pression sur la paroi peut conduire à des oscillations fortes et même à la divergence dans certains cas [66].

Nous avons trouvé jusqu'ici quatre expressions possibles pour le calcul de la pression sur la paroi, soient (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27) en utilisant soit l'équation de mouvement, soit l'équation de continuité sur la paroi. Nous allons montrer ensuite comment ces conditions peuvent s'introduire dans l'algorithme qui a été présenté.

i) Gradient de pression nul sur la paroi (équation (3.24)) :

En supposant un système orthogonal aux limites et les lignes $\eta = ct$ normales à la paroi, nous avons $\xi_S \eta_S + \xi_R \eta_R = 0$ et l'expression (3.24) donne

$$p_{\eta} = 0 \quad (3.28)$$

Pour la discrétisation de la relation (3.28), une formule en trois points d'approximation au deuxième ordre sera utilisée

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{-3p_1 + 4p_2 - p_3}{2\Delta\eta} = 0$$

et après arrangement des termes

$$\Delta \bar{p}_1 = \alpha_2 \Delta \bar{p}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{p}_3 \quad (3.29)$$

où $\alpha_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}$ et $\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_1}$

En introduisant l'expression (3.29) dans l'équation matricielle (3.15) et après le calcul, la relation suivante est obtenue

$$[B'_2] \Delta \vec{p}_2 + [C'_2] \Delta \vec{p}_3 = \vec{RS}_2 \quad (3.30)$$

où $[B'_2] = [D_2]$ et $[C'_2] = [D_3]$

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \alpha_i a_{i1} + d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ \alpha_i a_{i2} + d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ \alpha_i a_{i3} + d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ \alpha_i a_{i4} + d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}$$

$$d_{ke} = b_{ke} \quad \text{pour } i = 2$$

$$d_{ke} = c_{ke} \quad \text{pour } i = 3$$

et a_{ke}, b_{ke}, c_{ke} sont les éléments des matrices $|A_2|, |B_2|, |C_2|$ de l'équation (3.15).

En résolvant l'équation (3.30) par rapport à $\vec{\Delta \mathcal{A}}_2$ et en comparant le résultat avec la formule (III.19) nous pouvons calculer les coefficients $[X_2]$ et \vec{Y}_2

$$\begin{aligned} [X_2] &= - [B'_2]^{-1} [C'_2] \\ \vec{Y}_2 &= [B'_2]^{-1} \vec{RS}_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

ii) Gradient de la pression sur la paroi qui prend en compte les termes visqueux (expression (3.25)) :

L'utilisation de l'expression (3.25) donne une forme similaire pour $[X_2]$ et \vec{Y}_2 mais les matrices s'en déduisant sont plus compliquées. Pour la discrétisation des dérivées de deuxième ordre du membre de droite, nous utilisons une formule à trois points décentrée vers l'intérieur du domaine, de précision de premier ordre. L'utilisation de cette formule est basée sur l'hypothèse que la précision globale d'un schéma de deuxième ordre est conservée si des approximations de premier ordre sont appliquées sur les limites [104]. Après la discrétisation, une expression pour la pression sur la paroi est obtenue, du type

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_1 &= \alpha_2 \Delta \bar{p}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{p}_3 + \beta_2 \Delta \bar{u}_2 + \beta_3 \Delta \bar{u}_3 \\ &+ \gamma_2 \Delta \bar{v}_2 + \gamma_3 \Delta \bar{v}_3 \end{aligned} \quad (3.32)$$

qui, introduite dans l'équation (3.15) et après les calculs, donne les coefficients de récurrence $[X_2]$ et \vec{Y}_2 .

iii) Pression sur la paroi par la continuité implicite (expression (3.26)) :

En utilisant l'expression (3.26), nous obtenons après la discrétisation une formule analogue à (3.32) mais où apparaissent des termes de résidu qui dépendent de l'itération précédente.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_1 &= \beta_2 \Delta \bar{u}_2 + \beta_3 \Delta \bar{u}_3 \\ &+ \gamma_2 \Delta \bar{v}_2 + \gamma_3 \Delta \bar{v}_3 + k (RS_4)_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si cette expression est introduite dans l'équation (3.15), elle donne

$$[B'_2] \Delta \vec{A}_2 + [C'_2] \Delta \vec{A}_3 = \vec{RS}'_2 \quad (3.34)$$

où $[B'_2] = [D_2]$ et $[C'_2] = [D_3]$

$$[D_i] = \begin{vmatrix} d_{11} & \beta_i a_{12} + d_{12} & \gamma_i a_{13} + d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & \beta_i a_{22} + d_{22} & \gamma_i a_{23} + d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & \beta_i a_{32} + d_{32} & \gamma_i a_{33} + d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & \beta_i a_{42} + d_{42} & \gamma_i a_{43} + d_{43} & d_{44} \end{vmatrix}$$

$$\vec{RS}'_2 = \vec{RS}_2 - [a_{11}k(RS_1), a_{21}k(RS_1), a_{31}k(RS_1), a_{41}k(RS_1)]_{j=1}^T$$

$$d_{ke} = b_{ke} \text{ pour } i = 2, \quad d_{ke} = c_{ke} \text{ pour } i = 3.$$

Les coefficients de récurrence sont

$$\begin{aligned} [X_2] &= -[B'_2]^{-1} [C'_2] \\ \vec{Y}_2 &= [B'_2]^{-1} \vec{RS}'_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

iv) Pression sur la paroi par la continuité explicite (expression (3.27)) :

Dans ce cas simplifié du cas précédent, la pression sur la paroi est donnée par la formule

$$\Delta \bar{p}_1 = k(RS_1)_1 \quad (3.36)$$

et les coefficients de récurrence par les formules

$$\begin{aligned} [X_2] &= -[B'_2]^{-1} [C_2] \\ \vec{Y}_2 &= [B'_2]^{-1} \vec{RS}'_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

B) Conditions sur la frontière extérieure du domaine :

Nous distinguons deux cas de conditions pour la frontière extérieure. Dans le premier, toutes les conditions imposées sont de type Dirichlet tandis que, dans le deuxième, nous traitons simultanément des conditions Dirichlet ainsi que des conditions Neumann.

i) Conditions Dirichlet :

Dans ce cas, les trois composantes de vitesse ainsi que la distribution de la pression sont connues. Nous avons alors $\Delta \bar{p} = \Delta \bar{u} = \Delta \bar{v} = \Delta \bar{e} = 0$. Les coefficients de récurrence $[X_j]$ et \bar{Y}_j doivent être calculés jusqu'au point $j = N - 1$. La formule de récurrence (3.19) donne alors, après avoir pris en compte les conditions mentionnées,

$$\Delta \vec{A}_{N-1} = \vec{Y}_{N-1} \quad (3.38)$$

puisque $\Delta \vec{A}_N = \vec{0}$

En connaissant maintenant $\Delta \vec{A}_N$, et en utilisant la formule (3.19), nous pouvons en descendant le maillage de $j = N - 2$ à $j = 2$ calculer les vecteurs $\Delta \vec{A}_j$ pour ces points.

ii) Combinaison de conditions Dirichlet et conditions Neumann :

Nous imposons des conditions Dirichlet pour les composantes u_z et u_θ et pour la pression et une condition Neumann pour la composante normale u_R . Cette condition est trouvée à partir de l'équation de continuité écrite au bord extérieur au point N

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{u}_1 \xi_S + \bar{v}_1 \xi_R)_{i+1/2, N} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{u}_1 \eta_S + \bar{v}_1 \eta_R)_{i+1/2, N} = 0$$

En appliquant l'opérateur Δ en temps et tenant compte de $\Delta \bar{u}_1 = 0$ nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi_R \Delta \bar{v})_{i+1/2, N} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta_R \Delta \bar{v})_{i+1/2, N} = 0$$

Pour la discrétisation de celle-ci, nous utilisons une différence centrée au point $(i + 1/2)$ dans la direction ξ et des différences en trois points en arrière au point (N) selon la direction η . Après la discrétisation et le réarrangement des termes, il vient

$$\Delta \bar{v}_N = k_{N-1} \Delta \bar{v}_{N-1} + k_{N-2} \Delta \bar{v}_{N-2} \quad (3.39)$$

où
$$k_{N-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta_{R_{N-1}}}{\Delta \eta} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_{R_N}}{\Delta \xi} + \frac{\eta_{R_N}}{\Delta \eta} \right)^{-1}$$

$$k_{N-2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\eta_{R_{N-2}}}{\Delta \eta} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_{R_N}}{\Delta \xi} + \frac{\eta_{R_N}}{\Delta \eta} \right)^{-1}$$

Si l'expression (3.39) est introduite dans l'équation (3.15) écrite au point $(N - 1)$, la forme suivante est obtenue

$$[A'_{N-1}] \Delta \vec{v}_{N-2} + [B'_{N-1}] \Delta \vec{v}_{N-1} = \vec{R}S_{N-1} \quad (3.40)$$

En introduisant celle-ci dans la formule de récurrence (3.19) écrite à $j = N - 2$, nous obtenons une expression pour le vecteur

$$\Delta \vec{v}_{N-1} = ([A'_{N-1}] [X_{N-2}] + [B'_{N-1}])^{-1} (\vec{R}S_{N-1} - [A'_{N-1}] \vec{Y}_{N-2}) \quad (3.41)$$

où $[A'_{N-1}] = [D_{N-2}]$ et $[B'_{N-1}] = [D_{N-1}]$

$$[D_i] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} + k_i c_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} + k_i c_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} + k_i c_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} + k_i c_{43} & d_{44} \end{bmatrix}$$

$$d_{ke} = \alpha_{ke} \quad \text{pour } i = N - 2; \quad d_{ke} = b_{ke} \quad \text{pour } i = N - 1$$

Dans ce cas, les coefficients de récurrence $[X_j]$ et \vec{Y}_j doivent être calculés jusqu'au point $j = N - 2$. Avec l'expression (3.41), nous calculons le vecteur $\Delta \vec{v}_{N-1}$ et ensuite, en utilisant la formule de récurrence (3.19), nous calculons le vecteur $\Delta \vec{v}_j$ en descendant le maillage de $j = N - 2$ à $j = 2$.

III.5.2. Écoulement compressible :

A) Conditions sur la paroi :

Pour un écoulement compressible visqueux, la condition de non-glissement sur la paroi impose $u_x = u_r = u_\theta = 0$. Il reste deux variables pour lesquelles des conditions doivent être imposées, la masse volumique ρ et l'énergie interne d'arrêt E . En plus, la pression sur la paroi doit être connue pour le calcul du gradient $\partial p / \partial \eta$ au deuxième point du maillage. Par conséquent, nous devons calculer la pression sur la paroi même si celle-ci n'est pas une des variables principales.

La température statique et la pression statique sont obtenues en fonction de la vitesse, de l'énergie et de la masse volumique par les formules suivantes

$$\bar{T} = \frac{1}{\bar{\rho} c_v} \left[\bar{E} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{e}^2}{2\bar{\rho}} \right] \quad (a)$$

(3.42)

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \cdot \left[\bar{E} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{e}^2}{2\bar{\rho}} \right] \quad (b)$$

Une relation entre la pression et l'énergie interne d'arrêt peut être déduite de l'expression (3.42.b) écrite sur la paroi avec $\bar{m} = \bar{n} = \bar{e} = 0$.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \eta} \right|_1 = (\gamma - 1) \cdot \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \eta} \quad (3.43)$$

où $\tilde{E} = \bar{E} \cdot \gamma = \rho E$

Pour le calcul du gradient de la pression, nous pouvons utiliser les expressions (3.24.a) ou (3.25) utilisées pour un écoulement incompressible.

i) Gradient de pression nul sur la paroi (équation (3.24)) :

Dans ce cas, l'équation (3.43) donne $\partial E / \partial \eta = 0$ et en utilisant une formule à trois points décentrée vers l'intérieur, nous obtenons

$$\Delta \bar{E}_1 = \alpha_2 \Delta \bar{E}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{E}_3 \quad (3.44)$$

où $\alpha_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}$ et $\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_1}$

Pour une paroi adiabatique, nous avons $\partial T / \partial \eta = 0$. Cette relation en combinaison avec la relation (3.24.a) et l'équation d'état d'un gaz parfait donne $\partial p / \partial \eta = 0$ qui, après la discrétisation avec une formule en trois points, fournit une expression pour $\Delta \bar{p}$ sur la paroi

$$\Delta \bar{p}_1 = \alpha_2 \Delta \bar{p}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{p}_3 \quad (3.45)$$

avec $\alpha_2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}$, et $\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_1}$

En introduisant les expressions (3.44) et (3.45) dans l'équation (3.15) et après les calculs, nous obtenons une relation de même forme que (3.30). En comparant celle-ci avec la formule de récurrence (3.19), nous trouvons les coefficients $[X_1]$ et \bar{Y}_2 qui ont la même forme que (3.31).

ii) Gradient de pression sur la paroi qui prend en compte les termes visqueux (expression (3.25)) :

L'utilisation des différences décentrées en aval pour la discrétisation des dérivées de second ordre de l'équation (3.25) donne la relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{p} \bar{\xi}_r)_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{p} \eta_r) &= \alpha_1 \Delta \bar{p}_1 + \alpha_2 \Delta \bar{p}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{p}_3 \\ &+ \beta_2 \Delta \bar{u}_2 + \beta_3 \Delta \bar{u}_3 + \gamma_2 \Delta \bar{v}_2 + \gamma_3 \Delta \bar{v}_3 \end{aligned}$$

Pour le calcul du membre de gauche de cette relation, l'expression (3.42.b) écrite sur la paroi sera utilisée. Après introduction de cette expression dans la relation ci-dessus, la discrétisation nous fournit

$$\begin{aligned} \alpha_1 \Delta \bar{p}_1 + \alpha_2 \Delta \bar{p}_2 + \alpha_3 \Delta \bar{p}_3 + \beta_2 \Delta \bar{u}_2 + \beta_3 \Delta \bar{u}_3 \\ + \gamma_2 \Delta \bar{v}_2 + \gamma_3 \Delta \bar{v}_3 + \delta_1 \Delta \bar{E}_1 + \delta_2 \Delta \bar{E}_2 + \delta_3 \Delta \bar{E}_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Cette expression comprend les deux inconnues $\Delta \bar{\rho}_1$ et $\Delta \bar{E}_1$. Une relation entre $\Delta \bar{\rho}_1$ et $\Delta \bar{E}_1$ est encore nécessaire.

Pour une paroi adiabatique avec la condition de non-glissement sur la paroi, la formule (3.42.a) donne

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_1 = \frac{1}{c_v} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{\rho}} \right) = 0 \quad (3.47)$$

ou en introduisant l'opérateur temporel Δ nous avons

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\Delta \bar{E}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{E}}{\bar{\rho}^2} \cdot \Delta \bar{\rho} \right] = 0 \quad (3.48)$$

Si nous utilisons une formule de trois points en avant pour la discrétisation de l'expression (3.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} -3 \cdot \left(\frac{\Delta \bar{E}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{E}}{\bar{\rho}^2} \cdot \Delta \bar{\rho} \right)_1 + 4 \cdot \left(\frac{\Delta \bar{E}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{E}}{\bar{\rho}^2} \cdot \Delta \bar{\rho} \right)_2 \\ - \left(\frac{\Delta \bar{E}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{E}}{\bar{\rho}^2} \cdot \Delta \bar{\rho} \right)_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les équations (3.46) et (3.49) forment un système de deux équations avec deux inconnues $\Delta \bar{\rho}_1$ et $\Delta \bar{E}_1$. En le résolvant et en introduisant la solution dans l'équation (3.15), nous obtenons une équation similaire à (3.30) et qui, après calculs, nous permet d'obtenir les coefficients $[X_2]$ et \bar{Y}_2 qui ont la même forme que ceux de (3.31).

B) Conditions sur la frontière extérieure du domaine :

Pour un écoulement compressible, comme dans un écoulement incompressible, nous distinguons deux cas. Dans le premier, des conditions Dirichlet seulement peuvent être imposées tandis qu'au deuxième des conditions mixtes Neumann et Dirichlet peuvent être utilisées. Pour un écoulement compressible, la distribution de la masse volumique et de l'énergie d'arrêt ou leurs gradients doivent être donnés sur la frontière extérieure.

Si des conditions Dirichlet sont utilisées pour ρ , p , u_x , u_θ et E et condition Neumann pour u_r sur la frontière extérieure, les équations obtenues ont exactement la même forme que celles utilisées dans le cas d'un écoulement incompressible.

III.5.3. Résumé des conditions aux limites utilisées en pratique dans le présent calcul :

Écoulement incompressible :

Sur la paroi, la condition de non-glissement a été imposée $u_z = u_r = u_\theta = 0$. Pour la pression, la condition (3.24) d'un gradient nul a été utilisée pour tous les cas calculés. Cette condition pour un maillage orthogonal sur la paroi conduit à la relation (3.28)

$$P_\eta = 0$$

qui a été introduite dans l'algorithme. Dans le cas d'un écoulement laminaire, bidimensionnel, la relation (3.27) qui donne la variation temporelle de la pression sur la paroi par la continuité explicite a aussi été testée avec succès.

Sur la frontière extérieure, des conditions Dirichlet ont été données pour les composantes u_z et u_θ de la vitesse et pour la pression p_v . Pour la composante normale u_r de la vitesse, le gradient de sa variation temporelle obtenu par la continuité écrite sur cette frontière a été imposé

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi_r \Delta \bar{\eta})_{i+1/2, N} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta_r \Delta \bar{\eta})_{i+1/2, N} = 0$$

Écoulement compressible :

Dans ce cas, nous avons fait l'hypothèse d'une enthalpie d'arrêt constante, uniforme partout sur le domaine $H_0 = c_p T_0 = ct$. Par conséquent, l'équation instationnaire pour l'énergie n'a pas été utilisée.

Sur la paroi, la condition de non-glissement a imposé $u_z = u_r = u_\theta = 0$. Pour la pression, la condition (3.28) d'un gradient nul sur la paroi a été choisie. Pour une paroi adiabatique, il s'en déduit

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_1 = 0$$

Sur la frontière extérieure, la distribution de u_z , u_θ et de la pression p a été donnée. Pour la composante u_r la même condition Neumann que pour un écoulement incompressible a été utilisée. La masse volumique sur cette frontière a été calculée par une équation de gaz parfait et elle a été imposée comme condition Dirichlet.

III.6. ANALYSE DE STABILITE

Une méthode numérique implicite a été présentée dans les paragraphes précédents pour la résolution des équations développées. Les schémas implicites sont théoriquement inconditionnellement stables. Au contraire, pour les schémas explicites, le pas d'intégration en temps se limite à de petites valeurs par suite de problèmes numériques liés à la stabilité. Dans la pratique, cependant, même pour les schémas implicites, le pas temporel n'est pas illimité et les conditions de stabilité, liant divers paramètres intervenant dans la résolution, peuvent servir d'indicateurs.

Dans ce paragraphe, une brève référence à la théorie linéaire de stabilité sera présentée, ce qui permettra d'évaluer les possibilités et les limitations de point de vue numérique de la méthode développée. Une analyse claire de stabilité des différents schémas explicites et implicites a été effectuée par PEYRET et TAYLOR [73]. Des travaux importants sur l'application de la théorie de stabilité sur les écoulements visqueux et non-visqueux ont aussi été réalisés par BEAM et WARMING [100,105,106,107,108,109] et Mac CORMACK [110,111,112]. Nous allons en mentionner les principes de base.

III.6.1. Schémas explicites centrés :

i) Cas d'une équation linéaire :

Considérons tout d'abord une équation de convection-diffusion parabolique, monodimensionnelle et linéaire

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial W}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (3.50)$$

où $A = ct$ et $\nu = ct$

Si des différences spatiales centrées sont utilisées pour la discrétisation, cette équation peut être approchée par le schéma suivant.

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + A \cdot \frac{W_{i+1}^n - W_{i-1}^n}{2 \Delta x} - \nu \cdot \frac{W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (3.51)$$

L'analyse linéaire de stabilité de type Von Neumann (développement en série de Fourier) montre que, pour que le schéma explicite (3.51) soit stable, les conditions suivantes doivent être satisfaites [73].

$$\frac{A^2 \Delta t}{2\nu} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \quad (3.52)$$

Nous considérons maintenant une équation linéaire, parabolique et bidimensionnelle

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial W}{\partial y} - \nu \nabla^2 W = 0 \quad (3.53)$$

La discrétisation de cette équation par des différences finies centrées dans les deux directions donne le schéma

$$\begin{aligned} \frac{W_{ij}^{n+1} - W_{ij}^n}{\Delta t} + A \cdot \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + B \cdot \frac{W_{i,j+1}^n - W_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \\ - \nu (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) W_{ij}^n = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ce schéma de précision de premier ordre en temps et de deuxième ordre en espace doit satisfaire les conditions suivantes d'après PEYRET et TAYLOR [73]

$$\Delta t \leq \frac{4\nu}{(|A| + |B|)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4} \quad (3.55)$$

avec $\Delta x = \Delta y$

ii) Cas d'une équation non-linéaire :

Examinons maintenant le cas d'une équation monodimensionnelle parabolique non-linéaire du type des équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (3.56.a)$$

et le cas d'une équation hyperbolique non-linéaire du type des équations d'Euler

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} = 0 \quad (3.56.b)$$

Quand ν est très petit, la solution de (3.56.a) a le même comportement que la solution de (3.56.b) pour les régions éloignées de limites solides. En général, les méthodes pour la résolution de (3.56.a) sont des extensions des méthodes pour la résolution de (3.56.b). Une analyse pour la deuxième équation sera donc tout d'abord entreprise.

Equation (3.56.b) :

En appliquant la formule trapézoïdale autour du point temporel $(n + 1/2)$ sur l'équation (3.56.b), elle devient

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial F^{n+1}(W)}{\partial x} + \frac{\partial F^n(W)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.57)$$

La procédure de linéarisation de la fonction ou du vecteur F, présentée dans le paragraphe (III.2)

$$F^{n+1} = F^n + A^n (W^{n+1} - W^n)$$

appliquée sur l'équation (3.57) et en utilisant une relation explicite

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^{n+1/2} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n$$

donne l'équation ci-dessous

$$W^{n+1} = W^n - \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[A^n \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n \right]$$

En utilisant un schéma aux différences centrées autour du point (i) pour la discrétisation spatiale de cete équation, nous obtenons

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \Delta t \cdot \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \cdot \left[A_{i+1/2}^n \cdot (F_{i+1}^n - F_i^n) - A_{i-1/2}^n \cdot (F_i^n - F_{i-1}^n) \right] \quad (3.58)$$

Ce schéma est totalement conservatif de forme analogue à celle sous laquelle nous avons discrétisé nos équations. L'analyse linéaire de stabilité impose que la condition suivante soit satisfaite

$$|A(w)| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.59.a)$$

Dans le cas où l'équation (3.56.b) est vectorielle, BEAM et WARMING [105], en considérant la matrice A constante pour pouvoir appliquer la théorie linéaire de stabilité, ont remplacé l'équation (3.56.b) par un système des équations

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \cdot \frac{\partial W_k}{\partial x} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, M$$

où λ_k les valeurs propres de la matrice A. La condition imposée par l'analyse de stabilité est analogue à (3.59.a)

$$|\lambda_k| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.59.b)$$

Les expressions (3.59.a) et (3.59.b) sont connues sous le nom de critères de courant - Friedrichs - Lewy (C.F.L.).

Equation (3.56.a) :

Pour cette équation parabolique, discrétisée de façon analogue à celle utilisée pour la discrétisation de l'équation hyperbolique (3.56.b), le pas en temps imposé par la théorie de stabilité est

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\nu + |A| \cdot \Delta x} \quad (3.60)$$

Nous examinons maintenant les cas de deux équations analogues aux équations (3.56.a) et (3.56.b) mais bidimensionnelles.

Pour une équation non-linéaire, hyperbolique, bidimensionnelle

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} + \frac{\partial G(w)}{\partial y} = 0 \quad (3.61)$$

la condition de stabilité est donnée ci-après

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|A|}{\Delta x} + \frac{|B|}{\Delta y}} \quad (3.62)$$

où $A = dF/dW$ et $B = dG/dW$

Pour une équation non-linéaire, parabolique, bidimensionnelle

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} - \nu (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) W = 0 \quad (3.63)$$

l'analyse de stabilité impose, si $\Delta x = \Delta y$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{4\nu}{\Delta x^2} + \left(\frac{|A|}{\Delta x} + \frac{|B|}{\Delta x} \right)} \quad (3.64)$$

Les équations de Navier-Stokes écrites sous une forme vectorielle adimensionnelle, analogue à l'équation (3.63)

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} - \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}_v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.65.a)$$

et transformées dans un nouveau système (ξ, η) prennent la forme

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} - \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{\partial \bar{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}_v}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (3.65.b)$$

Pour cette équation transformée, approchée par un schéma aux différences centrées, explicite KUTLER, CHACRAVARTHY et LOMBARD [86] ont choisi la condition suivante sur le pas en temps

$$\Delta t = \min(\Delta t_A, \Delta t_B) \quad (3.66)$$

où les pas Δt_A , Δt_B sont déterminés par le critère C.F.L. sous la forme

$$CFL = \Delta t_A \cdot \max(|\lambda_{A1}|, |\lambda_{A2}|, |\lambda_{A3}|) \leq 1 \quad (3.66.a)$$

$$CFL = \Delta t_B \cdot \max(|\lambda_{B1}|, |\lambda_{B2}|, |\lambda_{B3}|) \leq 1$$

Les valeurs propres des matrices Jacobiennes $A = \partial \bar{F} / \partial \bar{W}$ et $B = \partial \bar{G} / \partial \bar{W}$ sont données par les formules

$$\lambda_{1,2} = k_0 + u k_1 + v k_2$$

$$\lambda_{3,4} = k_0 + u k_1 + v k_2 \pm c (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$$

où k_i les métriques et c la vitesse locale du son.

Nous pouvons remarquer que, dans le critère de stabilité (3.66) pour l'équation (3.65.b), les termes dissipatifs n'interviennent pas. Cependant, pour l'équation analogue (3.63), la prise en compte de ces termes conduit à un critère (3.64) qui est plus strict. Pour un écoulement laminaire, le terme de la viscosité est négligeable mais, pour un écoulement turbulent, il peut être important et modifier beaucoup la valeur de C.F.L. donnée par l'expression (3.64) par rapport à celle fournie par (3.66).

III.6.2. Schémas explicites décentrés :

Des schémas explicites aux différences finies centrées pour les termes convectifs ont été présentés jusqu'ici. Nous avons vu que, pour ces schémas, des pas temporels d'intégration très petits sont imposés par l'analyse de stabilité. Pour traiter ce problème, des différences non centrées pour les dérivées convectives de premier ordre ont été souvent utilisées ; une analyse approfondie sur la stabilité des schémas décentrés, explicites ou implicites, a été effectuée par BEAM et WARMING [100,105,108] dont nous allons présenter les principes. Considérons l'équation hyperbolique (3.56.b) écrite sous une forme non-conservative

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{où} \quad A = \frac{\partial F}{\partial W}$$

La direction du décentrement est déterminée par le signe de A et ce choix peut se justifier par la théorie des lignes caractéristiques. La solution générale de cette équation est de type $W=W(x-At)$. La forme de la solution exacte reste constante le long de la ligne caractéristique $x-At=ct$. Par conséquent, pour un point (x,t) , l'information vient d'une direction caractérisée par la valeur de A. Alors, si $A > 0$, l'information se propage dans la direction $x > 0$, l'information se propage dans la direction $x < 0$ et nous devons utiliser une différence décentrée en avant.

Si l'équation (3.56.b) est vectorielle, elle peut être remplacée par un système d'équations

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \cdot \frac{\partial W_k}{\partial x} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (3.67)$$

où λ_k les valeurs propres de la matrice Jacobienne A.

L'analyse de stabilité effectuée par BEAM et WARMING [108] montre, pour un schéma décentré en arrière, qu'une condition nécessaire de stabilité se traduit par des valeurs propres λ_k positives. Au contraire, dans le cas de décentrement en aval, il faut que toutes les valeurs propres λ_k soient négatives.

Les deux cas des différences décentrées peuvent être regroupées dans un seul schéma pour discrétiser l'équation parabolique (3.56.a)

$$\begin{aligned} \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{A}{2\Delta x} \cdot \left[(1-\epsilon)(W_{i+1}^n - W_i^n) + (1+\epsilon)(W_i^n - W_{i-1}^n) \right] \\ - \frac{\nu}{\Delta x^2} \cdot (W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.68)$$

ou $\epsilon = \text{signe}(A)$. Pour ce schéma, PEYRET et TAYLOR, avec l'analyse en série de Fourier, ont trouvé la condition suivante

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\nu + |A| \cdot \Delta x} \quad (3.69)$$

Pour $\nu = 0$, le critère (3.69) devient

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|A|} \quad \text{ou autrement} \quad CFL = \frac{|A| \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.70)$$

qui est moins strict que la condition (3.52) d'après PEYRET et TAYLOR [73].

La restriction sur le pas d'intégration peut donc être diminuée avec l'utilisation des schémas non centrés mais la précision de la discrétisation spatiale diminue sauf dans le cas d'utilisation des différences non centrées aux trois points avec précision de deuxième ordre. Or, dans ce cas, les conditions aux limites doivent être spécialement traitées comme YEE, BEAM et WARMING [106] le suggèrent.

Pour l'équation bidimensionnelle (3.53) un schéma décentré analogue à (3.68) est

$$\begin{aligned} & \frac{W_{ij}^{n+1} - W_{ij}^n}{\Delta t} \\ & + \frac{A}{2\Delta x} \cdot \left[(1 - \epsilon_A) \cdot (W_{i+1,j}^n - W_{ij}^n) + (1 + \epsilon_A) \cdot (W_{ij}^n - W_{i-1,j}^n) \right] \\ & + \frac{B}{2\Delta y} \cdot \left[(1 - \epsilon_B) \cdot (W_{i,j+1}^n - W_{ij}^n) + (1 + \epsilon_B) \cdot (W_{ij}^n - W_{i,j-1}^n) \right] \\ & - \nu (\Delta_{xx} + \Delta_{yy}) W_{ij}^n = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

où $\epsilon_A = \text{signe}(A)$, $\epsilon_B = \text{signe}(B)$.

La condition de stabilité est

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\nu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + \frac{|A|}{\Delta x} + \frac{|B|}{\Delta y}} \quad (3.72)$$

Mac CORMACK [110] a utilisé pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes un schéma explicite, décentré avec les conditions de stabilité suivantes

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{2\nu}{\Delta x^2}} \quad (3.73)$$
$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|v| + c}{\Delta y} + \frac{2\nu}{\Delta y^2}}$$

où $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ la vitesse locale du son qui traduit la contribution de la pression dans l'équation de quantité de mouvement.

III.6.3. Schémas implicites :

La limitation du pas en temps, quelques fois très restrictive, notamment pour des maillages denses pour les schémas explicites, a conduit à l'apparition des schémas implicites. Cependant, tous les schémas implicites ne sont pas inconditionnellement stables [73].

Examinons tout d'abord la discrétisation des équations hyperboliques de type des équations d'Euler.

a) Cas des équations hyperboliques :

La forme générale d'un schéma implicite pour la discrétisation de l'équation linéaire, hyperbolique (3.56.b) est

$$W_i^{n+1} = W_i^n - (1-\alpha) \cdot \frac{A \Delta t}{\Delta x} \cdot \delta_x W_i^n - \alpha \cdot \frac{A \Delta t}{\Delta x} \cdot \delta_x W_i^{n+1} \quad (3.74)$$

où δ_x peut désigner une différence centrée ou décentrée en amont ou en aval. Si $\delta_x(\)$ représente une différence centrée, le schéma ci-dessus est théoriquement inconditionnellement stable pour $\alpha > 1/2$.

Mac CORMACK [112] a utilisé un schéma implicite décentré en amont ou en aval en fonction du signe de A

$$\left(1 + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x}\right) \cdot \Delta W_i^{n+1} = \frac{|A| \Delta t}{\Delta x} \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n) + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x} \cdot \Delta W_{i+1}^{n+1} \quad (3.75)$$

où $\sigma = \alpha |A|$. Afin d'assurer une stabilité inconditionnelle, il a choisi pour le paramètre

$$\sigma \geq \frac{1}{2} \cdot \left(|A| - \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \quad (3.76.a)$$

BEAM et WARMING [100] ont testé la stabilité d'un schéma décentré en amont pour la discrétisation spatiale de l'équation hyperbolique (3.56.b) sous forme vectorielle, pour différentes discrétisations en temps. D'après ces auteurs, ce schéma spatial est conditionnellement stable si la formule trapézoïdale définie dans le paragraphe (III.2) est utilisée pour la discrétisation temporelle. La condition suivante doit être satisfaite

$$CFL = \frac{\lambda_k \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.77)$$

D'après les mêmes auteurs, une discrétisation en temps de type Euler implicite (avec les paramètres $\theta = 1$ et $\omega = 0$ dans la formule (3.2)) ou de type à trois points en amont (avec $\theta = 1$ et $\omega = 1$ dans la formule (3.2)) conduit à un schéma inconditionnellement stable.

Nous pouvons remarquer que la relation (3.76.a) proposée par Mac CORMACK, avec la valeur du paramètre $\alpha = 1/2$ (qui signifie que le schéma (3.75) et le résultat d'une discrétisation trapézoïdale en temps), est équivalent à la condition (3.77) proposée par BEAM et WARMING pour la formule trapézoïdale.

BEAM et WARMING [100] ont trouvé que l'utilisation d'une formule trapézoïdale avec des différences spatiales centrées pour la discrétisation des équations d'Euler conduit à un schéma dont le facteur d'amplification est toujours unité. Ce schéma est non-dissipatif et une dissipation additionnelle doit souvent être ajoutée.

Examinons maintenant la discrétisation implicite des équations paraboliques de type des équations de Navier-Stokes.

b) Cas des équations paraboliques :

Pour l'équation parabolique linéaire (3.56.a) où les termes convectifs sont discrétisés de la même façon (schéma (3.75)) que ceux de l'équation hyperbolique (3.56.b), Mac CORMACK [112] a choisi des valeurs pour le paramètre

$$\sigma \geq \max \left[\frac{1}{2} \left[|A| + \frac{2\nu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \right], 0 \right] \quad (3.76.b)$$

Pour la résolution des équations non-linéaires par des méthodes implicites, des procédures itératives sont nécessaires. Pour les éviter, différentes sortes de linéarisation des équations ont été entreprises. Nous allons nous concentrer aux travaux de Mac CORMACK [111,112] et de BEAM et WARMING [100,104].

Pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes, Mac CORMACK [112] a utilisé un schéma décentré analogue à celui utilisé pour l'équation linéaire (3.56). Il a redéfini les matrices Jacobiennes de linéarisation des termes convectifs en fonction des paramètres σ_i liés aux valeurs propres des matrices initiales

$$\sigma_i = \max \left(|u_i \pm c| + \frac{2\nu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t}, 0 \right) \quad (3.78)$$

de sorte que ces nouvelles matrices soient toujours positives. Pour la résolution de équations résultantes, il a utilisé un schéma de prédicteur-correcteur. Dans le schéma du prédicteur, un décentrement en aval a été réalisé, les valeurs propres de nouvelles matrices étant toutes positives. Dans le schéma du correcteur, un décentrement en amont a été effectué, les valeurs propres étant considérées avec le signe inversé. Le schéma global conserve la précision du deuxième ordre d'un schéma centré. Pour le régions où Δt satisfait les conditions explicites (3.73), les paramètres σ_i s'annulent et le système se réduit à un système explicite. On peut remarquer dans cette méthode que les termes visqueux interviennent dans le premier membre implicite par l'intermédiaire des paramètres σ_i , qui ne sont traités que par des dérivées premières ce qui allège considérablement le calcul. Le schéma de discrétisation conduit alors à un système bidiagonal par blocs dont la résolution demande moins d'effort numérique que pour celle d'un système tridiagonal. Cependant, en revanche, le nouveau calcul des matrices Jacobiennes par des matrices de transformation augmente le poids du calcul notamment quand ces dernières ne sont pas analytiquement connues.

Le schéma de BEAM et WARMING [100] pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes, avec des dérivées spatiales mixtes de précision temporelle de deuxième ordre, est inconditionnellement stable si les paramètres θ et ω sont

$$\theta = \omega + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(1 + 2\omega)^3}{1 + \omega} \geq 4 \quad \text{ou} \quad \omega \geq .385 \quad (3.79.a)$$

Dans le cas où cette précision n'est pas nécessaire, le schéma est inconditionnellement stable si

$$0 \leq \omega \leq \theta - \frac{1}{2} \quad (3.79.b)$$

Ce schéma conduit à un système tridiagonal par blocs dont la résolution par l'algorithme de Thomas demande que des conditions de stabilité soient imposées. Nous en parlerons dans le paragraphe III.6.5.

III.6.4. Schémas paraboliques implicites :

Une des caractéristiques des schémas paraboliques, comme celui développé dans le chapitre précédent, est que les informations se propagent dans une direction privilégiée dans un seul sens (de l'amont vers l'aval). Dans chaque plan, le calcul dépend seulement des variables au plan précédent. Les dérivées de premier ordre sont par conséquent approchées par des différences décentrées en amont dans cette direction. D'après l'analyse de BEAM et WARMING [108], mentionnée dans le paragraphe III.6.2, pour que la stabilité d'un tel schéma soit assurée, toutes les valeurs propres de la matrice convective dans la direction longitudinale ξ doivent être positives.

Or, dans le cas du calcul d'un écoulement compressible subsonique par les équations parabolisées de Navier-Stokes

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial G_v}{\partial \eta}$$

cette condition n'est pas satisfaite. Les valeurs propres de matrice $\mathcal{F} = \partial F / \partial W$ sont

$$\lambda_{1,2} = u_z \quad , \quad \lambda_{3,4} = u_z \pm c \quad (3.80.a)$$

On peut remarquer que $\lambda_4 < 0$, ce qui peut être une source des instabilités numériques. Pour traiter ce problème, SCHIFF et STEGER [59] ont imposé la pression dans le calcul du vecteur F et de la matrice \mathcal{F} . Après cette opération, ils obtenaient des valeurs propres $\lambda_k = u_z > 0$ si $u_z > 0$.

Pour un écoulement incompressible étudié avec la méthode de la compressibilité artificielle par STEGER et KUTLER [75], les valeurs propres de matrice $\mathcal{F} = \partial F / \partial W$ étaient

$$\lambda_{1,2} = u_z \quad , \quad \lambda_{3,4} = u_z \pm \sqrt{\beta + u_z^2} \quad (3.80.b)$$

Si l'analyse de BEAM et WARMING [100], exposée dans le paragraphe III.6.3., est considérée, un schéma avec des différences spatiales centrées n'est pas instable. Cette démarche a été suivie notamment par STEGER et KUTLER [75]. Mais dans le cas où une dérivée décentrée en amont selon ξ est utilisée (comme pour un écoulement parabolique) l'existence d'une valeur propre négative ($\lambda_4 < 0$) peut conduire à l'apparition des instabilités.

Nous allons voir, dans le paragraphe III.6.6. comment les problèmes de stabilité mentionnés ci-dessus pour un écoulement compressible ou incompressible, ont été envisagés dans la présente méthode.

III.6.5. Stabilité de l'algorithme de la résolution :

L'application de la technique de factorisation (3.19)

$$\Delta \rho_j = X_j \Delta \rho_{j+1} + Y_j$$

pour la résolution d'un système tridiagonal comme (3.15)

$$A_j \Delta \rho_{j-1} + B_j \Delta \rho_j + C_j \Delta \rho_{j+1} = R S_j$$

impose certaines limitations sur le nombre de Reynolds local lié au pas du maillage ou sur le pas d'intégration, associées à la dominance diagonale. La dominance diagonale

$$|B_j| \geq |A_j| + |C_j| \quad (3.81)$$

et une condition nécessaire pour que le système (3.15) converge [102].

KHOSLA et RUBIN [113] ont montré que, pour une méthode utilisant cette technique, si les dérivées de premier ordre sont approchées par des différences décentrées, la dominance diagonale du système (3.15) est toujours vérifiée et la technique de récurrence (3.19) est inconditionnellement stable. Si des différences centrées sont utilisées dans la direction de la résolution (R par exemple) la dominance diagonale est assurée si

$$Re = \frac{u_R \cdot \Delta R}{\nu} \leq 2 \quad (a)$$

(3.82)

ou $\frac{u_R \cdot \Delta R}{\nu} \geq 2$ et $\frac{u_R \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (b)

Si la condition (3.82.a) n'est pas satisfaite, une limitation du pas en temps équivalente est donnée d'après PEYRET et TAYLOR [73]

$$\Delta t \leq \frac{2 (\Delta R)^2}{u_R \Delta R - 2 \nu} \quad (3.83)$$

Si aucune des conditions (3.82) ou (3.83) n'est satisfaite, la procédure (3.19) peut conduire à l'amplification des erreurs numériques lors de la résolution.

Dans le paragraphe qui suit, la combinaison et l'utilisation des différentes restrictions dépendant du schéma de la discrétisation et de l'algorithme de la résolution de ce travail seront présentées.

III.6.6. Stabilité de la présente méthode :

Nous avons vu dans les paragraphes III.6.3. et III.6.4. que des conditions de stabilité sont, dans certains cas, nécessaires, même pour des schémas implicites. Nous allons les répéter ici très brièvement.

- Si des dérivées convectives décentrées en amont ou en aval selon une direction sont utilisées, les valeurs propres de la matrice Jacobienne dans cette direction doivent être toutes positives ou toutes négatives respectivement.
- Si une formule trapézoïdale de discrétisation en temps avec des différences spatiales décentrées sont utilisées, le critère C.F.L. (relation (3.77)) doit être satisfait. Si une formule Euler implicite ou à trois points en amont avec des différences spatiales décentrées sont utilisées, le schéma résultant est inconditionnellement stable.
- Si une formule de discrétisation en temps quelconque avec des différences spatiales centrées sont utilisées, le schéma résultant est inconditionnellement stable. Cependant, ce schéma est dans certains cas non-dissipatif et une viscosité artificielle doit être ajoutée.
- Si des différences spatiales mixtes de précision temporelle de deuxième ordre interviennent dans le schéma discrétisé, la relation (3.79.a) doit être satisfaite pour que le schéma soit

inconditionnellement stable. Si cette précision n'est pas nécessaire, la relation (3.79.b) est suffisante pour que le schéma soit inconditionnellement stable.

Dans notre méthode, nous avons calculé le pas en temps Δt imposé par les critères explicites (3.73) qui nous ont servi d'indicateurs. Des pas temporels Δt beaucoup plus grands sont ensuite testés. Nous avons alors remarqué l'existence d'un pas optimum pour la convergence dont nous parlerons en détail dans le chapitre IV où les résultats sont exposés.

Un schéma parabolique dans la direction ξ a été utilisé dans cette méthode. Nous avons vu dans le paragraphe III.6.4. que, dans ce cas, toutes les valeurs propres de la matrice \mathcal{F} doivent être positives. Pour un élément compressible subsonique, les valeurs propres de \mathcal{F} de notre schéma ont une forme analogue à (3.79) mais plus compliquées à cause du fait que nous n'utilisons pas l'équation instationnaire par l'énergie. L'apparition d'une valeur propre négative peut perturber la solution. Pour la supprimer, nous avons suivi la même démarche que SCHIFF et STEGER [59] en imposant la pression dans le vecteur F à partir d'un calcul annexe. Pour un écoulement incompressible, les valeurs propres de notre schéma ont une forme analogue à (3.80.b) mais plus compliquée à cause de transformation des équations. Une valeur propre négative de forme $\lambda = u_y - \sqrt{\beta + u_y^2}$ apparaît, dans notre cas. Pour des petites valeurs de β la méthode a donné des résultats sans présenter des instabilités. En augmentant β , la valeur propre négative devenait plus grande en valeur absolue et des problèmes de convergence se sont présentés. Nous avons alors utilisé des valeurs de β très petites, bien inférieures à celles données par la relation

$$\frac{4 \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left(\frac{1}{Re} + \frac{\beta \Delta t}{2} \right) \leq 1 \quad (3.84)$$

proposée par PEYRET et TAYLOR [73] pour assurer la stabilité de la méthode de compressibilité artificielle.

Pour la résolution du système tridiagonal (3.18) dans la direction η , nous avons utilisé la méthode de récurrence (3.19). L'algorithme construit permet l'utilisation soit des différences décentrées en amont, soit des différences centrées dans la direction η . Dans le premier cas, la dominance diagonale, condition nécessaire pour la stabilité de la méthode, est assurée inconditionnellement [113]. Or, d'après BEAM et WARMING [100], la

condition (3.77) doit être satisfaite dans ce cas puisque nous utilisons une formule trapézoïdale. Dans le deuxième cas, des limitations sur le pas en temps ne sont pas nécessaires mais la condition (3.82.a) a été utilisée pour assurer la dominance diagonale

$$|\rho_{B_j}| \geq |\rho_{A_j}| + |\rho_{C_j}| \quad (3.85)$$

ou ρ_{A_j} , ρ_{B_j} , ρ_{C_j} les rayons spectraux des matrices $[A_j]$, $[B_j]$, $[C_j]$.

III.7. DISCRETISATION SPATIALE - METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS DANS LE PLAN TRANSVERSAL

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe II.2.4.2., la composante moyenne de la vorticité dans la direction longitudinale induit un champ de vitesse secondaire dans le plan transversal. Nous allons calculer ces vitesses secondaires en utilisant le système (II) des équations qui se compose de :

- une équation (2.31) ou (2.32) pour la vorticité secondaire $\widehat{\Omega}_s$;
- une équation de Poisson (2.37) pour la fonction de courant $\widehat{\Psi}_s$;
- une équation de continuité locale (2.38) pour le potentiel $\widehat{\Phi}_s$.

Nous allons présenter dans ce qui suit la méthode numérique utilisée pour la résolution de chaque équation.

III.7.1. L'équation de la vorticité secondaire :

Nous avons utilisé l'équation simplifiée (2.31) où seulement le terme de production de $\widehat{\Omega}_s$ d  à la déflexion de ligne de courant a été conservé

$$d_s \left(\frac{\widehat{\Omega}_s}{\rho W_s} \right) = 2 \cdot \frac{\widehat{\Omega}_N}{\rho W_s} \cdot d_s \beta \quad (3.86)$$

Pour discrétiser l'équation ci-dessus, nous considérons des points intermédiaires $(i + 1/2)$ du maillage dans la direction ξ

$$\frac{\widehat{\Omega}_s}{\rho W_s} \Big|_{i+1} - \frac{\widehat{\Omega}_s}{\rho W_s} \Big|_i = 2 \cdot \frac{\widehat{\Omega}_N}{\rho W_s} \Big|_{i+1/2} \cdot \Delta \beta \Big|_i^{i+1}$$

et après le réarrangement des termes, nous avons

$$\Omega_{s_{i+1}} = \frac{(\rho W_s)_{i+1}}{(\rho W_s)_i} \cdot \Omega_{s_i} + 2 \cdot \frac{(\rho W_s)_{i+1}}{(\rho W_s)_i} \cdot \Omega_{N_{i+1/2}} \Delta \beta_i^{i+1} \quad (3.87)$$

Toutes les variables au point (i) sont déjà connues. Or les termes $(\rho W_s)_{i+1}$ et $(\rho W_s)_{i+1/2}$ intervenant dans le deuxième membre sont inconnus. Ils seront déterminés par approximations successives.

III.7.2. L'équation de Poisson par le calcul de Ψ_s :

Les composantes de la vitesse dans le plan transversal sont obtenues par les relations (2.36). Pour un écoulement moyenné circonférentiellement, ces relations se réduisent aux relations suivantes après l'analyse exposée au paragraphe II.2.4.2.

$$\begin{aligned} \widehat{W}_N &= -\frac{1}{h_s h_B} \cdot \frac{\widehat{\partial (h_s \Psi_s)}}{\partial u_B} \\ \widehat{W}_B &= \frac{1}{h_B} \cdot \frac{\widehat{\partial \Phi_s}}{\partial u_B} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Pour la détermination des composantes transversales locales, il faut tout d'abord calculer la fonction de courant Ψ_s par l'équation (2.37). Pour la résolution de celle-ci, nous introduisons la décomposition en série de Fourier de Ω_s et de Ψ_s comme celle réalisée par HAWTHORN [16] et OHAYON [38].

LEBOEUF [96] a distingué deux cas pour l'application de cette décomposition dans les turbomachines.

- i) Celui du tourbillon confiné entre deux aubages.
- ii) Celui du tourbillon dans la zone libre d'aubages.

Dans la zone aubée, la présence de deux parois est simulée en introduisant un tourbillon image $-\Omega_s$ dans les passages adjacents. Posant

$$X_\theta = \frac{\theta - \theta_P}{\theta_s - \theta_P} \quad (3.89)$$

la fonction impaire $\Omega_s(x_\theta, B)$ selon x_θ a été approchée par une série de Fourier

$$\Omega_s(x_\theta, B) = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{4}{k\pi} \cdot \widehat{\Omega}_s(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) \quad (3.90)$$

où $x_\theta \in [-1, 1]$

Dans une zone non-aubée, les conditions de périodicité selon θ aux limites imposent pour une distribution constante de Ω_s selon θ

$$\Omega_s(x_\theta, B) = \widehat{\Omega}_s(B) \quad (3.91)$$

Dans le cas où le tourbillon Ω_s n'est pas constant selon θ , nous pouvons utiliser la série de Fourier générale

$$\begin{aligned} \Omega_s(x_\theta, B) = (1-\delta) \cdot \sum_{k=1,3,\dots} a_k \cos[k\pi(x_\theta - 1/2)] \\ + \delta \cdot \sum_{k=1,3,\dots} b_k \sin(k\pi x_\theta) \end{aligned} \quad (3.92)$$

où $\delta = 0$ pour une zone non-aubée,

$\delta = 1$ pour une zone aubée,

$$b_k = \frac{4 \widehat{\Omega}_s(B)}{k\pi}$$

L'équation de Poisson (2.37), après l'application de certaines hypothèses, prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{h_N}{h_B} \cdot \frac{\partial \Psi_s}{\partial u_B} \right) + \frac{1}{(R \cos \beta_e)^2} \cdot h_B h_N \cdot \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \theta^2} = -h_B h_N \Omega_s$$

L'introduction de (3.89) dans celle-ci et l'hypothèse que h_N est constant, donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{1}{h_B} \cdot \frac{\partial \Psi_s}{\partial u_B} \right) + \frac{1}{(g \cos \beta_e)^2} \cdot h_B \cdot \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x_\theta^2} \\ = -h_B \cdot \Omega_s(x_\theta, B) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Pour la résolution de cette équation, nous introduisons un développement en série de Fourier de $\Psi_s(x_\theta, B)$ analogue à celui pour Ω_s

$$\begin{aligned} \Psi_s(x_\theta, B) &= (1 - \delta) \cdot \sum \lambda_k(B) \cdot \cos[k\pi(x_\theta - 1/2)] \\ &+ \delta \sum \Psi_k(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Les deux cas de zone aubée et de celle non-aubée seront examinés séparément dans ce qui suit.

i) Zone aubée :

L'équation (3.93) après l'introduction des formules (3.92) et (3.94) avec $\delta = 1$ donne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_B} \left\{ \frac{1}{h_B} \cdot \frac{\partial}{\partial u_B} \left[\sum \Psi_k(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{(g \cos \beta_e)^2} \cdot h_B \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_\theta^2} \left[\sum \Psi_k(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) \right] \\ &= - h_B \sum \frac{4}{k\pi} \cdot \hat{\Omega}_s(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) \end{aligned}$$

Après les calculs, une expression pour chaque indice k est obtenue, le développement en série de Fourier étant unique

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{1}{h_B} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial u_B} \right) - \frac{1}{(g \cos \beta_e)^2} \cdot h_B \cdot (k\pi)^2 \cdot \Psi_k \\ &= - h_B \cdot \frac{4}{k\pi} \cdot \hat{\Omega}_s(B) \end{aligned} \quad (3.95)$$

L'équation ci-dessus est de deuxième ordre avec des coefficients qui ne dépendent pas de l'inconnue. Pour sa discrétisation, nous allons utiliser un schéma aux différences finies, selon B , similaire à celui utilisé pour l'équation (2.55). Cette discrétisation conduit à un système tridiagonal pour la résolution duquel l'algorithme de Thomas sera utilisé. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet $\Psi_k = 0$ pour toutes les parois.

L'équation (3.95) écrite sur un point (j) du maillage devient

$$\frac{1}{h_{B_{j+1/2}}} \cdot \frac{\Psi_{\kappa_{j+1}} - \Psi_{\kappa_j}}{u_{B_{j+1}} - u_{B_j}} - \frac{1}{h_{B_{j-1/2}}} \cdot \frac{\Psi_{\kappa_j} - \Psi_{\kappa_{j-1}}}{u_{B_j} - u_{B_{j-1}}} = \frac{u_{B_{j+1/2}} - u_{B_{j-1/2}}}{(3.96)}$$

$$- \frac{h_{B_j}}{(g \cdot \cos \beta_e)_j^2} \cdot (k\pi)^2 \Psi_{\kappa_j} = - \frac{4}{k\pi} \cdot (h_B \hat{\Omega}_s)_j$$

où $\Delta u_B = u_{B_{j+1}} - u_{B_j} = 1$

et les métriques h_B sont calculées aux points $(j \pm 1/2)$

et $h_{B_{j+1/2}} = (B)_{j+1} - (B)_j$

$$h_{B_j} = \frac{h_{B_{j+1/2}} + h_{B_{j-1/2}}}{2}$$

Après le réarrangement des termes, l'équation (3.96) prend la forme ci-après

$$A_j \Psi_{\kappa_{j-1}} + B_j \Psi_{\kappa_j} + C_j \Psi_{\kappa_{j+1}} = F_j \quad (3.97)$$

où

$$\begin{aligned}
 A_j &= \frac{1}{h_{B_{j-1/2}}} \\
 B_j &= -\frac{1}{h_{B_{j-1/2}}} - \frac{1}{h_{B_{j+1/2}}} - \frac{h_{B_j} \cdot (k\pi)^2}{(g \cdot \cos \beta_e)_j^2} \\
 C_j &= \frac{1}{h_{B_{j+1/2}}} \\
 F_j &= -\frac{4}{k\pi} \cdot h_{B_j} \cdot \hat{\Omega}_{S_j}
 \end{aligned}
 \tag{3.98}$$

Pour le calcul de Ψ_k à chaque point (j) du maillage, les formules de récurrence ont été utilisées

$$\begin{aligned}
 \Psi_{k_j} &= X_j \Psi_{k_{j+1}} + Y_j \\
 X_j &= -\frac{C_j}{B_j + A_j X_{j-1}}, \quad Y_j = \frac{F_j - A_j \Psi_{k_{j-1}}}{B_j + A_j X_{j-1}}
 \end{aligned}
 \tag{3.99}$$

Après le calcul du coefficient Ψ_k la fonction de courant $\Psi_s(x_\theta, B)$ peut être déterminée par la formule (3.94) avec $\delta = 1$

$$\Psi_s(x_\theta, B) = \sum \Psi_k(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta)$$

Dans notre cas, nous étudions un écoulement moyenné en θ . Nous calculons la fonction $\hat{\Psi}_s(B)$ moyennée selon θ

$$\begin{aligned}
 \hat{\Psi}_s(B) &= \sum_k \int_0^1 \Psi_k(B) \cdot \sin(k\pi x_\theta) dx_\theta \\
 &= \sum_k \frac{2\Psi_k}{k\pi}
 \end{aligned}
 \tag{3.100}$$

La relation (3.88.a) en supposant que h_s ne change pas dans la direction B , devient avec la formule de Leibniz

$$\widehat{W}_N = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial B} (b \widehat{\Psi}_s) - \frac{N_\kappa}{2\pi b} \cdot \left(\Psi_{s_s} \cdot \frac{\partial \theta_s}{\partial B} - \Psi_{s_p} \cdot \frac{\partial \theta_p}{\partial B} \right)$$

et puisque $\Psi_s = 0$ sur toutes les limites

$$\widehat{W}_N = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial B} (b \widehat{\Psi}_s) \quad (3.101)$$

Si un schéma aux différences centrées pour chaque point (j) est utilisé pour la discrétisation de relation (3.101) nous avons

$$\widehat{W}_{N_j} = \frac{1}{b_j} \cdot \frac{(b \widehat{\Psi}_s)_{j+1} - (b \widehat{\Psi}_s)_{j-1}}{(B)_{j+1} - (B)_{j-1}} \quad (3.102)$$

Pour la détermination de la composante moyennée \widehat{W}_B il faut d'abord calculer le potentiel moyen $\widehat{\Phi}_s$. Dans la pratique, pour un écoulement moyenné selon θ il n'est pas nécessaire d'utiliser l'équation (2.38) pour le calcul de $\widehat{\Phi}_s$. Dans ce cas, LEBOEUF [96] a montré que \widehat{W}_B peut être directement calculée par une équation de continuité locale

$$b R \rho \widehat{W}_B = - \frac{\partial \widehat{Q}_z(B)}{\partial z} \quad (3.103)$$

où

$$\widehat{Q}_z(B) = \int_0^H b R u_z dB$$

Notons que, dans ce cas, pour notre problème, la composante normale \widehat{W}_B (qui coïncide avec u_R) est en fait donnée par la résolution de notre système principal (I).

ii) Zone non-aubée :

L'équation (3.93) après l'introduction des formules (3.92) et (3.94) avec $\delta = 0$ donne pour chaque indice k l'expression suivante

$$\frac{\partial}{\partial u_B} \left(\frac{1}{h_B} \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_B} \right) - \frac{(k\pi)^2}{(g \cos \beta_e)^2} \cdot h_B \cdot \lambda_k = -h_B \alpha_k \quad (3.104)$$

Cette équation en combinaison avec la relation (3.91) nous donne

$$\alpha_0 = \widehat{\Omega}_{S_0}(B) \quad \text{et} \quad \alpha_k = 0 \quad \forall k \neq 0$$

La condition sur la paroi est $\Psi_S(\theta, B=0) = \Psi_{S_0}(B=0)$

et l'équation (3.104) impose $\lambda_k(B) = 0 \quad \forall k \neq 0$

puisque $\alpha_k = 0 \quad \forall k \neq 0$

Nous pouvons alors écrire $\lambda_0(B) = \Psi_{S_0}$ et (3.104) donne

$$\frac{\partial^2 \Psi_{S_0}}{\partial B^2} = -\widehat{\Omega}_{S_0}(B)$$

$$\widehat{W}_N(B) = -\frac{\partial \widehat{\Psi}_{S_0}}{\partial B} = \int_0^B \widehat{\Omega}_{S_0}(B) dB + \widehat{W}_N(B=0) \quad (3.105)$$

$$\Psi_S(B) = \int_0^B [\widehat{W}_N(B) - \widehat{W}_N(B=0)] dB + \widehat{\Psi}_{S_0}(B=0)$$

III.8. COUPLAGE DE LA RESOLUTION DANS LE PLAN LONGITUDINAL AVEC CELLE DANS LE PLAN TRANSVERSAL - ORGANISATION GENERALE DU CALCUL

Nous avons vu jusqu'ici la méthode numérique que nous avons utilisée pour la résolution des équations traitant le problème dans le plan longitudinal (paragraphes III.3. et III.4.) ainsi que celle utilisée pour la résolution des équations relatives dans le plan transversal (paragraphe III.7). Dans le présent paragraphe, les différentes possibilités de coupler ces deux calculs de façon cohérente seront présentées.

Le problème global se pose de la manière suivante. En connaissant le facteur de blocage b dans le passage interaube, la géométrie des aubages, la répartition extérieure de la vitesse moyenne selon θ (module et angle) et l'état de la couche visqueuse tridimensionnelle à l'entrée du domaine de calcul, il faut calculer les couches visqueuses pariétales se développant dans ce domaine. Nous présentons la méthode de la résolution pour un pas de calcul.

Supposons que toutes les quantités de l'écoulement sont connues à une station de calcul (i). Connaissant l'évolution des quantités de l'écoulement à l'extérieur de la couche visqueuse, nous devons les déterminer à la station (i + 1). Deux démarches sont possibles.

- i) Dans la première, nous découplons la résolution du calcul dans les plans longitudinal et transversal. La vorticité secondaire Ω_s est calculée au plan (i + 1) par l'équation (3.87) où les quantités à (i) sont déjà connues. En connaissant la composante $\widehat{\Omega}_{s,i+1}^{(B)}$ la fonction de courant moyenne $\widehat{\Psi}_s(B)$ peut être calculée par l'équation (3.100) et ensuite la composante transversale moyenne de la vitesse $\widehat{W}_N(B)$ par l'équation (3.102). Nous introduisons cette composante dans l'équation matricielle (3.18) par la relation cinématique et nous résolvons l'équation avec la méthode itérative présentée dans le paragraphe III.3. Pendant les itérations dans le plan longitudinal, les variables $\widehat{\Omega}_s(B)$ et $\widehat{W}_N(B)$ restent constantes. A la convergence de la solution au plan longitudinal, nous obtenons ρ (ou ρ_v), u_s , u_R et u_θ au plan (i + 1). Ces valeurs sont utilisées pour déterminer de nouveau $\widehat{\Omega}_s(B)$, $\widehat{\Psi}_s(B)$ et $\widehat{W}_N(B)$ qui sont

réintroduites dans l'équation (3.18) jusqu'à la convergence de \hat{w}_N après quelques itérations du calcul sur le plan transversal. Ces étapes sont illustrées dans l'organigramme du schéma 1.

Cette démarche est celle que nous avons utilisée pour obtenir les résultats présentés dans le chapitre IV.

- ii) Dans la deuxième, un couplage plus fort entre le calcul dans le plan longitudinal et celui dans le plan transversal peut être réalisé. Les équations pour $\hat{\Omega}_s$, $\hat{\Psi}_s$ et \hat{w}_N sont introduites dans l'équation matricielle (3.18). Dans chaque itération, un nouveau vecteur global des inconnues

$$\mu = (p, pu_s, pu_r, pu_\theta, \hat{\Omega}_s, \hat{\Psi}_s, \hat{w}_N)$$

est calculé. Les étapes de cette démarche, qui n'a pas été testée en pratique, sont illustrées dans l'organigramme du schéma 2.

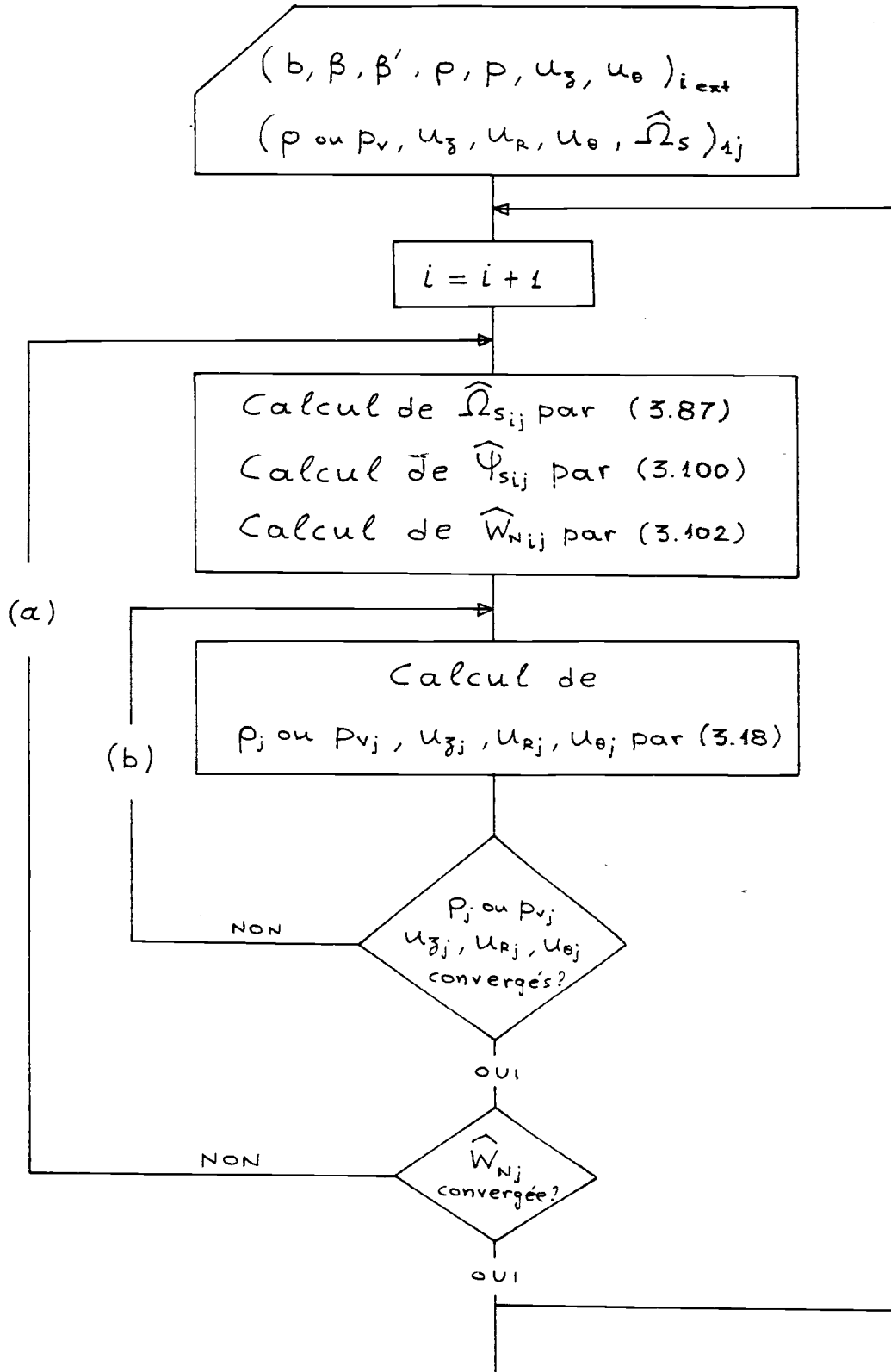


Schéma 1 : Organigramme du calcul de la première démarche.

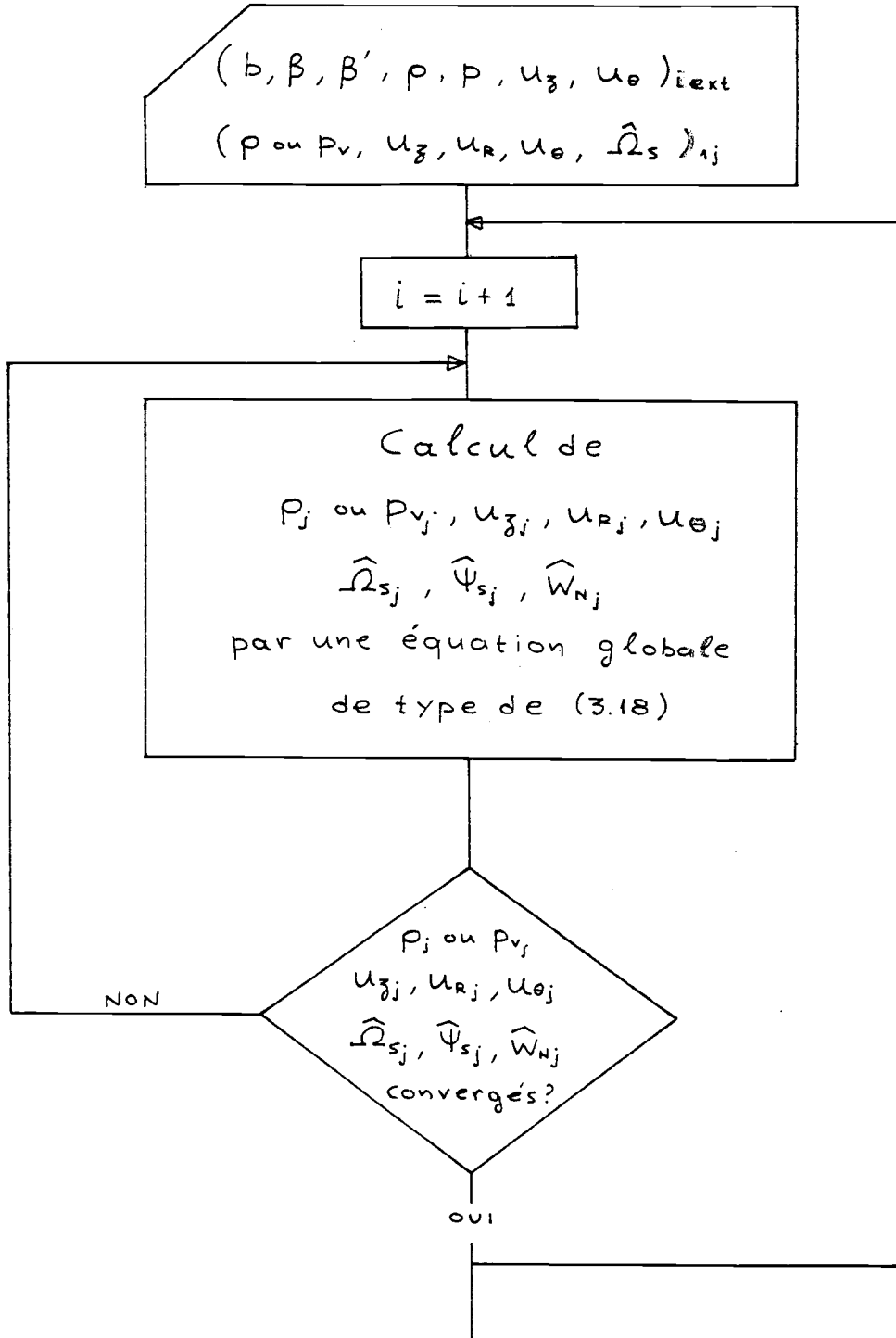


Schéma 2 : Organigramme du calcul de la deuxième démarche.

III.9. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, la méthode numérique pour la résolution des équations dans le plan longitudinal ainsi que dans le plan transversal a été exposée.

Nous avons présenté le schéma implicite de discrétisation des équations du système (I), qui a conduit à l'apparition d'un système tridiagonal par blocs. Pour sa résolution, une procédure de factorisation (algorithme de Thomas) a été utilisée. Différentes conditions aux limites adaptées au problème ont été examinées. L'analyse de stabilité effectuée ensuite a fourni des conditions qui doivent être imposées afin que la stabilité de la méthode soit assurée. Ces conditions émanent d'une part du schéma parabolique implicite de discrétisation, d'autre part de l'algorithme de la résolution. Ainsi, les possibilités et les limitations de la présente méthode ont pu être distinguées.

La méthode numérique pour la résolution des équations du système (II) a été aussi exposée.

Enfin, nous avons présenté le couplage utilisé pour lier les deux systèmes des équations de base. Nous avons vu que ce couplage, qui s'effectue seulement par l'intermédiaire d'une relation cinématique, peut être remplacé par un couplage plus fort qui pourrait peut-être donner de meilleurs résultats. Dans ce cas, les deux systèmes des équations peuvent être remplacés par un seul système où toutes les équations seront simultanément résolues. Cependant, ce deuxième cas n'a pas fait l'objet des essais numériques.

Dans le chapitre qui suit, nous allons présenter les résultats obtenus par la méthode présentée pour divers cas d'intérêt pratique.

CHAPITRE IV

-

RESULTATS DU CALCUL

IV.1. INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus avec la méthode développée dans les chapitres II et III.

Nous distinguons deux cas. Dans le premier, la méthode de la "compressibilité artificielle" a été utilisée pour le calcul des écoulements incompressibles, nommée dans ce qui suit "version incompressible" du programme. L'apparition des problèmes avec cette version, nous a conduit à utiliser la méthode écrite pour un écoulement compressible, nommée "version compressible".

Avant de présenter les résultats obtenus pour divers cas étudiés, nous mentionnons en bref certaines difficultés apparues au niveau numérique lors de la résolution des équations.

a) Version incompressible :

Dans la méthode de la compressibilité artificielle (paragraphe II.2.2), nous avons divisé le champ de pression en deux parties

$$P = P_{\phi} + P_v$$

en supposant que la première est associée à l'écoulement sain tandis que la deuxième aux écoulements secondaires et aux effets visqueux. La première est une donnée pour notre calcul. La deuxième est une des inconnues principales et sa correction temporelle à chaque itération donne une nouvelle valeur de P_v et de P .

$$P_v^{n+1} = P_v^n + \Delta P_v^n$$

$$P^{n+1} = P_{\phi}^* + P_v^{n+1}$$

En plus, pour des raisons de stabilité, le gradient axial (ou longitudinal) de la pression a été assimilé à celui de la partie potentielle

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_{\phi}}{\partial z}$$

Des difficultés sont apparues lors du calcul de p_v liées au choix du paramètre β . L'utilisation des grandes valeurs pour β , comme cela a été recommandé par STEGER et KUTLER [75] créant des problèmes numériques. Pour assurer la stabilité et la convergence de l'algorithme, nous avons été obligés d'utiliser des valeurs pour β de l'ordre de 10^{-5} et 10^{-6} . Or ces valeurs conduisent à supprimer pratiquement l'évolution de p_v . Le problème similaire apparaît dans le travail de SAINT VICTOR et COUSTEIX [77] qui utilisent $\beta \sim 10^{-5}$. Une solution éventuelle à ce problème, que nous n'avons pas cependant utilisée, est de faire évoluer β pendant le calcul en fonction de l'évolution du résidu. Ainsi, en initialisant avec des valeurs faibles pour β afin d'assurer la stabilité, nous les augmentons lors de la résolution pour arriver à la convergence à des valeurs supérieures à l'unité théoriquement indiquées.

b) Version compressible :

A cause des problèmes apparus en utilisant la méthode de la compressibilité artificielle, nous avons décidé d'utiliser les équations écrites pour un écoulement compressible.

Cependant, des difficultés ont été rencontrées au cours du calcul des écoulements incompressibles. Tout d'abord les différences importantes entre le terme $c_p T_0$ et le terme d'énergie cinétique $V_t^2/2$ conduisent à des matrices mal conditionnées. Ceci fournit de fortes évolutions pour la masse volumique et la pression dans la couche limite qui ne sont pas justifiées par le caractère incompressible de l'écoulement étudié. Nous avons alors décidé d'imposer la pression constante dans la couche visqueuse donnée par la condition imposée à la frontière extérieure. Cette hypothèse est souvent utilisée pour le calcul des écoulements supersoniques dans les régions près des limites solides. Dans une telle région, le nombre de Mach est faible (l'écoulement devient subsonique) et la pression est imposée constante à partir de la valeur qu'elle a à la frontière des régions supersonique et subsonique [59]. Dans ce cas, la résolution du système matriciel (3.18), en ce qui concerne la première composante, devient simplement une procédure de minimisation d'une fonctionnelle mais qui, à la convergence, ne donnera pas une solution qui satisfasse la continuité (résidu minimum mais non nul). Si alors la pression statique est imposée dans la couche limite pendant le calcul, il serait justifié de supprimer l'équation de continuité du système (3.18).

La méthode développée (version incompressible ou version compressible) est utilisée pour le calcul de l'écoulement dans les cas suivants :

- a) Ecoulement bidimensionnel laminaire.
- b) Ecoulement bidimensionnel turbulent sans gradient de pression extérieur.
- c) Ecoulement bidimensionnel turbulent décéléré.
- d) Ecoulement dans une grille d'aubes de turbine.
- e) Ecoulement dans une grille d'aubes de compresseur.
- f) Ecoulement dans un compresseur axial.

Les conditions aux limites pour tous les cas étudiés étaient similaires. Comme conditions à l'entrée, nous avons considéré les profils des composantes de la vitesse (fournis par l'expérience correspondant) et la distribution de la pression et de la masse volumique. Sur la paroi, la condition de non-glissement a été imposée pour la vitesse $u_z = u_r = u_\theta = 0$. Dans la même région, une condition Neumann a été utilisée pour la pression $\partial p / \partial \eta = 0$ et la masse volumique $\partial \rho / \partial \eta = 0$. Au bord extérieur du domaine de calcul, des conditions Dirichlet ont été données pour la pression, la masse volumique et les composantes axiales et circonférentielles de la vitesse et une condition Neumann sur la composante normale de la vitesse.

Pour les cas de l'écoulement dans un passage interaube (cas (d), (e), (f)), toutes les données ont été considérées moyennées en azimut. Pour les cas (a), (b), (c) et (d) des écoulements incompressibles, les deux versions "incompressible" et "compressible" (avec la pression constante dans la couche limite) ont été utilisées. Les résultats étaient analogues.

Les détails spécifiques ainsi que les résultats obtenus pour chaque cas étudié sont présentés dans le paragraphe qui suit.

IV.2. PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS

a) Cas test d'un écoulement bidimensionnel laminaire sur une plaque plane :

Le maillage utilisé selon la direction R était constitué par deux régions uniformes à pas différents chacune : $\Delta R_1 = .000285$ m et $\Delta R_2 = .000414$ m.

A part les conditions aux limites citées précédemment, une condition différente sur la paroi pour la pression a été ici en plus testée. Dans celle-ci la pression P_v a été calculée par une équation de continuité explicite (relation (3.27)) écrite à la paroi.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de BLASIUS [114] dans les figures 2 et 3. L'utilisation des deux conditions différentes sur la pression P_v n'influence pas les résultats pour la composante axiale u_z de la vitesse (figure 2). Cependant, des résultats légèrement différents près de la paroi ont été obtenus pour la composante u_R . Ceux donnés par la relation (3.27) satisfont mieux la continuité dans cette région (figure 3).

Un test sur l'efficacité de l'algorithme a été aussi effectué. En utilisant les critères explicites de stabilité (3.73) adaptés à ce problème, nous avons calculé un temps $\tilde{\Delta t}_{\text{expl}} = 10^{-4}$. Ensuite différents pas en temps $\tilde{\Delta t} > \tilde{\Delta t}_{\text{expl}}$ ont été testés pour le schéma implicite. Nous pouvons voir (figure 4) qu'il existe un temps limite (dans ce cas $\Delta t_{\text{lim}} \sim 10^{-2}$) au-delà duquel le nombre des itérations pour arriver à un certain niveau de convergence augmente avec ultérieurement des problèmes de stabilité.

b) Ecoulement bidimensionnel turbulent sans gradient de pression extérieure :

Une partie du maillage non uniforme, selon R utilisé, est présentée dans la figure 5.

Nous avons utilisé les mesures de WIEGHARDT [115] pour imposer les conditions aux limites. La station 4 (position axiale $z = .487$ m) de son expérience était considérée comme première station de calcul.

Les résultats obtenus, comparés avec les résultats expérimentaux de WIEGHARDT dans les figures 6-9, présentent un bon accord.

c) Ecoulement bidimensionnel turbulent décéléré :

Une partie du maillage utilisé, non-uniforme dans la direction R, est présentée dans la figure 10.

Les mesures de SAMUEL et JOUBERT [116] ont été utilisées pour choisir les conditions aux limites. La station T1 (position axiale $\bar{z} = 1.04$ m) de leur expérience était considérée comme l'entrée au domaine de calcul.

Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats expérimentaux de SAMUEL et JOUBERT dans les figures 11-14. Un léger désaccord sur les profils axiaux près de la paroi peut être remarqué (figure 11). Cela peut être dû au calcul des tensions turbulentes dans cette région. Celles-ci calculées par le modèle de CEBECI-SMITH présentent un écart assez important avec les mesures (figure 15).

d) Grille d'aube de turbine :

La grille d'aube est présentée dans la figure 16. Elle a été utilisée expérimentalement à l'E.C.L. par ONVANI [117]. Les aubes forment un angle de calage $\lambda = -41^\circ 30'$ par rapport à la direction axiale \bar{z} . La longueur de la corde est $c = .163$ m, le pas entre les aubes $q = .141$ m et la hauteur $h = .28$ m. Le domaine de calcul est défini par l'intrados et l'extrados de deux aubes voisines, la quatrième et l'onzième fentes des mesures et la paroi inférieure et la demi-hauteur $h/2$ de la grille.

Le maillage utilisé dans le système physique (\bar{z}, R) est présenté dans la figure 17. Les positions des stations de calcul coïncident avec celles des fentes des mesures. Les dimensions du maillage étaient 8×42 .

Deux tests ont été réalisés pour le calcul de la composante transversale \widehat{W}_n de la vitesse.

i) Dans le premier, une seule itération a été effectuée pour le calcul de W_N (une itération sur la boucle générale (a) du schéma 1) avec les valeurs initiales des variables dans chaque station. Les effets visqueux sur la paroi ont été négligés dans le calcul au plan transversal. Avec le profil de W_N ainsi obtenu, les inconnues du plan longitudinal ont été calculées (22 itérations sur la boucle (b) du schéma 1 jusqu'à la convergence). Les résultats comparés avec l'expérience d'ONVANI sont présentés dans les figures 18-24. Des petites anomalies sur les profils calculés des composantes axiale u_z et longitudinale W_s peuvent être remarquées très près de la paroi. En plus, le profil de composante transversale W_N présente un écart important près de la paroi par rapport aux mesures. Ces écarts peuvent être justifiés par le fait que nous avons négligé les effets visqueux dans le calcul du plan transversal.

ii) Dans le deuxième calcul, trois itérations ont été effectuées pour le calcul de W_N (trois itérations sur la boucle (a) du schéma 1). En plus, un raccordement de ce profil a été effectué près de la paroi au point $Y_{rac} = .0005$ m. Les résultats obtenus sont comparés avec les mesures dans les figures 25-31. Les petites anomalies près de la paroi pour les profils axiaux et longitudinaux sont amorties et le profil transversal s'approche plus des mesures que dans le test précédent.

e) Grille d'aube de compresseur :

La grille étudiée est présentée dans la figure 32. Elle a été étudiée expérimentalement à l'E.C.L. et à l'O.N.E.R.A. [118]. Les aubes forment un angle de calage $\lambda = -35.24^\circ$ par rapport à la direction axiale z . La longueur de la corde est $c = .079$ m, le pas entre les aubes $g = .048$ m et la hauteur $h = .1$ m. Le domaine de calcul est défini par l'intrados et l'extrados de deux aubes voisines, la première et la huitième fentes des mesures, la paroi inférieure et la demi-hauteur de la grille.

Le maillage utilisé dans le plan (z, R) est présenté dans la figure 33. Les stations de calcul, choisies à distances égales selon z , sont légèrement décalées par rapport aux fentes des mesures positionnées à distances différentes. Les dimensions du maillage sont 8×42 .

L'écoulement dans la grille était compressible. Le nombre de Mach à l'entrée (Fente 1) était $M = .82$ à la sortie (Fente 8) et $M = .57$.

Les résultats du calcul obtenus dans chaque station sont comparés avec les mesures effectuées à la fente la plus proche de cette station dans les figures 34-40. Des anomalies sur les profils des composantes axiales et longitudinales peuvent être remarquées près de la paroi. Deux raisons nous semblent possibles. La première est le calcul de la viscosité turbulente dans la région intérieure par notre modèle qui ne prend bien en compte les divers paramètres de cet écoulement particulier. En effet des phénomènes de coin ont été remarqués pendant les mesures mais le modèle que nous utilisons n'est pas bien adapté à ce cas. La deuxième raison tient dans le calcul du plan transversal. Pour calculer W_N nous ne prenons en compte les effets visqueux que par un raccordement du profil de W_N plus ou moins arbitraire. Or, le choix du point de raccordement peut influencer le calcul de u_z , W_S et W_N très près de la paroi. Les résultats présentés ici sont obtenus avec $\gamma_{rac} = .001 = (h/2) / 50$.

Nous pouvons aussi remarquer un écart relativement important entre le calcul et l'expérience pour la composante transversale W_N de la vitesse. Cela peut s'expliquer par le fait que nous avons considéré la vorticité secondaire Ω_S étant nul à l'entrée du domaine de calcul, ce qui produit $W_N = 0$ au premier plan. Or, les mesures de l'état de la couche visqueuse à l'amont de la grille ont montré que la couche limite n'était pas collatérale en amont de la grille comme nous l'avons supposé.

f) Compresseur axial :

Le compresseur axial étudié théoriquement et expérimentalement à l'E.C.L. par LEBOEUF [96] est présenté dans la figure 41.

Avec notre méthode, nous avons d'abord calculé l'écoulement dans la roue mobile du compresseur en considérant un système relatif tournant à la vitesse constante $\vec{\omega}$.

Roue mobile compresseur :

Le domaine du calcul est défini par la position axiale $\xi = .693$ peu après le bord d'attaque ($\xi = .691$) et le plan 5, l'intrados et l'extrados de deux aubes voisines et la demi-hauteur à l'entrée et le moyeu de la roue mobile. Le maillage utilisé est présenté dans la figure 42. Les stations 11 et 18 du calcul correspondent aux plans 4 et 5 (figure 41) respectivement. Les dimensions du maillage sont 18×42 . Le nombre de Mach au plan 3 étant $M = 77$ et celui au plan 5 étant $M = 49$.

Nous avons d'abord effectué un calcul avec vitesse de rotation constante $\omega = 1109.2 \text{ sec}^{-1}$ et en introduisant un gradient normal de la pression donné par la résolution d'un écoulement sain correspondant à l'écoulement réel que nous étudions. Ce calcul a présenté un décollement au voisinage du bord de fuite de la roue (plan 4). LEBOEUF [119] a rencontré la même difficulté quand il calculait l'écoulement dans la roue avec sa méthode intégrale. Il a réussi à éviter ce problème lorsqu'il a introduit une équation d'itération avec l'écoulement sain locale.

Nous avons ensuite effectué un calcul en supprimant les forces de Coriolis et centrifuges ; ce qui a éliminé tous les problèmes précédents. Les résultats ainsi obtenus sont présentés dans les figures 43-44, pour les plans 4 et 5.

CHAPITRE V

-

CONCLUSIONS

Nous avons développé une méthode différentielle pour le calcul de l'écoulement visqueux dans le passage interaube d'une turbomachine.

Le principe d'une décomposition de l'écoulement en une partie saine et une partie visqueuse dite secondaire a été adopté. Une démarche parabolique au niveau des équations de Navier-Stokes a été utilisée pour le calcul de l'écoulement visqueux de l'amont vers l'aval. Ces équations moyennées circonférentiellement et projetées selon deux directions particulières, ce qui évite l'introduction des forces d'aubages, ont formé le premier système d'équations de base. La partie du champ de vitesse dans des directions normales de l'écoulement sain est déduite comme une conséquence d'un champ de vorticité. Une formulation (Ω, Ψ) utilisée pour la détermination du champ transversal de la vitesse a permis de constituer le deuxième système d'équations. Le couplage entre les deux systèmes d'équations a été réalisé à l'aide d'une relation cinématique simple.

Les deux systèmes ont été ensuite résolus dans un domaine de calcul défini par les frontières du domaine physique. Le domaine du calcul est obtenu par une transformation générale qui préserve le caractère conservatif des équations et permet d'utiliser des schémas numériques sur un maillage uniforme.

Pour la résolution numérique du premier système non-linéaire d'équations dans le plan longitudinal, nous avons suivi une procédure de linéarisation en introduisant les matrices Jacobiennes de cette linéarisation. Un schéma aux différences finies appliqué sur les dérivées spatiales des équations a conduit à un système tridiagonal par blocs. Celui-ci a été traité d'un algorithme de factorisation adapté. Les conditions aux limites choisies de façon à être compatibles avec la physique de l'écoulement ont été introduites implicitement dans l'algorithme de la résolution.

Le deuxième système d'équations a été résolu en utilisant un développement en série de Fourier et un algorithme de factorisation.

La méthode a été appliquée au calcul des écoulements bidimensionnels, turbulents et au calcul des écoulements secondaires dans différents cas de turbomachines. Les résultats obtenus ont montré un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux. Cependant, des améliorations

peuvent être apportées à la méthode afin d'éviter certaines hypothèses utilisées dans le calcul et éliminer des difficultés au niveau numérique présentées lors de la résolution.

Une amélioration possible du calcul des écoulements subsoniques avec cette méthode serait de traiter simultanément une équation d'interaction avec l'écoulement sain (LEBOEUF |119|). L'équation de continuité pourrait aussi être remplacée par une équation de Poisson pour le calcul de la pression d'un écoulement potentiel correspondant à notre écoulement réel (ALKALAI |120|). L'interaction forte entre l'écoulement sain et l'écoulement secondaire nous permettrait de mieux calculer l'écoulement en supprimant l'hypothèse d'un gradient normal de pression imposé a priori.

Une autre amélioration importante serait de remplacer les deux systèmes d'équations de base par un seul comme il a été exprimé dans l'organigramme du Schéma 2 (chapitre III). Dans ce cas, le couplage du calcul dans le plan longitudinal avec celui du plan transversal serait plus fort et le transfert des informations d'un plan à l'autre meilleur. Ce couplage fort peut néanmoins présenter plus de difficultés au niveau numérique, ce qui n'a pas été envisagé ici.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WU C.H.,
A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed flow types.
NACA TN-2604, 1952.
- [2] HIRSCH Ch., WARZEE G.,
An integrated quasi-3D finite element calculation program for turbomachinery flows".
A.S.M.E. paper 78-GT-56.
- [3] KATSANIS Th., Mc NALLY W.D.,
Fortran program for calculating velocities and streamlines on the hub-shroud Mid-channel flow surface of an axial or mixed flow turbomachine.
NASA TND-7343, 1973.
- [4] DAVIS W.R., MILLAR D.A.J.,
A comparison of the matrix and streamline curvature methods of axial flow turbomachinery analysis, from a user's point of view.
A.S.M.E. paper 74-WA-GT-4.
- [5] LEBOEUF F.,
Etude expérimentale et théorique de l'écoulement dans une turbomachine axiale transsonique.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Lyon I, juillet 1978.
- [6] PAPAILIOU K.D.,
A contribution to the calculation of secondary flows in an axial flow compressor.
6th International Symposium of Air Breathing Engines (ISABE), Paris, juin 1983.

- [7] LAMBROPOULOS L., KTENIDIS P., PAPAILIOU K.D.,
Boundary layer development on rotating bodies of revolution.
AGARD specialists' meeting on the "viscosity effects in
turbomachines", Denmark, June 1983.
- [8] RAILLY J.W., HOWARD J.G.,
Velocity profile development in axial flow compressors.
Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 4, 1962.
- [9] STRATFORD B.S.,
The use of boundary layer techniques to calculate blockage from the
annulus boundary layer in a compressor.
A.S.M.E. paper 67-WA/GT-7.
- [10] SMITH L.H.,
Casing boundary layers in multistage axial flow compressors.
Brown Boveri Symposium of Flow Research in Blading, Elsevier, 1969.
- [11] SMITH L.H.,
The radial-equilibrium equation of turbomachinery.
Trans. A.S.M.E. Journal of Engineering for Power, January 1966.
- [12] HORLOCK J.H., PERKINS H.J.,
Annulus wall boundary layer in turbomachines.
AGARD AG 185, 1974.
- [13] MELLOR G.L., WOOD G.M.,
An axial end-wall boundary layer theory.
Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, June 1971.
- [14] DE RUYCK J., HIRSCH C., KOOL P.,
An axial compressor end-wall boundary layer calculation method.
A.S.M.E. paper 78-GT-81.
- [15] SQUIRE H.B., WINTER K.G.,
The secondary flow in a cascade of aerofoils in a non-uniform stream.
Journal of Aero-Sciences 18, April 1951.

- [16] HAWTHORNE W.R.,
Rotational flow through cascades : the components of vorticity.
Part I, Quart. Journal of Mechanical and Applied Mathematics,
vol. V, VIII-3, 1955.
- [17] HAWTHORNE W.R.,
Secondary circulation in fluid flow.
Proc. Roy-Society, Série A, vol. 206, October 1950.
- [18] SMITH L.H.,
Secondary flow in axial-flow turbomachinery.
Trans. A.S.M.E., vol. 77, 7, October 1955.
- [19] MARRIS A.W.,
Generation of secondary vorticity in a stratified fluid.
Journal of Fluid Mechanics, vol. 20, 1964.
- [20] MARRIS A.W.,
The generation of secondary vorticity in an incompressible fluid.
Trans. A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics, December 1963.
- [21] MARRIS A.W.,
Secondary flows in an incompressible fluid of vorticity density in a
rotating reference frame.
Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, June 1966.
- [22] MARSH H.,
Secondary flow in cascades. The effect of compressibility.
ARC, Report and Memoranda n° 3778. University of Durham,
January 1975.
- [23] HORLOCK J.H.,
Annulus wall boundary layers in axial compressors stages.
Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, March 1963.
- [24] HORLOCK J.H., LAKSHMINARAYANA B.,
Secondary flows : theory, experiment and application in
turbomachinery aerodynamics.
Annual Review of Journal of Fluid Mechanics, vol. 5, 1973.

- [25] LAKSHMINARAYANA B., HORLOCK J.H.,
Generalised expressions for secondary vorticity using intrinsic coordinates.
Journal of Fluid Mechanics, vol. 59-1, 1973.
- [26] LAKSHMINARAYANA B., HORLOCK J.H.,
Effect of shear flows on the outlet angle in axial compressor cascades - Methods of prediction and correlation with experiments.
Journal of Basic Engineering, March 1967.
- [27] LAKSHMINARAYANA B., HORLOCK J.H.,
Review: Secondary Flows and losses in cascades and axial-flow turbomachines.
International Journal of Mechanical Sciences, vol. 5, 1963.
- [28] POUAGARE M., LAKSHMINARAYANA B.,
Development of secondary flow and vorticity in curved ducts, cascades, and rotors, including effects of viscosity and rotation.
Journal of Fluids Engineering, vol. 104, December 1982.
- [29] GESSNER F.B.,
The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner.
Journal of Fluid Mechanics, vol. 58-1, 1973.
- [30] HORLOCK J.H., MARSH H.,
Flow models for turbomachines.
Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 13-5, 1971.
- [31] MARSH H., HORLOCK J.H.,
Wall boundary layers in turbomachines.
Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 14-6, 1972.
- [32] HORLOCK J.H.,
Cross flows in bounded three-dimensional turbulent boundary layers.
Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 15-4, 1973.

- |33| HORLOCK J.H., HOADLEY D.,
Calculation of the annulus wall boundary layers in axial flow turbomachines.
Aeroresearch Council, Current paper 1196, 1972.
- |34| PAPAILIOU K.D., FLOT R., MATHIEU J.,
Secondary flow in compressor bladings.
A.S.M.E. paper 76-GT-57.
- |35| COMTE A., OHAYON G., PAPAILIOU K.D.,
A method for the calculation of the wall layers inside the passage of a compressor cascade with and without tip clearance.
Journal of Engineering for Power, vol. 104, July 1982.
- |36| LEBOEUF F., COMTE A., PAPAILIOU K.D.,
Calculations concerning the secondary flows in compressor bladings -
Secondary flows in turbomachines.
AGARD CP-214, March 1977.
- |37| COMTE A.,
Calcul des écoulements secondaires à l'intérieur du canal d'une grille d'aubes.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Lyon I, juillet 1978.
- |38| OHAYON G.,
Contribution à l'étude des écoulements secondaires dans les compresseurs axiaux, avec effets du jeu radial.
Thèse de Doctorat 3ème cycle, Lyon I, juillet 1979.
- |39| VOUILLARMET A.,
Contribution à l'étude et à la compréhension de l'écoulement visqueux dans un compresseur centrifuge.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Lyon I, octobre 1979.
- |40| LEBOEUF F., NAVIERE H.,
Etudes expérimentales et théoriques des couches visqueuses pariétales dans un compresseur mono-étage transsonique.
AGARD CP-351, Denmark, June 1983.

- [41] BOIS G., LEBOEUF F., COMTE A., PAPAILIOU K.D.,
Experimental study of the behaviour of secondary flows in a transonic compressor.
AGARD Conference on Secondary Flows, The Hague, March 1977.
- [42] LEBOEUF F., BARIO F., BOIS G., PAPAILIOU K.D.,
Experimental study and theoretical prediction of secondary flows in a transonic axial flow compressor.
A.S.M.E. paper 82-GT-14.
- [43] BARIO F., LEBOEUF F., PAPAILIOU K.D.,
Calculation concerning the secondary flows in compressor blading.
AGARD CP-214, La Haye, 1977.
- [44] FLOT R.,
Contribution à l'étude des écoulements secondaires dans les compresseurs axiaux.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Lyon I, 1975.
- [45] LEBOEUF F., NAVIERE H., CARO J.,
Écoulements secondaires dans les turbomachines. Analyse expérimentale et théorique de l'écoulement dans le compresseur.
Rapport Métraflu, juin 1981.
- [46] ANDERSON O.L.,
Derivation and evaluation of an approximate analysis for three dimensional viscous subsonic flow with large secondary velocities.
NASA CR-159430, 1978.
- [47] BRILEY W.R., Mc DONALD H.,
An approximate analysis for three-dimensional viscous subsonic flows with large secondary velocities.
SRA Report R 78-300001-4, March 1978.
- [48] BRILEY W.R., Mc DONALD H.,
Analysis and computation of viscous subsonic primary and secondary flows.
AIAA paper 79-1453.

- |49| ABDALLAH S., HAMED A.,
Inviscid solution for the secondary flow in curved ducts.
AIAA Journal, vol. 19-8, August 1981.
- |50| ABDALLAH S., HAMED A.,
The elliptic solution of the secondary flow problem.
Trans. A.S.M.E., Journal of Engineering for Power, vol. 105,
July 1983.
- |51| ARNAL D., COUSTEIX J.,
Ecoulement subsonique dans l'angle de deux parois.
La Recherche Aéronautique, n° 2, Mars-Avril 1981.
- |52| PATANKAR S.V., SPALDING D.B.,
A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in
three-dimensional parabolic flows.
International Journal of Heat Mass Transfer, vol. 15, 1972.
- |53| PRATAP V.S., SPALDING D.B.,
Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows.
International Journal of Heat Mass Transfer, vol. 19, 1976.
- |54| AGUILAR F.,
A numerical analysis of turbulent flow along an abruptly rotated
cylinder.
Ph. D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University,
December 1975.
- |55| RUDMAN S., RUBIN S.G.,
Hypersonic viscous flow over slender bodies having sharp leading
edges.
AIAA Journal, vol. 10-6, 1968.
- |56| LIN A., RUBIN S.G.,
Three-dimensional supersonic viscous flow over a cone at incidence.
AIAA Journal, vol. 20-11, November 1982.

- [57] RUBIN S.G., LIN A.,
Marching with the parabolized Navier-Stokes equations.
Israel Journal of Technology, vol. 18, 1980.
- [58] LIN A., RUBIN S.G.,
A numerical model for supersonic viscous flow over a slender reentry
vehicle.
AIAA paper 79-0205.
- [59] SCHIFF L.B., STEGER J.L.,
Numerical simulation of steady supersonic viscous flow.
AIAA Journal, vol. 18-12, December 1980.
- [60] LUBARD S.C., HELLIWELL W.S.,
An implicit method for three-dimensional viscous flow with
application to cones at angle of attack.
Journal of Computer and Fluids, vol. 3, 1975.
- [61] SPRADLEY L.W., STALNAKER J.F.,
A quasi-parabolic technique for computation of three-dimensional
viscous flows.
AIAA paper 81-0113 (AIAA 19th Aerospace Sciences Meeting),
January 1981.
- [62] Mc DONALD H., BRILEY W.R.,
Three-dimensional supersonic flow of a viscous or inviscid gas.
Journal of Computational Physics, vol. 19, 1975.
- [63] BRILEY W.R.,
Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous
flow in ducts.
Journal of Computational Physics, vol. 14, 1974.
- [64] ROBERTS D.W., FORESTER C.K.,
Parabolic procedure for flows in ducts with arbitrary cross sections.
AIAA Journal, vol. 17-1, January 1979.

- [65] KAKOUIROS G.,
Contribution à l'étude des écoulements secondaires dans un compresseur axial.
Rapport de D.E.A., Lyon I, octobre 1981.
- [66] PEYRET R., VIVIAND H.,
Computation of viscous compressible flows based on the Navier-Stokes equations.
AGARD AG-212, September 1975.
- [67] RAUDKIVI A.J., CALLANDER R.A.,
Advanced fluid mechanics - An introduction.
Edward Arnold Ltd, London, 1975.
- [68] CARLSON G.A., HORNBECK R.W.,
A numerical solution for laminar entrance flow in a square duct.
Trans. A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics, March 1973.
- [69] THOMAS P.D., LOMBARD C.K.,
Geometric conservation law and its application to flow computation on moving grids.
AIAA Journal, vol. 17-10, October 1979.
- [70] BROCHET J.,
Calcul numérique d'écoulements internes tridimensionnels transsoniques.
La Recherche Aérospatiale, n° 5, septembre-octobre 1980.
- [71] BRILEY W.R., Mc DONALD H.,
Solution of the multidimensional compressible Navier-Stokes equations by a generalized implicit method.
Journal of Computational Physics, vol. 24, 1977.
- [72] CHORIN A.J.,
A numerical method for solving incompressible viscous flow problems.
Journal of Computational Physics, vol. 2, 1967.

- [73] PEYRET R., TAYLOR T.D.,
Computational methods for fluid flow.
Springer-Verlag, New York, 1983.
- [74] FORTIN M., PEYRET R., TEMAM R.,
Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide
incompressible.
Journal de Mécanique, vol. 10-3, septembre 1971.
- [75] STEGER J.L., KUTLER P.,
Implicit finite-difference procedures for the computation of vortex
wakes.
AIAA Journal, vol. 15-4, April 1977.
- [76] GANOULIS J., THIRRIOT C.,
Numerical simulation of laminar separated flows between
periodically varied walls.
Lecture Notes in Physics, vol. 59, Springer Verlag, New York, 1976
(5th Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics).
- [77] De SAINT VICTOR X., COUSTEIX J.,
Calcul du mélange tridimensionnel d'un sillage et d'une couche limite
se développant dans des plans orthogonaux.
Rapport O.N.E.R.A, n° 58/2259 AND, Août 1983.
- [78] CEBECI T., SMITH A.M.O.,
Analysis of turbulent boundary layers.
Academic Press, New York 1974.
- [79] FAVRE A. et alii,
La turbulence en mécanique des fluides.
Gauthier-Villars, 1976.
- [80] GENGE J.N., JEANDEL D., MATHIEU J.,
Réflexions sur quelques approches de la turbulence.
E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série A,
n° 2, 1979.

- |81| HAH C., LAKSHMINARAYANA B.,
Prediction of two and three-dimensional asymmetrical turbulent wakes, including curvature and rotation effects.
AIAA Journal, vol. 18-10, October 1980.
- |82| CEBECI T., SMITH A.M.O.,
A finite-difference method for calculating compressible laminar and turbulent boundary layers.
Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, September 1970.
- |83| CEBECI T.,
Calculation of compressible turbulent boundary layers with heat and mass transfer.
AIAA Journal, vol. 9-6, June 1971.
- |84| CEBECI T., SMITH A.M.O.,
A finite-difference solution of the incompressible turbulent boundary-layer equations by an eddy viscosity concept.
Proceedings "Computation of Turbulent Boundary Layers. AFOSR-IFP-Stanford Conference, vol. I, 1968.
- |85| BALDWIN B.S., LOMAS H.,
Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows.
AIAA paper 78-257 (AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting), January 1978.
- |86| KUTLER P., CHAKRAVARTHY S.R., LOMBARD C.K.,
Supersonic flow over ablated nosetips using an unsteady implicit numerical procedure.
AIAA paper 78-213 (AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting), January 1978.
- |87| HINDMAN R.G.,
Generalized coordinate forms of governing fluid equations and associated geometrically induced errors.
AIAA Journal, vol. 20-10, October 1982.

- [88] VIVIAND H.,
Formes conservatives des équations de la dynamique des gaz.
La Recherche Aérospatiale, n° 1, 1974.
- [89] LAPIDUS A.,
A detached shock calculation by second-order finite differences.
Journal of Computational Physics, vol. 2, November 1967.
- [90] VINOKUR M.,
Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear coordinate systems.
Journal of Computational Physics, vol. 14, February 1974.
- [91] PULLIAM T.H., STEGER J.L.,
Implicit finite difference simulation of three-dimensional compressible flow.
AIAA Journal, vol. 18-2, February 1980.
- [92] STEGER J.L.,
Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries.
AIAA Journal, vol. 16-7, July 1978.
- [93] HOLST T.L.,
Implicit algorithm for the conservative transonic full-potential equation using an arbitrary mesh.
AIAA Journal, vol. 17, n° 10, 1979.
- [94] HOLST T.L.,
Fast conservative algorithm for solving the transonic full-potential equation.
AIAA Journal, vol. 18, n° 12, 1980.
- [95] LEBOEUF F.,
Turbomachines.
Cours dispensé en troisième année de l'Ecole Centrale de Lyon, 1983-1984.

- [96] LEBOEUF F.,
Contribution théorique et expérimentale à l'étude des écoulements secondaires dans un compresseur axial transsonique.
Thèse de Docteur d'Etat ès Sciences, Lyon I, juin 1984.
- [97] HORLOCK J.H.,
On entropy production in adiabatic flow in turbomachines.
Trans. A.S.M.E., Journal of Basic Engineering, 1973.
- [98] ISAAKSON E., KELLER H.B.,
Analysis of numerical methods.
John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [99] LAPIDUS L., SEINFELD J.H.,
Numerical solution of ordinary differential equations.
Academic Press, New York, 1971.
- [100] BEAM R.M., WARMING R.F.,
An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form.
Journal of Computational Physics, vol. 22, 1976.
- [101] ROBERTS G.O.,
Computational meshes for boundary layer problems.
Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, New York, 1971
(2nd Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics).
- [102] ROACHE P.G.,
Computational fluid dynamics.
Hermosa Publishers, Albuquerque, 1972.
- [103] YANENKO N.N.,
The method of fractional steps.
Springer-Verlag, New York, 1971.
- [104] BEAM R.M., WARMING R.F.,
An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations.
AIAA Journal, vol. 16-4, April 1978.

- |105| WARMING R.F., BEAM R.M.,
Upwind second-order difference schemes and applications in unsteady aerodynamic flows.
Proceedings of the AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, June 1975.
- |106| YEE H.C., BEAM R.M., WARMING R.F.,
Boundary approximations for implicit schemes for one-dimensional inviscid equation of gasdynamics.
AIAA Journal, vol. 20-9, September 1982.
- |107| WARMING R.F., HYETT B.J.,
The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.
Journal of Computational Physics, vol. 14, 1974.
- |108| STEGER J.L., WARMING R.F.,
Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite-difference methods.
Journal of Computational Physics, vol. 40, 1981.
- |109| BEAM R.M., WARMING R.F., YEE H.C.,
Stability analysis of numerical boundary conditions and implicit-difference approximations for hyperbolic equations.
Journal of Computational Physics, vol. 48, 1982.
- |110| Mc CORMACK R.W.,
The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering.
AIAA paper 69-354 (AIAA Hypervelocity Impact Conference), April-May 1969.
- |111| Mc CORMACK R.W.,
An efficient explicit-implicit-characteristic method for solving the compressible Navier-Stokes equations.

- [112] Mc CORMACK R.W.,
A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow.
AIAA Journal, vol. 20-9, September 1982.
- [113] KHOSLA P.K., RUBIN S.G.,
A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme.
Computers and Fluids, vol. 2, Pergamon Press, 1974.
- [114] SCHLICHTING H.,
Boundary layer theory.
Ed. Mc GRAW-HILL, 1979.
- [115] Proceedings : Computation of turbulent boundary layer - 1968,
AFOSR-IFP-STANFORD Conference, vol. II, p. 98.
- [116] SAMUEL A.E., JOUBERT P.N.,
A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient.
Journal of Fluid Mechanics, vol. 66, part 3, 1974.
- [117] ONVANI A.,
Etude expérimentale des écoulements secondaires en grille d'aubes de turbine en absence et en présence d'injections discrètes à la paroi.
Thèse de Troisième Cycle, Lyon I, septembre 1983.
- [118] CARO J., LEBOEUF F.,
Écoulements secondaires dans une grille d'aubes de compresseur, en écoulement compressible, couche limite épaisse à l'amont.
Rapport Métraflu, 1979.
- [119] LEBOEUF F.,
Communication privée.
- [120] ALKALAI K.,
Etude théorique d'écoulements bidimensionnels et tridimensionnels potentiels avec termes sources rotationnels. Application aux turbomachines.
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.C.L., décembre 1983.

- |121| HARLAFTIS S.,
Etudes expérimentale et théorique de l'interaction forte des couches
visqueuses pariétales dans une turbomachine.
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.C.L., mai 1984.

ANNEXES

ANNEXE 1
DEVELOPPEMENT DE LA FORME FINALE DES EQUATIONS

1. LES EQUATIONS INITIALES

Les équations de départ sont les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie interne d'arrêt, sous une forme conservative, différentielle, décrite par PEYRET et VIVIAND [66]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \text{div}(\rho \vec{V} \vec{V} - \underline{\underline{\sigma}}) = \vec{f}_e \quad (\text{b}) \quad (\text{A.1.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}(\rho E \vec{V} - \underline{\underline{\sigma}} \vec{V}) = \vec{f}_e \cdot \vec{V} \quad (\text{c})$$

Pour un fluide Newtonien, le tenseur des tensions est une fonction linéaire du gradient de vitesse (loi de Newton)

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \text{div} \vec{V} \underline{\underline{I}} + \mu \text{def} \vec{V}$$

avec $\text{def} \vec{V} = \text{grad} \vec{V} + (\text{grad} \vec{V})^t$ le tenseur du taux de déformation.

Les équations (A.1.1) peuvent décrire l'écoulement compressible dans un système absolu ainsi que celui dans un système relatif. Pour un système tournant à la vitesse $\vec{\omega}$, la vitesse \vec{V} dans (A.1.1) est la vitesse relative

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_{\text{abs}} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

et la force \vec{f}_e dans (A.1.1) regroupe d'une part la force de Coriolis $-2\rho\vec{\omega}_1\vec{V}$, d'autre part la force centrifuge $-\rho\vec{\omega}_1(\vec{\omega}_1\vec{r}) = \rho\nabla(\omega^2 R^2/2)$. Ces deux forces s'exercent par suite de la rotation du système. Les forces des gravités sont négligées.

Nous allons exprimer les équations (A.1.1) sous une forme adimensionnelle, vectorielle et faiblement conservative dans un système cylindrique. Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial R\tilde{W}}{\partial t} + \frac{\partial R\tilde{F}}{\partial z} + \frac{\partial R\tilde{G}}{\partial R} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \theta} + j\tilde{H} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R\tilde{F}_v}{\partial z} + \frac{\partial R\tilde{G}_v}{\partial R} + \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \theta} + j\tilde{H}_v \right) + R\tilde{D} \quad (A.1.3)$$

$\tilde{W} =$	ρ ρu_z ρu_R ρu_θ ρE	$\tilde{F} =$	ρu_z $\rho u_z^2 + p$ $\rho u_z u_R$ $\rho u_z u_\theta$ $(\rho E + p) u_z$	$\tilde{G} =$	ρu_R $\rho u_R u_z$ $\rho u_R^2 + p$ $\rho u_R u_\theta$ $(\rho E + p) u_R$	$\tilde{E} =$	ρu_θ $\rho u_\theta u_z$ $\rho u_\theta u_R$ $\rho u_\theta^2 + p$ $(\rho E + p) u_\theta$
---------------	---	---------------	---	---------------	---	---------------	---

$\tilde{H} =$	0 0 $-\rho u_\theta^2 - p$ $\rho u_R u_\theta$ 0	$\tilde{F}_v =$	0 τ_{zz} τ_{zR} $\tau_{z\theta}$ β_z	$\tilde{G}_v =$	0 τ_{Rz} τ_{RR} $\tau_{R\theta}$ β_R	$\tilde{E}_v =$	0 $\tau_{\theta z}$ $\tau_{\theta R}$ $\tau_{\theta\theta}$ β_θ
---------------	--	-----------------	--	-----------------	--	-----------------	--

$\tilde{H}_v =$	0 0 $-\tau_{\theta\theta}$ $\tau_{R\theta}$ 0	$\tilde{D} =$	0 $\vec{f}_e \cdot \vec{i}_z$ $\vec{f}_e \cdot \vec{i}_R$ $\vec{f}_e \cdot \vec{i}_\theta$ $\vec{f}_e \cdot \vec{V}$	$=$	0 0 $\rho\omega^2 R + 2\rho\omega u_\theta$ $-2\omega\rho u_R$ $\omega^2\rho R u_R$
-----------------	---	---------------	--	-----	---

Les tensions visqueuses sont données par les formules suivantes :

$$(a) \quad \tau_{zz} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$(b) \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right)$$

$$(c) \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)$$

(A.1.5)

$$(d) \quad \tau_{rr} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + 2\mu \frac{\partial u_R}{\partial R}$$

$$(e) \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{u_\theta}{R} \right) \right] = \mu \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - j \frac{u_\theta}{R} \right]$$

$$(f) \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\partial}{\partial z} (R u_z) + \frac{\partial}{\partial R} (R u_R) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{2\mu}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + j u_R \right)$$

Les termes visqueux dans l'équation de l'énergie sont :

$$\beta_z = \tau_{zi} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{\partial e}{\partial z}$$

$$\beta_R = \tau_{Ri} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{\partial e}{\partial R}$$

$$\beta_\theta = \tau_{\theta i} u_i + \frac{\gamma}{Pr} \cdot k \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

(A.1.6)

Nous considérons que l'équation (A.1.3) est écrite sous une forme moyenne statistique. Les termes des tensions alors dans les expressions (A.1.4) regroupent aussi bien les tensions visqueuses que les tensions turbulentes. Ceci peut être exprimé en considérant que la viscosité μ dans les formules (A.1.6) est la somme d'une viscosité laminaire μ_e et d'une viscosité turbulente μ_t (dont la méthode de calcul est donnée dans le paragraphe II.2.3).

La pression est calculée par une équation de gaz parfait

$$P = (\gamma - 1) \rho \left(E = \frac{u_x^2 + u_r^2 + u_\theta^2}{2} \right) \quad (\text{A.1.7})$$

Pour un écoulement incompressible, si nous utilisons la méthode de la compressibilité artificielle, la composante (a) de l'équation (A.1.1) peut être remplacée par l'équation

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \beta \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

2. TRANSFORMATION DES EQUATIONS DANS UN NOUVEAU SYSTEME DES COORDONNEES

Nous allons transformer le système cylindrique (ζ, R, θ) en un nouveau système (ξ, η, ζ) quelconque. L'équation (A.1.3) devient après la transformation

$$\begin{aligned} \frac{\partial R W}{\partial t} + \frac{\partial R \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial R \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \zeta} + j \bar{M} \\ = \frac{L}{Re} \left[\frac{\partial R \bar{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial R \bar{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{E}_v}{\partial \zeta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

où

$\bar{W} = \frac{1}{J} \cdot$	ρ	$\bar{F} = \frac{1}{J} \cdot$	ρU	$\bar{G} = \frac{1}{J} \cdot$	ρV
	ρu_z		$\rho u_z U + \xi_z P$		$\rho u_z V + \eta_z P$
	ρu_R		$\rho u_R U + \xi_R P$		$\rho u_R V + \eta_R P$
	ρu_θ		$\rho u_\theta U + \xi_\theta P$		$\rho u_\theta V + \eta_\theta P$
	ρE		$(\rho E + p) U - \xi_i P$		$(\rho E + p) V - \eta_i P$

$\bar{E} = \frac{1}{J} \cdot$	ρW	$\bar{F}_V = \frac{1}{J} \cdot$	0
	$\rho u_z W + \xi_z P$		$\xi_z \tau_{zz} + \xi_R \tau_{zR} + \xi_\theta \tau_{z\theta}$
	$\rho u_R W + \xi_R P$		$\xi_z \tau_{Rz} + \xi_R \tau_{RR} + \xi_\theta \tau_{R\theta}$
	$\rho u_\theta W + \xi_\theta P$		$\xi_z \tau_{\theta z} + \xi_R \tau_{\theta R} + \xi_\theta \tau_{\theta\theta}$
	$(\rho E + p) W - \xi_i P$		$\xi_z \beta_z + \xi_R \beta_R + \xi_\theta \beta_\theta$

(A.1.10)

$\bar{G}_V = \frac{1}{J} \cdot$	0	$\bar{E}_V = \frac{1}{J} \cdot$	0
	$\eta_z \tau_{zz} + \eta_R \tau_{zR} + \eta_\theta \tau_{z\theta}$		$\xi_z \tau_{zz} + \xi_R \tau_{zR} + \xi_\theta \tau_{z\theta}$
	$\eta_z \tau_{Rz} + \eta_R \tau_{RR} + \eta_\theta \tau_{R\theta}$		$\xi_z \tau_{Rz} + \xi_R \tau_{RR} + \xi_\theta \tau_{R\theta}$
	$\eta_z \tau_{\theta z} + \eta_R \tau_{\theta R} + \eta_\theta \tau_{\theta\theta}$		$\xi_z \tau_{\theta z} + \xi_R \tau_{\theta R} + \xi_\theta \tau_{\theta\theta}$
	$\eta_z \beta_z + \eta_R \beta_R + \eta_\theta \beta_\theta$		$\xi_z \beta_z + \xi_R \beta_R + \xi_\theta \beta_\theta$

$\bar{M} = \frac{1}{J} \cdot$	0
	0
	$-\rho u_\theta^2 - p - 2\rho w R u_\theta - \rho w^2 R^2 + \tau_{\theta\theta}/Re$
	$\rho u_R u_\theta + 2\rho w R u_R - \tau_{R\theta}/Re$
	$-\rho w^2 R^2 u_R$

Dans ces expressions U, V, W sont les vitesses contravariantes du système $(\bar{\xi}, \eta, \bar{\zeta})$ données par (2.43). La forme générale des métriques et du Jacobien de la transformation est donnée par les formules (2.44) et (2.44.a) respectivement.

La transformation des dérivées de l'ancien système $(\bar{\xi}, R, \theta)$ au nouveau $(\bar{\xi}, \eta, \bar{\zeta})$, s'effectuant par une permutation cyclique, nous donne la forme des tensions dans le nouveau système

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \tau_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} &= \eta_{\bar{\zeta}} \left[\frac{\lambda}{R} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + 2\mu \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] + \int_{\bar{\zeta}} \left[\frac{\lambda}{R} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + 2\mu \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda}{R} \left[\nu_R \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_R \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_{\theta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\theta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \\
 \text{(b)} \quad \tau_{R\bar{\zeta}} &= \tau_{\bar{\zeta}R} = \mu \left[\nu_R \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_R \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_{\zeta} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\zeta} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \\
 \text{(c)} \quad \tau_{\theta\bar{\zeta}} &= \tau_{\bar{\zeta}\theta} = \mu \left[\frac{\nu_{\theta}}{R} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \frac{\int_{\theta}}{R} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_{\zeta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\zeta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \\
 \text{(d)} \quad \tau_{RR} &= \nu_R \left[\frac{\lambda}{R} \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + 2\mu \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] + \int_R \left[\frac{\lambda}{R} \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + 2\mu \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \text{ (A.1.11)} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{R} \left[\nu_{\zeta} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\zeta} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_{\theta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\theta} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] \\
 \text{(e)} \quad \tau_{\theta R} &= \tau_{R\theta} = \mu \left[\frac{\nu_{\theta}}{R} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \frac{\int_{\theta}}{R} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_R \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_R \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} - j \cdot \frac{\bar{\ell}}{R\bar{p}} \right] \\
 \text{(f)} \quad \tau_{\theta\theta} &= \frac{\nu_{\theta}(\lambda + 2\mu)}{R} \cdot \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \frac{\int_{\theta}(\lambda + 2\mu)}{R} \cdot \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{R} \left[\nu_{\zeta} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_{\zeta} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} + \nu_R \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \int_R \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}} \right)_{\zeta} \right] + j \cdot \frac{2\mu}{R} \cdot \frac{\bar{\eta}}{\bar{p}}
 \end{aligned}$$

où le nouveau vecteur des inconnues est défini comme suit

$$\mu = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{n}, \bar{e}, \bar{E})^T = (\rho, \rho u_z, \rho u_R, \rho u_\theta, \rho E)^T / \gamma$$

Les termes visqueux β_i dans l'équation de l'énergie prennent après la transformation une forme assez compliquée. Puisque finalement nous n'utiliserons pas cette équation, nous ne présentons pas cette nouvelle forme de β_i ici.

3. INTEGRATION DES EQUATIONS DANS LA DIRECTION AZIMUTALE

Nous allons effectuer une moyenne massique selon la direction circonférentielle θ que nous assimilons à la direction S . A cause de la périodicité de l'écoulement, les équations seront intégrées seulement entre l'intrados d'une aube et l'extrados de l'aube voisine.

Nous définissons une moyenne massique dans la direction circonférentielle comme suit

$$\hat{\rho} \hat{A} = \frac{1}{\theta_s - \theta_p} \int_p^s \rho A d\theta = \frac{L}{2\pi b / N_a} \int_p^s \rho A d\theta \quad (\text{A.1.12})$$

ou

$b = 1 - \frac{t}{g}$ le facteur de blocage dû aux aubes ;

t l'épaisseur tangentielle des aubes ;

$g = \frac{2\pi R}{N_a}$ le pas de l'aubage ;

s, p indices pour côtés extrados et intrados de l'aubage respectivement.

La valeur moyenne du gradient de la quantité (ρA) peut être exprimée en utilisant la formule de Leibnitz

$$\widehat{\frac{\partial \rho A}{\partial \theta}} = \frac{N_a}{2\pi b} \cdot (\rho_s A_s - \rho_f A_f)$$

$$\widehat{\frac{\partial \rho A}{\partial \xi}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (b \widehat{\rho A}) - \frac{N_a}{2\pi b} \cdot \left(\rho_s A_s \frac{\partial \theta_s}{\partial \xi} - \rho_f A_f \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A.1.13})$$

$$\widehat{\frac{\partial \rho A}{\partial \eta}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (b \widehat{\rho A}) - \frac{N_a}{2\pi b} \cdot \left(\rho_s A_s \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta} - \rho_f A_f \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right)$$

Après avoir décomposé chaque grandeur A en une valeur moyenne \widehat{A} et une valeur fluctuante A^*

$$A(\xi, \eta, \theta) = \widehat{A}(\xi, \eta) + A^*(\xi, \eta, \theta) \quad (\text{A.1.14})$$

nous effectuons l'intégration azimutale en utilisant les expressions (A.1.13) et en assimilant la direction avec la direction . L'équation (A.1.9) devient après l'intégration

$$\begin{aligned} \frac{\partial b R \widehat{W}}{\partial t} + \frac{\partial b R \widehat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial b R \widehat{G}}{\partial \eta} + j b \widehat{M} = \\ \frac{1}{Re} \cdot \left[\frac{\partial b R \widehat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial b R \widehat{G}_v}{\partial \eta} \right] + D_1 + D_2 \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

Dans ce qui suit, nous allons supprimer les indices ($\widehat{\quad}$) en tenant compte que toutes les grandeurs qui apparaissent sont des moyennes spatiales.

Le terme D_1 dans l'équation (A.1.15) exprime la force exercée par l'aubage sur l'écoulement. Cette force est le résultat de la contribution simultanée de la pression et des tensions de cisaillement sur l'aubage. Pour une zone aubée avec $u_\zeta = u_r = u_\theta = 0$ sur les parois des aubages, elle a la forme suivante

$$D_1 = D_{1p} + D_{1s} = \frac{N_a}{2\pi} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left\{ p_s \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ R p \theta_\zeta \\ R p \theta_r \\ -p \\ -R p \theta_t \end{vmatrix}_s - p_p \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ R p \theta_\zeta \\ R p \theta_r \\ -p \\ -R p \theta_t \end{vmatrix}_p \right\} \quad (A.1.16)$$

$$- \frac{N_a}{2\pi} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{Re} \left\{ p_s \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ R \theta_\zeta \tau_{\zeta\zeta} + R \theta_r \tau_{\zeta r} - \tau_{\zeta\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{r\zeta} + R \theta_r \tau_{rr} - \tau_{r\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{\theta\zeta} + R \theta_r \tau_{\theta r} - \tau_{\theta\theta} \\ R \theta_\zeta \beta_\zeta + R \theta_r \beta_r - \beta_\theta \end{vmatrix}_s - p_p \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ R \theta_\zeta \tau_{\zeta\zeta} + R \theta_r \tau_{\zeta r} - \tau_{\zeta\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{r\zeta} + R \theta_r \tau_{rr} - \tau_{r\theta} \\ R \theta_\zeta \tau_{\theta\zeta} + R \theta_r \tau_{\theta r} - \tau_{\theta\theta} \\ R \theta_\zeta \beta_\zeta + R \theta_r \beta_r - \beta_\theta \end{vmatrix}_p \right\}$$

La force de la pression exercée par une surface de l'aube sur le fluide environnant est

$$\frac{N_a}{2\pi} \cdot p_j \cdot \left(R \frac{\partial \theta_j}{\partial \zeta}, R \frac{\partial \theta_j}{\partial r}, -1 \right) \quad \text{avec } j=p \text{ ou } j=s$$

et elle est normale à la surface de l'aube. En utilisant l'hypothèse des aubes minces, la force totale résultante des forces sur chaque côté peut être exprimée par la formule

$$D_{1p} = \frac{N_a}{2\pi} \cdot (p_s - p_p) \cdot \left(R \frac{\partial \theta_w}{\partial \zeta}, R \frac{\partial \theta_w}{\partial r}, -1 \right) \quad (A.1.17)$$

Cette force est normale à la surface moyenne θ_w de l'aube.

Le terme D_2 dans l'équation (A.1.15) contient les fluctuations spatiales du type $\widehat{u_i^* u_j^*}$ qui expriment la non-uniformité de l'écoulement dans la direction azimutale. Ce terme a la forme

$$\vec{D}_2 = (D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{25})^T \quad (\text{A.1.18})$$

où

$$D_{21} = 0$$

$$D_{22} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{u_\xi^*} U^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \xi_\xi \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{u_\xi^*} V^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \eta_\xi \right) \right]$$

$$D_{23} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \left(\widehat{\rho} \widehat{u_r^*} U^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \xi_r \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{u_r^*} V^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \eta_r \right) \right] \\ + b \left(-\widehat{\rho} \widehat{u_\theta^*} u_\theta^* - \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} + \frac{L}{Re} \widehat{\rho} \widehat{\tau_{\theta\theta}^*} \frac{1}{\rho^*} \right) \quad (\text{A.1.18.a})$$

$$D_{24} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{u_\theta^*} U^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \xi_\theta \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{u_\theta^*} V^* + \widehat{\rho} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} \eta_\theta \right) \right] \\ + b \left(\widehat{\rho} \widehat{u_r^*} u_\theta^* - \frac{L}{Re} \widehat{\rho} \widehat{\tau_{r\theta}^*} \frac{L}{\rho^*} \right) \quad (2.47)$$

$$D_{25} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{E^*} U^* + \widehat{\rho} \widehat{U} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} + \widehat{\rho} \widehat{P} \widehat{U^* \frac{L}{\rho^*}} + \widehat{P^*} U^* + \widehat{\rho} \widehat{P^*} \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b \cdot \left(\widehat{\rho} \widehat{E^*} V^* + \widehat{\rho} \widehat{V} \widehat{P^* \frac{L}{\rho^*}} + \widehat{\rho} \widehat{P} \widehat{V^* \frac{L}{\rho^*}} + \widehat{P^*} V^* + \widehat{\rho} \widehat{P^*} \widehat{V^* \frac{L}{\rho^*}} \right) \right]$$

Dans ce qui suit, nous allons ignorer la contribution de ce terme des fluctuations.

Nous allons utiliser l'approche parabolique pour le calcul de l'écoulement que nous étudions. Pour cela, nous allons négliger les termes diffusifs dans la direction ξ . Les dérivées de deuxième ordre selon ξ ainsi que les dérivées mixtes seront alors éliminées. Après l'élimination des termes diffusifs selon ξ l'équation (A.1.15) devient

$$\frac{\partial b R \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial b R \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial b R \bar{G}}{\partial \eta} + j b \bar{M} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial b R \bar{G}_v}{\partial \eta} + D_1 \quad (\text{A.1.19})$$

4. NOUVELLES EXPRESSIONS DES COMPOSANTES DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT

L'équation (A.1.19) contient le terme D_1 dépendant de la force de pression D_{1p} et de la force de cisaillement $D_{1\tau}$. Nous cherchons une formulation qui ne contienne le terme D_{1p} . Puisque le vecteur de la force de la pression est normale à la surface de l'aube, le produit scalaire de celui-ci avec un vecteur tangent \vec{N} à cette surface sera nul.

$$(P_s - P_p) \cdot (R \frac{\partial \theta}{\partial \xi} N_\xi + R \frac{\partial \theta}{\partial R} N_R - N_\theta) = 0 \quad (\text{A.1.20})$$

Nous projetons alors les trois composantes de l'équation de mouvement selon deux vecteurs $\vec{N}(N_\xi, N_R, N_\theta)$ et $\vec{L}(L_\xi, L_R, L_\theta)$ tangents à la surface de l'aube. Les deux composantes résultantes ne contiennent pas le terme D_{1p} .

A la place de la troisième équation de mouvement, nous utilisons une équation cinématique reliant les composantes de vitesse au système (ξ, R, θ) à celles du système (S, N, B)

$$- \operatorname{tg} \beta_e \cdot \rho u_\xi + \rho u_\theta - \frac{\rho W_N}{\cos \beta_e} = 0 \quad (\text{A.1.21})$$

Après la projection selon \vec{N} et \vec{L} et l'introduction de la relation (A.1.21), l'équation (A.1.19) devient

$$\frac{\partial bRW}{\partial t} + \frac{\partial bRF}{\partial \xi} + \frac{\partial bRG}{\partial \eta} + j bM = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial bRG_v}{\partial \eta} \quad (\text{A.1.22})$$

où

$$\begin{aligned} W &= [W_1, W_2, W_3, 0, W_5]^T \\ F &= [F_1, F_2, E_3, 0, F_5]^T \\ G &= [G_1, G_2, G_3, 0, G_5]^T \\ G_v &= [0, G_{v2}, \bar{G}_{v3}, 0, G_{v5}]^T \\ M &= [0, M_2, M_3, M_4, M_5]^T \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

et

$$\begin{aligned} W_1 &= \bar{W}_1, \quad F_1 = \bar{F}_1, \quad G_1 = \bar{G}_1 \\ W_5 &= \bar{W}_5, \quad F_5 = \bar{F}_5, \quad G_5 = \bar{G}_5 \\ W_2 &= \bar{W}_2 N_\xi + \bar{W}_3 N_R + \bar{W}_4 N_\theta \\ W_3 &= \bar{W}_2 L_\xi + \bar{W}_3 L_R + \bar{W}_4 L_\theta \\ F_2 &= \bar{F}_2 N_\xi + \bar{F}_3 N_R + \bar{F}_4 N_\theta \\ F_3 &= \bar{F}_2 L_\xi + \bar{F}_3 L_R + \bar{F}_4 L_\theta \\ G_2 &= \bar{G}_2 N_\xi + \bar{G}_3 N_R + \bar{G}_4 N_\theta \\ G_3 &= \bar{G}_2 L_\xi + \bar{G}_3 L_R + \bar{G}_4 L_\theta \\ G_{v2} &= \bar{G}_{v2} N_\xi + \bar{G}_{v3} N_R + \bar{G}_{v4} N_\theta \\ G_{v3} &= \bar{G}_{v2} L_\xi + \bar{G}_{v3} L_R + \bar{G}_{v4} L_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.1.23.a})$$

$$\begin{aligned}
 M_2 = & \bar{M}_2 N_S + \bar{M}_3 N_R + \bar{M}_4 N_O - R \left(\bar{F}_2 \frac{\partial N_S}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \frac{\partial N_O}{\partial \xi} \right) \\
 & - R \left(\bar{G}_2 \frac{\partial N_S}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \frac{\partial N_O}{\partial \eta} \right) + \frac{R}{R_e} \left(\bar{G}_{v_2} \frac{\partial N_S}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_3} \frac{\partial N_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_4} \frac{\partial N_O}{\partial \eta} \right) \\
 & - \frac{L}{b} \left(D_{12S} N_S + D_{12R} N_R + D_{12O} N_O \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3 = & \bar{M}_2 L_S + \bar{M}_3 L_R + \bar{M}_4 L_O - R \left(\bar{F}_2 \frac{\partial L_S}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \frac{\partial L_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \frac{\partial L_O}{\partial \xi} \right) \\
 & - R \left(\bar{G}_2 \frac{\partial L_S}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \frac{\partial L_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \frac{\partial L_O}{\partial \eta} \right) + \frac{R}{R_e} \left(\bar{G}_{v_2} \frac{\partial L_S}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_3} \frac{\partial L_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{v_4} \frac{\partial L_O}{\partial \eta} \right) \\
 & - \frac{L}{b} \left(D_{12S} L_S + D_{12R} L_R + D_{12O} L_O \right)
 \end{aligned}$$

$$M_4 = - \operatorname{tg} \beta_c \frac{p u_S}{j} + \frac{p u_O}{j} - \frac{p W_N}{j \cos \beta_c}$$

ANNEXE 2

CALCUL DES MATRICES JACOBIENNES POUR LA LINEARISATION

Nous allons calculer les matrices Jacobiennes W, F, G, G_v et M de la procédure de linéarisation (définie par les formules (3.5)) des vecteurs W, F, G, G_v et M de l'équation finale (A.1.22).

Puisque les vecteurs W, F, G, G_v et M sont des fonctions linéaires des vecteurs $\bar{W}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{G}_v$ et \bar{M} données par les formules (A.1.23.a), les matrices Jacobiennes associées aux W, F, G, G_v et M seront aussi des fonctions linéaires des matrices associées aux $\bar{W}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{G}_v$ et \bar{M} . Nous présentons ensuite le calcul détaillé de ces matrices.

a) Calcul de la matrice Jacobienne $W = \partial W / \partial p$:

Il est

$$\begin{aligned} W_1 &= \bar{W}_1 = 1, \\ W_2 &= N_\zeta \bar{W}_2 + N_R \bar{W}_3 + N_\theta \bar{W}_4 = (N_\zeta \bar{w} + N_R \bar{n} + N_\theta \bar{e}) \\ W_3 &= L_\zeta \bar{W}_2 + L_R \bar{W}_3 + L_\theta \bar{W}_4 = (L_\zeta \bar{w} + L_R \bar{n} + L_\theta \bar{e}) \\ W_4 &= 0 \end{aligned} \quad (A.2.1)$$

et les éléments de la matrice

$$\begin{aligned} W_{11}^e &= 1, & W_{12}^e &= 0, & W_{13}^e &= 0, & W_{14}^e &= 0 \\ W_{21}^e &= 0, & W_{22}^e &= N_\zeta, & W_{23}^e &= N_R, & W_{24}^e &= N_\theta \\ W_{31}^e &= 0, & W_{32}^e &= L_\zeta, & W_{33}^e &= L_R, & W_{34}^e &= L_\theta \\ W_{4j}^e &= 0 & j &= 1(1)4 \end{aligned} \quad (A.2.2)$$

b) Calcul de la matrice $\mathcal{F} = \partial F / \partial \mu_i$:

Il est

$$F_1 = \bar{F}_1 = \beta (\bar{\omega} \bar{\xi}_S + \bar{\eta} \bar{\xi}_R)$$

$$F_i = K_S \bar{F}_2 + K_R \bar{F}_3 + K_\theta \bar{F}_4 = K_S \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot (\bar{\omega}^2 \bar{\xi}_S + \bar{\omega} \bar{\eta} \bar{\xi}_R) + \bar{p} \bar{\xi}_S \right\} + K_R \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\omega} \bar{\eta} \bar{\xi}_S + \bar{\eta}^2 \bar{\xi}_R) + \bar{p} \bar{\xi}_R \right\} + K_\theta \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\omega} \bar{e} \bar{\xi}_S + \bar{\eta} \bar{e} \bar{\xi}_R) \right\} \quad (\text{A.2.3})$$

$$F_4 = 0$$

$$\text{où } \vec{K} (K_S, K_R, K_\theta) \equiv \vec{N} (N_S, N_R, N_\theta) \quad \text{pour } i = 2$$

$$\vec{K} (K_S, K_R, K_\theta) \equiv \vec{L} (L_S, L_R, L_\theta) \quad \text{pour } i = 3$$

Les éléments de la matrice \mathcal{F} sont

$$\mathcal{F}_{11} = 0, \quad \mathcal{F}_{12} = \beta \bar{\xi}_S, \quad \mathcal{F}_{13} = \beta \bar{\xi}_R, \quad \mathcal{F}_{14} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i1} = & -K_S \left\{ \frac{\omega^2 \bar{\xi}_S + \bar{\omega} \bar{\eta} \bar{\xi}_R}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} \cdot \bar{\xi}_S \right\} \\ & - K_R \left\{ \frac{\bar{\omega} \bar{\eta} \bar{\xi}_S + \bar{\eta}^2 \bar{\xi}_R}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} \cdot \bar{\xi}_R \right\} \\ & - K_\theta \left\{ \frac{\bar{\omega} \bar{e} \bar{\xi}_S + \bar{\eta} \bar{e} \bar{\xi}_R}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i2} = & K_S \left\{ \frac{2 \bar{\omega} \bar{\xi}_S + \bar{\eta} \bar{\xi}_R}{\bar{\rho}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \bar{\xi}_S \right\} \\ & + K_R \left\{ \frac{\bar{\eta} \bar{\xi}_S}{\bar{\rho}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\omega}} \cdot \bar{\xi}_R \right\} + K_\theta \left\{ \frac{\bar{e} \bar{\xi}_S}{\bar{\rho}} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_{i3} = K_S \left\{ \frac{\bar{u}_i \bar{F}_R}{\bar{\rho}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{v}_i} \cdot \bar{F}_S \right\} + K_R \left\{ \frac{\bar{u}_i \bar{F}_S + 2 \bar{v}_i \bar{F}_R}{\bar{\rho}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{v}_i} \cdot \bar{F}_R \right\} \\ + K_\theta \left\{ \frac{\bar{e}_i \bar{F}_R}{\bar{\rho}} \right\}$$

$$\mathcal{F}_{i4} = K_\theta \left\{ \frac{\bar{u}_i \bar{F}_S + \bar{v}_i \bar{F}_R}{\bar{\rho}} \right\}$$

$$\mathcal{F}_{4j} = 0 \quad j = 1(1)4$$

c) Calcul de la matrice $\mathcal{Y} = \partial \mathcal{G} / \partial \mathcal{P}$:

Il est

$$G_1 = \bar{G}_1 = \beta (\bar{u}_1 \eta_S + \bar{v}_1 \eta_R)$$

$$G_i = K_S \bar{G}_2 + K_R \bar{G}_3 + K_\theta \bar{G}_4 = K_S \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{u}_i^2 \eta_S + \bar{u}_i \bar{v}_i \eta_R) + \bar{p} \eta_S \right\} \quad (\text{A.2.5}) \\ + K_R \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{u}_i \bar{v}_i \eta_S + \bar{v}_i^2 \eta_R) + \bar{p} \eta_R \right\} + K_\theta \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{u}_i \bar{e}_i \eta_S + \bar{v}_i \bar{e}_i \eta_R) \right\}$$

$$G_4 = 0$$

où $\vec{K} = \vec{N}$ pour $i = 2$

$\vec{K} = \vec{L}$ pour $i = 3$

Les éléments de la matrice \mathcal{Y} sont

$$\mathcal{Y}_{11} = 0, \quad \mathcal{Y}_{12} = \beta \eta_S, \quad \mathcal{Y}_{13} = \beta \eta_R, \quad \mathcal{Y}_{14} = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

$$y_{i1} = -K_S \left\{ \frac{\bar{u}_1^2 \eta_S + \bar{u}_1 \bar{y} \eta_R}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta_1} \cdot \eta_S \right\}$$

$$- K_R \left\{ \frac{\bar{u}_1 \bar{y} \eta_S + \bar{y}^2 \eta_R}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta_1} \cdot \eta_R \right\}$$

$$- K_0 \left\{ \frac{\bar{u}_1 \bar{c} \eta_S + \bar{y} \bar{c} \eta_R}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta_1} \right\}$$

$$y_{i2} = K_S \left\{ \frac{2 \bar{u}_1 \eta_S + \bar{y} \eta_R}{\bar{p}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{u}_1} \cdot \eta_S \right\}$$

$$+ K_R \left\{ \frac{\bar{y} \eta_S}{\bar{p}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{u}_1} \cdot \eta_R \right\} + K_0 \left\{ \frac{\bar{c} \eta_S}{\bar{p}} \right\}$$

$$y_{i3} = K_S \left\{ \frac{\bar{u}_1 \eta_R}{\bar{p}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \cdot \eta_S \right\} + K_R \left\{ \frac{\bar{u}_1 \eta_S + 2 \bar{y} \eta_R}{\bar{p}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \cdot \eta_R \right\}$$

$$+ K_0 \left\{ \frac{\bar{c} \eta_R}{\bar{p}} \right\}$$

$$y_{i4} = K_0 \left\{ \frac{\bar{u}_1 \eta_S + \bar{y} \eta_R}{\bar{p}} \right\}$$

$$y_{4j} = 0 \quad j = 1(1)4$$

d) Calcul de la matrice $y_{ij} = \partial G_{vi} / \partial \eta_j$:

Il est

$$G_{v1} = \bar{G}_{v1} = 0$$

$$G_{vi} = K_S \bar{G}_{v2} + K_R \bar{G}_{v3} + K_0 \bar{G}_{v4} =$$

$$\frac{K_S}{j} \left\{ \eta_S \left[\eta_S \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{u}_1}{\bar{p}} \right)_{\eta} + 2M \cdot \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] + \eta_R \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{y}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] \right. \quad (A.2.7)$$

$$\left. + \eta_R M \left[\eta_R \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \eta_S \left(\frac{\bar{y}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] \right\}$$

$$+ \frac{K_R}{j} \left\{ \eta_S M \left[\eta_R \left(\frac{\bar{u}_1}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \eta_S \left(\frac{\bar{y}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] + \eta_R \left\{ \eta_R \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{y}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + 2M \cdot \left(\frac{\bar{y}}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right] \right. \right.$$

$$\left. + \eta_S \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{u}_1}{\bar{p}} \right)_{\eta} \right\} \right\}$$

$$+ \frac{K_0}{j} \left\{ \eta_S^2 M \left(\frac{\bar{c}}{\bar{p}} \right)_{\eta} + \eta_R M \left[\eta_R \left(\frac{\bar{c}}{\bar{p}} \right)_{\eta} - j \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{p} R} \right] \right\}$$

$$G_{v4} = 0$$

Les éléments de la matrice y_v sont

$$y_{v_{1j}} = 0 \quad j = 1(1)4 \quad (\text{A.2.8})$$

$$\begin{aligned} y_{v_{11}} = & -\frac{K_I}{J} \cdot \left\{ \eta_S \left[\eta_S \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n + 2\mu \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] + \frac{\lambda}{R} \cdot \eta_R \cdot \left(\frac{R \bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] \right. \\ & \left. + \eta_R \mu \cdot \left[\eta_R \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n + \eta_S \cdot \left(\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] \right\} \\ & - \frac{K_R}{J} \cdot \left\{ \eta_S \mu \left[\eta_R \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n + \eta_S \cdot \left(\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] \right. \\ & \left. + \eta_R \left[\eta_R \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R \bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n + 2\mu \cdot \left(\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] + \frac{\lambda}{R} \cdot \eta_S \cdot \left(\frac{R \bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n \right] \right\} \\ & - \frac{K_0}{J} \cdot \left\{ \eta_S^2 \mu \cdot \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n + \mu \eta_R \cdot \left[\eta_R \cdot \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_n - j \cdot \frac{\bar{e}}{R \bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{v_{12}} = & \frac{K_I}{J} \cdot \left\{ \eta_S^2 \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R}{\bar{p}} \right)_n + 2\mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n \right] + \eta_R^2 \mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n \right\} \\ & + \frac{K_R}{J} \cdot \left\{ \eta_S \eta_R \cdot \left[\mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n + \frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R}{\bar{p}} \right)_n \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{v_{13}} = & \frac{K_I}{J} \cdot \left\{ \eta_S \eta_R \cdot \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \left(\frac{R}{\bar{p}} \right)_n + \mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n \right] \right\} \\ & + \frac{K_R}{J} \cdot \left\{ \eta_S^2 \mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n + \eta_R^2 2\mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n \right\} \end{aligned}$$

$$y_{V_{i4}} = \frac{K_0}{j} \cdot \left\{ \mu \cdot (\eta_j^2 + \eta_r^2) \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}} \right)_n - j \mu \eta_r \cdot \frac{1}{R \bar{p}} \right\}$$

$$y_{V_{4j}} = 0 \quad j = 1(1)4$$

f) Calcul de la matrice $\mathcal{M} = \partial M / \partial n$:

Il est

$$M_1 = \bar{M}_1 = 0$$

$$M_L = K_j \bar{M}_2 + K_R \bar{M}_3 + K_0 \bar{M}_4 - R \left(\bar{F}_2 \cdot \frac{\partial K_j}{\partial \xi} + \bar{F}_3 \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \xi} + \bar{F}_4 \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \xi} \right) \quad (A.2.9)$$

$$- R \left(\bar{G}_2 \cdot \frac{\partial K_j}{\partial \eta} + \bar{G}_3 \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \bar{G}_4 \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \eta} \right) + \frac{R}{Re} \left(\bar{G}_{V_2} \cdot \frac{\partial K_j}{\partial \eta} + \bar{G}_{V_3} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \bar{G}_{V_4} \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \eta} \right)$$

$$- \frac{L}{b} \cdot (K_j D_{1\tau_j} + K_R D_{1\tau_R} + K_0 D_{1\tau_0})$$

$$M_4 = - \frac{W_N}{\cos \beta_e} \cdot \bar{p} - \operatorname{tg} \beta_e \cdot \bar{w} + \bar{e}$$

avec

$$\bar{M}_2 = 0$$

$$\bar{M}_3 = - \left(\frac{\bar{c}^2}{\bar{p}} + \bar{p} + 2 \omega R \bar{e} + \omega^2 R^2 \bar{p} \right)$$

$$+ \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left\{ \frac{j}{R} \left[\eta_j \cdot \left(\frac{R \bar{w}}{\bar{p}} \right)_n + \eta_r \cdot \left(\frac{R \bar{w}}{\bar{p}} \right)_n \right] + j \cdot \frac{2 \mu}{R} \cdot \frac{\eta_j}{\bar{p}} \right\}$$

$$\bar{M}_4 = \frac{\bar{w} \bar{e}}{\bar{p}} + 2 \omega R \bar{w} - \frac{\mu}{Re} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left[\eta_r \cdot \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}} \right)_n - j \cdot \frac{\bar{e}}{R \bar{p}} \right]$$

Les éléments de la matrice \mathcal{M} sont

$$\mathcal{M}_{ij} = 0 \quad j = 1(1)4 \quad (\text{A.2.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i1} = & -K_R \left\{ -\frac{\bar{e}^2}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} + \omega^2 R^2 \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right. \\ & \left. + \frac{L}{Re} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left\{ \frac{\lambda}{R} \cdot \left[\eta_S \cdot \left(\frac{R \bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right) + \eta_R \cdot \left(\frac{R \bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right) \right] + j \cdot \frac{2M}{R} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{A}_1} \right\} \right\} \\ & - K_\theta \left\{ \frac{\bar{v} \bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} - \frac{M}{Re \cdot j} \cdot \left[\eta_S \cdot \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right) - j \cdot \frac{\bar{e}}{\bar{p}^2 R} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right] \right\} \\ & - R \cdot \left[\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \xi} \right] \\ & - R \cdot \left[\frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_3}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_4}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \eta} \right] \\ & + \frac{R}{Re} \cdot \left[\frac{\partial \bar{G}_{v2}}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_{v3}}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_{v4}}{\partial \mathcal{A}_1} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i2} = & K_R \left\{ \frac{1}{Re \cdot j} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \eta_S \cdot \left(\frac{R}{\bar{p}} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{u}} \right\} \\ & - R \cdot \left[\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \xi} \right] \\ & - R \cdot \left[\frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_3}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_4}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \eta} \right] \\ & + \frac{R}{Re} \cdot \left[\frac{\partial \bar{G}_{v2}}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\delta}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_{v3}}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}_{v4}}{\partial \mathcal{A}_2} \cdot \frac{\partial K_\theta}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{i3} = & K_R \left\{ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{n}} + \frac{1}{\text{Re} \cdot j} \cdot \left[\frac{\lambda}{R} \cdot \eta_R \cdot \left(\frac{R}{\bar{P}} \right)_n + j 2\mu \cdot \frac{1}{R\bar{P}} \right] \right\} \\
 & + K_0 \left\{ \frac{\bar{L}}{\bar{P}} + 2\omega R \right\} \\
 & - R \left[\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_S}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \bar{\xi}} \right] \\
 & - R \left[\frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_S}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{G}_3}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{G}_4}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \bar{\eta}} \right] \\
 & + \frac{R}{\text{Re}} \left[\frac{\partial \bar{G}_{v2}}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_S}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{G}_{v3}}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_R}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial \bar{G}_{v4}}{\partial \bar{n}_3} \cdot \frac{\partial K_0}{\partial \bar{\eta}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{i4} = & K_R \left\{ -2 \cdot \frac{\bar{L}}{\bar{P}} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{L}} - 2\omega R \right\} \\
 & + K_0 \left\{ \frac{\bar{n}}{\bar{P}} - \frac{\mu}{\text{Re} \cdot j} \cdot \left[\eta_R \cdot \left(\frac{1}{\bar{P}} \right)_n - \frac{1}{R\bar{P}} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{41} = - \frac{W_N}{\cos \beta_e} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{n}_1}, \quad \mathcal{M}_{42} = - \text{tg} \beta_e$$

$$\mathcal{M}_{43} = 0, \quad \mathcal{M}_{44} = 1$$

Dans toutes les expressions pour les matrices Jacobiennes écrites jusqu'ici, nous distinguons deux cas

i) Compressible avec :

$$\beta = 1, \quad \mu_1 = \bar{p}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} = 1$$

$$\bar{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \left(\bar{p} c_p T_0 - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{e}^2}{2\bar{p}} \right) \quad (\text{A.2.11})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{p}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \left(c_p T_0 + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{e}^2}{2\bar{p}^2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{u}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\bar{u}}{\bar{p}}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{v}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{p}}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{e}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\bar{e}}{\bar{p}}$$

ii) Incompressible avec :

$$\mu_1 = \bar{p}_v, \quad \bar{p} = \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu_1} = 1, \quad \beta = 10^{-6}$$

ANNEXE 3
CALCUL DES MATRICES DE LA RESOLUTION

Nous allons calculer les matrices $[A_j]$, $[B_j]$ et $[C_j]$ du système tridiagonal par blocs (3.18) pour chaque point (j) du maillage.

En partant de l'équation discrétisée (3.12) écrite au point (j), nous allons réarranger les termes de façon à ce qu'elle prenne la forme (3.15). Les matrices $[A_j]$, $[B_j]$, $[C_j]$ dans (3.15) contiennent les inconnues aux points (j-1), (j), (j+1) respectivement.

Dans l'équation (3.12), les matrices Jacobiennes \mathcal{W}^n et \mathcal{F}^n font apparaître les inconnues au point (j). La dérivée $(\partial y_v / \partial \eta)_j$ fait apparaître le vecteur des inconnues aux points (j+1) et (j-1) pour un schéma centré et aux points (j) et (j-1) pour un schéma décentré en arrière. La dérivée $(\partial y_v / \partial \eta)_j$ et la matrice \mathcal{M}_j font intervenir le vecteur des inconnues aux points (j-1), (j) et (j+1). Nous allons examiner en détail la distribution des différents termes à ces points pour les deux dernières.

Dérivée $(\partial y_v / \partial \eta)_j$:

Elle est divisée en trois parties

$$\left. \frac{\partial y_v}{\partial \eta} \right|_j = \frac{y_{v_{j+1/2}} - y_{v_{j-1/2}}}{\Delta \eta} = y_{v_{j+1}}(j-1) + y_{v_0}(j) + y_{v_1}(j+1) \quad (\text{A.3.1})$$

En utilisant les expressions (A.2.8) et en développant les dérivées selon , nous pouvons définir les éléments des matrices $y_{v_{j+1}}$, y_{v_0} et y_{v_1} .

$$(y_{v_{11}})_{12} = (y_{v_0})_{12} = (y_{v_1})_{12} = 0 \quad \lambda = 1(1)4$$

$$\begin{aligned} (y_{v_{11}})_{i1} = & - \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j-1/2} \left\{ \nu_{Sj-1/2} \left\{ \nu_{Sj-1/2} \left[\left(\frac{\lambda}{R} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right. \right. \right. \\ & + 2\mu_{j-1/2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \left. \left. \left. + \left(\frac{\lambda \nu_R}{R} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right] \right\} \right. \\ & + \left. \left. \left. (\nu_R \mu)_{j-1/2} \left[\nu_{Rj-1/2} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} + \nu_{Sj-1/2} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right] \right\} \right. \\ & - \left. \left. \left. \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j-1/2} \left\{ (\nu_S \mu)_{j-1/2} \left[\nu_{Rj-1/2} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} + \nu_{Sj-1/2} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right] \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \nu_{Rj-1/2} \left\{ \nu_{Rj-1/2} \left[\left(\frac{\lambda}{R} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{R\bar{\eta}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} + 2\mu_{j-1/2} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right] \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. \left(\frac{\lambda \nu_S}{R} \right)_{j-1/2} \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right\} \right\} \right. \\ & - \left. \left. \left. \left(\frac{K_0}{J} \right)_{j-1/2} \left\{ (\nu_S^2 \mu)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left. (\mu \nu_R)_{j-1/2} \left[\nu_{Rj-1/2} \left(\frac{\bar{e}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} + j \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\bar{e}^2}{R\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \right] \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y_{v_0})_{i1} = & \left\{ \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \nu_S^2}{R} \right)_{j-1/2} + \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \nu_S^2}{R} \right)_{j+1/2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \nu_R \nu_S}{R} \right)_{j-1/2} + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \nu_S \nu_R}{R} \right)_{j+1/2} \right\} \cdot \left(\frac{R\bar{u}}{\bar{p}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j-1/2} \cdot \mu_{j-1/2} \cdot (2\eta_S^2 + \eta_R^2)_{j-1/2} + \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \mu_{j+1/2} \cdot (2\eta_S^2 + \eta_R^2)_{j+1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j-1/2} \cdot (\mu \eta_S \eta_R)_{j-1/2} + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j+1/2} \cdot (\mu \eta_S \eta_R)_{j+1/2} \right\} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_j \\
 & + \left\{ \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \eta_S \eta_R}{R} \right)_{j-1/2} + \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \eta_S \eta_R}{R} \right)_{j+1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j-1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \eta_R^2}{R} \right)_{j-1/2} + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\lambda \eta_R^2}{R} \right)_{j+1/2} \right\} \left(\frac{R \bar{\eta}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_j \\
 & + \left\{ \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j-1/2} (\mu \eta_S \eta_R)_{j-1/2} + \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j+1/2} (\mu \eta_S \eta_R)_{j+1/2} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j-1/2} (\mu \eta_S^2 + 2\mu \eta_R^2)_{j-1/2} + \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j+1/2} (\mu \eta_S^2 + 2\mu \eta_R^2)_{j+1/2} \right\} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_j \\
 & + \left\{ \left(\frac{K_\theta}{J} \right)_{j-1/2} \cdot (\mu \eta_S^2 + \mu \eta_R^2)_{j-1/2} + \left(\frac{K_\theta}{J} \right)_{j+1/2} \cdot (\mu \eta_S^2 + \mu \eta_R^2)_{j+1/2} \right\} \left(\frac{\bar{\ell}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_j \\
 & + j \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ - (\mu \eta_R)_{j-1/2} + (\mu \eta_R)_{j+1/2} \right\} \cdot \left(\frac{\bar{\ell}^2}{\bar{\rho}^2 R} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e_{jv_1})_{i1} & = - \left(\frac{K_S}{J} \right)_{j+1/2} \cdot \left\{ \eta_{Sj+1/2} \left[\eta_{Sj+1/2} \left[\left(\frac{\lambda}{R} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{R \bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + 2\mu_{j+1/2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] + \left(\frac{\lambda \eta_R}{R} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{R \bar{\eta}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\eta_R \mu)_{j+1/2} \left[\eta_{Rj+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} + \eta_{Sj+1/2} \left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{K_R}{J} \right)_{j+1/2} \left\{ (\nu_{\gamma} \mu)_{j+1/2} \left[\nu_{Rj+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} + \nu_{\delta j+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] \right. \\
 & \quad + \nu_{Rj+1/2} \left\{ \nu_{Rj+1/2} \cdot \left[\left(\frac{\lambda}{R} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{R \bar{v}_1}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} + 2 \mu_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{\lambda \mu_{\delta}}{R} \right)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{R \bar{u}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right\} \right\} \\
 & - \left(\frac{K_{\theta}}{J} \right)_{j+1/2} \left\{ (\nu_{\gamma}^2 \mu)_{j+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right. \\
 & \quad \left. + (\mu \nu_R)_{j+1/2} \left[\nu_{Rj+1/2} \cdot \left(\frac{\bar{z}}{\bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} - j \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\bar{z}^2}{R \bar{\rho}^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_{j+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Les autres elements $(\mathcal{Y}_{v_{11}})_{i\lambda}$, $(\mathcal{Y}_{v_0})_{i\lambda}$, $(\mathcal{Y}_{v_1})_{i\lambda}$ pour $\lambda = 2(1)4$, des matrices $\mathcal{Y}_{v_{11}}$, \mathcal{Y}_{v_0} et \mathcal{Y}_{v_1} peuvent être calculés de façon analogue.

En plus il est

$$(\mathcal{Y}_{v_{11}})_{42} = (\mathcal{Y}_{v_0})_{42} = (\mathcal{Y}_{v_1})_{42} = 0, \quad \lambda = 1(1)4$$

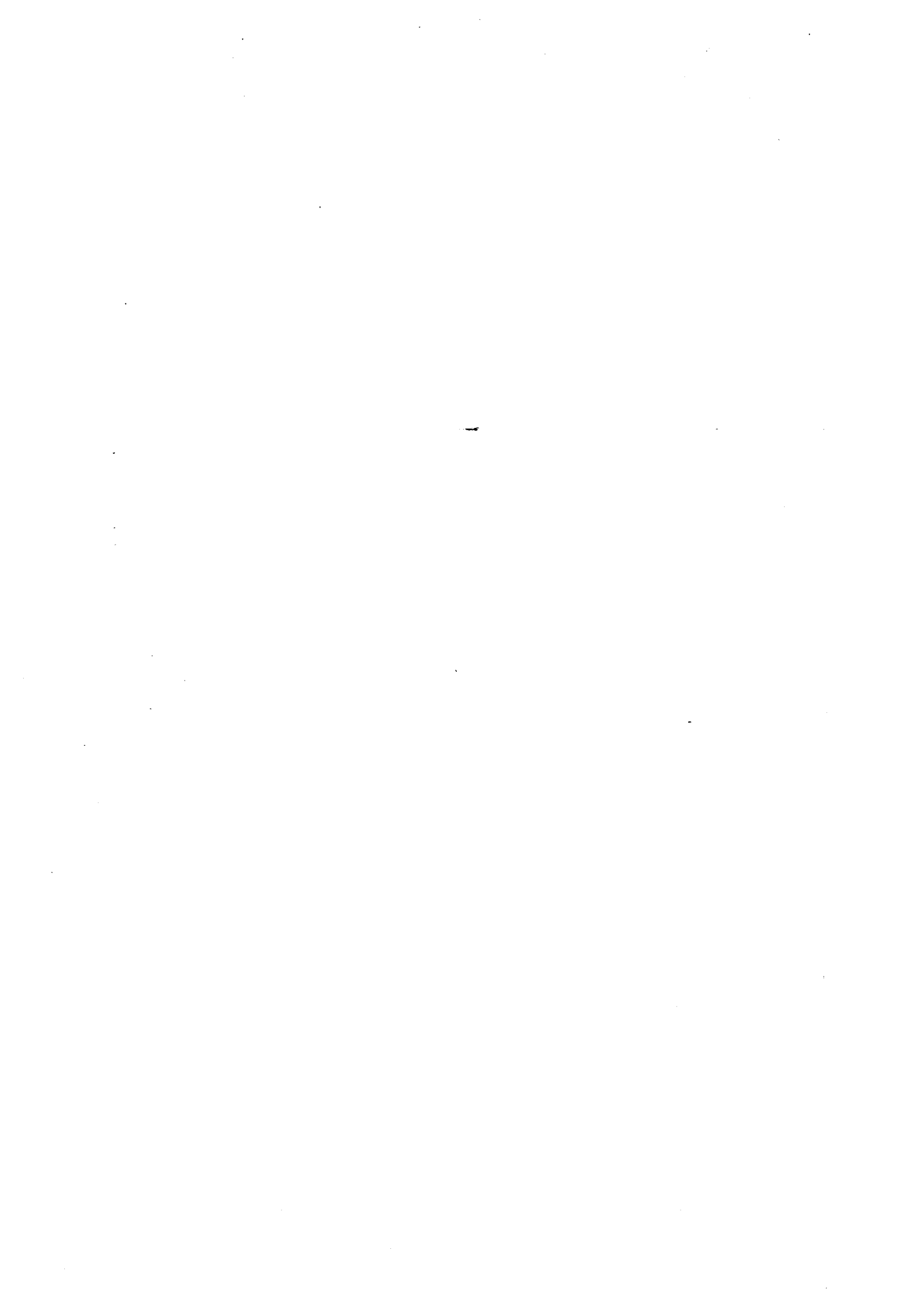
Matrice \mathcal{M}_j :

Elle est divisée en trois parties :

$$\mathcal{M}(j) = \mathcal{M}_{11}(j-1) + \mathcal{M}_0(j) + \mathcal{M}_1(j+1)$$

En utilisant les expressions (A.2.10), les éléments des matrices \mathcal{M}_{11} , \mathcal{M}_0 et \mathcal{M}_1 peuvent être définies.

En utilisant les formules trouvées dans cette annexe, nous pouvons calculer les coefficients matriciaux $[A_j]$, $[B_j]$ et $[C_j]$ du système (3.18). Ils sont donnés par les expressions (3.16) ou (3.17).



FIGURES

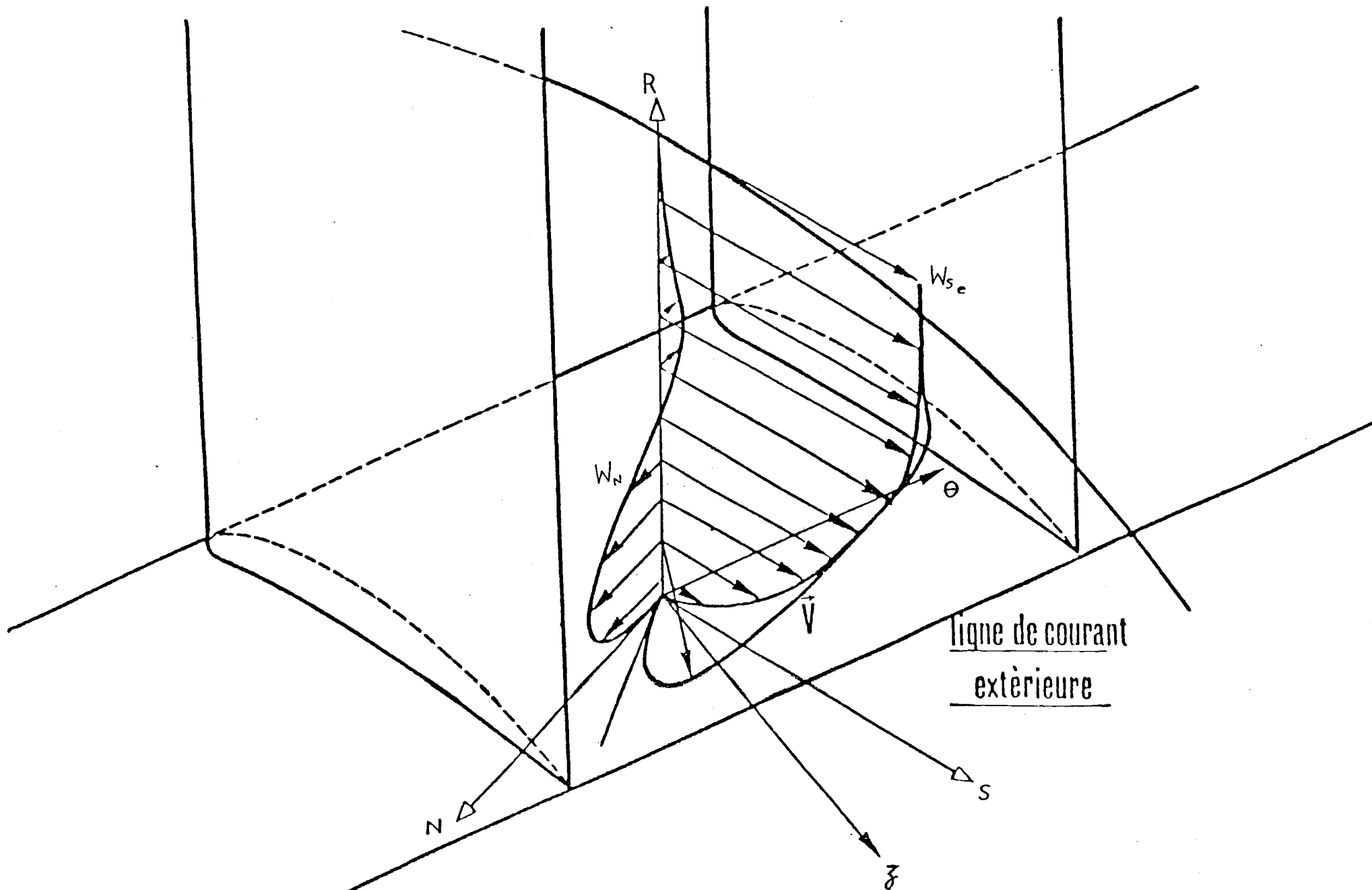


Figure 1. Systèmes des coordonnées (z, R, θ) et (S, N, B)

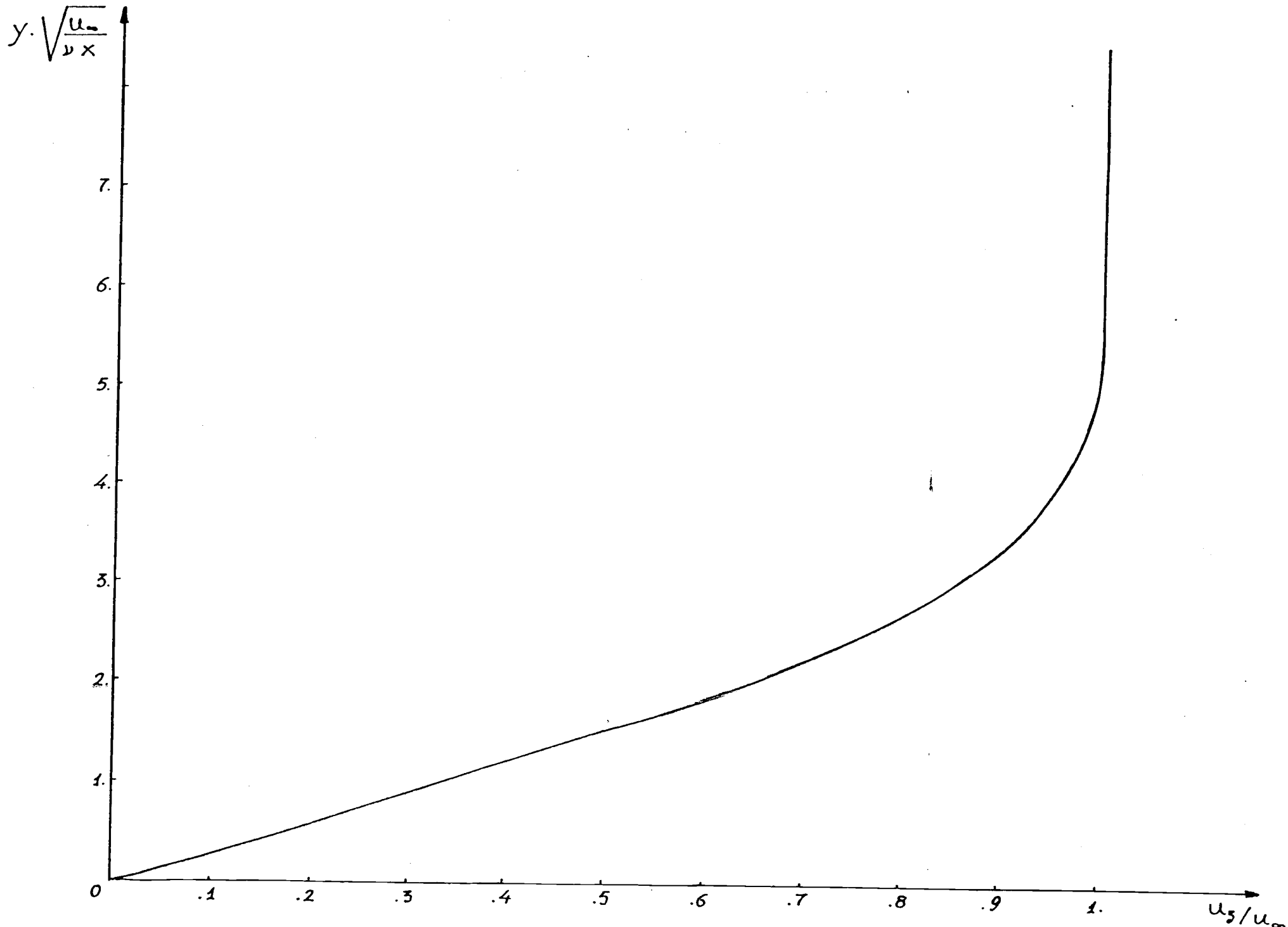


Figure 2. Composante axiale

$$y \cdot \sqrt{\frac{u_{\infty}}{\nu x}}$$

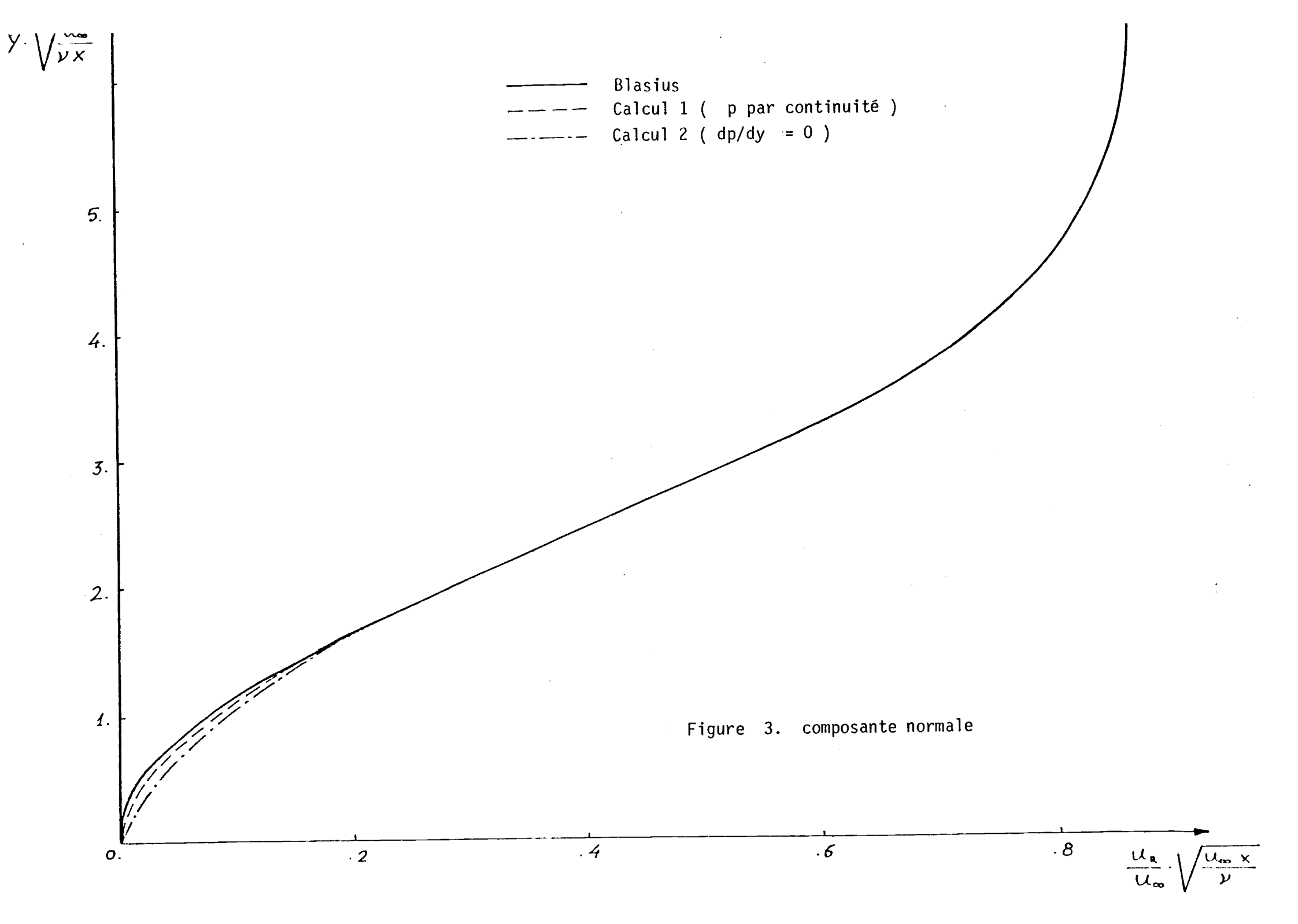
- Blasius
- - - Calcul 1 (p par continuité)
- · - · - Calcul 2 (dp/dy = 0)

5.
4.
3.
2.
1.
0.

.2 .4 .6 .8

$$\frac{u_x}{u_{\infty}} \sqrt{\frac{u_{\infty} x}{\nu}}$$

Figure 3. composante normale



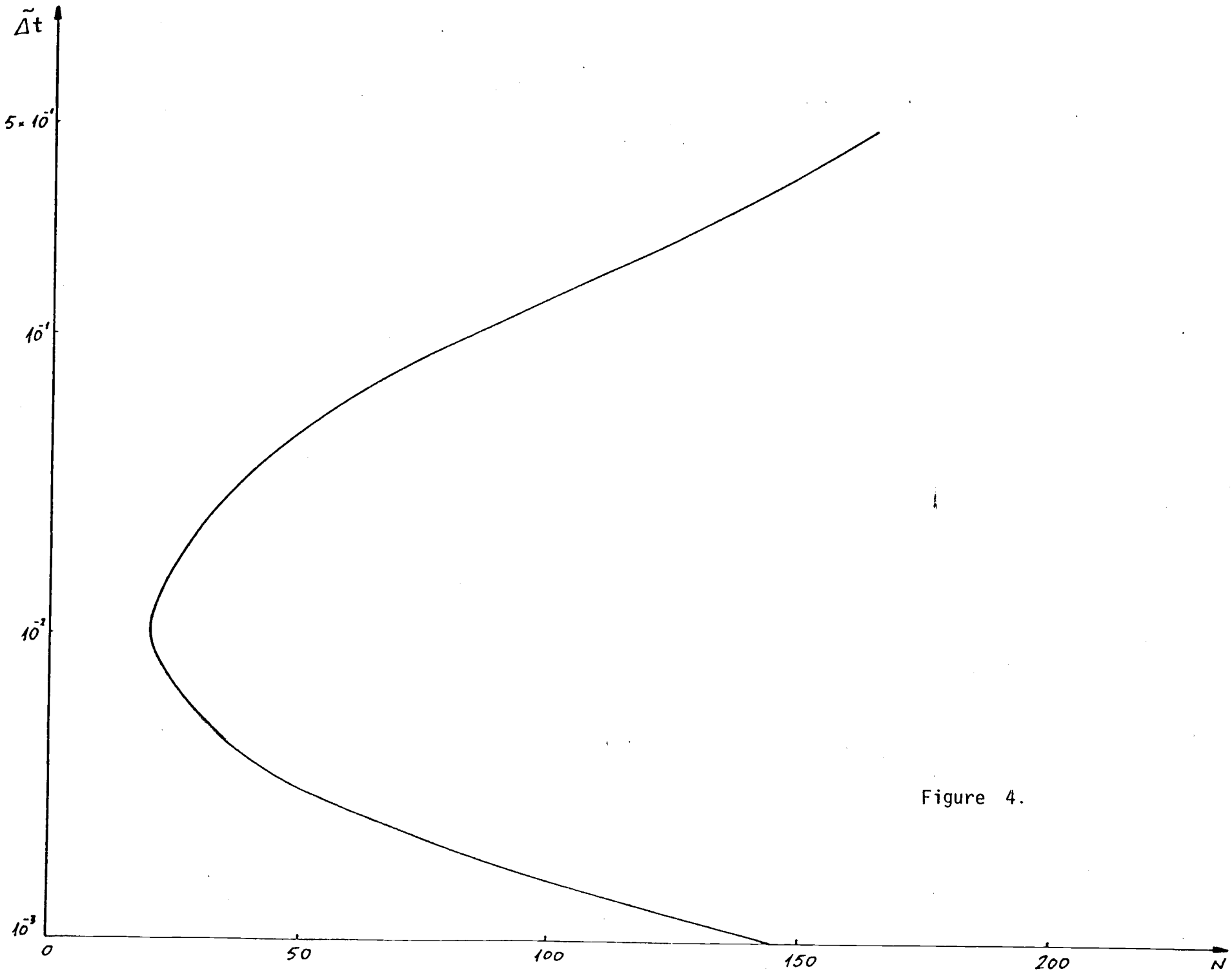


Figure 4.

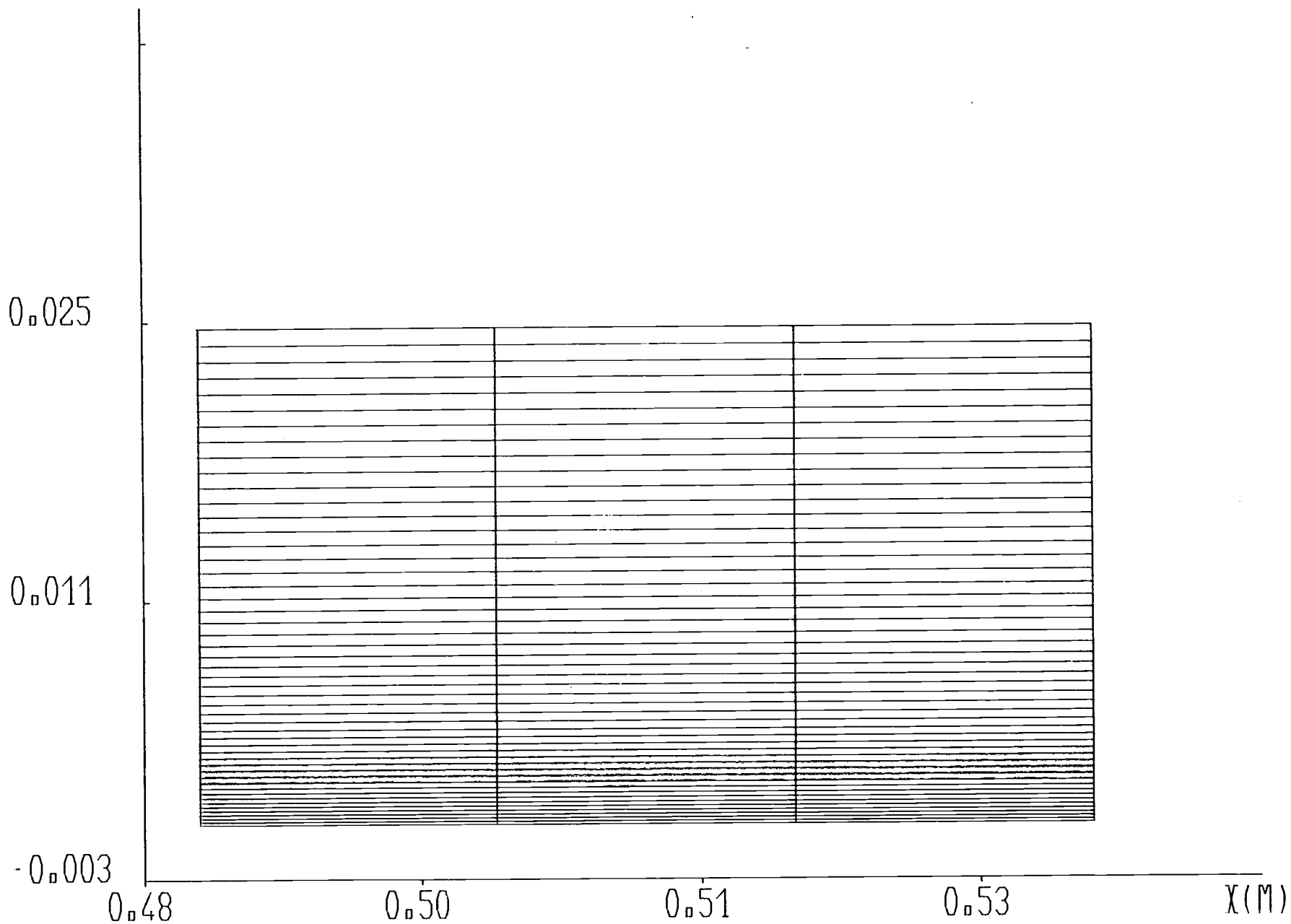
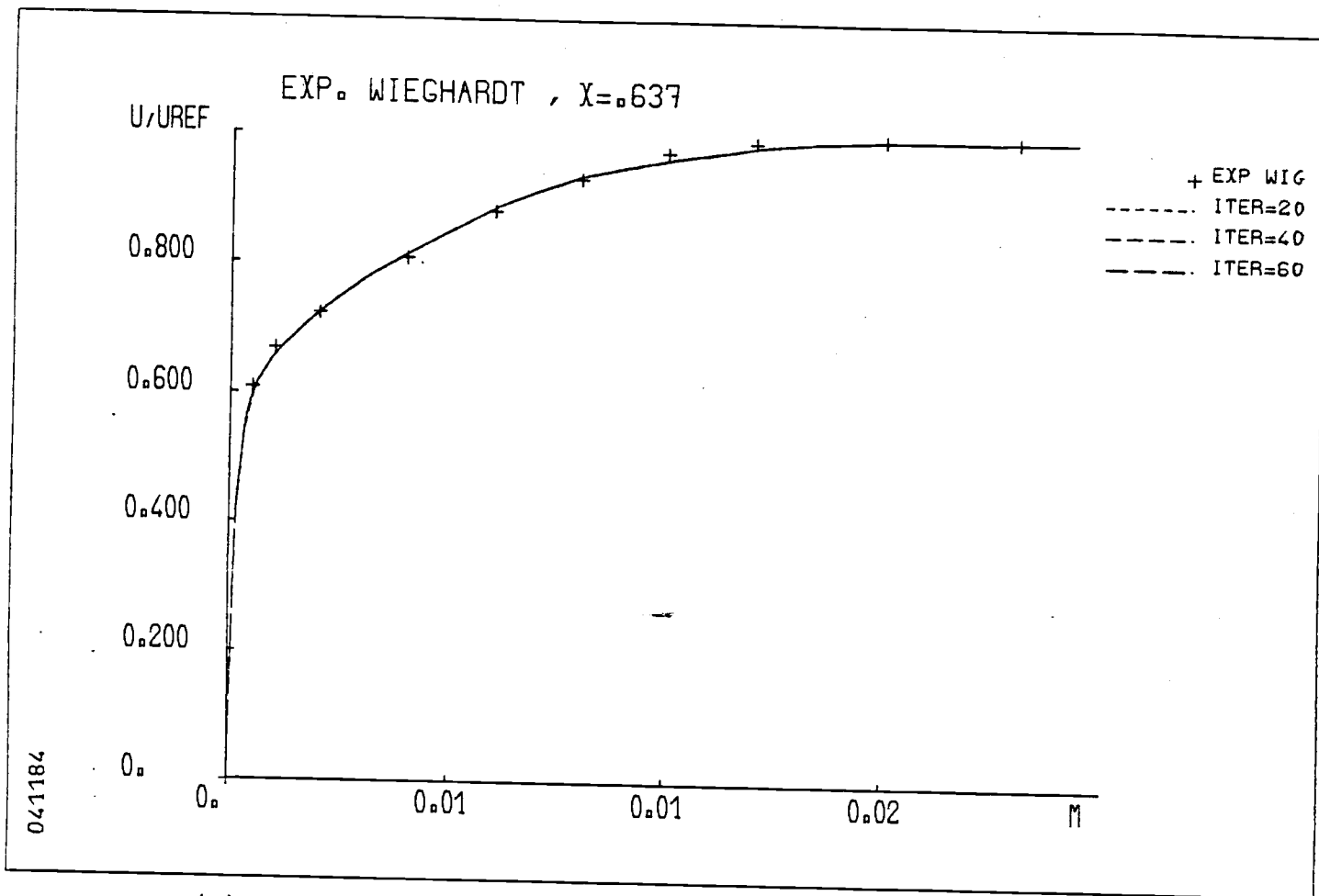
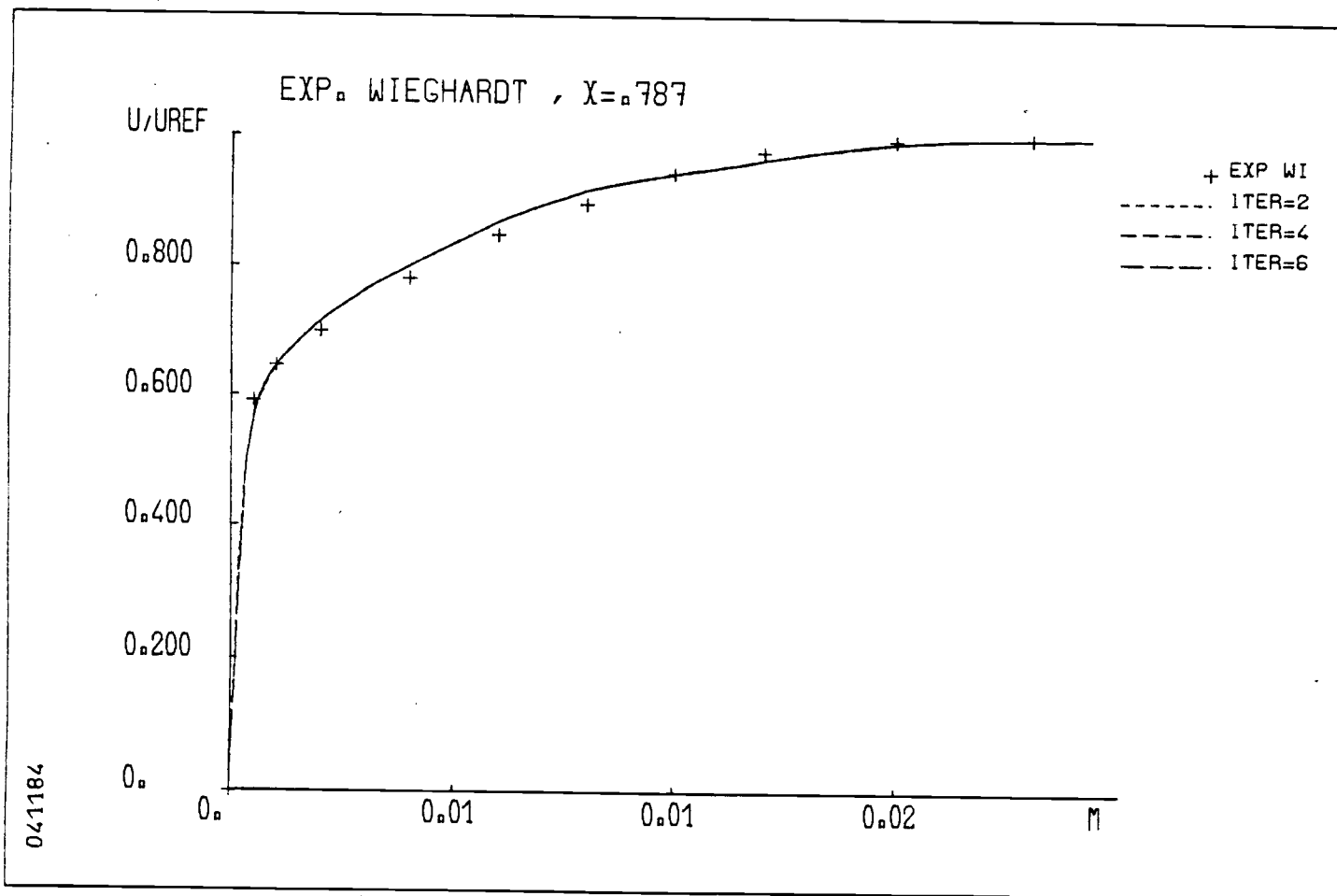


Figure 5.

MAILLAGE EXP. WIEGHARDT (51 X 50)

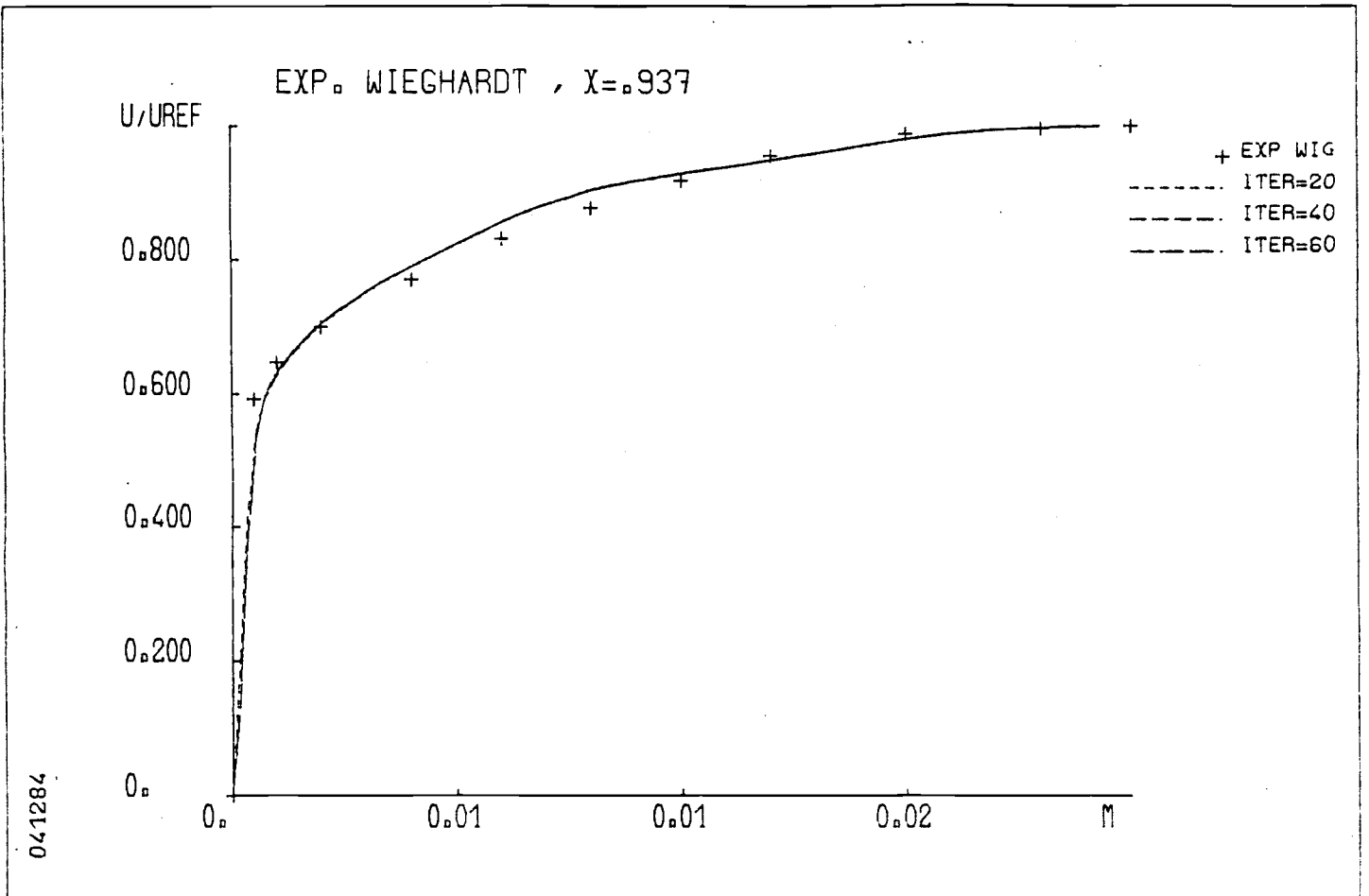


(a)

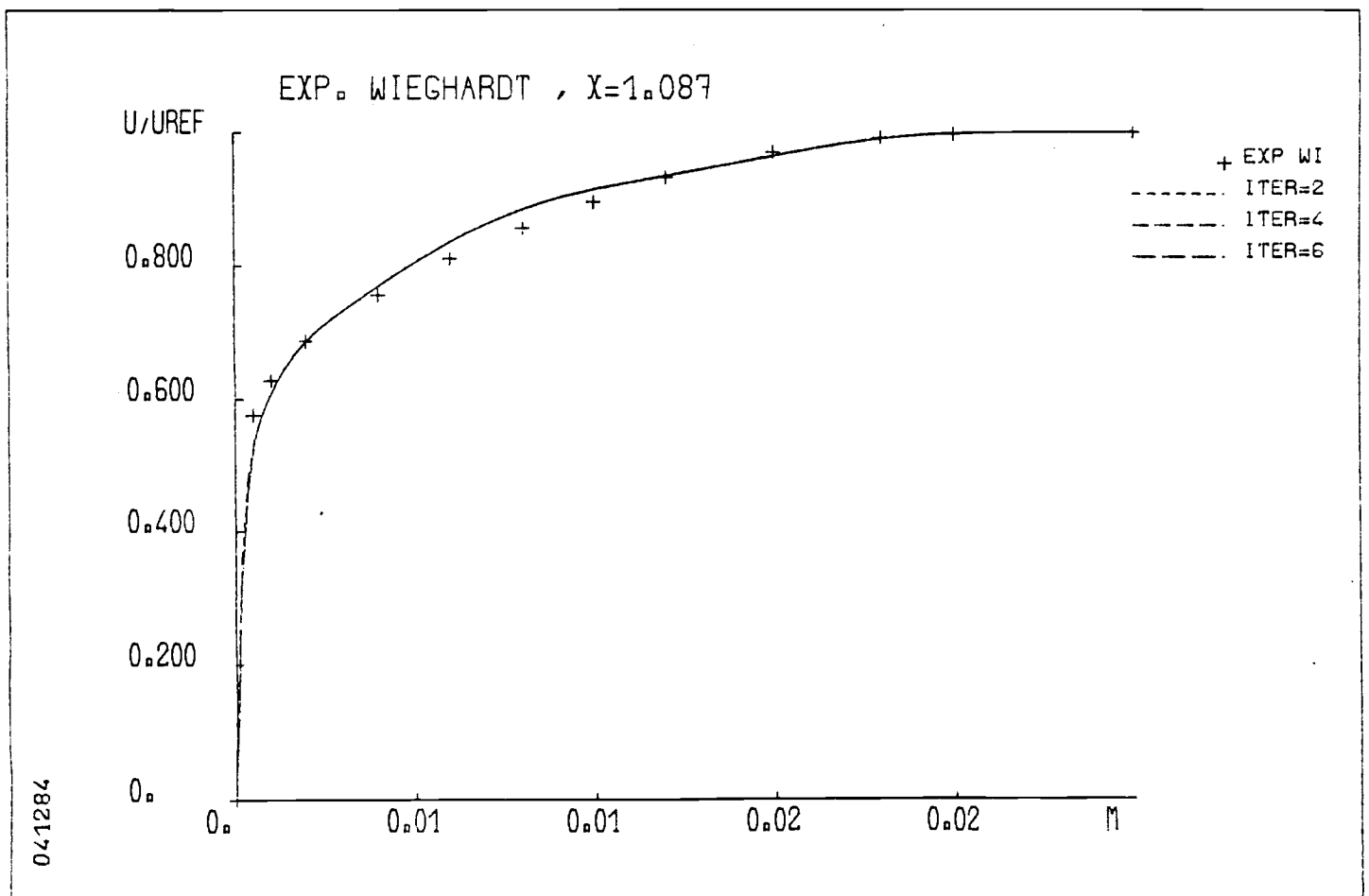


(b)

Figure 6.

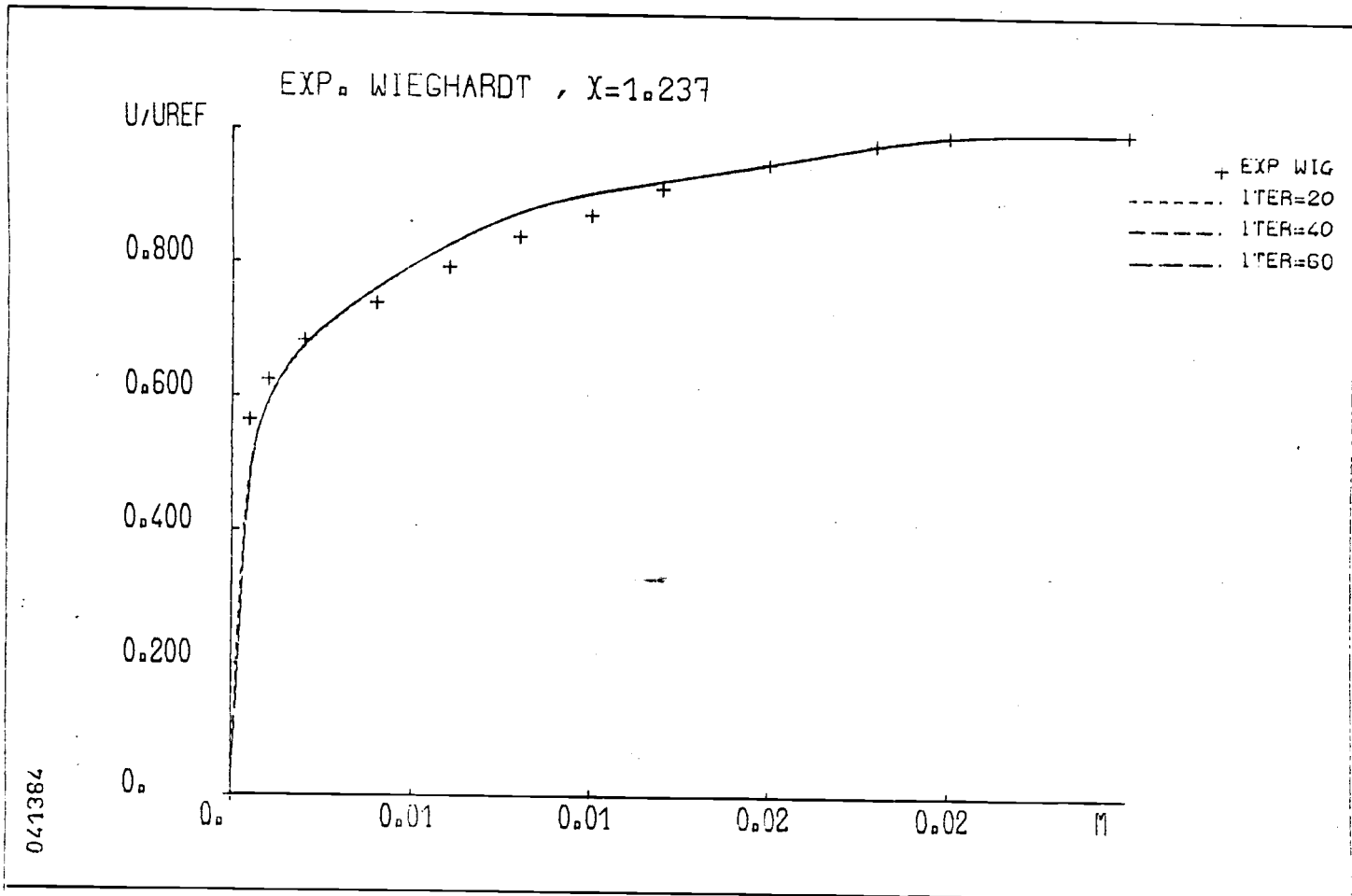


(c)

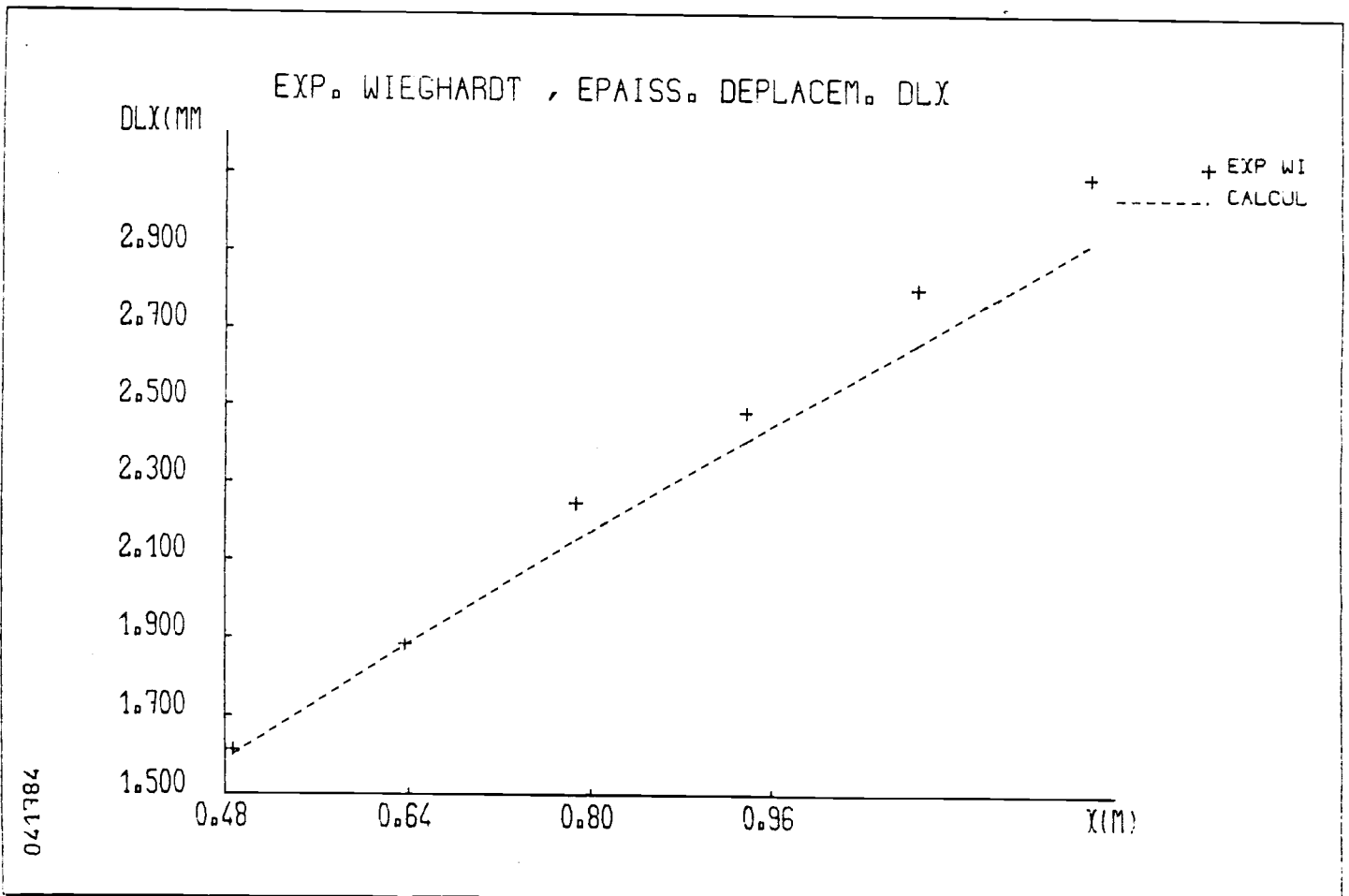


(d)

Figure 6. (contin.)



(e)
Figure 6. (contin.)



041784

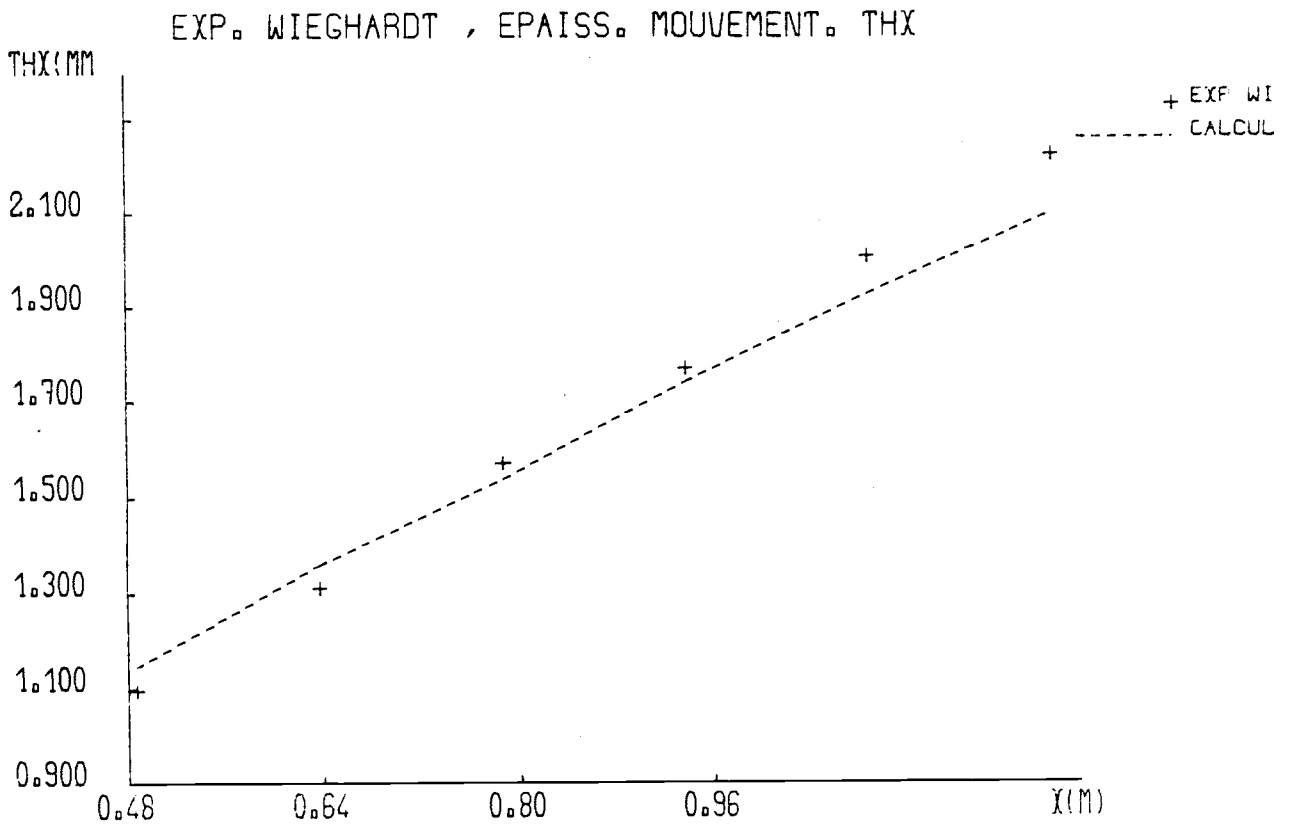


Figure 8

041784

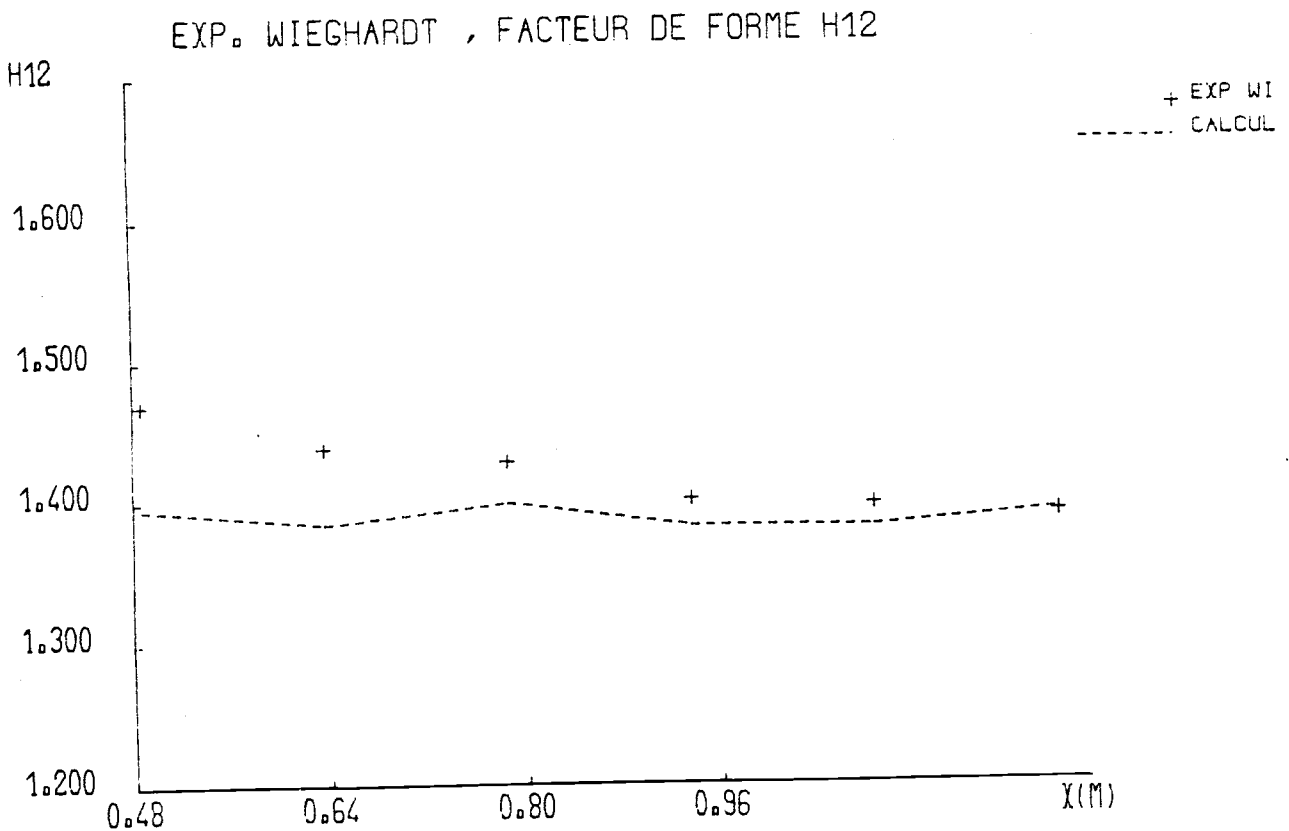


Figure 9

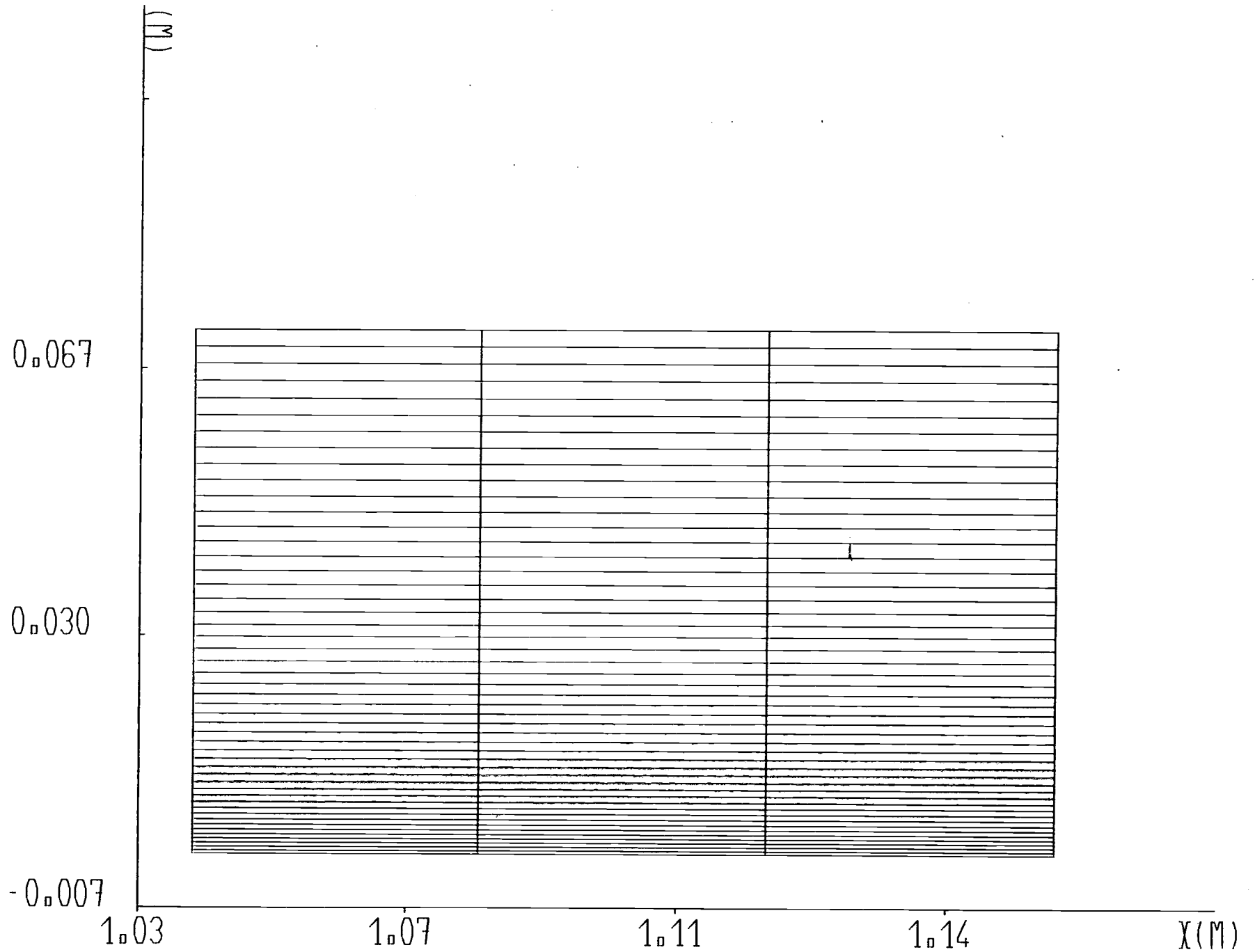
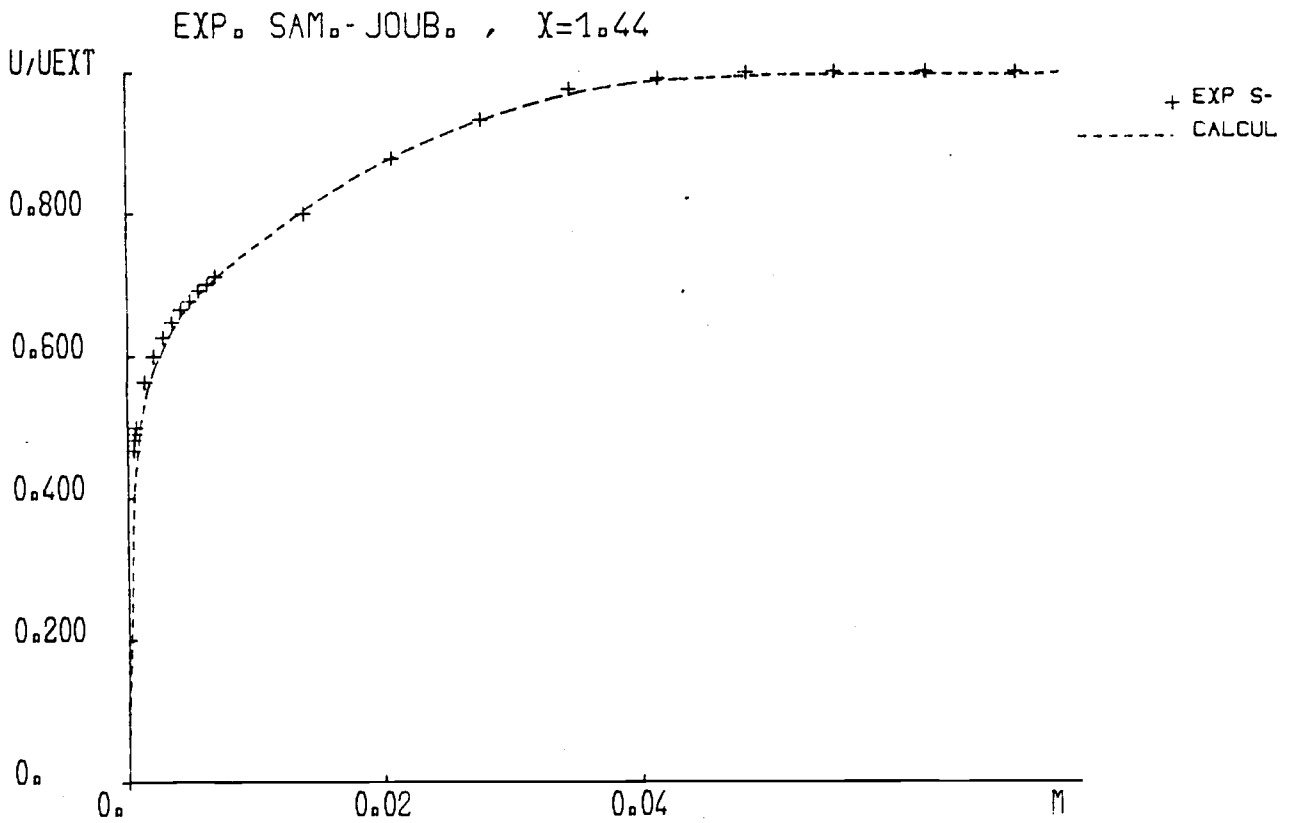


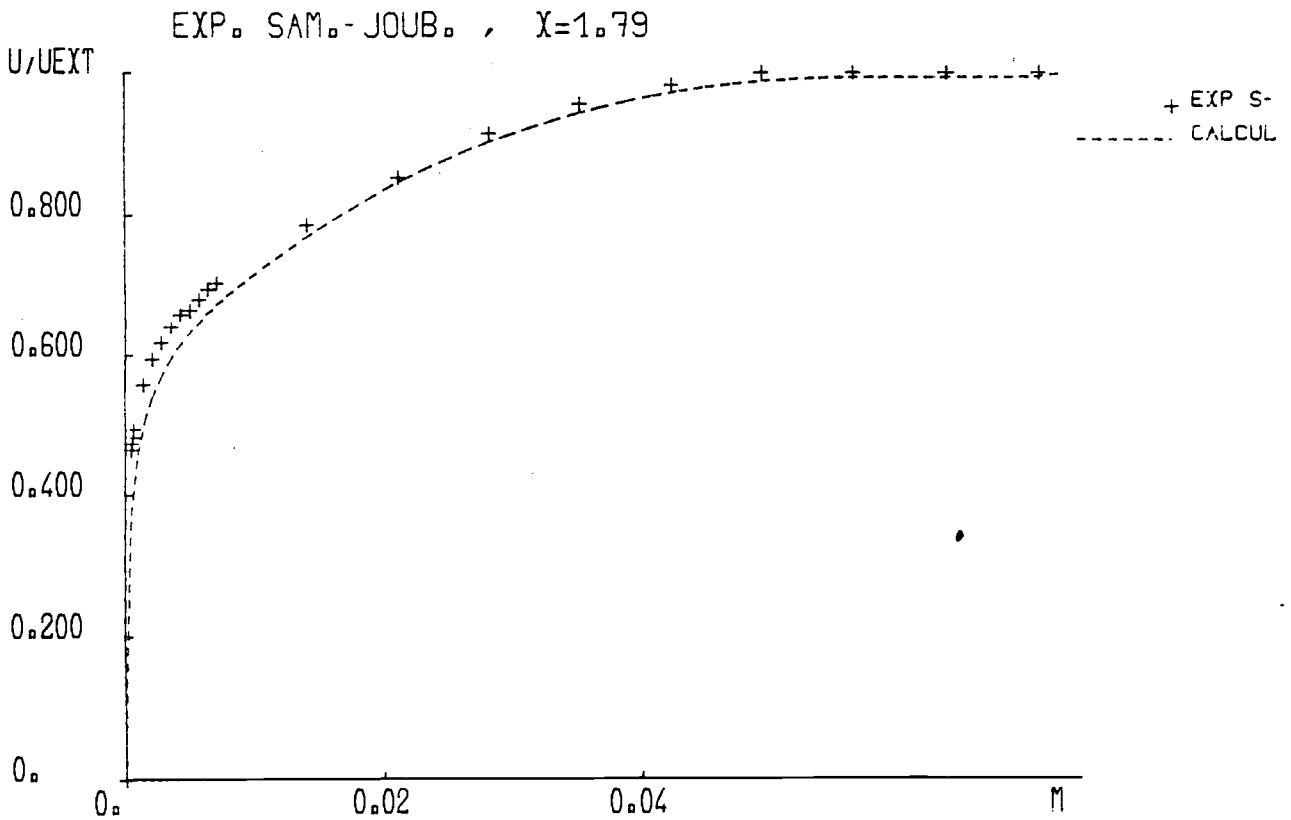
Figure 10. MAILLAGE EXP. SAM. - JOUB. (31 X 50)

041384



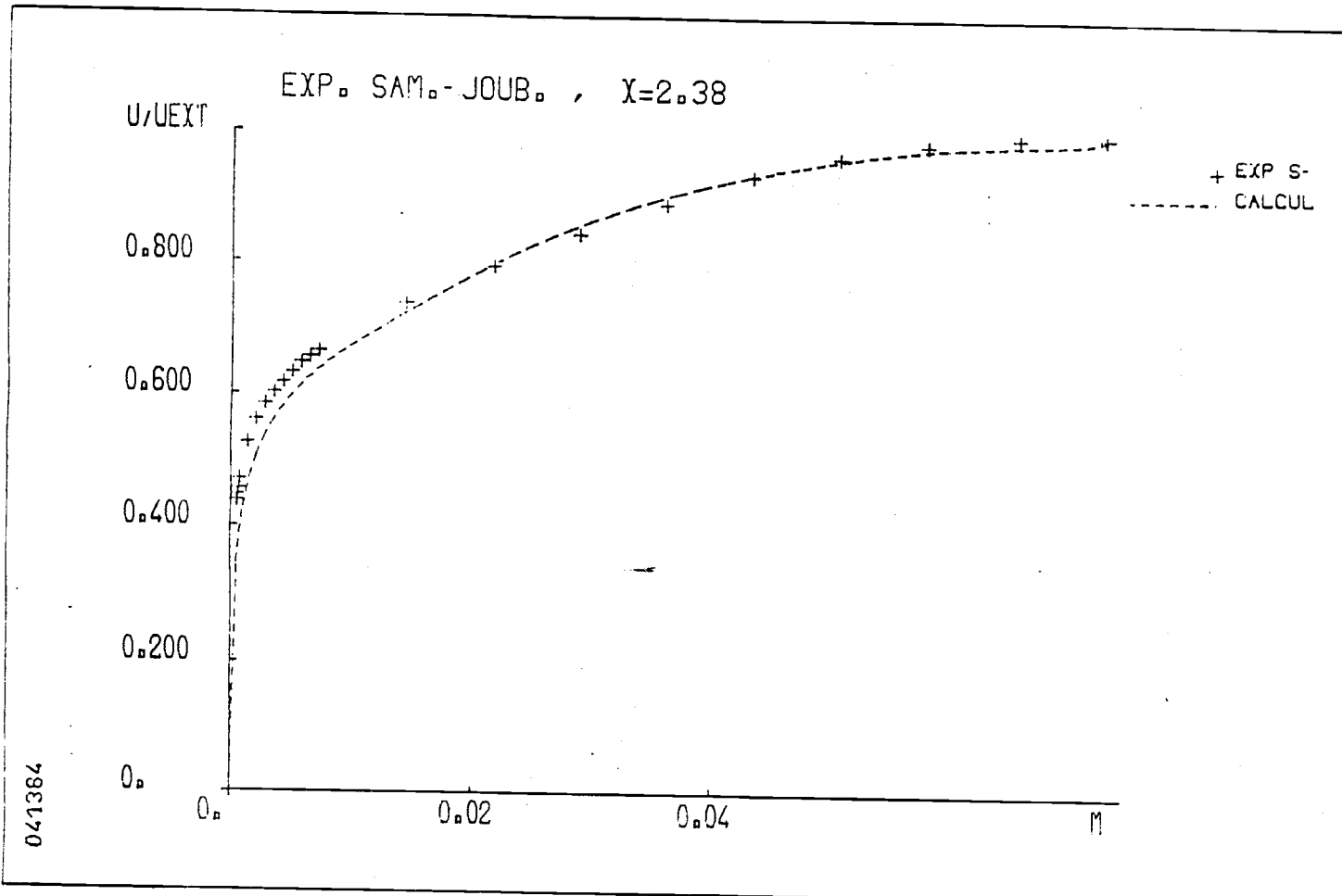
(a)

041384

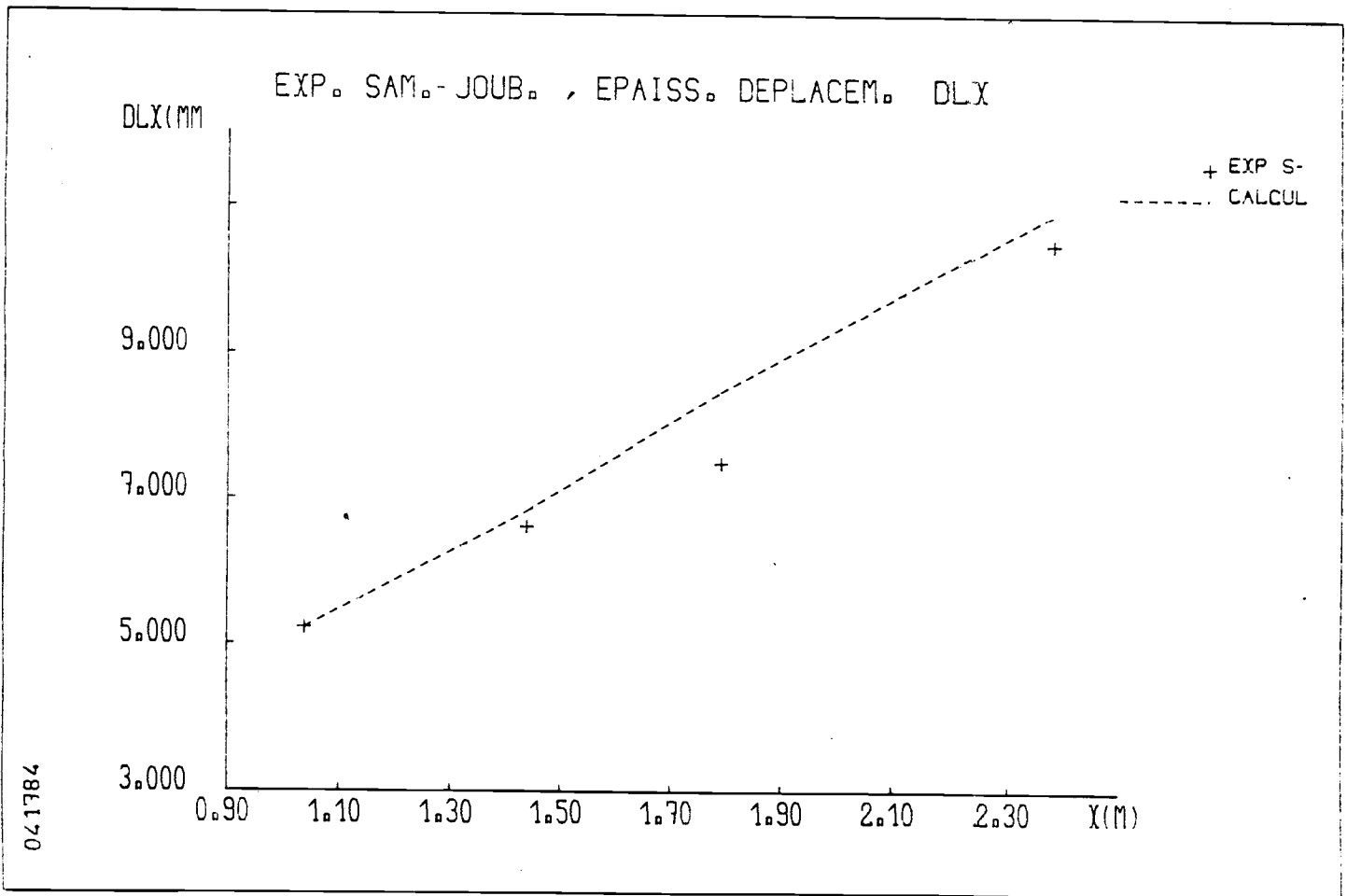


(b)

Figure 11



(c)
Figure 11. (contin.)



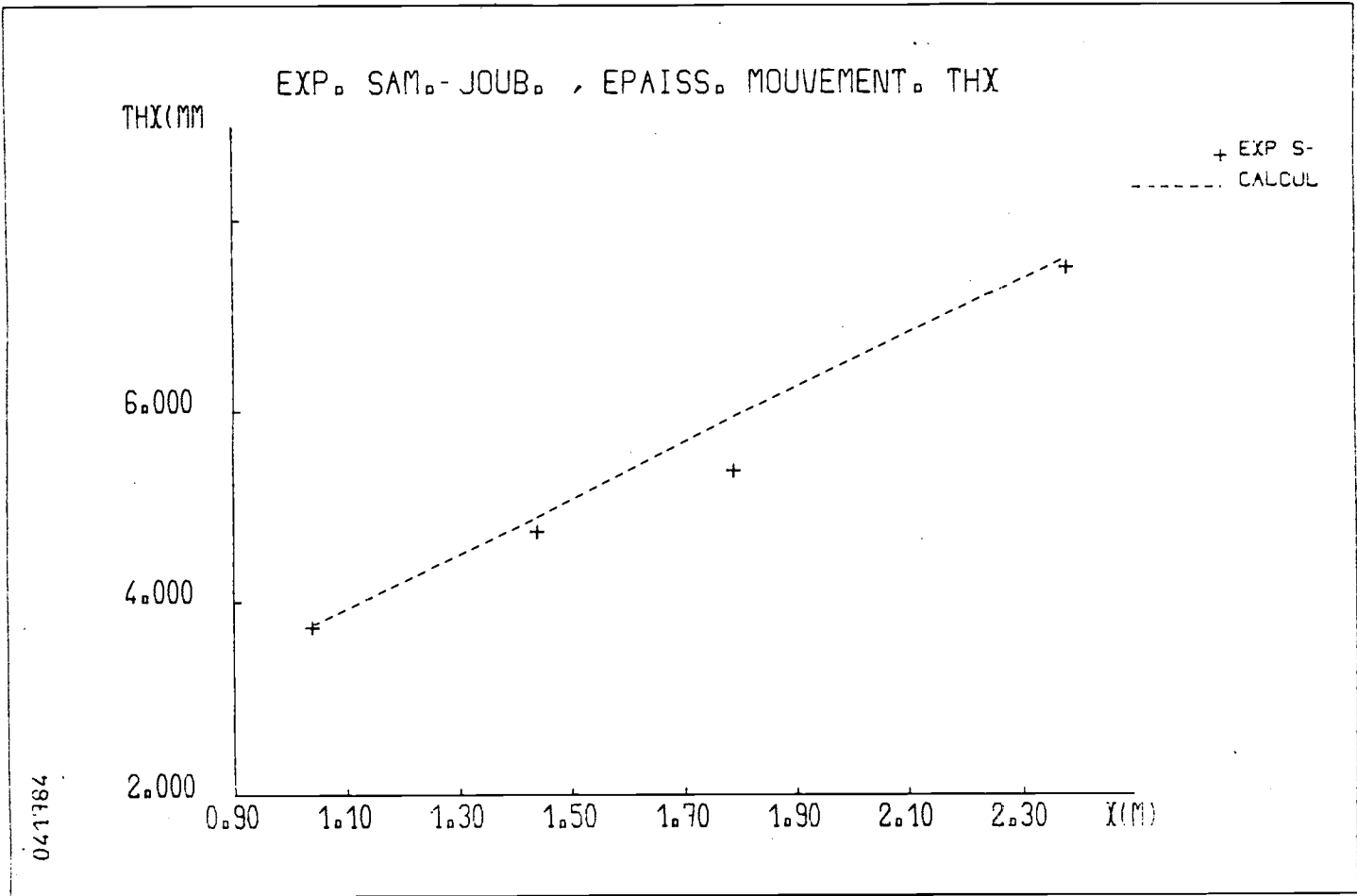
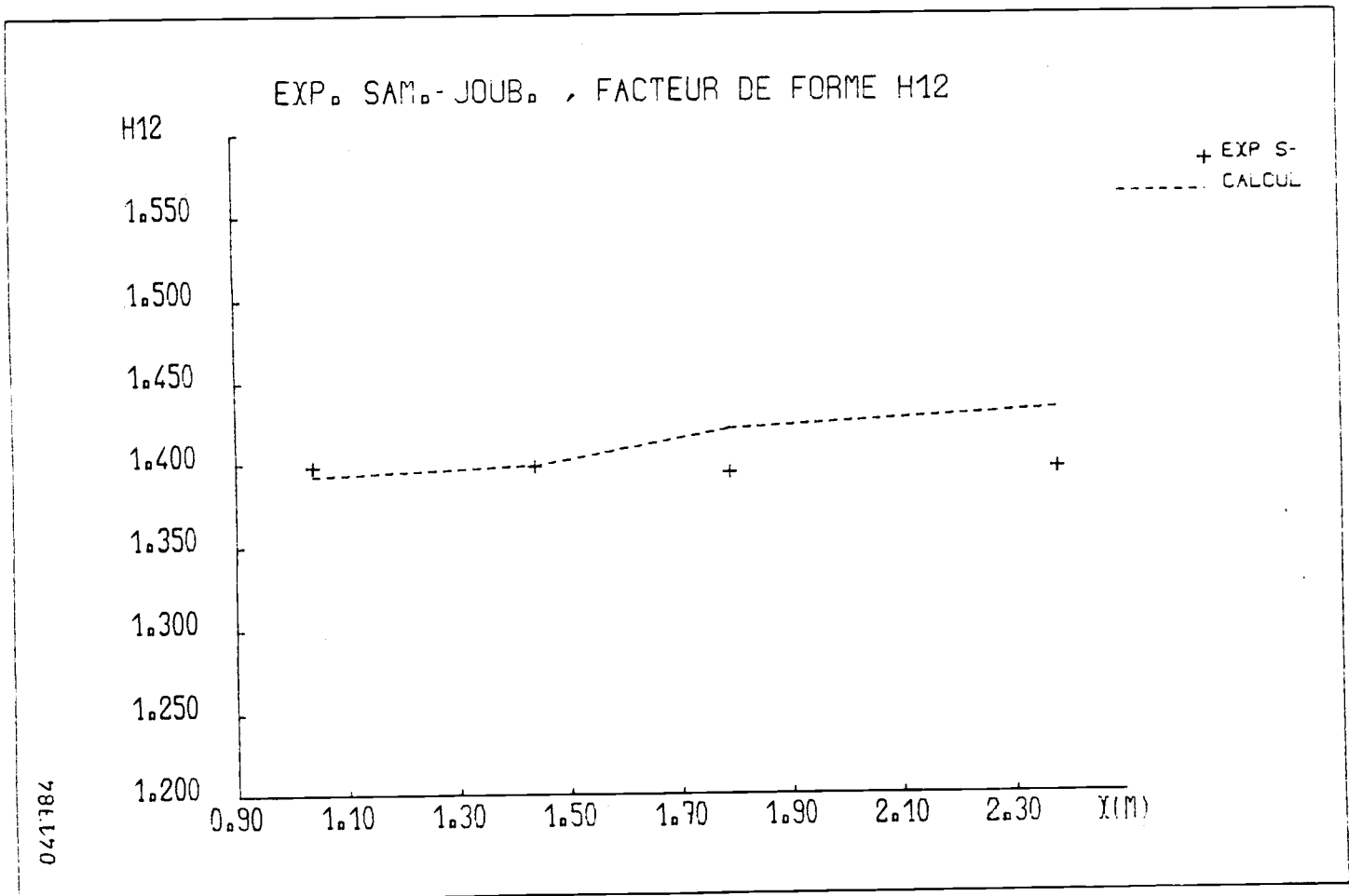
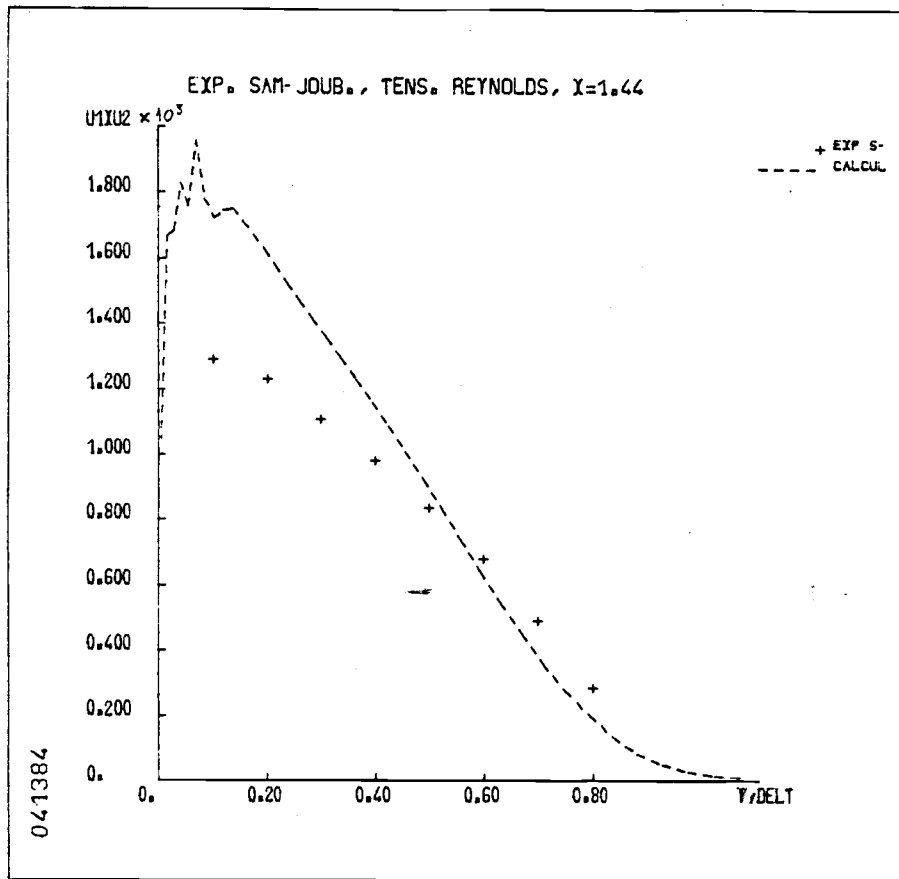
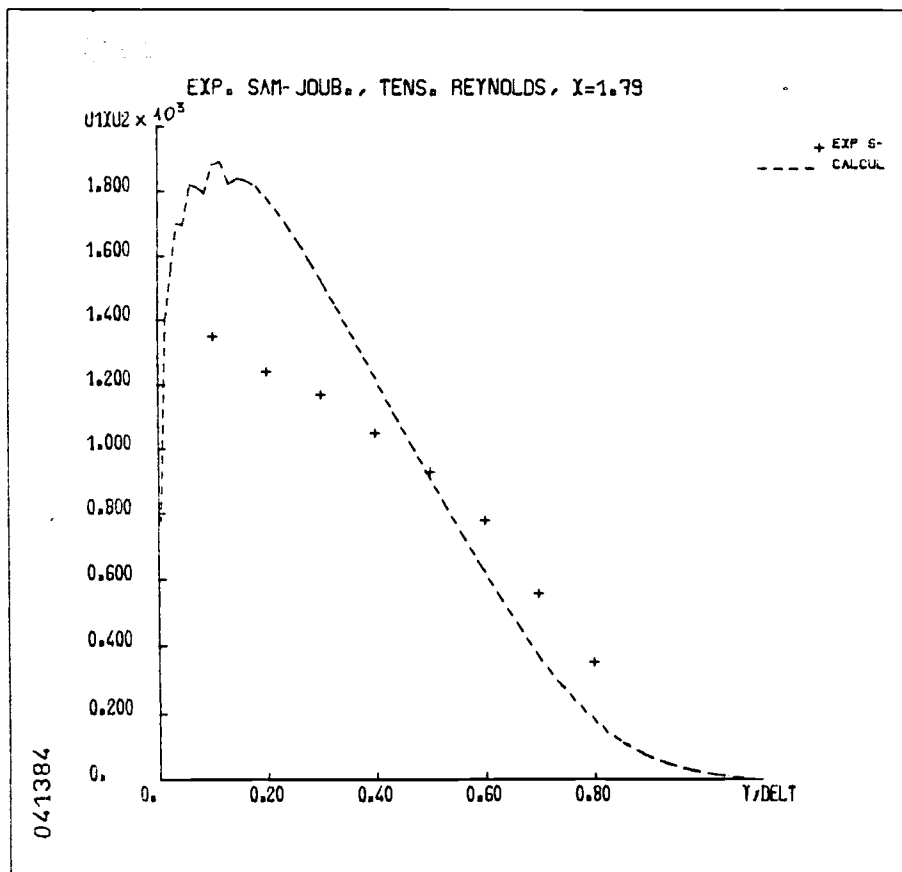


Figure 13



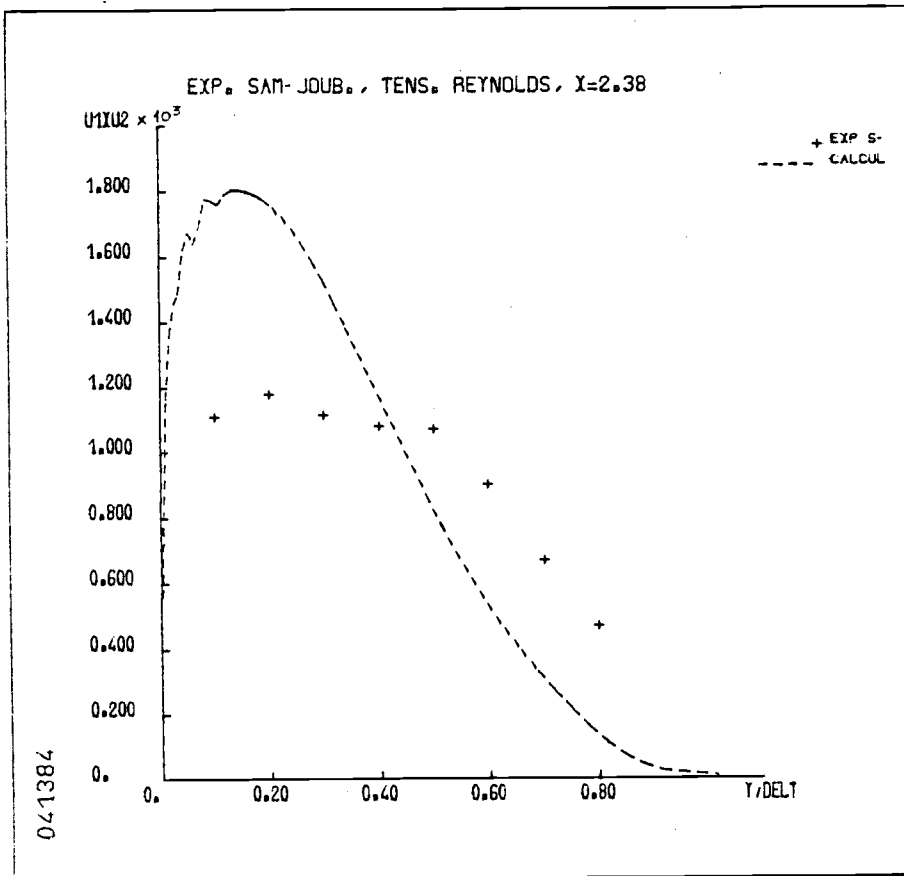


(a)



(b)

Figure 15.



(c)

Figure 15. (contin.)

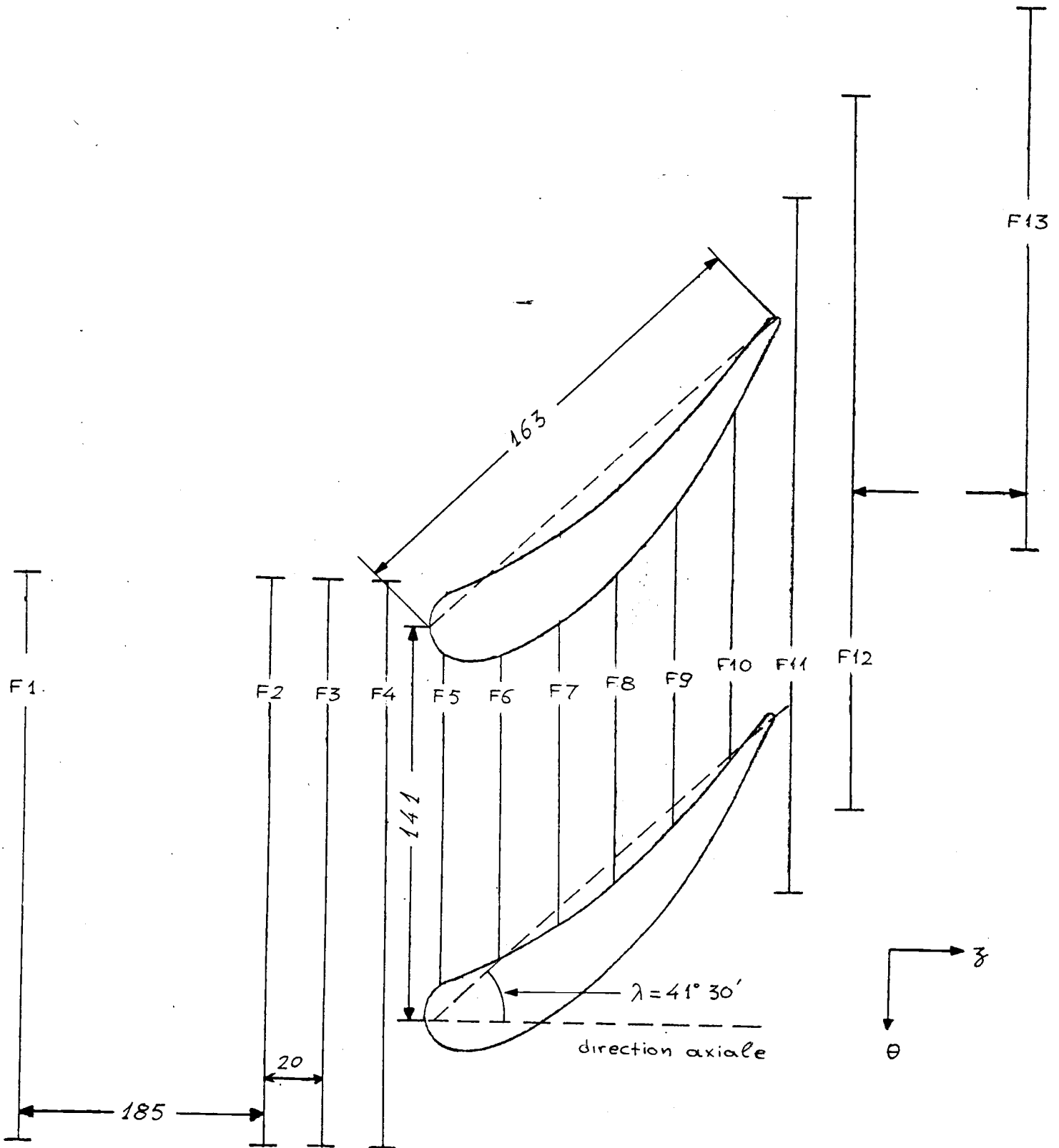


Figure 16. Grille turbine

0.079

0.035

-0.009

0.14

0.18

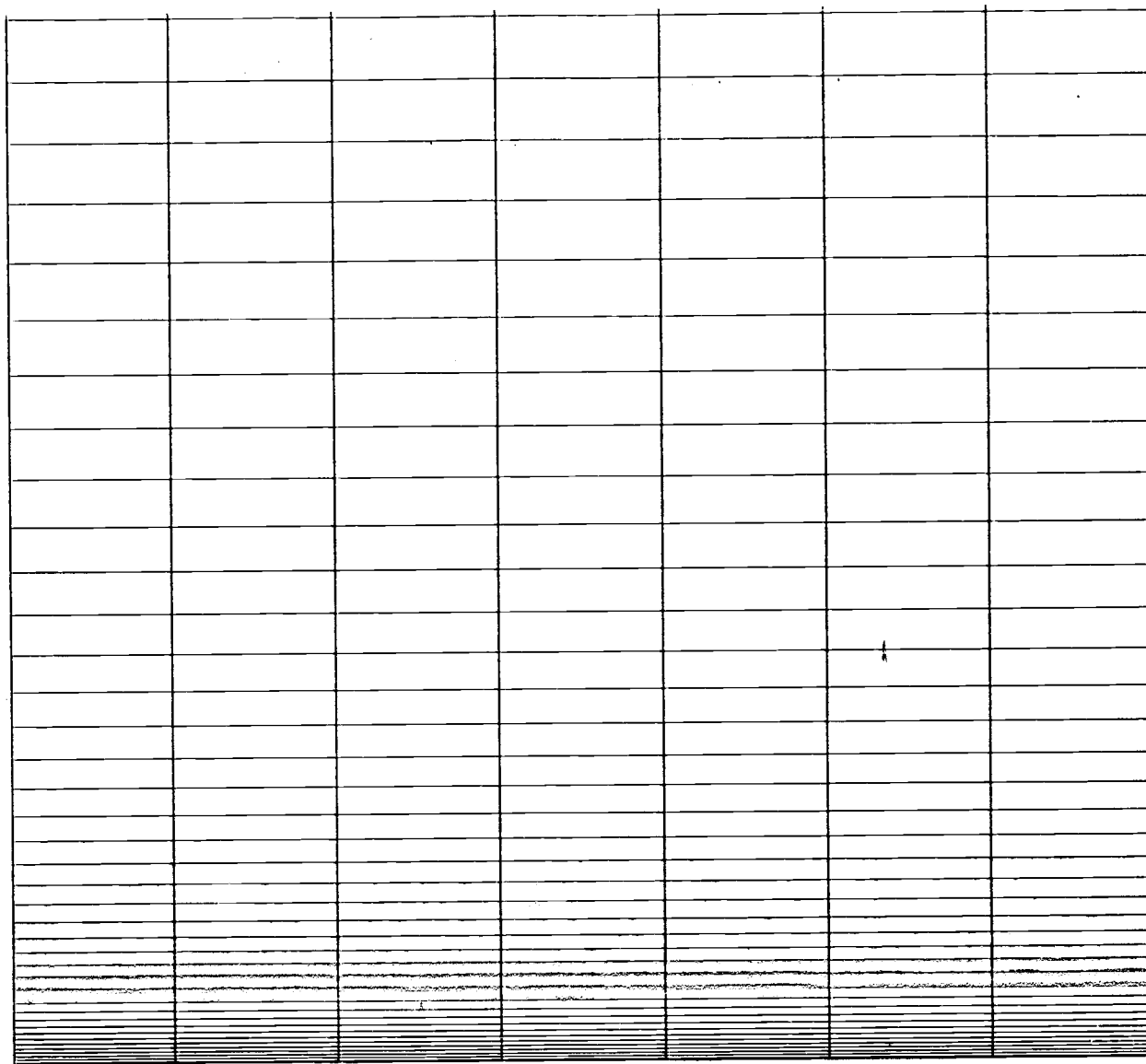
0.23

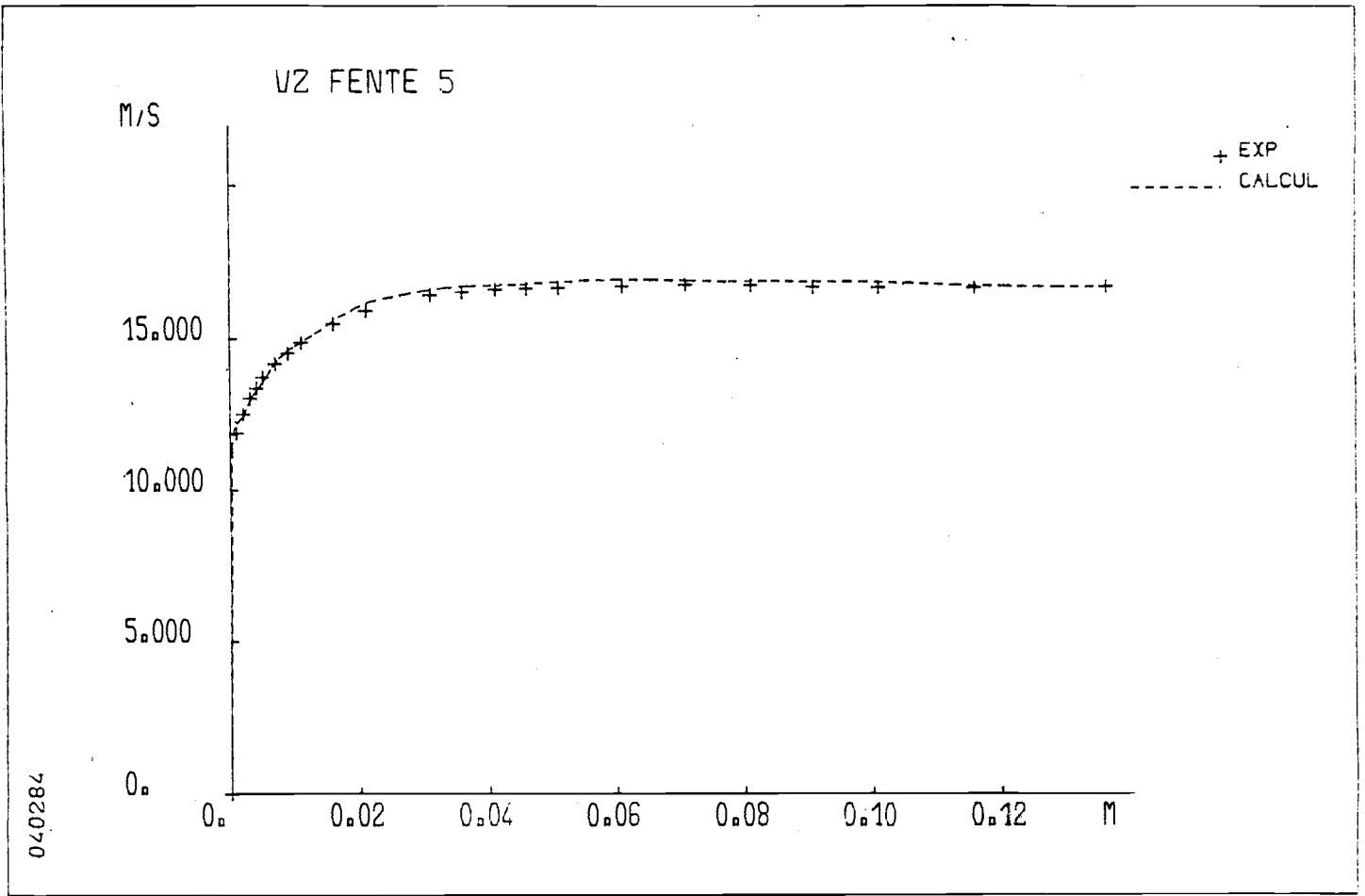
0.27

X(M)

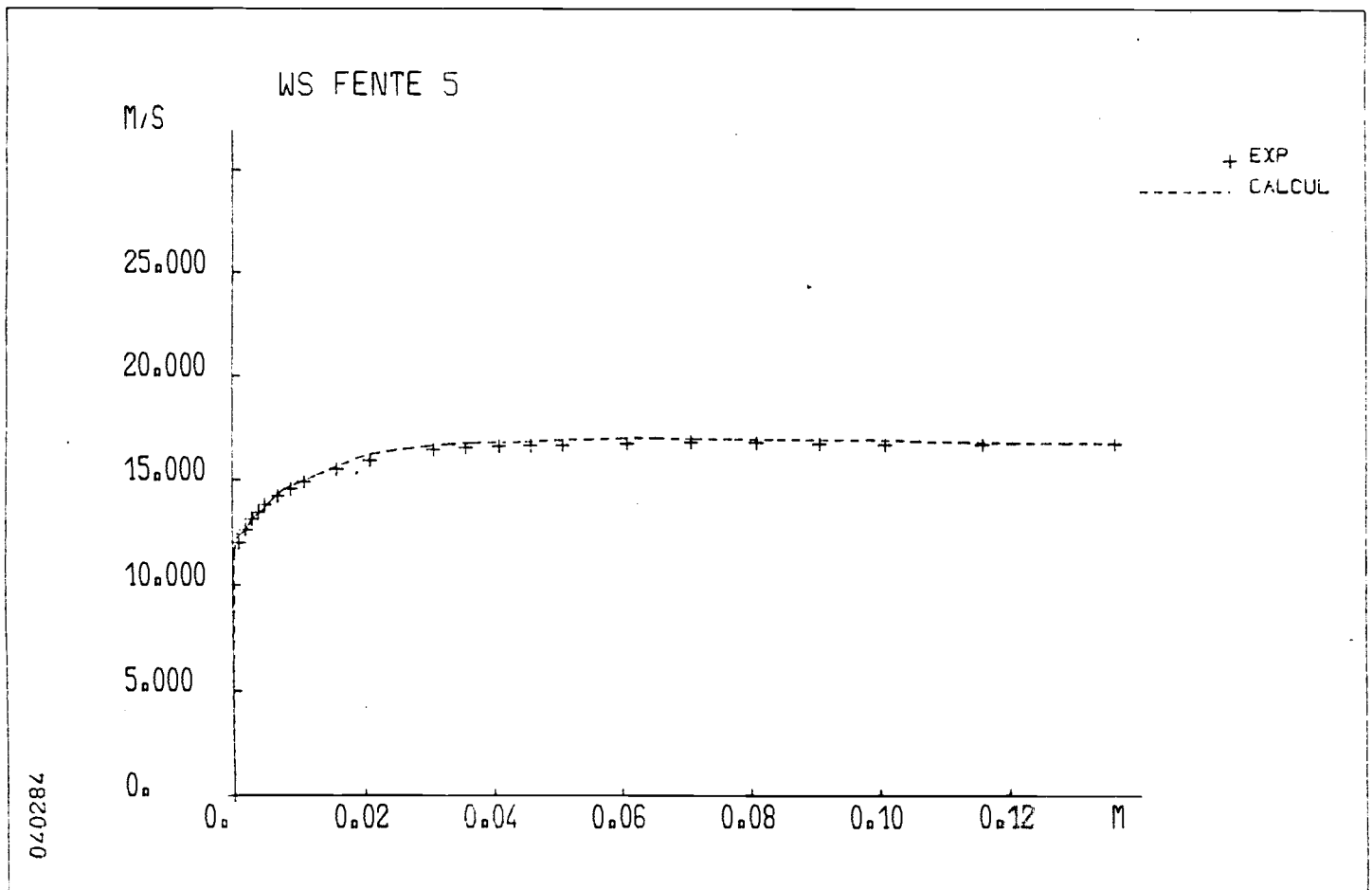
Figure 17.

MAILLAGE GRILLE TURBINE (8 X 42)



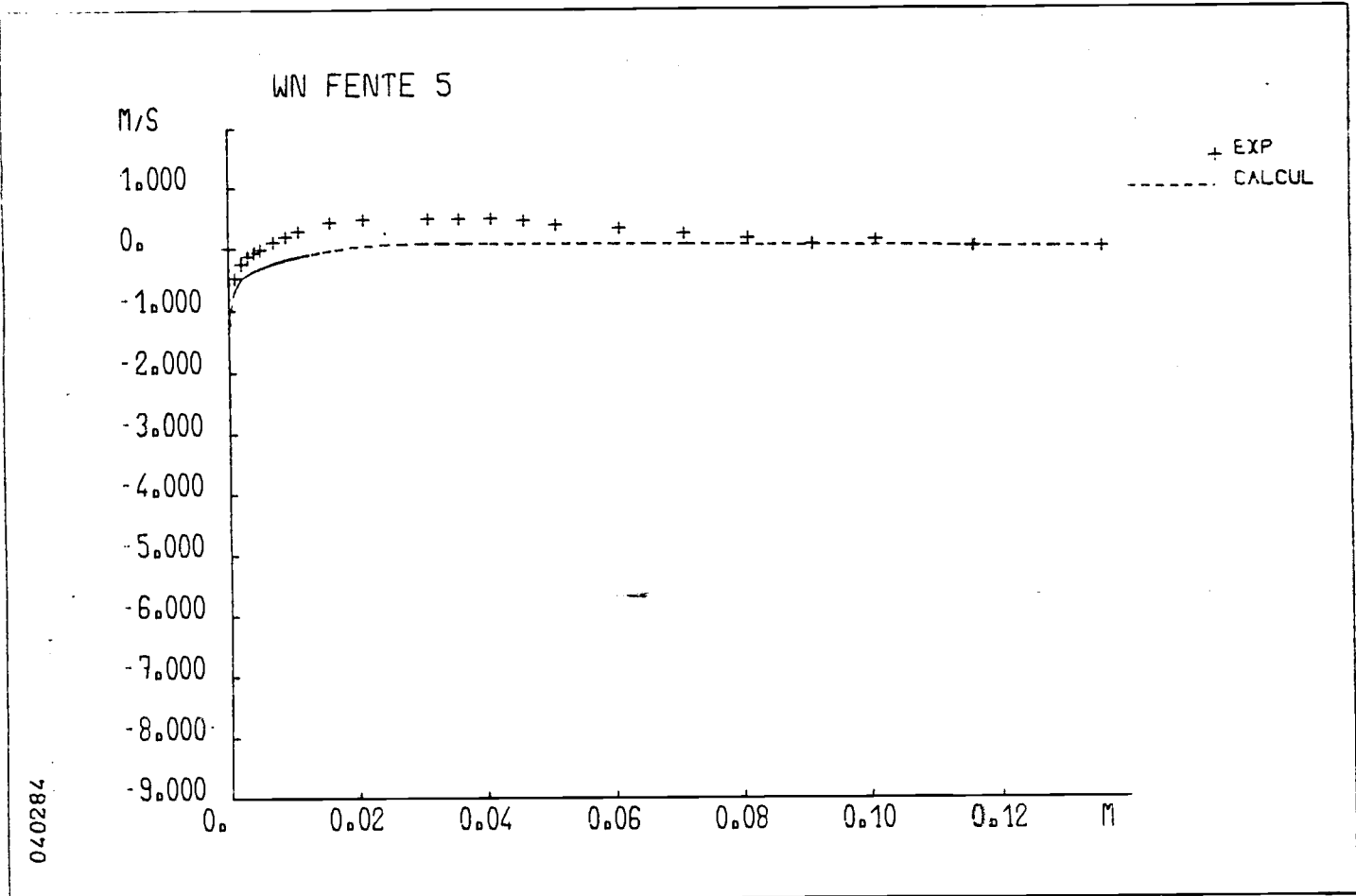


(a)

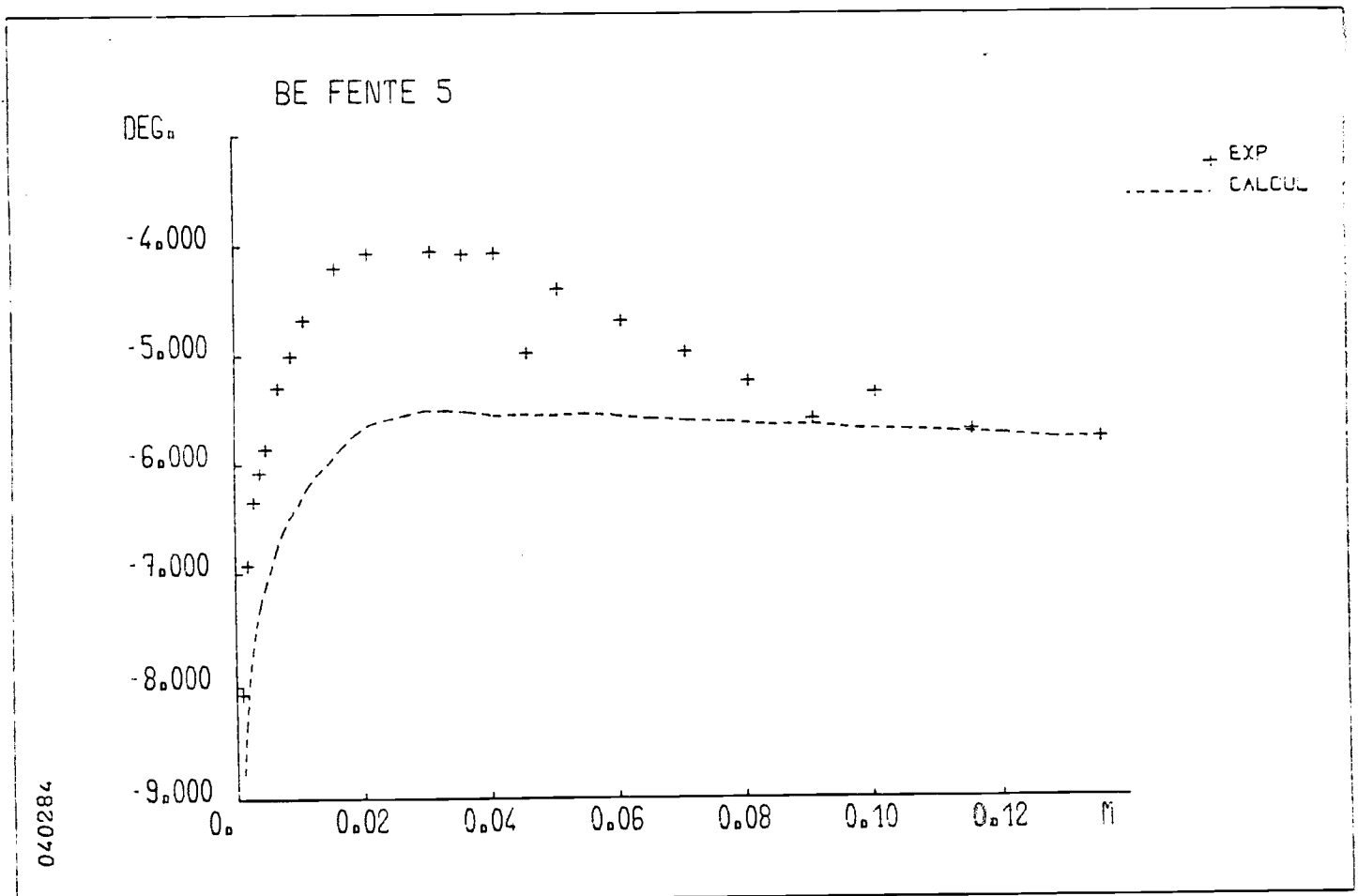


(b)

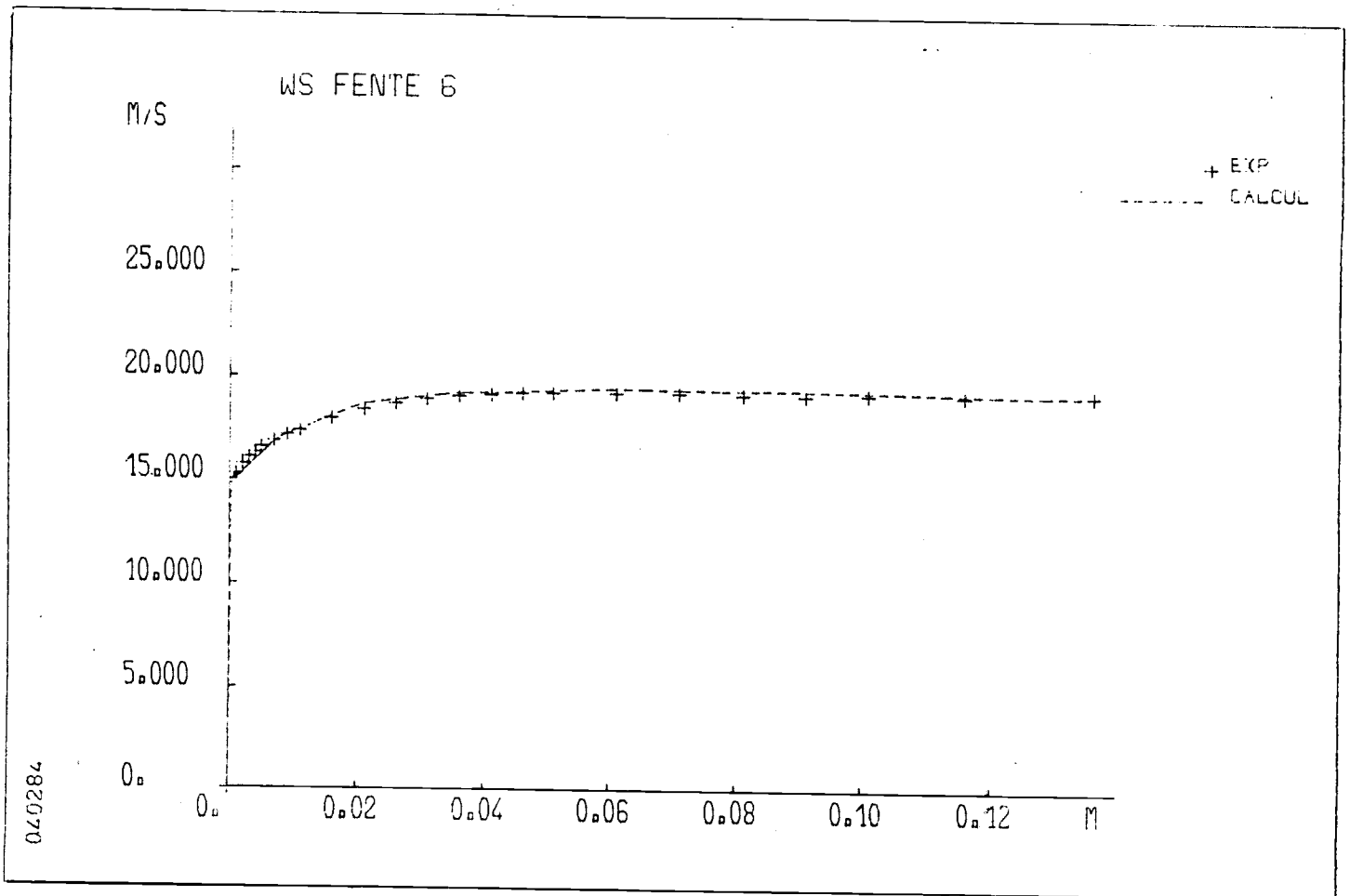
Figure 18.



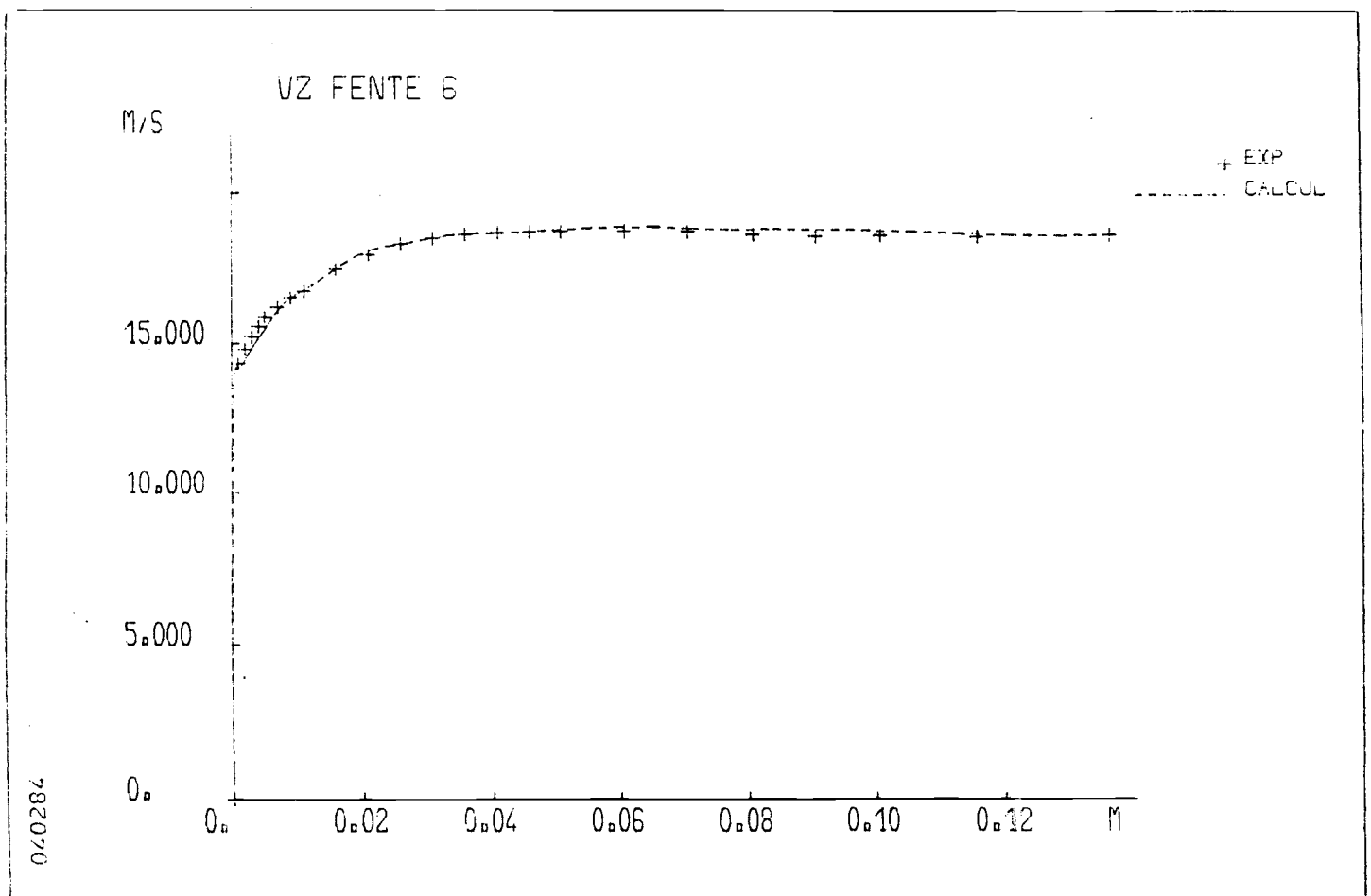
(c)



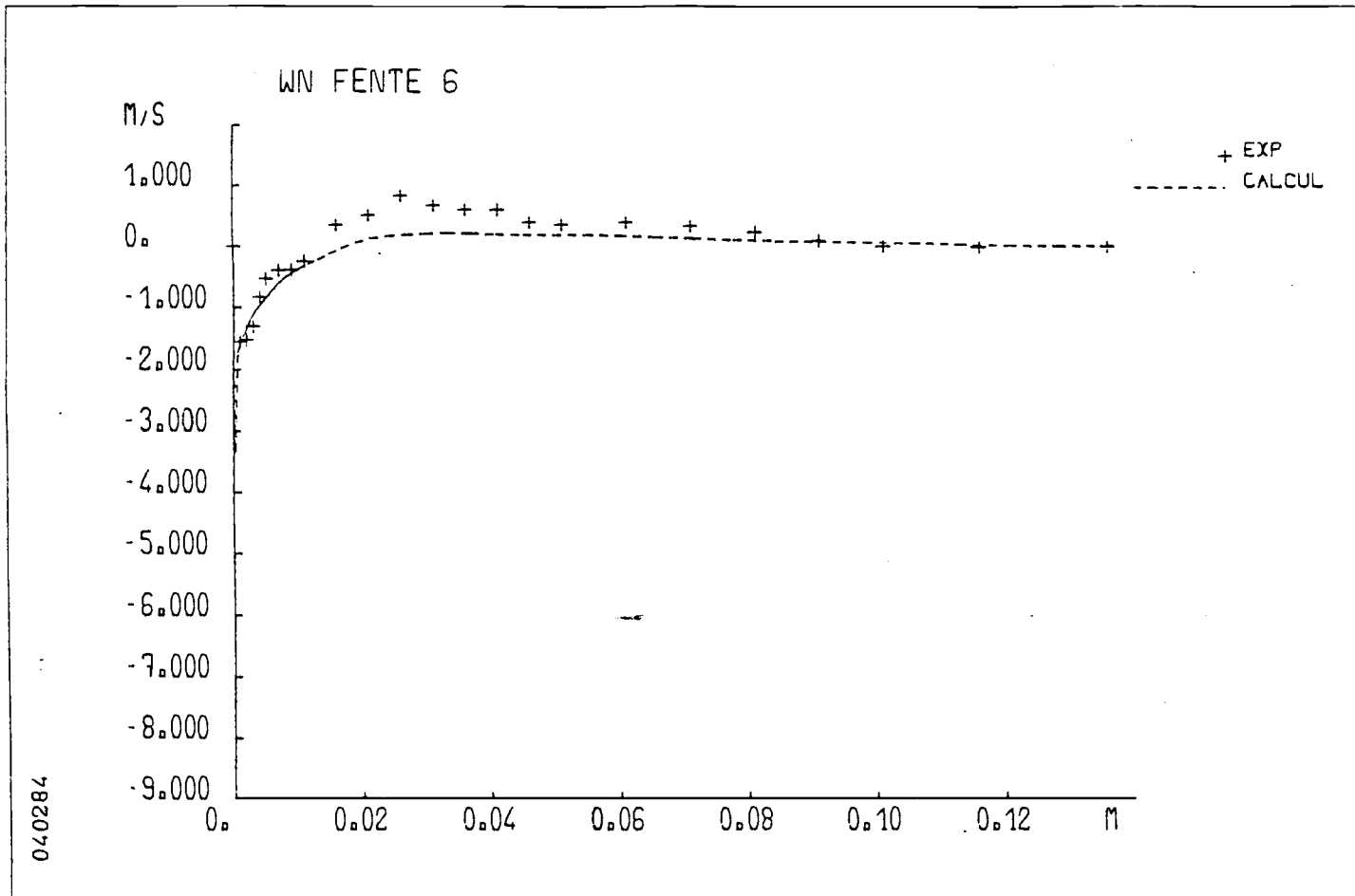
(d)



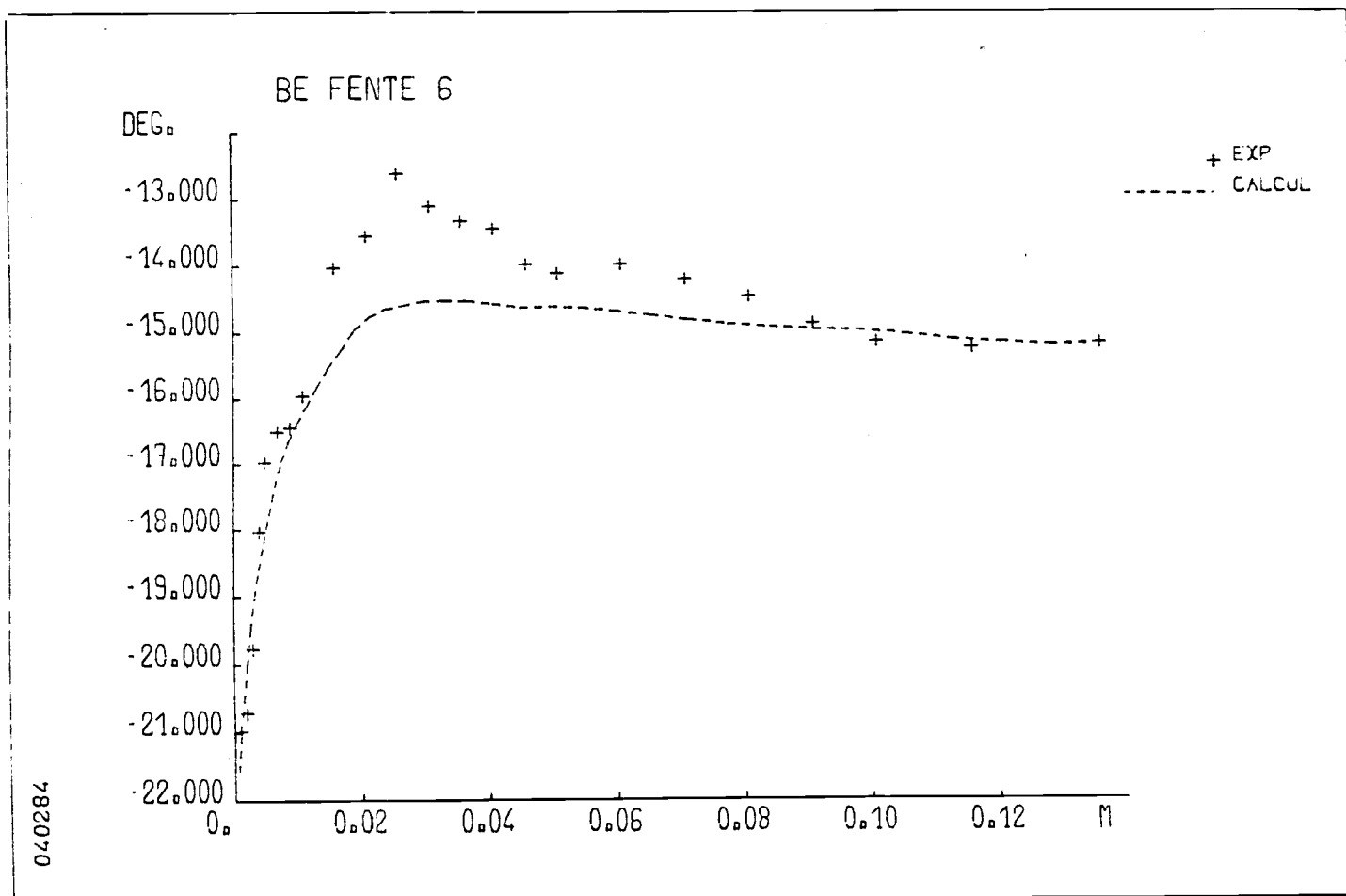
(a)



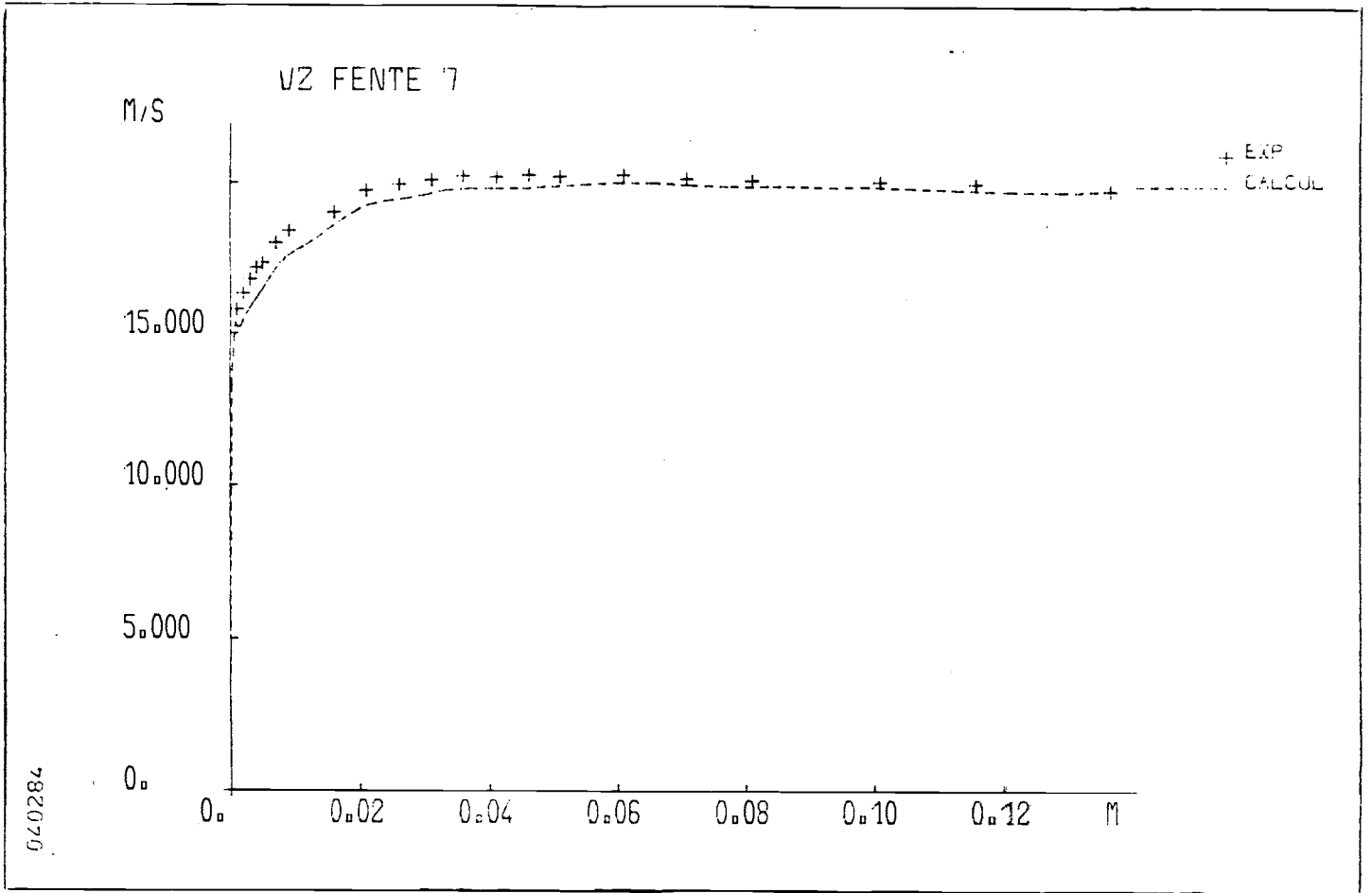
(b)



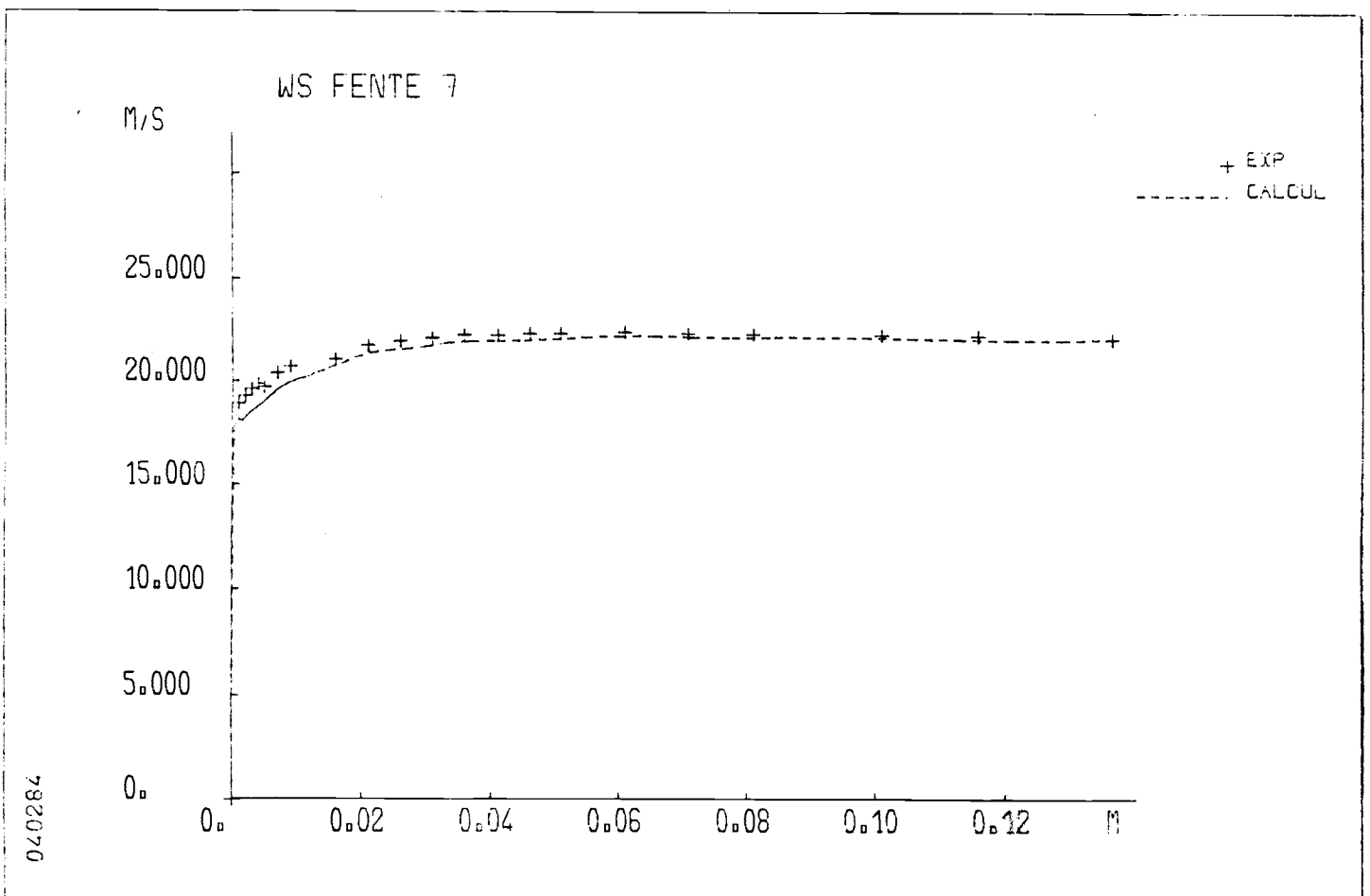
(c)



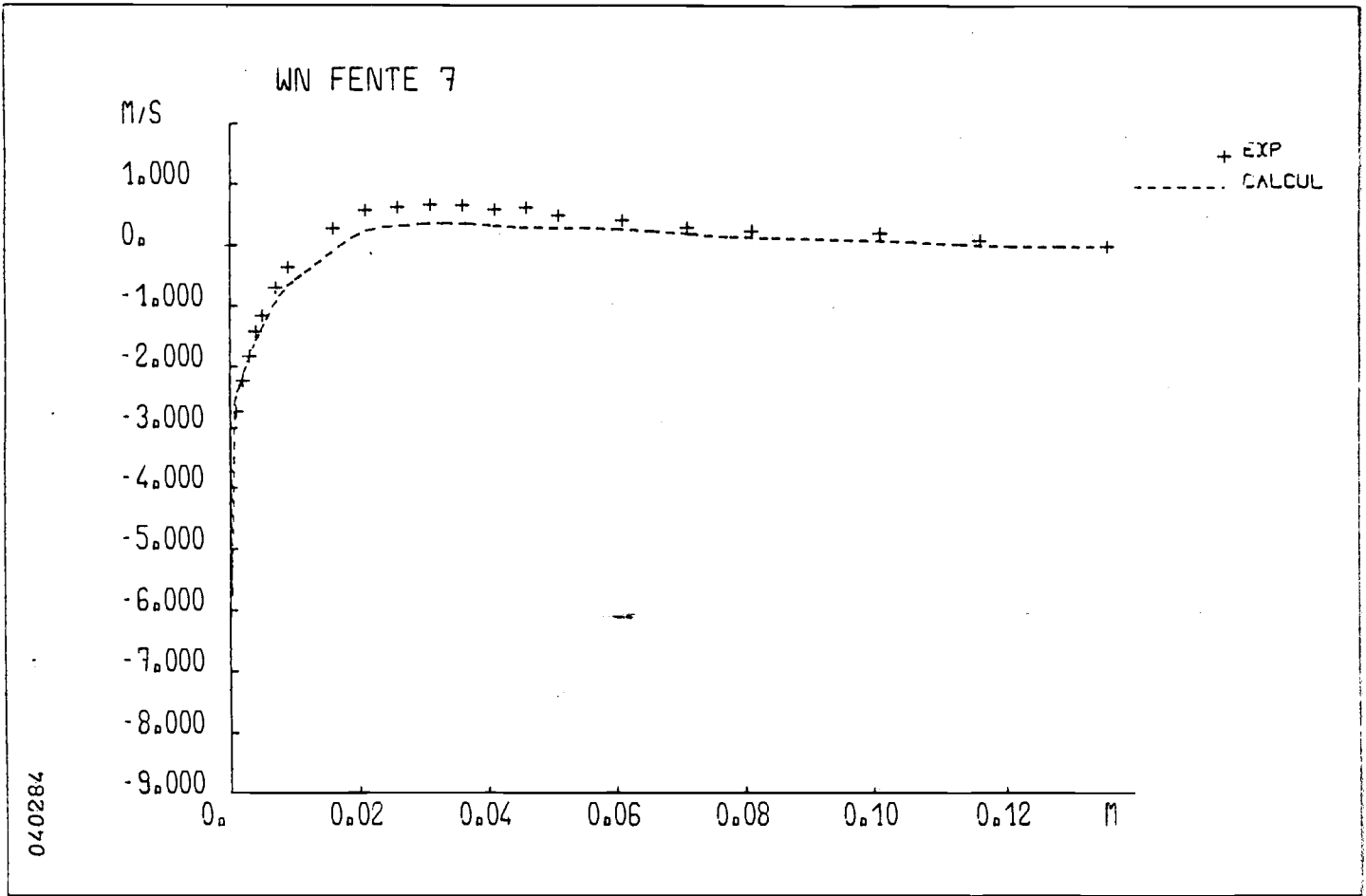
(d)



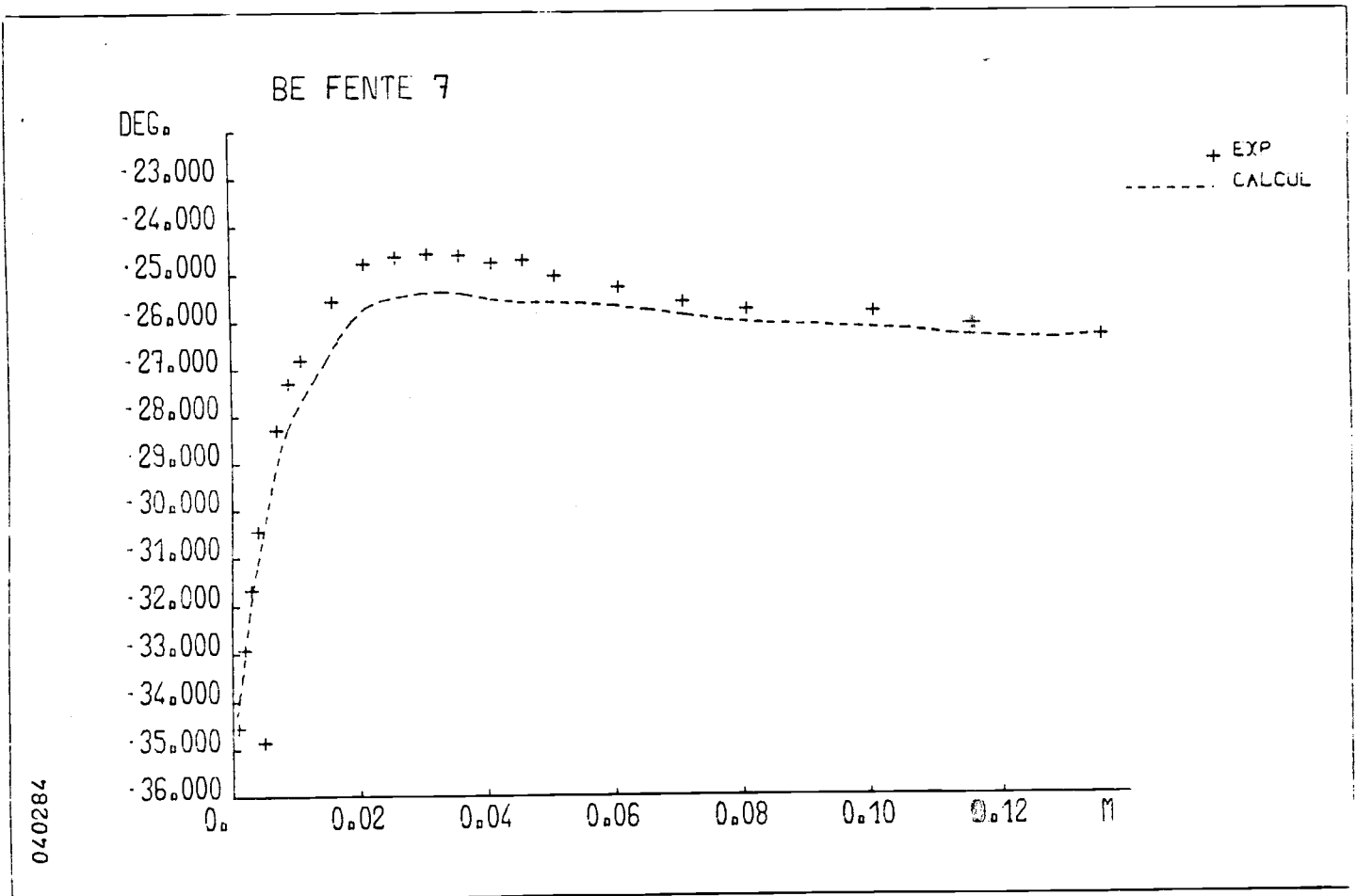
(a)



(b)

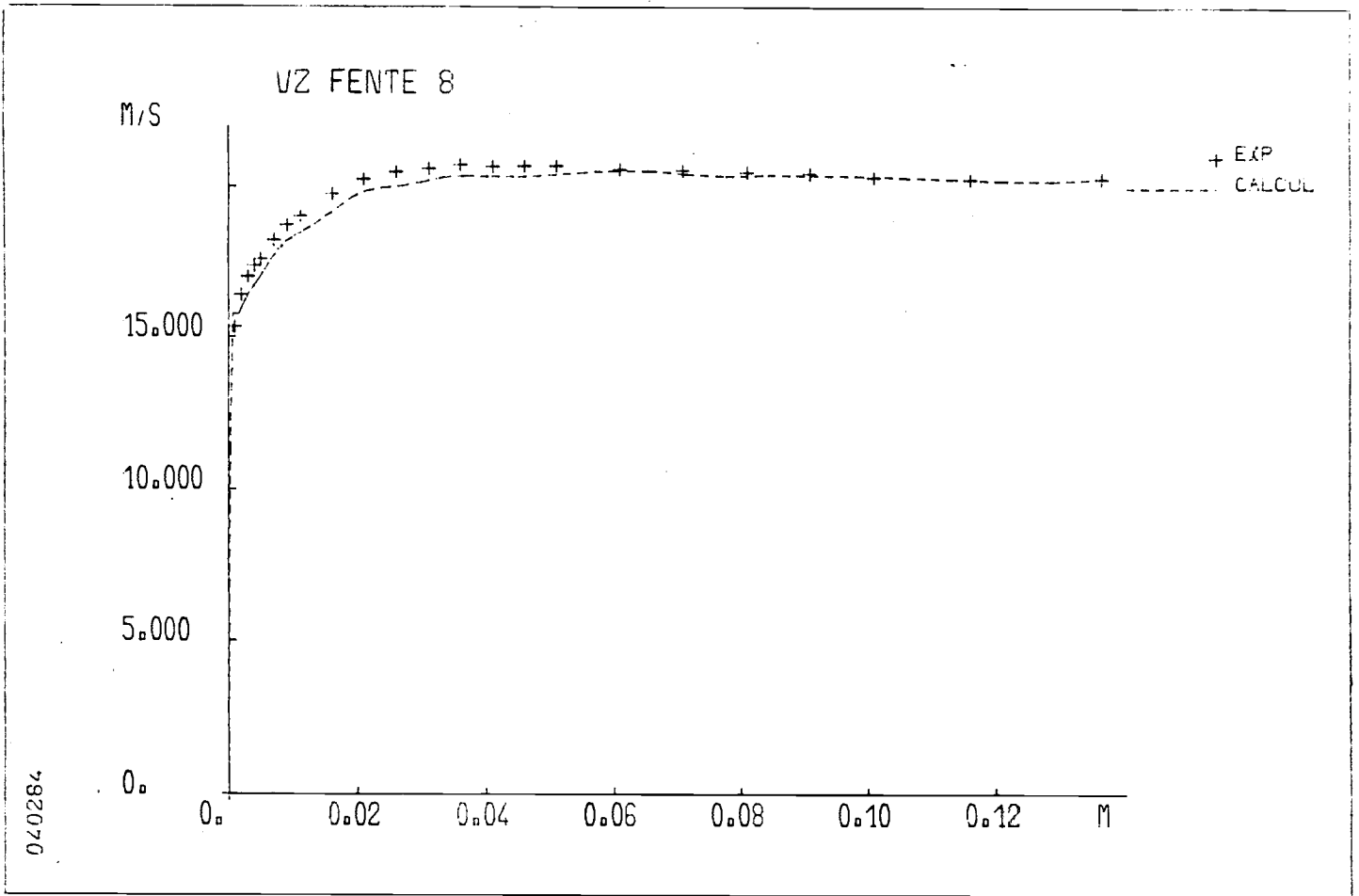


(c)

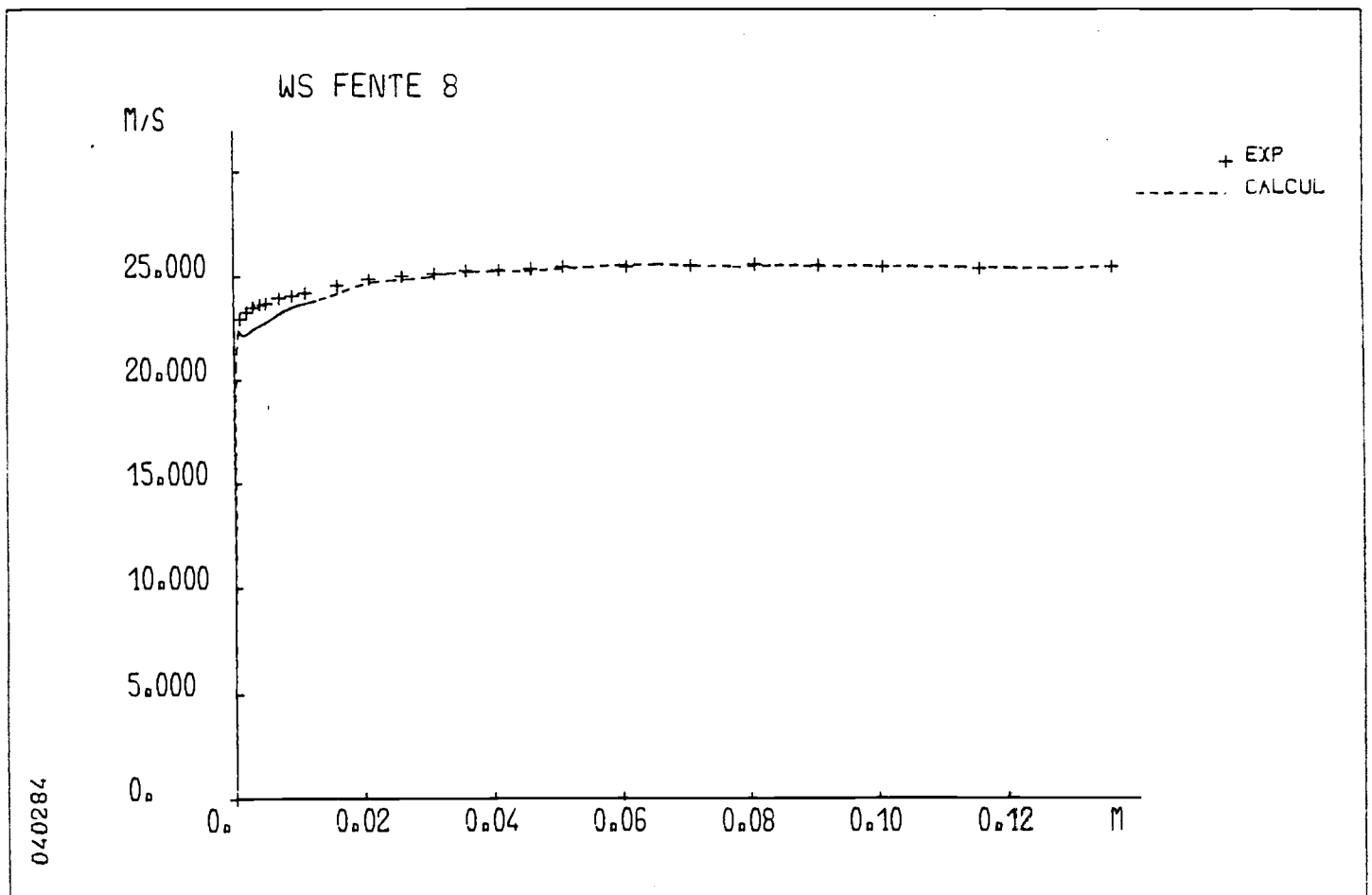


(d)

Figure 20. (contin.)

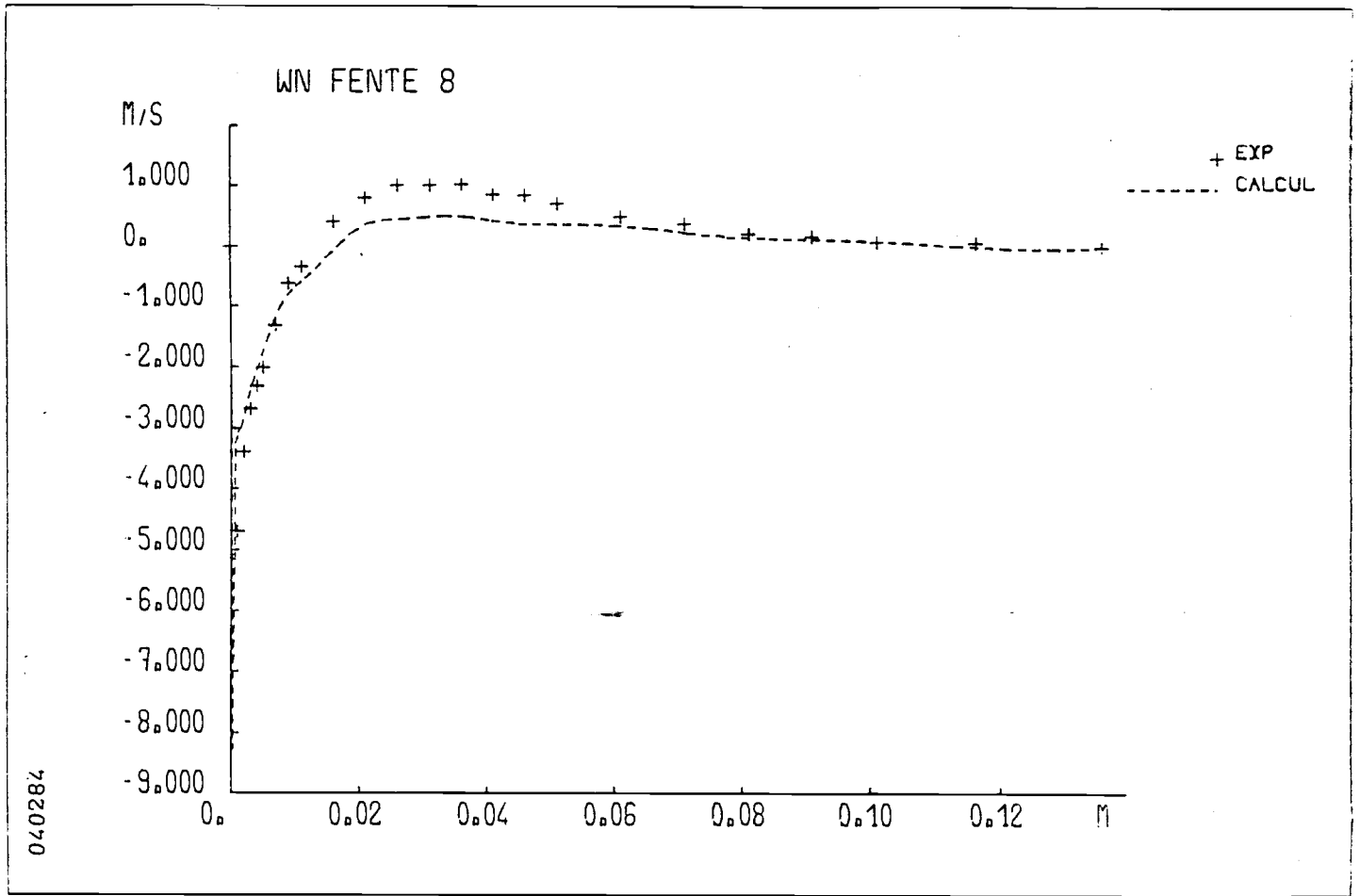


(a)

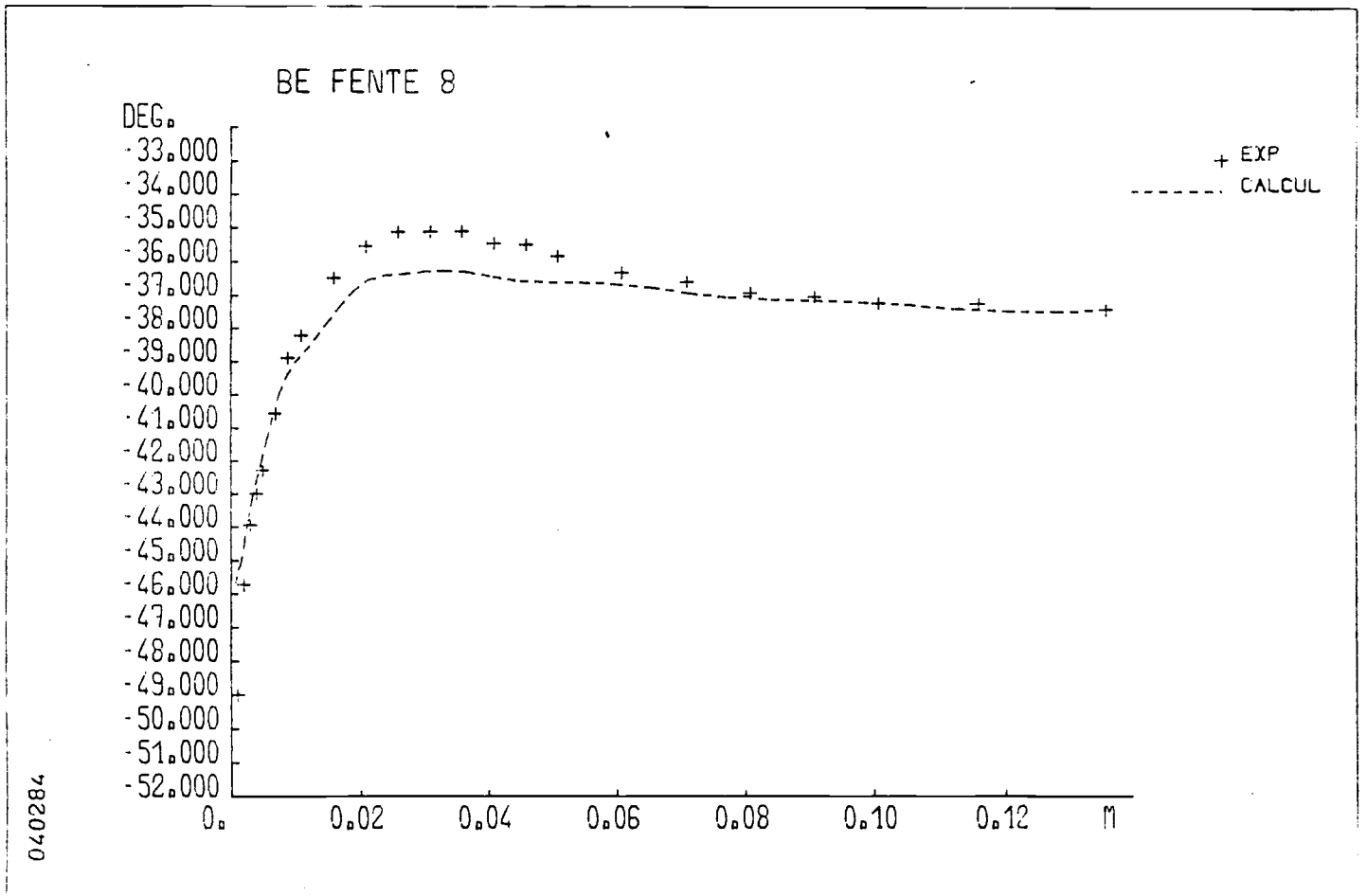


(b)

Figure 21.

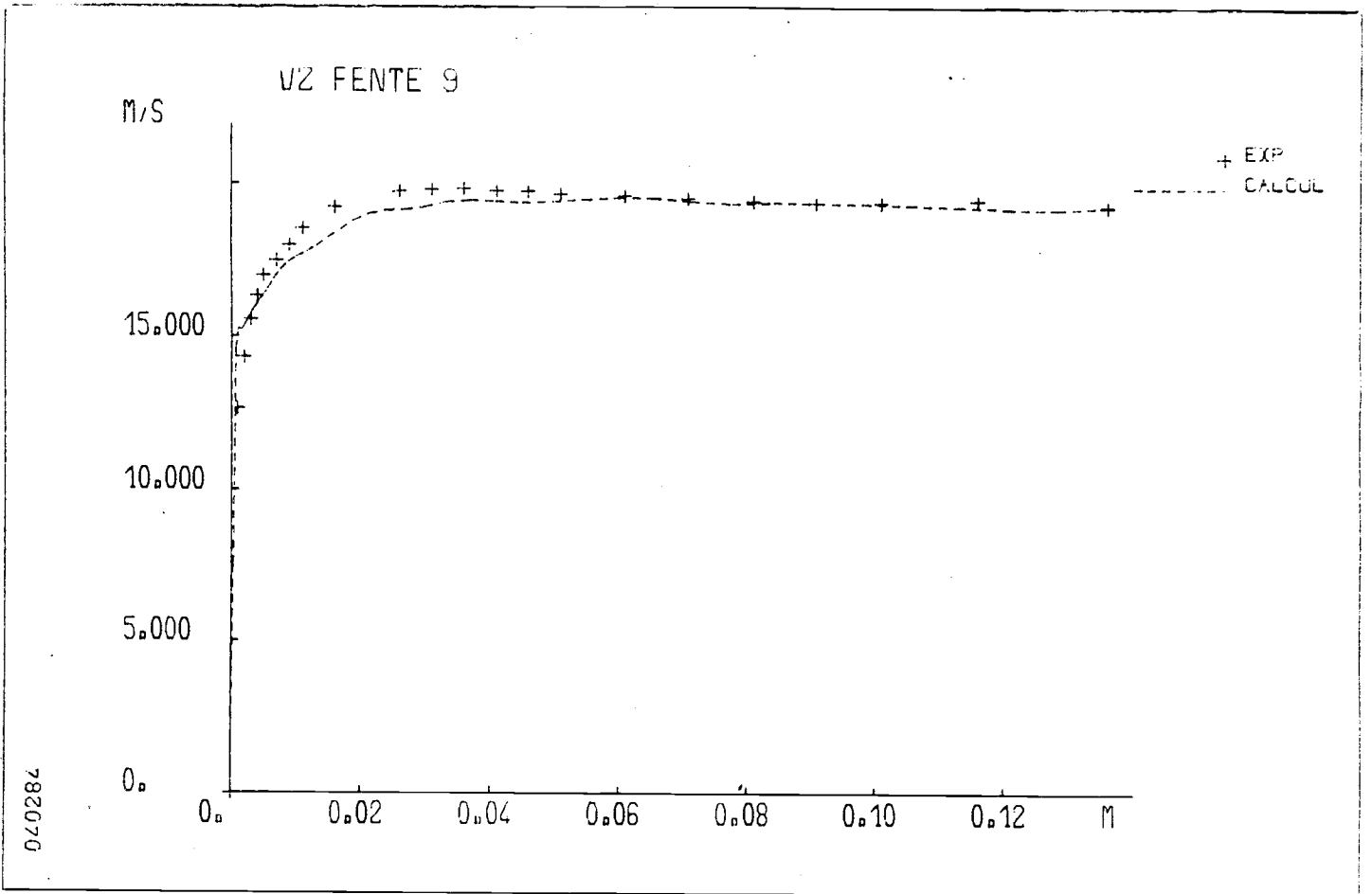


(c)

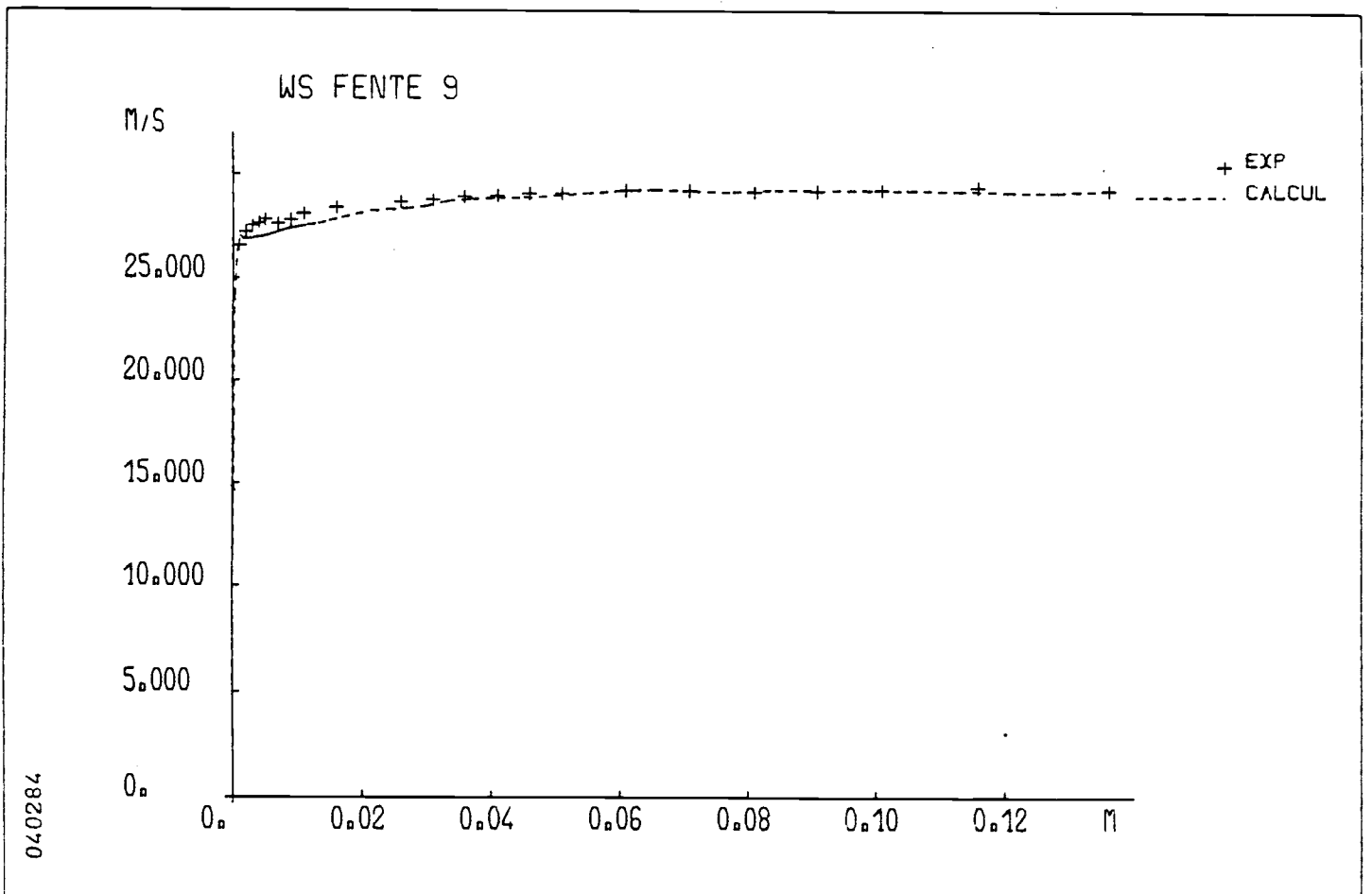


(d)

Figure 21. (contin.)

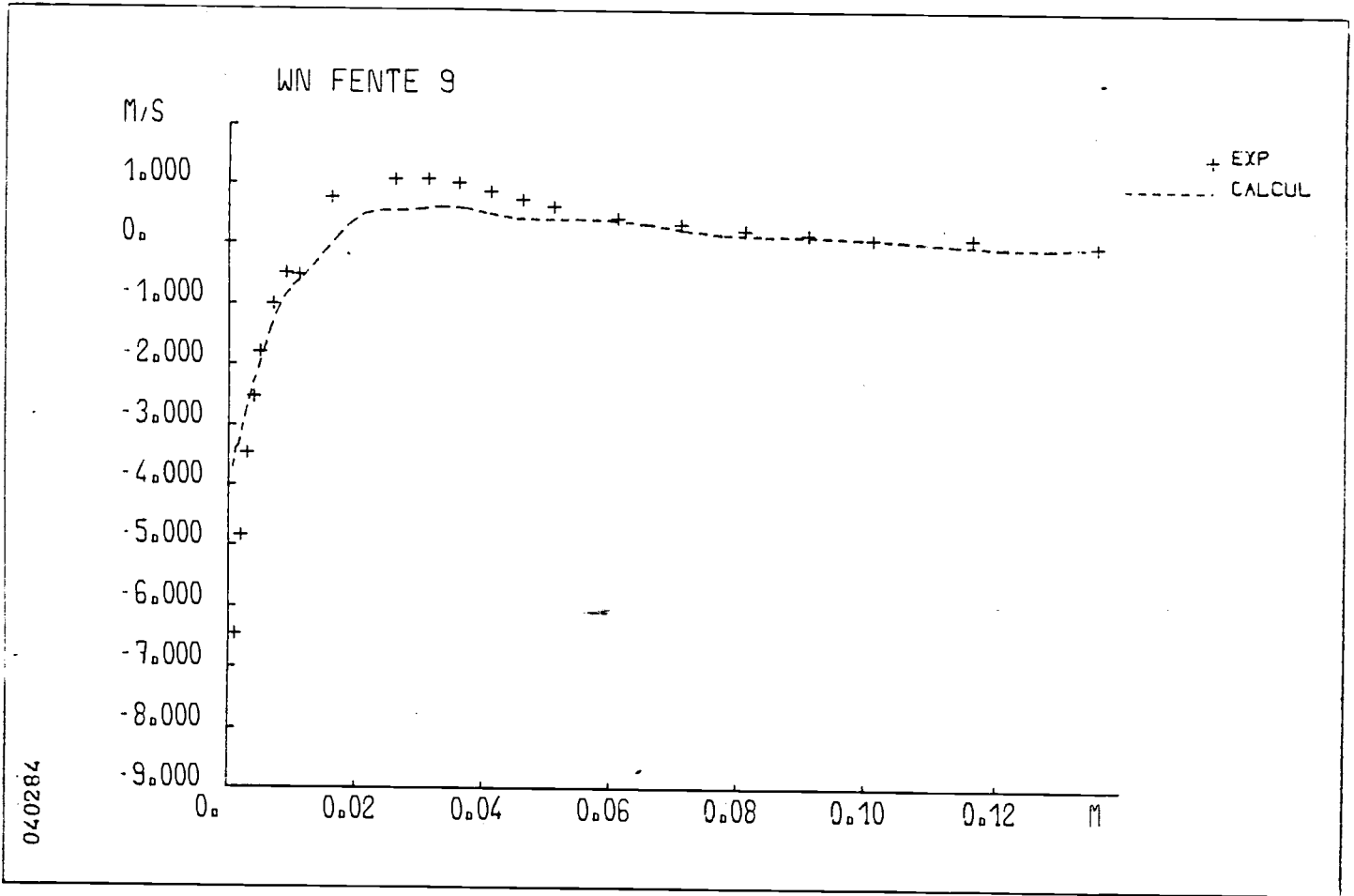


(a)

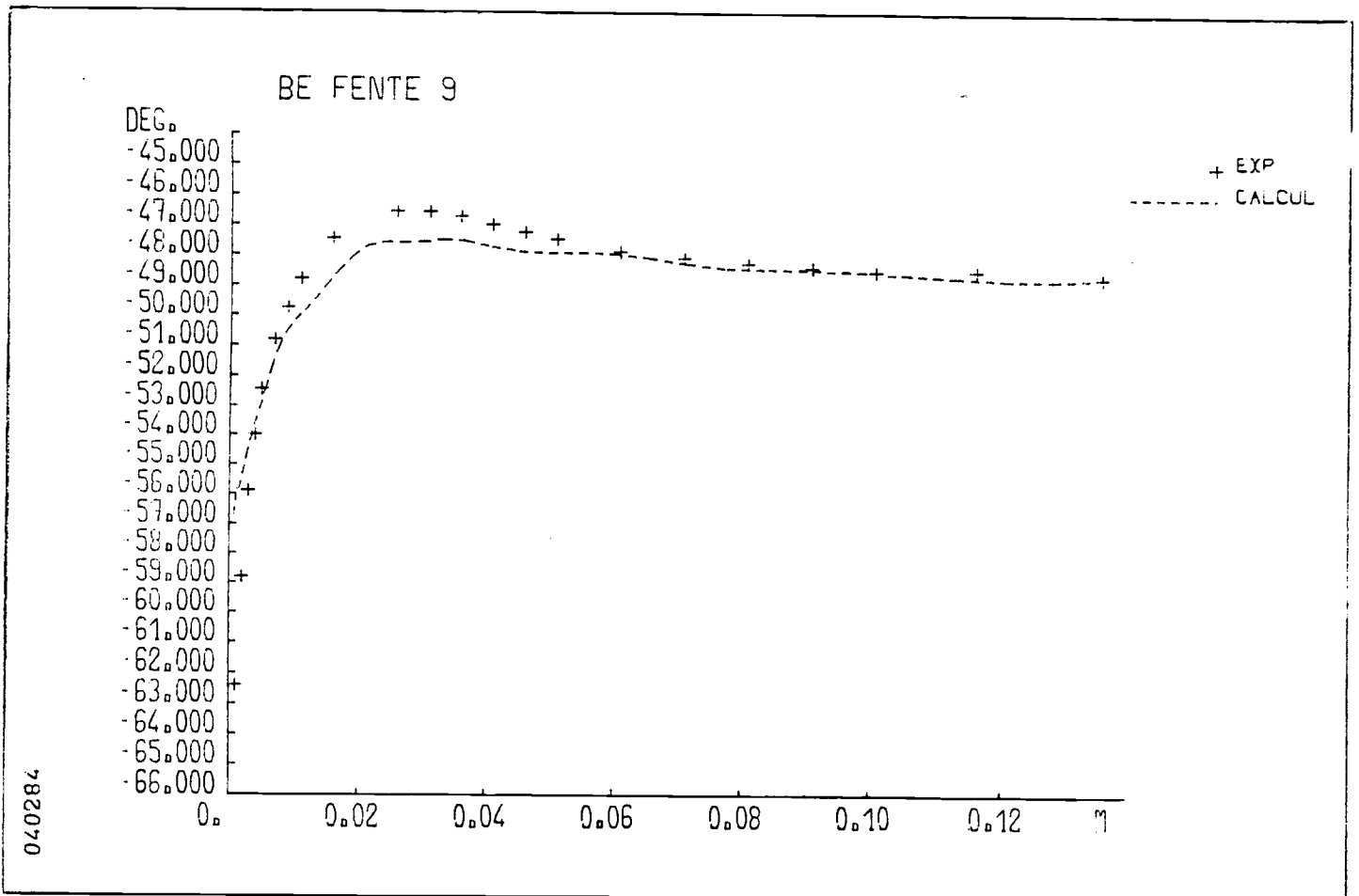


(b)

Figure 22.

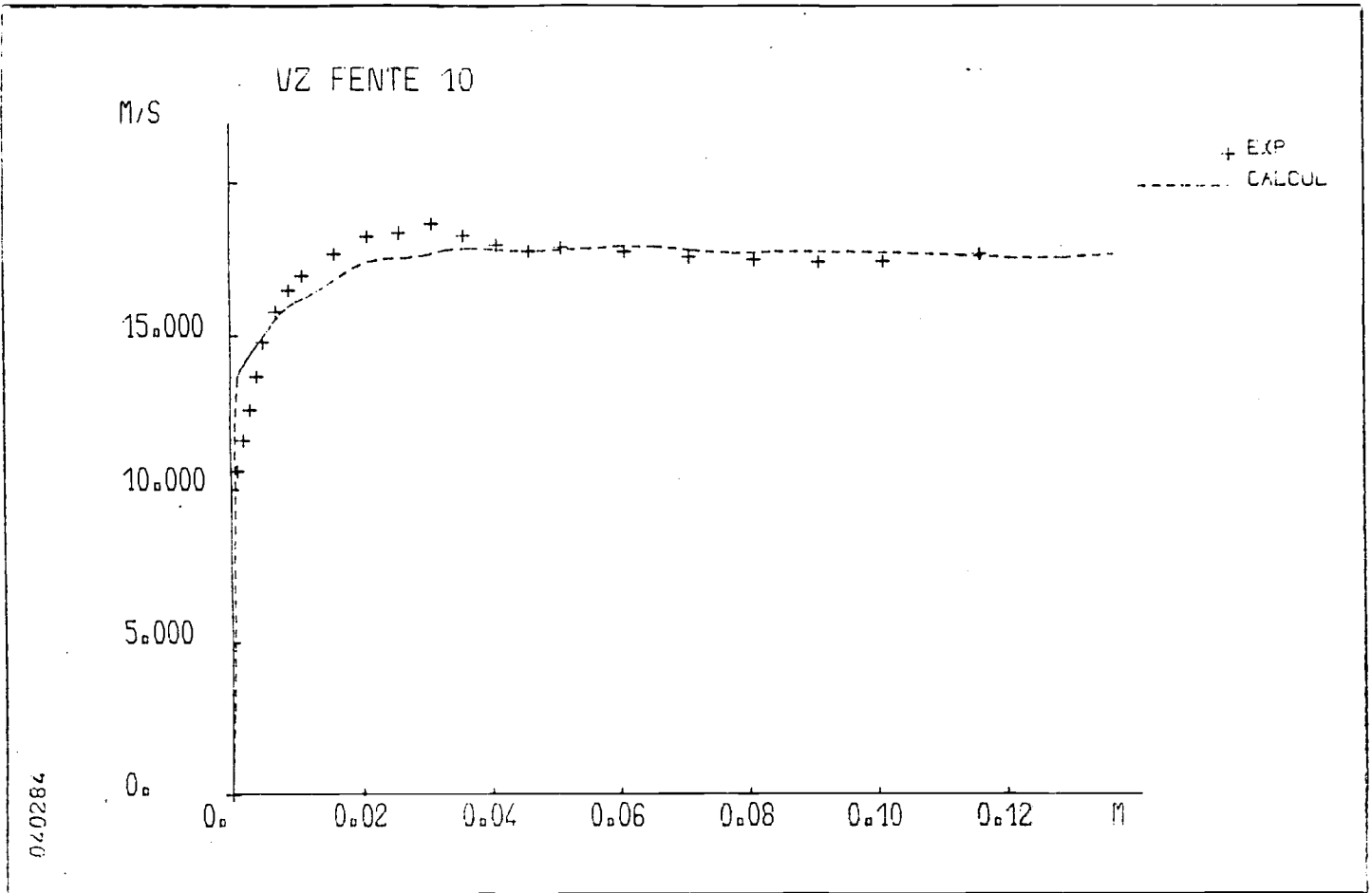


(c)

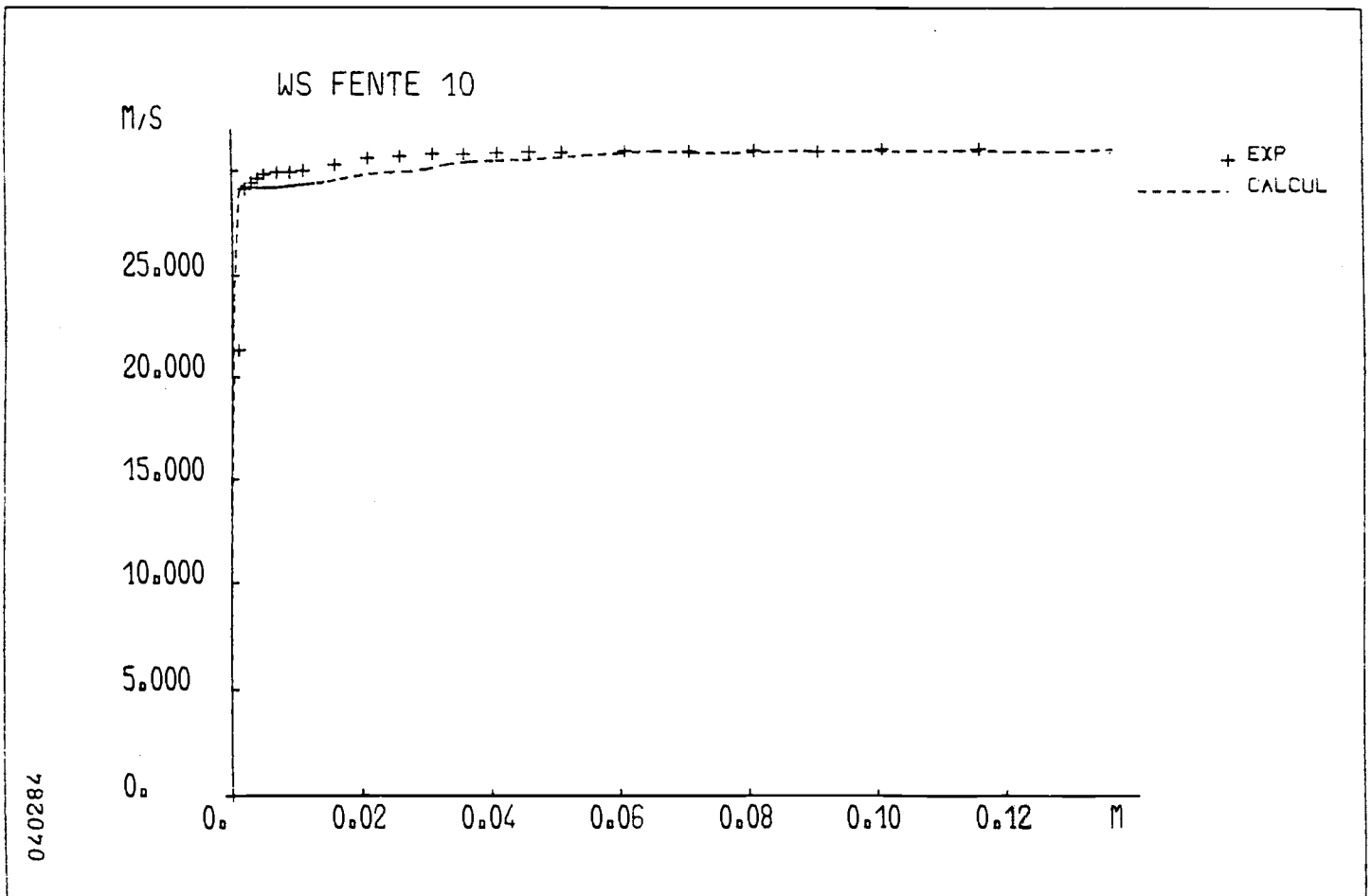


(d)

Figure 22. (contin.)

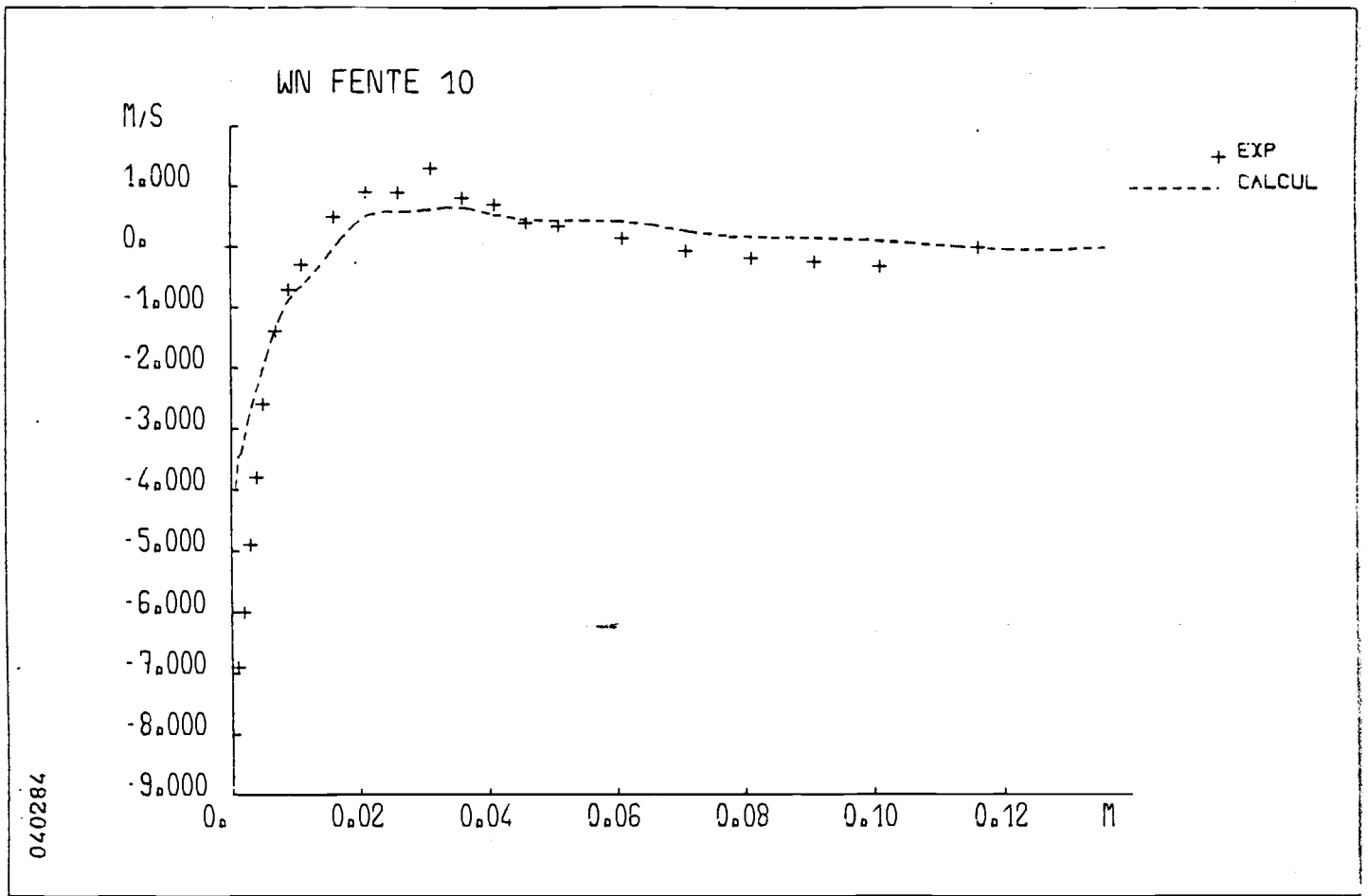


(a)

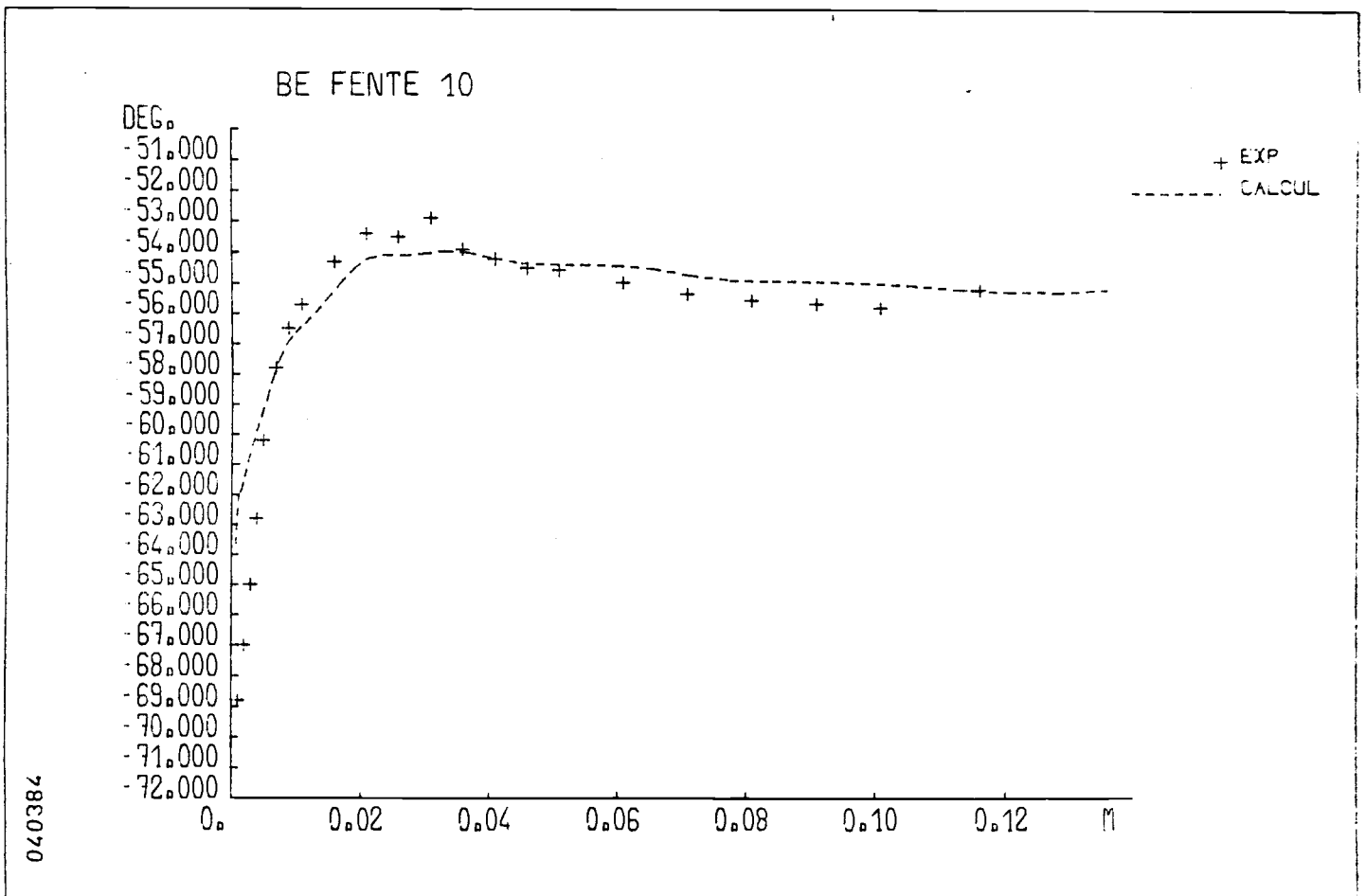


(b)

Figure 23.

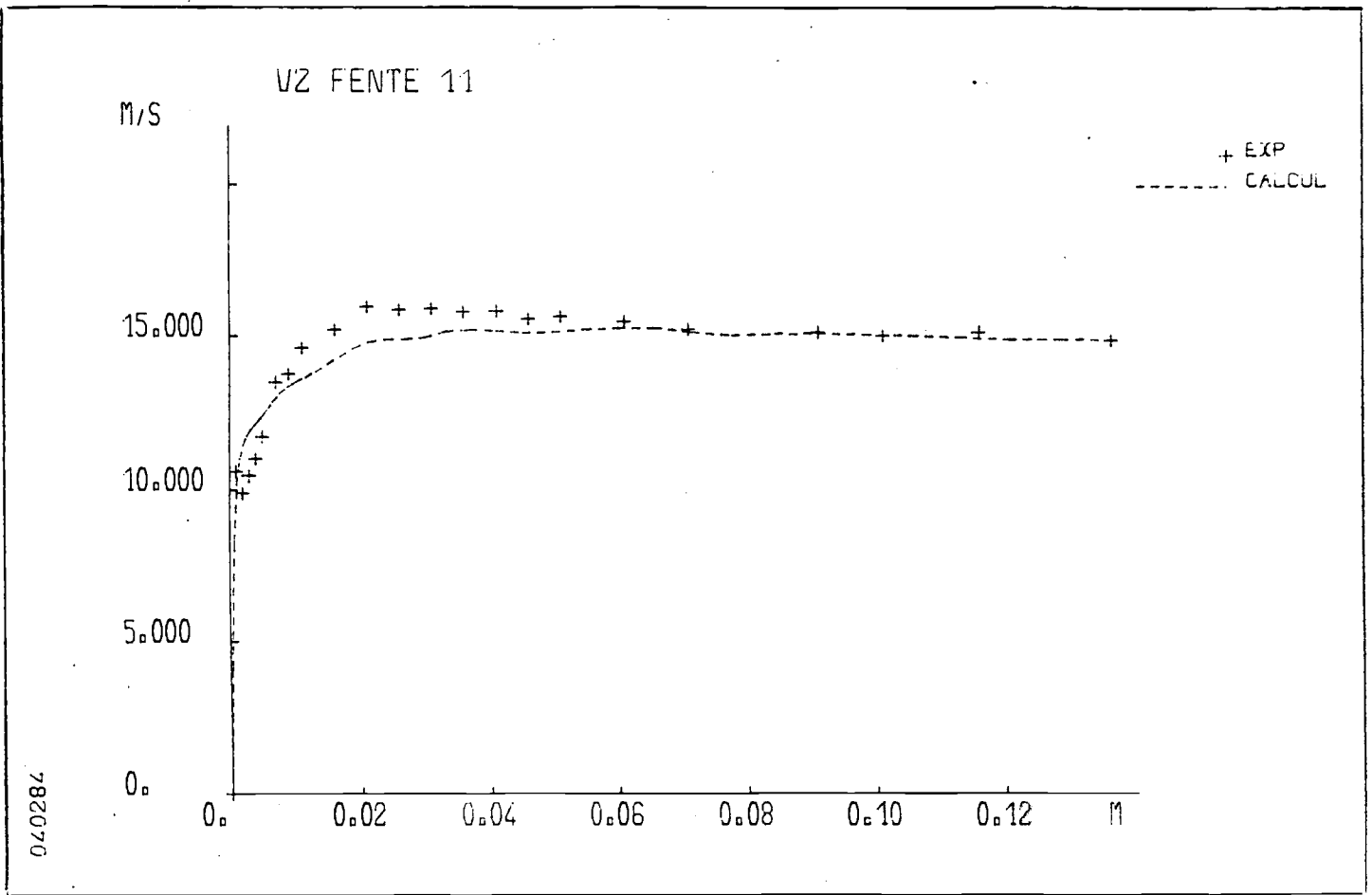


(c)

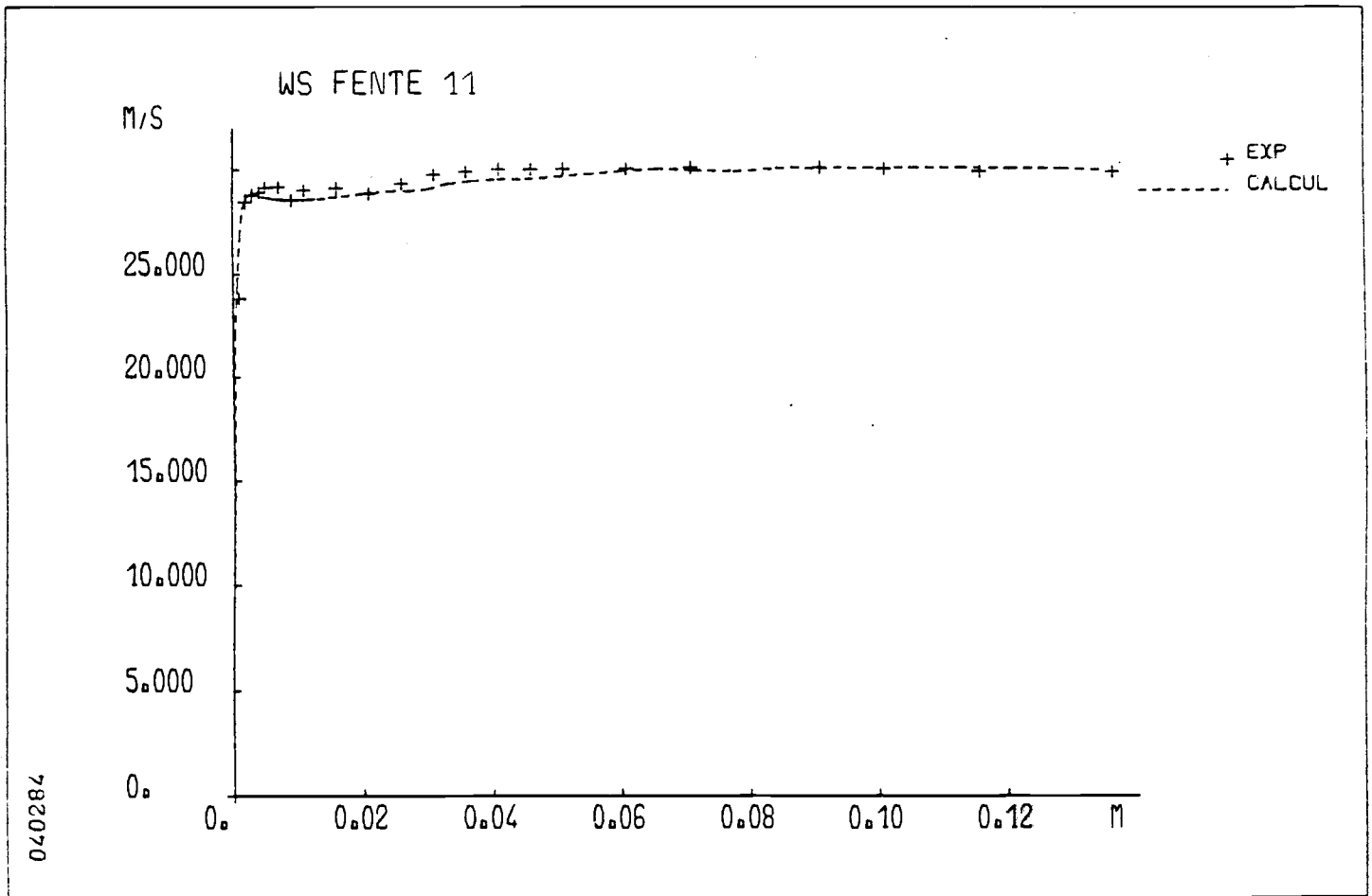


(d)

Figure 23. (contin.)

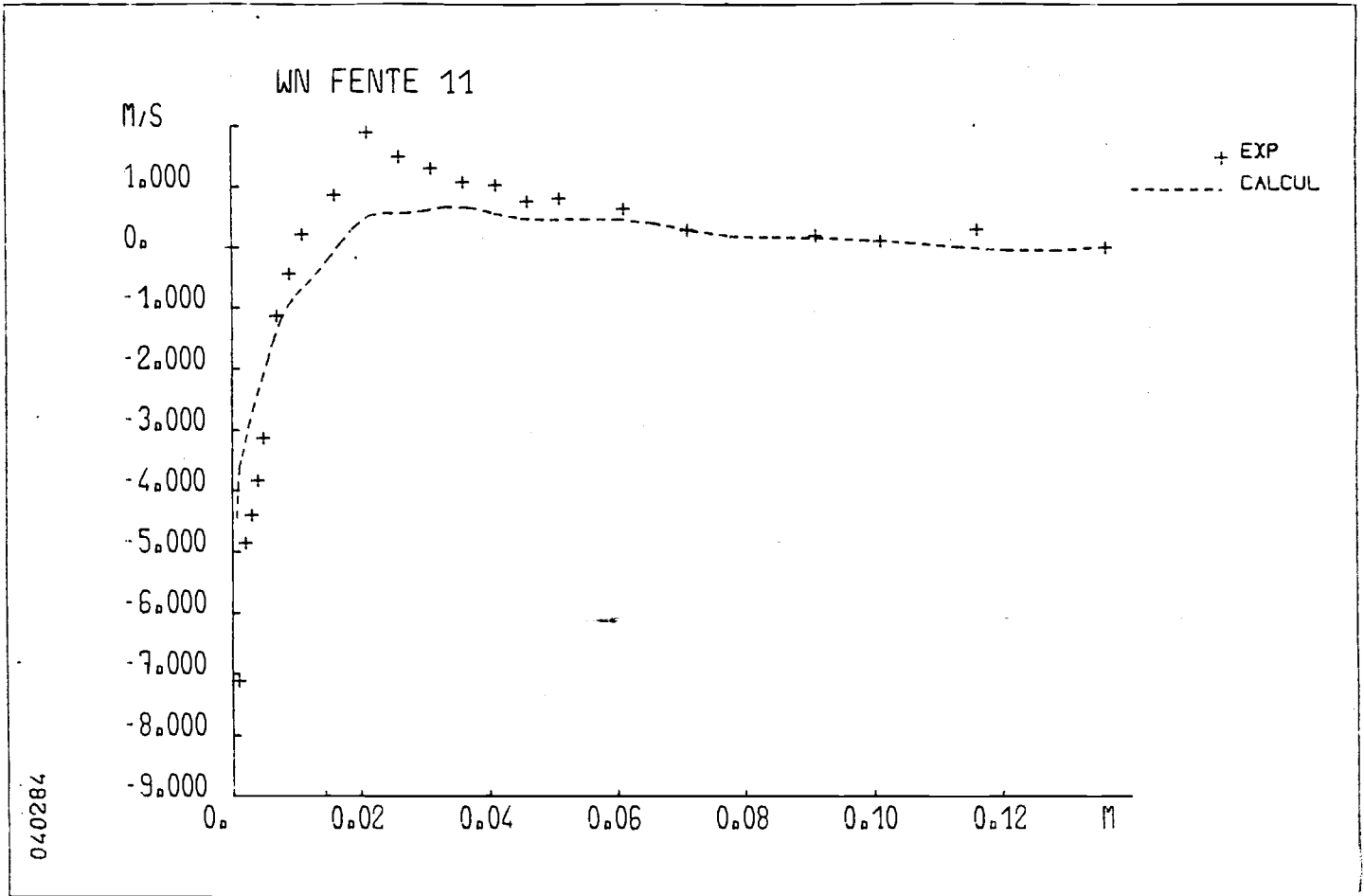


(a)

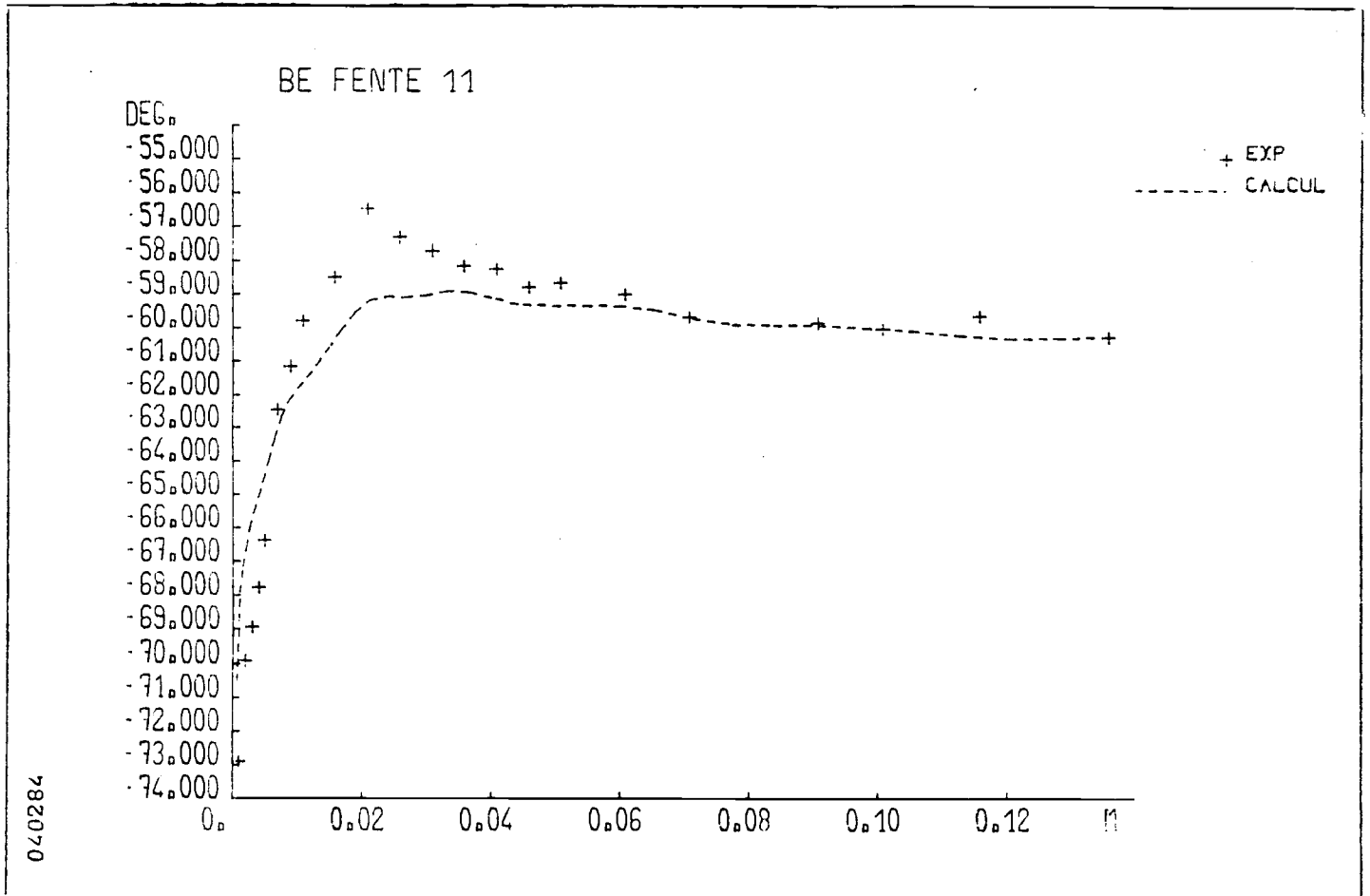


(b)

Figure 24.

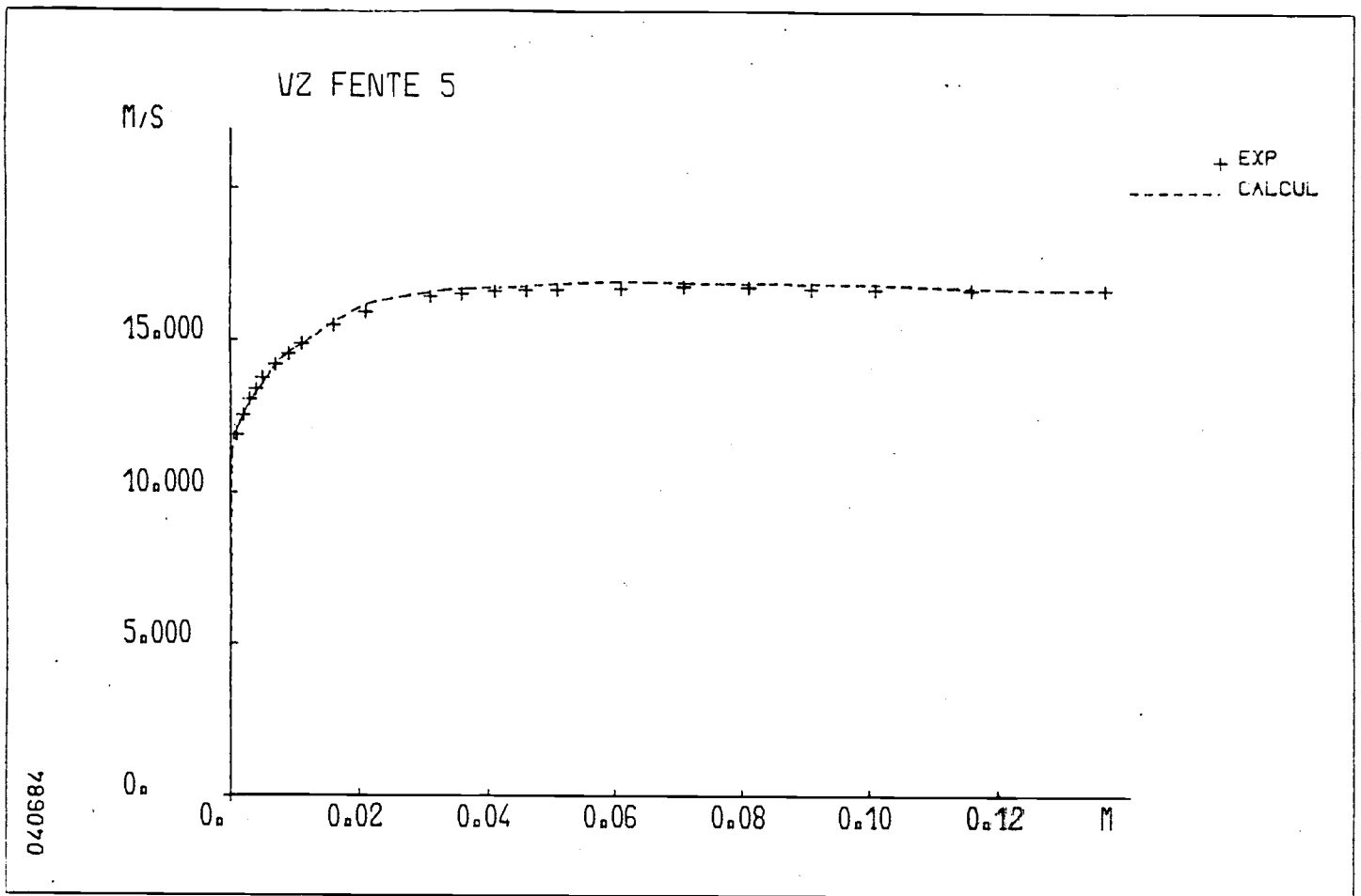


(c)

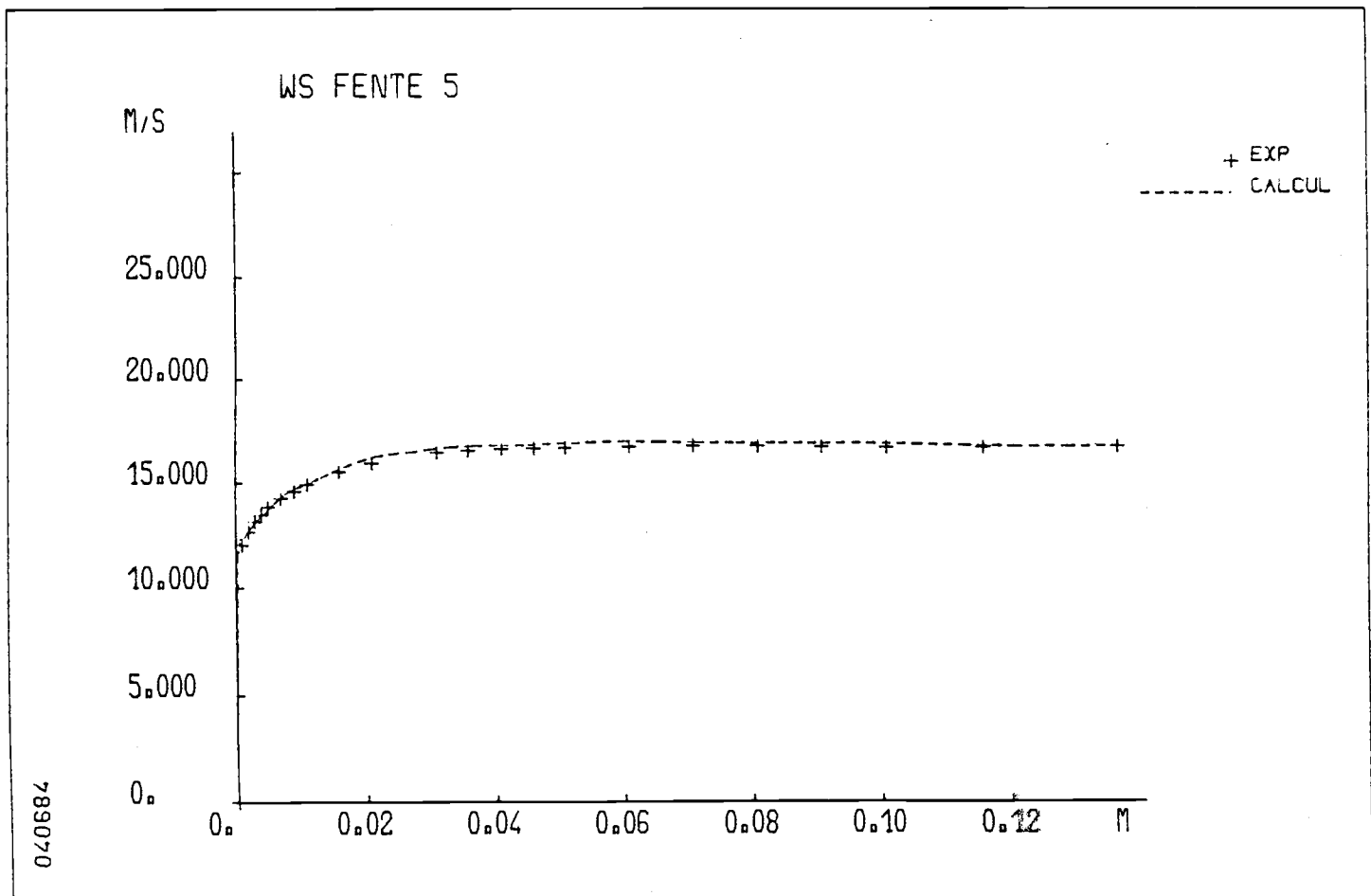


(d)

Figure 24. (contin.)

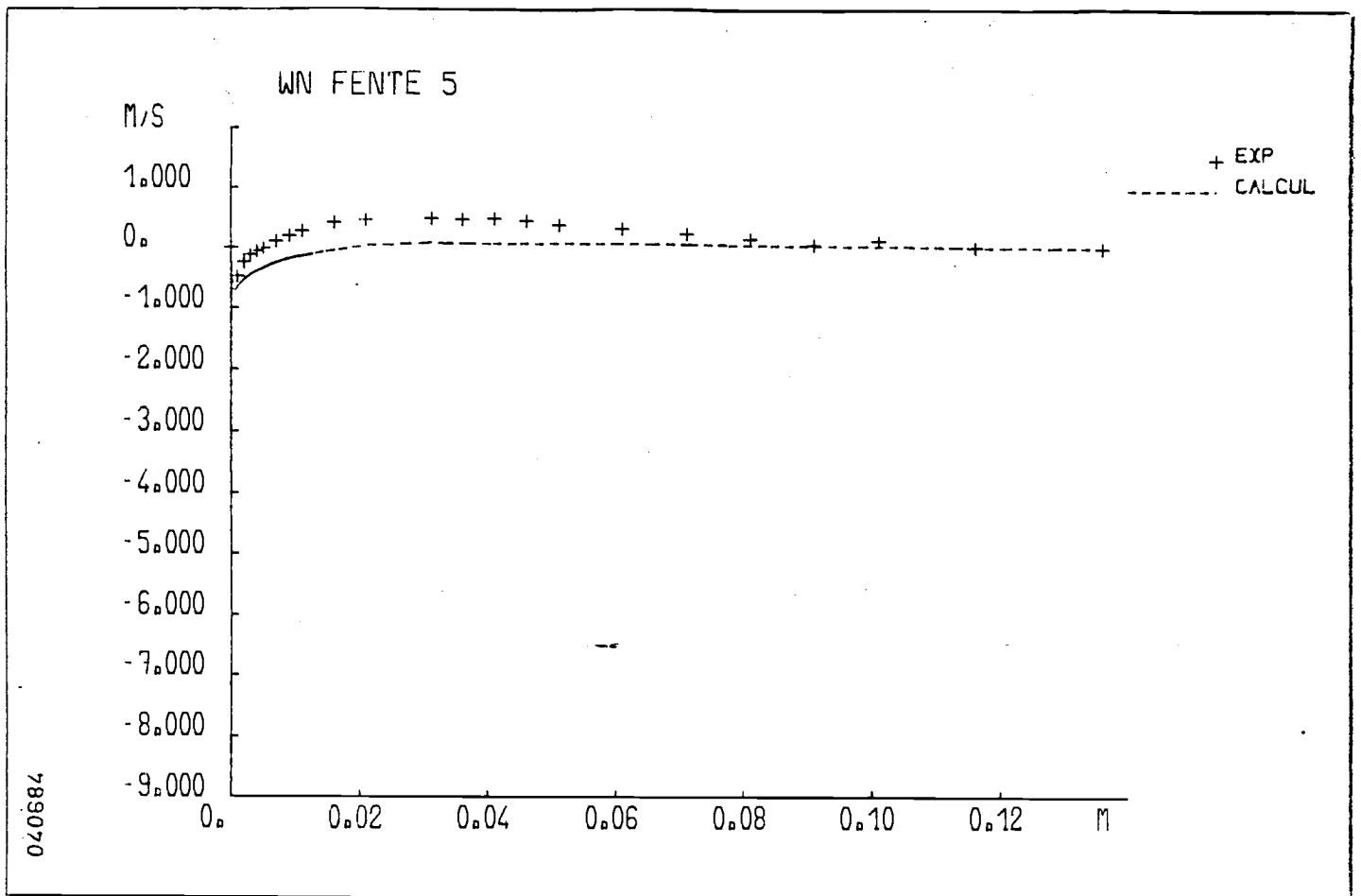


(a)

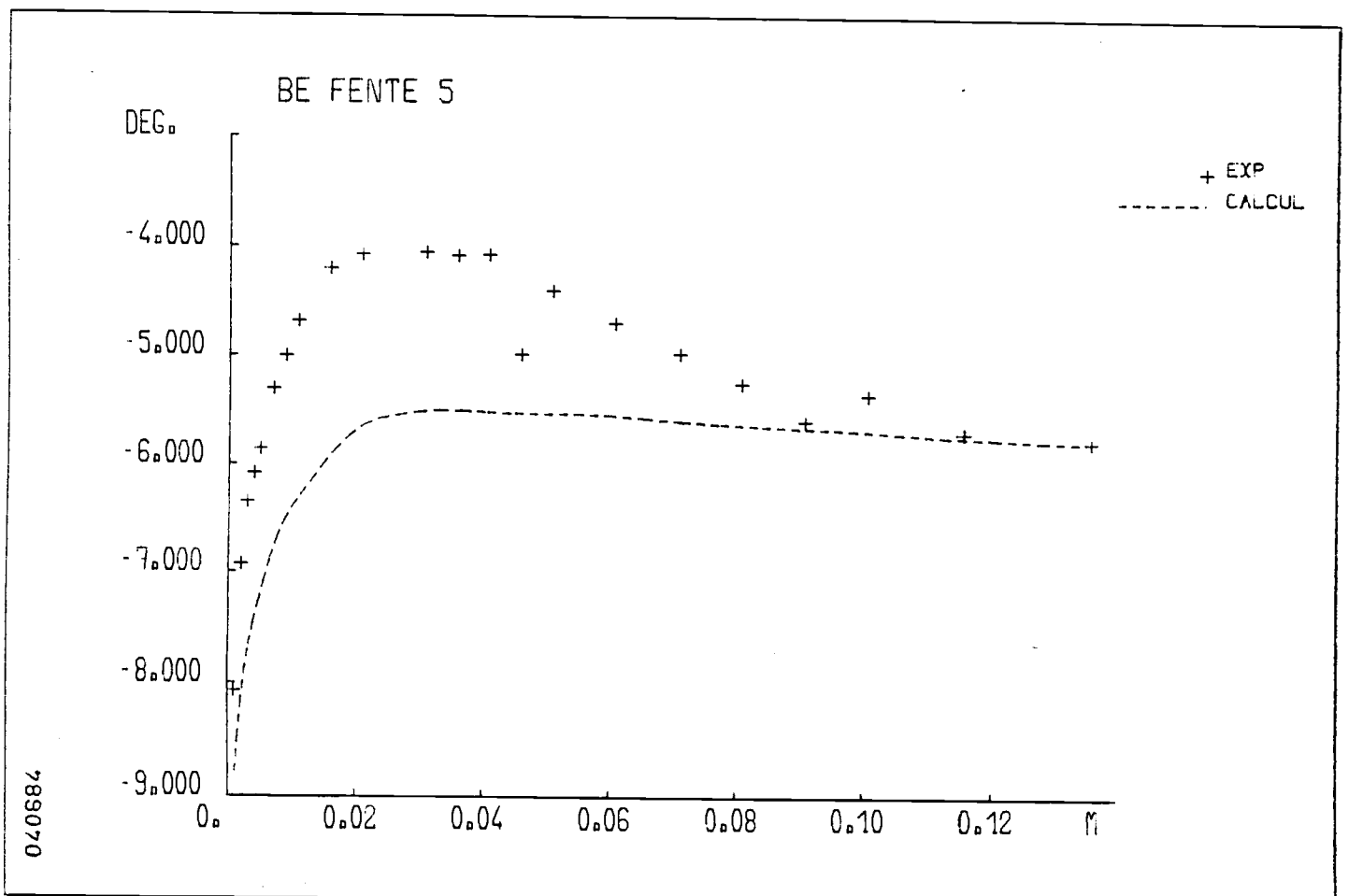


(b)

Figure 25.

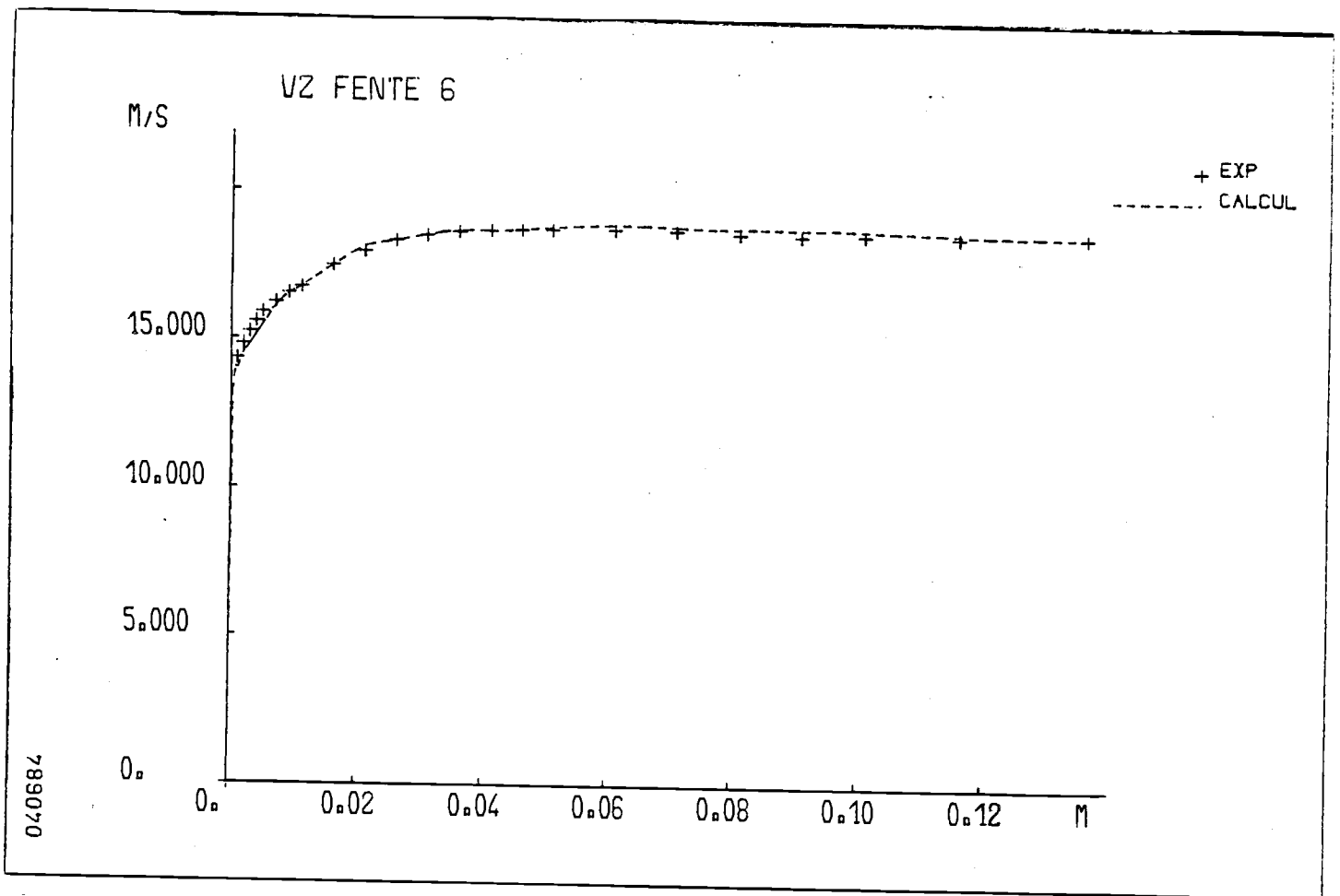


(c)

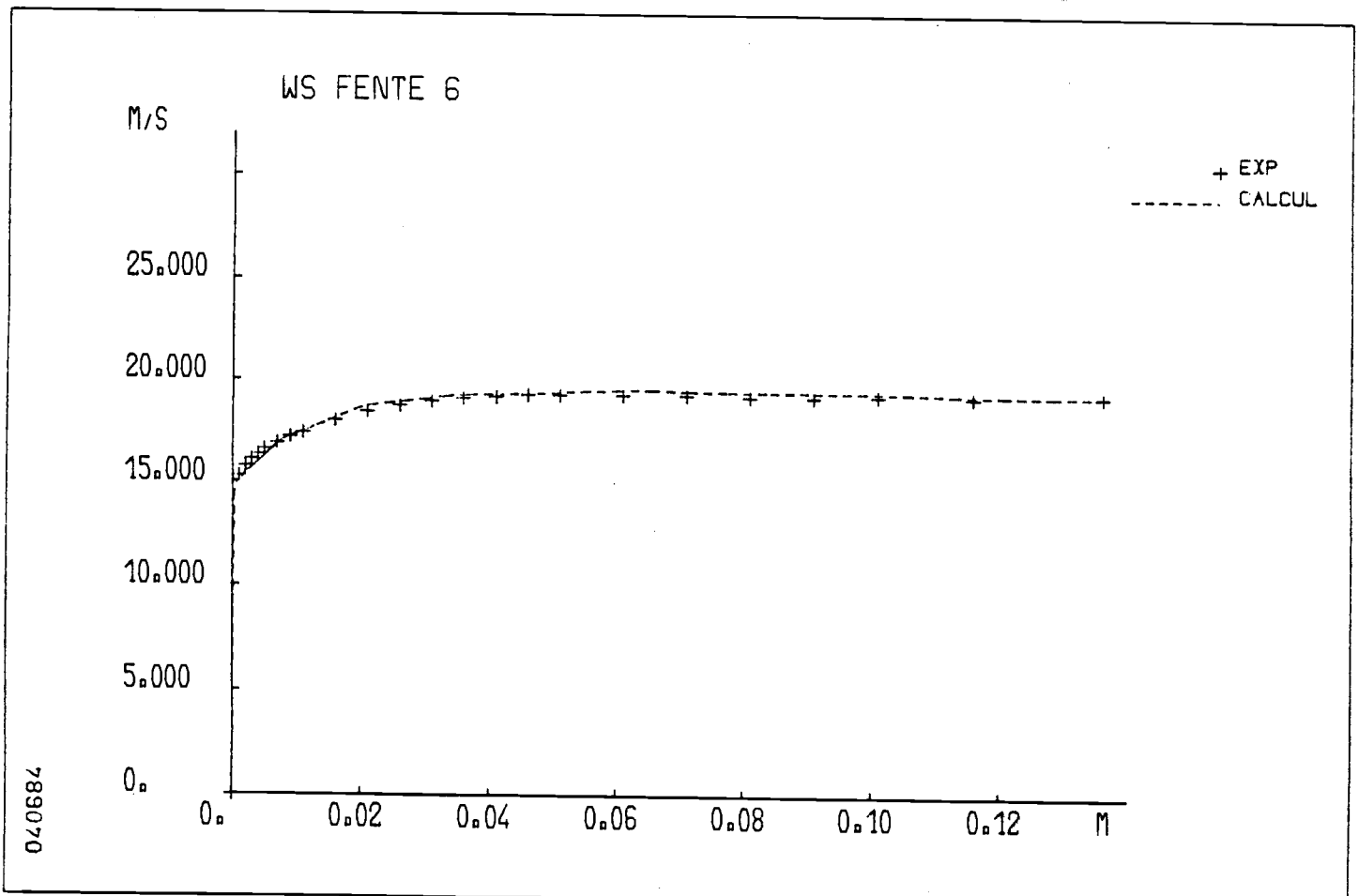


(d)

Figure 25. (contin.)

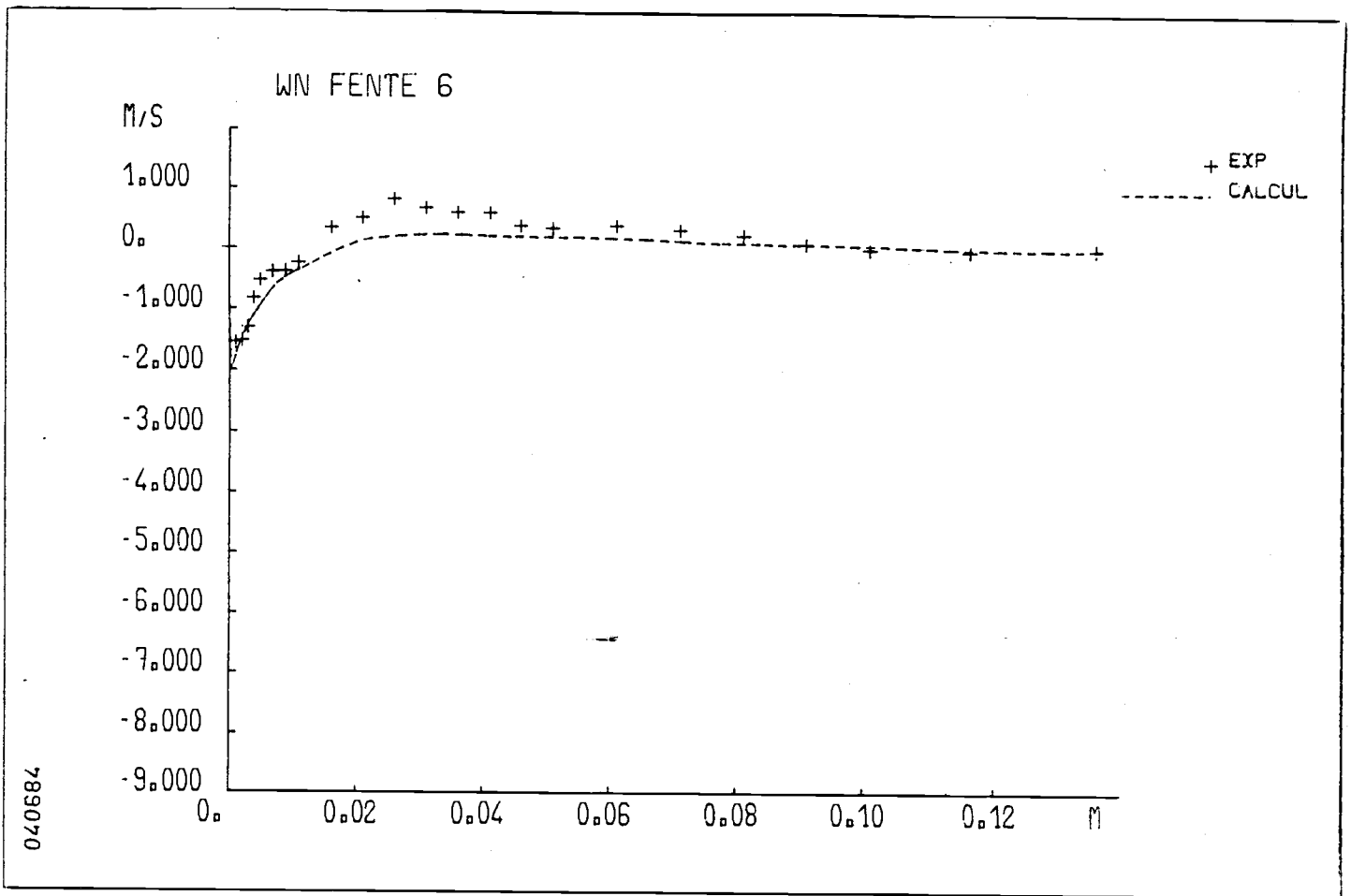


(a)

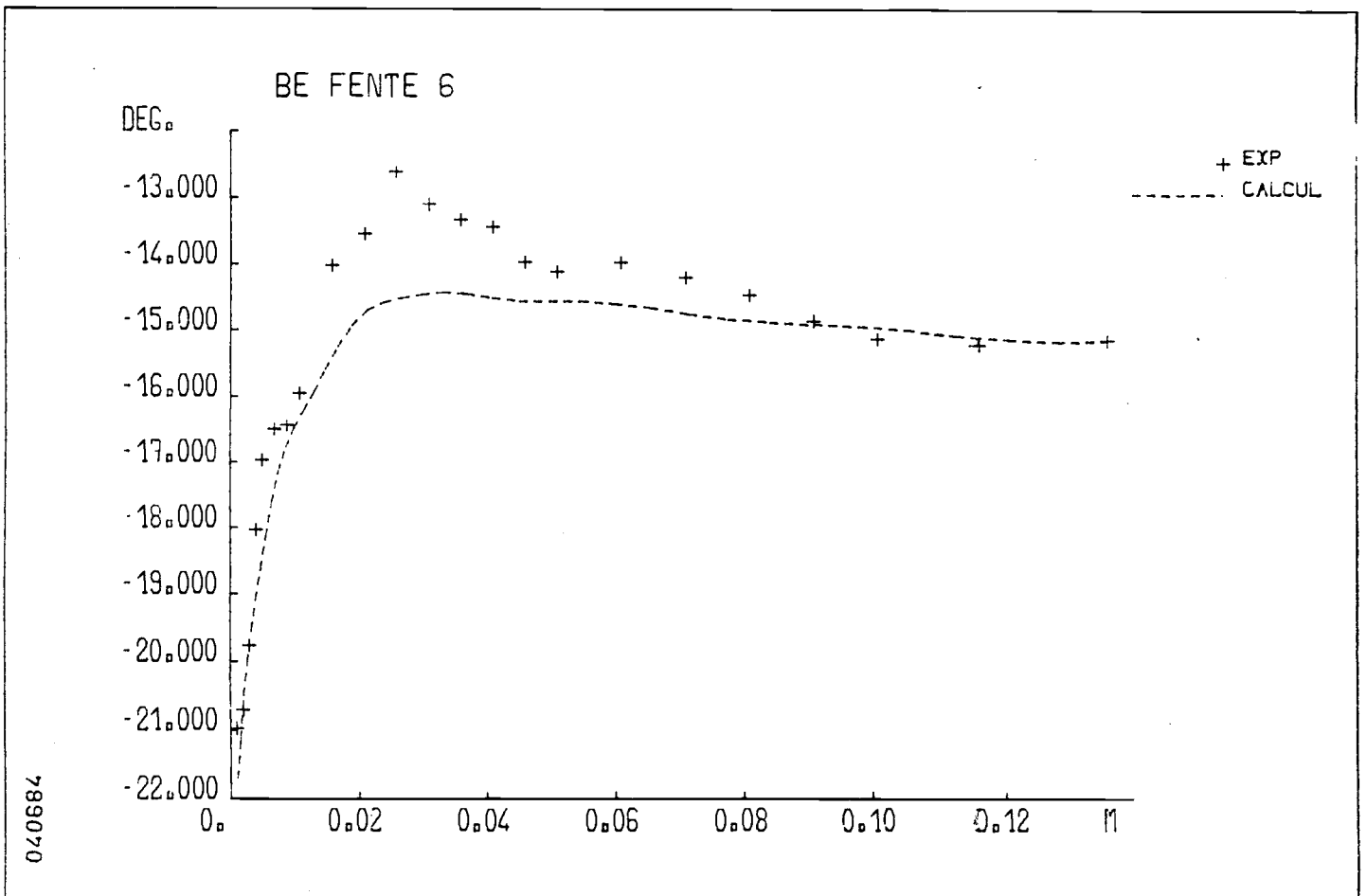


(b)

Figure 26.

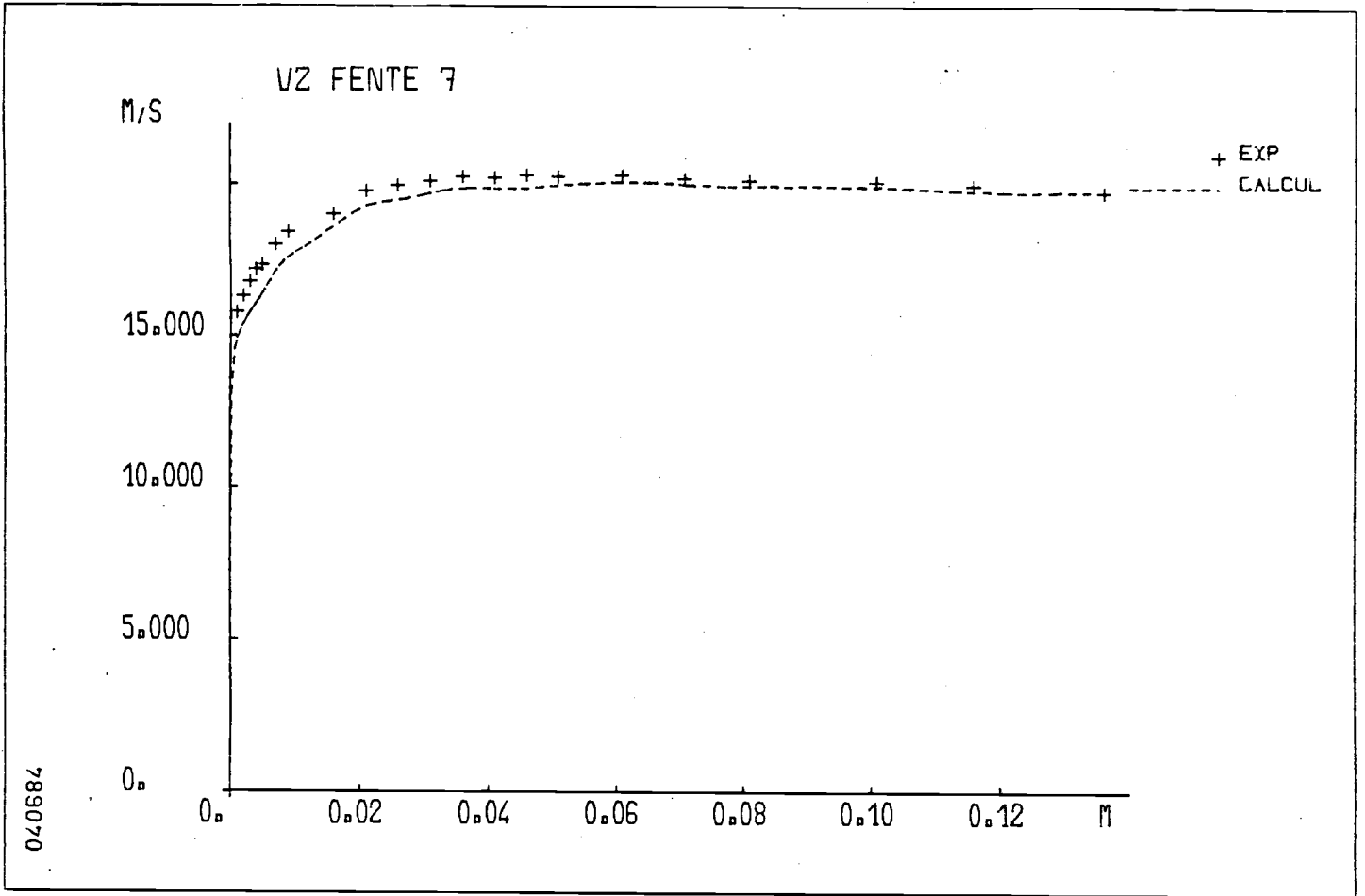


(c)

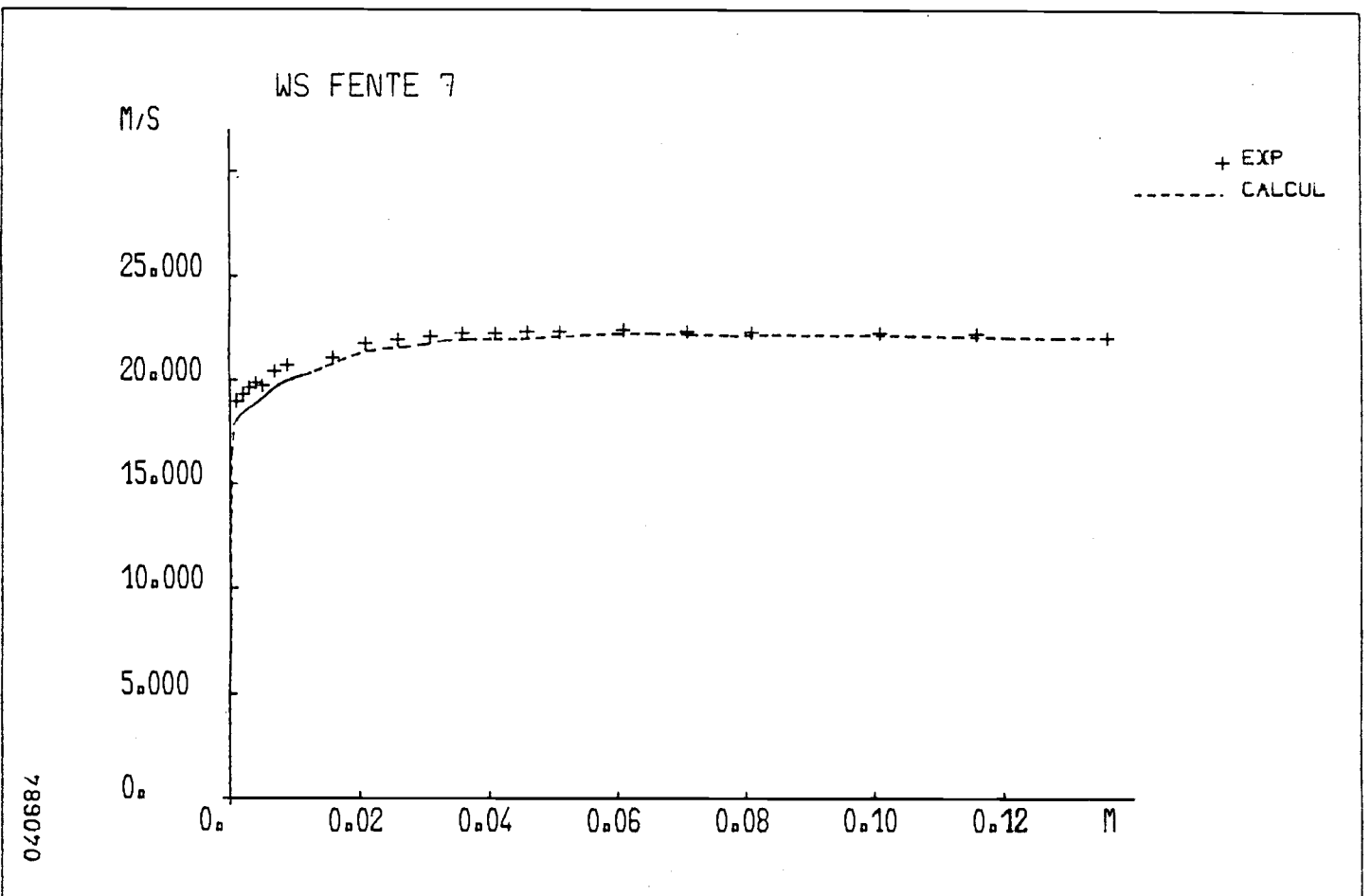


(d)

Figure 26. (contin.)

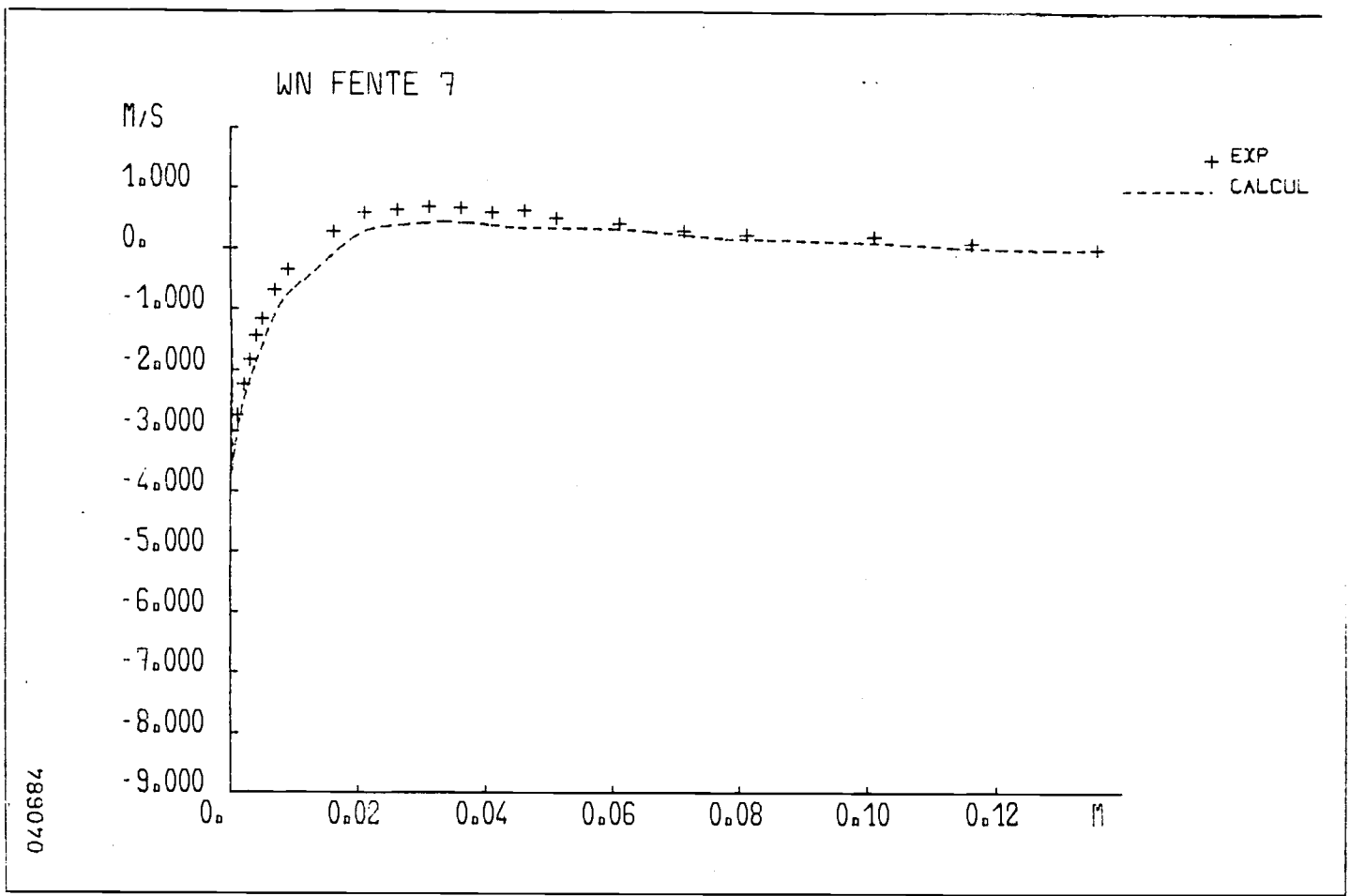


(a)

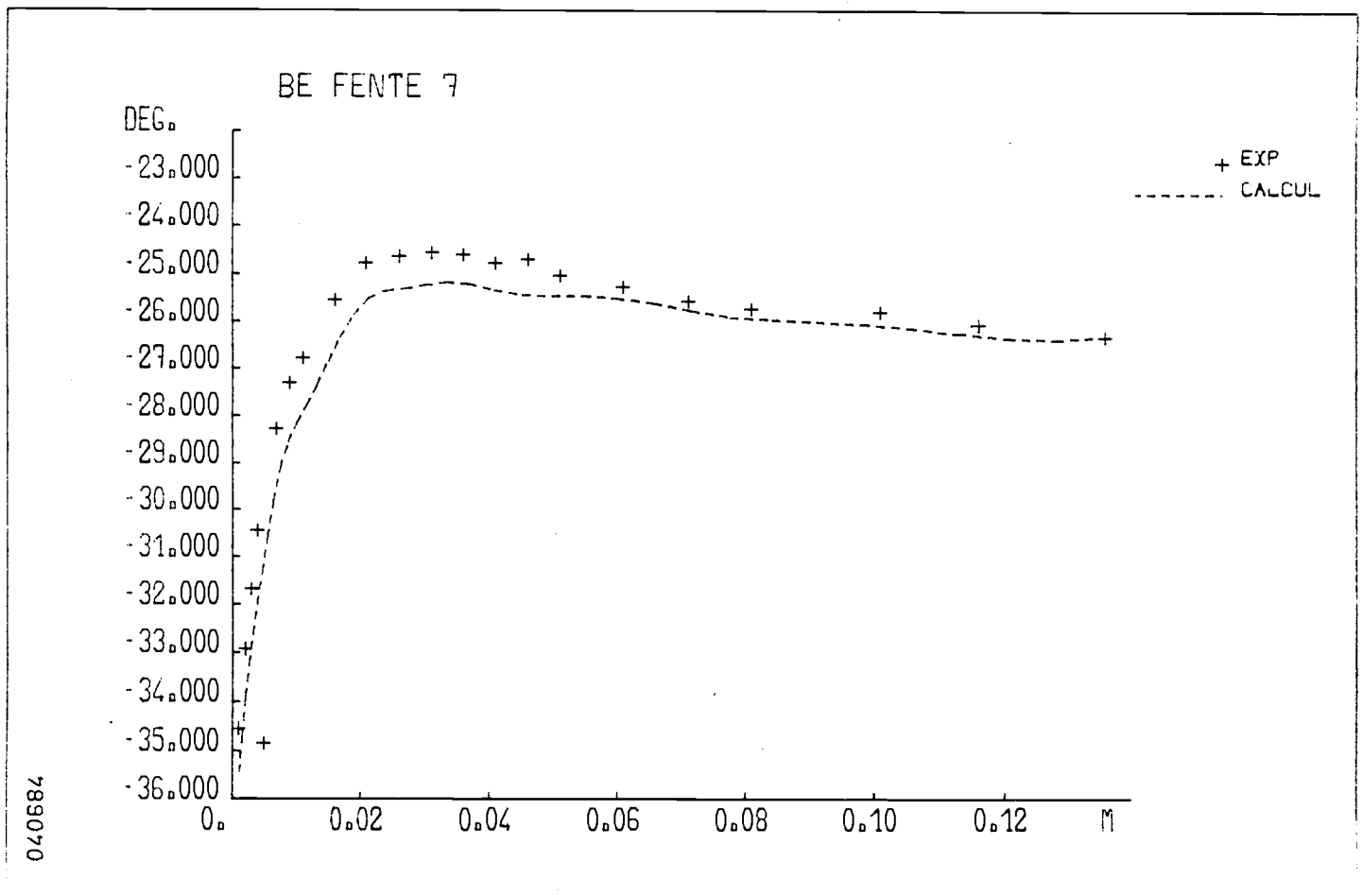


(b)

Figure 27.

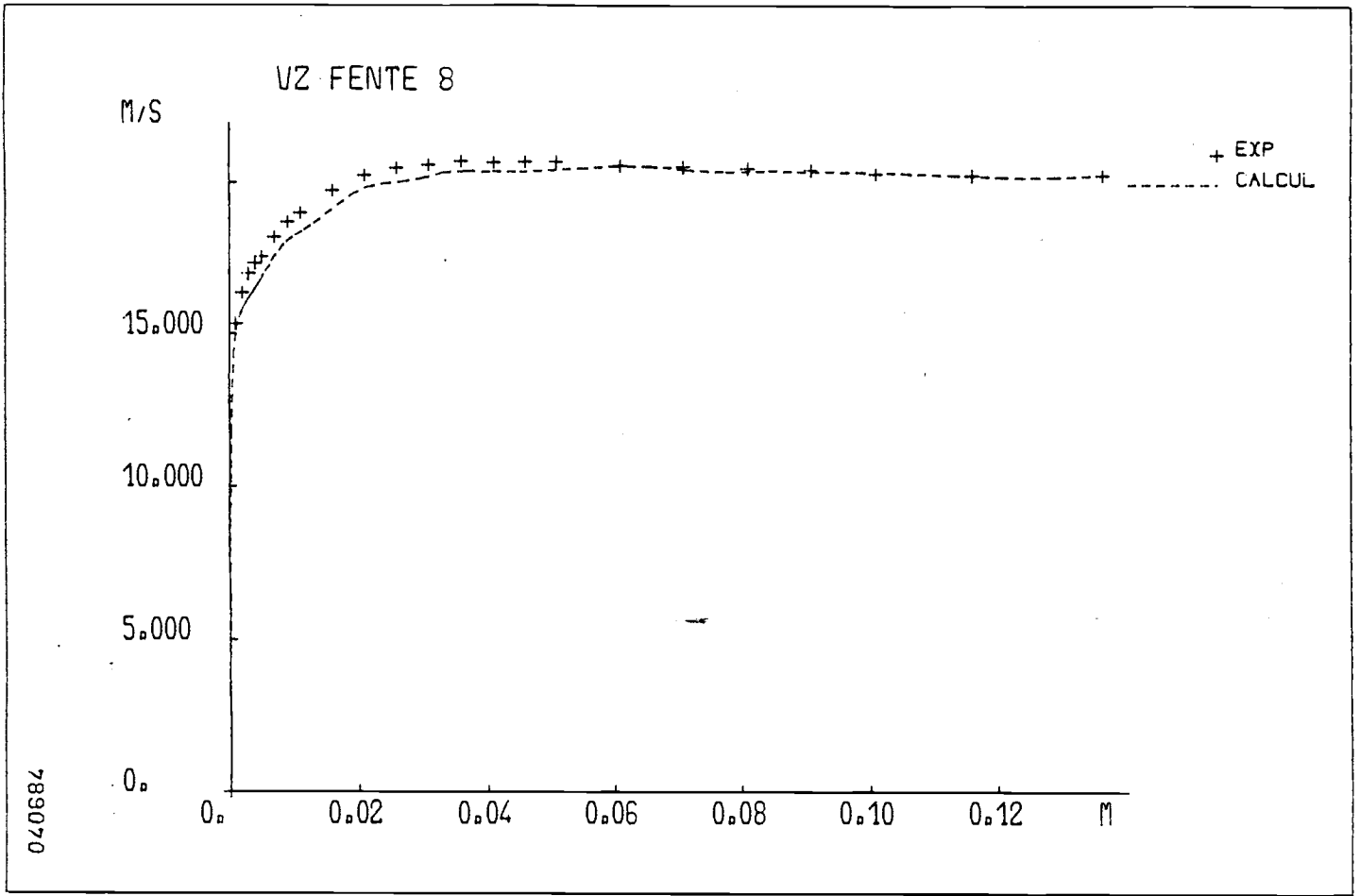


(c)

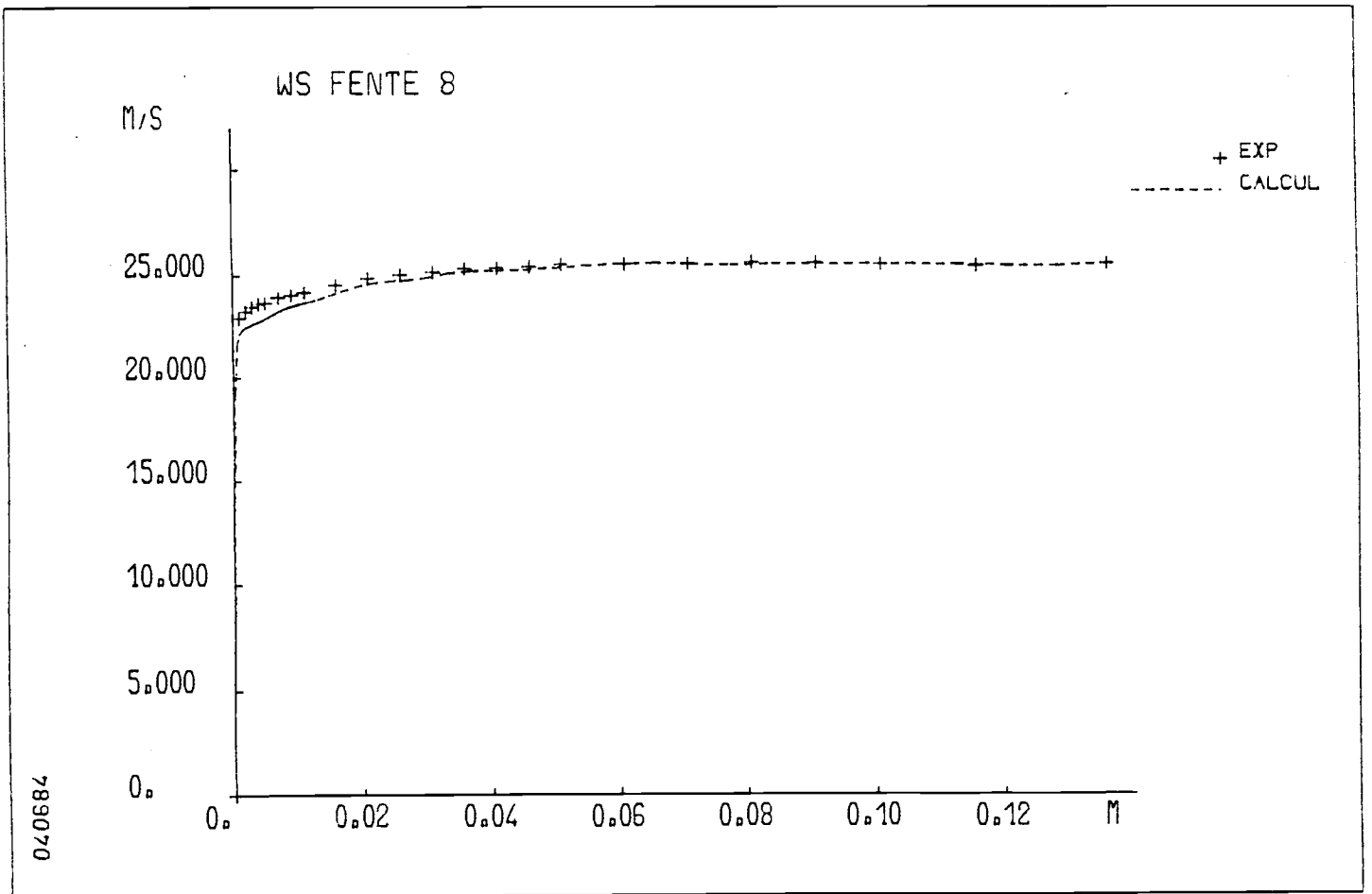


(d)

Figure 27. (contin.)

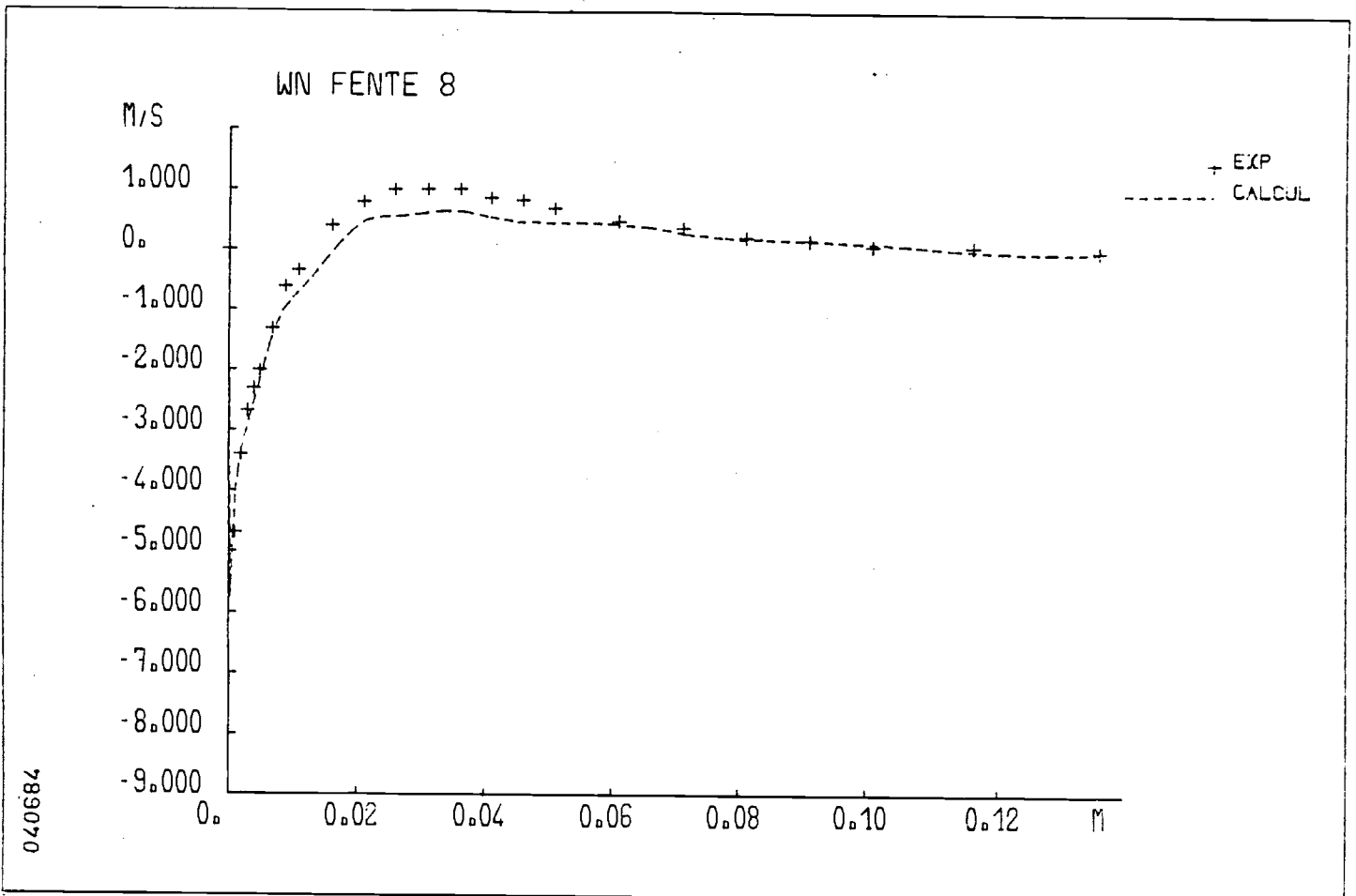


(a)

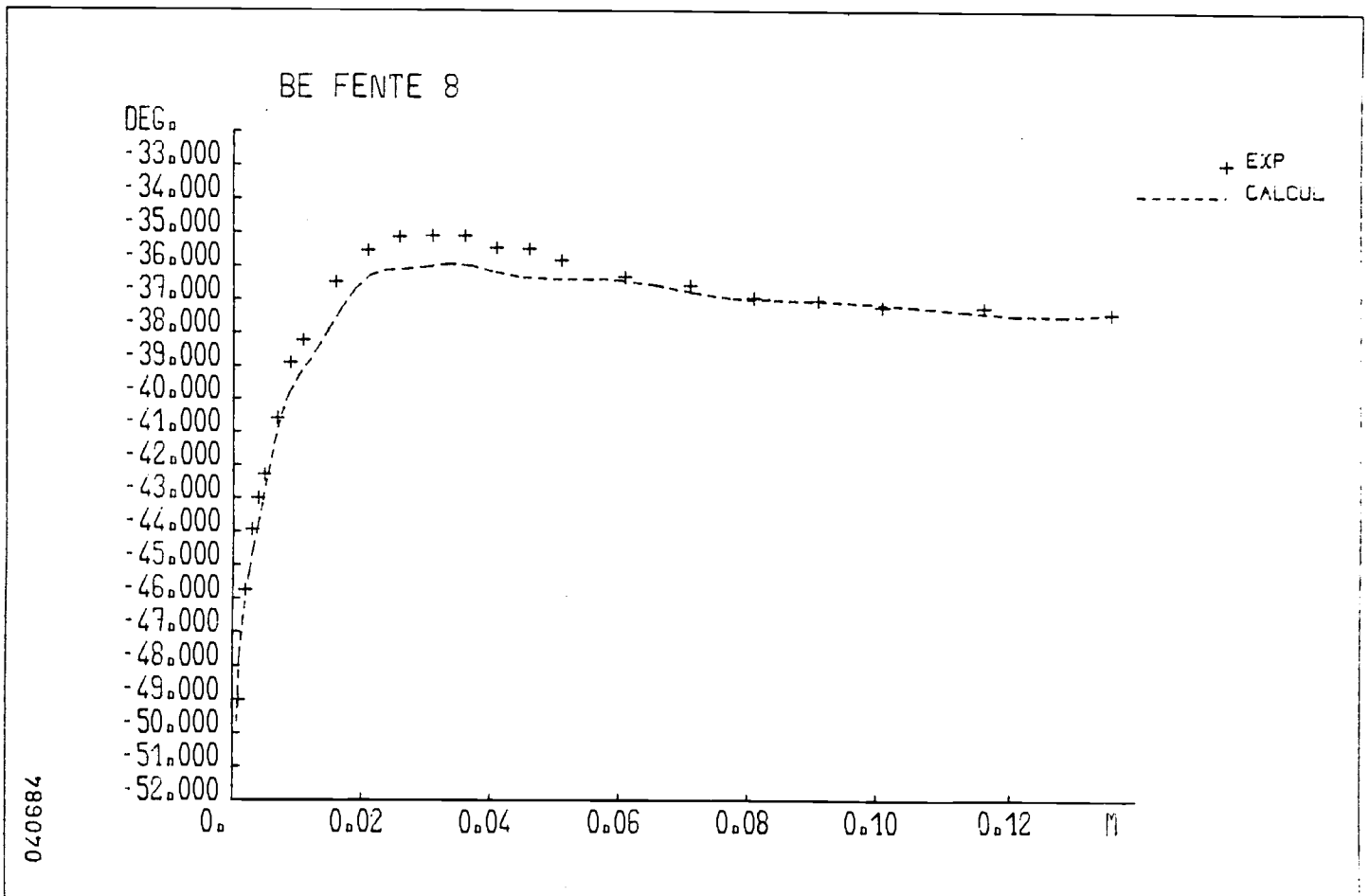


(b)

Figure 28.

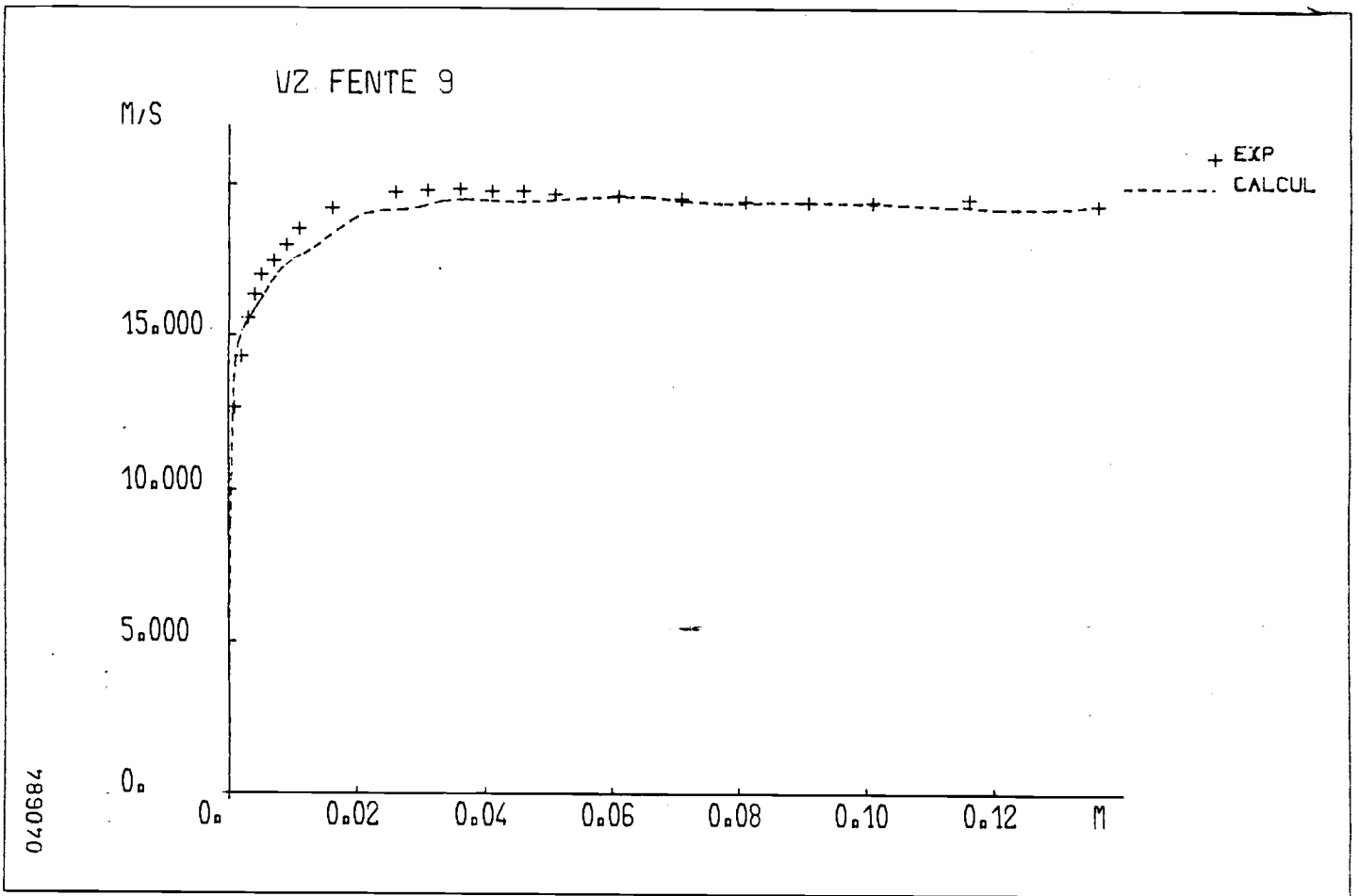


(c)

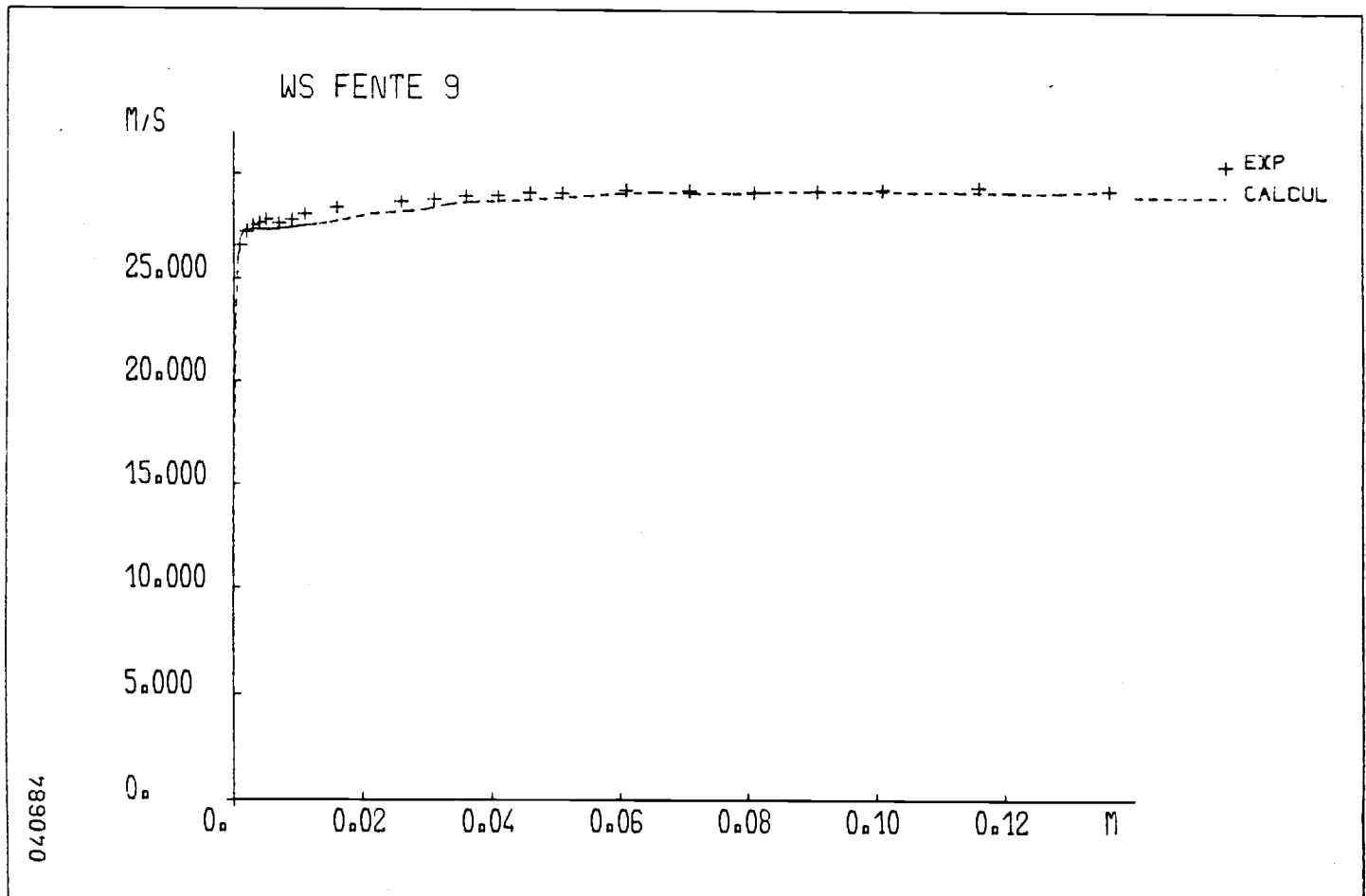


(d)

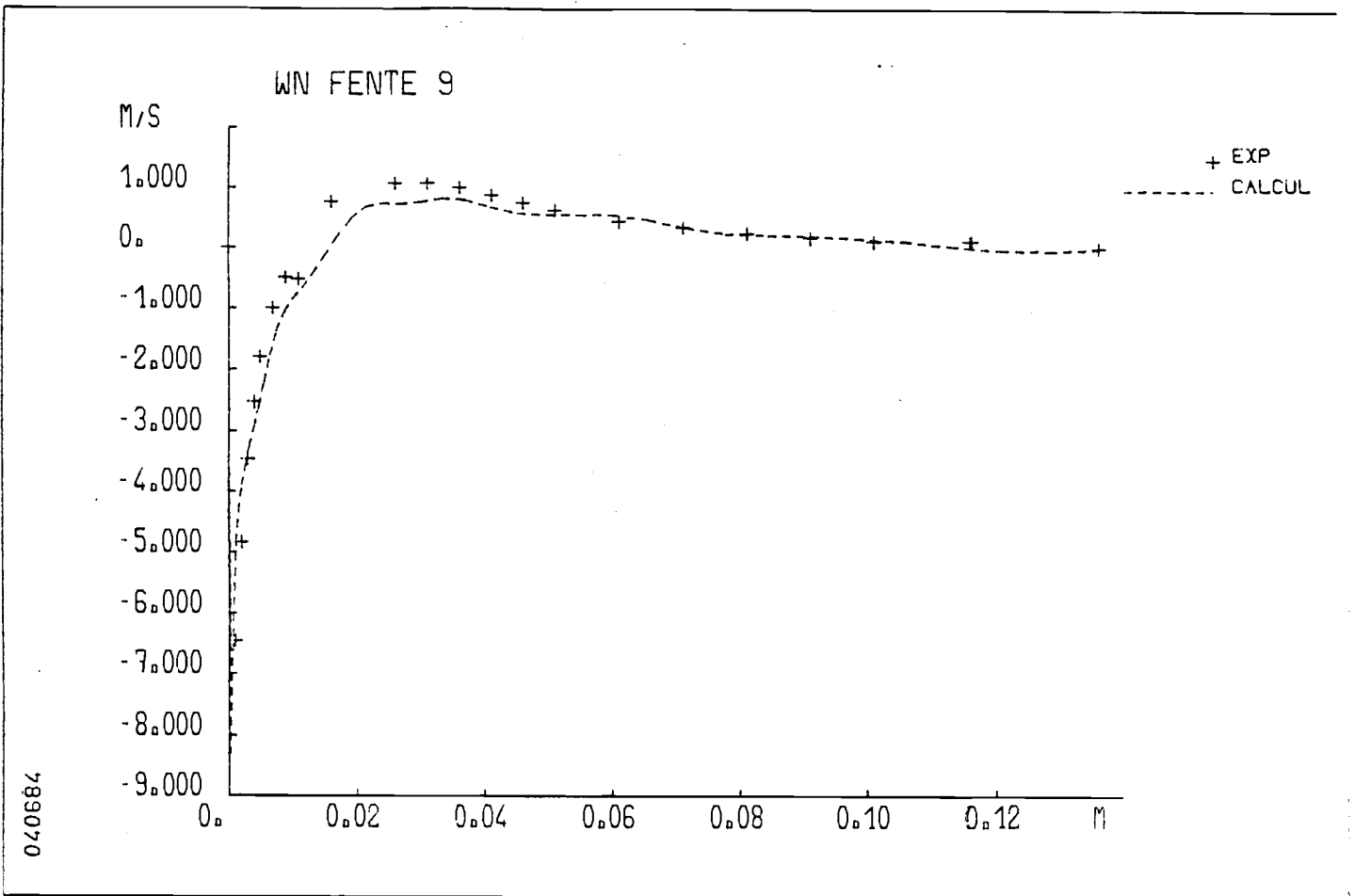
Figure 28. (contin.)



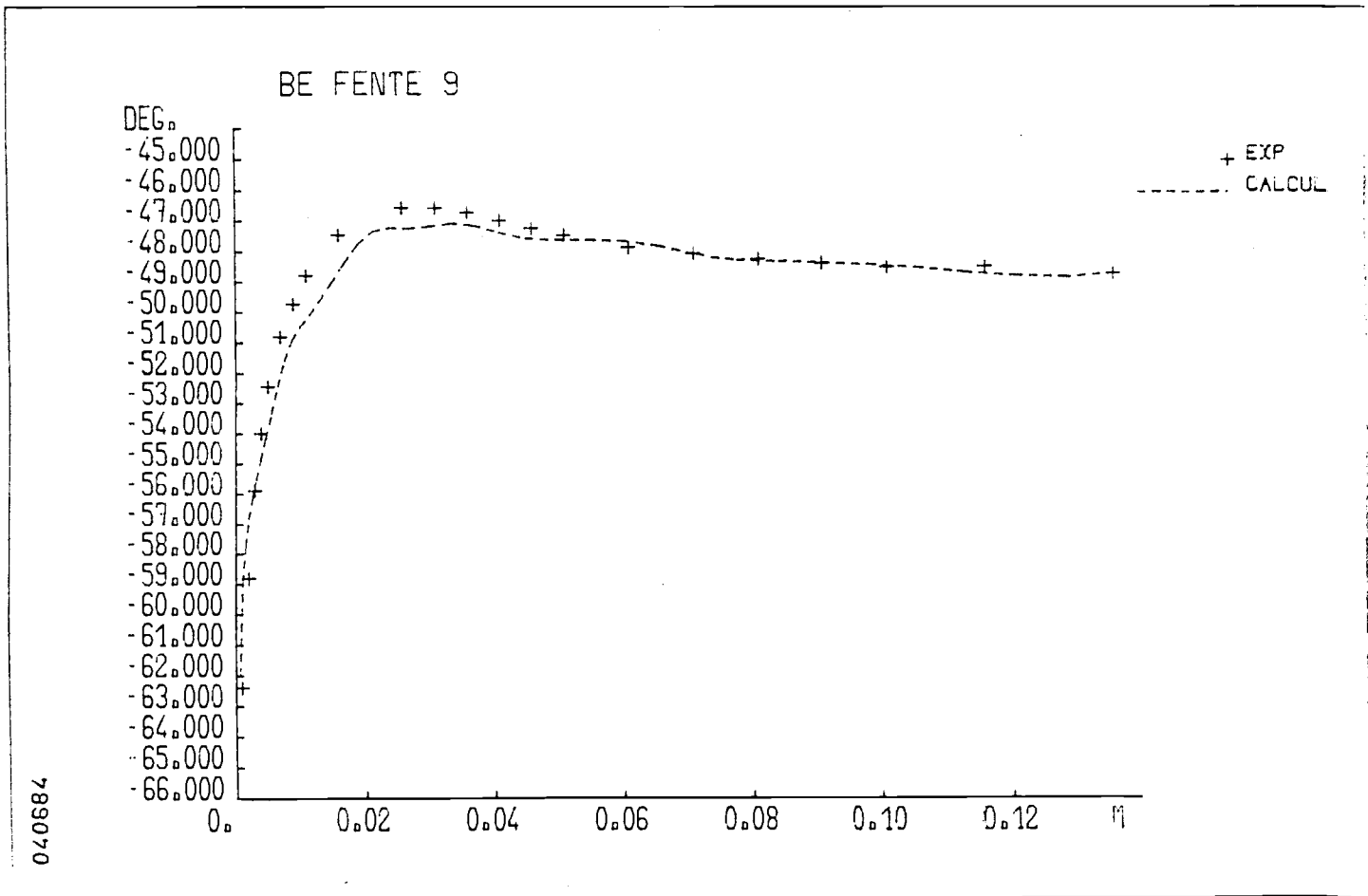
(a)



(b)

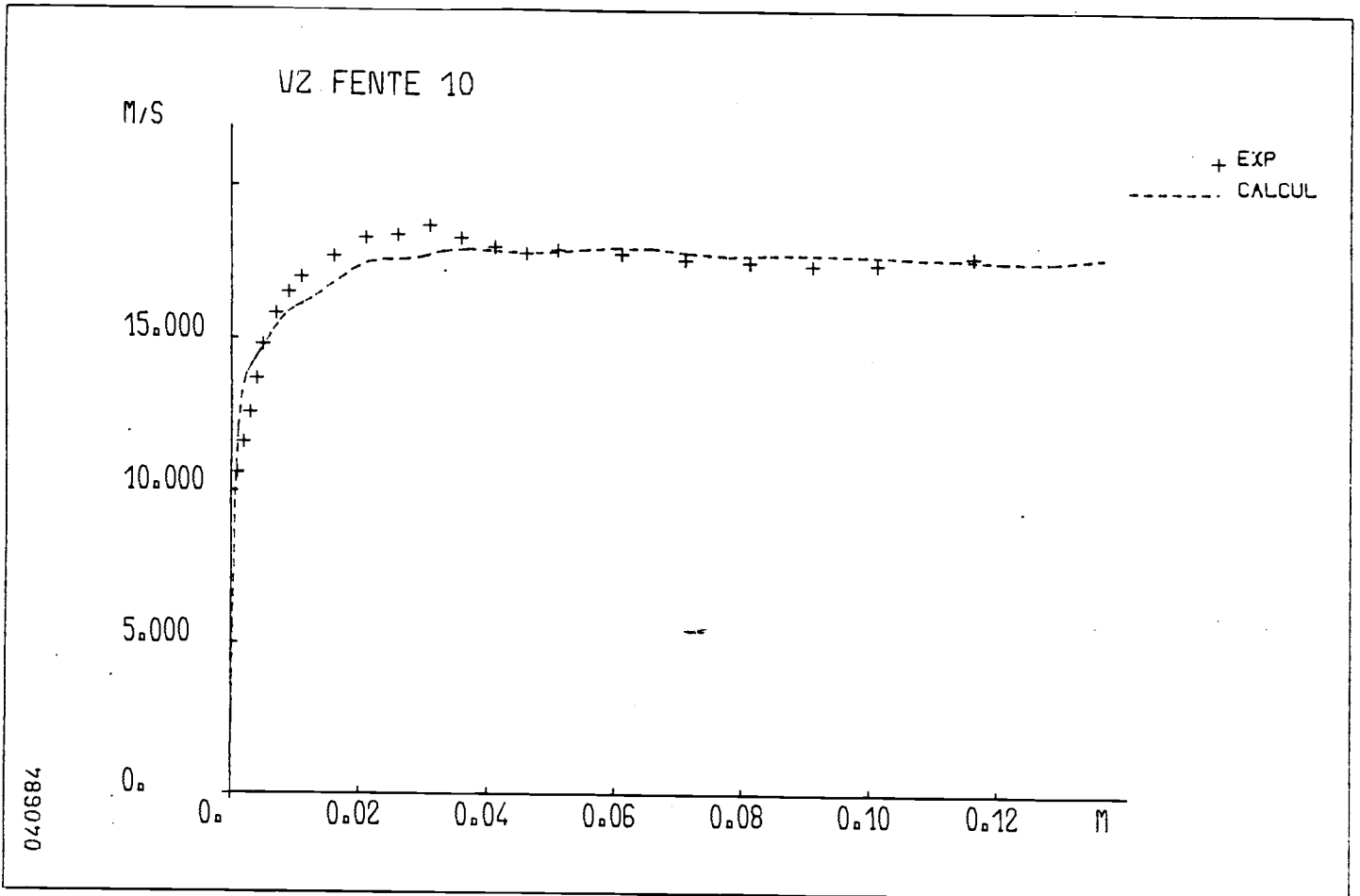


(c)

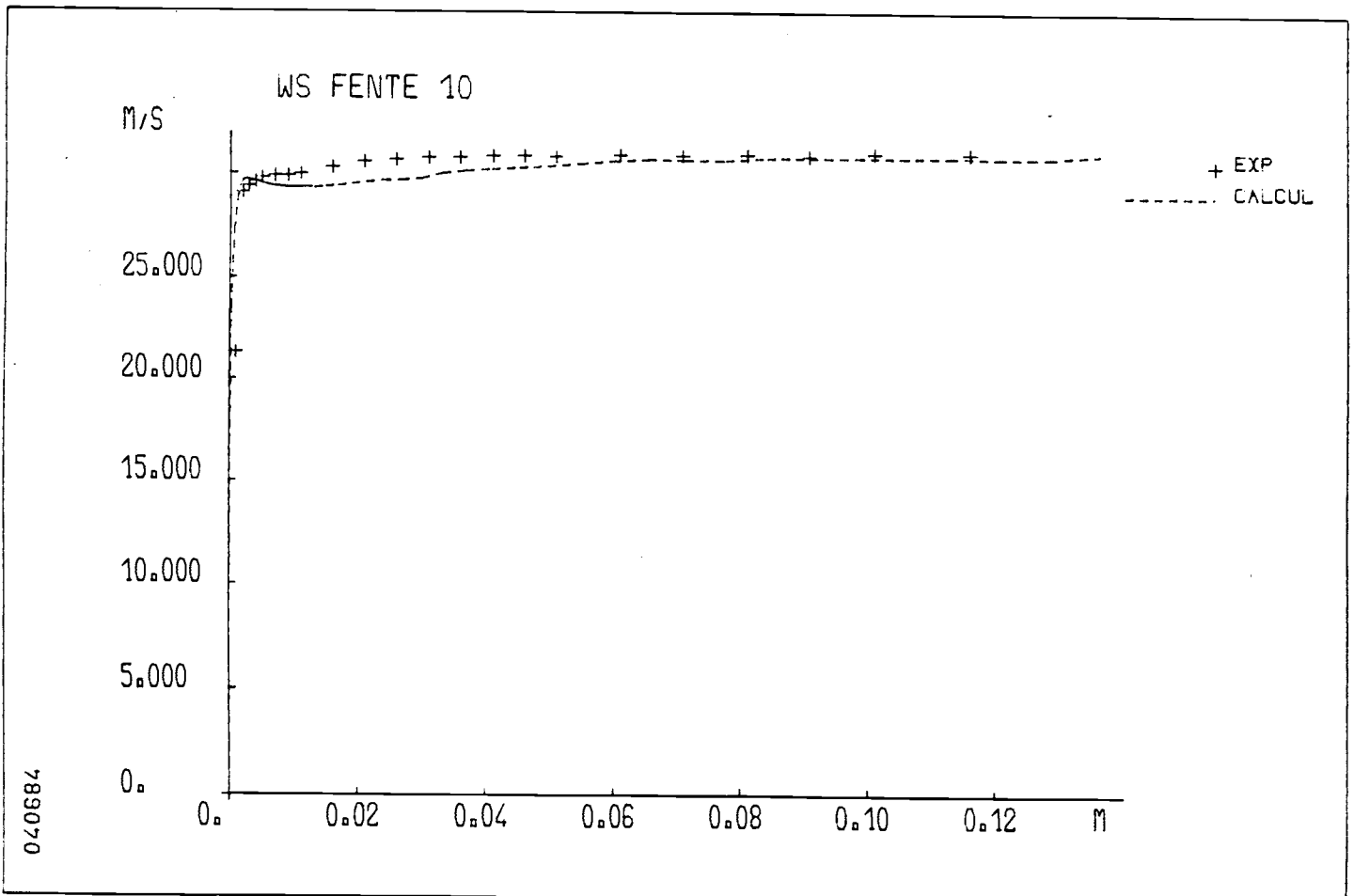


(d)

Figure 29. (contin.)

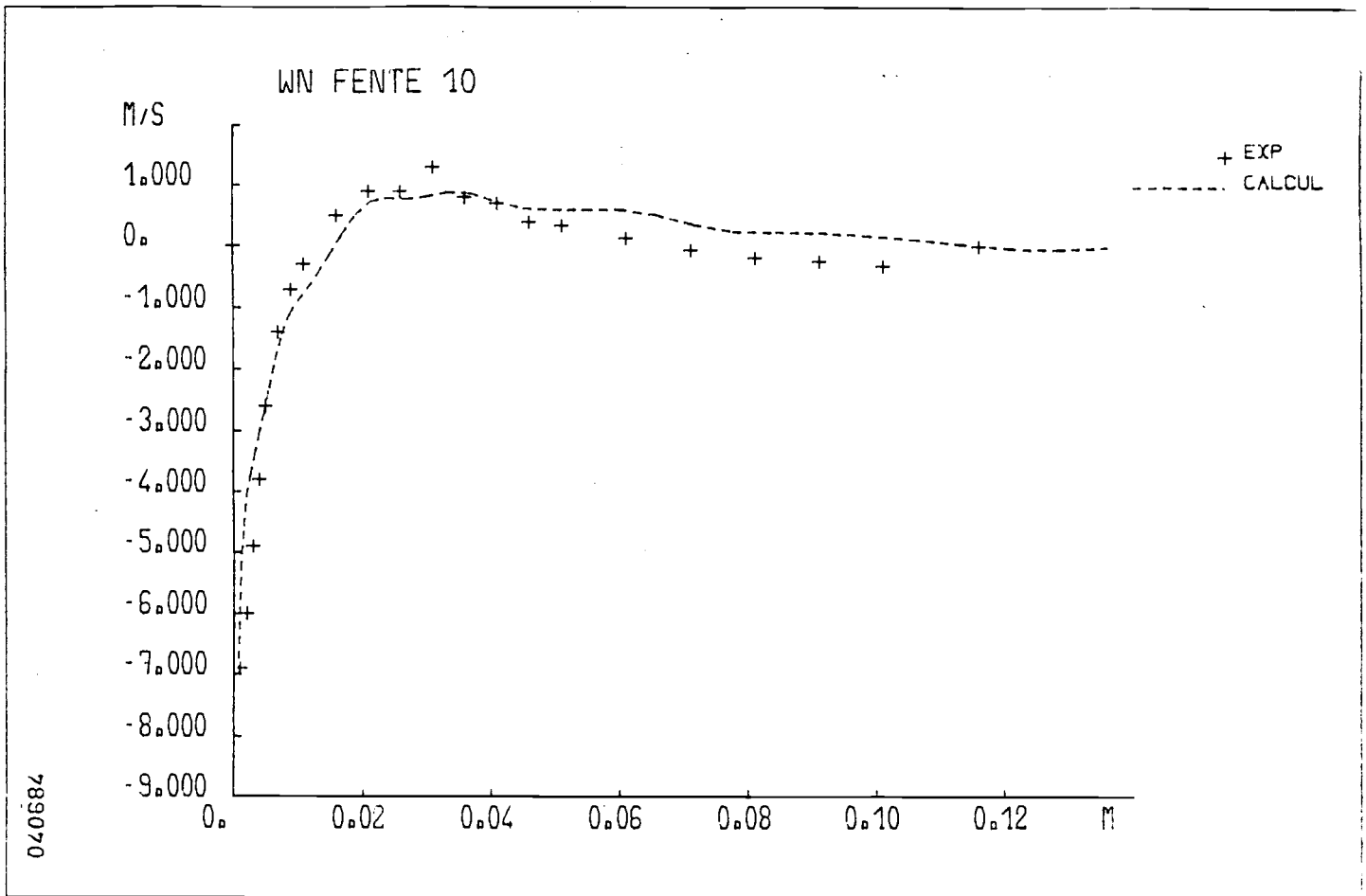


(a)

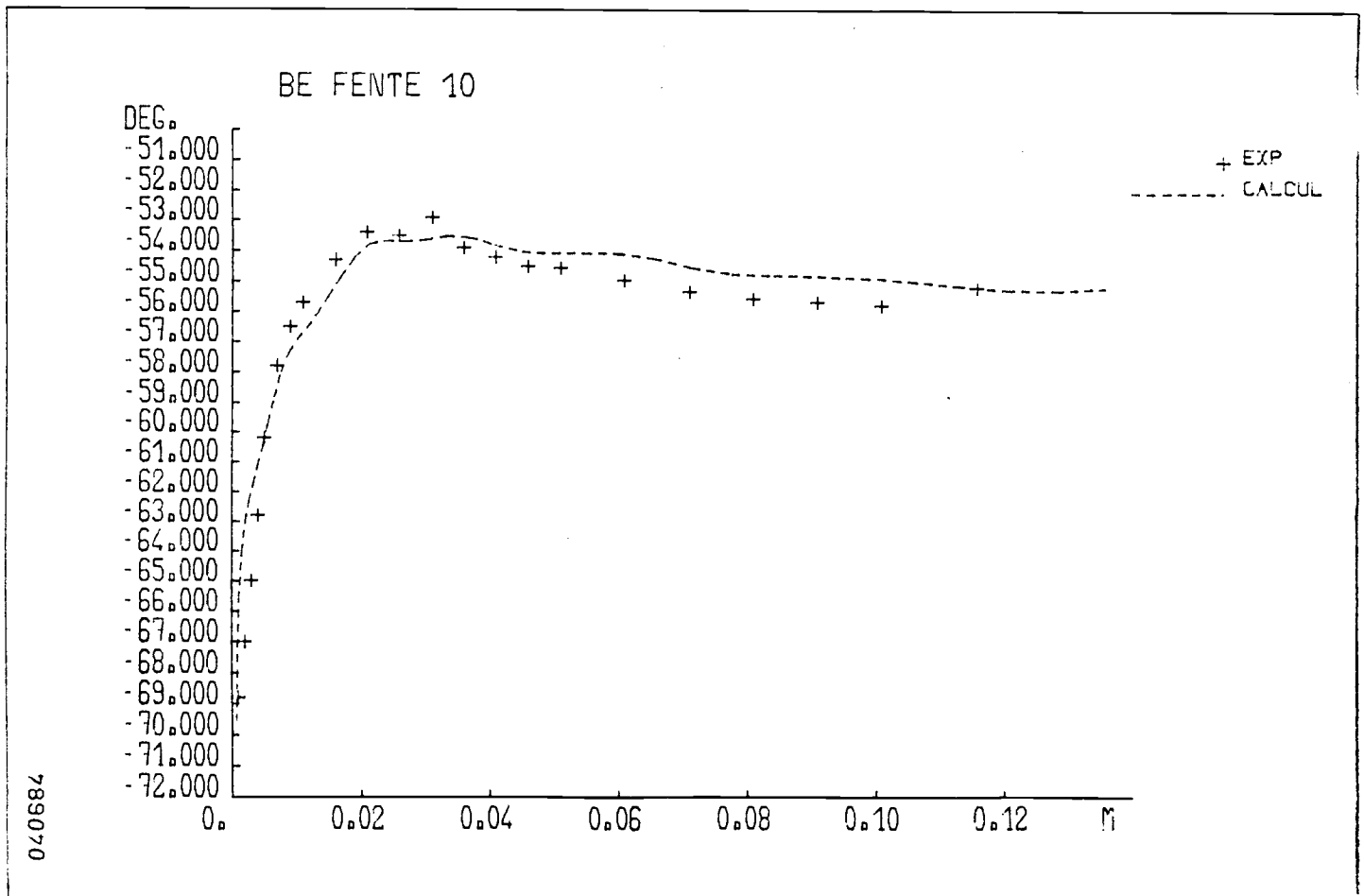


(b)

Figure 30.

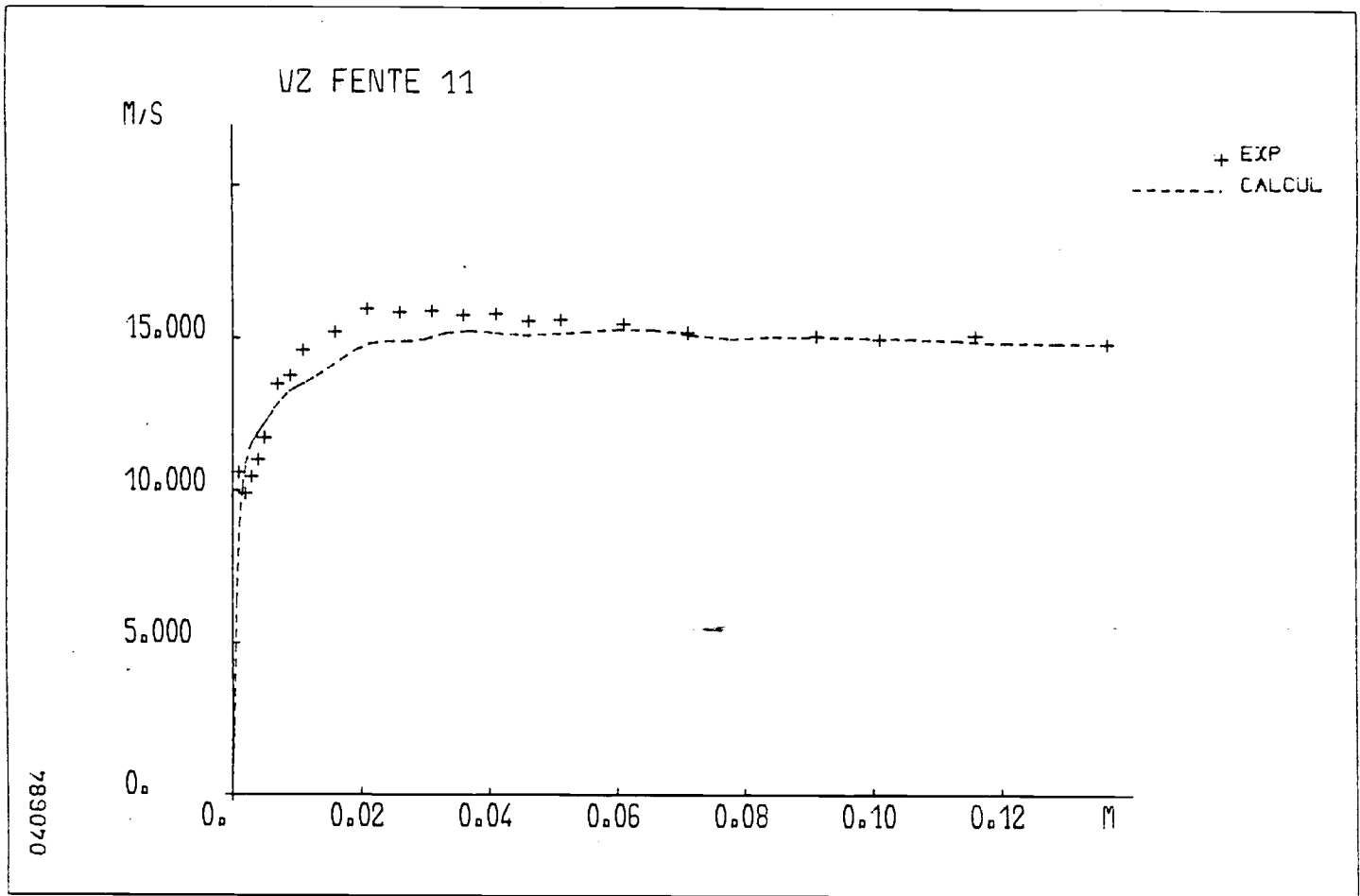


(c)

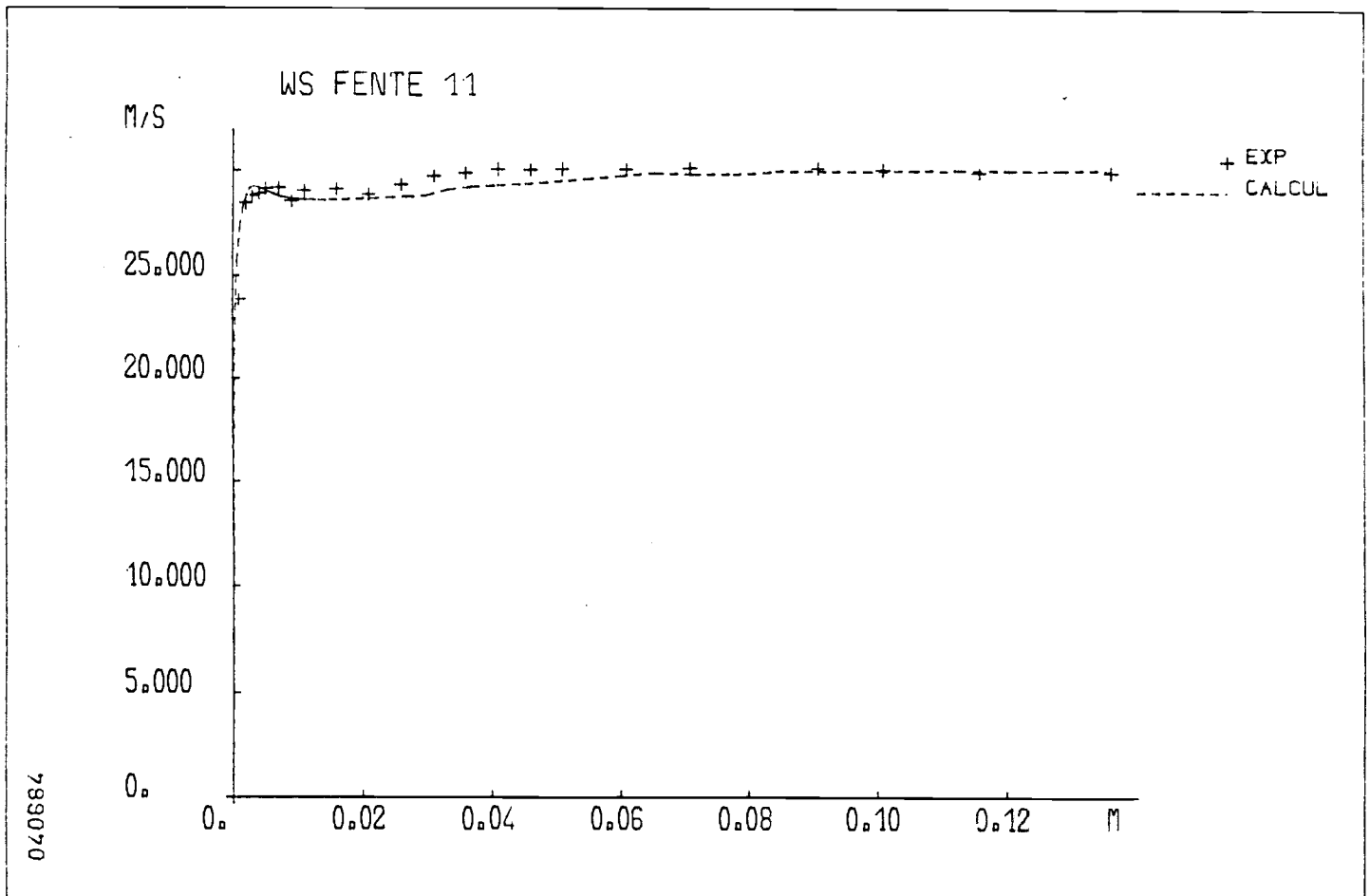


(d)

Figure 30. (contin.)

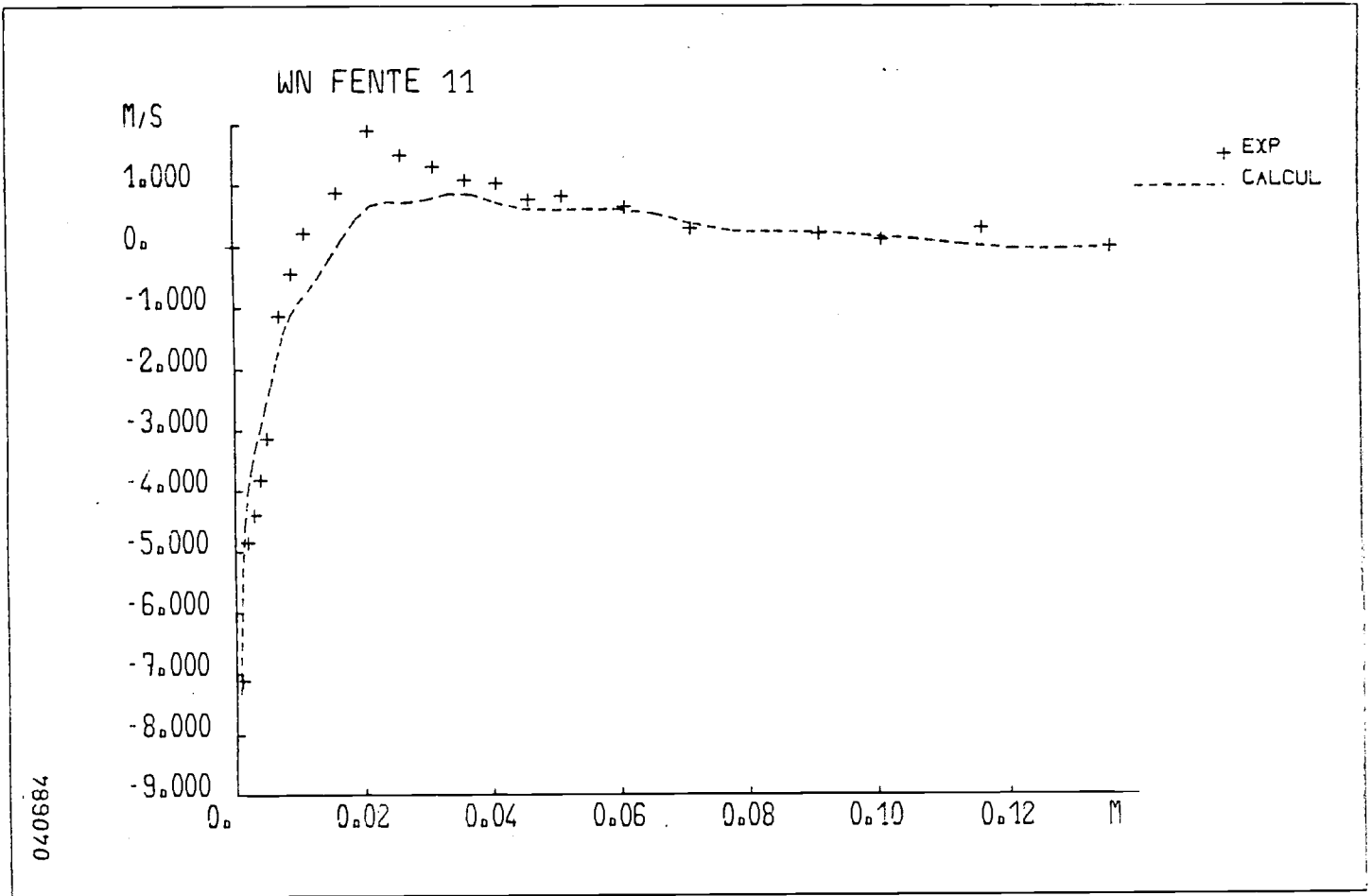


(a)

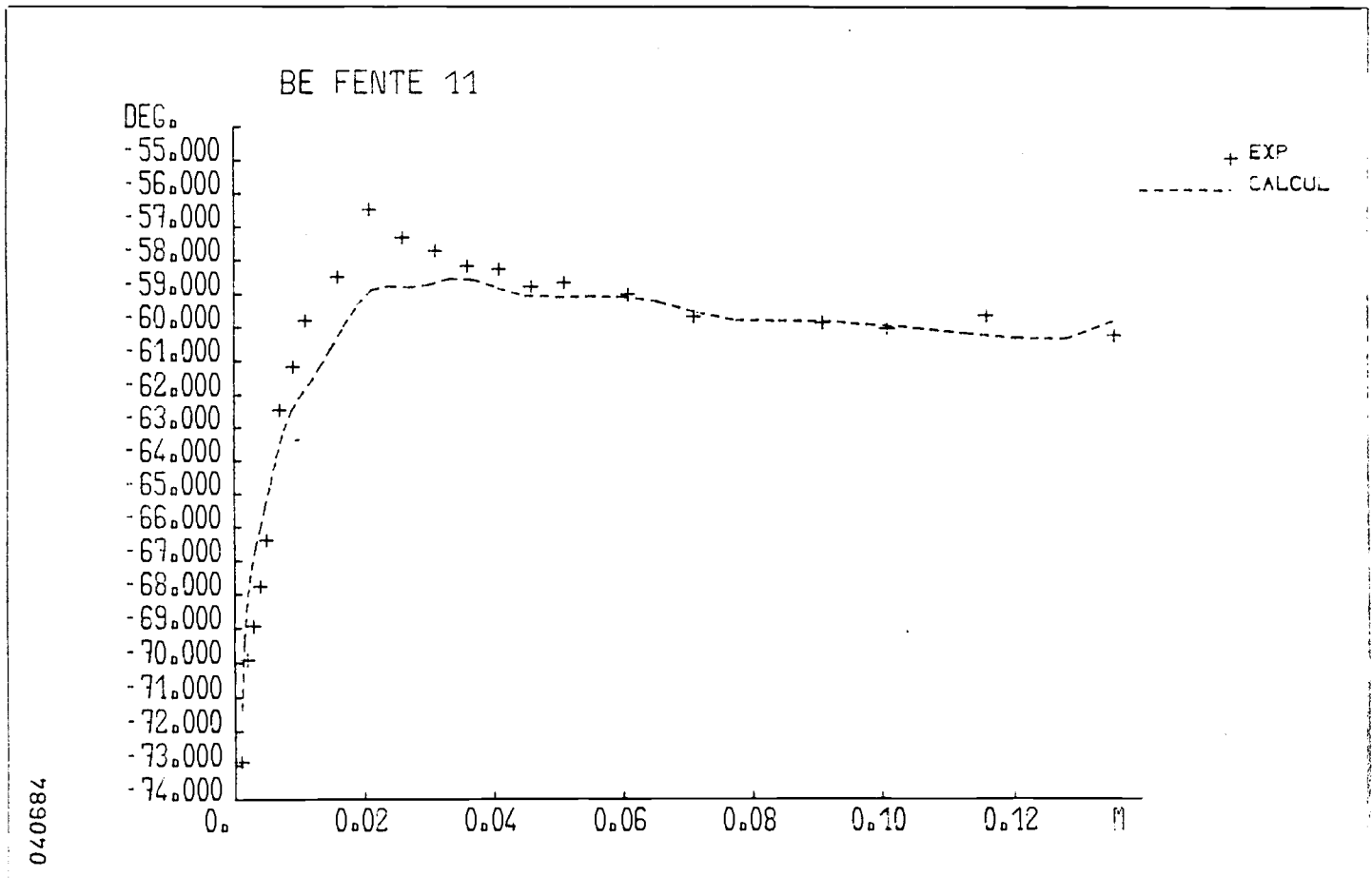


(b)

Figure 31.



(c)



(d)

Figure 31. (contin.)

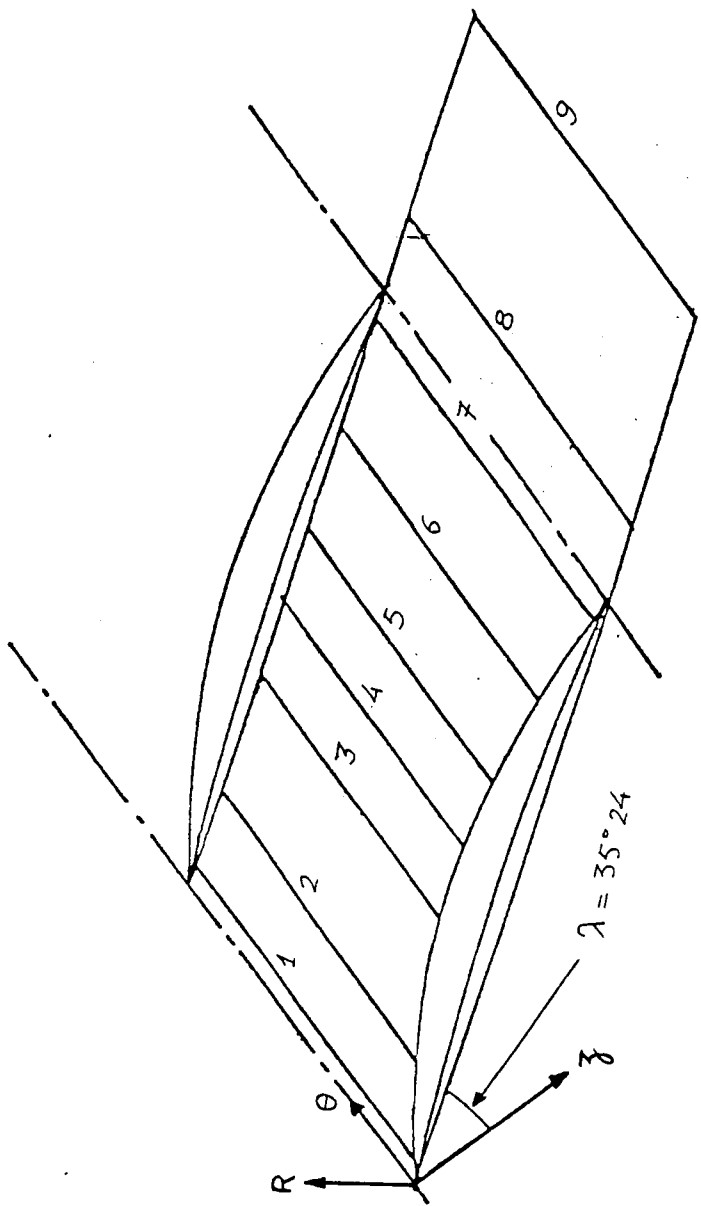


Figure 32. Grille compresseur

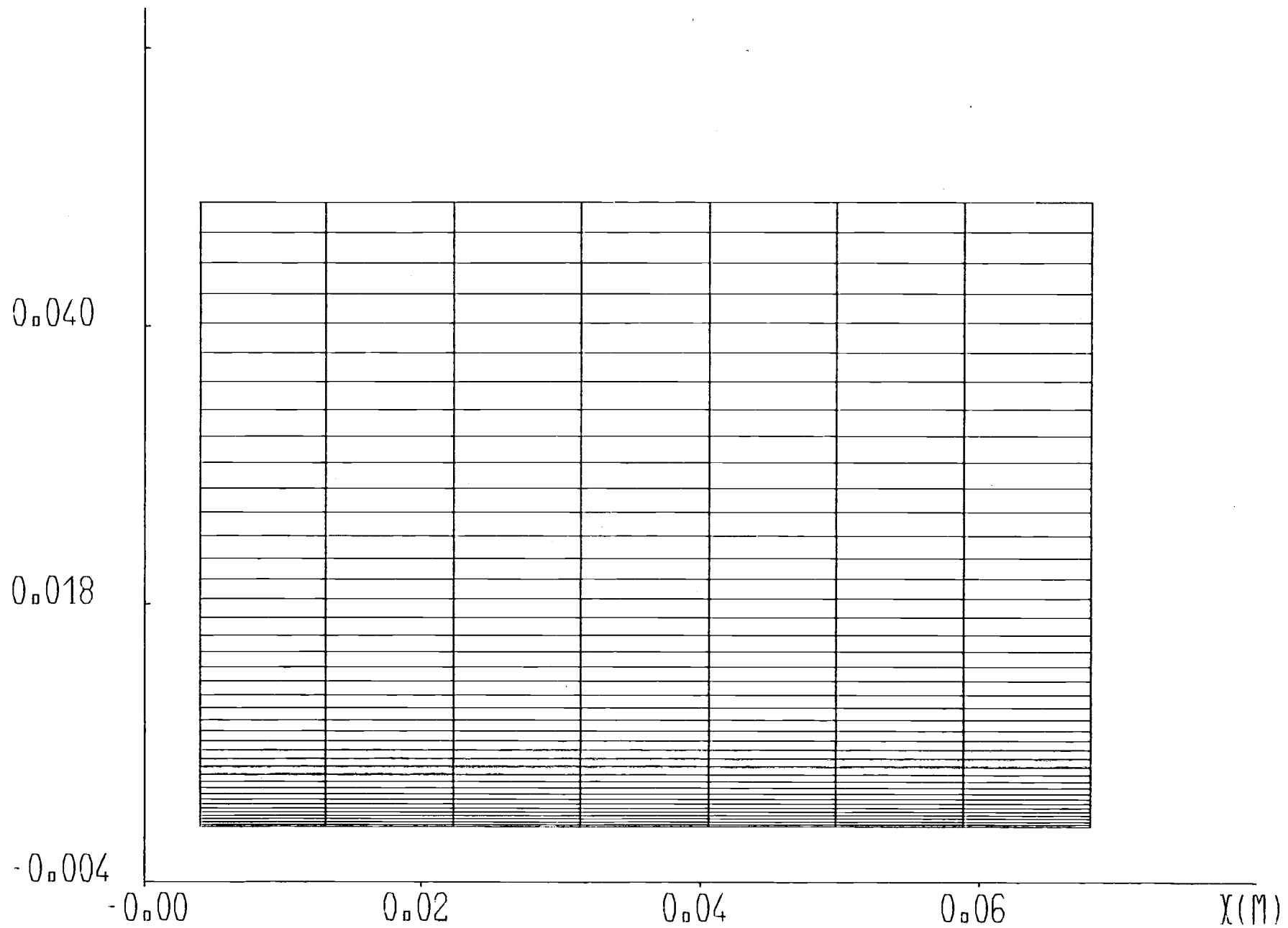
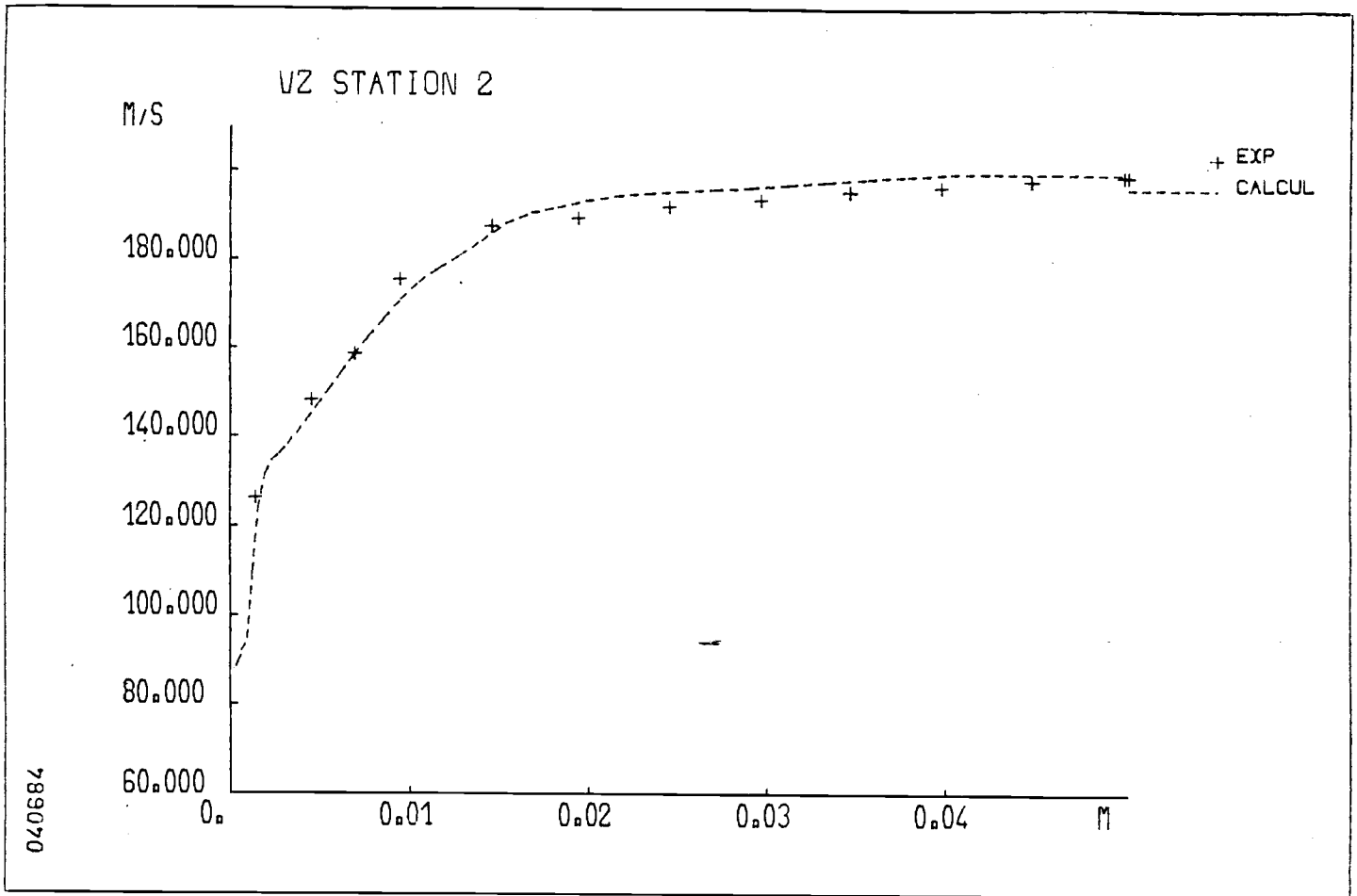
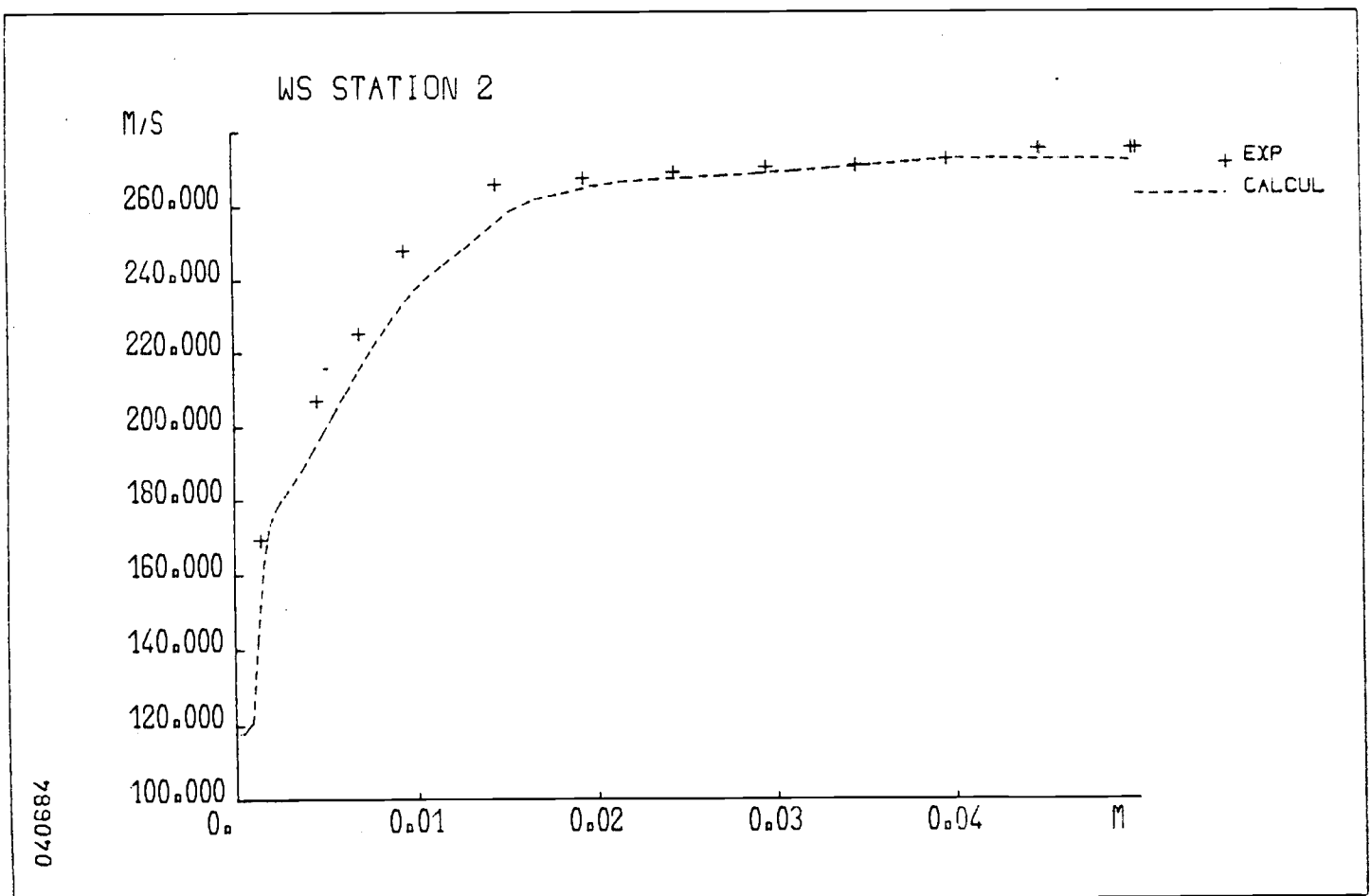


Figure 33. MAILLAGE GRILLE COMPRESSEUR (8 X 42)

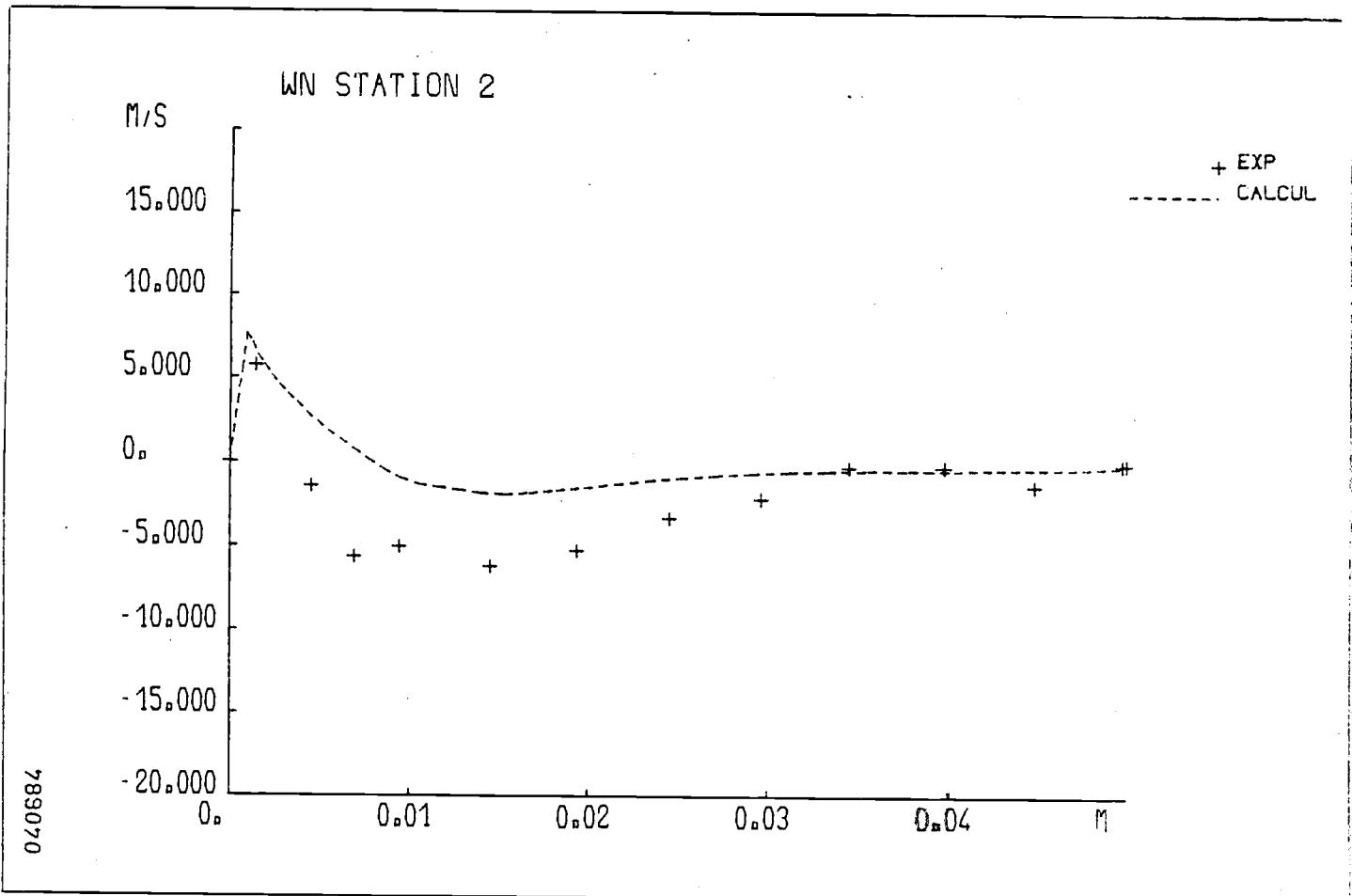


(a)

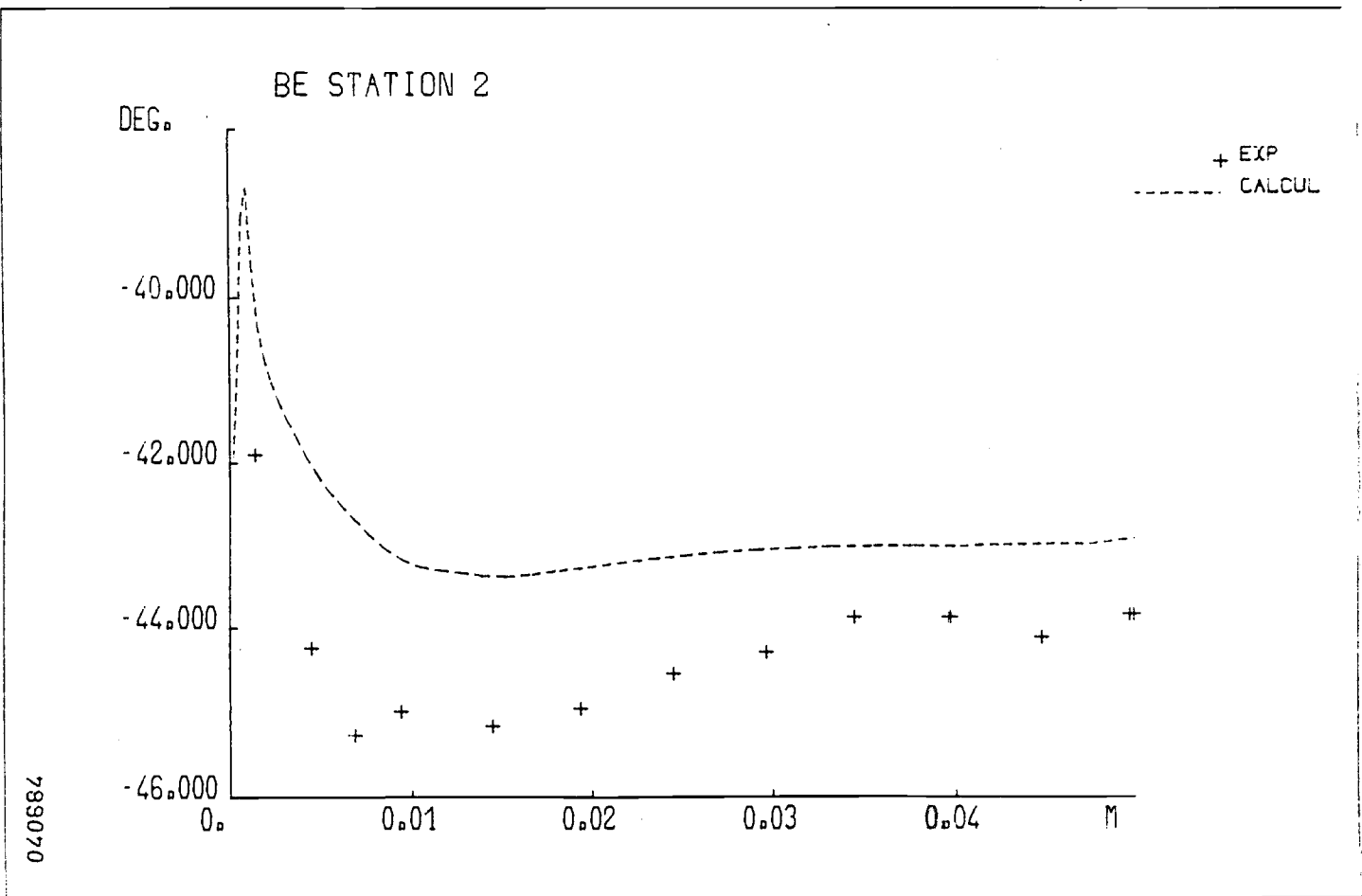


(b)

Figure 34.

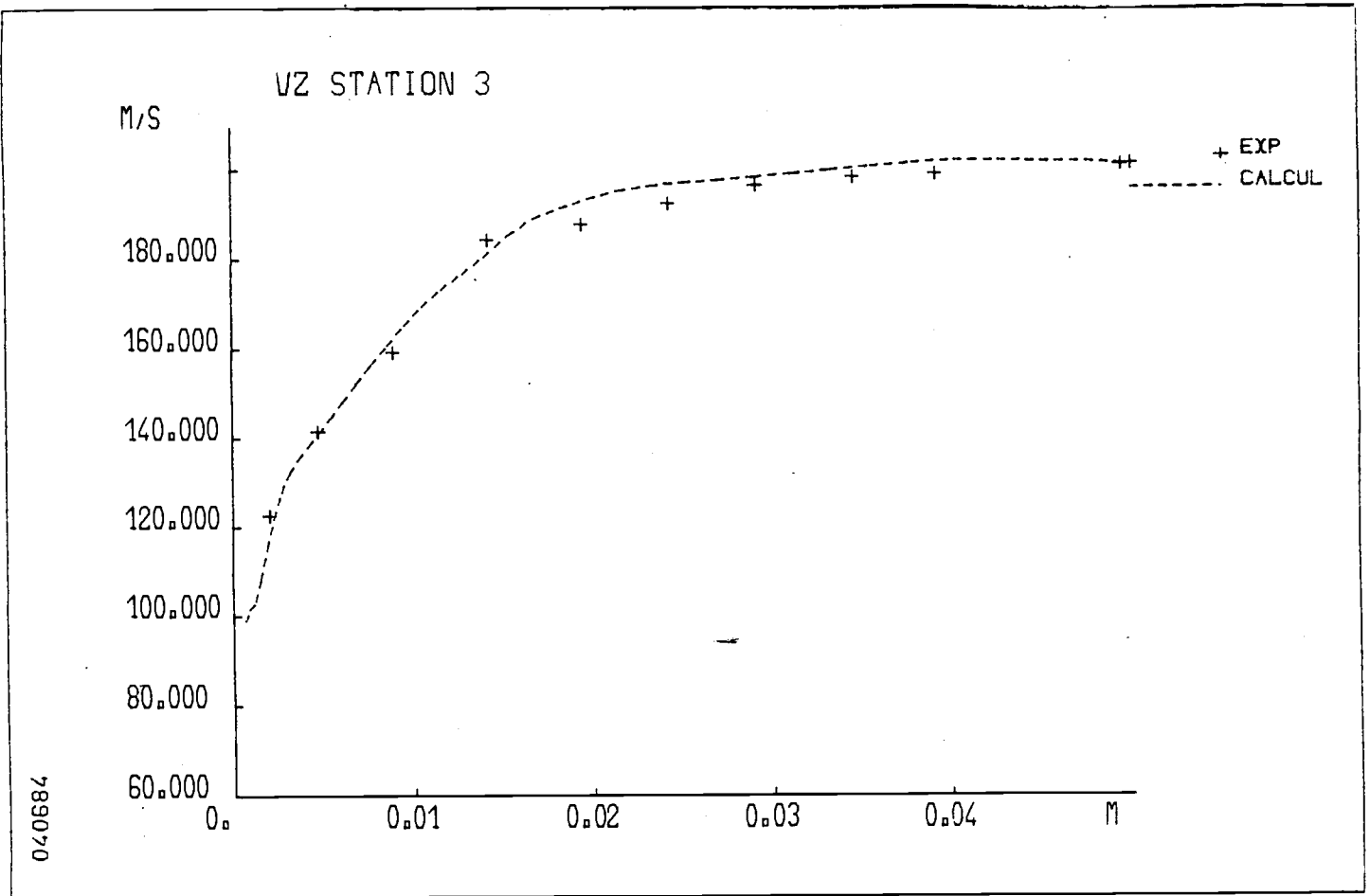


(c)

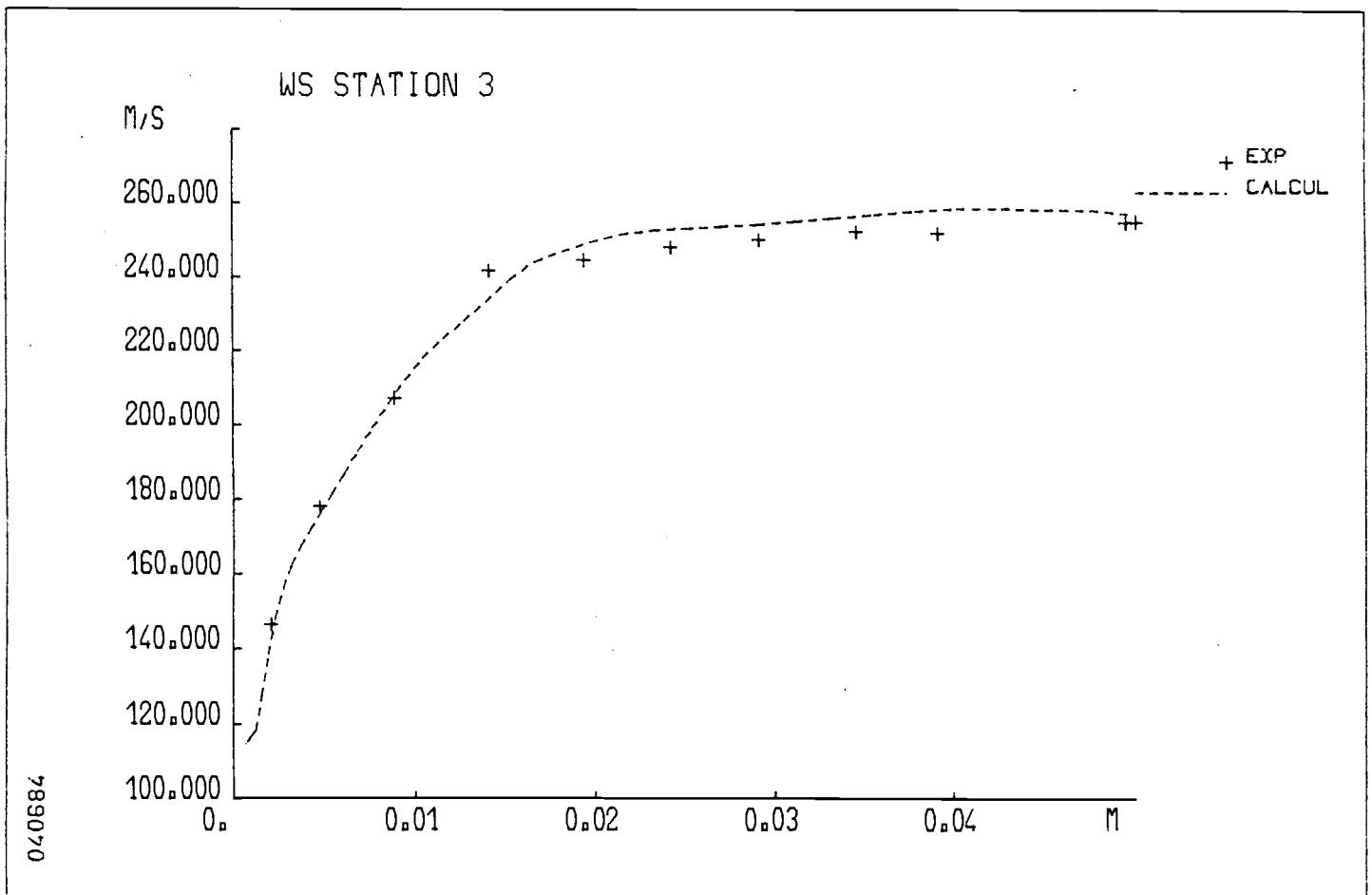


(d)

Figure 34. (contin.)

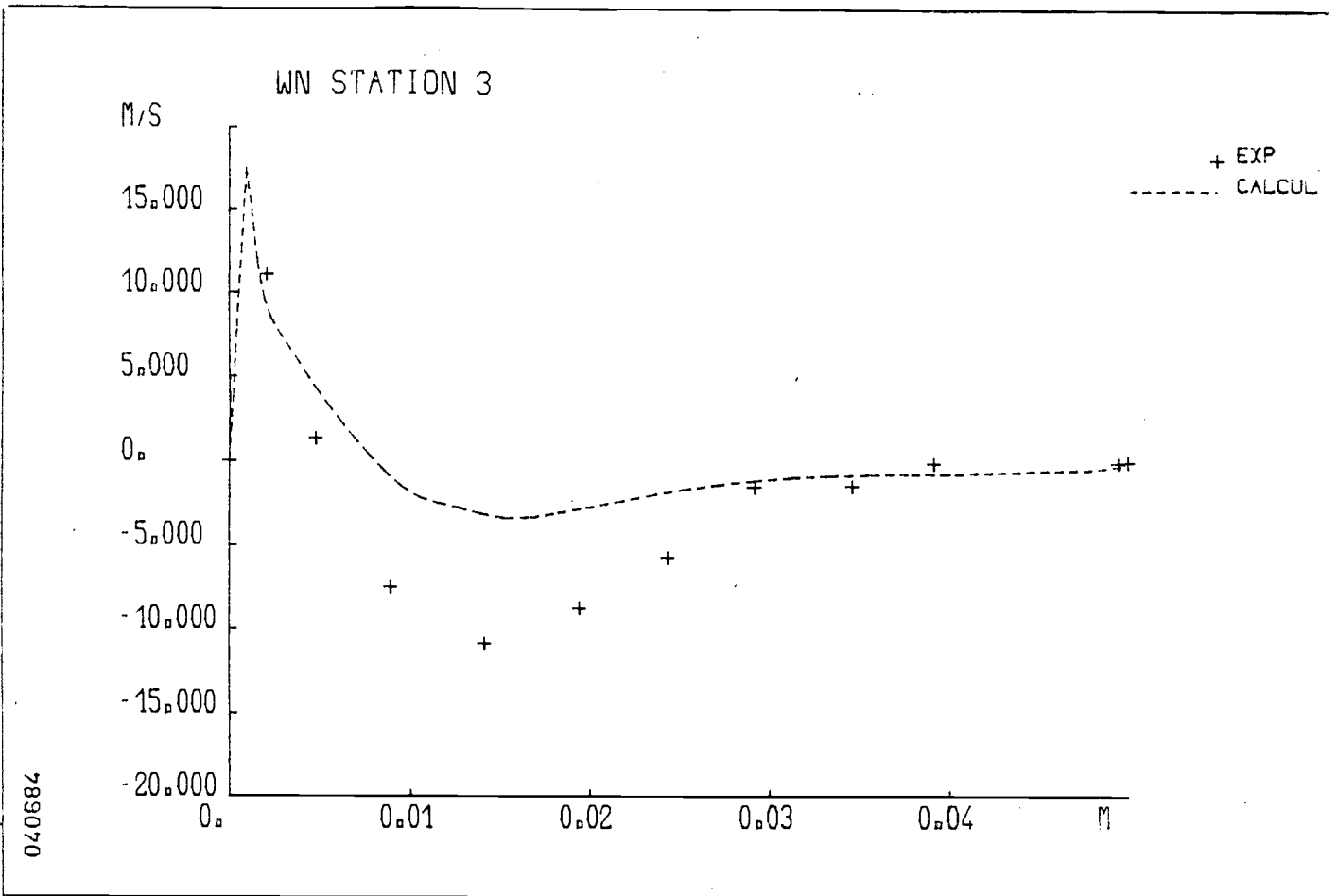


(a)

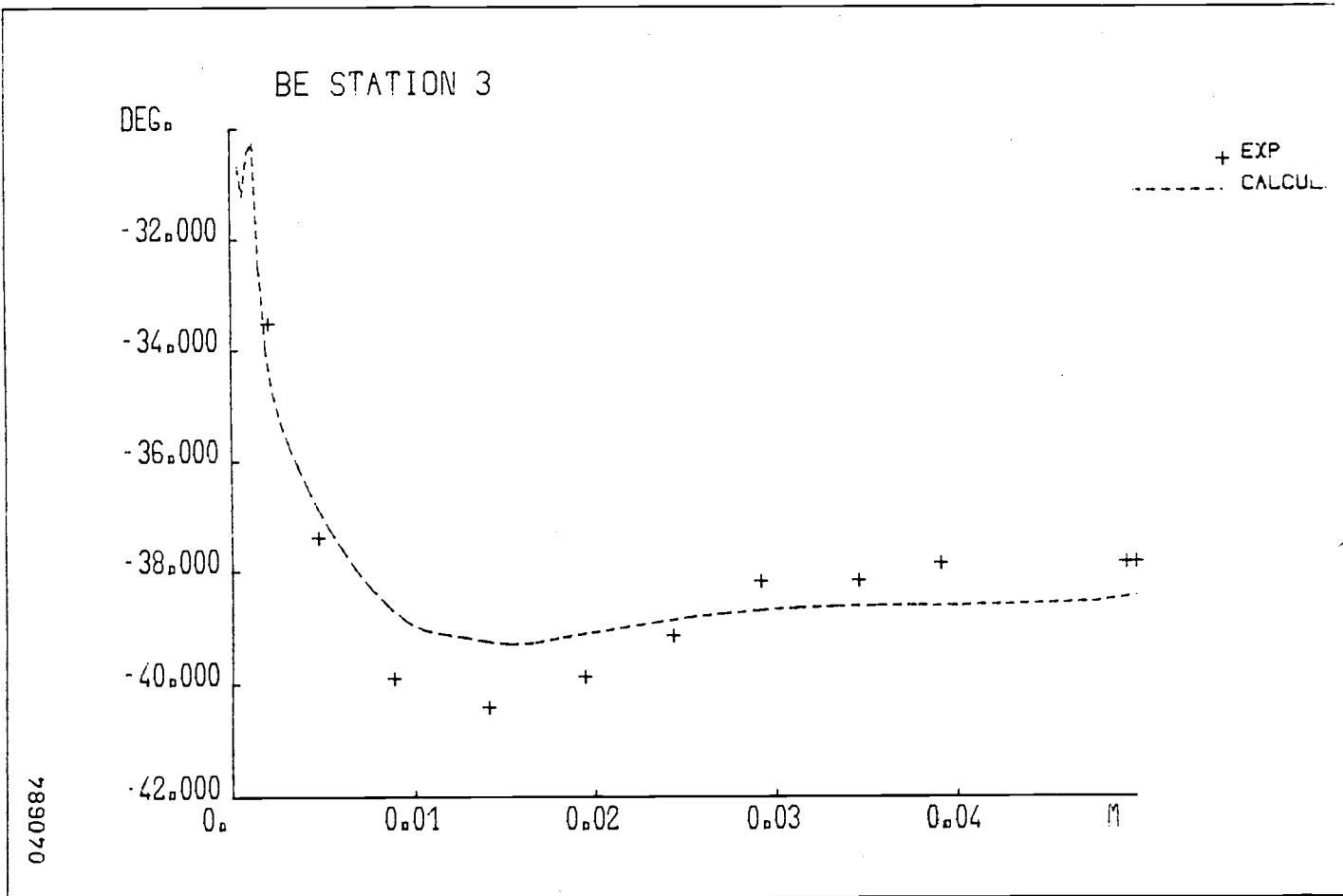


(b)

Figure 35.

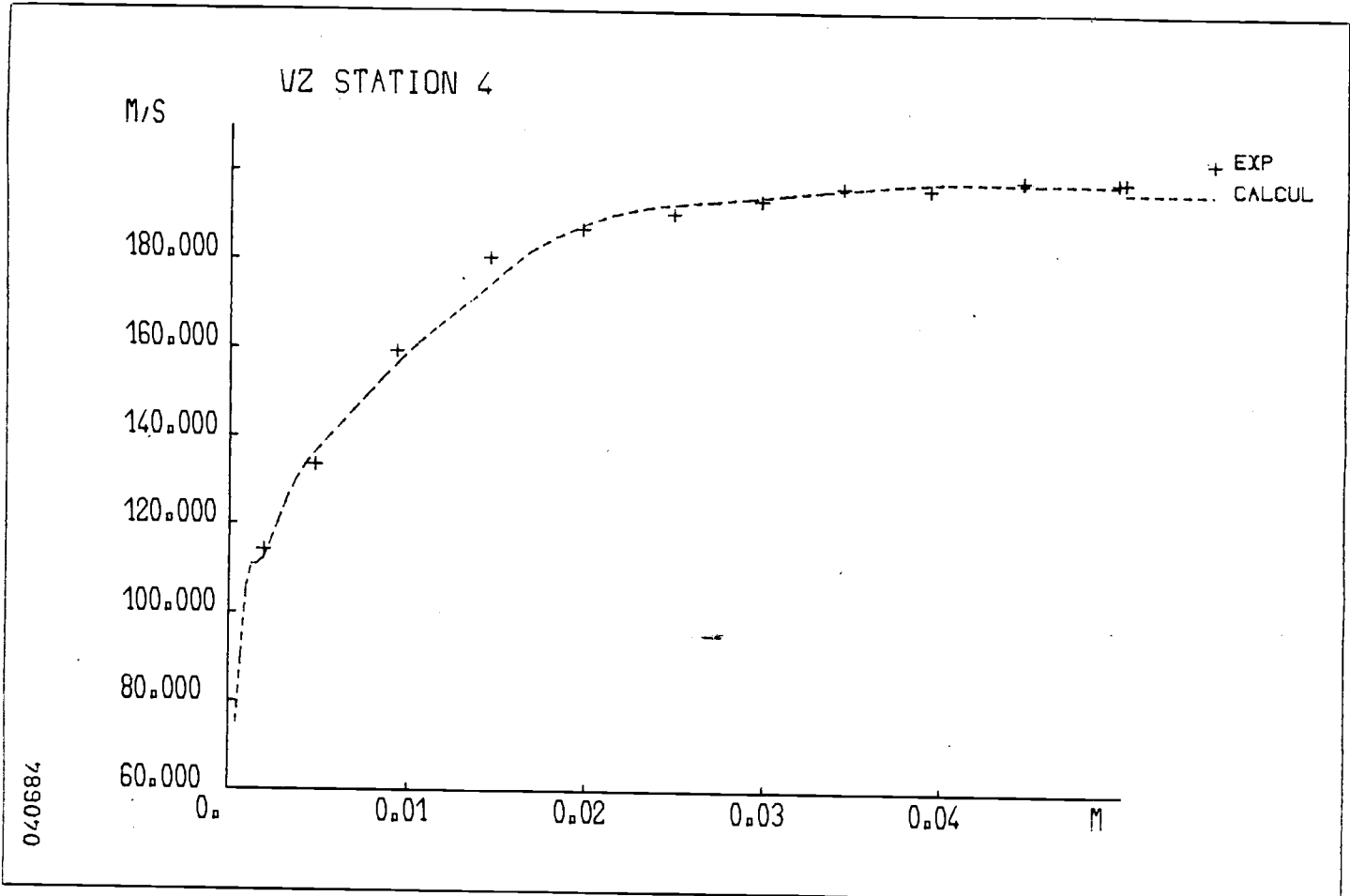


(c)

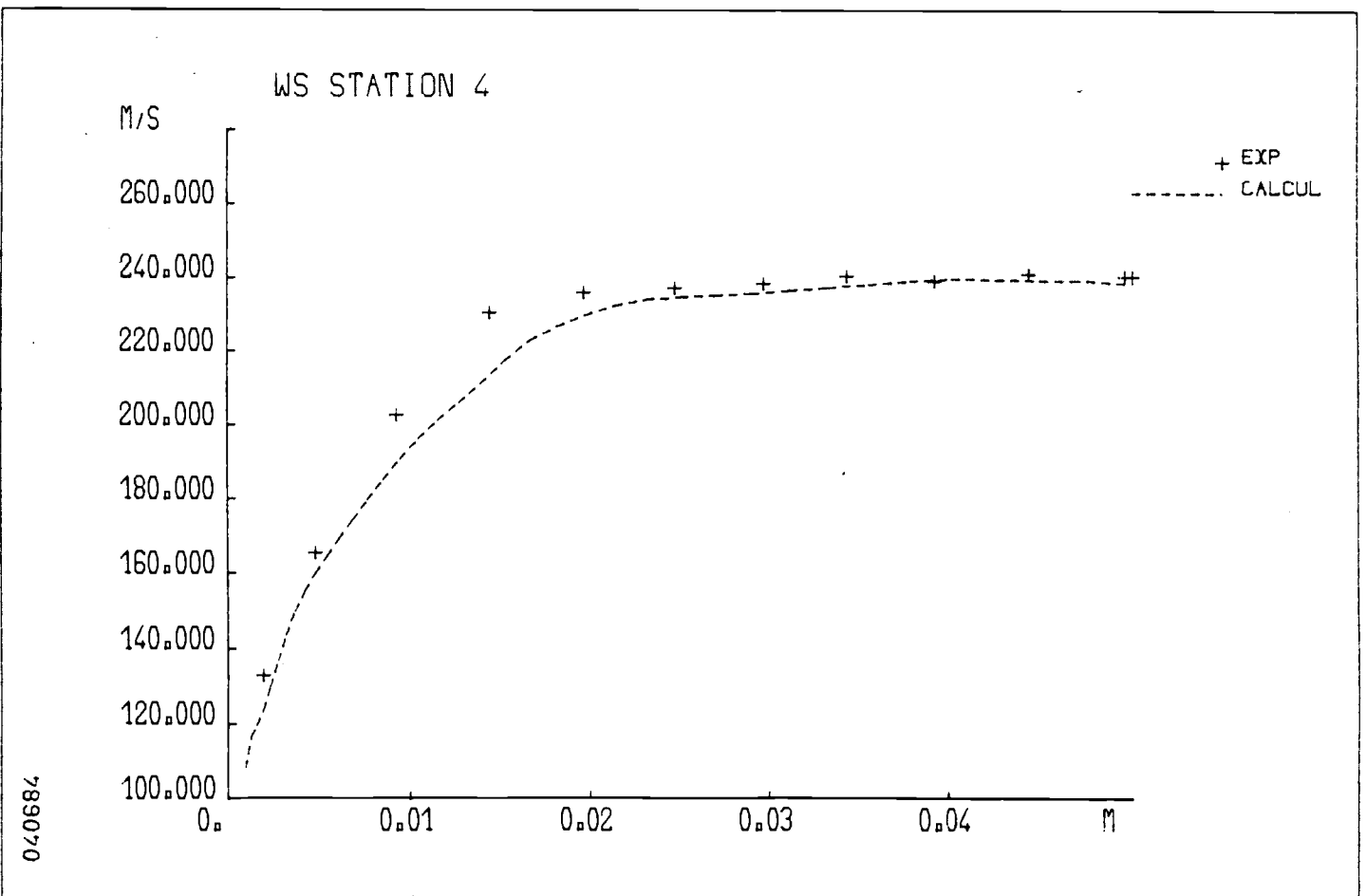


(d)

Fig. 10.10.10

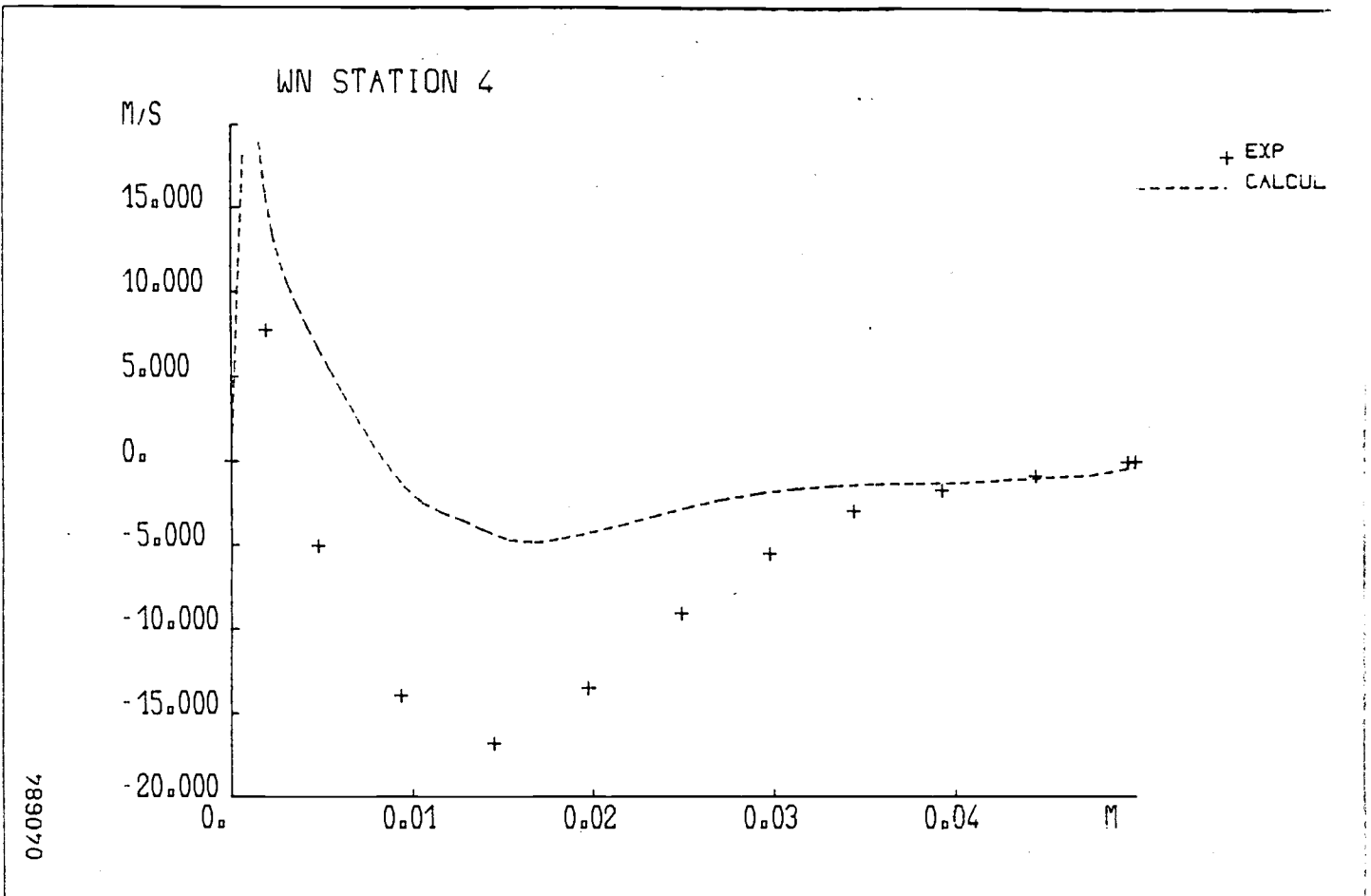


(a)

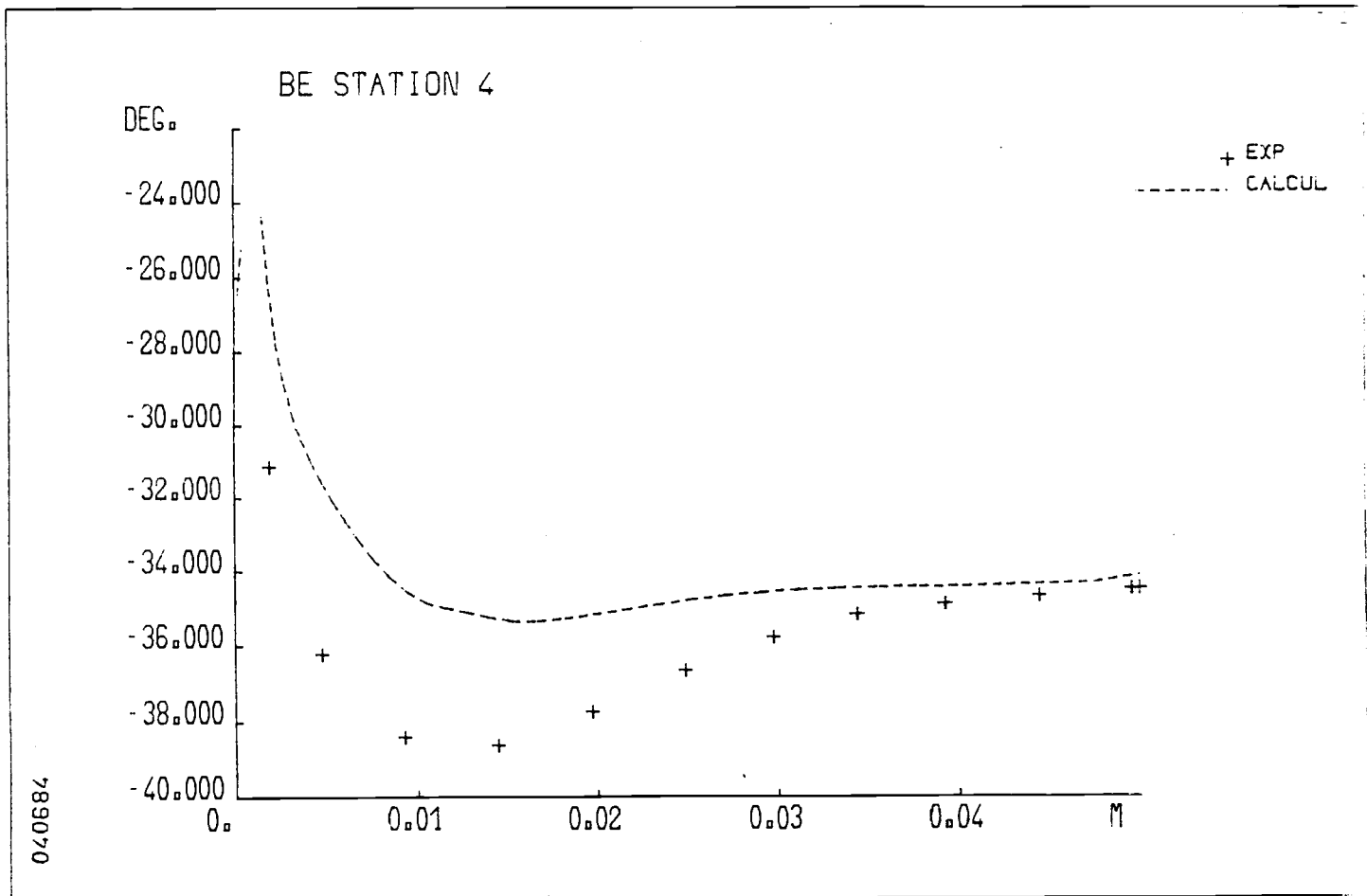


(b)

Figure 36.

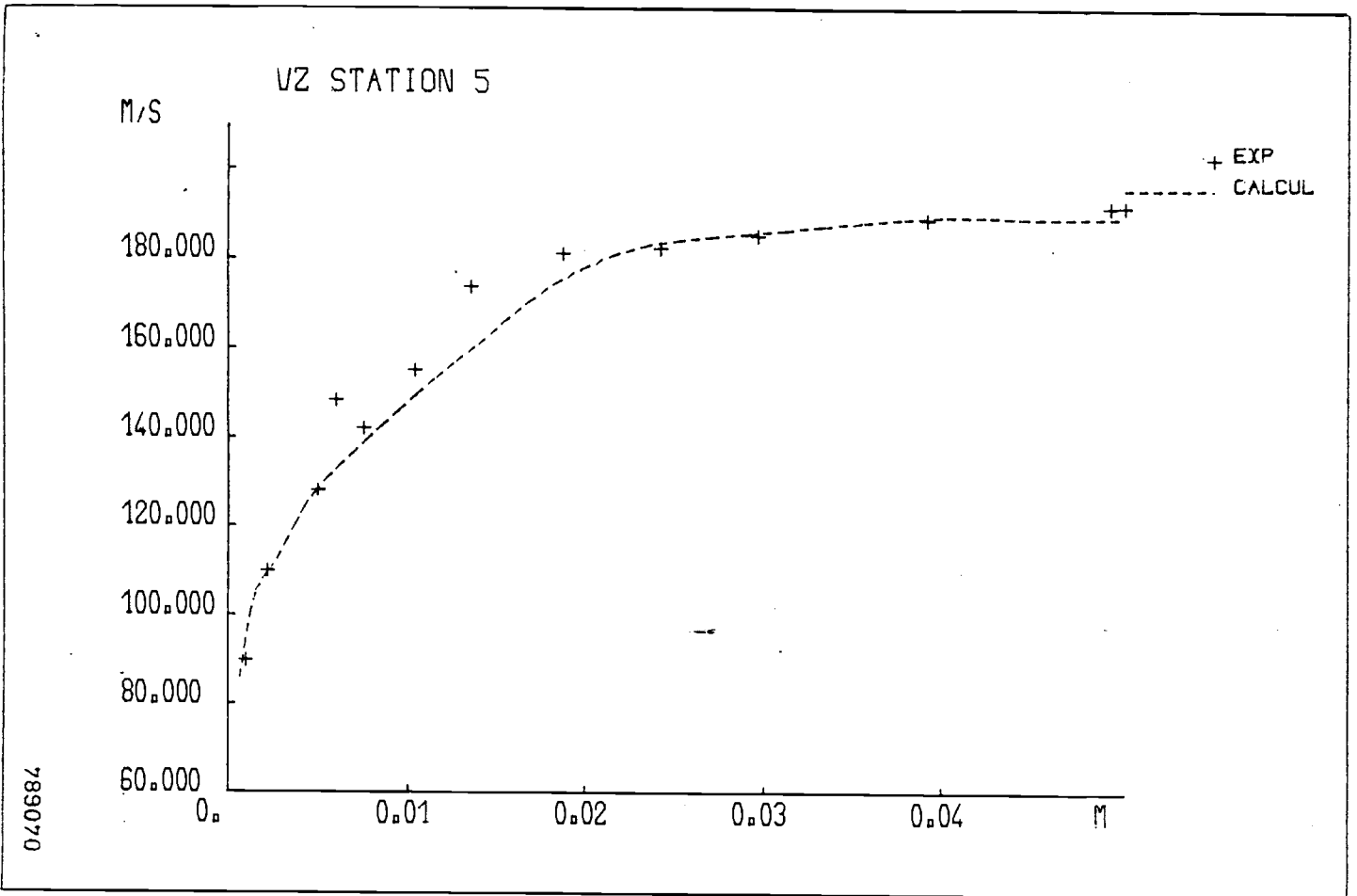


(c)

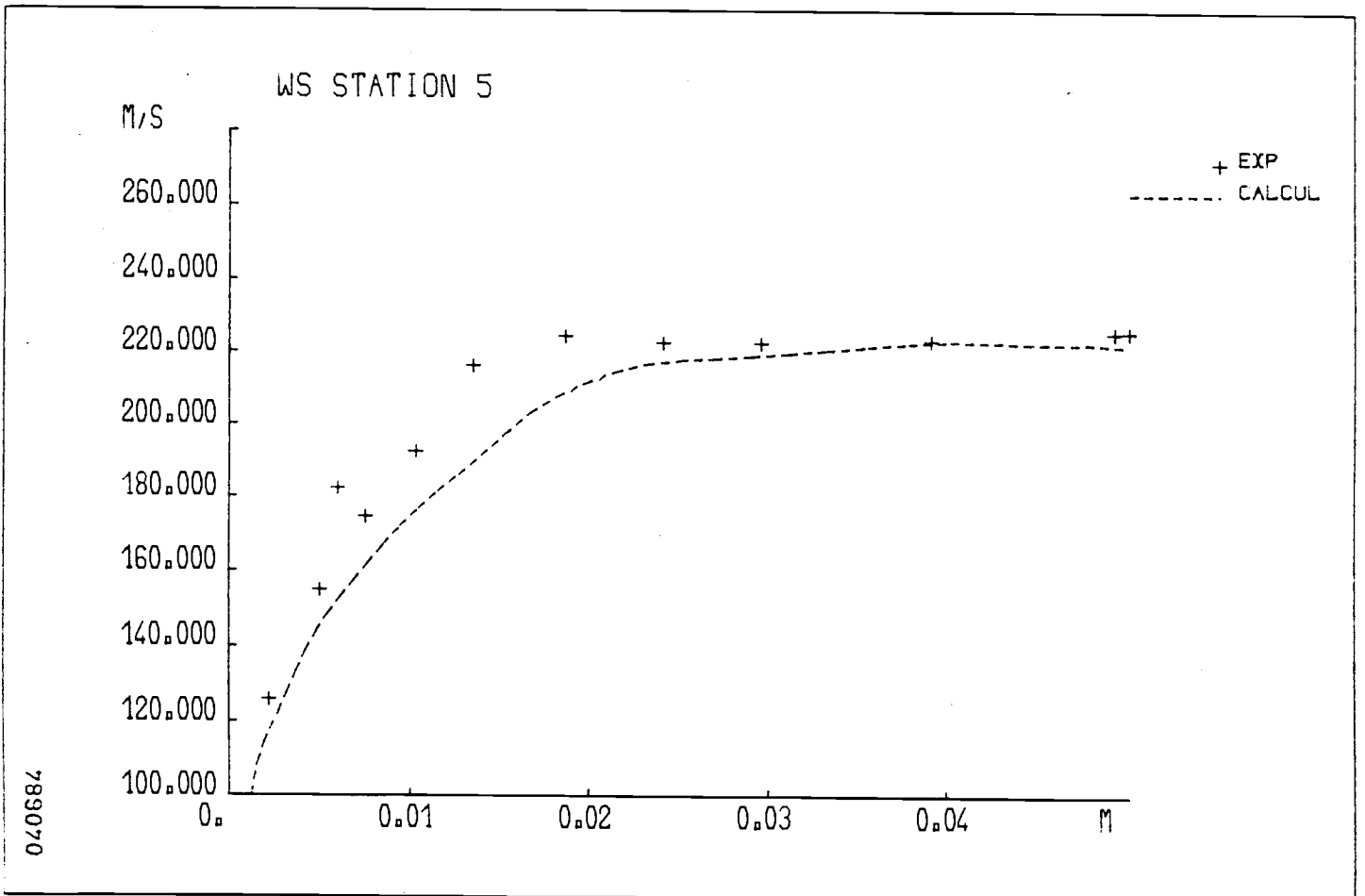


(d)

Figure 36. (contin.)

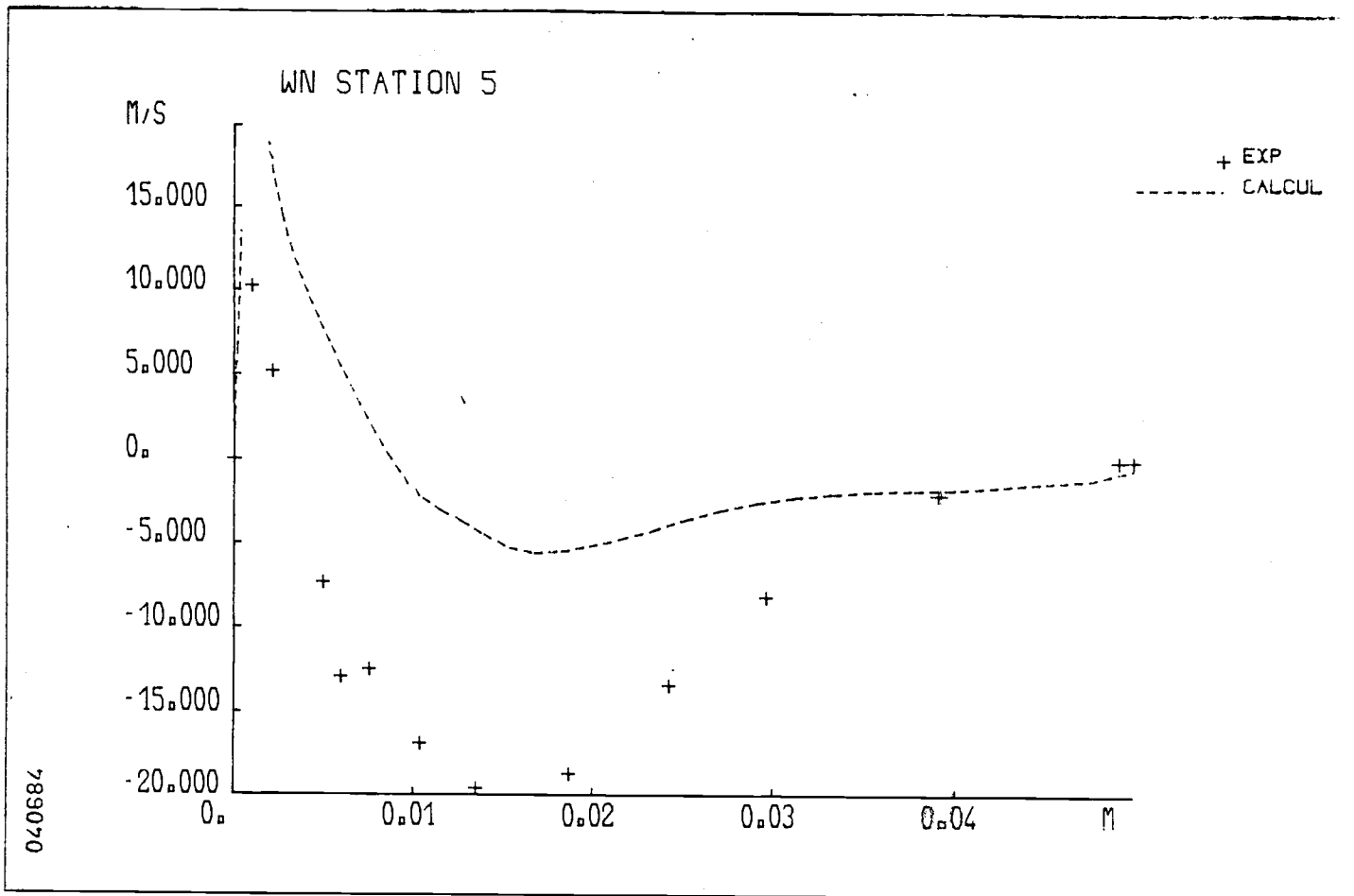


(a)

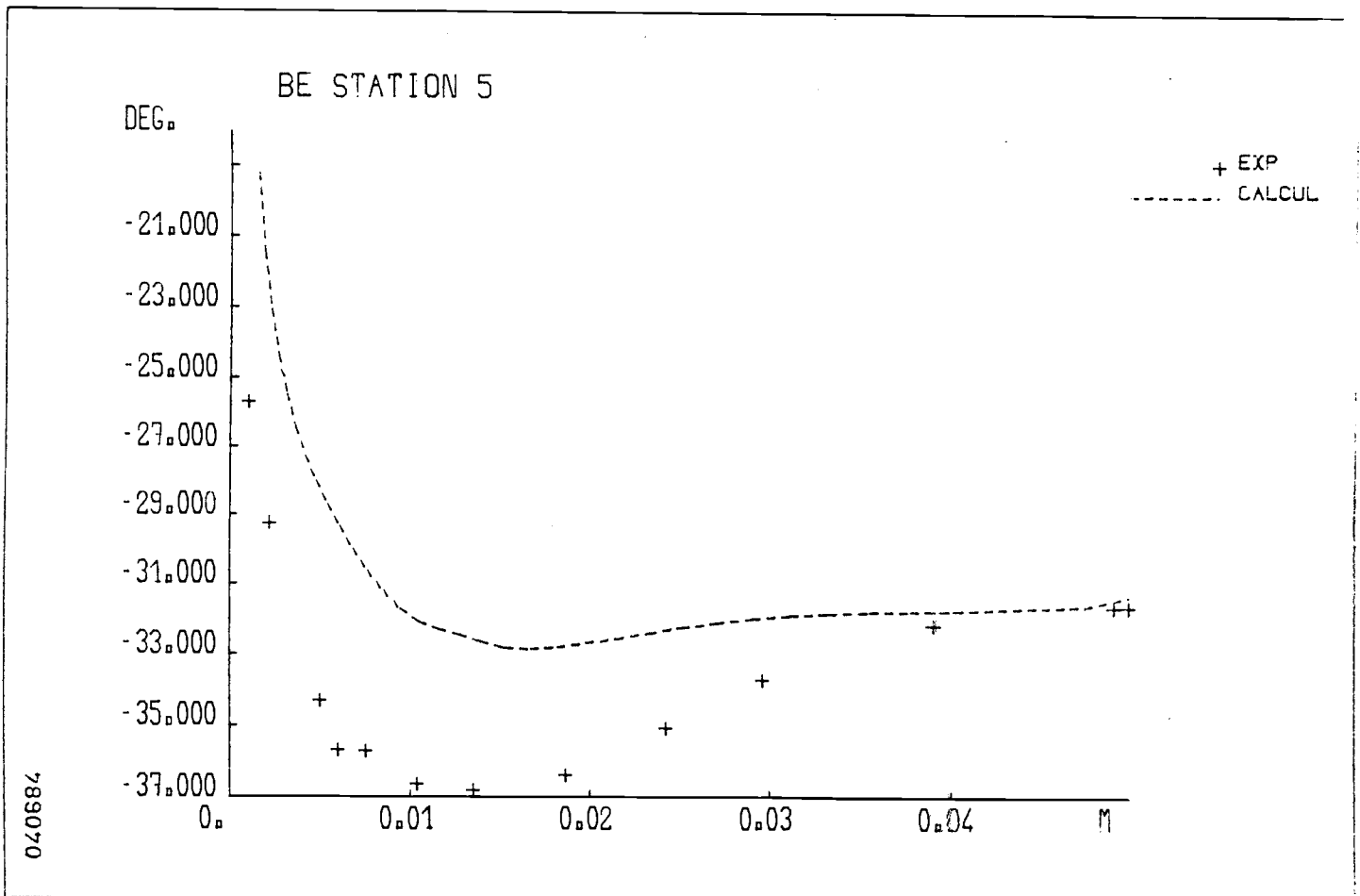


(b)

Figure 37.

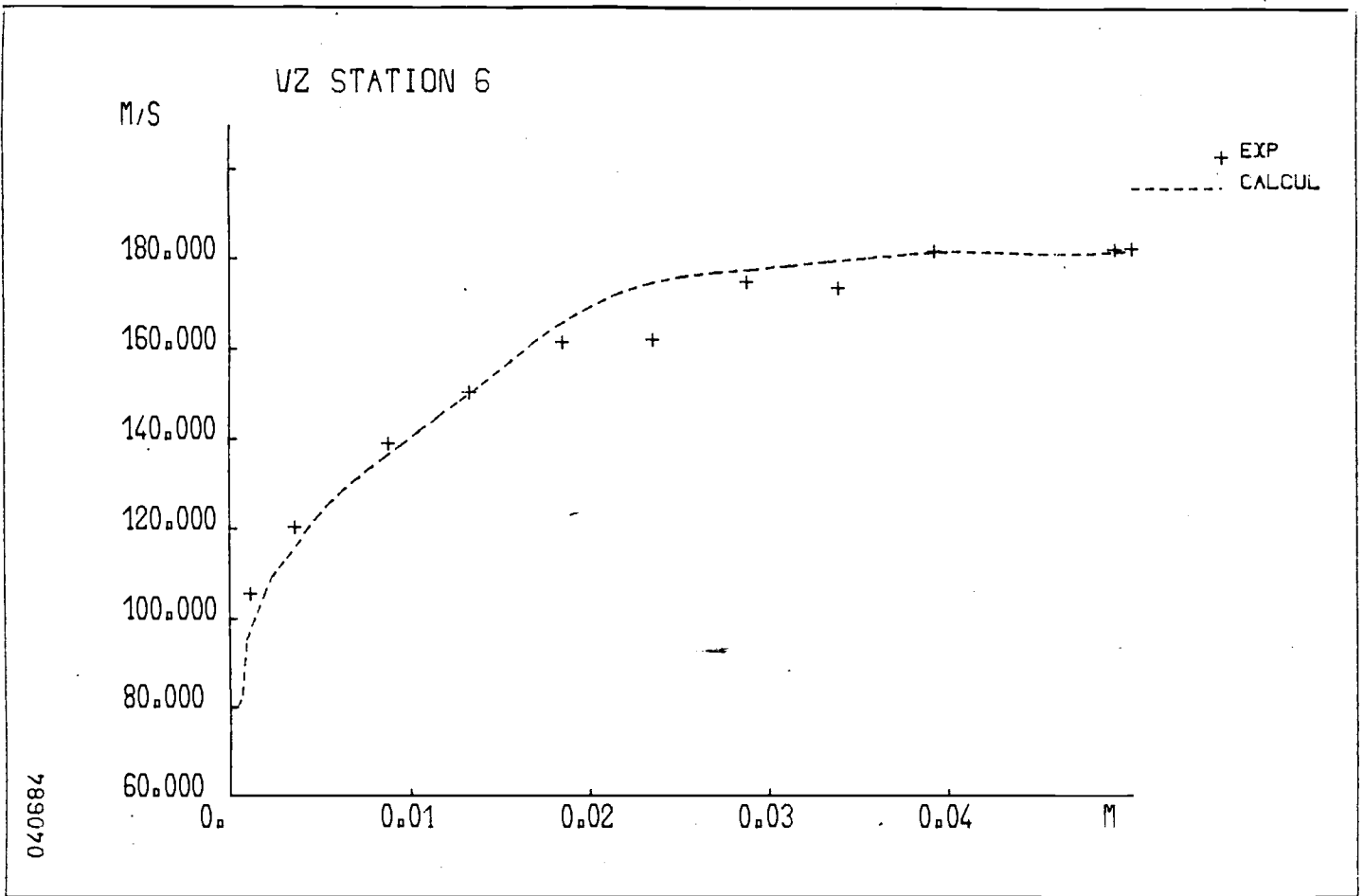


(c)

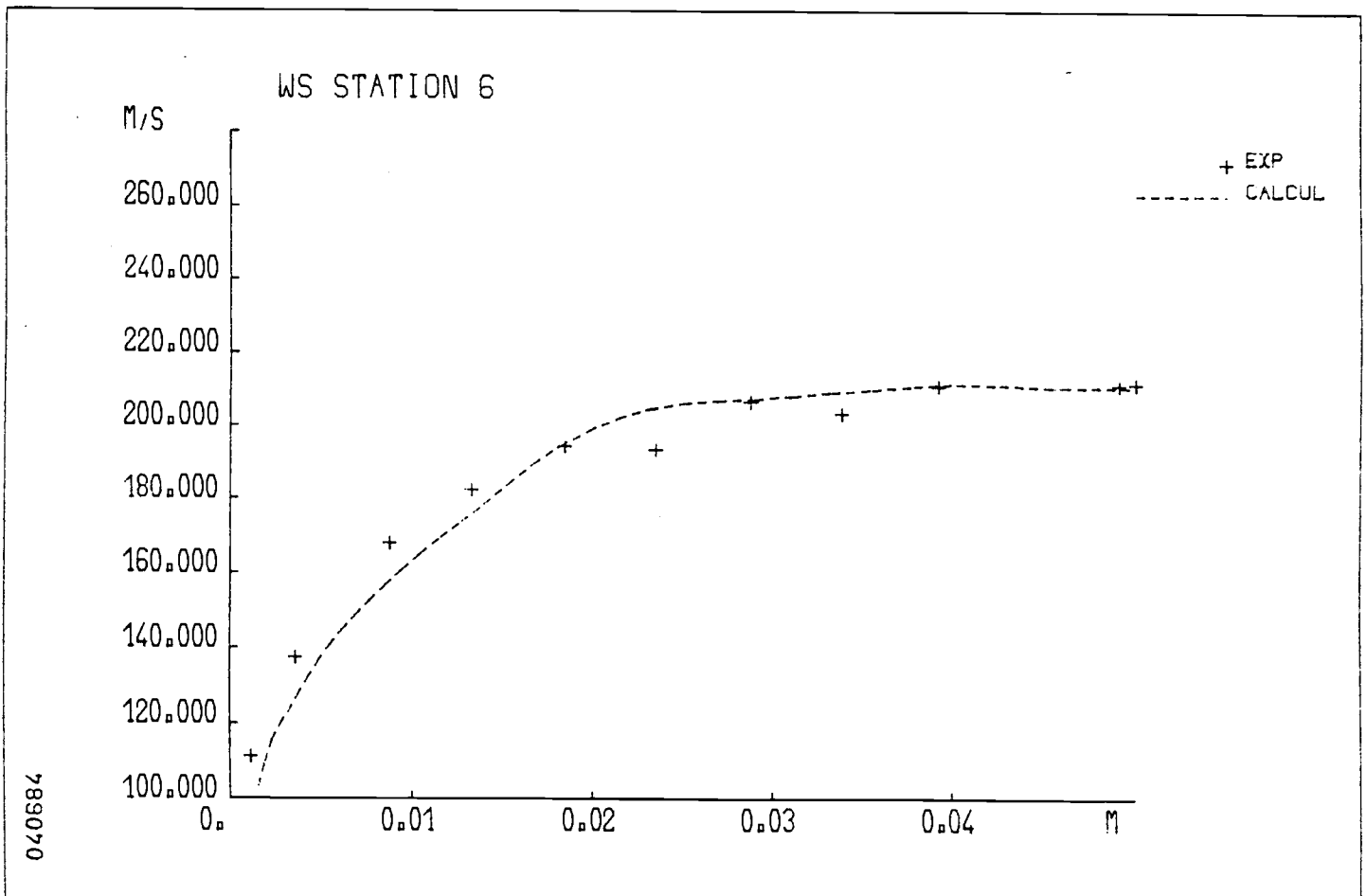


(d)

Figure 37. (contin.)

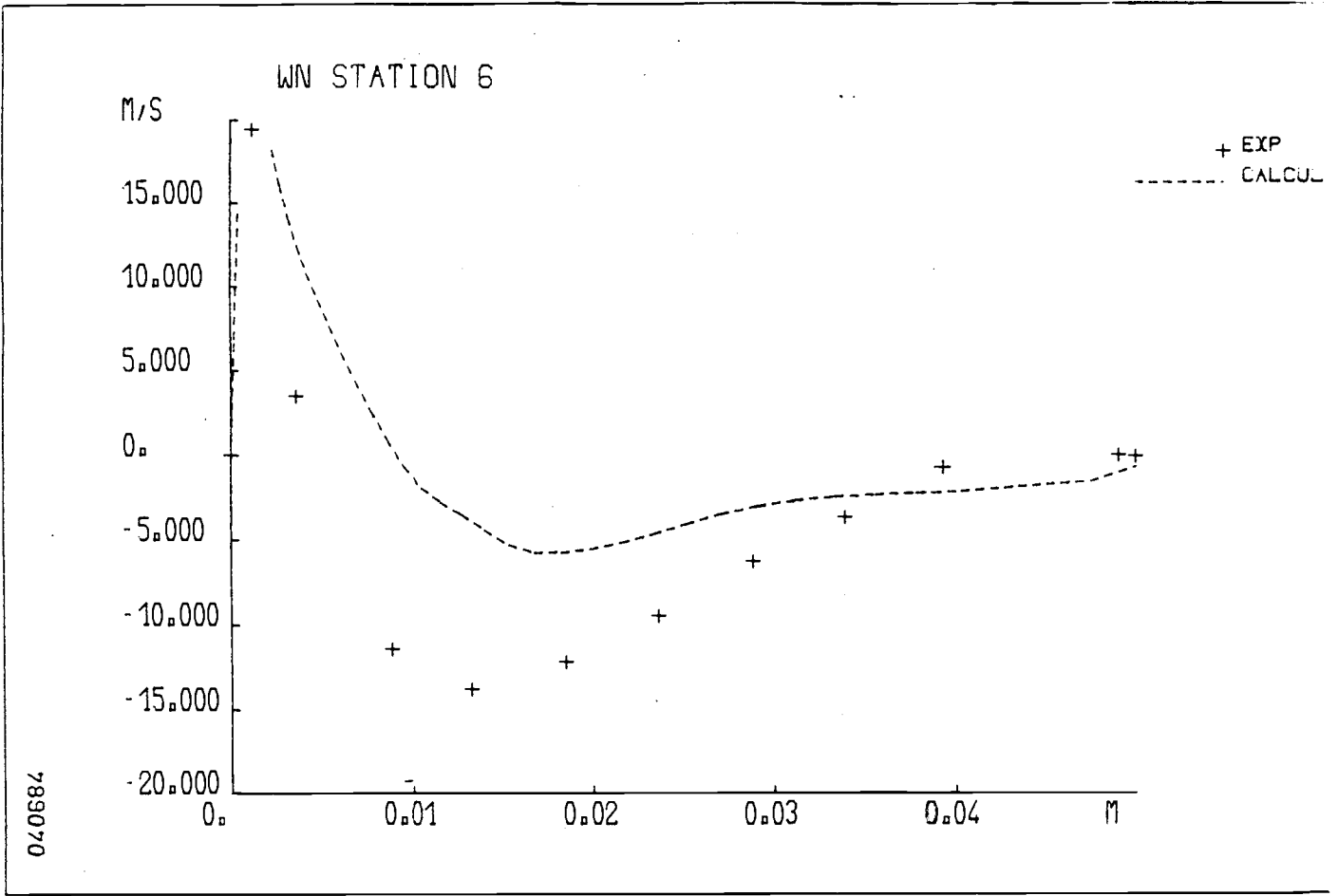


(a)

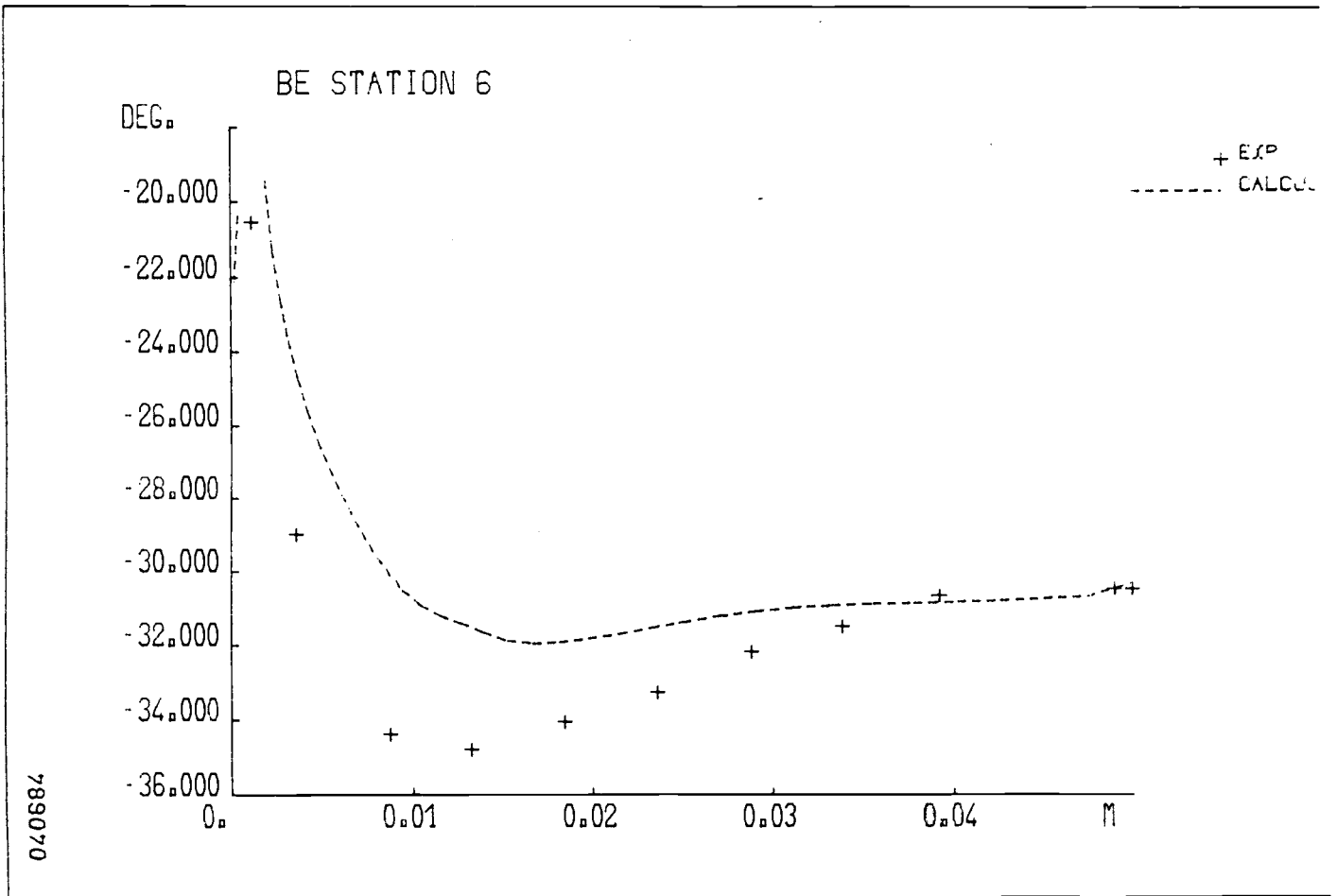


(b)

Figure 38.

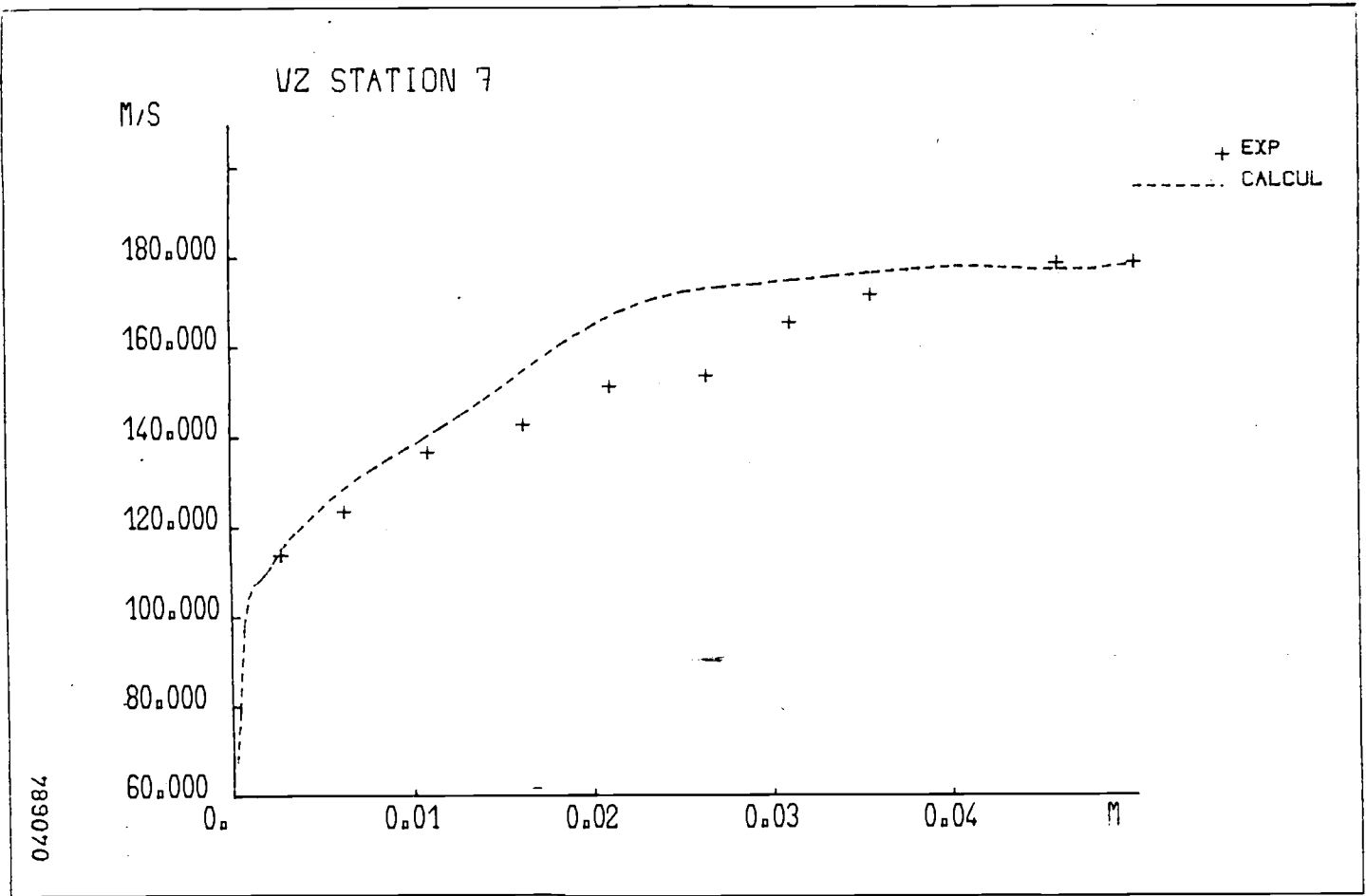


(c)

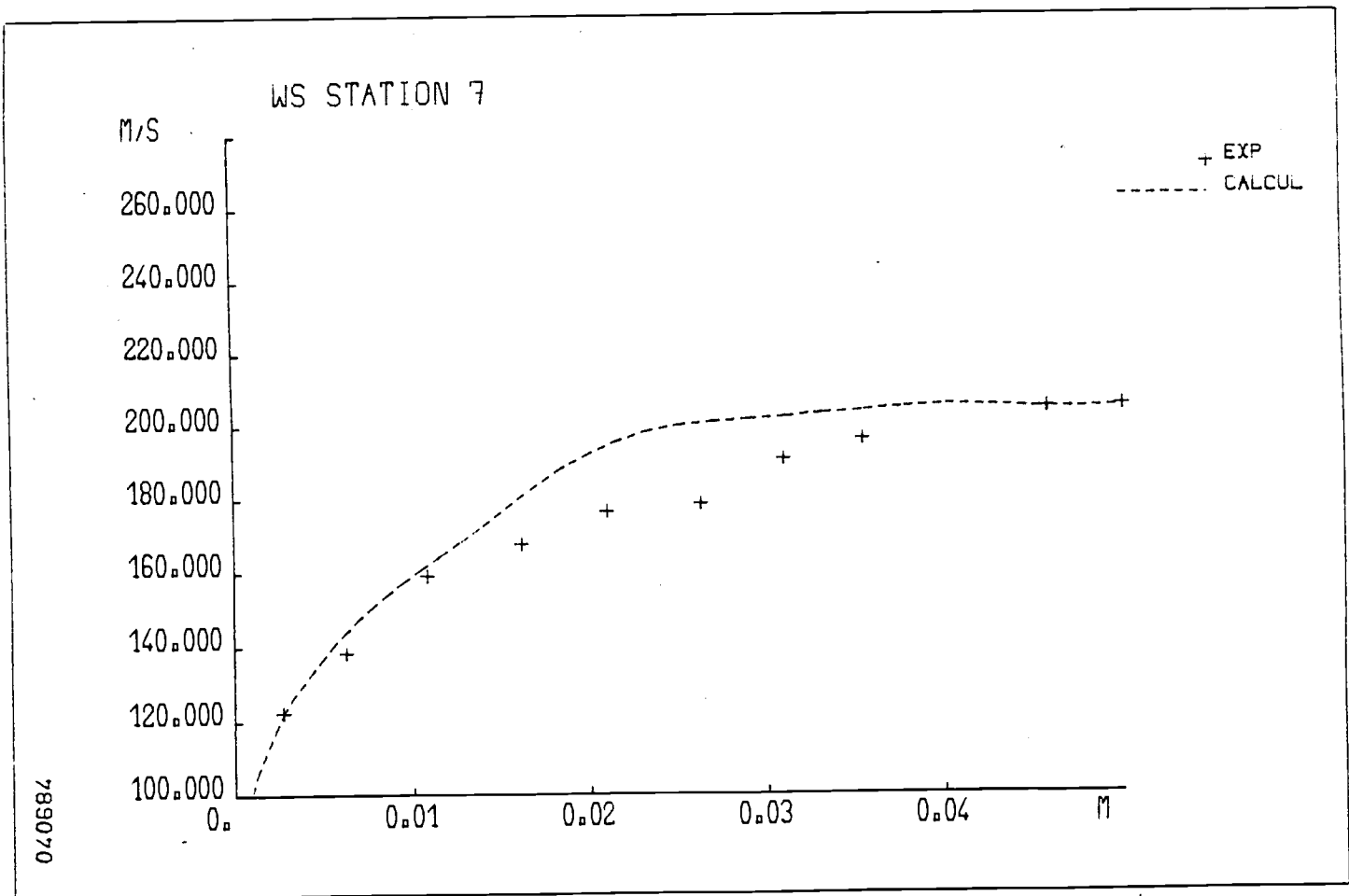


(d)

Figure 38. (contin.)

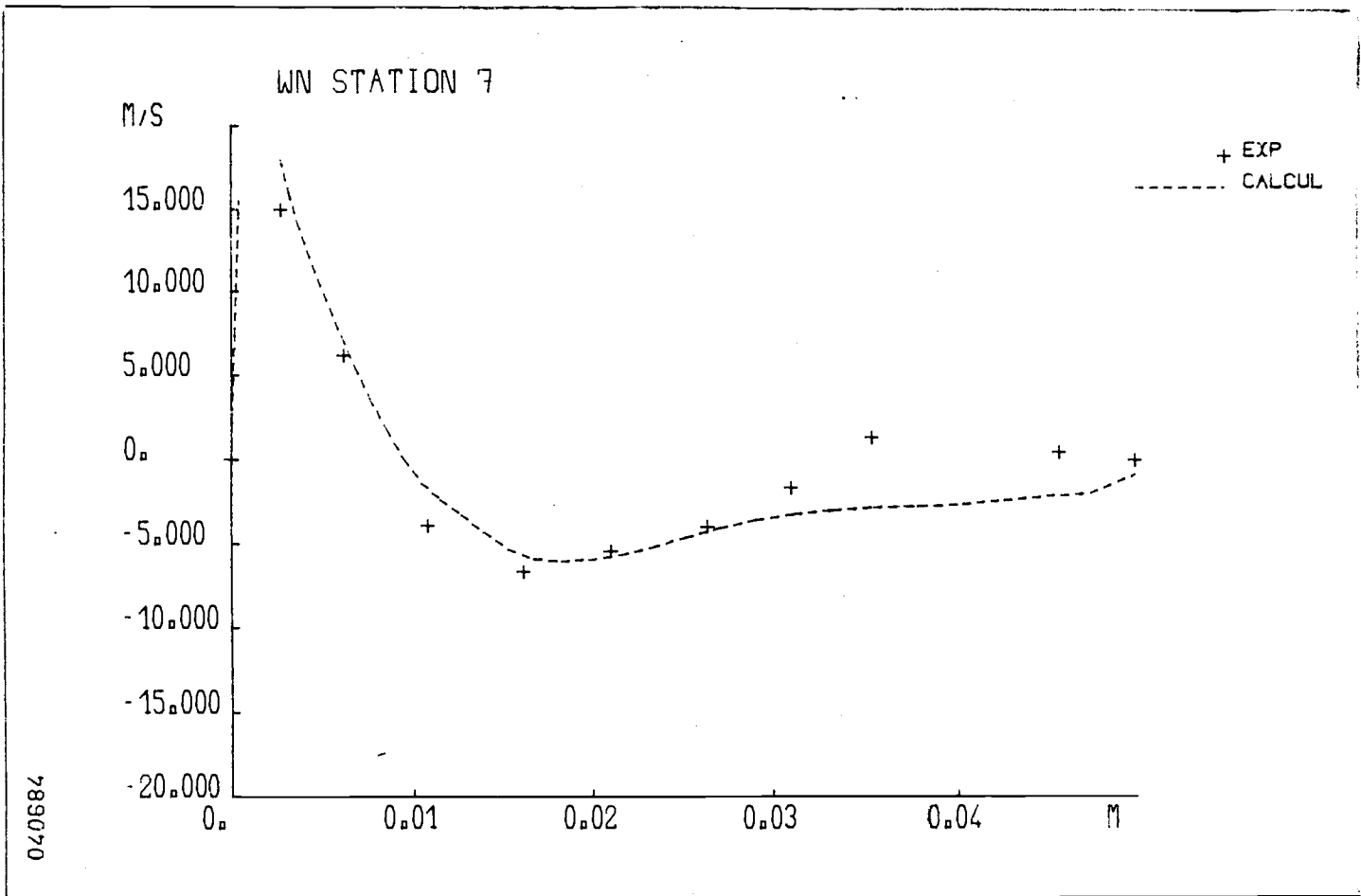


(a)

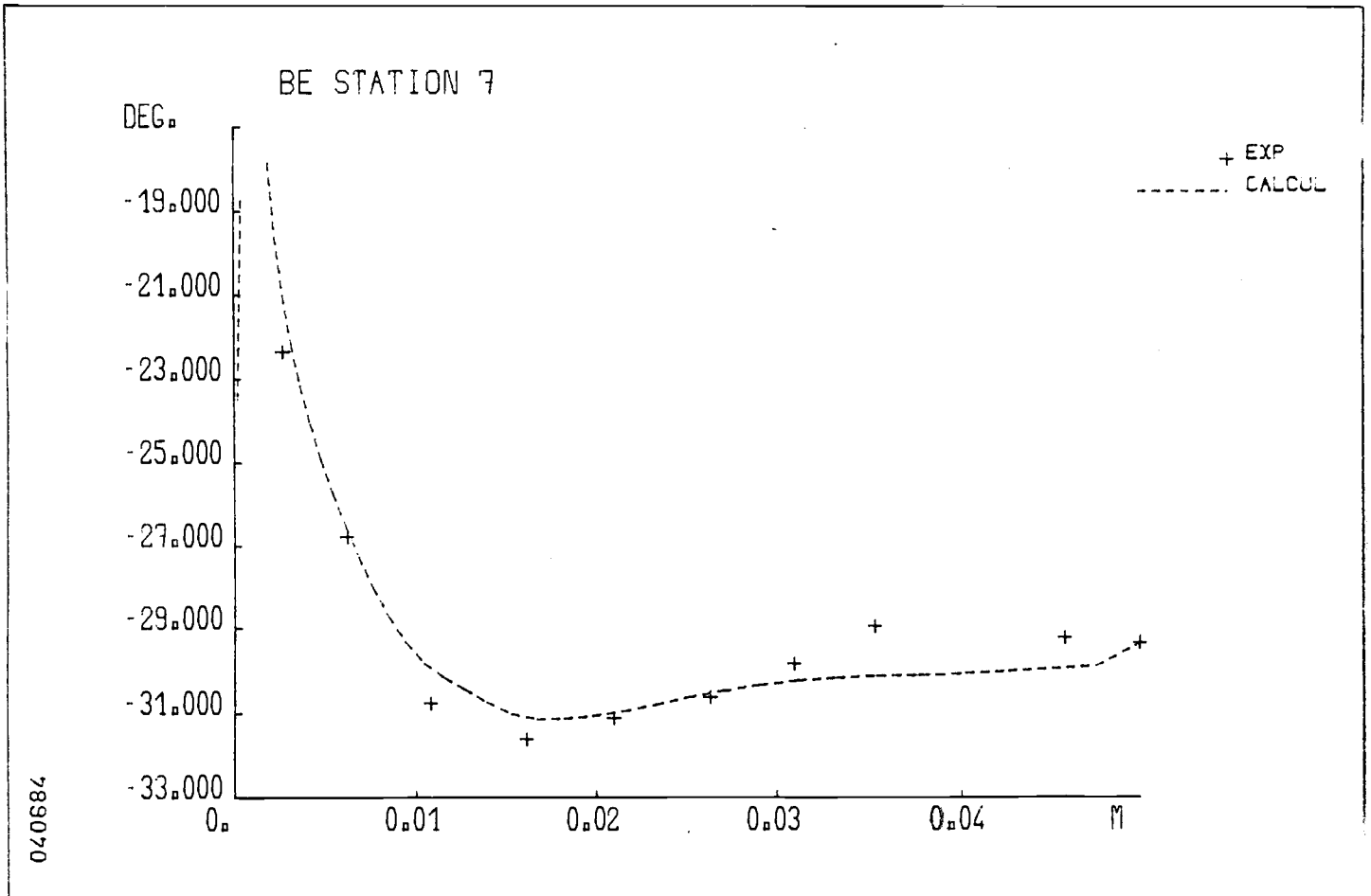


(b)

Figure 39.

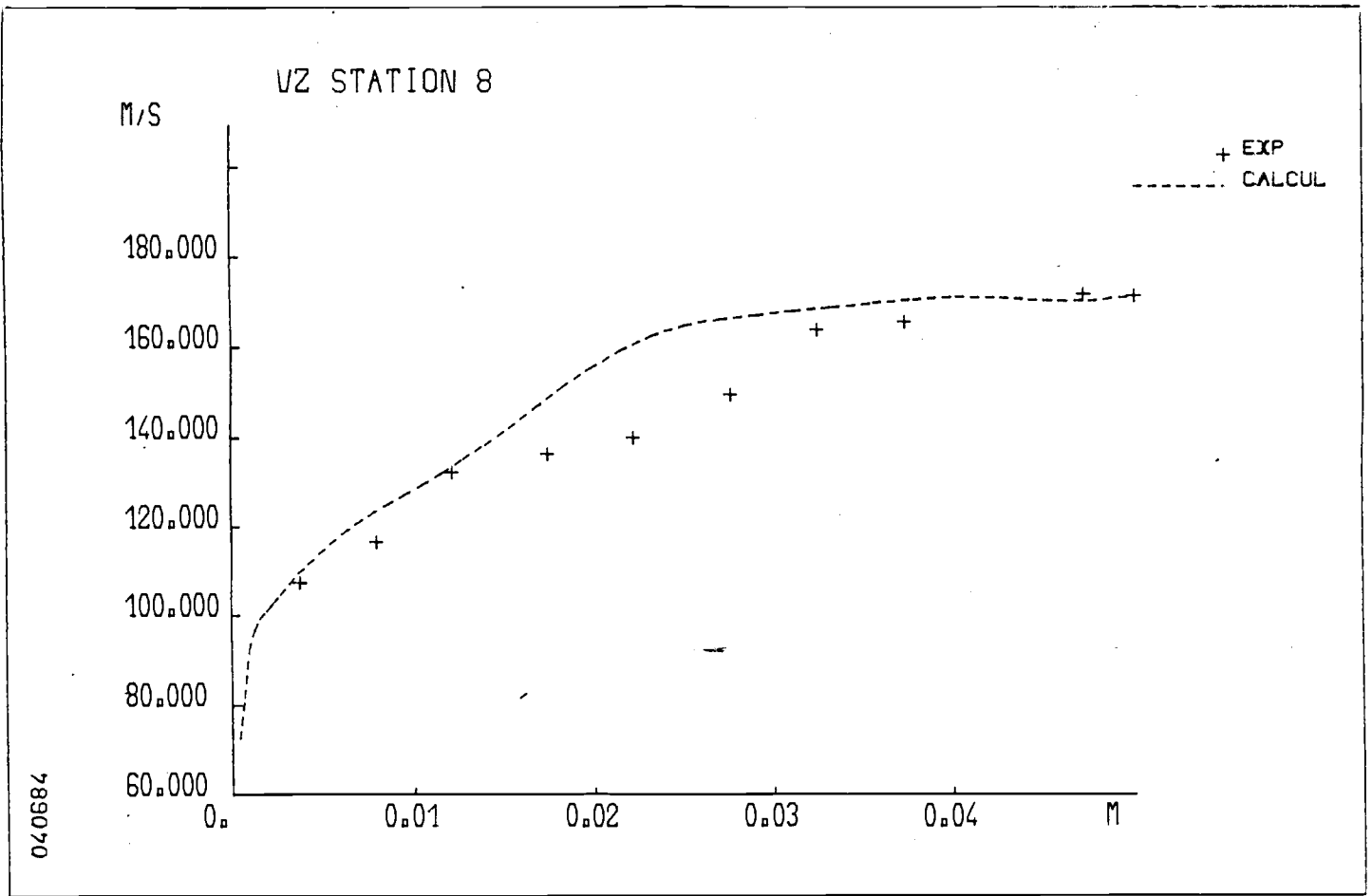


(c)

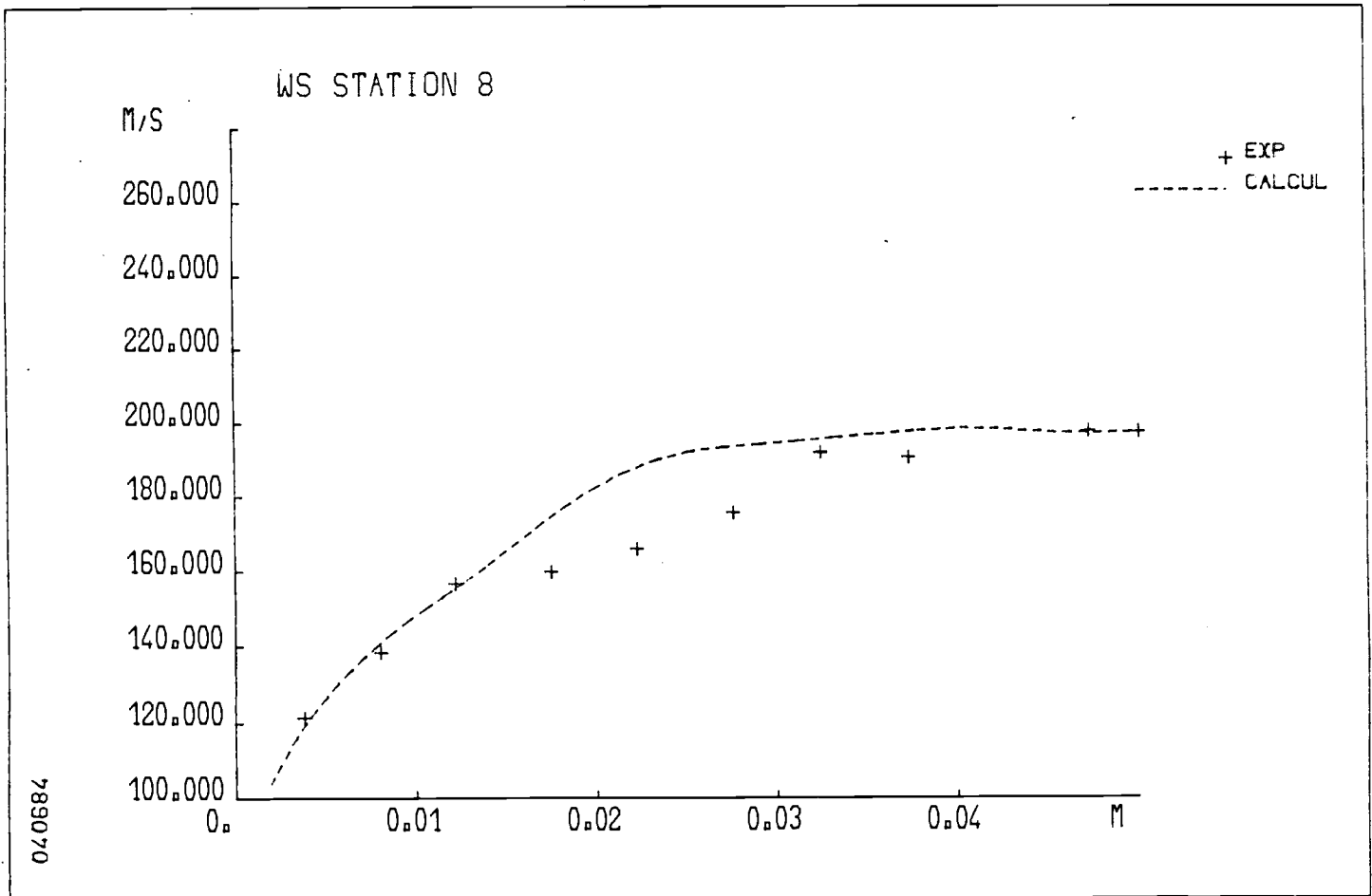


(d)

Figure 39. (contin.)

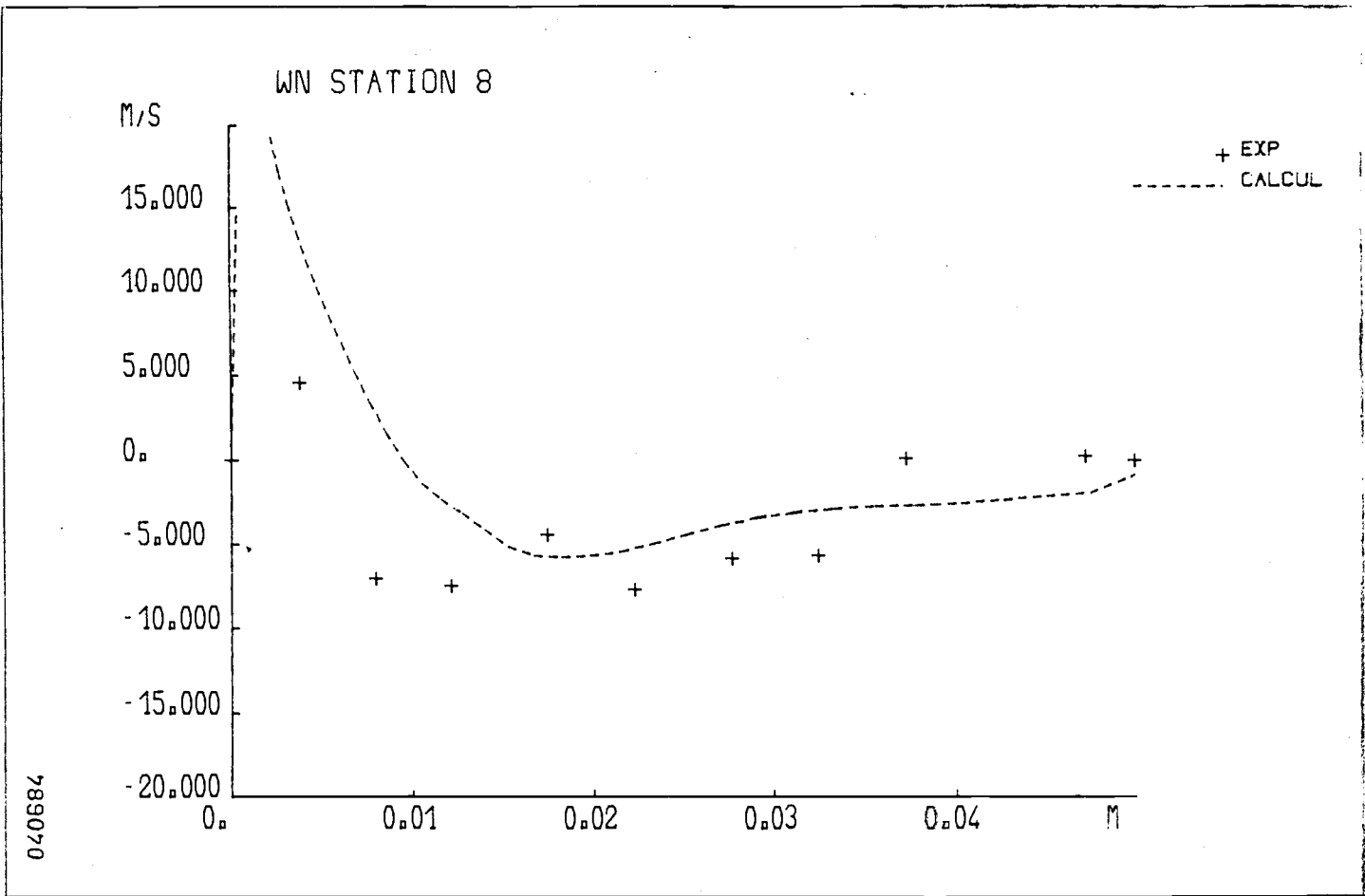


(a)

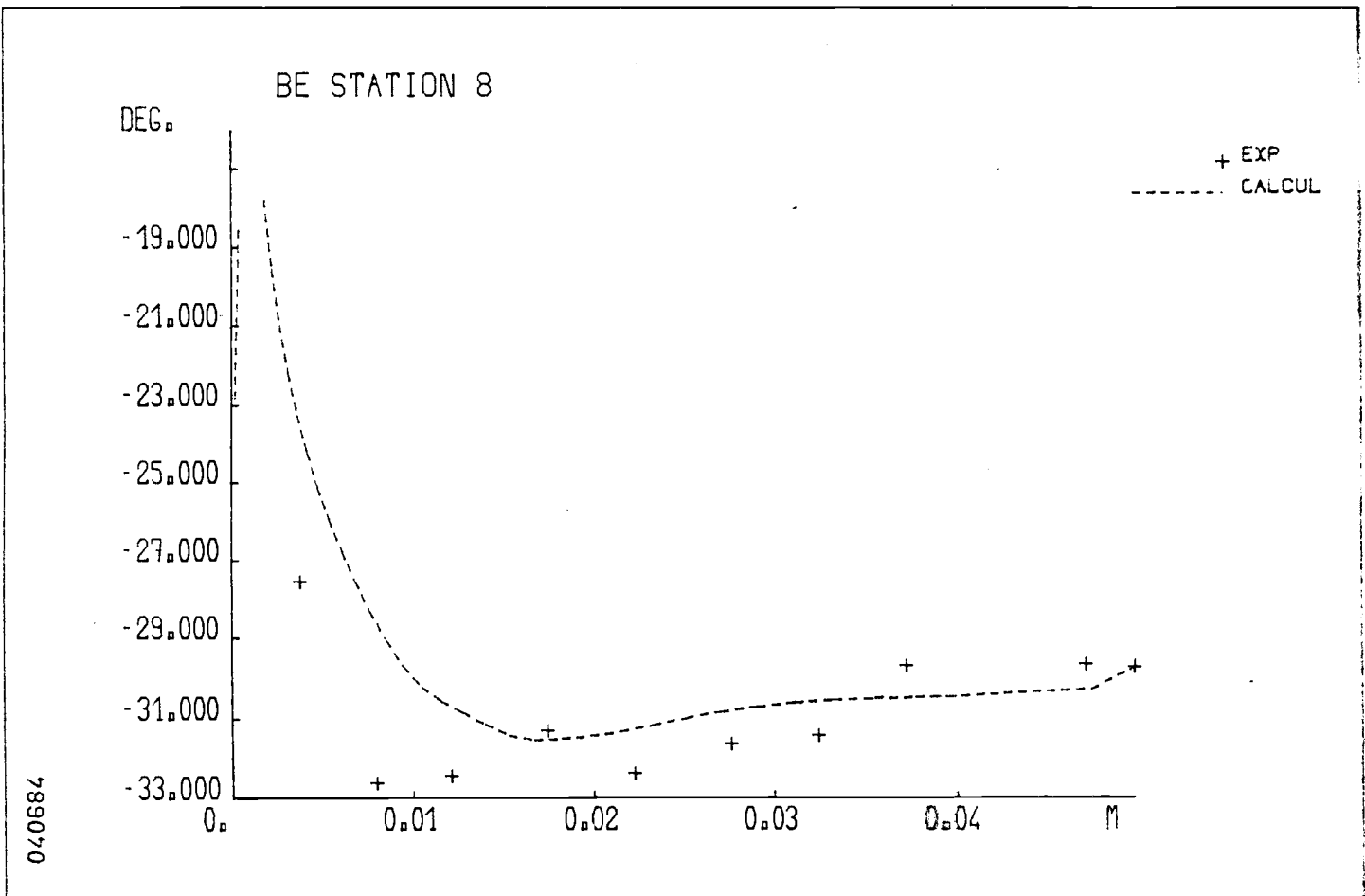


(b)

Figure 40.



(c)



(d)

Figure 40. (contin.)

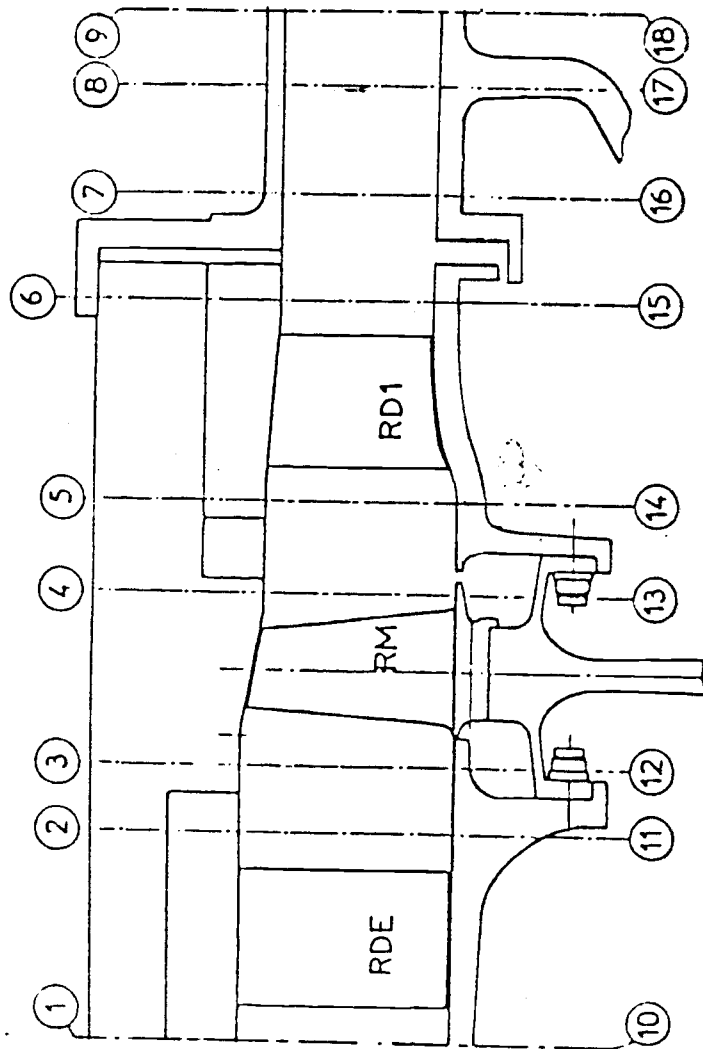
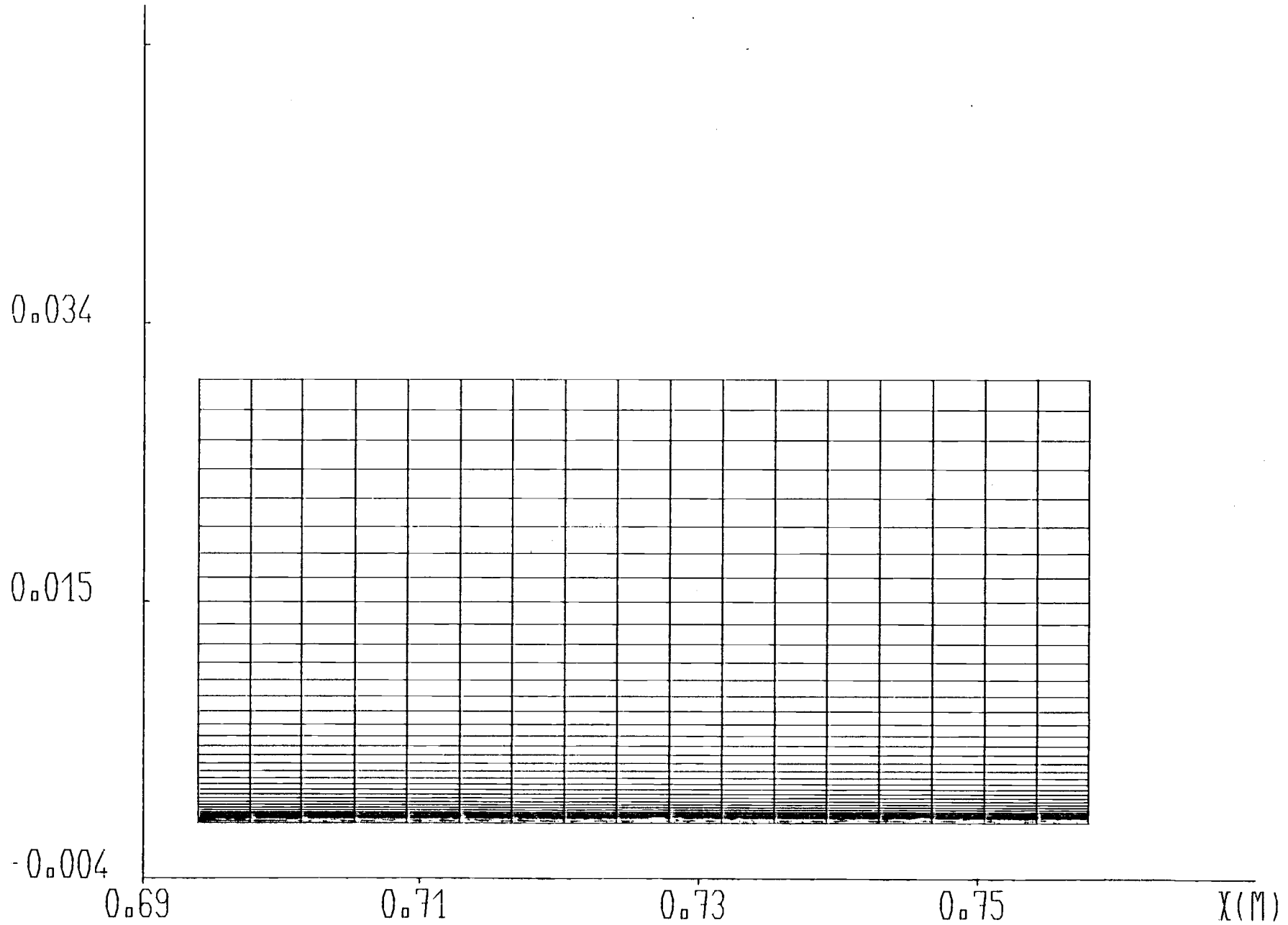


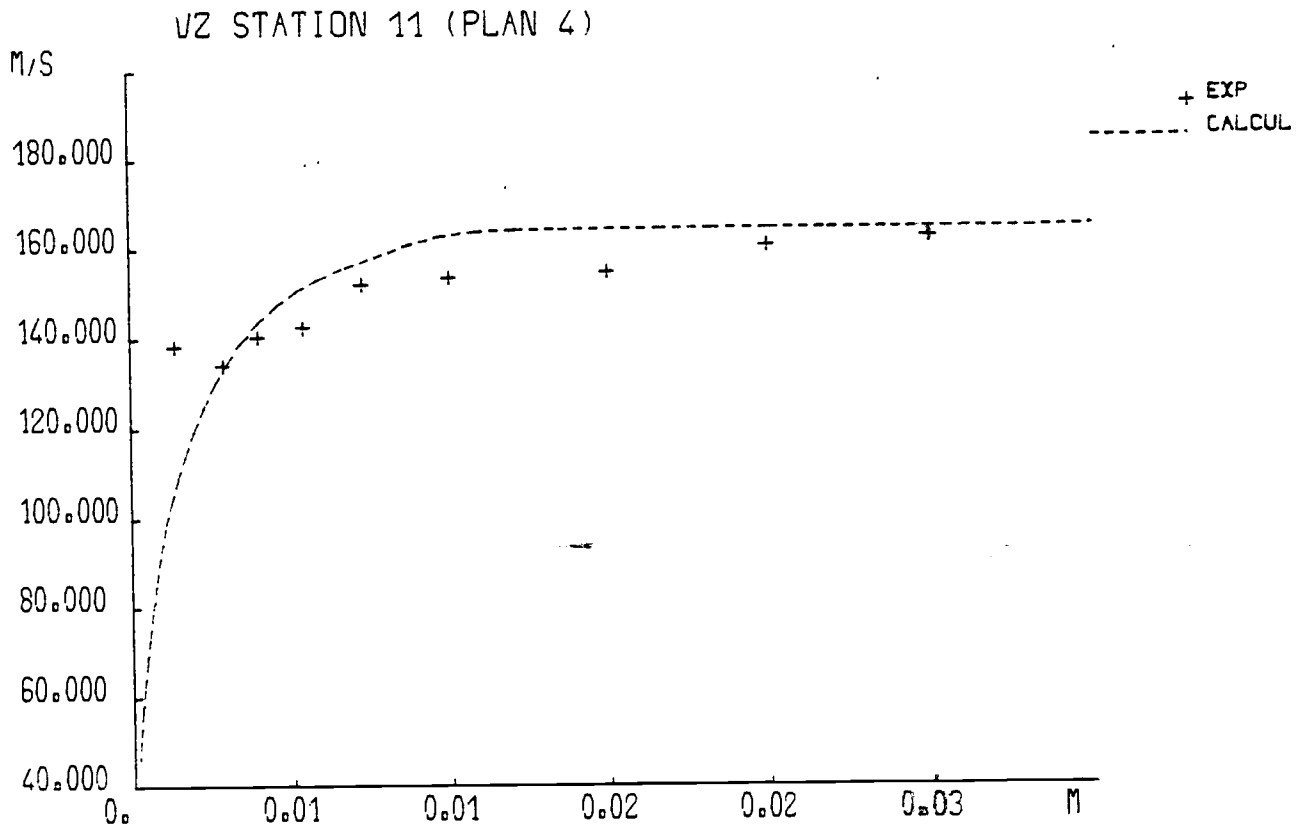
Figure 41. Compresseur axial



MAILLAGE R.M. ECL1 (18 X 42)

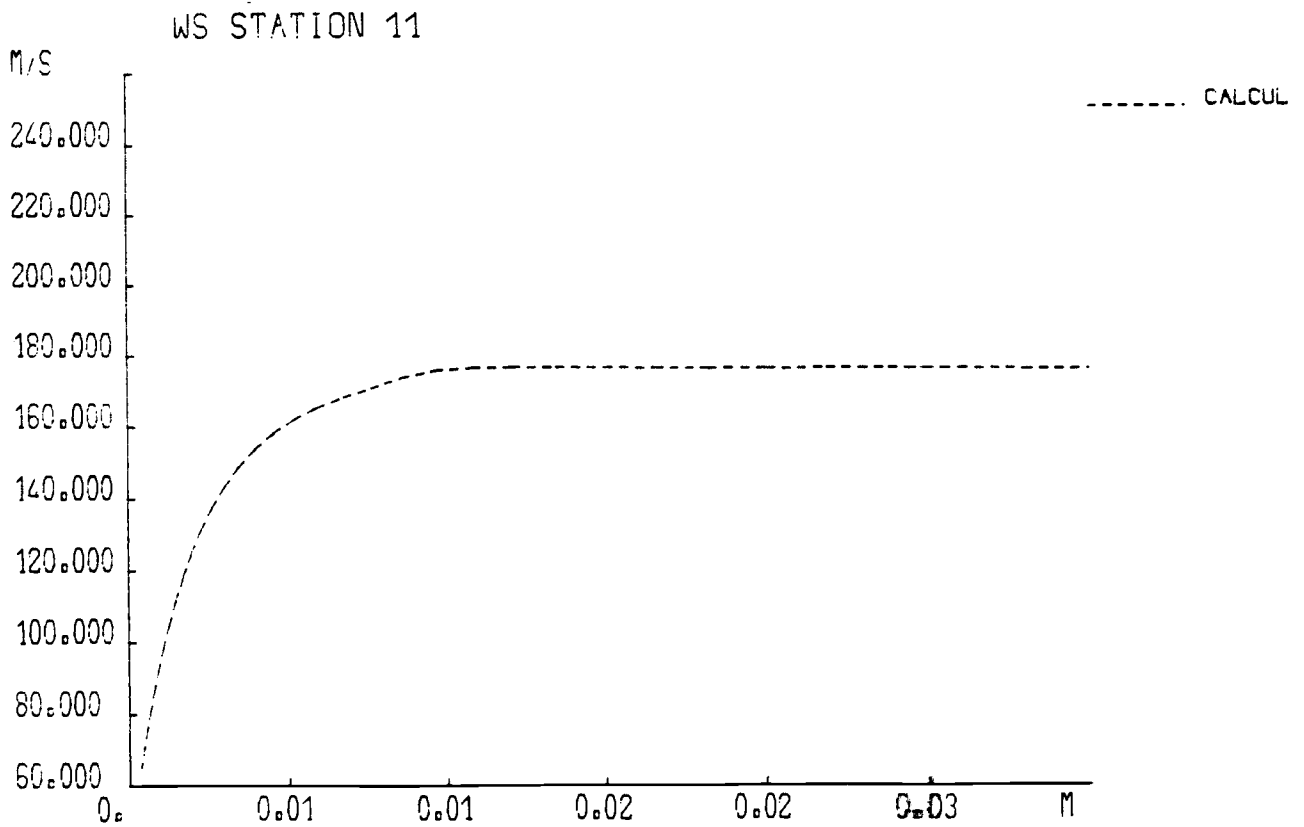
Figure 42

050384



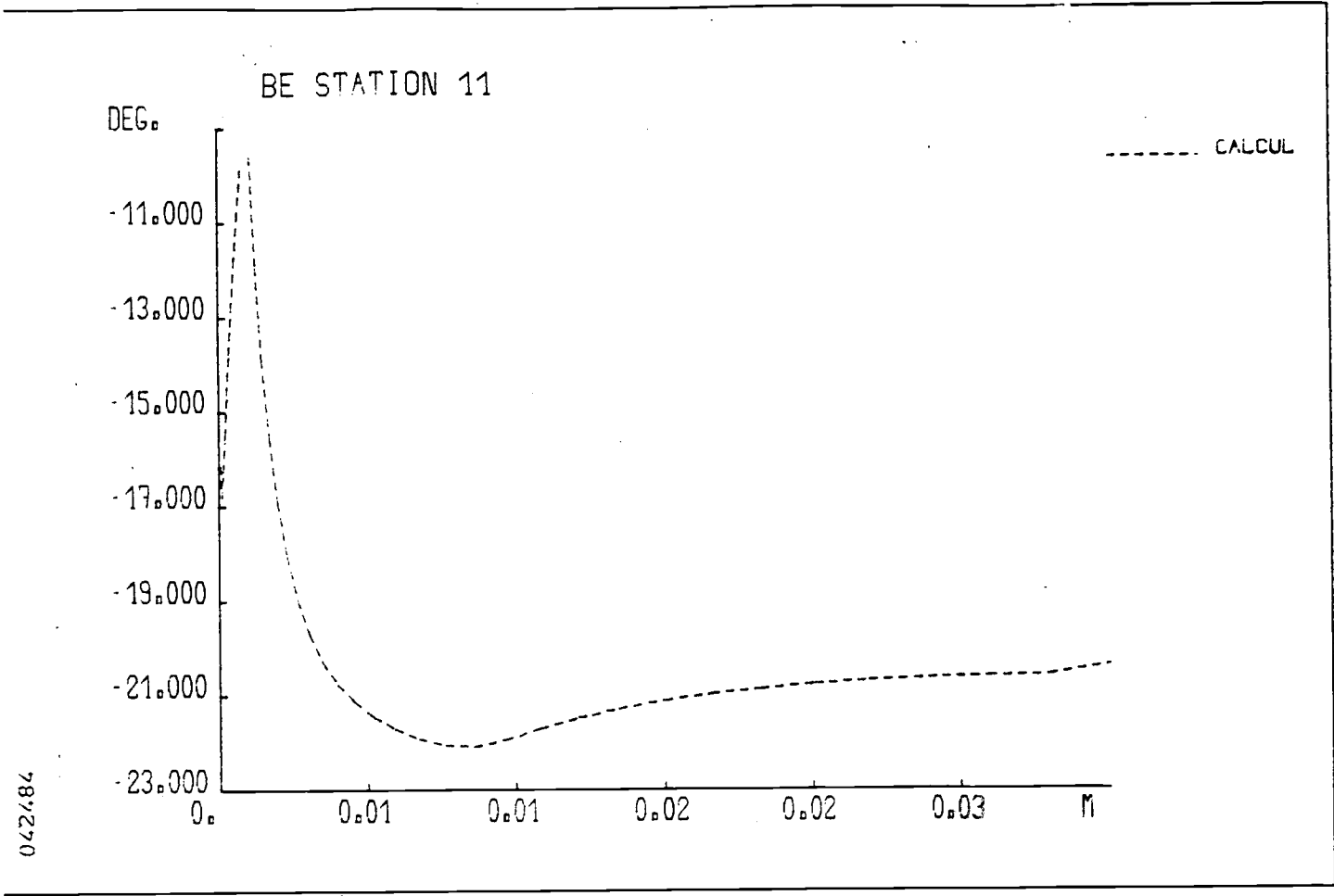
(a)

042484

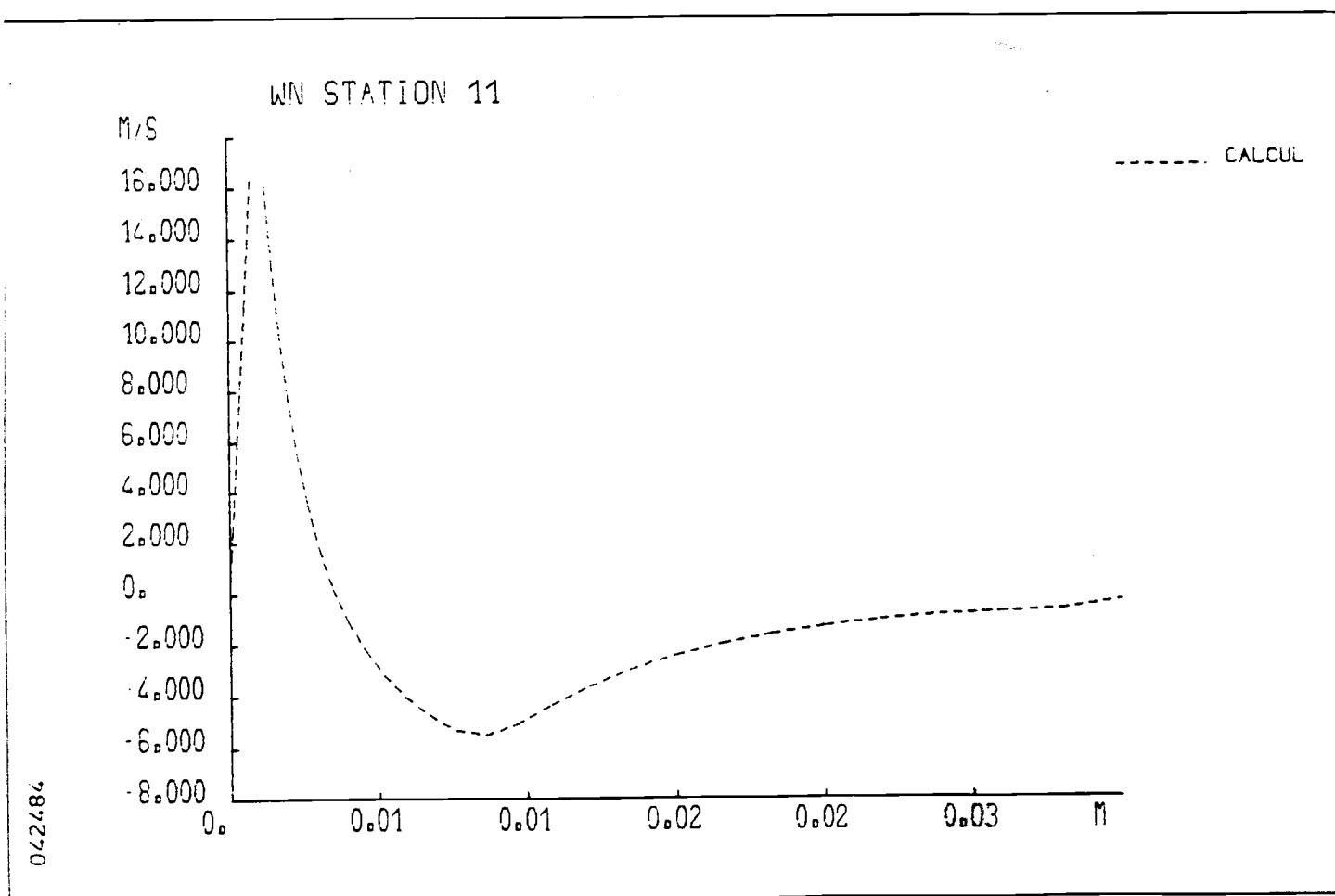


(b)

Figure 43



(c)

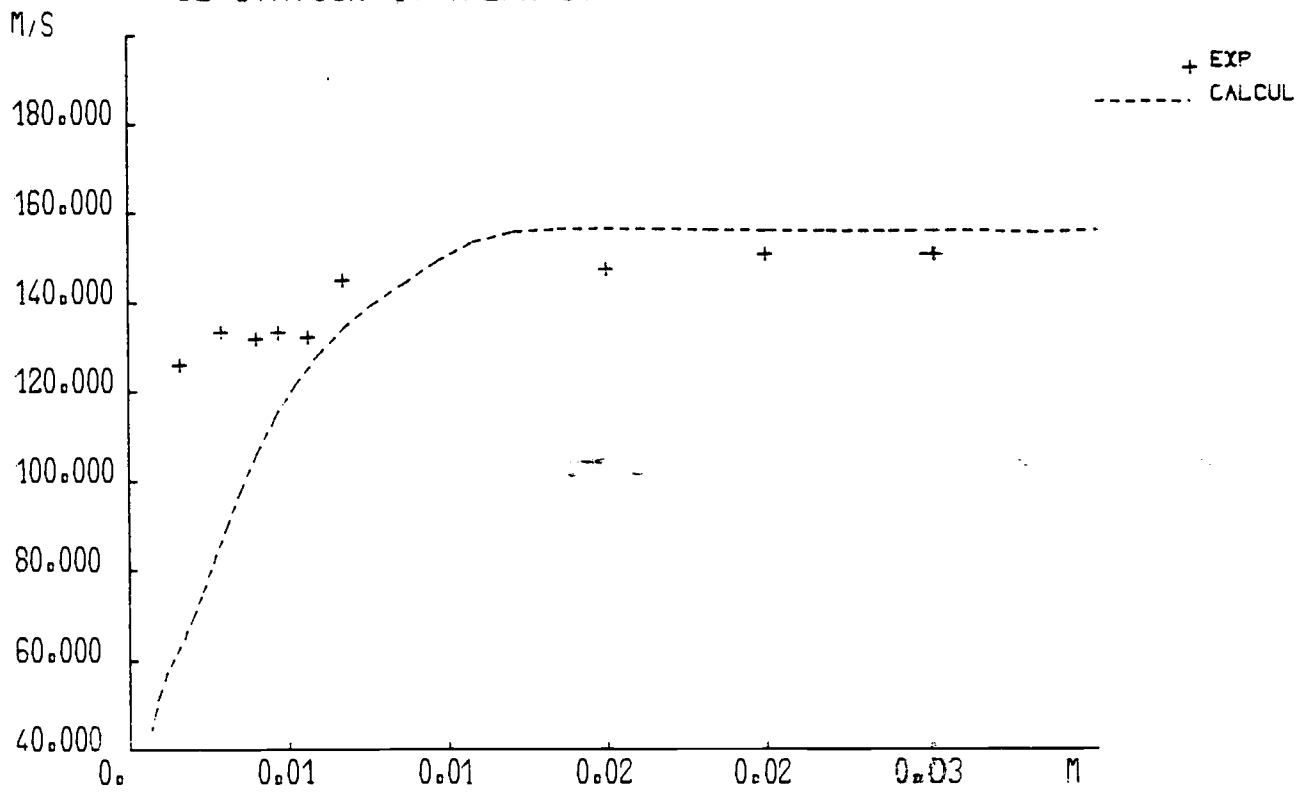


(d)

Figure 43 (cont.)

050384

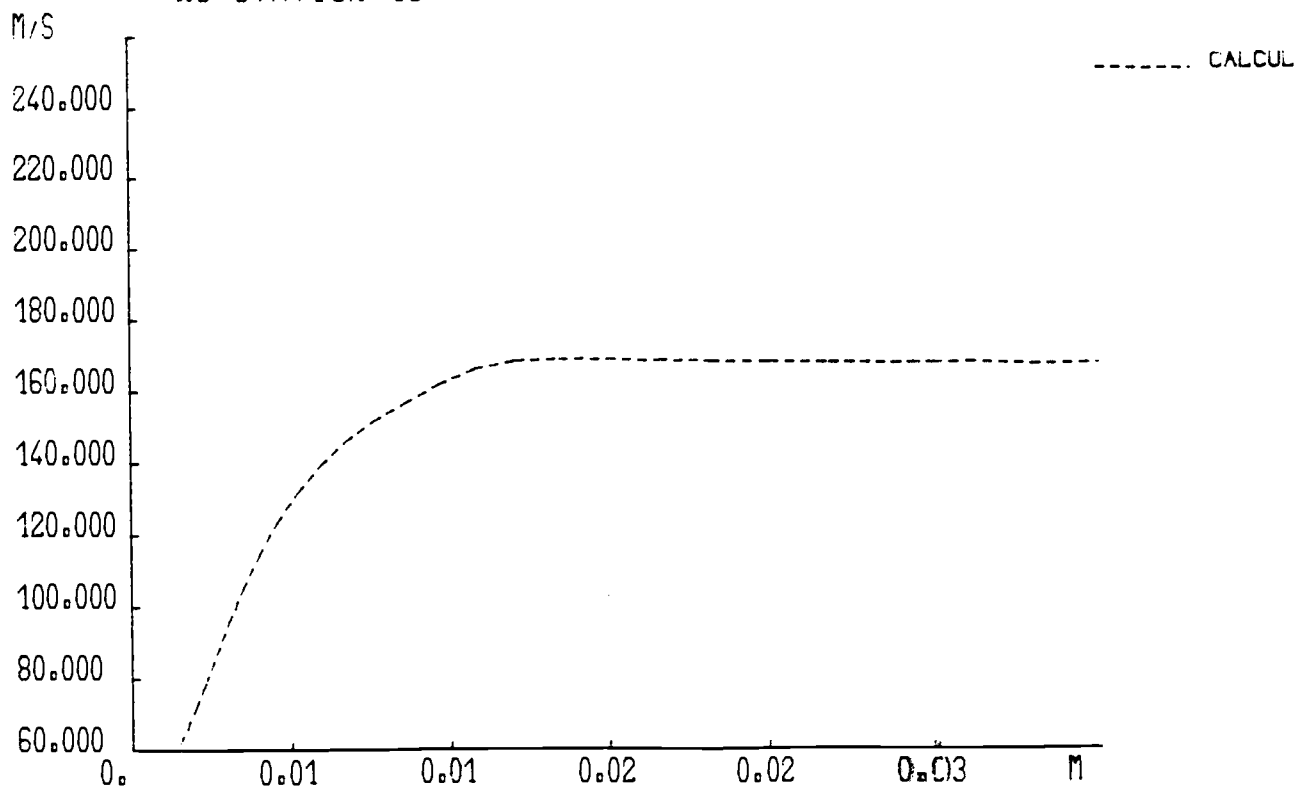
VZ STATION 18 (PLAN 5)



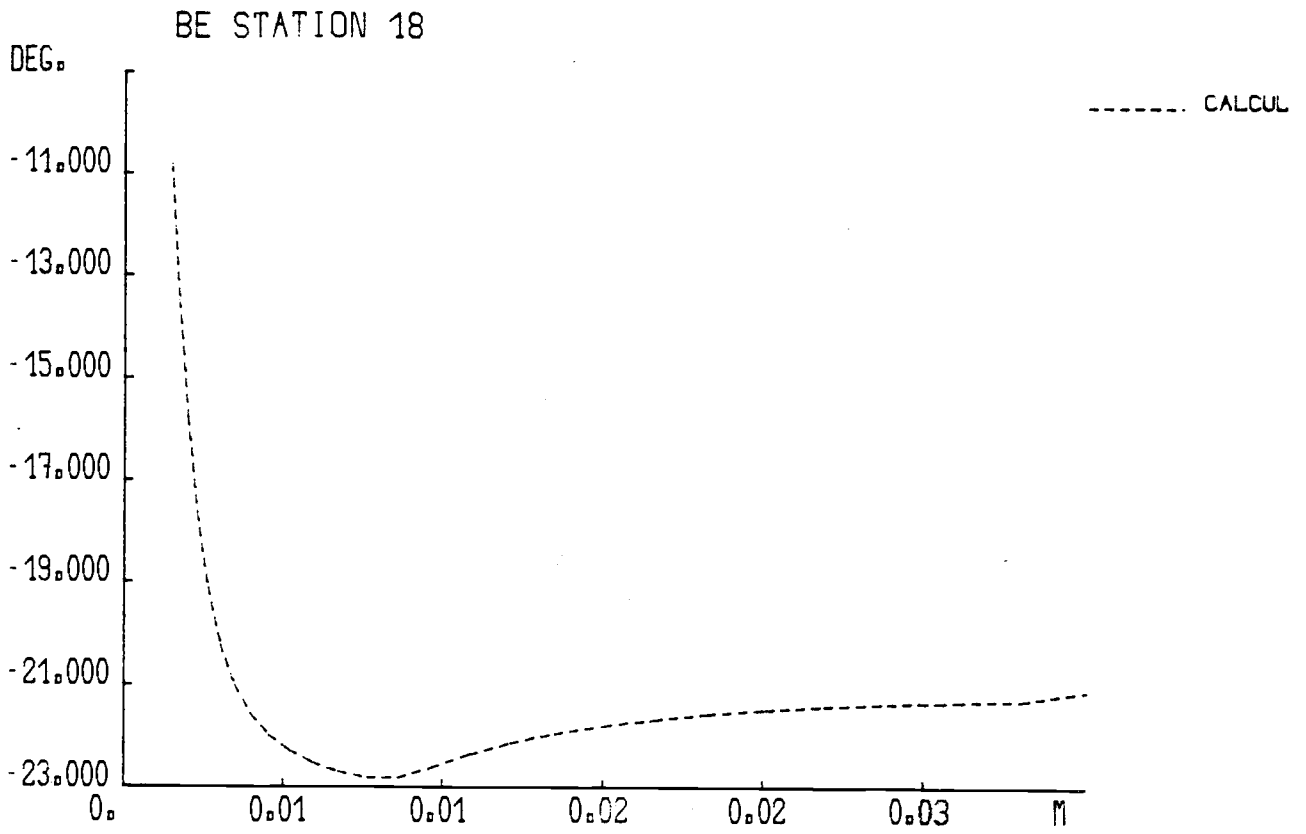
(a)

787270

WS STATION 18

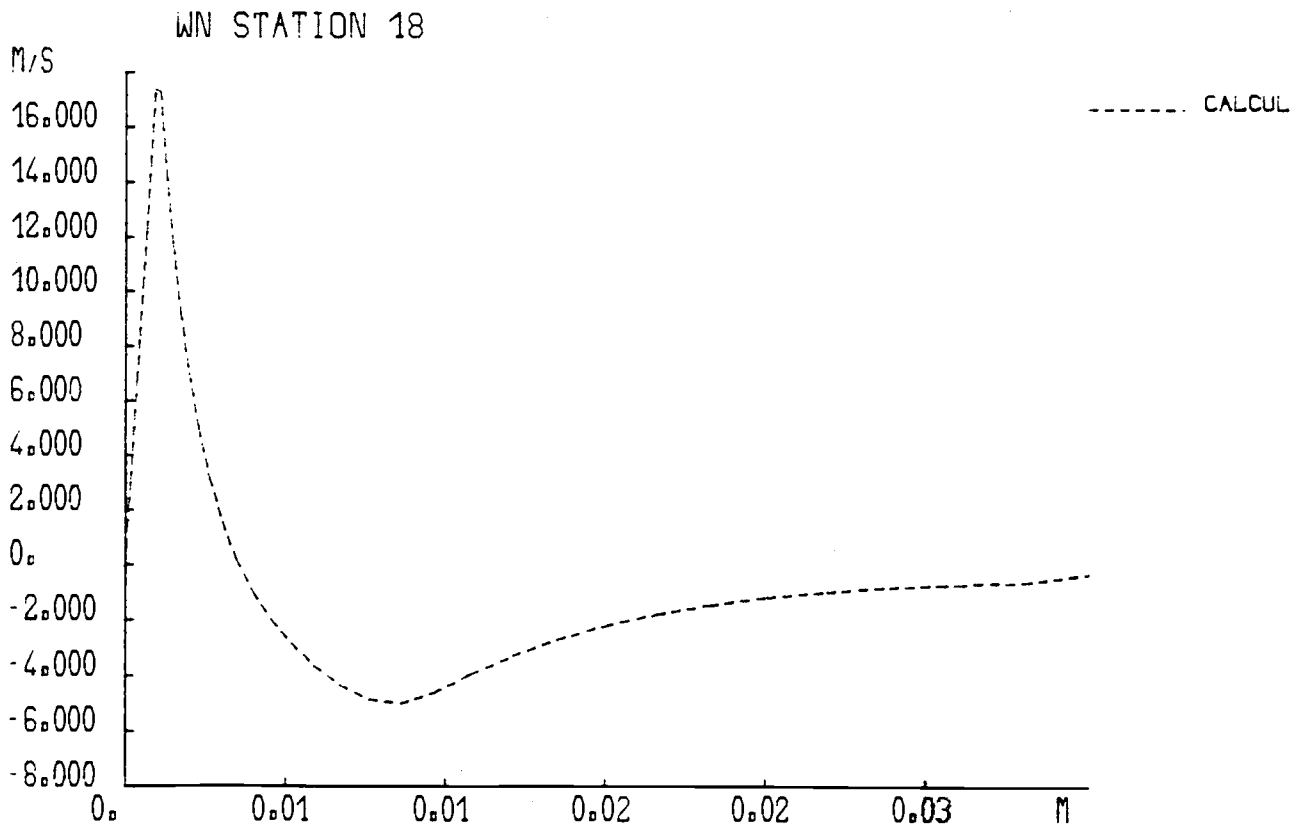


042484



(c)

042484



THESES DE L'ACADEMIE DE LYON : ECOLE CENTRALE DE LYON

NOM : KAKOUIROS (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Georges	DATE de SOUTENANCE
	4 Mai 1984

TITRE :
 Développement d'une méthode de calcul différentielle en vue de la détermination des écoulements secondaires dans les turbomachines.

NATURE :				Numéro d'ordre : ECL84-10
DOCT. d'UNIV.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT de 3 ^e CYCLE	Spécialité : Mécanique
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

CLASSE :

RÉSUMÉ :

Ce travail porte sur l'étude et sur le développement d'une méthode différentielle pour le calcul de l'écoulement visqueux dans le passage interaube d'une turbomachine. Le principe d'une décomposition de l'écoulement en une partie saine et une partie visqueuse dite secondaire a été adopté. En ce qui concerne l'écoulement secondaire, la partie du champ de vitesse dans des directions normales de l'écoulement sain, est déduite comme une conséquence d'un champ de vorticité. Une formulation (Ω, Ψ) utilisée pour la détermination du champ transversal de la vitesse permet de constituer le premier système d'équations. Une démarche parabolique au niveau des équations de Navier-Stokes a été utilisée pour le calcul de l'écoulement visqueux de l'amont vers l'aval. Ces équations moyennées en azimut et projetées selon deux directions particulières, ce qui évite l'introduction des forces d'aubages, ont formé le deuxième système d'équations. Le couplage entre les deux systèmes d'équations a été réalisé à l'aide d'une relation cinématique. Un schéma aux différences finies a été appliqué pour la discrétisation des équations mentionnées. Le système tridiagonal qui apparait a été résolu par une procédure de factorisation.

La méthode est appliquée au calcul de l'écoulement turbulent bidimensionnel et dans des grilles d'aubes de turbine et de compresseur et dans un compresseur axial. Les comparaisons avec les résultats expérimentaux sont très encourageantes et montrent l'intérêt d'une formulation totalement différentielle en vue de la prise en compte de phénomènes particuliers, tels les passages de repères fixes à mobiles et les évolutions de l'écoulement sain selon le rayon.

MOTS-CLES :

Laboratoire (s) de recherches :
 Laboratoire de Mécanique des Fluides - Ecole Centrale de Lyon

Directeur de recherches : J. MATHIEU, Professeur Titulaire

Président de jury : J. MATHIEU

Composition du jury : K. D. PARATILOU, E. LEBLANC, C. MARTEL, F. BRUNIER

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'article 3 de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu le rapport de présentation de Messieurs

J. MATHIEU
F. LEBOEUF
K.D. PAPAILIOU
G. KARADIMAS
F. DETANNE

M. KAKOUROS Georges

est autorisé à présenter une soutenance de thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR INGENIEUR, Spécialité Mécanique.**

Fait à Ecully, le 12 avril 1984

Le Directeur de l'E.C.L.

A. MOIROUX





