

THESE

présentée devant

l'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

par M. Etienne PARKINSON

UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES
DANS LA RESOLUTION
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES QUASI-ELLIPTIQUES

APPLICATION AU CALCUL D'UNE TURBINE

Soutenue le 13 juin 1991 devant la Commission d'examen

Jury : Messieurs J. CHAUVIN, Professeur, *Président - Rapporteur*

Examineurs

J.DESCLAUX
P.FERRAND, Dr.
D.JEANDEL, Pr.
F.LEBOEUF, Pr.
J.F. MAITRE, Pr.
A. NICOLAS, Pr., *Rapporteur*

ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET
Directeur Adjoint : E. PASCAUD
Directeur des Etudes : F. SIDOROFF

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

*(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 Juillet 1984,
modifié par l'Arrêté du 21 Mars 1988)*

Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mlle)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maître de Conférences
G. THOMAS	Maître de Conférences
F. MUSY	Maître de Conférences

Physico-Chimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
C. MARTELET	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
Y. ROBACH	Maître de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENQ	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. NGUYEN	Maître de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

Electronique

R. BLANCHET	Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maître de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

Electrotechnique

P. AURIOL	Professeur
A. NICOLAS	Professeur
G. ROJAT	Maître de Conférences

Mécanique des Solides

B. CAMBOU	Professeur
F. SIDOROFF	Professeur
L. JEZEQUEL	Professeur
A. DOGUI	Maître de Conférences
C. SURRY	Professeur - E.N.I.S.E.

Technologie des Surfaces

J.M. GEORGES	Professeur
J. SABOT	Professeur
J.M. MARTIN	Professeur
N. ALBEROLA (Mme)	Maître de Conférences
H. MONTES	Maître de Conférences
T. MATHIA	Directeur de Recherche au CNRS
P. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
J.L. LOUBET	Chargé de Recherche au CNRS

Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur
E. ALCARAZ	Professeur
D. JEANDEL	Professeur
F. LEBOEUF	Professeur
J. BATAILLE	Professeur - Lyon I
B. GAY	Professeur - Lyon I
J. GENCE	Professeur - Lyon I
M. LANCE	Professeur - Lyon I
R. MOREL	Professeur - INSA
C. CAMBON	Chargé de Recherche au CNRS
J.P. BERTOGLIO	Chargé de Recherche au CNRS
P. FERRAND	Chargé de Recherche au CNRS
D. HENRY	Chargé de Recherche au CNRS

Acoustique

G. COMTE-BELLOT (Mlle)	Professeur
D. JUVE	Professeur
M. SUNYACH	Professeur - Lyon I (IUT)
M. ROGER	Maître de Conférences
P. BLANC-BENON	Chargé de Recherche au CNRS

Machines Thermiques

M. BRUN	Professeur
P. ARQUES	Professeur
J.C. CHAMPOUSSIN	Professeur - Lyon I

Remerciements

Je ne voudrais pas déroger à cette tradition des *Remerciements* souvent si protocolaire mais si justifiée. Un travail de recherche est avant tout un travail d'équipe et cette étude n'aurait pas aboutie sans la contribution de chacun. A ce titre, je remercie Messieurs les Professeurs Jean BATAILLE et Denis JEANDEL de m'avoir permis de poursuivre cette étude au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Francis LEBOEUF, responsable du groupe Turbomachines, qui m'a proposé et a suivi ce travail. Un soutien chaleureux permanent, et le souci de partager son expérience par de multiples idées et conseils ont grandement contribué à l'intérêt de cette thèse. Je l'en remercie.

Je souhaite également remercier Monsieur Pascal FERRAND, chercheur au CNRS, qui, participant à ce projet de recherche, m'a fait partager son sens critique et son goût pour ce travail. Sa disponibilité, ses multiples suggestions et ses grandes connaissances en méthodes numériques ont été de précieux alliés. Je l'en remercie.

Mes remerciements vont également à Madame Joëlle CARO, si prompte à dépanner dans les méandres de l'informatique.

Je ne voudrais pas oublier Madame Odile VITALI pour ces multiples services rendus avec le sourire.

Monsieur J.BERNARD, ingénieur à la SNECMA, a suivi de près cette recherche. Qu'il soit remercié pour ces contacts fructueux.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur Jacques CHAUVIN qui me fait l'honneur de présider ce jury de thèse.

Messieurs les Professeurs J.F.MAITRE et D.JEANDEL ont bien voulu étudier ce document et participer au jury. Je les en remercie.

Monsieur le Professeur A.NICOLAS, Directeur du laboratoire d'Electrotechnique de l'Ecole Centrale de Lyon, utilisateur averti de la méthode des éléments frontières, a bien volontiers accepté de critiquer ce document et de participer à ce jury. Mes remerciements lui sont adressés.

Mes remerciements vont également à monsieur J.DESCLEAUX, ingénieur à la Société Européenne de Propulsion, qui a accepté d'être membre de ce jury.

Enfin, j'adresse toute ma sympathie à l'ensemble du personnel du laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon et de la société METRAFLU pour son accueil si agréable.

Je suis également reconnaissant à la société METRAFLU et au Centre National de la Recherche scientifique qui ont soutenus ces travaux.

Tous ces remerciements si "professionnels" ne sauraient néanmoins égaler ceux que je souhaite adresser à Fabienne, mon épouse, qui a tant contribué à ce travail par son soutien permanent et sa patience.

... à ceux qui tourneront cette page ...

UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES DANS
LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES QUASI-ELLIPTIQUES
APPLICATION AU CALCUL D'UNE TURBINE

Dans le cadre du développement d'un code de résolution des équations de Navier Stokes tridimensionnelles, une approche originale, basée sur la méthode des éléments frontières, est développée pour résoudre une équation de Poisson tridimensionnelle.

Une étude du comportement de la méthode des éléments frontières sur des cas tests analytiques est proposée. La précision de cette méthode est mise en évidence.

Le couplage de cette résolution intégrale avec un code Navier Stokes quasi elliptique, utilisée pour vérifier la conservation de la masse dans une approche découplée du calcul de la vitesse et de la pression, est illustré sur des canaux coudés à 90° et à section variable. Dans l'optique d'une utilisation industrielle du code Navier Stokes, l'écoulement interne dans un canal inter-aube de turbine est calculé et comparé aux mesures expérimentales.

USE OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN THE RESOLUTION
OF THE QUASI-ELLIPTIC NAVIER-STOKES EQUATIONS
APPLICATION TO THE CALCULATION OF A TURBINE FLOW

As a part of the study of a tridimensional Navier Stokes solver, an original approach, based on the boundary element method, is developed to solve a tridimensional Poisson equation.

The behaviour of the boundary element method is studied on analytic test cases. The high level of precision of this method is outlined.

This integral resolution is coupled with a quasi elliptic Navier Stokes solver. The boundary element method is used to check the continuity equation in a decoupled resolution of the pressure and the velocity fields. The effectiveness of this coupling is illustrated on curved channels geometries. An industrial application of this solver is made on a turbine blade geometry. The numerical results are compared with experimental results.

UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES
DANS LA RESOLUTION
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES QUASI-ELLIPTIQUES

APPLICATION AU CALCUL D'UNE TURBINE

REMERCIEMENTS	Page 4
RESUME	7
NOMENCLATURE	15
INTRODUCTION	20
I. TURBOMACHINES ET METHODES NUMERIQUES	24
I.1 La modélisation tridimensionnelle des écoulements internes	24
I.1.1 Equations de Navier Stokes	24
I.1.2 Equations de Navier Stokes moyennées	26
I.1.3 Equations de Navier Stokes parabolisées	28
I.1.4 Approximation de la couche limite	29
I.1.5 Equations d'Euler	30
I.1.6 Résolution potentielle	31
I.1.7 Trois familles de résolution	32
I.2 Les méthodes de correction de pression	33
I.3 Les codes Navier Stokes 3D appliqués aux turbines	34
I.4 Genèse du code NSQE	39
I.4.1 Equations pour le calcul de la vitesse et de la température	40
I.4.2 Equation pour le calcul de la pression	42
I.4.3 Conditions aux limites et algorithme de résolution	47
I.4.3.1 Conditions aux limites	47
I.4.3.2 Correction monodimensionnelle	48
I.4.3.3 Algorithme	51
I.5 Présente contribution	54

II. METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES	56
II.1 Bases théoriques	56
II.1.1 Forme intégrale de l'équation de Poisson	57
II.1.2 Utilisation de la méthode des éléments frontières	60
II.1.2.1 discrétisation géométrique	60
II.1.2.2 Calcul de $\int_{\Omega} \delta p . \Delta(M) d\Omega$	64
II.1.2.3 Intégrales de Dirichlet $\int_{\Gamma} \delta p . q^* d\Gamma$	66
II.1.2.4 Intégrales de Neuman $\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}(\delta p) u^* d\Gamma$	68
II.1.2.5 Intégrales de volume $\int_{\Omega} u^* . f(\theta) d\Omega$	69
II.1.3 Equation de pression discrétisée locale	73
II.2 Système à résoudre et conditions aux limites	73
II.2.1 Assemblage du système	73
II.2.2 Conditions aux limites et inconnues	75
II.2.3 Conclusion	81
II.3 Méthodologie de validation	82
II.3.1 Cas tests analytiques	82
II.3.2 Environnement Navier Stokes	82
II.4 Conclusion	85

III. CALCULS POTENTIELS BIDIMENSIONNELS ET TRIDIMENSIONNELS	86
III.1 Calculs potentiels dans le code NSQE	86
III.2 Calculs bidimensionnels	87
III.2.1 Cas test BEM2D/MSI : disque avec source	87
III.2.1.1 Calcul des potentiels internes	88
III.2.1.2 Calcul de la dérivée normale $\frac{\partial p}{\partial n}$	91
III.2.2 Cas test BEM2D : plaque plane carrée sans source	92
III.2.3 Cas test MSI : plaque plane carrée avec sources	99
III.2.4 Conclusion	101
III.3 Calculs tridimensionnels	102
III.3.1 Calcul du potentiel sur une sphère sans source	103
III.3.1.1 Cas test	103
III.3.1.2 Résultats	105
III.3.2 Calcul du potentiel sur une sphère avec source	105
III.3.2.1 Cas test	105
III.3.2.2 Maillage	106
III.3.2.3 Résultats	106
a) Eléments linéaires et quadratiques	108
b) Influence du maillage surfacique	108
c) Précision de la méthode des éléments frontières	111
III.3.3 Règles d'utilisation	114
III.4 Conclusion	114

IV. COUPLAGE DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES	
AVEC UN CODE NAVIER STOKES	116
IV.1 Méthodologie	116
IV.2 Comportement et outils d'analyse du code NSQE	119
IV.2.1 Définition de la convergence	119
IV.2.2 Importance de la relaxation	121
IV.3 Matrice extraite ou complète	126
IV.3.1 Introduction	127
IV.3.2 Comparaison des méthodes sur le coude à 90°	128
IV.3.3 Analyse monodimensionnelle du système	133
IV.3.4 Conclusion et limitations de la résolution complète	138
IV.4 Méthode dite de "déraffinement"	139
IV.4.1 Algorithme de "déraffinement"	139
IV.4.2 Influence du "déraffinement"	
: Cas test du coude à 90°	142
IV.4.3 Mémoire : maillage propre à la pression	146
IV.5 Résolution du système et temps calcul	148
IV.5.1 Analyse du temps calcul	
des différents modules de NSQE	149
a) Calcul des coefficients d'influence	149
b) Calcul des matrices d'influence	150
c) Code NSQE	150
IV.6 Validation du calcul Navier Stokes	152
IV.6.1 Coude courbé à 90°	152
IV.6.2 Coude de Stanitz	153
IV.7 Conclusion	166

V. UTILISATION INDUSTRIELLE : CALCUL D'UNE TURBINE	168
V.1 Présentation du cas test : la turbine ECL	168
V.2 Influence et choix des conditions aux limites	171
V.2.1 Le plan aval du bloc est au bord d'attaque	174
V.2.2 Le plan central du bloc est au bord d'attaque	175
V.2.3 Le plan amont du bloc est au bord d'attaque	176
V.2.4 Remarque sur le choix des condition aux limites	177
V.2.5 Conclusion	180
V.3 Résultats	180
V.4 Conclusion	190
 VI. CONCLUSION	 192
 LISTE DES FIGURES	 196
 BIBLIOGRAPHIE	 202
 ANNEXE 1 : Changement de repère surfacique	 214
 ANNEXE 2 : Calcul de l'équation de pression	 218
A2.1 Termes de rotation	218
A2.2 Termes visqueux	219
A2.3 Termes convectifs	219
A2.4 Terme de pression	221
A2.5 Formulation incompressible de l'équation de pression	221
A2.6 Formulation compressible de l'équation de pression	222

ANNEXE 3 : Calcul des intégrales d'influences	226
A3.1 Calcul des valeurs caractéristiques	226
A3.2 Calcul des coefficients d'influence	228
A3.2.1 Calcul non singulier : $M \notin (\sigma_n)$	228
A3.2.2 Calcul singulier : $M \in (\sigma_n)$	230
A3.3 Exemple	232
A3.4 Analyse de l'erreur de quadrature	234
A3.5 Conclusion	234
ANNEXE 4 : Résolutions intégrales directe et indirecte	236
ANNEXE 5 : Formulations intégrales directes et indirecte	240
A5.1 Cas test : Résolution de $\nabla u^2=0$ sur une plaque plane	240
A5.2 Résolutions directes	242
A5.2.1 Equation intégrale	242
A5.2.2 Résolution pour $M \in (\Gamma)$	243
A5.2.3 Résolution pour $M \notin (\Gamma)$	243
A5.3 Résolution indirecte	244
A5.4 Application numérique	245
A5.4.1 Résolution indirecte	246
A5.4.2 Résolution directe avec sources surfaciques	247
A5.4.3 Résolution directe avec sources externes à (Γ)	247
A5.5 Conclusion	249
Appendice : Calcul analytique des intégrales	250

ANNEXE 6 : Intégrales de volume	252
A6.1 Calcul direct de l'intégrale volumique	253
A6.1.1 Termes sources concentrés	253
A6.1.2 Termes sources quelconques	253
A6.2 Transformation de l'intégrale volumique en intégrale surfacique	254
A6.2.1 Méthode de Galerkin	254
A6.2.2 Utilisation de solutions particulières	255
A6.3 Développement en série	256
A6.3.1 Expansion en série de puissance	256
A6.3.2 Expansion en série de Fourier	258
A6.4 Méthode de Monte-Carlo	260
A6.5 Conclusion	262
ANNEXE 7 : Fondements mathématiques de la méthode intégrale	264
A7.1 Equation de Poisson	264
A7.2 Formules de Green	265
A7.3 Fonctions harmoniques	265
A7.4 Potentiels newtoniens	269
A7.5 Potentiel de simple et double couche	269
A7.6 Régularité des potentiels de simple et double couche	270

NOMENCLATURE

EQUATIONS DE NAVIER STOKES - CODE NSQE

c	: Vitesse du son $[m.s^{-1}]$
$C_p = \frac{p - p_{ref}}{p_{amont} - p_{aval}}$	: Coefficient de pression [-]
$C_v = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2}{p_{amont} - p_{aval}}$	: Coefficient de vitesse [-]
D	: Envergure du canal inter-aube [m]
E	: Energie totale [J]
$\vec{f}_e$	: Forces externes [N]
H	: Enthalpie totale $[m^2.s^{-2}.Kg]$
J	: Jacobien
k	: conductivité thermique
K_i	: Coefficient de pertes de charge
(O, x, y, z)	: Repère cartésien
(O, ξ, η, γ)	: Repère du volume de calcul
P_s, p	: Pression statique [Pa]
P_o	: Pression totale [Pa]
Q	: Débit volumique $[m^3.s^{-1}]$
Q	: Intensité de source ponctuelle
q_H	: Sources internes
r	: Constante des gaz parfaits par unité de masse
$Re = \frac{V D}{\nu}$	: Nombre de Reynolds [-]
t	: Temps [s]
T	: Température [$^{\circ}C$]
$\vec{u}$	: Vecteur vitesse $(u, v, w) [m.s^{-1}]$

α_r	: Paramètre de relaxation
δ	: Symbole de Kronecker
δp	: Correction de pression [Pa]
ϵ_c	: Erreur globale de Neuman
ϵ_d	: Critère de précision sur les coefficients de Dirichlet
$\epsilon_{ex}, \epsilon_{im}$	: Viscosité artificielle
ϵ_{LU}	: Erreur sur la résolution LU
ϵ_Q	: Paramètre de convergence en débit
ϵ_p	: Paramètre de convergence en correction de pression
ϵ_1, ϵ_2	: Critère d'ellipticité
φ	: Flux de chaleur
γ	: Constante
μ	: Viscosité dynamique [Kg.s ⁻¹ .m ⁻¹]
ν	: Viscosité cinématique [m ² .s ⁻¹]
π	: Pi (3.14159 ...)
ρ	: Masse volumique [Kg.m ⁻³]
$\theta = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	: Divergence de vitesse [s ⁻¹]
ω	: Vitesse de rotation [rad.s ⁻¹]
$\vec{\omega}$	: Composante rotationnelle de la vitesse
$\vec{\psi}$	: Composante potentielle de la vitesse
τ	: Tenseur des contraintes [N.m ⁻²]

DISCRETISATION D'UNE SURFACE

(Ω)	: Volume de contrôle
(Γ)	: Surface de contrôle
$\text{mes}(\Gamma)$	: Mesure de la surface de contrôle $[m^2]$
NE	: Nombre d'éléments surfaciques
σ_n	: Élément surfacique ($n \in [1, NE]$)
NK	: Nombre de noeuds par élément
(n, k)	: Noeud k de l'élément n
Φ_k	: Fonction d'interpolation

EQUATION INTEGRALE

$\Delta(M)$	: Fonction Dirac
$u^*(M)$	: Fonction de Green (source en M)
$q^*(M)$	: Fonction $\vec{n} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial n}$

$$h_{n,k}^M = - \int_{(\sigma_n)} \phi_k \cdot q^* d\sigma_n : \text{Coefficient d'influence de Dirichlet}$$

$$g_{n,k}^M = \int_{(\sigma_n)} \phi_k \cdot u^* d\sigma_n : \text{Coefficient d'influence de Neuman}$$

$$H_N^M = \sum_{n,k} h_{n,k}^M \text{ et } (n,k) \equiv N : \text{Coefficient de Dirichlet}$$

$$G_{N,i}^M = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k) \equiv N \\ n_{n,k} = n_i}}^{NE} \sum_{k=1}^{NK_n} g_{n,k}^M : \text{Coefficient de Neuman}$$

T_M	: Coefficient de l'équation intégrale
$\phi(M)$	: Potentiel au point M

SYMBOLES

$'\equiv'$	: 'confondu avec'
3.2	: Figure n°2 du chapitre 3
(3.2)	: Equation n°2 du chapitre 3

DIVERS

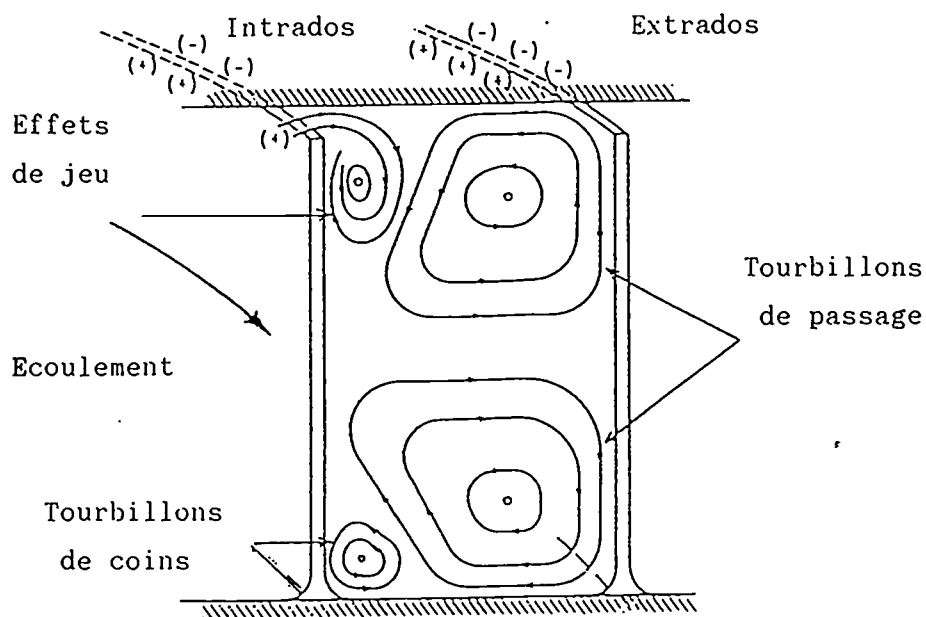
$C^i(\Omega)$	: Espace des fonctions de classe i sur (Ω)
$D(\Omega)$	: Espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans (Ω)
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	: $\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \neq 0 \}$
$A \setminus B$	: $\{ x \in A \text{ tel que } x \notin B \}$

INTRODUCTION

L'amélioration des performances d'une turbomachine nécessite une connaissance fine des écoulements complexes qui s'y développent. En effet, les écoulements internes de turbine, par exemple, sont complètement tridimensionnels, instationnaires et présentent un caractère visqueux prédominant.

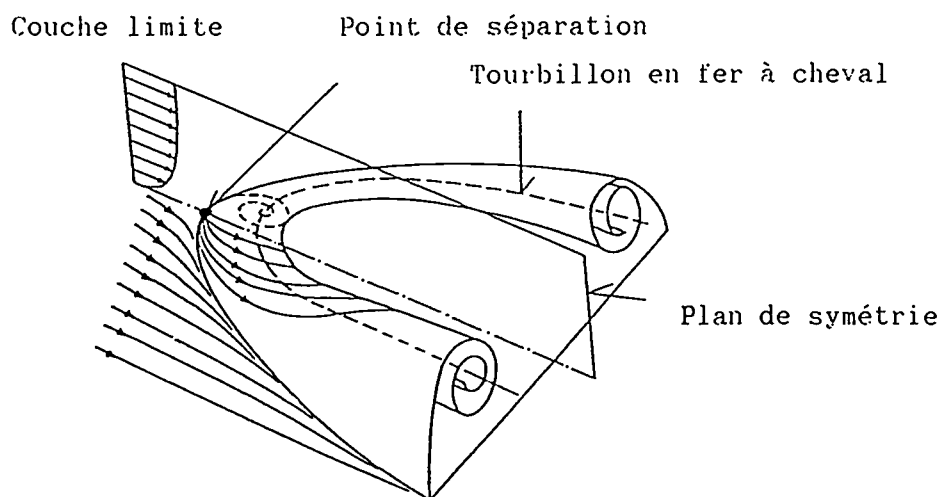
Plusieurs formes d'écoulements tridimensionnels de nature rotationnelle apparaissent dans les machines. En premier lieu, si l'écoulement en amont de la machine est par exemple bidimensionnel avec des couches visqueuses sur les parois du moyeu et du carter, la courbure ou la rotation obligent l'écoulement à développer une vorticité longitudinale dans la direction débitante. Ce mécanisme permet de décrire les écoulements dans les canaux courbes et l'apparition de tourbillons dits de passage dans une grille d'aube (figure I.1). L'interaction des couches limites se développant sur l'aubage et le moyeu, couplé avec le transfert de fluide dû au tourbillon de passage génère aussi un tourbillon de coin. La différence de pression entre les deux faces de l'aubage à proximité du carter induit un transfert de fluide de l'intrados vers l'extrados au travers du jeu entre l'aube et le carter. Un tourbillon de jeu est ainsi créé, qui est lié à la part de circulation résiduelle à l'extrémité de l'aube qui s'échappe dans l'écoulement.

Les tourbillons de bord d'attaque ou "en fer à cheval" (figure I.2) apparaissent suite à l'enroulement de la couche limite autour du bord d'attaque qui crée un tourbillon sur les faces intrados et extrados de l'aubage.



Ecoulements secondaires (VAVRA [1960])

Figure I.1



Création d'un tourbillon en "fer à cheval" (NIEHUIS [1989])
(l'obstacle est supprimé)

Figure I.2

Pour permettre la compréhension de tels phénomènes, les mesures expérimentales, les visualisations et l'analyse mathématique sont

autant d'outils complémentaires et nécessaires pour aborder la physique de ces écoulements.

Dans cette thèse, nous nous plaçons dans le cadre d'une approche numérique. La solution idéale pour reproduire ces phénomènes serait bien sûr d'utiliser les équations de Navier Stokes tridimensionnelles complètes. Néanmoins, des outils de calculs plus simples et moins gourmands, ne serait-ce qu'en taille mémoire, sont indispensables pour être utilisables dans un processus d'analyse.

La technique de parabolisation des équations de transport, consistant à négliger les phénomènes de diffusion dans une direction privilégiée de l'écoulement, où les effets convectifs sont prédominants, est une solution pour réduire le coût du calcul. Cette simplification est adoptée dans notre étude.

Ce travail s'inscrit dans la suite logique des travaux de MARJANI [1987] qui a développé un code Navier Stokes tridimensionnel parabolisé, et plus particulièrement sur le calcul de la pression où une approche originale de correction de pression est utilisée à l'aide de la méthode des éléments frontières.

La méthode des éléments frontières, pendant "surfactive" de la méthode des éléments finis, est maintenant utilisée avec succès dans de nombreuses domaines comme la thermique, la mécanique des solides, l'électrotechnique... , champs d'application où les informations recherchées sont souvent surfaciques. Cette méthode est cependant encore peu utilisée en mécanique des fluides.

L'objet de ce travail est le développement et la mise en évidence des principales caractéristiques de cette méthode afin d'améliorer le calcul de la correction de pression et, le cas échéant, d'en élargir le champ d'application.

Ce document repose ainsi sur trois parties principales. Un premier chapitre expose les caractéristiques du code Navier Stokes Quasi Elliptique (dénommé "NSQE"). Une deuxième partie détaille la théorie et le comportement de la méthode des éléments frontières. La méthode intégrale est décrite au chapitre II. Son utilisation est illustrée sur des cas tests analytiques au chapitre III et le couplage avec le code NSQE est décrit au chapitre IV. Enfin, une troisième partie présente, au chapitre V, le calcul d'un écoulement interne dans un canal inter-aube de turbine rectiligne.

CHAPITRE I

TURBOMACHINES ET METHODES NUMERIQUES

La modélisation numérique des équations de Navier-Stokes complètes dans des configurations de turbomachines industrielles multi-étagées n'est pas encore à la portée des calculateurs existants. Aussi applique-t-on différentes modélisations physiques pour simplifier ces équations et en faciliter la résolution.

Divers degrés de simplification sont décrits ci-dessous. Nous présenterons ensuite les principaux codes, industriels ou de recherche, résolvant des équations complètes de Navier-Stokes. Nous nous limiterons aux codes appliqués aux turbomachines. Cette analyse permettra de discerner l'objectif recherché en développant le code Navier Stokes NSQE, support de ce travail.

I.1 LA MODELISATION TRIDIMENSIONNELLE DES ECOULEMENTS INTERNES

Un écoulement fluide laminaire est correctement décrit par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles complètes associées à des lois d'état et de comportement du fluide

I.1.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q \quad (1.1)$$

avec

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{vmatrix} & Q &= \begin{vmatrix} 0 \\ \rho f_{ex} \\ \rho f_{ey} \\ \rho f_{ez} \\ \rho \vec{f}_e \cdot \vec{u} + q_H \end{vmatrix} \\
 f &= \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Hu - (\vec{\tau} \cdot \vec{u})_x - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix} & (1.2) \\
 g &= \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Hv - (\vec{\tau} \cdot \vec{u})_y - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix} & h &= \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho Hw - (\vec{\tau} \cdot \vec{u})_z - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

où $\vec{f}_e$ représente les forces extérieures, q_H les sources de chaleur, E l'énergie totale et H l'enthalpie totale. Nous considérons uniquement les fluides Newtoniens dont le tenseur des contraintes visqueuses est défini dans le cadre de l'hypothèse de Stokes par :

$$\tau_{ij} = \mu [(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij}] \quad (1.3)$$

Si le fluide est choisi comme parfait, sa loi d'état s'écrit

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (1.4)$$

Les termes H et E s'écrivent alors

$$H = T + \frac{\gamma - 1}{2 \gamma r} \vec{u} \cdot \vec{u} \quad E = \frac{1}{\gamma} T + \frac{\gamma - 1}{2 \gamma^2 r} \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (1.5)$$

L'écoulement devient turbulent lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique. Dans ce cas, une grandeur fluide est souvent décomposée en une partie moyenne temporelle et une fluctuation autour de cette moyenne. Dans la plupart des cas pratiques, les échelles de longueur et de vitesse des structures liées à ces fluctuations sont trop diverses pour que cet écoulement puisse être modélisé numériquement. Le nombre de points requis par le calcul devient alors trop important pour les capacités actuelles des calculateurs. De telles études relèvent de la simulation directe et restent hors de portée d'une application industrielle à ce jour.

I.1.2 Equations de Navier-Stokes moyennées

Un premier niveau d'approximation est obtenu en moyennant les équations en temps et conduit ainsi aux équations de Navier-Stokes moyennées ("Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations").

Le processus de moyenne est introduit de manière à faire apparaître des quantités moyennées $\bar{A}$ et des fluctuations turbulentes A' autour de cette moyenne en temps selon les définitions

$$A = \bar{A} + A' \quad (1.6)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A(\vec{x}, t+\tau) d\tau \quad (1.7)$$

où T est suffisamment grand par rapport à l'échelle de temps caractéristique de la turbulence et suffisamment petit par rapport aux échelles de temps propres aux autres phénomènes instationnaires. Cette opération nécessite l'introduction de lois empiriques qui décrivent le comportement de la turbulence et son interaction avec l'écoulement moyen. La sophistication du modèle de turbulence varie selon le degré de précision désiré et la complexité du cas d'écoulement considéré.

Une mention particulière doit être faite sur les équations de Navier-Stokes incompressibles pour lesquelles la dérivée temporelle de la masse volumique ρ disparaît de l'équation de continuité qui s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

Les méthodes de résolution développées pour les équations compressibles ne sont plus directement applicables et doivent être adaptées pour répondre à cette configuration particulière.

En ajoutant un terme de compressibilité artificielle, sous la forme d'une dérivée temporelle de la pression dans l'équation de continuité (1.10), la formulation compressible est retrouvée selon

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

où β représente une pseudo vitesse du son. Ce terme temporel disparaît à la convergence si une solution stationnaire est recherchée.

Pour les problèmes stationnaires d'un fluide incompressible, l'approche classique consiste à résoudre les équations de quantité de mouvement en prenant leur divergence. Cette opération mène à une équation de Poisson sur la pression qui est utilisée pour forcer la conservation de la masse. Ces méthodes de correction de pression nécessitent alors une procédure itérative entre les champs de vitesse et de pression puisque le premier calcul de vitesse avec l'équation de quantité de mouvement ne vérifie pas forcément la condition de conservation de la masse.

Le code Navier Stokes NSQE, objet de ce travail, utilise une telle approche; aussi consacrons-nous la partie I.2 de ce chapitre à ces

méthodes de correction de pression.

I.1.3 Equations de Navier-Stokes parabolisées

Le niveau d'approximation de l'écoulement peut encore être augmenté en considérant la physique du phénomène étudié.

Lorsque le nombre de Reynolds est élevé et si l'écoulement présente une direction d'écoulement prédominante et un faible niveau de recirculation, l'influence principale des contraintes de cisaillement s'exercera principalement selon la direction transversale à la direction de convection dominante. Nous pouvons conserver alors uniquement les gradients transversaux à la direction principale de l'écoulement dans les termes de diffusion visqueuse et turbulente.

Par exemple, si x est la direction de convection dominante, la divergence du tenseur des contraintes se simplifie comme

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}})_x &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \\ (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}})_y &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \\ (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}})_z &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \end{aligned} \quad (1.10)$$

et le calcul du tenseur $\bar{\bar{\tau}}$ se réduit en

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \simeq - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \tau_{xy} &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \simeq \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{xz} &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \simeq \mu \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les équations de Navier-Stokes sont alors dites parabolisées ("Parabolized Navier-Stokes Equations").

I.1.4 Approximation de la couche limite

A proximité d'une paroi, si z désigne la direction normale à la paroi sur laquelle se développe la couche visqueuse, les dérivées selon x et y dans $\nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \vec{u})$ et $\nabla \cdot \bar{\tau}$ sont négligeables. Les termes f , g et h se simplifient en

$$\begin{aligned}
 f &= \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix} & g &= \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv - k \frac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix} \\
 h &= \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho Hw - \tau_{xz} \cdot u - \tau_{yz} \cdot v - \tau_{zz} \cdot w - k \frac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Une conséquence numérique directe de cette approximation sera un maillage transversal selon z plus raffiné que le maillage longitudinal, c'est-à-dire selon la direction de transport convectif dominant.

Les équations sont encore simplifiées en considérant la famille des écoulements pour lesquelles les régions visqueuses aux parois restent de faibles extensions. Dans ce cas, l'influence des composantes de vitesse normales aux parois est négligeable sur l'écoulement non visqueux hors de la couche visqueuse. Les équations réduites sont donc les équations de Navier-Stokes avec l'approximation de couche limite plus l'hypothèse d'une influence négligeable de la vitesse w normale à la paroi sur les composantes u et v . Nous retrouvons ainsi le modèle classique de Prandtl avec un couplage faible entre l'écoulement sain et la couche limite.

Le calcul de la pression dans cette couche peut alors être découplé du calcul des composantes de vitesses. En conséquence, la pression dans la couche limite $p(x,y,z)$ est prise égale à la pression calculée à la limite de l'écoulement extérieur non visqueux $p_e(x,y)$ et les vitesses à la frontière des zones visqueuse et non visqueuse sont prises égales aux vitesses calculées à cet endroit par le calcul non visqueux. Le système à résoudre dans la couche visqueuse est donc diminué d'une équation. Ce modèle d'approximation est dénommé "modèle de couche limite mince".

Dans l'application classique de ce modèle, la zone non visqueuse est souvent étendue jusqu'à la paroi, en raison de la très faible épaisseur de la couche visqueuse.

Dans le cas où l'interaction entre la zone visqueuse et la zone non visqueuse est significative, ce qui implique que la pression statique varie selon la normale à la paroi, ou lorsque l'épaisseur de la couche visqueuse est non négligeable (zones décollées réduites), un processus de couplage itératif entre l'écoulement visqueux et l'écoulement non visqueux peut être utilisé. Le couplage est alors dit fort. KULISA [1989] utilise cette approche.

I.1.5 Equations d'Euler

En négligeant tous les termes de diffusion, nous obtenons les équation d'EULER où les termes f , g et h s'expriment selon

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{vmatrix} \quad g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho Hv \end{vmatrix} \quad h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

L'écoulement considéré est alors non visqueux. Cette hypothèse est valide hors des zones visqueuses à proximité des parois solides. Le problème est d'une nature différente des formulations précédentes qui contiennent des termes visqueux. Les dérivées secondes étant éliminées, la nature du système à résoudre et le choix de conditions aux limites sont modifiés. Notons que dans un cas instationnaire où $\partial/\partial t \neq 0$, les équations ont une nature hyperbolique.

Dans le cas où les zones visqueuses aux parois sont de très faibles épaisseurs, plus généralement si l'effet de déficit de masse lié aux couches visqueuses pariétales est introduit au niveau des conditions limites des équations d'Euler, ce modèle est utilisable au moins pour la zone saine de l'écoulement, même si des décollements apparaissent à la paroi.

Par exemple, pour une application aux écoulements internes de turbomachines multi-étagées, la description fine de l'écoulement visqueux instationnaire tridimensionnel est difficile à obtenir avec les moyens informatiques existants. Or de tels calculs sont indispensables pour calculer le niveau de perte dans un étage complet. Ainsi, au lieu de chercher à modéliser, c'est-à-dire notamment mailler, finement chaque zone critique (jeu inter-aube, ...), le niveau de perte est fourni par des lois de distributions semi-empiriques introduites dans le modèle des équations d'Euler. L'objectif n'est pas ainsi de calculer exactement les pertes dans chaque zone de même que leur transport diffusif. Les termes diffusifs sont remplacés par des forces externes dépendantes des autres quantités de l'écoulement, sans faire intervenir de dérivées secondes de la vitesse (EL GHAZANI [1990]).

Ces lois semi-empiriques peuvent consister à répartir des pertes locales sur la base de profils de vitesse dans les couches limites.

En pratique, les mécanismes de diffusion et de pertes dans les termes de contraintes sont souvent négligés. Ainsi les codes résolvant les équations d'Euler donnent de très bons résultats pour les écoulements internes de turbine lorsque les conditions aux limites amont contiennent les informations réelles sur les pertes. Les résultats sont excellents notamment au bord d'attaque où de forts écoulements convectifs tridimensionnels sont observés.

I.1.6 Résolution potentielle

L'ultime simplification des équations non visqueuses est obtenue en supposant l'écoulement irrotationnel avec

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla} \phi. \quad (1.14)$$

L'écoulement est alors potentiel et le champ de vitesse résulte directement d'un scalaire potentiel ϕ . L'écoulement sera totalement déterminé par les conditions initiales et les conditions aux limites sans modélisation spécifique.

I.1.7 Trois familles de résolution

En résumé, la modélisation des équations de Navier-Stokes se décompose en trois groupes. La première famille de modélisation tient compte des effets visqueux (équations complètes, moyennées, parabolisation, modèle de couche limite). Le second groupe de modèles traite les équations d'Euler, en négligeant les effets visqueux. En supposant de plus l'écoulement irrotationnel apparaît la famille des codes potentiels.

La résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles nécessite l'introduction d'un terme de compressibilité artificielle ou d'une méthode de correction de pression. Cette dernière approche est abordée ci-dessous.

I.2 LES METHODES DE CORRECTION DE PRESSION

Les méthodes de correction de pression sont intéressantes à plusieurs titres. A faible nombre de Mach, la convergence est très rapide. La pression étant calculée implicitement, le nombre de points de maillage est réduit par rapport aux méthodes explicites en temps puisque des rapports de mailles élevés peuvent être appliqués.

Cette approche est applicable à une large gamme d'écoulements laminares ou turbulents. Des extensions aux écoulements transoniques sont possibles. La formulation de l'équation de correction doit alors être reformulée (MOORE [1989]).

Les méthodes de correction de pression s'ordonnent classiquement en trois catégories suivant la prise en compte des phénomènes qui génèrent une transmission d'informations de l'aval vers l'amont.

Trois mécanismes principaux peuvent être identifiés.

- Le transport convectif à contre courant (zone décollée).
- Les courbures des lignes de courant qui induisent des gradients transverses de pression.
- Le transport diffusif de quantité de mouvement selon la direction convective dominante ξ .

Il est à noter que les décollements dans la direction prédominante ξ tels ceux liés aux tourbillons en fer à cheval du bord d'attaque induisent simultanément les trois effets ci-dessus.

Un calcul purement parabolique ne tient compte d'aucune de ces influences et la qualité du champ de pression initial est primordiale pour assurer la convergence de la procédure de marche selon ξ . Les procédures elliptiques complètes assurent le transfert de toutes ces influences. Enfin, les calculs

partiellement paraboliques sont un compromis où seule la pression est traitée de manière rigoureusement tridimensionnelle.

Le champ de correction de pression peut être calculé selon une résolution volumique ou surfacique.

Les méthodes volumiques comme les différences finies (MOORE [1989]), les volumes finis ou les éléments finis (ASLAN [...]) offrent l'avantage de conserver la même procédure pour la résolution des champs de vitesse et de pression. Par contre, elles nécessitent une taille mémoire importante puisque la correction de pression est calculée à chaque noeud du maillage. La taille du domaine d'influence est donc nécessairement limitée.

A l'opposé, les résolutions surfaciques (EL MARJANI [1987]) permettent de s'affranchir de cette limitation puisque seule la surface est discrétisée. Un algorithme particulier doit cependant être développé pour résoudre l'équation de pression. Le calcul des corrections internes peut soulever des problèmes de taille mémoire puisqu'il faut a priori tenir compte de l'influence de tous les points de la surface.

Le paragraphe suivant présente un succinct tour d'horizon des différents codes Navier Stokes tridimensionnels existants appliqués aux écoulements internes de turbomachines. Des exemples de codes instationnaires sont cités à titre indicatif.

1.3 LES CODES NAVIER STOKES TRIDIMENSIONNELS APPLIQUES AUX TURBOMACHINES

CAMBIER [1989] a développé un code Navier-Stokes tridimensionnel qui résout les équations de Navier-Stokes stationnaires compressibles moyennées complétées par un modèle de turbulence algébrique de type longueur de mélange. La méthode numérique se

caractérise par l'utilisation d'un schéma de LAX-WENDROFF aux volumes finis (NI [1982]) explicite centré associé à un accélérateur de convergence de type "multigrille". Ce code a été testé sur la géométrie de la turbine ECL décrite au chapitre V. Le maillage associe deux sous-domaines en H et un sous-domaine en O. Les tailles de mailles selon la normale à la paroi sont voisines de $0.2 \cdot 10^{-4}$ Cx sur l'aubage où Cx est l'encombrement axial de l'aube. Ce calcul utilise 315 383 points sur une demi-grille et le temps calcul est d'environ 20 μ s par point et par itération soit dix heures sur un CRAY-2. Il a permis de mettre en évidence des écoulements secondaires complexes comme les tourbillons secondaires contrarotatifs près du point de jonction entre la paroi latérale et le bord d'attaque de l'aube.

Le code de HAH [1989] utilise les équations de Navier Stokes moyennées résolues avec un modèle de turbulence k- ϵ pour estimer les tenseurs de Reynolds et les flux thermiques. Le solveur numérique repose sur une approche aux volumes finis. La solution stationnaire est obtenue selon une approche évolutive en temps à trois pas de temps. Un pas de prédiction semi-implicite et deux pas de corrections implicites sont appliqués. A chaque itération temporelle, une correction de pression globale permet d'assurer la conservation de masse. Les grandeurs d'arrêt sont imposées à l'entrée du canal et la pression statique en sortie.

DAWES [1986] propose un code Navier Stokes tridimensionnel visqueux compressible. Les équations moyennées de Navier Stokes sont écrites dans un repère relatif à l'aube en coordonnées cylindriques selon l'approche des volumes finis. La turbulence est traitée par le modèle de longueur de mélange de Baldwin Lomax en utilisant la distribution de vortacité pour déterminer les différentes échelles caractéristiques. L'algorithme de résolution est basé sur un schéma implicite en temps de BEAM et WARMING [1978] modifié (DAWES [1985]). Le code utilise des maillages en H.

Des exemples d'applications de ce code sont exposées dans DOMINY [1989], HORTON [1989] et WEGENER [1989].

Signalons quelques codes Navier Stokes instationnaires bidimensionnels ou tridimensionnels présentés par SIDEN [1990], YANG et al [1988], RAI [1988] et HUFF [1989]. Citons également les codes Euler instationnaires de FRANSSON [1986], GEROLYMOS [1990] et GILES [1988] par exemple.

De tels codes restent cependant coûteux en mémoire et temps calcul. L'hypothèse de parabolisation permet de diminuer ces coûts mais reste inapplicable dans une configuration générale. WARFIELD et LAHSHMINARAYANA (WARFIELD [1987], WARFIELD et LAHSHMINARAYANA [1987]) proposent une approche par zones définies selon le degré d'ellipticité de l'écoulement. Lorsque l'ellipticité est forte, les équations de Navier Stokes incompressibles stationnaires tridimensionnelles complètes sont résolues. Dans le cas contraire, les équations parabolisées sont employées. Les équations complètes sont résolues avec une méthode de marche temporelle en utilisant une technique de pseudo-compressibilité. Dans les zones paraboliques, une méthode de marche selon la direction convective prédominante de l'écoulement est employée.

L'algorithme de résolution se décompose en plusieurs étapes. Le canal entier est traité avec les équations elliptiques complètes jusqu'à une convergence à 10 % d'erreur. Les résultats permettent à la fois de pré-définir les zones paraboliques ou elliptiques et d'initialiser la pression dans les zones paraboliques. Ces dernières sont ensuite traitées selon un processus itératif de marche de l'amont vers l'aval jusqu'à obtenir la convergence.

Le problème réside dans la définition du critère d'ellipticité qui permet de définir le caractère d'une zone et son étendue. Les auteurs introduisent deux coefficients définis comme

$$\epsilon_1^3 = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right]^2 \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial x}} \quad \epsilon_2^3 = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{array} \right]^2 \frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{\frac{\partial p}{\partial x}} \quad (1.15)$$

Lorsque l'écoulement est purement parabolique, si x est la direction prédominante de l'écoulement par exemple, les gradients $\frac{\partial p}{\partial y}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$ tendent vers zéro et le terme diffusif $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ disparaît d'où l'annulation de ϵ_1 et ϵ_2 .

Le calcul sur l'écoulement autour d'un obstacle cubique (maillage 25x25x50) démontre la qualité des résultats et attestent de l'importance d'une bonne localisation des zones paraboliques et elliptiques. Le gain en temps calcul par rapport à une résolution complète de type elliptique varie entre 2.5 et 6 selon la configuration.

GALLUS [1989] a développé un code tridimensionnel partiellement parabolique. La méthode utilise une procédure de marche de l'amont vers l'aval selon la direction prédominante de l'écoulement. Une méthode de correction de la pression, déduite de l'équation de continuité, est utilisée. Une première correction est appliquée pour conserver globalement le débit et une seconde correction locale est introduite pour corriger localement les éventuels défauts de masse. Ce processus est répété jusqu'à la vérification de la conservation de la masse. La résolution nécessite un champ de pression initial obtenu avec un calcul non visqueux quasi-tridimensionnel. Le champ d'initialisation de pression est donc déjà tridimensionnel ce qui favorise fortement le calcul du champ de vitesse. Un calcul complet de pression est réalisé dans le canal entier à la fin de chaque balayage. Un modèle de turbulence $k-\epsilon$ est utilisé. Des résultats sont présentés sur une turbine de l'institut Von Karman. Les maillages sont de 30^3 noeuds environ. L'accord entre les mesures expérimentales et les

résultats est correct sauf aux parois aussi le calcul des couches limites est-il mis en cause.

EL MARJANI propose un code tridimensionnel incompressible visqueux partiellement parabolique, prédécesseur du code NSQE exposé dans ce document, qui utilise une méthode de correction de pression originale. Le laplacien de pression est traité sur un volume délimité par trois sections longitudinales consécutives avec une méthode intégrale sur les parois (méthode des éléments frontières). Cependant, le système intégral est simplifié en raison des capacités limitées des calculateurs alors disponibles et des difficultés apparaissent lorsque les effets elliptiques deviennent trop importants. Les résultats sont néanmoins très satisfaisants sur des géométries comme un canal en S et un canal coudé à 90 degrés (EL MARJANI [1987]).

Une mention particulière doit être faite sur les travaux de SKERGET qui étudie la résolution des équations de Navier-Stokes visqueuses incompressibles par la méthode des éléments frontières. En raison de l'originalité de cette approche qui cadre avec l'objet de cette étude, nous développons cette démarche.

Soit un écoulement incompressible. La vitesse est décomposée en ses composantes rotationnelle $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{u}$ et potentielle $\vec{\Psi}$ telle que $\vec{u} = \nabla \wedge \vec{\Psi}$ où $\nabla \cdot \vec{\Psi} = 0$. En appliquant l'opérateur rotationnel de l'équation de quantité de mouvement, une fois la vorticité $\vec{\omega}$ introduite, le terme de pression disparaît et l'équation devient

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} = \nu \Delta \vec{\omega} - \nabla \wedge \beta(T-T_0) \vec{g} \quad (1.16)$$

L'équation de continuité s'écrit $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{\Psi}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\Psi}) - \Delta \vec{\Psi}$ soit

$$\Delta \vec{\Psi} = - \vec{\omega} \quad (1.17)$$

Il faut noter que seule une formulation intégrale permet de traiter proprement un problème en formulation $(\vec{\Psi}, \vec{\omega})$, car les conditions à la limite sur $\vec{\omega}$ ne sont pas disponibles aux parois explicitement mais implicitement via deux conditions de Neuman et de Dirichlet sur $\vec{\Psi}$.

Pour une application bidimensionnelle, la vorticité se réduit à une seule composante orthogonale au plan de l'écoulement et l'équation (1.17) est scalaire. Par l'application du théorème de Green, les équations locales (1.16) et (1.17) sont transformées en équations intégrales surfaciques et volumiques discrétisées ensuite en fonction du maillage (chapitre II). Les conditions aux limites sont de type Dirichlet et Neuman.

Des résultats d'écoulements bidimensionnels laminaires sont présentés dans un canal avec un élargissement brusque (SKERGET [1985]) et un obstacle carré [1989.a] et pour des cavités ([1986], [1988], [1989.b]).

Des résultats tridimensionnels sont également présentés dans un tube incliné ([1989.c]). La formulation théorique des équations de Navier Stokes tridimensionnelles turbulentes est présentée [1989.d] avec un modèle de turbulence de type k- ϵ . Néanmoins, le traitement d'écoulements sur des géométries complexes tridimensionnels n'est pas encore envisageable.

I.4 GENESE DU CODE NSQE

Le code NSQE est présenté ici dans ses grandes lignes. Le code initialement développé par EL MARJANI [1987] était parabolisé et ne traitait que des écoulements laminaires incompressibles. Le calcul de la correction de pression par la méthode des éléments frontières restait approché. POMMEL [1990] a introduit un modèle de turbulence et la compressibilité dans les équations de vitesse. La contribution de la présente étude concerne avant tout la méthode des éléments frontières. Une étude approfondie du comportement de cette méthode est en effet nécessaire pour optimiser son utilisation. Le couplage de cette méthode avec le

code NSQE, qui reste seulement un support d'application, est présenté sans l'approximation purement parabolique de EL MARJANI. Le comportement numérique ne sera donc abordé qu'au travers de l'influence du calcul de la correction de pression.

Une première partie expose le traitement de la vitesse et de la température. Il convient cependant de se reporter à POMMEL [1990] qui a particulièrement abordé ces points. Une deuxième partie traitera de la pression. L'algorithme sera alors développé avec les conditions aux limites.

I.4.1 EQUATIONS POUR LE CALCUL DE LA VITESSE ET DE LA TEMPERATURE

Les équations de quantité de mouvement sont écrites sous forme faiblement conservative dans le repère transformé (ξ, η, γ) où ξ désigne la direction longitudinale de l'écoulement et (η, γ) les directions transversales.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \gamma} + H = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \gamma} + H_v \right\} + D \quad (1.18)$$

avec $J.q = (\rho u, \rho v, \rho w)$ et J le jacobien de la transformation du repère initial (x, y, z) au repère transformé (ξ, η, γ) . E , F et G sont les vecteurs convectifs, E_v , F_v et G_v sont les vecteurs diffusifs. Selon l'hypothèse de parabolisation, les dérivées $\frac{\partial}{\partial \xi}$ sont éliminées des termes diffusifs. H et H_v sont les vecteurs associés à la courbure du repère initial et D contient les termes de rotation.

Deux modèles de turbulence, le premier basé sur les travaux de BALDWIN et LOMAX [1978] et le second selon ceux de BULEEV, sont implantés.

Le système (1.18) est discrétisé selon un schéma implicite en temps. Les dérivées spatiales selon ξ sont discrétisées au deuxième ordre et centrées à la station $i-1/2$.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_{i-1/2}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta \xi} + \theta(\Delta \xi^2) \quad (1.19)$$

Les moyennes sont écrites comme :

$$f_{i-1/2} = \frac{1}{2} \left(f_i + f_{i-1} \right) + \theta(\Delta \xi^2) \quad (1.20)$$

En effectuant le calcul de l'amont vers l'aval, appelé dans la suite "processus de balayage", le système (1.18) doit être vérifié entre les stations ξ_{i-1} et ξ_i avant de traiter le bloc suivant (ξ_i, ξ_{i+1}). Ainsi la correction de vitesse de la station amont ξ_{i-1} est-elle considérée comme nulle : $\Delta q_{i-1} = 0$. A l'itération temporelle n , le schéma selon ξ se décompose ainsi :

$$\left\{ I + h.A_i^n + h.\frac{\partial}{\partial \eta} B_{i-1/2}^n + h.\frac{\partial}{\partial \gamma} C_{i-1/2}^n \right. \quad (1.21)$$

$$\left. + \epsilon_{im} \frac{h}{J} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right\} \right\} \Delta q_i^n = \text{Res}_i^n - \frac{1}{4} \epsilon_{ex} \frac{h}{J} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^4}{\partial \gamma^4} \right\} q_i^n$$

A, B et C sont les matrices jacobienues issues de la linéarisation des vecteurs convectifs et diffusifs. Pour assurer la stabilité du processus itératif, il est nécessaire d'introduire des termes de viscosité artificielle dans le plan transversal. Un terme du quatrième ordre ϵ_{ex} est ajouté dans le membre de droite tandis qu'un terme du deuxième ordre ϵ_{im} est intégré au membre implicite.

Deux schémas de résolution du terme implicite de (1.21) ont été testés et utilisés. Le premier est le schéma factorisé de BEAM et WARMING [1978]. Ce dernier est basé sur une factorisation de l'opérateur implicite dans le membre de gauche de (1.21). Il permet d'obtenir des systèmes tridiagonaux pour des blocs de matrices 3x3 ou 4x4 avec la température. Chaque matrice tridiagonale est traitée avec la décomposition LU proposée par

PULLIAM et STEGER [1980].

Une résolution de type Gauss-Seidel est également utilisée pour traiter les matrices pentadiagonales provenant de la discrétisation directe de (1.21). Un algorithme d'accélération de convergence, nommé MMPE, basé sur les travaux de SIDI [1986] est ensuite appliqué au vecteur issu du module Gauss-Seidel. Cette résolution est détaillée dans BENBOUTA [1989]. Le gain est voisin de 8.9 en mode vectoriel sur un ALLIANT FX-80 par rapport à la résolution factorisée de BEAM et WARMING. Outre le gain notable en temps calcul, il est important de noter la plus grande souplesse d'utilisation de la résolution de type Gauss-Seidel qui peut potentiellement traiter des discrétisations spatiales d'ordre plus élevé ou des opérateurs implicites très variés. De plus, la structure informatique du code est globalement plus simple.

Les conditions aux limites sont de deux types. En présence de parois, des conditions d'adhérence sont appliquées tandis que des conditions de périodicité sont introduites pour représenter les frontières libres du canal inter-aubes. Les conditions aux limites de température aux frontières sont de type Dirichlet ($T = T_0$) ou Neuman ($h \frac{\partial T}{\partial n} = q_0$).

I.4.2 EQUATION POUR LE CALCUL DE LA PRESSION

L'équation permettant le calcul de la pression est obtenue en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement (Annexe 2). Dans le cas d'un écoulement compressible, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = 2\rho \left\{ \frac{1}{2\rho} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2\rho} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \rho \\ - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \nu \nabla(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho) + (\rho \vec{V} \cdot \nabla) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} + 2 \rho \varphi + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} + f(\theta) \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\text{avec } f(\theta) = - \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla^2 \theta + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \theta - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \{\rho \vec{v} \theta\} \quad (1.23)$$

$$\text{où } \theta = \nabla(\rho \vec{U}) \text{ et } \vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{U} \quad (1.24)$$

En supposant qu'à l'itération temporelle n , la pression statique p^n vérifie (1.22), la résolution des équations de quantité de mouvement génère une divergence de $\rho \vec{U}$ non nulle qui n'est plus compatible avec la conservation de la masse. La pression p^{n+1} est alors calculée à partir d'une correction de pression δp générant $f(\theta) = 0$.

$$(1.25) \quad \nabla^2 \delta p = - f(\theta)$$

$$(1.26) \quad p^{n+1} = p^n + \delta p$$

Par suite de la linéarité de l'opérateur "f" par rapport à θ , la condition $f(\theta) = 0$ induit $\theta = 0$, compte-tenu des conditions aux limites sur le domaine (flux nul ou périodicité). La conservation de la masse est ainsi vérifiée.

La fonction $f(\theta)$ est généralement simplifiée. La correction de pression est approchée et le champ de vitesse vérifie la condition de divergence nulle à la convergence seulement.

La formulation simplifiée de l'équation de pression testée en écoulement incompressible est

$$\nabla^2 \delta p = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta \cdot U) - (\lambda + 2\mu) \Delta \left(\frac{\theta}{\rho} \right) \simeq \nabla(\theta \cdot U) \simeq 2 J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\theta}{J} U^\xi \right)$$

où J est le Jacobien de la transformation géométrique et U^ξ la composante contravariante de vitesse selon ξ . L'équation de correction de pression n'est plus alors qu'un "guide de convergence".

La différence de comportement du calcul entre les équations simplifiée et complète reste faible selon notre expérience, avec un avantage en vitesse de convergence pour l'équation complète.

Un coefficient de relaxation α_r compris entre 10 et 1% est appliqué à la correction de pression δp .

PATANKAR [1980] établit l'équation de pression à partir d'une version simplifiée de la divergence des équations de quantité de mouvement discrétisée. Cette simplification nécessite l'utilisation d'un coefficient de relaxation également. Dans notre cas, cette relaxation est obligatoire quelque soit le degré de simplification de l'équation.

Dans une méthode de marche classique, seul le plan courant selon la direction longitudinale intervient lors du calcul de la correction de pression qui est alors bidimensionnelle (GRUNDMANN [1986]). Or dans un écoulement subsonique, la pression introduit un caractère elliptique entre l'amont et l'aval qui est traduit par l'utilisation d'un opérateur laplacien dans (1.22). Une discrétisation volumique au second ordre de (1.25) conduit d'ailleurs à utiliser trois plans ξ_{i-2} , ξ_{i-1} et ξ_i pour assurer un traitement tridimensionnel et une condition de continuité adéquate des dérivées de pression selon ξ . Le calcul de la correction de pression doit donc être tridimensionnel. Par contre, les termes de diffusion pour la vitesse n'existant plus, deux plans ξ_{i-1} et ξ_i suffisent pour calculer la vitesse. Une incompatibilité entre les calculs de vitesse et de pression apparaît ainsi (figure 1.1). Son traitement est exposé ci-dessous.

La méthode est appliquée à des écoulements subsoniques compressibles ou incompressibles. Le transfert d'information de l'aval vers l'amont ne se réalise correctement que si le gradient longitudinal de pression $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ est décentré vers l'aval (RUBIN

[1982]). Ceci est lié à la présence de valeurs propres négatives associées à l'opérateur convectif dans (1.18) induites par la pression (MARJANI [1987]). Les équations (1.18) et (1.24) sont écrites en $i - 1/2$. Ainsi, l'écoulement amont (plan ξ_{i-1}) étant imposé, les variables de vitesse $\vec{V}$ sont calculées au plan ξ_i .

L'équation donnant la pression est écrite en $i-1$ où la correction de pression δp est calculée. En résolvant l'équation de pression (1.25), l'écoulement amont (plans ξ_{i-2} , ξ_{i-1}) étant connu, seule la divergence θ en $\xi_{i-1/2}$ est supposée non nulle. Les conditions aux limites selon ξ sont les suivantes. Nous imposons la pression en aval (plan ξ_i). Au plan amont ξ_{i-2} , nous imposons au choix une condition de Dirichlet ou de Neuman sur la correction de pression.

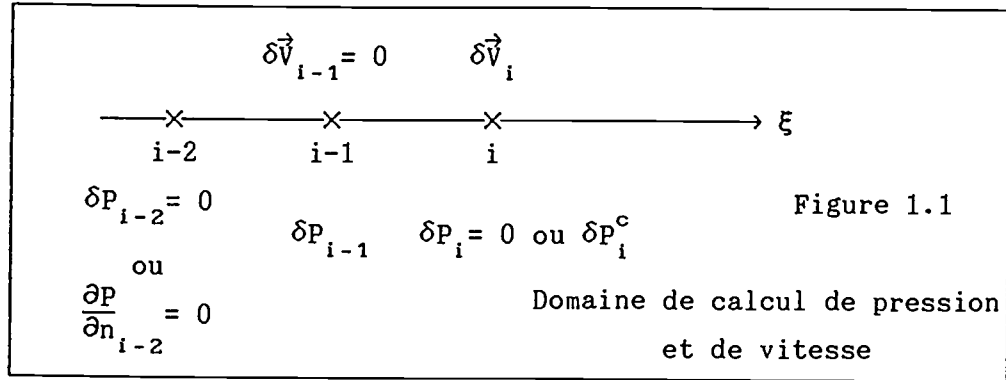
L'imposition d'une condition de Dirichlet, $\delta p = 0$, sur la pression au plan aval, pour un écoulement subsonique, peut générer des perturbations Δw_k réfléchies sur le plan aval et transportées dans le canal interne par les caractéristiques entrantes. Suite au calcul de la correction de vitesse $\delta \vec{V}$, il est alors intéressant de calculer une correction de pression δp_i^c au plan aval en appliquant en ξ_i la condition de non réflexion $\Delta w_k = 0$ à la valeur propre λ_k négative. Néanmoins, l'utilisation de cette condition ne permet pas d'assurer la conservation du niveau de pression aval p^* imposé. RUDY [1980] propose l'utilisation d'un facteur positif κ dans la condition précédente sous une formulation du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\kappa}{\rho c} (p - p^*) = 0 \text{ au plan aval } i$$

Quel que soit κ , la pression au plan aval vérifiera à convergence l'égalité $p - p^* = 0$. La valeur du coefficient κ est variable selon la configuration de calcul.

Dans le cadre du code Navier Stokes, de telles approches sont en cours d'étude. Ces techniques semblent intéressantes pour pallier

aux problèmes de convergence rencontrés à l'aval de la configuration du coude de Stanitz comme nous le montrons au chapitre IV.



Nous introduisons dans ce qui suit une formulation intégrale de (1.25) où la pression est calculée en deux étapes.

Le calcul de la correction δp est d'abord réalisé sur la frontière du domaine considéré $(\xi_{i-2}, \xi_{i-1}, \xi_i)$.

L'avantage de cette méthode est d'assurer une bonne précision de calcul de la pression où son influence est particulièrement sensible. En effet, nous avons noté que les effets visqueux étaient particulièrement sensibles aux gradients $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ à la paroi.

Pour calculer la pression interne, les corrections à la frontière servent de conditions aux limites pour une résolution bidimensionnelle du laplacien au plan ξ_{i-1} . La méthode intégrale n'est pas utilisée pour calculer les corrections internes en raison de la taille mémoire alors exigée. Le choix de cette résolution interne bidimensionnelle sera justifié ultérieurement.

Cette résolution et ce couplage entre les calculs de correction de pression tridimensionnel et bidimensionnel sont détaillés aux chapitres III et IV.

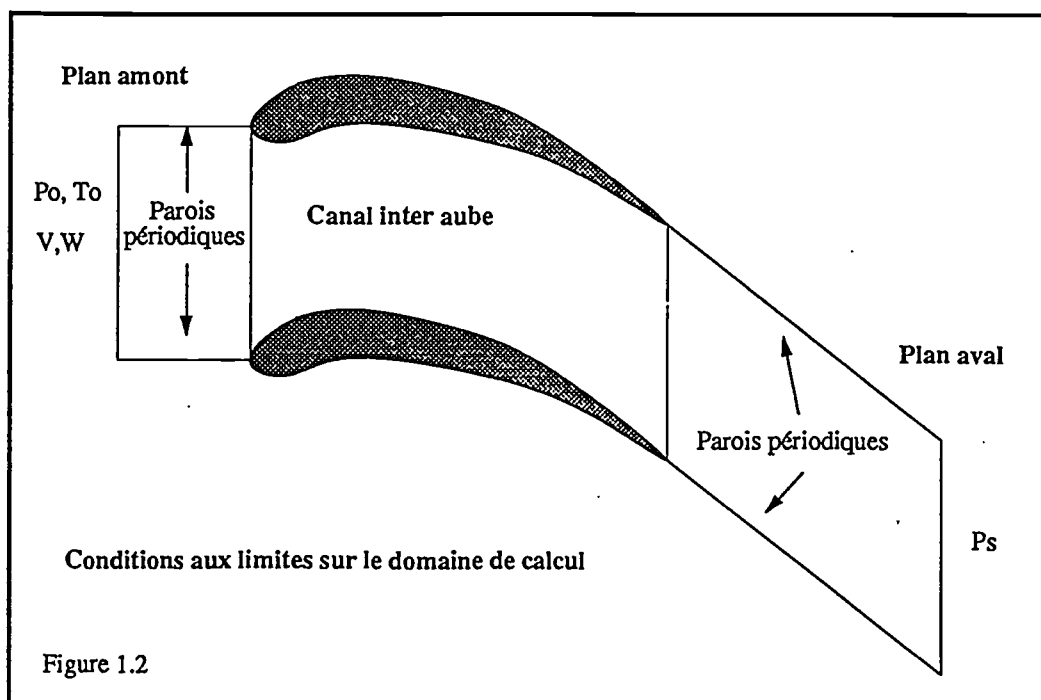
I.4.3 CONDITIONS AUX LIMITES ET ALGORITHME DE RESOLUTION

I.4.3.1 Conditions aux limites

La pression statique est imposée à l'aval du canal inter-aube. En amont, les grandeurs totales sont imposées (figure 1.2). Les composantes transversales de vitesse sont prescrites au premier plan. La composante de vitesse longitudinale est fournie pour l'initialisation du calcul. Le champ de pression statique est initialisé dans le canal entier. Notons que le comportement numérique du calcul est très sensible à ce champ.

De nombreux auteurs utilisent en effet des champs de pression initiaux déjà tridimensionnels obtenus à partir de calculs quasi tridimensionnels (GALLUS [1989]) ou suite à un calcul approché à l'aide d'un code Navier-Stokes complet (WARFIELD [1987]).

Nous cherchons cependant à éviter cette démarche en fournissant un champ initial bidimensionnel potentiel. Une utilisation simple du code est ainsi assurée.



Des conditions de périodicité de vitesse et de pression sont imposées en amont et aval du canal inter-aube. La dérivée normale de pression est fixée comme nulle aux parois solides. Cette hypothèse est vérifiée pour les écoulements à nombre de Reynolds élevés.

Une condition de non-glissement est imposée sur les parois pour la vitesse.

I.4.3.2 Correction monodimensionnelle

Dans une méthode parabolisée classique, le débit est fixé puisque le champ de vitesse est imposé en amont. La pression statique aval est alors un résultat du calcul.

Dans notre approche parabolisée quasi elliptique, la pression P_0 et la température d'arrêt et les composantes transversales de vitesse sont fixées en amont et la pression statique à l'aval du canal. Ces conditions sont de nature identique sur la totalité du canal et pour chaque résolution dans les domaines internes à 3 plans $(\xi_{i-2}, \xi_{i-1}, \xi_i)$.

Ainsi, à l'amont de chaque domaine (plan ξ_{i-1}), les conditions d'arrêt et les vitesses transversales sont imposées et la pression statique est imposée au plan ξ_i . A chaque itération temporelle, le calcul des corrections de pression δP_{i-1} appliquées en ξ_{i-1} introduit une difficulté pour conserver localement la pression totale dans le plan ξ_{i-1} et la vitesse en ξ_i .

Pour remédier à ce point, une correction monodimensionnelle est appliquée pour assurer la conservation globale de la pression totale dans le plan ξ_{i-1} . Un coefficient de perte K_i entre les plans de calcul ξ_{i-1} et ξ_i est introduit selon

$$P_{0_{i-1}} = P_{0_i} + K_i \rho \frac{V_{i-1}^2 + V_i^2}{2} \quad (1.27)$$

Les variables Po_i et V_i représentent la pression totale et la vitesse moyennées dans le plan ξ_i .

En appliquant les définitions de Po_{i-1} , Po_i et l'équation (1.27) aux plans ξ_{i-1} et ξ_i , il vient

$$\frac{1 - K_i}{1 + K_i} Po_{i-1} + \frac{K_i}{1 + K_i} Ps_{i-1} - \frac{1}{1 + K_i} Ps_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 \quad (1.28)$$

ou encore

$$a_{i-1} Po_{i-1} + b_{i-1} Ps_{i-1} + b_i Ps_i = \frac{1}{2} \rho V_i^2 \quad (1.29)$$

où

$$a_{i-1} = \frac{1 - K_i}{1 + K_i} ; b_{i-1} = \frac{K_i}{1 + K_i} ; b_i = - \frac{1}{1 + K_i} \quad (1.30)$$

En couplant l'équation (1.29) à la définition de la pression totale en ξ_i , $Po_i = Ps_i + \frac{1}{2} \rho V_i^2$, nous calculons deux corrections moyennes δPs_{i-1}^* et δV_{i-1}^* afin de corriger la pression totale moyenne dans le plan $i-1$ et le débit entre les plans $i-1$ et i .

Nous introduisons la correction de débit $\delta Q_i = Q_i - Q^*$, où Q^* est le débit qui vérifie la loi de perte et la conservation de Po_{i-1} .

Pour calculer δPs_{i-1}^* , l'équation (1.29) est différenciée selon

$$a_{i-1} \delta Po_{i-1}^* + b_{i-1} \delta Ps_{i-1}^* + b_i \delta Ps_i^* = \frac{1}{2} \rho d[V_i^2] \quad (1.31)$$

avec

$$\frac{1}{2} \rho d[V_i^2] = \rho \left\{ \vec{V}_i \frac{d\vec{M}}{d\xi} \right\} \frac{dQ_i}{\vartheta_i} \quad (1.32)$$

et

$$\delta P_{o_{i-1}} = \delta P_{s_{i-1}}^* + \frac{1}{2} \rho d[v_{i-1}^2]$$

où ϑ_i est le volume situé entre les plans ξ_{i-1} et ξ_i et Q_i le débit traversant la section ξ_i .

En imposant $\delta P_{s_i}^* = 0$, la correction de pression $\delta P_{s_{i-1}}^*$ et le débit Q^* sont calculés à partir des débits Q_i et Q_{i-1} et de la relation $\delta P_{o_{i-1}}^* = 0$ souhaitée.

La pression statique moyenne dans le plan ξ_{i-1} et le débit sont ainsi corrigés en fonction du débit dans le plan ξ_i et de la pression d'arrêt moyenne imposée en ξ_{i-1} selon

$$\begin{cases} P_{i-1} = P_{i-1} + \delta P_{s_{i-1}}^* \\ V_{i-1} = V_{i-1} + \delta V_{i-1}^* \end{cases} \quad (1.33)$$

Lorsque le calcul dans un domaine restreint est convergé, cette méthode de correction est généralisée au canal entier afin d'uniformiser le débit sur l'ensemble des plans du canal. Le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 P_{o_1} + \sum_{k=1}^i b_k P_{s_k} = \frac{1}{2} \rho V_i^2 \\ a_1 \delta P_{o_1}^* + \sum_{k=1}^i b_k \delta P_{s_k}^* = \rho \left\{ \vec{V}_i \frac{d\vec{M}}{d\xi} \right\} \frac{dQ_i}{\vartheta_i} \end{array} \right\}_{i=1, i_{\max}} \quad (1.34)$$

Remarquons que cette correction intègre les conditions aux limites globales amont et aval du canal. Cette correction accélère donc le transfert elliptique de la pression et donc le processus de convergence du calcul.

I.4.3.3 Algorithmme

La figure 1.3 expose l'algorithme du code NSQE. Après avoir calculé et fourni les champs initiaux de pression sur tout le canal, le champ initial de vitesse au premier plan et le champ de température, le canal est balayé de l'amont vers l'aval en résolvant les équations de Navier-Stokes dans chaque domaine de calcul à trois plans.

Pour chaque bloc $(\xi_{i-2}, \xi_{i-1}, \xi_i)$ du canal, le champ de vitesse est corrigé au plan ξ_i à partir du champ de pression initial à l'aide des équations de quantité de mouvement écrites en $\xi_{i-1/2}$. Le champ de pression est ensuite modifié au plan ξ_{i-1} à partir du champ de vitesse en deux étapes. La correction de pression est d'abord calculée à la frontière du domaine du bloc de trois plans par la méthode des éléments frontières. Utilisant les corrections de pression aux frontières du plan courant ξ_{i-1} , les corrections de pression internes sont calculées avec la méthode de résolution semi-implicite MSI. La correction monodimensionnelle est ensuite appliquée afin de définir les nouveaux champs de pression statique et de vitesse au plan ξ_{i-1} .

L'ensemble des corrections s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P_{i-1,j,k} & = & P_{i-1,j,k} + \delta P_{i-1}^* + \delta P_{i-1,j,k} \\ V_{i-1,j,k} & = & V_{i-1,j,k} + \delta V_{i-1}^* \\ V_{i,j,k} & = & V_{i,j,k} + \delta V_{i-1,j,k} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (1.35) \\ j=1, j_{\max} \\ k=1, k_{\max} \end{array}$$

Ce processus en quatre étapes est réitéré jusqu'à obtenir la convergence du calcul à une précision fixée (correction de vitesse inférieure à 10^{-4}).

Le débit est ensuite uniformisé sur le canal entier à l'aide de la correction monodimensionnelle appliquée sur le canal entier

(système (1.34)), afin de tenir compte des conditions aux limites à l'amont et à l'aval du canal.

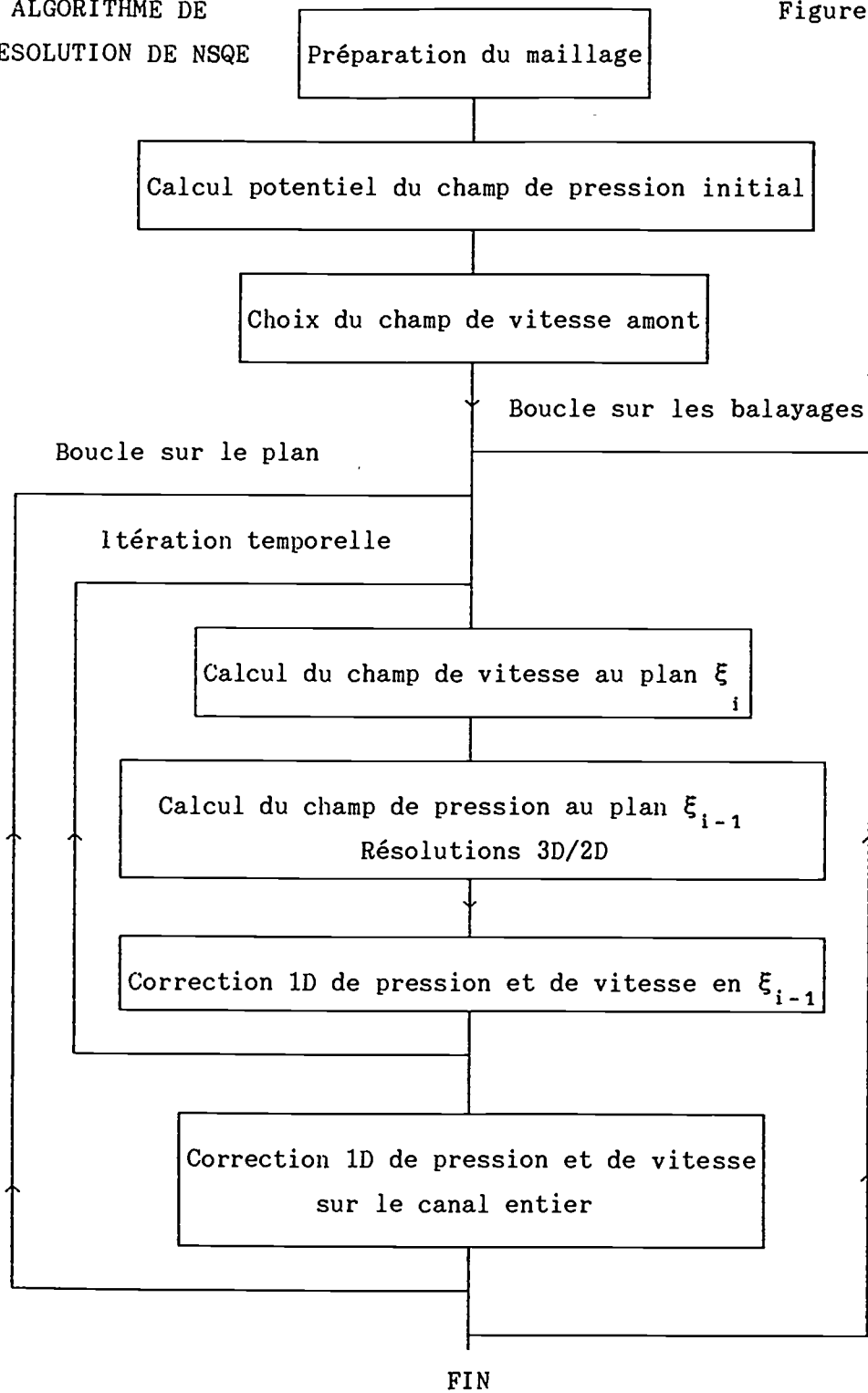
$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i,j,k} = P_{i,j,k} + \delta P_{s_i}^* \\ V_{i,j,k} = V_{i,j,k} + \delta V_i^* \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} i=1,imax \\ j=1,jmax \\ k=1,kmax \end{array} \quad (1.36)$$

Le calcul est ensuite effectué sur le bloc suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier plan.

Ce processus de balayage est recommencé si le niveau de convergence désiré n'est pas obtenu.

ALGORITHME DE
RESOLUTION DE NSQE

Figure 1.3



I.5 PRESENTE CONTRIBUTION

Après un rappel sur les différentes approximations utilisées pour résoudre les équations de Navier Stokes tridimensionnelles, nous avons mis en évidence trois familles de résolution qui sont les équations de Navier-Stokes visqueuses, les équations d'Euler et enfin les équations potentielles.

Un exposé sur quelques codes utilisant les équations de Navier Stokes tridimensionnelles visqueuses démontre l'intérêt de l'approche quasi elliptique du code NSQE, support de cette étude, en permettant des gains de taille mémoire et de temps calcul a priori intéressants.

Le couplage entre le calcul découplé de la pression et de la vitesse dans le processus itératif en temps est détaillé. Les conditions aux limites sur chaque domaine restreint de résolution sont identiques à celles imposées sur le domaine entier.

Un processus itératif de marche de l'amont vers l'aval, accéléré par une méthode de correction monodimensionnelle, permet d'assurer le transfert elliptique dans le domaine de calcul.

La correction de pression tridimensionnelle, utilisée pour assurer la conservation de la masse dans le domaine restreint, est un facteur d'influence primordial dans le calcul de l'écoulement puisqu'elle assure le transfert elliptique. Ainsi, suite aux travaux de EL MARJANI [1987], la présente étude est-elle particulièrement dévolue à la méthode des éléments frontières.

En effet, comme nous le remarquons au début de ce chapitre, l'algorithme intégral de EL MARJANI comportait certaines limitations. De plus, cette méthode de résolution possède des qualités intéressantes pour d'autres applications externes à ce

code.

Il est donc important de rappeler les fondements de cette méthode qui permettront de mettre en évidence les comportements de cette résolution intégrale.

Ce sera l'objet du chapitre II. La validation du code développé lors de cette étude est proposée aux chapitres III et IV.

CHAPITRE II

METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

Le chapitre I détaillait les raisons de notre choix quant à l'utilisation de la méthode des éléments frontières pour le calcul de la correction de pression dans le code Navier-Stokes NSQE. L'algorithme numérique adopté pour cette méthode intégrale est exposé dans les lignes suivantes.

Ce chapitre présente l'équation intégrale numérique de correction de pression. Une deuxième partie sera consacrée à l'analyse des conditions aux limites et à l'écriture du système intégral. Une méthodologie de validation de cette méthode est ensuite définie.

II.1 BASES THEORIQUES

L'idée de base de la formulation intégrale est de transposer le problème interne vers la frontière en utilisant l'identité de Green.

La méthode des éléments frontières peut être utilisée selon deux approches "directe" ou "indirecte". La première exprime les variables recherchées comme une combinaison linéaire des conditions aux limites à la frontière (BESKOS [1987], HUNT [1986]). La méthode indirecte s'applique sur une région limitée par un domaine infini ou semi-infini autour du corps étudié. Des sources ponctuelles de densités initialement inconnues sont disposées autour de ce volume. Ces sources sont telles que les conditions aux limites imposées sur la frontière sont vérifiées (BREBBIA [1978], WALKER [1979]).

Les deux méthodes sont mathématiquement équivalentes comme le démontre l'annexe 4 (BREBBIA [1978]). Mais l'approche indirecte utilise des sources dont l'interprétation physique est délicate alors que les variables de la méthode directe sont des potentiels et des flux facilement appréhendés.

Aussi, ce travail utilise-t-il la méthode directe. Néanmoins, à titre d'exemple, l'annexe 5 présente un exemple simple de résolution indirecte où l'équivalence des deux méthodes est visualisée sur une plaque plane carrée.

A partir de l'équation locale de correction de pression, l'équation intégrale correspondante est établie ci-dessous. Les différentes approches proposées dans la littérature sont analysées au cours de ce développement. Le développement de l'équation intégrale numérique fait apparaître les différentes conditions aux limites que nous traiterons sur un exemple simple. Quelques notions mathématiques de base sont exposées dans l'annexe 7.

II.1.1 FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE PRESSION

Soit l'équation de correction de pression écrite dans un volume (Ω) isotropique, i.e. volume dont les propriétés sont identiques dans toutes les directions, tridimensionnel ou bidimensionnel de frontière extérieure (Γ) fermée et de normale extérieure $\vec{n}$.

$$\nabla^2 \delta p = - f(\theta) \quad (2.1)$$

La solution fondamentale, ou fonction d'influence, u^* de l'équation homogène associée s'écrit :

$$\nabla^2 u^* = - \Delta(M) = - \delta(r-r_o) \quad (2.2)$$

où δ est le symbole de Kronecker.

L'expression $\Delta(M)$ est une fonction Dirac unitaire placée en un point M de (Γ) . On note $u^*(r; r_0)$ le champ créé au point d'observation $M(r)$ par une source unitaire ponctuelle placée au point source $N(r_0)$ (figure 2.1).

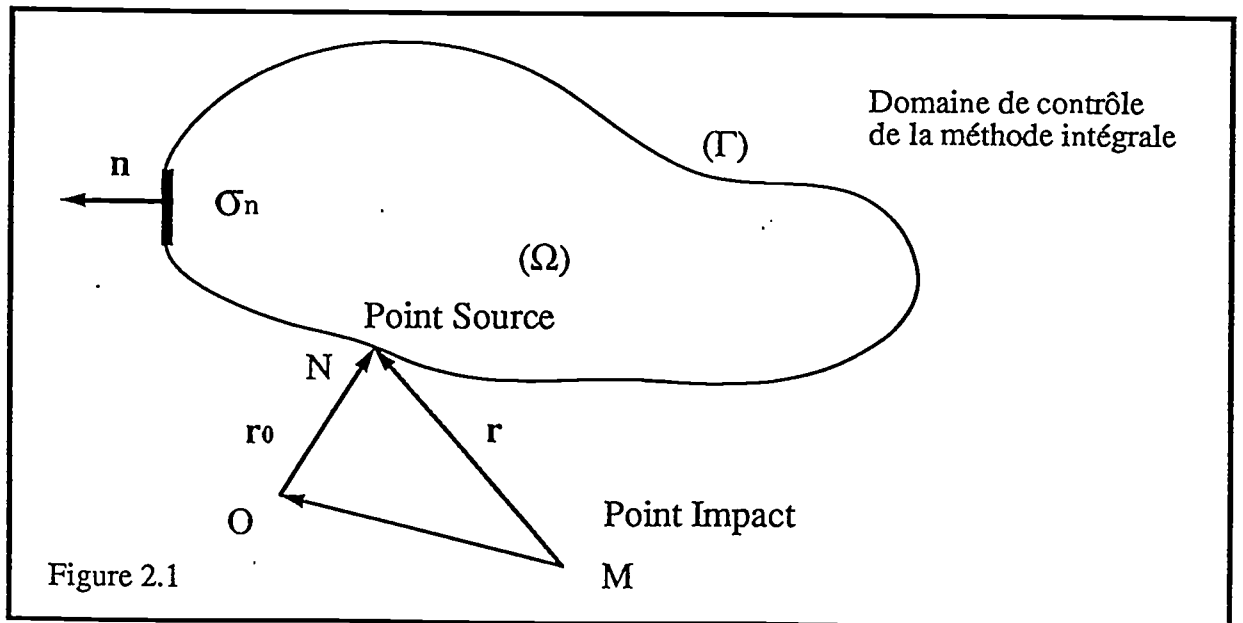
Avec les hypothèses de calcul, les solutions fondamentales dans un espace tridimensionnel et bidimensionnel pour un milieu isotrope sont respectivement :

$$\text{Domaine } (x,y,z) : u^* = \frac{-1}{4\pi r} ; \text{Domaine } (x,y) : u^* = \frac{\text{Ln}(r)}{2\pi} \quad (2.12)$$

$$\text{Ecrivons le système suivant : } \begin{cases} u^* \cdot \nabla^2 \delta_p = - u^* \cdot f(\theta) \\ \delta_p \cdot \nabla^2 u^* = - \delta_p \cdot \Delta(M) \end{cases} \quad (2.5)$$

d'où, en intégrant sur le volume (Ω) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u^* \cdot \nabla^2 \delta_p \, d\Omega = - \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega \\ \int_{\Omega} \delta_p \cdot \nabla^2 u^* \, d\Omega = - \int_{\Omega} \delta_p \cdot \Delta(M) \, d\Omega \end{cases} \quad (2.6)$$



La première identité de Green (équation (A7.1)) pour deux scalaires s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\Phi \cdot \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi \cdot \nabla \Psi \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.7)$$

Le système (2.6), en utilisant l'identité (2.7), devient :

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} u^* \cdot \vec{\nabla} \delta p \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u^* \cdot \nabla \delta p d\Omega = - \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) d\Omega \\ \int_{\Gamma} \delta p \cdot \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u^* \cdot \nabla \delta p d\Omega = - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) d\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

En soustrayant les deux précédentes équations :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^* \cdot \vec{\nabla} \delta p \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta p \cdot \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous adoptons les notations suivantes :

$$\vec{\nabla} p \cdot \vec{n} = \partial p / \partial n \quad \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} = q^* \quad (2.10)$$

En introduisant les notations définies ci-dessus, l'équation intégrale (2.9) (troisième identité de Green) s'écrit :

$$\begin{aligned} (A) \quad \int_{\Gamma} u^* \cdot \frac{\partial \delta p}{\partial n} d\Gamma \quad (B) \quad \int_{\Gamma} \delta p \cdot q^* d\Gamma \\ + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) d\Omega - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) d\Omega = 0 \\ (2.11) \quad (C) \quad (D) \end{aligned}$$

Cette équation comporte quatre termes référencés de (A) à (D) :

- Terme (A) : Intégrale d'influence des conditions de Neuman à la frontière du domaine.
- Terme (B) : Intégrale d'influence des conditions de Dirichlet à la frontière du domaine.
- Terme (C) : Intégrale d'influence des termes sources internes de (Ω) .
- Terme (D) : Intégrale d'influence du Dirac en M sur lui-même.

L'équation (2.11) appelle deux remarques. Tout d'abord, par cette identité, la fonction δp s'exprime comme étant le potentiel créé par trois types de distributions de charges : des sources u^* sur la surface (Γ) et dans le volume (Ω) et des dipôles q^* sur la surface (Γ) .

Le potentiel est défini en tout point de (Ω) , même au voisinage des sources, puisque la dépendance en r^2 de $d\Omega$, liée à u^* , annule la singularité en r^{-1} au voisinage de celles-ci.

Le calcul des différents termes (A), (B), (C) et (D) nécessite de connaître la discrétisation surfacique et interne du domaine de calcul. C'est l'objet des paragraphes suivants.

II.1.2 UTILISATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES

Ecrite sous forme intégrale, l'équation est maintenant établie sous sa forme numérique.

II.1.2.1 DISCRETISATION GEOMETRIQUE

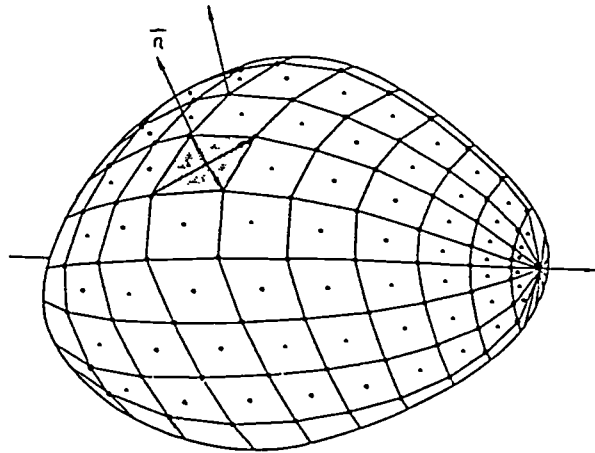
La modélisation de la frontière bi- ou tridimensionnelle est un des facteurs majeur de qualité des résultats comme le montre le chapitre III. En effet, la surface discrétisée est nécessairement approchée; une erreur est donc ainsi introduite. De plus les intégrations numériques sont sensibles à la discrétisation comme

le montreront certains résultats du chapitre III. Or, pour les applications du code NSQE, les géométries des aubages de turbomachines sont souvent fortement gauches. Néanmoins, la définition d'un maillage surfacique ne rentre pas dans le cadre de ce travail. Nous ne définirons ainsi que les qualités nécessaires à un tel produit.

Une approche générale, indépendante de la dimension de (Ω) , est présentée ci-dessous.

La surface (Γ) est définie par NP points géométriques et discrétisée en NE éléments surfaciques $(\sigma_n)_{n=1,NE}$ à NK noeuds chacun. Un exemple est présenté à la figure 2.2. A chaque noeud k est associé une fonction d'interpolation Φ_k . Ainsi, la valeur d'une variable f sur l'élément n sera :

$$f = \sum_{i=1}^{NK} \Phi_i \cdot f_{n,i} \quad (2.12) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{NK} \Phi_i(\xi_1, \xi_2) = 1 \quad (2.13)$$



Exemple de maillage surfacique

Figure 2.2

En appliquant la discrétisation surfacique, l'équation intégrale devient :

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot u^* \cdot \frac{\partial \delta p}{\partial n} d\sigma_n - \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot \delta p \cdot q^* d\sigma_n + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) d\Omega - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

En utilisant les valeurs nodales, l'équation intégrale est écrite selon

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \left[\int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot u^* d\sigma_n \right] \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) d\Omega - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) d\Omega - \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \left[\int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot q^* d\sigma_n \right] \cdot [\delta p]_{n,k} = 0 \quad (2.15)$$

Cette écriture fait apparaître des coefficients d'influence propres aux termes de Neuman et de Dirichlet, ils sont notés respectivement :

$$g_{n,k}^M = \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot u_n^* d\sigma \quad h_{n,k}^M = - \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot q_n^* d\sigma_n \quad (2.16)$$

Ces deux valeurs représentent les coefficients d'influence du potentiel et de la dérivée normale à la surface σ_n d'un point N (élément n, noeud k), appelé point SOURCE, sur le point M, qui sera dénommé par la suite point IMPACT. Le calcul de ces coefficients, assuré par le code COEINF, est décrit dans l'annexe 3.

Par exemple, l'influence totale de l'élément n sur le point M est

$$(2.17) \quad \text{Influence}_n^M = \sum_{k=1}^{NK} g_{n,k}^M \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} + \sum_{k=1}^{NK} h_{n,k}^M \cdot [\delta p]_{n,k}$$

L'équation intégrale (2.15) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} g_{n,k}^M \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega \quad (2.18) \\ - \int_{\Omega} \delta p \cdot \Delta(M) \, d\Omega - \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} h_{n,k}^M \cdot [\delta p]_{n,k} = 0 \end{aligned}$$

L'équation intégrale est donc maintenant discrétisée en fonction du maillage surfacique nodal. Il est nécessaire de faire l'assemblage des coefficients h et g. En effet, certains couples (élément, noeud) peuvent être confondus en un même point géométrique, comme le montre le schéma 2.4 pour une géométrie bidimensionnelle. Cette opération est assurée par le code PEGASE.

Cet assemblage est détaillé dans les paragraphes suivants où le calcul des coefficients est présenté. Des coefficients d'influence indépendants de la numérotation nodale (n,k) y seront définis.

Cet assemblage des coefficients est justifié dans notre application à un canal inter-aube puisque nous traitons toujours des géométries parallélépipédiques. Un gain en taille mémoire est ainsi obtenu. La numérotation est optimisée en fonction de l'assemblage à effectuer propre à cette géométrie. Ce pré-assemblage n'est bien sûr pas possible pour une géométrie quelconque; c'est à dire sans connaissance préalable des éléments surfaciques adjacents dont des normales sont égales. Un tel cas

est présenté à la figure 2.5 où les normales $\vec{n}_3$ et $\vec{n}_4$ aux éléments 3 et 4 respectivement sont confondues. Sans cette phase de pré-assemblage, nous aurions à manipuler 4 variables de Neuman au lieu de 3. Ceci permet une économie de la taille mémoire.

II.1.2.2 CALCUL DE $\int_{\Omega} \delta_p \Delta(M) d\Omega$

Le calcul de cette intégrale est fonction de la position de M par rapport à (Ω) . Ce paragraphe présente le calcul correspondant à chacune des positions possibles (figure 2.4). Le paragraphe II.2.2.3 montre qu'un calcul implicite de ce terme est possible.

a.1) $M \notin (\Omega)$

La source est à l'extérieur de (Ω) .

$$(2.19) \quad \forall N \in (\Omega), \Delta(N) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \delta_p \Delta(M) d\Omega = 0$$

a.2) $M \in (\Omega) - (\Gamma)$

Le terme $\delta_p \Delta(M)$ est nul dans le domaine entier sauf en M. L'intégrale surfacique du flux émis par cette source est identique quel que soit le volume (Ω) contenant M (théorème de la divergence). On peut entourer la source ponctuelle par une sphère de rayon ϵ et appliquer le théorème de la divergence.

$$\text{Ainsi } \int_{\Omega} \delta_p \Delta(M) d\Omega = \int_{\Omega} \delta_p \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \delta_p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma_{\epsilon}$$

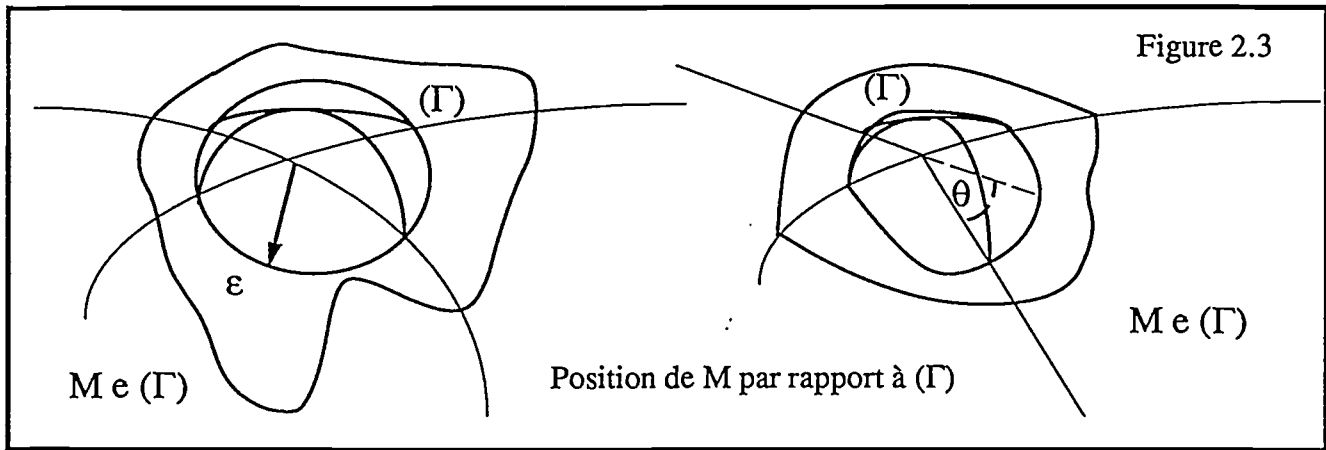
En faisant tendre ϵ vers 0,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_{\epsilon}} \delta_p \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma_{\epsilon} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[\int_{\Gamma_{\epsilon}} \delta_p \cdot \frac{1}{4 \pi \epsilon^2} d\Gamma_{\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[\delta_p \cdot \frac{4 \pi \epsilon^2}{4 \pi \epsilon^2} \right] \\ (2.20) \quad &= - \delta_p(M) \end{aligned}$$

Une démonstration est présentée dans DAUTRAY [1984].

a.3) $M \in (\Gamma)$

Le point M appartient à la surface (Γ) . Il suffit de considérer une portion de sphère de rayon ϵ centrée en M . Ce sera une hémisphère, d'angle π à la base, si la surface est régulière en M ou d'angle θ en M si ce point est sur une arête. La figure 2.3 illustre ces 2 cas.



En faisant tendre ϵ vers 0,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\epsilon} \delta_p \cdot \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma_\epsilon \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[\int_{\Gamma_\epsilon} \delta_p \cdot \frac{1}{4 \pi \epsilon^2} d\Gamma_\epsilon \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \left[\delta_p \cdot \frac{2 \theta \epsilon^2}{4 \pi \epsilon^2} \right] \\
 (2.21) \qquad &= - \frac{\theta}{2 \pi} \cdot \delta_p(M)
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\int_{\Omega} \delta_p \cdot \Delta(M) \, d\Omega = T(M) \cdot \delta_p(M) = T_M \cdot \delta_{p_M}$$

avec

$$\begin{aligned} T_M &= 0 && \text{si } M \notin (\Omega) \\ T_M &= 1 && \text{si } M \in (\Omega) - (\Gamma) \\ T_M &= \frac{1}{2} && \text{si } M \in (\Gamma) \text{ et } (\Gamma) \text{ régulière en } M \\ T_M &= \frac{\theta}{2\pi} && \text{si } M \in (\Gamma) \text{ et arête d'angle } \theta \text{ en } M \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le produit $4\pi T$ est l'angle solide en stéradians sous lequel le point M voit le volume (Ω) .

II.1.2.3 INTEGRALES DE DIRICHLET : $\int_{\Gamma} \delta_p \cdot q^* \, d\Gamma$

Une unique valeur de potentiel existe pour un point géométrique donné. Cette remarque est également applicable aux coefficients de Dirichlet. Pour un point impact M et un point source N , on définit le coefficient H_N^M comme étant la somme des coefficients $h_{n,k}^M$ où les noeuds k des éléments n sont confondus avec le point N . Cette égalité s'écrit :

$$H_N^M = \sum_{n,k} h_{n,k}^M \text{ et } (n,k) \equiv N \quad (2.23)$$

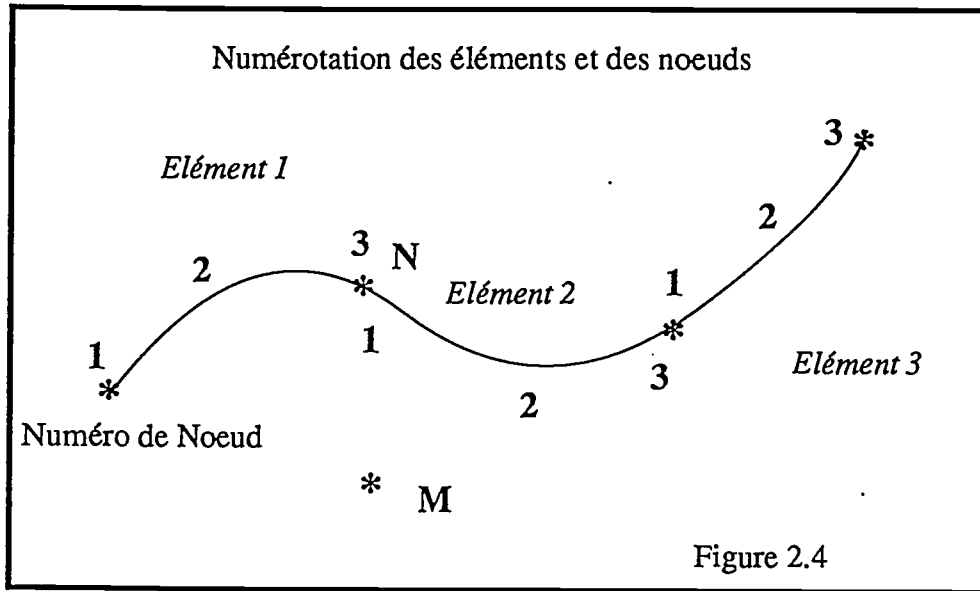
Par exemple, en se reportant à la géométrie de la figure 2.4, le coefficient de Dirichlet s'écrit :

$$H_N^M = h_{1,3}^M + h_{2,1}^M$$

En utilisant les résultats du paragraphe précédent et le coefficient de Dirichlet H_N^M , l'équation intégrale devient :

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} g_{n,k}^M \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} + \int_{\Omega} \bar{u} \cdot f(\theta) d\Omega \quad (2.24)$$

$$+ T_M \cdot \delta p_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M \cdot \delta p_N = 0$$



Le coefficient T_M peut être défini implicitement en considérant un cas particulier de résolution. Soit un volume (Ω) sans termes sources avec des conditions homogènes de Neuman sur la frontière (Γ). Le champ potentiel résultant est constant et de niveau arbitraire δp choisi non nul. Appliquée au point M, l'équation (2.24) devient :

$$T_M \cdot \delta p - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M \cdot \delta p_N = \left[T_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M \right] \cdot \delta p = 0 \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow T_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M = 0$$

La relation (2.25) est un bon test de précision pour le calcul des coefficients d'influence de Dirichlet. Connaissant la position de M par rapport à (Ω) , nous devons obtenir une somme de coefficients égale à 1, 1/2 ou $\theta/2\pi$ suivant le cas, conformément au paragraphe II.1.2.2.

II.1.2.4 INTEGRALES DE NEUMAN : $\int_{\Gamma} u^* \cdot \frac{\partial \delta p}{\partial n} d\Gamma$

Le coefficient $g_{n,k}^M$ est propre à la fois au point $N \equiv (n,k)$ et à l'orientation des éléments surfaciques adjacents en ce point géométrique N. Ainsi, en se reportant à l'exemple de la figure 2.5, où les éléments 3 et 4 sont situés dans un même plan, il existe trois directions normales distinctes au même point N.

Selon le même principe que le paragraphe précédent, sont définis des coefficients de Neuman propres au point d'impact M, au point source N et à une direction normale existante au point N. Ainsi, en utilisant l'exemple de la figure 2.5, les normales aux éléments 3 et 4 en N sont confondues. Soit l'indice "i" de la direction normale à chaque élément, le coefficient de Neuman est défini :

$$G_{N,3}^M = g_{3,2}^M + g_{4,1}^M \quad (2.28)$$

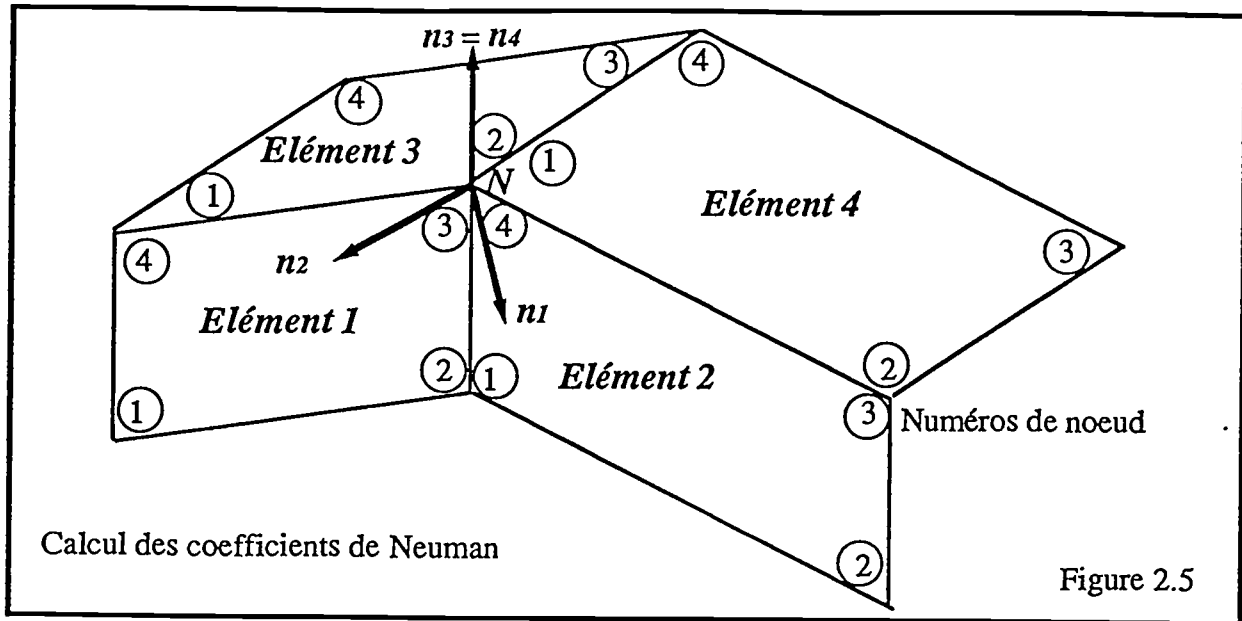
et de manière identique

$$G_{N,1}^M = g_{1,3}^M \quad \text{et} \quad G_{N,2}^M = g_{2,4}^M$$

La définition des coefficients G est :

Pour la $i^{\text{ème}}$ direction normale $\vec{n}_i$ en N :

$$G_{N,i}^M = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} g_{n,k}^M \quad \text{où } N \equiv (n,k) \text{ et } \vec{n}_{n,k} = \vec{n}_i \quad (2.29)$$



Avec cette nouvelle convention, l'équation intégrale s'écrit, avec N_N nombre de directions normales distinctes en N ,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{N=1}^{NP} \sum_{i=1}^{N_N} G_{N,i}^M \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,i} + \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega \\
 (2.30) \quad & + T_M \cdot \delta p_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M \cdot \delta p_N = 0
 \end{aligned}$$

II.1.2.5 INTEGRALES DE VOLUMES : $\int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega$

Les intégrales de volume peuvent provenir d'effets non-linéaires, des conditions initiales... Dans certains cas particuliers, ces intégrales sur (Ω) peuvent être transformées en intégrales surfaciques. Néanmoins, dans le cas de termes complexes, la discrétisation du domaine est inévitable. Par contre, le

traitement d'une distribution de sources ponctuelles dans (Ω) est direct, comme le montrera la suite, grâce à l'utilisation de la fonction Dirac.

L'annexe 6 présente plusieurs méthodes de traitement des intégrales volumiques.

Comme nous le précisons au chapitre I, ce calcul intégral s'insère dans un code Navier Stokes tridimensionnel pour vérifier la conservation de la masse dans un domaine de calcul limité à trois plans (figure 2.6). Le calcul de ces intégrales est réalisé à chaque itération temporelle du code NSQE. Il est donc important d'optimiser le calcul de ces termes.

Les conditions de Dirichlet δp sont supposées nulles à l'amont et à l'aval du plan de calcul des corrections de pressions. En effet, le calcul est convergé au plan amont $i-2$. De même les termes volumiques de la divergence sont nuls en $i-3/2$, en outre la pression est imposée à l'aval du domaine de contrôle en i .

Une démarche générale de calcul des intégrales de volume est présentée ci-dessous. Elle est utilisée en pratique dans le code NSQE.

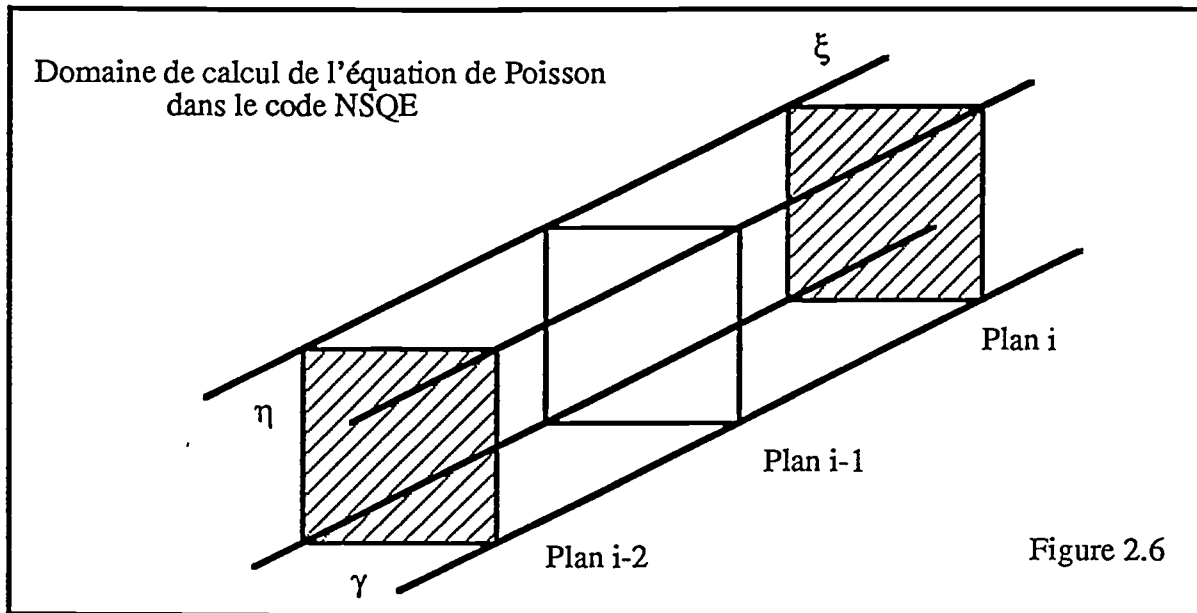
Plaçons-nous dans le cas d'un maillage tridimensionnel où les trois directions ζ , η et γ sont indicées i , j et k respectivement (figure 2.6).

Soit une distribution de termes sources $f(\theta)_{i,j,k}$ calculés au point $M(I,J,K)$ pour chacune des mailles transversales dans le plan (η, γ) centrées en M de volume de maille local $J_{i,j,k}^{-1}$. L'intégrale (D) s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega = \sum_{i,j,k} \int_{\Omega} \left[u^* \cdot f(\theta) \right]_{i,j,k} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_{i,j,k}) \, d\Omega$$

où $\delta(\vec{r}-\vec{r}_{i,j,k})$ est le symbole de Kronecker.

$$\text{Ainsi } \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega = \sum_{i,j,k} \left[u^* \cdot f(\theta) \right]_{i,j,k} \cdot J_{i,j,k}^{-1} \quad (2.31)$$



La transformation de l'intégrale volumique en intégrale surfacique, comme nous le montrons dans l'annexe 6, est possible dans certains cas et évite ainsi une discrétisation interne coûteuse du domaine de calcul (Ω).

Dans l'application au code NSQE, dans sa version incompressible (annexe 1), le terme $f(\theta)$ s'écrit sous la forme (annexe 6) .

$$f(\theta) = \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho \nabla(\theta \vec{V}) - \frac{4}{3} \rho \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla^2 \theta$$

L'intégrale de volume est

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega &= \int_{\Omega} u^* \cdot \left[\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho \nabla(\theta \vec{V}) - \frac{4}{3} \rho \frac{1}{Re} \nu \nabla^2 \theta \right] \, d\Omega \\
 &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u^* \cdot \theta \, d\Omega + \rho \int_{\Gamma} u^* \theta \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \rho \int_{\Omega} \theta \nabla u^* \cdot \vec{V} \, d\Omega \\
 (2.32) \quad &\quad - \frac{4}{3} \rho \nu \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} q^* \cdot \theta \, d\Gamma + \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \rho \nu \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla \theta \, d\Omega \\
 &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u^* \cdot \theta \, d\Omega + \rho \int_{\Gamma} [u^* \theta \, \vec{V} \cdot \vec{n} - \frac{4}{3} \rho \nu \frac{1}{Re} q^* \cdot \theta] \, d\Gamma \\
 &\quad - \rho \int_{\Omega} [\theta \nabla u^* \cdot \vec{V} + \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \rho \nu \nabla u^* \cdot \nabla \theta] \, d\Omega
 \end{aligned}$$

Les différents termes volumiques ne sont pas transformables en intégrales surfaciques. Cette approche n'est pas intéressante dans notre application. Par contre, les termes volumiques varient en r^{-3} dans (2.32) au lieu de varier en r^{-2} comme dans l'équation (2.31). L'utilisation d'un critère d'éloignement pour tenir compte ou non des valeurs locales de $\theta \nabla u^* \cdot \vec{V} + \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \rho \nu \nabla u^* \cdot \nabla \theta$, dans le calcul de l'intégrale volumique, est donc a priori plus intéressante; surtout dans le cas de l'équation de correction de pression simplifiée (Chapitre I) puisque l'équation (2.32) se simplifie en

$$\int_{\Omega} u^* \cdot f(\theta) \, d\Omega \simeq \int_{\Omega} u^* \cdot \rho \nabla(\theta \vec{V}) \, d\Omega \simeq \rho \int_{\Gamma} u^* \theta \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \rho \int_{\Omega} \theta \nabla u^* \cdot \vec{V} \, d\Omega$$

Ce calcul n'a pas été testé lors de ce travail; le gain en temps de calcul obtenu avec un tel critère, par rapport au coût du stockage des coefficients surfaciques nécessaires au calcul de l'intégrale surfacique sur (Γ) , n'est pas immédiat. En effet, dans le cas de conditions aux limites périodiques dans un canal inter aube de turbine par exemple, les conditions aux limites de vitesse ne sont pas toutes homogènes. Le terme $\int_{\Gamma} u^* \theta \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$ n'est donc pas

nul. Par contre, si les vitesses sont nulles sur la frontière du domaine (hypothèse d'un domaine infini par exemple), cette transformation devient envisageable.

II.1.3 EQUATION DE PRESSION DISCRETISEE LOCALE

Avec les résultats des différents paragraphes précédents, l'équation intégrale numérique s'écrit :

$$\sum_{N=1}^{NP} \sum_{i=1}^{N_N} G_{N,i}^M \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{N,i} + \sum_{i,j,k} f(\theta)_{i,j,k} \cdot J_{i,j,k}^{-1} + T_M \cdot \delta p_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M \cdot \delta p_N = 0 \quad (2.33)$$

où N_n est le nombre de directions normales au point N .

II.2 SYSTEME A RESOUDRE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Ce paragraphe est consacré au calcul des différentes variables. Après l'étude du système linéaire d'équations, les différents types de conditions aux limites sont présentés.

II.2.1 ASSEMBLAGE DU SYSTEME

Pour calculer les inconnues du problème, en fonction des conditions aux limites, l'équation (2.33) est appliquée aux différentes positions possibles M . Il existe deux possibilités pour positionner les points d'impact M .

Le premier choix est de placer ces points sur une surface (Γ') distincte de (Γ) extérieure à (Ω) (figure 2.7). Ainsi aucune intégrale singulière n'existe (cas $M \neq N$) et l'intégration est identique pour tous les coefficients. Cette option est intéressante du point de vue du temps de calcul et de la

simplicité. Plusieurs auteurs comme WEARING [1978] pour des écoulements internes, BENMANSOUR [1988] et OUAZAR [1988] pour des surfaces libres, ont suivi cette démarche pour des applications de mécanique des fluides. Mais les résultats sont très sensibles à la position des sources. Ces auteurs ont d'ailleurs développé différents algorithmes pour déterminer une position optimale, fonction de la taille de l'élément surfacique en vis-à-vis. Des difficultés apparaissent également aux arêtes. Ainsi, la définition de la surface auxiliaire (Γ') semble-t-elle difficilement systématisable.

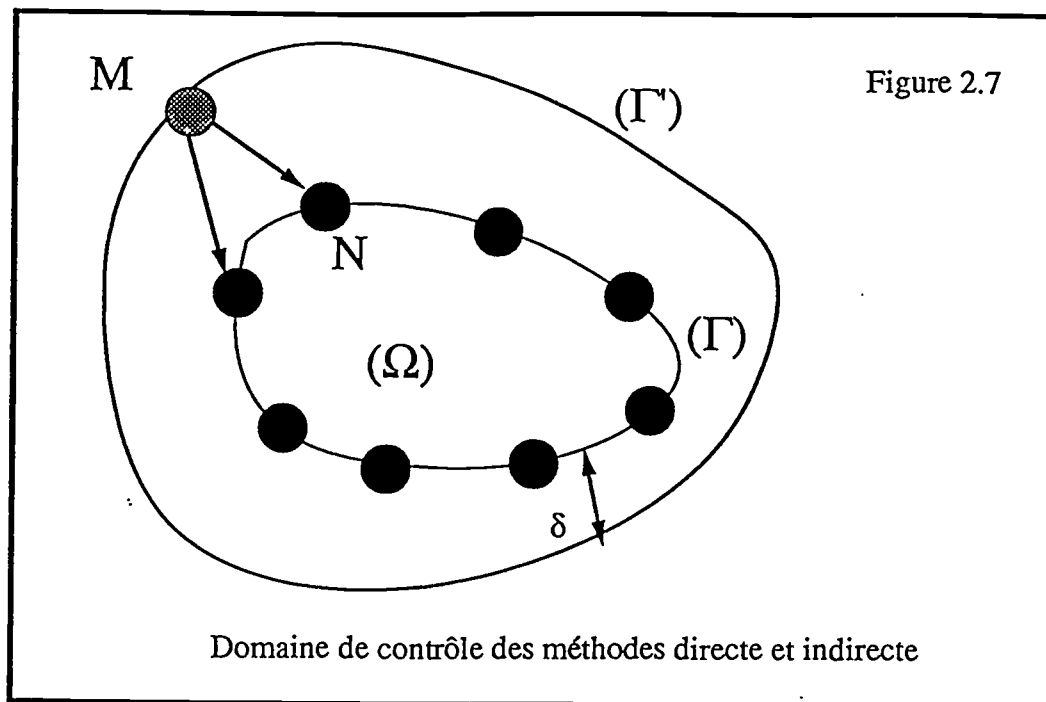
La seconde solution est de confondre l'ensemble des points d'impact M et l'ensemble des points de discrétisation N (figure 2.7). Le positionnement des points d'impact est automatique. Des intégrales particulières mais non singulières apparaissent néanmoins lorsque r tend vers zéro et des algorithmes spéciaux doivent être développés.

Le deuxième choix a été adopté dans la résolution intégrale de ce travail. Un exemple de résolution intégrale avec les deux possibilités est exposé dans l'annexe 5. Un exemple bidimensionnel avec des éléments constants est traité. La sensibilité des résultats au positionnement de la surface auxiliaire externe est illustrée.

Dans toute la suite du paragraphe III.3, les points M appartiennent à la surface (Γ).

L'équation intégrale (2.33) est écrite pour chacun des points de discrétisation de la surface (Γ). Le système d'équations s'écrit alors sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta p}{\partial n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$



II.2.2 CONDITIONS AUX LIMITES ET INCONNUES

Nous avons vu précédemment qu'à chaque point géométrique de la surface étaient associées une unique variable de Dirichlet δp et une ou plusieurs variables de Neuman $\frac{\partial}{\partial n} \delta p$. Ainsi, pour la géométrie de la figure 2.5, distingue-t-on de 2 à 4 variables selon la position du point.

Un des atouts de la méthode intégrale ressort de cette considération. En effet, les variables associées aux directions normales apparaissent naturellement dans les équations. Les arêtes sont correctement prises en compte et il n'y a nul besoin d'introduire une discontinuité locale pour traiter un angle par exemple. La principale difficulté devient de mettre au point une gestion souple et rapide des conditions aux limites.

Bien entendu, le système d'équations disponibles ne permet de déterminer qu'une seule de ces variables en un point. Les autres variables se déduisent donc des conditions aux limites.

Ainsi, à partir de (2.34), le système à résoudre s'écrit-il :

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\text{Termes sources}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\text{Cond. Lim.}} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Plutôt que d'énoncer les différentes conditions aux limites possibles sur une géométrie de turbomachine, explicitons l'utilisation des conditions aux limites sur un cas test bidimensionnel représentatif des possibilités de la méthode.

Soit un plan rectangulaire de dimension $L \times l$ où l'équation de la chaleur $\nabla^2 T = 0$ est vérifiée. Les sources internes sont nulles. En se reportant à la figure 2.8 pour les positions des points A à E, les conditions aux limites sont choisies comme :

- (1) Face AB : $T = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$
- (2) Faces AF, DE et BC : $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$
- (3) Faces CD et FE : Périodiques

La dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n}$ est choisie comme nulle sur les faces BC, DE et FA par souci de simplification. Les conditions aux limites locales sont indifféremment homogènes ou non dans l'application logicielle de cet algorithme.

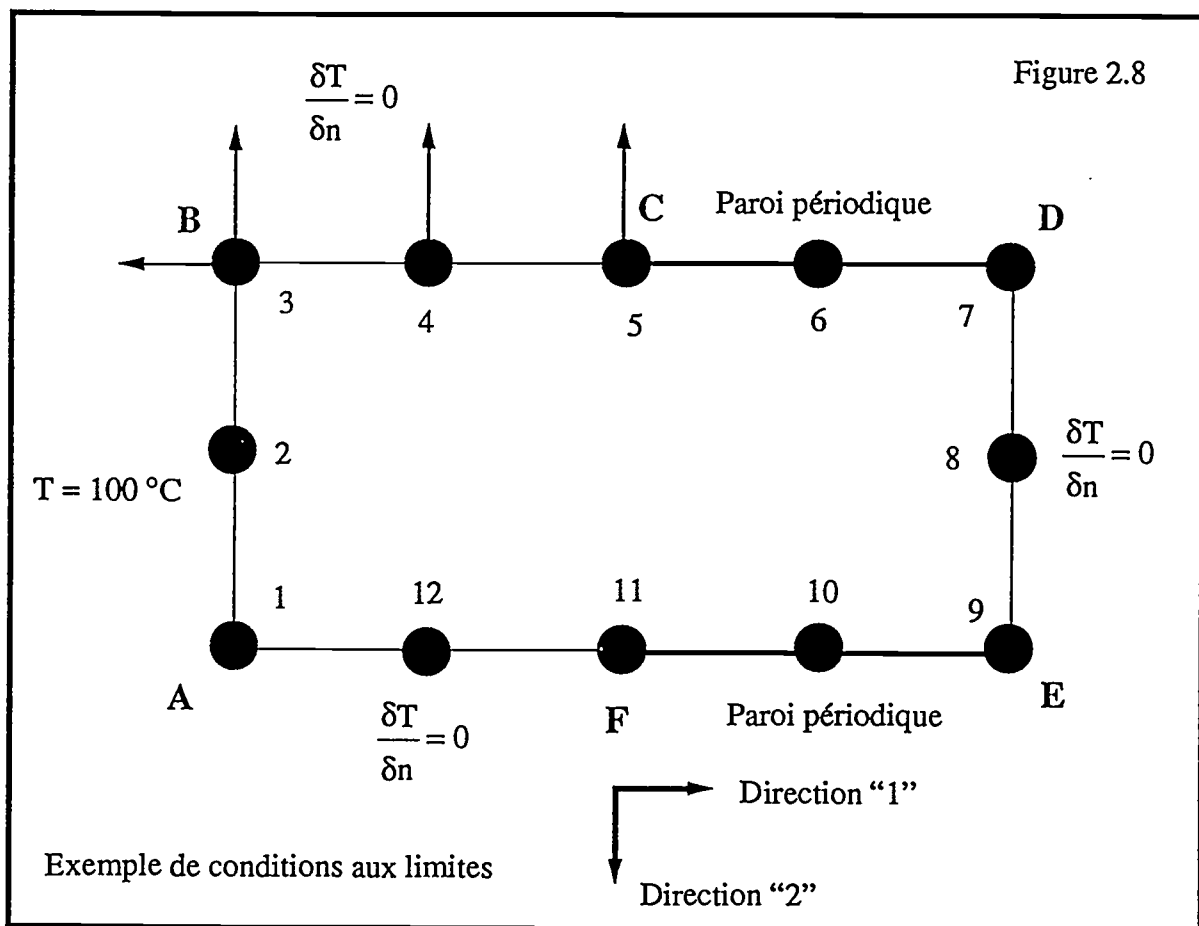
Les segments AB, BC, CD, EF, GH et DE sont tous discrétisés par un élément quadratique à 3 noeuds. Les fonctions d'interpolation correspondantes sont

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad \phi_2 = (\xi - 1) (\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1)$$

où ξ est la coordonnée locale de l'élément. La variable ξ est illustrée dans l'annexe 5.

Faisons l'inventaire des variables de ce cas test. Il existe autant de variables de Dirichlet que de points de discrétisation, c'est-à-dire 12. Puisqu'il existe deux directions normales à chaque angle, il existe 16 variables de Neuman. Ainsi, les conditions aux limites, si le problème est correctement posé, doivent fixer 16 variables pour ne laisser que 12 inconnues. Etablissons tout d'abord les notations et l'équation intégrale.



Les points de discrétisation sont numérotés de 1 à 12 dans le sens trigonométrique et les flux sont indicés en fonction du numéro de

point et de la direction normale. Les directions normales aux faces AB et DE sont indicées "1" et les normales aux faces BD et AE par "2".

L'équation 2.33 est appliquée à ce cas test pour un point d'impact M quelconque de la frontière (Γ). Il vient :

$$\begin{aligned}
& G_{1,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{1,1}} + G_{2,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{2,1}} + G_{3,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{3,1}} + G_{3,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{3,2}} + \\
& G_{4,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{4,2}} + G_{5,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{5,2}} + G_{6,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{6,2}} + G_{7,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{7,2}} + \\
& G_{7,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{7,1}} + G_{8,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{8,1}} + G_{9,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{9,1}} + G_{9,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{9,2}} + \quad (2.36) \\
& G_{10,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{10,2}} + G_{11,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{11,2}} + G_{12,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{12,2}} + G_{1,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{1,2}} \\
& + H_1^M T_1 + H_2^M T_2 + H_3^M T_3 + H_4^M T_4 + H_5^M T_5 + H_6^M T_6 + \\
& H_7^M T_7 + H_8^M T_8 + H_9^M T_9 + H_{10}^M T_{10} + H_{11}^M T_{11} + H_{12}^M T_{12} = 0
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites se traduisent par :

Face AB

La température est imposée : $T_1 = T_2 = T_3 = 100$ (2.37)

Faces AF, DE et BC

La dérivée normale de température est nulle aux points correspondants.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial n_{3,2}} = \frac{\partial T}{\partial n_{4,2}} = \frac{\partial T}{\partial n_{7,1}} = \frac{\partial T}{\partial n_{8,1}} = \frac{\partial T}{\partial n_{9,1}} \\
& = \frac{\partial T}{\partial n_{5,2}} = \frac{\partial T}{\partial n_{11,2}} = \frac{\partial T}{\partial n_{12,2}} = \frac{\partial T}{\partial n_{1,2}} = 0 \quad (2.38)
\end{aligned}$$

Faces CD et FE

La périodicité signifie que le comportement physique des deux faces, nécessairement parallèles, est identique. Ainsi les variables en correspondance sont-elles égales en module. Les dérivées normales selon la direction "2" sont de signes opposés (normales extérieures opposées). Les dérivées normales selon "1" sont égales. Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{\partial T}{\partial n_{5,2}} &= - \frac{\partial T}{\partial n_{11,2}} ; T_5 = T_{11} ; \frac{\partial T}{\partial n_{7,1}} = \frac{\partial T}{\partial n_{9,1}} \\
 (b) \quad \frac{\partial T}{\partial n_{6,2}} &= - \frac{\partial T}{\partial n_{10,2}} ; T_6 = T_{10} ; \frac{\partial T}{\partial n_{7,1}} = \frac{\partial T}{\partial n_{9,1}} \quad (2.39) \\
 (c) \quad \frac{\partial T}{\partial n_{7,2}} &= - \frac{\partial T}{\partial n_{9,2}} ; T_7 = T_9 ; \frac{\partial T}{\partial n_{7,1}} = \frac{\partial T}{\partial n_{9,1}}
 \end{aligned}$$

Des points particuliers apparaissent.

* Les angles 1 et 3, dotés chacun de trois variables, sont l'objet de deux conditions aux limites. Il ne reste qu'une inconnue de Neuman par point.

* les points périodiques 7 et 9 comportent au total 6 variables pour 4 conditions aux limites. Les inconnues sont $\frac{\partial T}{\partial n_{1,2}}$ et T.

* Les points 5 et 11 comportent une ambiguïté sur leurs conditions aux limites. En effet, la condition (2.38) impose la dérivée normale nulle, d'ailleurs compatible avec la condition de périodicité (2.39a), il ne reste que l'inconnue de Dirichlet pour 2 points. Il importe, pour ce point, de distinguer les coefficients d'influence de Neuman au point 5 provenant des éléments quadratiques formés par les triplets des points (3,4,5)

et (5,6,7). Lors de l'assemblage du coefficient de Neuman en 5, en annulant la contribution de Neuman provenant de l'élément (3,4,5) (équation (2.40)), nous imposons explicitement une condition de Neuman homogène au point 5.

$$\begin{aligned} G_{5,2}^M &= 0 \times g_{5,2}^M(3,4,5) + 1 \times g_{5,2}^M(5,6,7) \\ G_{11,2}^M &= 0 \times g_{11,2}^M(11,12,1) + 1 \times g_{11,2}^M(9,10,11) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Conservant la contribution de Neuman de la face périodique (5,6,7), nous pouvons imposer des conditions de périodicité aux points 5 et 11 et en calculer la température et la dérivée normale périodique de température.

Ce type de traitement apparaît dans le calcul d'un canal inter-aube de turbine lors du passage d'une zone périodique à une paroi et vice-versa.

L'équation (2.33), en fonction des conditions aux limites, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &G_{1,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{1,1}} + G_{2,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{2,1}} + G_{3,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{3,1}} + G_{5,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{5,2}} + \\ &G_{6,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{6,2}} + G_{7,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{7,2}} + G_{9,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{9,2}} + G_{10,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{10,2}} + \quad (2.41) \\ &G_{11,2}^M \frac{\partial T}{\partial n_{11,2}} + H_4^M T_4 + H_5^M T_5 + H_6^M T_6 + H_7^M T_7 + H_8^M T_8 + \\ &H_9^M T_9 + H_{10}^M T_{10} + H_{11}^M T_{11} + H_{12}^M T_{12} = -100 (H_1^M + H_2^M + H_3^M) \end{aligned}$$

L'introduction des égalités dues aux conditions de périodicité donne:

$$\begin{aligned}
& G_{1,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{1,1}} + G_{2,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{2,1}} + G_{3,1}^M \frac{\partial T}{\partial n_{3,1}} + (G_{5,2}^M - G_{11,2}^M) \frac{\partial T}{\partial n_{5,2}} \\
& + (G_{6,2}^M - G_{10,2}^M) \frac{\partial T}{\partial n_{6,2}} + (G_{7,2}^M - G_{9,2}^M) \frac{\partial T}{\partial n_{7,2}} \\
& + (H_5^M + H_{11}^M) T_5 + (H_6^M + H_{10}^M) T_6 + (H_7^M + H_9^M) T_7 \\
& + H_4^M T_4 + H_{12}^M T_{12} + H_8^M T_8 = -100 (H_1^M + H_2^M + H_3^M)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Cette équation comporte ainsi 12 inconnues. L'application de (2.42) aux 12 points de discrétisation numérotés de 1 à 12 conduit à un système 12x12 à résoudre.

L'assemblage des coefficients d'influence en fonction des coefficients aux limites est réalisé à l'extérieur du code NSQE.

II.2.3 CONCLUSION

La discrétisation de la surface du volume de contrôle permet de discrétiser l'équation intégrale de correction de pression. Un exemple illustre l'algorithme de résolution d'une équation de Laplace avec les outils développés pour le code NSQE.

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet, Neuman, homogènes ou non, et périodiques.

Des critères de qualité sont nécessaires pour valider et qualifier quantitativement les différents logiciels réalisés pour le calcul des coefficients d'influence, l'assemblage de la matrice et la résolution du système avec la prise en compte des conditions aux limites. Ils sont nommés respectivement COEINF, PEGASE et HERMES. Le paragraphe suivant propose divers facteurs d'appréciation de la qualité des calculs.

II.3 METHODOLOGIE DE VALIDATION

Nous nous proposons de valider notre utilisation de la méthode des éléments frontières en deux étapes. Nous appliquerons notre méthode dans une première phase sur des cas tests analytiques simples avant d'intégrer celle-ci à l'environnement Navier-Stokes du code NSQE.

II.3.1 Cas tests analytiques

La résolution de l'équation de Poisson sur des géométries bidimensionnelles ou tridimensionnelles simples comme la plaque plane, le disque ou la sphère, permet de valider la précision, l'influence du maillage et divers aspects de la méthode des éléments frontières. Les solutions analytiques sont connues et calibrent exactement cette méthode intégrale.

II.3.2 Environnement Navier-Stokes

Les résultats du calcul intégral sont directement utilisés dans le processus itératif du code NSQE. La caractérisation de la qualité "numérique" des corrections de pression est importante pour la convergence du code NSQE. Il est en effet inutile de vouloir converger à une précision supérieure à la précision de la méthode des éléments frontières.

Ne connaissant pas a priori le résultat, des critères de qualités sont définis pour qualifier qualitativement a posteriori le résultat intégral.

Un premier critère de précision des coefficients de Dirichlet est le calcul de la trace de la matrice des coefficients de Dirichlet. Si nous connaissons a priori la géométrie traitée, la prédiction théorique de la trace est possible et peut être comparée au résultat numérique. Cet indicateur est illustré à la figure 3.21 et formulé ci-dessous.

$$\varepsilon_d = \sum_{N=1}^{NP} \frac{H_N^M - H_N^M[\text{théorique}]}{NP \cdot H_N^M[\text{théorique}]} \quad (2.43)$$

L'écriture du bilan entre le flux surfacique et le terme de production interne définit un deuxième indicateur de précision. Celui-ci n'est pas systématiquement utilisé en raison du temps calcul qu'il nécessite.

Soit l'équation de Poisson $\nabla^2 \delta p = -f(\theta)$ dans le domaine (Ω) . En intégrant sur ce volume et en utilisant le théorème de Green (équation (2.7)), une intégrale surfacique des dérivées normales apparaît :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 \delta p \, d\Omega &= - \int_{\Omega} f(\theta) \, d\Omega \\ \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\Gamma &= - \int_{\Omega} f(\theta) \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi, les conditions aux limites de Neuman contiennent toute l'information sur la "production" interne de (Ω) . Dans l'application envisagée, cette remarque peut avoir à la fois le rôle d'une post-correction des termes de Neuman calculés et d'indicateur de convergence sur la vérification de l'équation de continuité. En effet, lors de l'utilisation de la méthode des éléments frontières dans le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes, à convergence, les termes sources doivent disparaître, ce qui induit l'annulation des deux intégrales précédentes.

$$\text{Soit la quantité } \varepsilon_c = \int_{\Gamma} \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} f(\theta) \, d\Omega. \quad (2.45)$$

L'intégrale de volume représente la "quantité" de correction

calculée à partir du champ de vitesse. Cette information est donc "exacte" au regard du calcul de pression. Ainsi ϵ_c représente l'erreur globale sur les termes de Neuman. Donc, si le résultat d'un calcul de la méthode des éléments frontières comporte N résultats sur $\nabla \delta p \cdot \vec{n}$, chacun de ces termes étant corrigé de la quantité $-\epsilon_c/N$, l'égalité (2.11) sera donc vérifiée. Après la discrétisation de l'équation précédente, la forme numérique suivante apparaît :

$$\sum_{n=1}^{NE} \int_{\sigma_n} \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\sigma_n = - \sum_{i,j,k} f(\theta)_{i,j,k} \cdot J_{i,j,k}^{-1} \quad (2.46)$$

où $J_{i,j,k}^{-1}$ est le volume de la cellule (I,J,K) du domaine (Ω).

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\sigma_n = - \sum_{i,j,k} f(\theta)_{i,j,k} \cdot J_{i,j,k}^{-1} \quad (2.47)$$

De manière identique au traitement de l'équation intégrale, cette équation fait apparaître des coefficients surfaciques exclusivement qui sont écrits :

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\sigma_n = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \left[\int_{\sigma_n} \Phi_k \, d\sigma_n \right] \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} \quad (2.48)$$

Soit le coefficient surfacique $s_{n,k}$ tel que

$$s_{n,k} = \int_{\sigma_n} \Phi_k \, d\sigma_n \quad (2.49)$$

L'égalité devient :

$$\sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} \int_{\sigma_n} \Phi_k \cdot \nabla \delta p \cdot \vec{n} \, d\sigma_n = \sum_{n=1}^{NE} \sum_{k=1}^{NK} s_{n,k} \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} \quad (2.50)$$

La condition de conservation des flux est alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NK} s_{n,k} \cdot \left[\frac{\partial \delta p}{\partial n} \right]_{n,k} = - \sum_{i,j,k} f(\theta)_{i,j,k} \cdot J_{i,j,k}^{-1}} \quad (2.51)$$

Ce critère est utilisé au chapitre III.

II.4 CONCLUSION

A partir de l'équation locale de correction de pression, l'équation intégrale correspondante est définie via le théorème de Green. Cette équation est discrétisée en fonction du découpage surfacique et fait apparaître les coefficients d'influence de Dirichlet et de Neuman. Une phase d'assemblage des coefficients, propre à notre application, permet de diminuer la taille du système matriciel. L'algorithme complet de résolution intégrale est illustré sur un exemple.

Les logiciels COINF, PEGASE et HERMES assurent les phases de calcul des coefficients d'influence, d'assemblage des coefficients de Neuman et de Dirichlet et de résolution matricielle respectivement.

Il importe de valider ces codes. Le calcul potentiel est testé au chapitre III. Le couplage avec le code Navier-Stokes NSQE est abordé au chapitre IV.

CHAPITRE III

CALCULS POTENTIELS BIDIMENSIONNELS ET TRIDIMENSIONNELS

III.1 CALCULS POTENTIELS DANS LE CODE NSQE

Ce chapitre expose l'utilisation des codes de calcul potentiels utilisés dans le code NSQE.

Nous exposons au chapitre I la résolution potentielle tridimensionnelle d'une équation de Poisson permettant de calculer la correction de pression et la méthode MSI qui résout une équation de Poisson bidimensionnelle lors du transfert dans le domaine des corrections de pression à la frontière.

Il importe de justifier le couplage des deux résolutions qui complique de manière notable le calcul du champ de correction et soulève des questions de compatibilité des deux méthodes. En effet, pourquoi ne pas calculer directement les corrections de pression dans le plan courant dans la méthode intégrale par l'application directe de l'équation (2.33) ? Ou pourquoi ne pas utiliser un calcul intégral BEM bidimensionnel si un calcul bidimensionnel suffit pour le transfert dans le plan courant ?

Les paragraphes suivants analysent le comportement des résolutions bidimensionnelles de type éléments frontières et MSI sur des géométries simples comme la plaque plane ou le disque. Les limitations de chacune des deux méthodes seront ainsi mises en évidence. De plus, certains résultats sur le comportement de la méthode des éléments frontières pourront être extrapolés à la configuration tridimensionnelle. Il est en effet plus facile d'augmenter le raffinement du maillage en mode bidimensionnel que tridimensionnel !

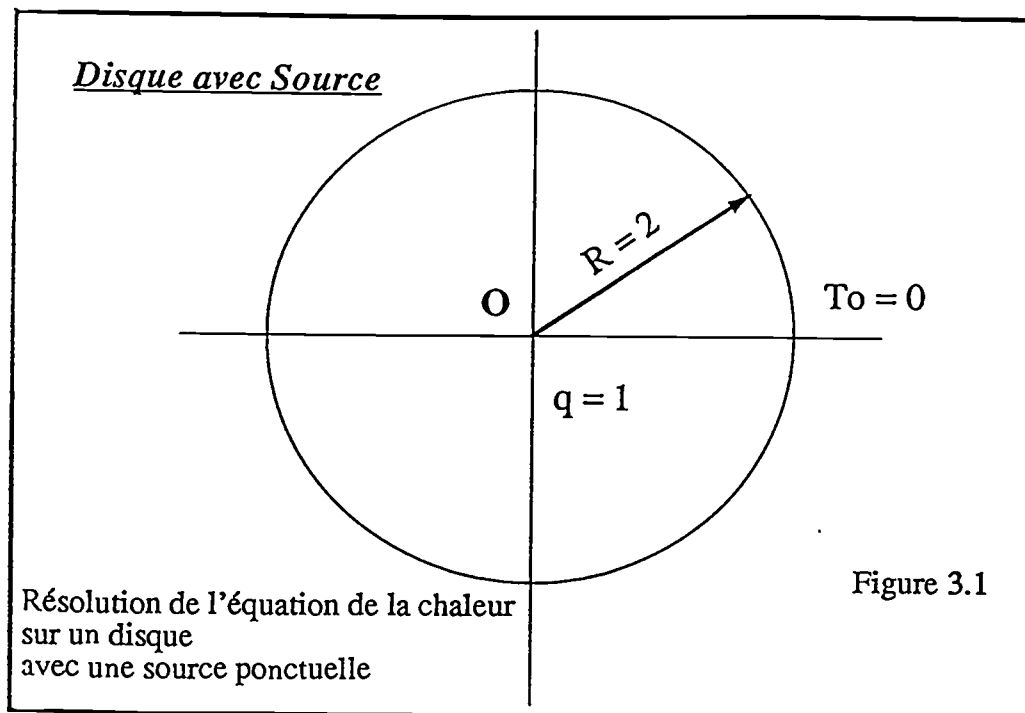
Des exemples de validation du code tridimensionnel seront ensuite présentés sur une sphère.

Le code MSI a été développé par ALKALAI [1983]. Le code intégral bidimensionnel BEM2D a été écrit pour cette étude à partir des références BREBBIA [1989] et GIPSON [1987]. Le code tridimensionnel a été développé au cours de ce travail.

III.2 CALCULS BIDIMENSIONNELS

III.2.1 Cas test BEM2D/MSI : disque avec source

Pour valider et caractériser les résultats obtenus par les deux précédents codes bidimensionnels, le cas test choisi doit être du même type que la résolution de l'équation de Laplace dans le cadre du calcul NSQE. A ce titre, ce paragraphe présente la résolution de l'équation de la chaleur stationnaire sur un disque (figure 3.1) de conductivité $K = 1$ et de rayon $R = 2$ avec une source ponctuelle $Q = 1$ au centre O du disque et une température T_0 nulle à la frontière. Les solutions analytiques du flux à la frontière et de la température interne sont connues.



L'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \delta(M,0) Q \quad (3.1)$$

Dans un cas axisymétrique, l'équation (3.1) se simplifie en :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \delta(M,0) Q \Rightarrow T(r) = T_o - \frac{Q}{2 \pi K} \text{Ln} \frac{r}{R} \quad (3.2)$$

La condition sur la température $T_o = 0$ et les valeurs choisies pour K et Q imposent

$$T(r) = - \frac{1}{2 \pi} \text{Ln} \frac{r}{R} \quad (3.3)$$

Le flux de chaleur φ en tout point du périmètre du disque de rayon r sera :

$$\varphi = - K \frac{dT}{dr} \quad \text{ou, pour } r = R, \quad \varphi = \frac{1}{4 \pi} \quad (3.4)$$

Ce cas test permet donc de comparer à la fois la température T en tout point interne du disque et le flux à la circonférence en imposant une condition homogène de Dirichlet à la frontière. Ces conditions aux limites sont identiques à celles utilisées pour le module MSI dans le code NSQE. Il est alors intéressant de comparer les résolutions MSI et BEM2D en précision et rapidité de calcul. Ce sera l'objet des paragraphes suivants.

III.2.1.1 Calcul des potentiels internes

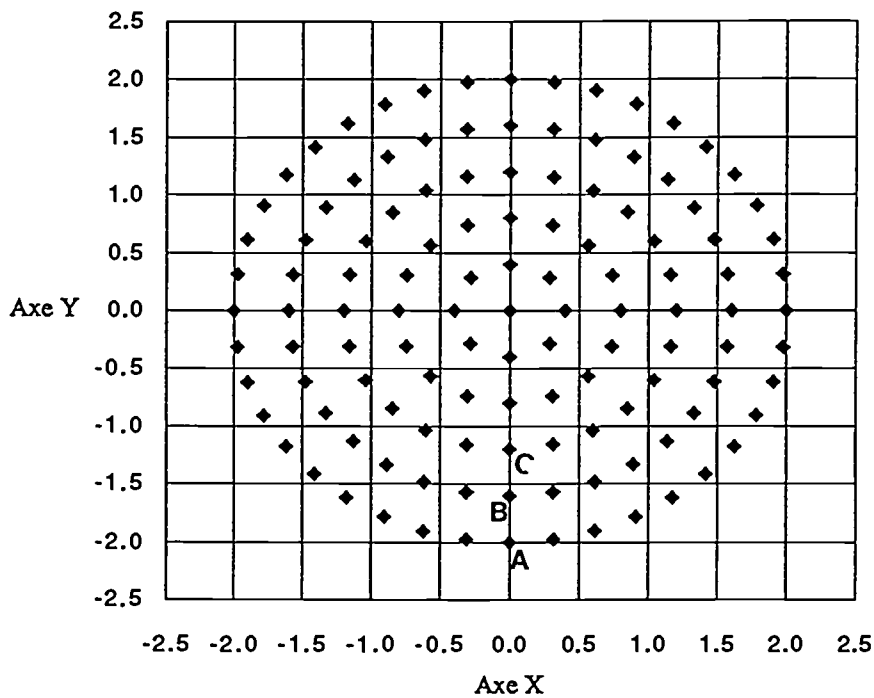
Nous nous proposons de calculer le potentiel pour tous les points de discrétisation internes avec un maillage $N \times N$ par les méthodes BEM2D et MSI. La discrétisation est identique pour les deux calculs. Un exemple de maillage est présenté à la figure 3.2. Pour

évaluer la qualité du résultat, l'erreur suivante est définie :

$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{(j,k) \notin \text{Centre}} \left\{ \frac{T - T(\text{théo})}{T(\text{théo})} \times 100 \right\}^2}{((N - 2)^2 - 1)^2} \quad (3.5)$$

Maillage bidimensionnel d'un disque (N=11)

Figure 3.2



où

$$\begin{cases} T & : \text{Température calculée au point } (j,k) \\ (N - 2)^2 & : \text{Nombre de points internes du maillage} \\ T(\text{théo}) & : \text{Température théorique} \end{cases}$$

Nota : Le potentiel, c'est à dire la température, n'est pas calculé au centre du disque.

Les résultats obtenus par MSI sont tracés à 500 et 1000 itérations pour vérifier la convergence du processus itératif.

Les courbes de la figure 3.3 ci-jointe démontrent la précision du calcul BEM2D ($5.10^{-5} \%$), supérieure au calcul MSI dont la précision varie de 10^{-0} à $10^{-4} \%$ selon la discrétisation. La précision du calcul intégral reste du même ordre indépendamment de la discrétisation surfacique. Les conditions aux limites sont ainsi correctement transmises dans le domaine dès le maillage de 40 points à la frontière ($N = 10$).

Pour des maillages de haute densité, les courbes d'erreur des deux méthodes sont confondues.

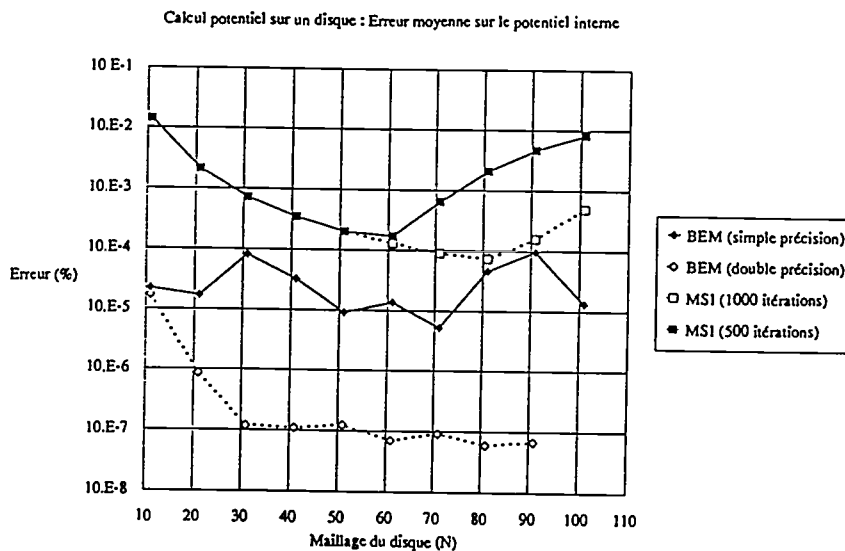


Figure 3.3

La sensibilité numérique de la méthode intégrale, que ce soit au niveau des intégrations avec des distances d'influence réduites ou dans le processus de résolution, est mise en évidence par la courbe d'erreur obtenue avec le même code BEM transcrit en double précision. Le niveau d'erreur se stabilise alors à $10^{-7} \%$.

Ainsi, le calcul intégral est beaucoup plus précis que la méthode MSI et cela dès un faible nombre de points. Cette capacité de la méthode intégrale à atteindre une précision correcte, sans nécessiter un maillage dense, permet d'envisager l'utilisation d'un maillage spécifique à la pression, moins raffiné que celui de la vitesse, dans la résolution tridimensionnelle de pression adoptée dans NSQE.

III.2.1.2 Calcul de la dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n}$

Le précédent cas test est repris pour calculer les dérivées normales. Celles-ci résultent directement du calcul BEM puisqu'une condition de Dirichlet est imposée à la frontière. Par contre, pour MSI, les dérivées sont calculées au premier ordre et au second ordre à partir des potentiels T^A , T^B et T^C (figure 3.2).

La qualité du calcul BEM est estimée avec l'indicateur

$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{(j,k) \in \text{Frontière}} \left(\frac{\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial T}{\partial n(\text{théo})}}{\frac{\partial T}{\partial n(\text{théo})}} \times 100 \right)^2}{16 (N - 1)^2} \quad (3.6)$$

La qualité du calcul MSI est estimée au point A où une ligne de maillage correspond à la direction normale à la frontière.

Les résultats (figure 3.4) confirment les remarques précédentes. Cependant, ce cas test ne doit pas être considéré comme représentatif du calcul MSI. Le maillage structuré n'est pas adapté à cette géométrie et nous n'avons pas positionné de points de maillage très proches de la frontière. La forte "erreur" du calcul MSI représente donc plutôt l'inadéquation de ce cas test à cette méthode. Par exemple, sur une géométrie carrée 1x1 où un gradient linéaire de potentiel selon un axe du carré est imposé

via les conditions de Dirichlet sur les frontières, la dérivée normale discrète est correctement estimée à 10^{-4} % dès 11 points de discrétisation par face.

Une diminution de la précision des calculs BEM est mise en évidence pour les nombres élevés de points à la frontière. Les distances d'influence diminuent avec la densification du maillage surfacique, d'où une diminution de la précision des intégrations en $1/r$. Les résultats en double précision confirment ce point. La grande sensibilité numérique de la méthode BEM vis-à-vis des erreurs d'arrondis est ainsi démontrée. Un maillage dense à la paroi n'est donc pas un facteur de qualité assuré pour les calculs, contrairement à la méthode MSI.

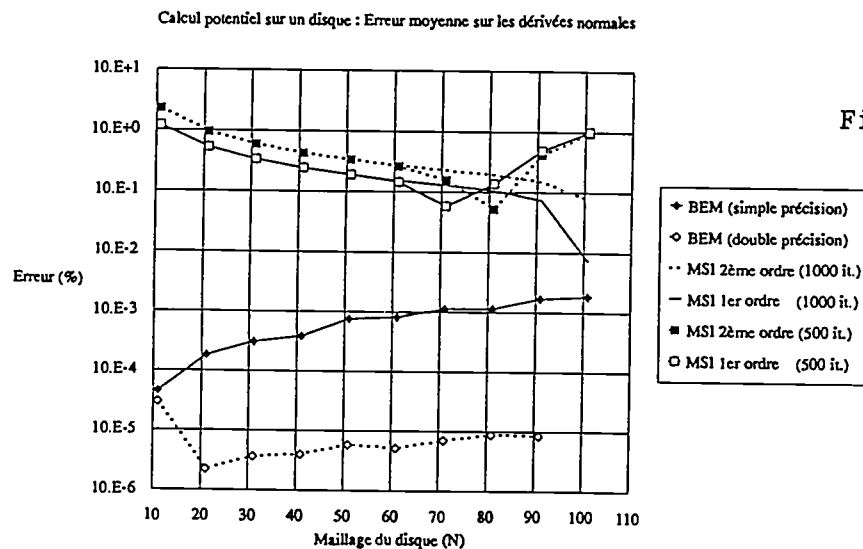


Figure 3.4

Le nombre de points de discrétisation nécessaire pour générer une erreur significative ($N > 70$) est cependant situé au-delà des valeurs de N destinées à être utilisées.

III.2.2 Cas test BEM2D : plaque plane carrée sans sources

Ayant remarqué un comportement particulier de la méthode intégrale pour des grands nombres de points, c'est-à-dire des distances d'influence très faibles, il devient important d'analyser les résultats fournis par la méthode BEM à la paroi.

En effet, ce cas peut apparaître dans une discrétisation raffinée de NSQE pour capter la couche limite présente dans l'écoulement près d'une paroi. La résolution de l'équation de Laplace sur une plaque plane carrée permet de visualiser ce comportement. Nous notons ϕ le potentiel.

Les caractéristiques de la géométrie (figure 3.5) et du calcul sont :

- Longueur d'un coté : 1
- Eléments quadratiques
- Discrétisation :
 - N points par face
 - 1001 points sur le segment (0;H)
- Conditions aux limites :
 - face (A;B) : $\phi = 1$
 - faces (B;C;D;A) : Neuman homogène
- Solution théorique :
 - Neuman homogène à la frontière
 - Potentiel constant égal à 1

La courbe 3.6 visualise le comportement à la frontière du calcul intégral. Au voisinage de $y = 0.986$, le potentiel chute de 1 à 0.5, c'est à dire la moitié du résultat théorique à la paroi, indépendamment de la simple ou double précision du code.

Il existe donc une bande de largeur Δ à la frontière où le potentiel interne évolue continuellement du potentiel interne correct à la moitié du potentiel pariétal.

Ce comportement est fonction de la longueur L , $L = \frac{2}{N-1}$, des éléments quadratiques de discrétisation. En effet, la courbe 3.7 présente l'évolution de Δ en fonction de N . Sur le même graphique est représentée la demi-longueur d'un élément quadratique. Δ est de l'ordre de $\frac{L}{6}$.

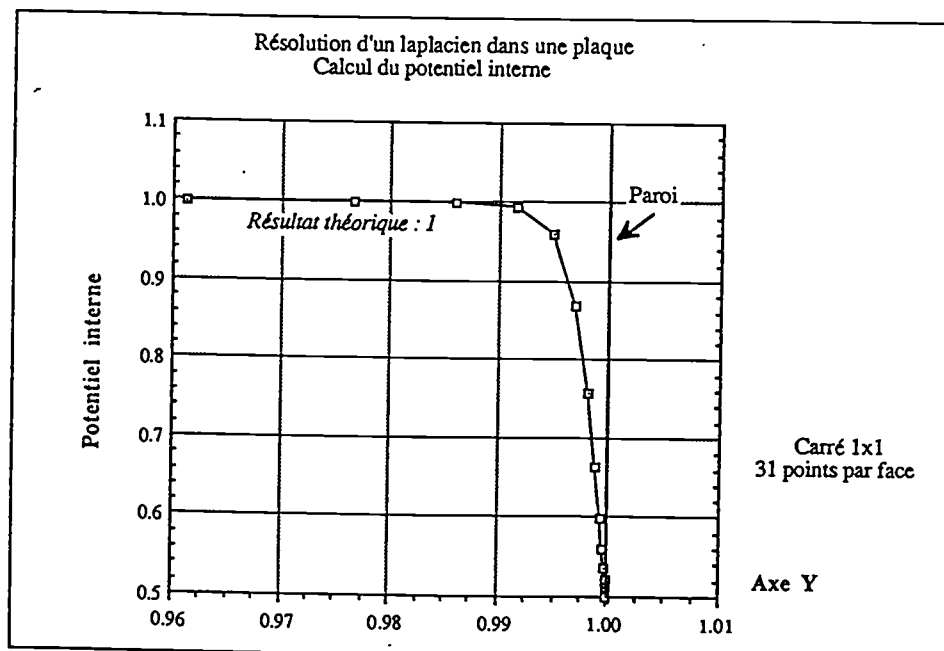
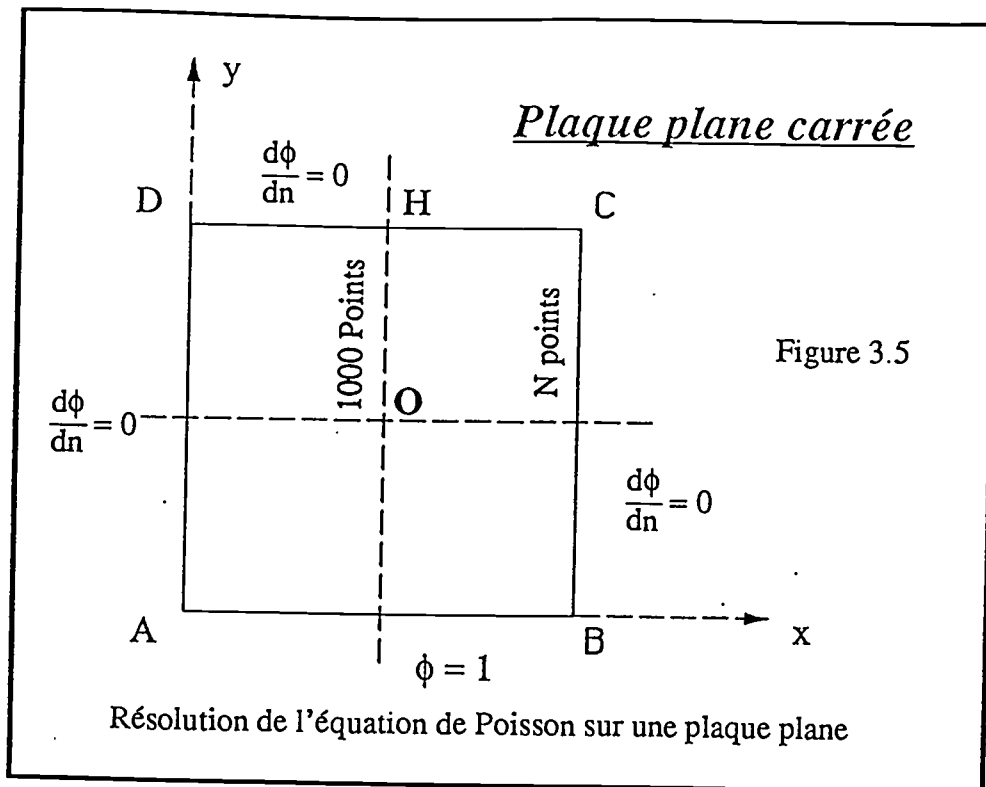


Figure 3.6

Comportement du calcul intégral à la frontière

Les oscillations de Δ selon la parité de $N-1$ sont à mettre en liaison avec la position du point d'intersection de l'axe $y = 0.5$ avec la paroi (point H de la figure 3.8). Si ce point est le centre d'un élément surfacique (figure 3.8a), son important "poids" relatif (équation 3.7a), calculé en intégrant la fonction d'interpolation ϕ_2 (paragraphe II.2.2) sur l'élément quadratique, renforcera son influence sur son voisinage d'où une valeur de Δ plus grande ($N = 11, 31, 51, \dots$). Réciproquement, si ce point est à l'extrémité d'un élément (figure 3.8b), sa faible influence (équation 3.7b) conduira à une valeur de Δ plus petite ($N = 21, 41, 61, \dots$).

$$\int_{-1}^{+1} \phi_2(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} (1-\xi).(1+\xi) d\xi = \frac{4}{3} \quad (3.7a)$$

$$\int_{-1}^{+1} \phi_1(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \phi_3(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \xi.(\xi \pm 1) d\xi = \frac{1}{3} \quad (3.7b)$$

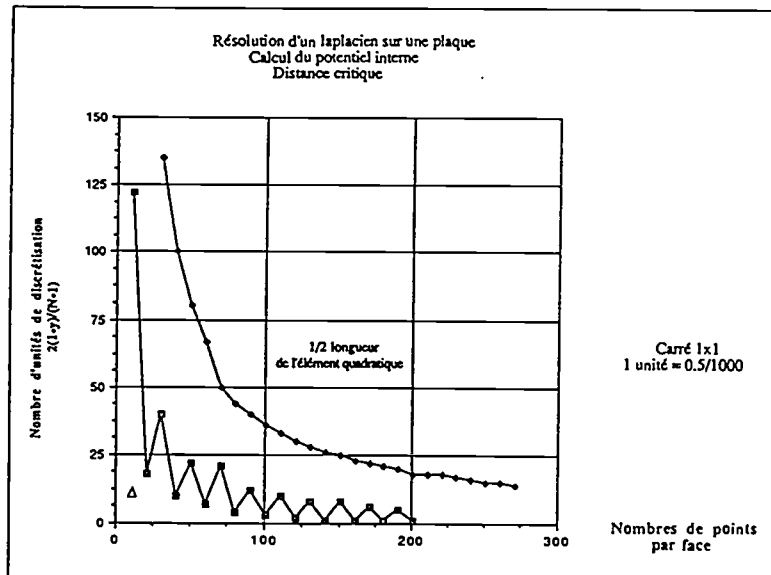
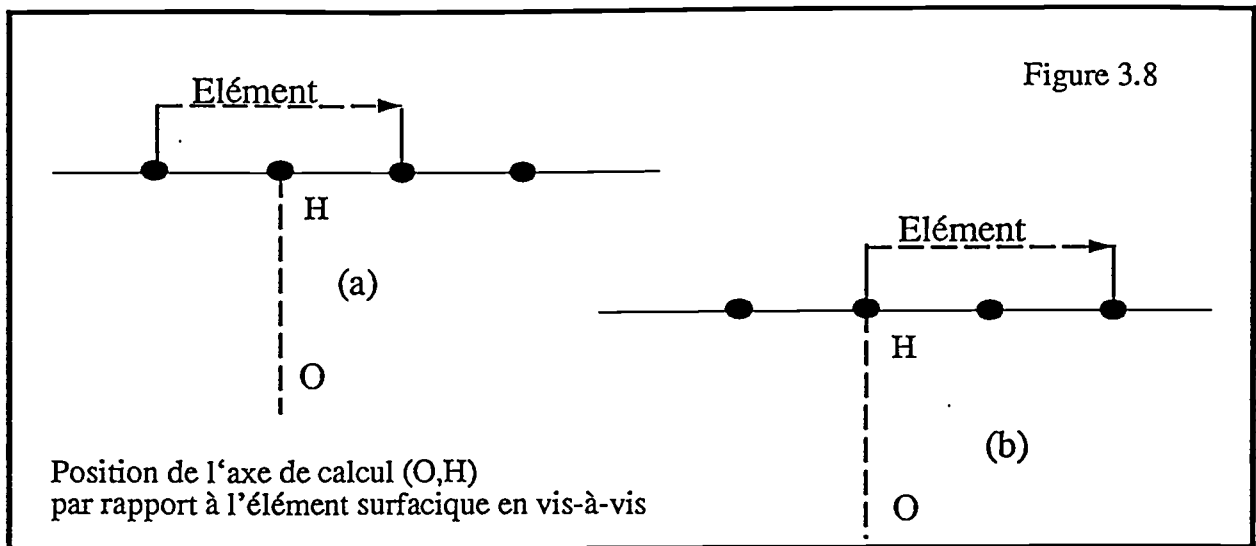


Figure 3.7

Evolution de Δ en fonction de la densité du maillage

Il existe donc une zone où le calcul interne de ϕ est incorrect. Le paragraphe suivant analyse la provenance numérique de ce rapport 0.5.



En se référant à l'équation (2.11), l'équation intégrale, écrite pour un point M quelconque de l'espace physique, peut se mettre sous la forme :

$$T(M) \cdot \phi(M) = \int_{(\Gamma, \Omega)} F(u^*, q^*, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial n}, f(\theta)) = E(M)$$

Soient les 2 points suivants $\begin{cases} M1 \in (\Gamma) & \Rightarrow T(M1) = 0.5 \\ M2 \in (\Omega) - (\Gamma) & \Rightarrow T(M2) = 1 \end{cases}$

En faisant tendre M2 vers M1, on vérifie :

$$\lim_{M2 \rightarrow M1} E(M2) = E(M1). \quad (3.8)$$

Ainsi, selon que le potentiel en M1 est calculé pour M1 appartenant à la paroi (Γ) ou comme potentiel limite du point interne M2 confondu, il existe un rapport 2 entre les deux résultats. La formulation de l'équation intégrale est en effet

différente selon la position de M par rapport à (Γ) . Les calculs précédents démontrent sa discontinuité.

Ce comportement est "dangereux" puisqu'il nécessite de définir une couche "interdite" de largeur Δ où le calcul est erroné. Ceci est évidemment inacceptable pour une approche tridimensionnelle des équations de Navier-Stokes où la discrétisation doit être raffinée à la paroi.

Il est intéressant d'étudier le mode de calcul du coefficient $T(M)$ dans l'équation intégrale pour mettre en évidence, le cas échéant, son influence sur Δ . Notons que cette influence ne peut s'exercer que sur la qualité numérique du résultat, par une diminution de Δ , et non pas sur l'existence de Δ .

$T(M)$ est calculé selon deux approches :

- Imposer $T(M)$ selon la position de M
- Calculer $T(M)$ de manière implicite (équation (2.25))

Le graphe 3.9 présente, pour la géométrie du disque de rayon 2, le potentiel interne calculé selon les deux options précédentes. Le calcul implicite de T se comporte mieux. En effet, la discrétisation du maillage crée nécessairement des points anguleux sur la frontière dont il n'est pas tenu compte en imposant $T = 2\pi$.

Ainsi, ces derniers tests montrent les limitations du calcul intégral au niveau de sa formulation et de son comportement à la paroi. Pour diminuer ces erreurs, il est cependant possible d'augmenter le nombre de points de Gauss pour le calcul des intégrales d'influence.

Par exemple, la courbe 3.10 visualise l'évolution de la longueur Δ en fonction du nombre de points de Gauss pour le cas test du

carré. Δ est de l'ordre de 2% de la taille de l'élément à partir de 70 points de Gauss.

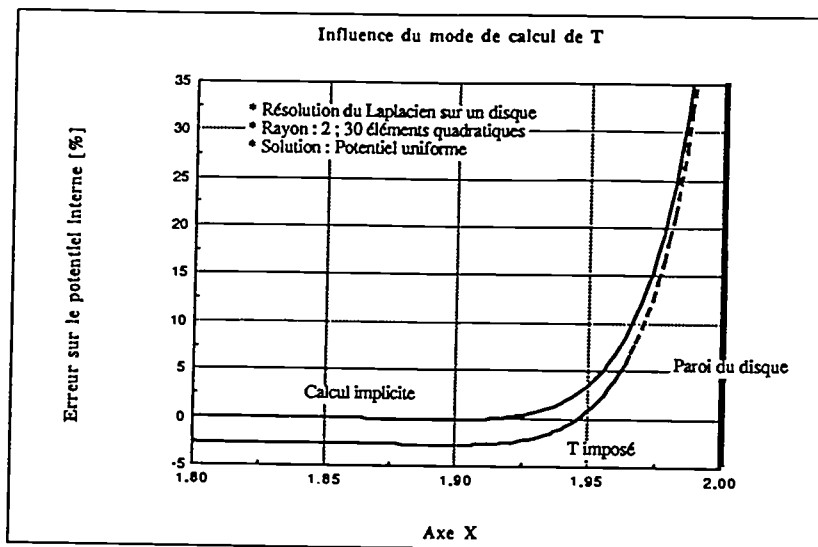


Figure 3.9

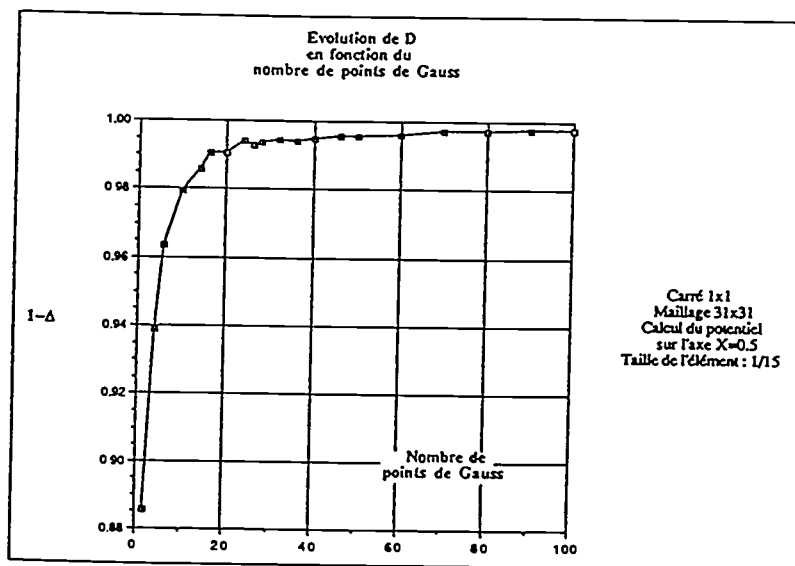


Figure 3.10

Cette option reste cependant onéreuse, le temps calcul augmentant proportionnellement au nombre de points de Gauss dans ce calcul bidimensionnel et à son carré dans un calcul tridimensionnel. L'utilisation d'un algorithme adaptatif des coefficients d'influence s'impose. Ce travail a été réalisé pour l'application tridimensionnelle de la résolution de l'équation de Laplace.

III.2.3 Cas test MSI : plaque plane carrée avec sources

Les paragraphes précédents ont démontré la sensibilité des résultats obtenus avec la méthode intégrale à proximité des parois. Cette sensibilité n'existe pas pour la méthode MSI, qui traduira d'autant mieux le comportement à la paroi que son maillage pariétal sera raffiné.

Il est intéressant de vérifier l'évolution des résultats en fonction de la densité de discrétisation.

Par la même occasion, le test suivant démontre l'influence de l'ordre de grandeur des termes sources sur la valeur du potentiel. Le cas test de la plaque plane carrée est utilisé. Les caractéristiques du calcul (figure 3.11) sont:

- Longueur d'un côté : 1
- Discrétisation : maillage régulier $N \times N$
- Condition aux limites : $\phi = 1$
- Termes sources : $Q = 0.1, 1$ ou 10 au centre.

Le calcul itératif MSI comporte des paramètres pour ajuster et accélérer sa convergence. Néanmoins, pour les trois configurations exposées ci-dessus, ces paramètres ne sont pas modifiés, notamment le nombre maximum d'itérations qui est fixé à 1000 pour ce test. En effet, lors de l'utilisation de cette méthode dans le code NSQE, ces paramètres restent constants pour ne pas compliquer outre-mesure la résolution de pression.

La figure 3.12 montre l'évolution du gradient de potentiel selon la densité du maillage sur une face.

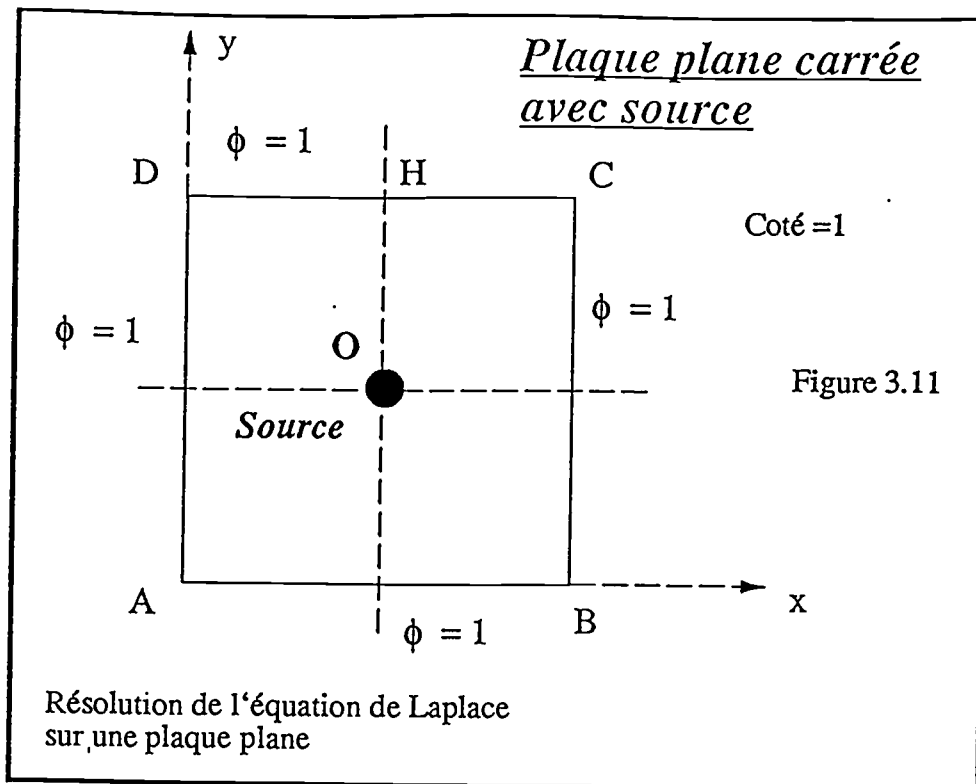
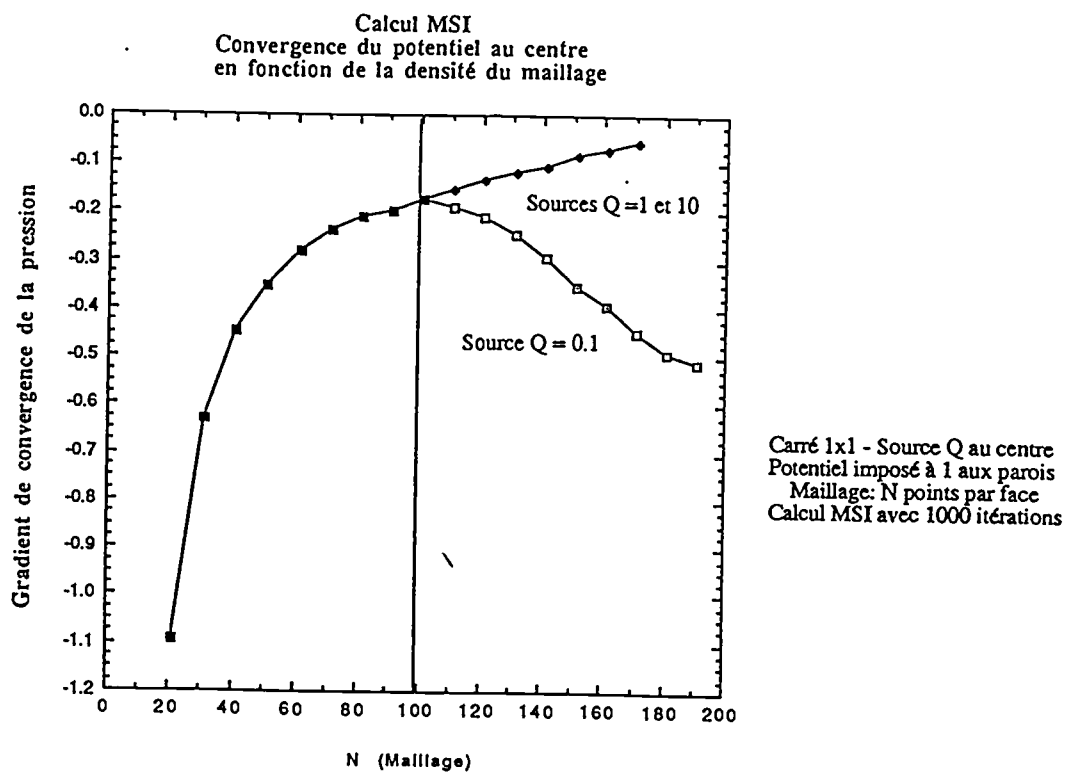


Figure 3.12



Ce gradient est normalisé par la densité de la source Q pour que les trois courbes de convergences partent du même point. Le gradient est défini ainsi

$$\frac{100}{Q} \frac{\phi_{n'} - \phi_n}{n' - n} = f(n) \text{ avec } n' = n + 10 \quad (3.9)$$

où "n'" et "n" désignent deux densités de discrétisation.

Ce gradient permet d'observer la convergence du potentiel en fonction de la densité du maillage. A priori, le résultat devient indépendant du maillage si ce dernier est suffisamment dense. Ainsi la fonction f(n) doit vérifier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \quad (3.10)$$

Les trois courbes correspondant aux sources Q = 0.1, 1 et 10 sont confondues jusqu'à N = 101. Cette dernière valeur est déjà très élevée par rapport à l'utilisation prévue du code NSQE. Seules les courbes avec Q = 1 et 10 vérifient la relation (3.10). Par contre, pour N supérieur à 101, la courbe obtenue avec Q = 0.1 s'écarte des deux précédentes.

Comme nous le précisons ci-dessus, les paramètres d'emploi de MSI ne sont pas optimisés à chaque configuration de calcul. Ainsi il est nécessaire de relaxer la correction de pression pour assurer la convergence du calcul MSI.

III.2.4 CONCLUSION

Dans le cas de géométries bidimensionnelles, La méthode des éléments frontière est d'une précision supérieure à celle de la méthode semi-implicite MSI. L'utilisation d'un maillage spécifique au calcul de la pression est envisageable. Par contre, une zone de discontinuité du potentiel interne existe avec la méthode

intégrale. La taille de cette bande pariétale est fonction de la taille des éléments de discrétisation surfaciques. Ce point, dans l'état actuel du code qui utilise des maillages de pression et de vitesse confondus, interdit l'emploi de la méthode des éléments frontières pour transférer les informations de la paroi à l'intérieur du plan courant de calcul. Nous conservons donc l'algorithme MSI pour cette étape.

La convergence de la méthode MSI est sensible à l'ordre de grandeur des termes sources. Ces derniers, dans le code NSQE, doivent donc être relaxés pour éliminer tout risque de divergence. Les tests précédents illustraient des comportements extrêmes des méthodes BEM et MSI avec des maillages très denses. De tels calculs ne sont pas possibles en tridimensionnel. Par contre, nous illustrons ci-dessous l'importance du maillage sur la qualité des résultats.

III.3 CALCULS TRIDIMENSIONNELS

Le code "Eléments Frontières" introduit dans le code NSQE est tridimensionnel. Ce chapitre présente des cas tests simples de validation de ce module. Notons les caractéristiques de ce code, dénommé HERMES par la suite. Le code est tridimensionnel avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neuman homogènes ou non. Les conditions aux limites sont locales. Ainsi, une condition limite doit être imposée à chaque point surfacique de discrétisation. Les sources internes sont positionnées à volonté. Outre la recherche des différentes inconnues du calcul, les potentiels internes sont calculés le cas échéant.

Le cas test choisi est la résolution de l'équation de la chaleur dans une sphère de rayon $R = 2$, de conductivité $K = 1$ avec une source ponctuelle Q au centre (figure 3.14).

Les quantités à valider sont les coefficients de Dirichlet et de Neuman et la contribution des sources internes.

Ce cas test est sévère dans la mesure où la surface est courbe et la qualité de la discrétisation surfacique influence grandement les résultats. Or le logiciel développé à l'occasion de cette recherche est destiné à des géométries tels des canaux inter-aubes avec des maillages structurés, nous analysons donc dans ces paragraphes le comportement limite d'HERMES.

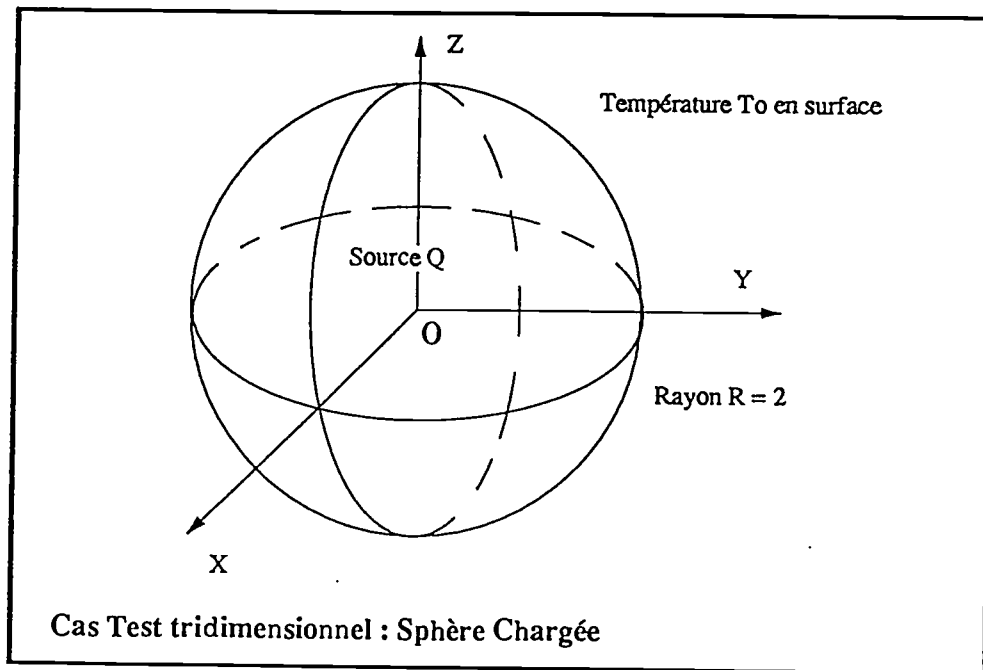


Figure 3.13

III.3.1 CALCUL DU POTENTIEL SUR UNE SPHERE SANS SOURCE

III.3.1.1 Cas test

La température est fixée à $T = 1$ sur la surface de la sphère et la source interne est nulle. La température est donc constante et égale à 1 dans tout le domaine et les dérivées normales sont nulles. Ce test permet de quantifier la précision du calcul des coefficients de Dirichlet surfaciques et internes.

Le maillage est de $7 \times 11 \times 11$ points. Des vues d'ensemble de la discrétisation surfacique sont présentées aux figures 3.14 et 3.15. Les éléments surfaciques sont quadratiques à 9 noeuds.

Figure 3.14 : Maillage tridimensionnel 7x11x11 d'une sphère

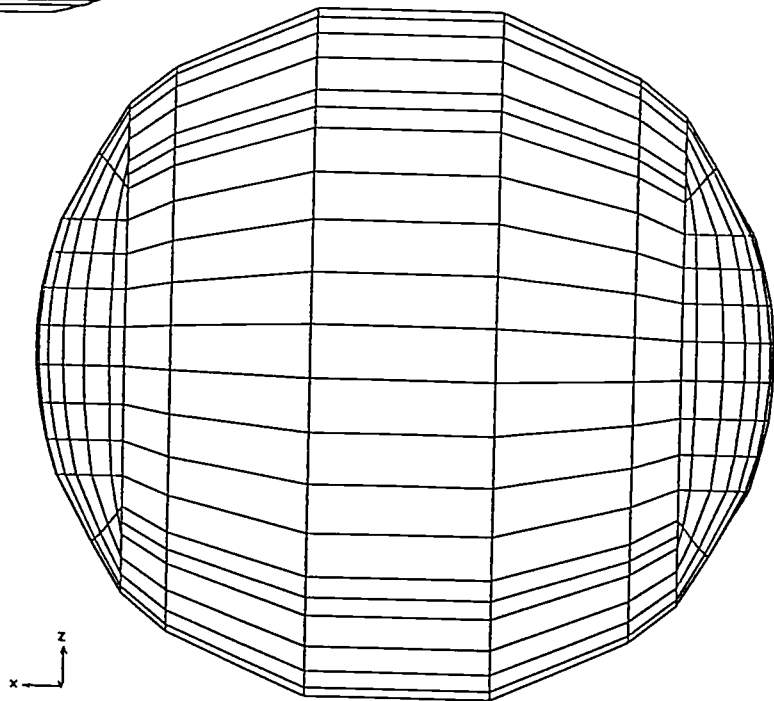
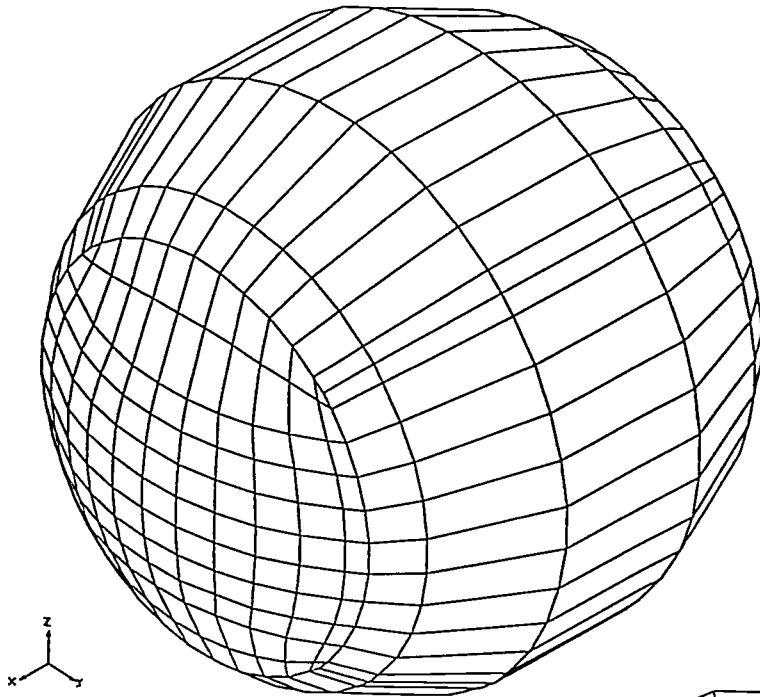


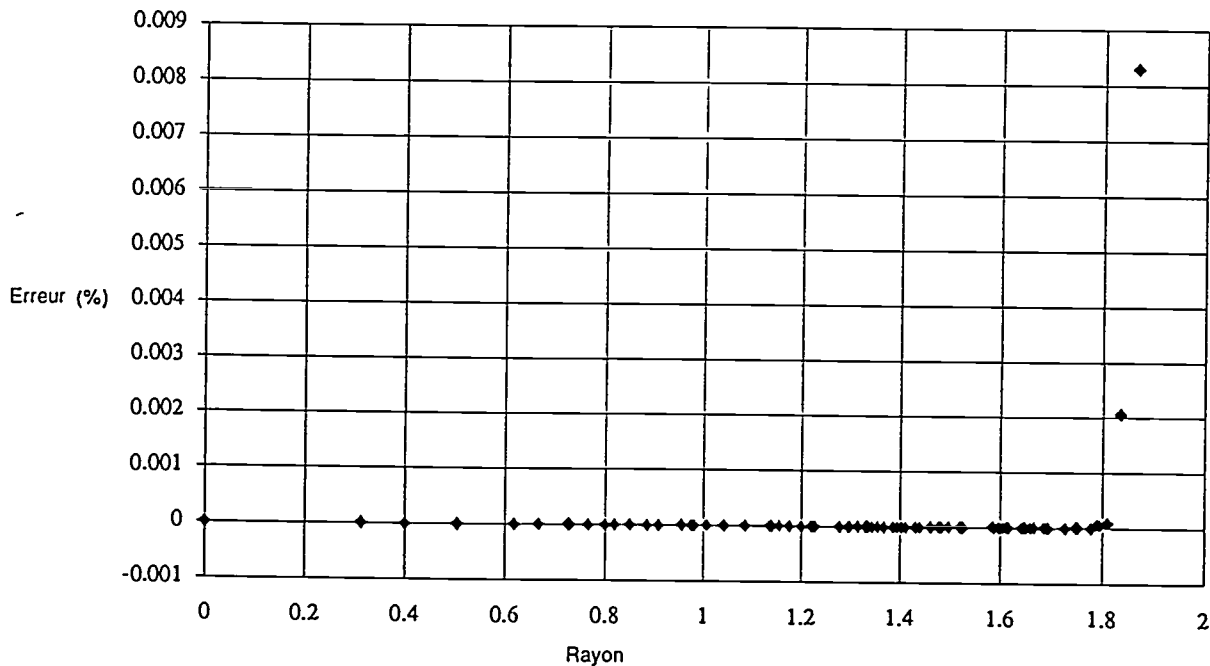
Figure 3.15 : Maillage tridimensionnel 7x11x11 d'une sphère

III.3.1.2 Résultats

Le potentiel calculé à l'intérieur de la sphère présente une erreur maximum de 0.008 % à proximité de la paroi. La courbe 3.16 illustre l'évolution de cette erreur dans la sphère en fonction du rayon. Les maxima d'erreurs apparaissent au voisinage des calottes maillées plus finement avec des éléments dégénérés. Ces calottes correspondent aux faces amont et aval d'un bloc à 7 plans. La précision est donc très influencée par le maillage. Ce résultat est confirmé par la suite.

Figure 3.16

Evolution de l'erreur sur le potentiel constant dans une sphère à charge nulle de rayon 2
(Maillage 7x11x11, éléments quadratiques)



III.3.2 CALCUL DU POTENTIEL SUR UNE SPHERE AVEC SOURCE

III.3.2.1 Cas test

La température est fixée à $T = 0$ sur la surface de la sphère et la source interne est égale à 1. La solution théorique de ce problème est

$$T(r) = \frac{1}{8 \pi} \frac{2 - r}{r}.$$

L'intégrale surfacique des dérivées normales de température est égale à l'intégrale volumique des sources internes. Cette égalité s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial n} = - \frac{1}{4 \pi} R^{-2},$$

soit

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = \frac{\partial T}{\partial n} \int_{\Gamma} d\Gamma = - \frac{1}{4 \pi} R^{-2} 4 \pi R^2 = -1$$

d'où

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} q d\Omega = -1$$

Comparons ces différentes quantités aux résultats numériques.

III.3.2.2 Maillage

Le maillage comporte 11 points selon les trois axes ,soit 1331 points. Il est présenté aux figures 3.17 et 3.18. Le maillage des deux calottes extrêmes selon X est moins régulier que celui des calottes selon Z et Y. Les résultats seront de moins bonne qualité pour des valeurs de X proches de la frontière. Cette discrétisation surfacique permettra donc de mettre en évidence l'influence du maillage.

III.3.2.3 Résultats

Nous calculons les potentiels internes à 15 positions équi-réparties sur un rayon selon les axes X, Z et X=Z. Deux types d'éléments rectangulaires, quadratiques et linéaires, sont testés. L'algorithme de calcul des coefficients d'influence utilise un nombre minimum de points de Gauss fixé par l'utilisateur. Ce nombre est automatiquement accru si la précision requise sur le calcul des coefficients d'influence n'est pas vérifiée selon la formulation (A3.14) exposée dans l'annexe 3. Quatre valeurs minimales sont testées (2, 6, 12 et 20).

Figure 3.17 : Maillage tridimensionnel 11x11x11 d'une sphère

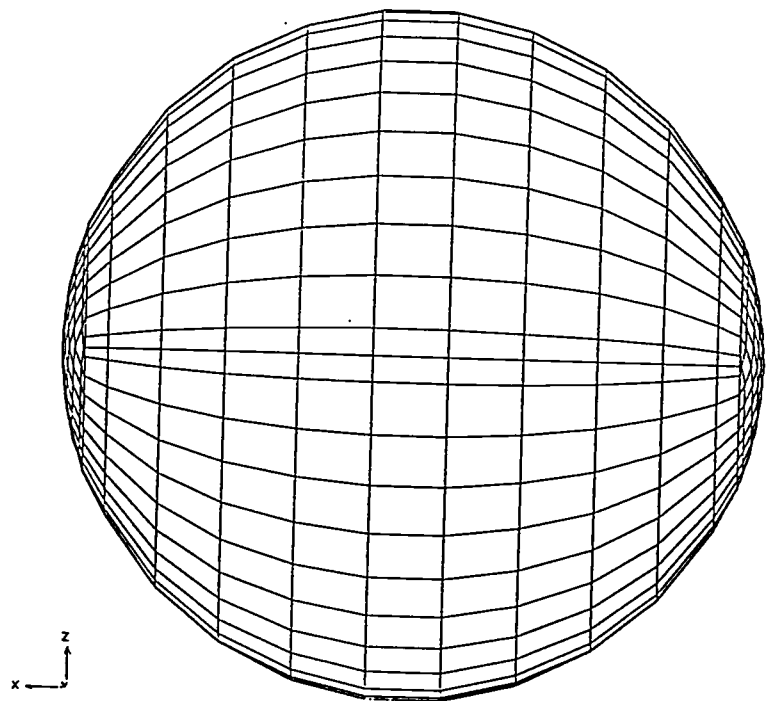
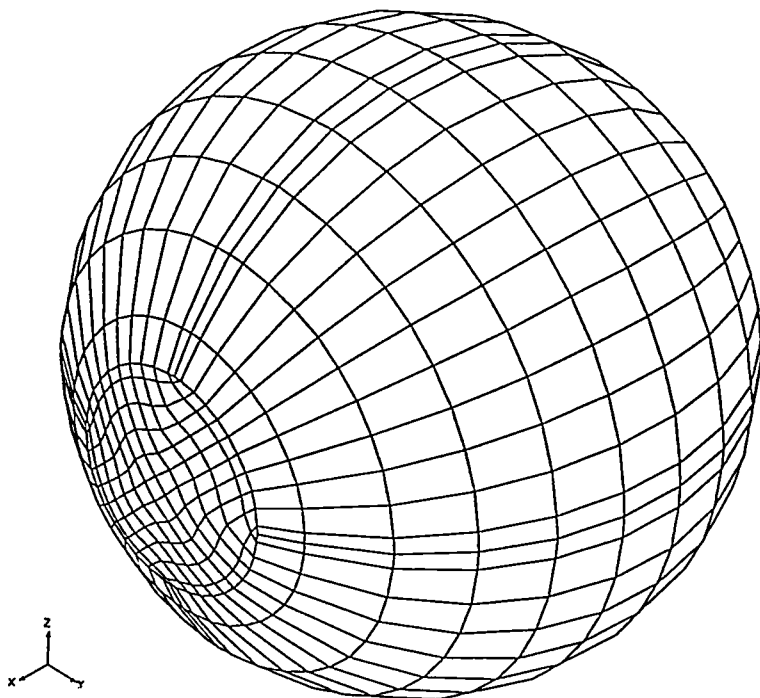


Figure 3.18 : Maillage tridimensionnel 11x11x11 d'une sphère

a) Eléments linéaires et quadratiques

Les coefficients de la diagonale de la matrice des coefficients d'influence de Dirichlet sont théoriquement égaux à 2 puisque la surface est convexe sans arêtes.

L'erreur moyenne des coefficients diagonaux ϵ_d est un critère d'appréciation sur le choix des éléments surfaciques qui représentent plus ou moins bien la surface physique.

L'erreur moyenne avec la discrétisation linéaire est 9.308 % quel que soit le nombre minimum de points de Gauss utilisé dans l'algorithme de détermination du nombre de points de Gauss à utiliser pour chaque intégration. Cette valeur est supérieure à l'erreur de 3.400 % obtenue avec la discrétisation quadratique (2.29 % et 9.678 % avec des maillages 13^3 et 5^3 respectivement avec 6 points de Gauss). Comme surface quadratique, la sphère est donc mieux représentée avec des éléments du même type. Des éléments triangulaires quadratiques seraient d'ailleurs plus intéressants.

b) Influence du maillage surfacique

Analysons l'erreur sur le potentiel interne selon l'axe de positionnement des points.

La courbe 3.19 présente cette erreur aux points situés sur l'axe Y. Les calottes sphériques sur cet axe sont construites avec des mailles régulières. L'erreur moyenne est de 0.063 % avec 12 points de Gauss au minimum. En diminuant ce nombre minimal, l'erreur augmente jusqu'à 12 % à proximité de la paroi avec 2 points de Gauss par exemple. Ainsi, en utilisant 12 points de Gauss au minimum pour calculer les coefficients d'influence, pour peu que le maillage soit correct, la précision de la méthode intégrale est de l'ordre de 0.05 % sur le calcul des potentiels. A titre indicatif, les résultats obtenus avec des éléments linéaires sont présentés à la figure 3.20.

Evolution de l'erreur sur le potentiel interne d'une sphère selon l'axe Y (Eléments quadratiques)

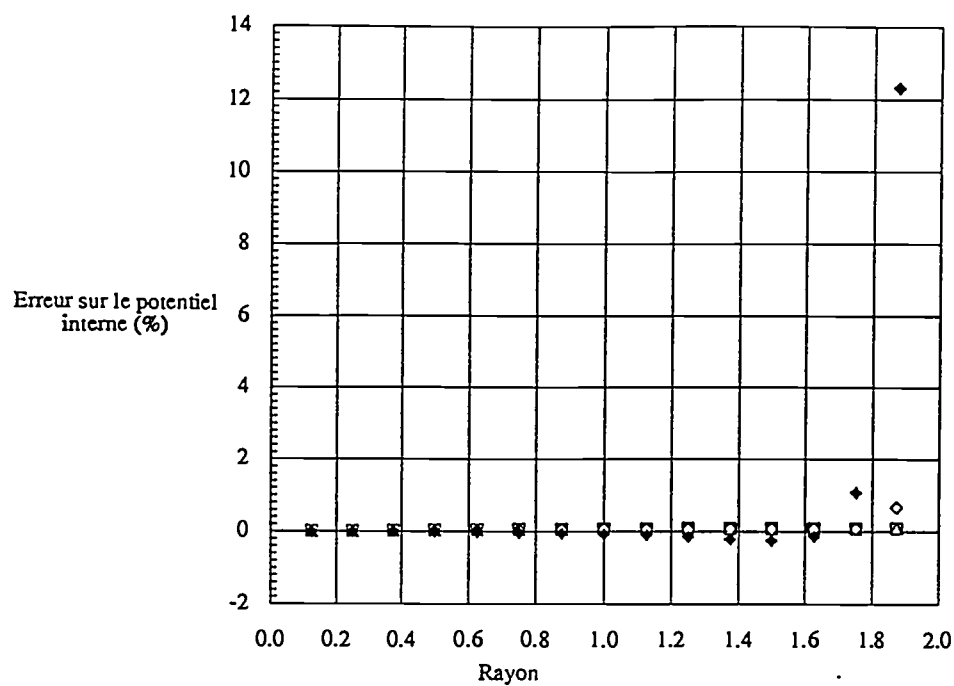


Figure 3.19

Evolution de l'erreur sur le potentiel interne d'une sphère selon l'axe Y (Eléments linéaires)

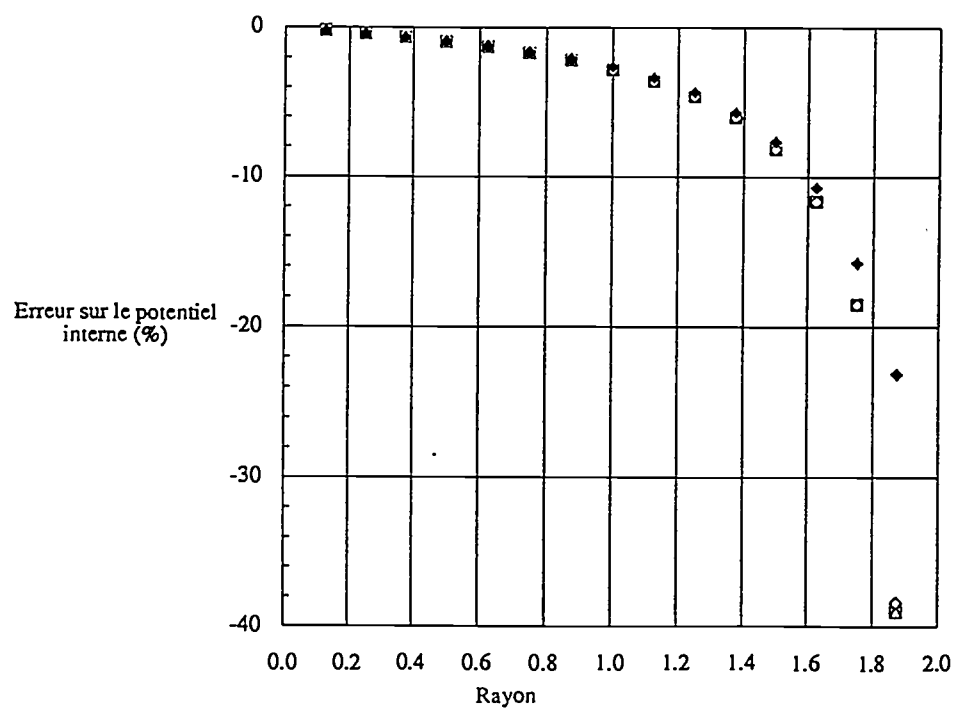


Figure 3.20

Un tableau comparatif, figure 3.21, montre l'erreur sur la diagonale ϵ_d et les erreurs moyennes sur la valeur des potentiels internes selon le nombre de points de Gauss, l'axe et le type d'éléments.

Nombre min. pts de Gauss	Erreur sur la diagonale de Dirichlet ϵ_d [%]	Erreur de conservation des flux ϵ_c [%]	Erreur moyenne sur sur les axes		
			X [%]	Y [%]	X=Z [%]
Eléments surfaciques quadratiques					
20	3.40	0.122	0.49	0.06	-0.07
12	3.40	0.122	0.49	0.06	-0,07
6	3.40	0.118	0.48	0.10	-0.06
2	3.42	0.010	0.30	0.83	-1.82
Eléments surfaciques linéaires					
20	9.31		-5.36	-6.78	-8.51
12	9.31		-5.36	-6.78	-8.51
6	9.31		-5.36	-6.74	-8.49
2	9.31		-4.95	-4.95	-9.31

Figure 3.21

Les potentiels calculés selon l'axe X sont présentés à la figure 3.22. Les points de cet axe sont influencés principalement par les calottes sphériques centrées sur X. Le maillage y est de densité irrégulière et certains éléments sont distendus. Ces distorsions se traduisent par des erreurs plus importantes qui augmentent à proximité des calottes jusqu'à 1.8 %. Remarquons que l'erreur avec 2 points de Gauss est inférieure aux 3 autres cas. En effet,

2 points de Gauss est inférieure aux 3 autres cas. En effet, l'augmentation du nombre de points de Gauss va augmenter le poids relatif des coefficients calculés au centre des éléments quadratiques et accentuer ainsi la distorsion déjà existante du maillage numérique.

La courbe 3.23 présente les potentiels calculés sur l'axe $X=Z$. Les points de cet axe à proximité de la surface sont influencés par les éléments quadratiques dégénérés du contour de la calotte sphérique d'axe X . Les potentiels de cette zone présentent ainsi une erreur qui peut s'élever jusqu'à 3 % ou 25 % selon le nombre minimum de points de Gauss utilisé (supérieur à 6 et égal à 2 respectivement).

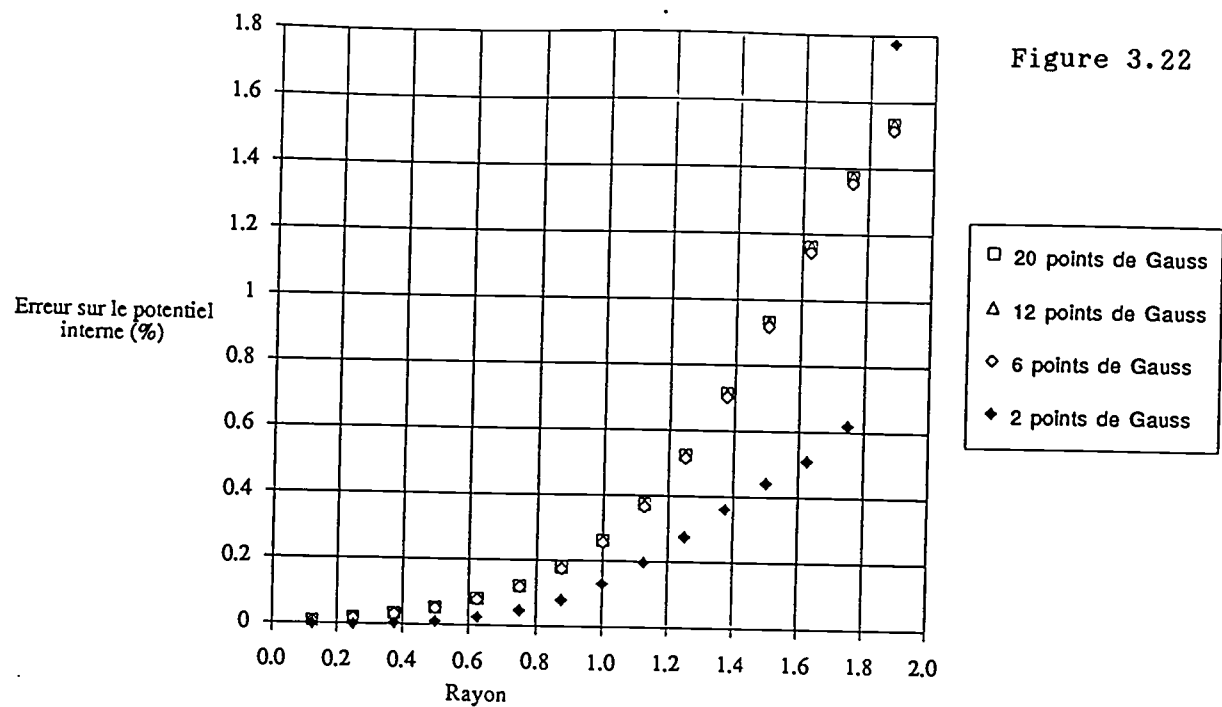
c) Précision de la méthode des éléments frontières

Pour apprécier la précision de la méthode des éléments frontières, les potentiels internes sont calculés avec la méthode des éléments finis. Le code utilisé est développé par le groupe Aérothermodynamique du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon.

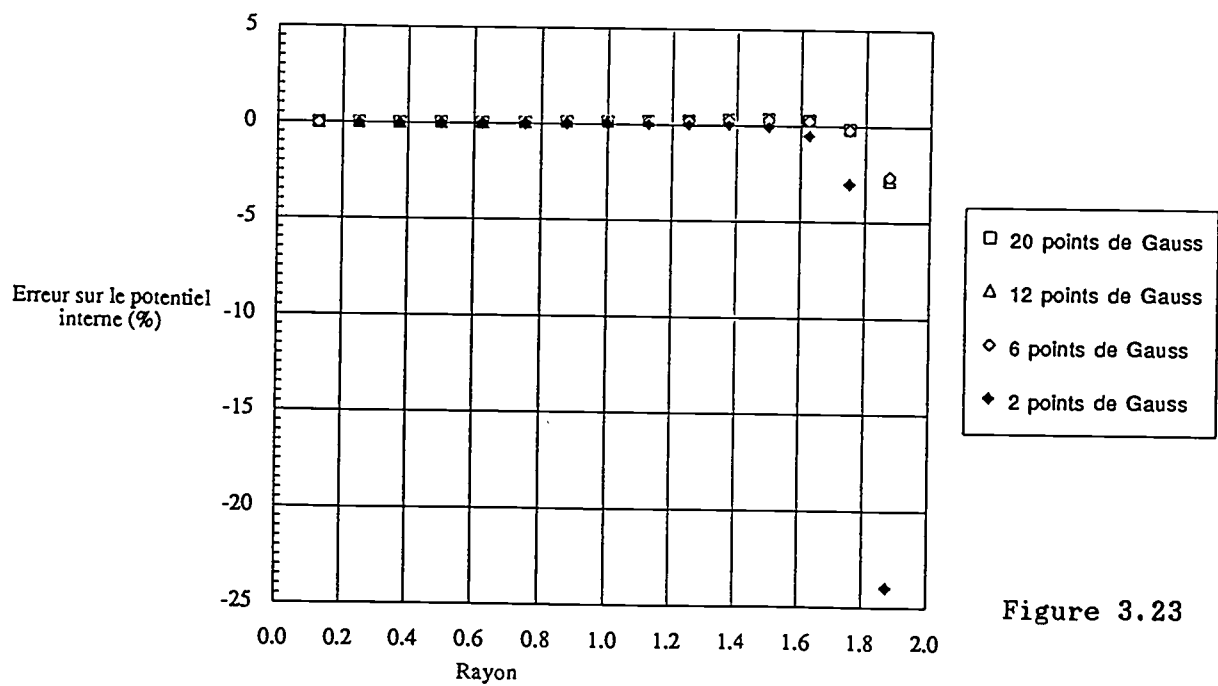
Le maillage utilisé est directement généré à partir du maillage présenté à la figure 3.17. La surface est discrétisée en éléments triangulaires. A la source ponctuelle du calcul utilisée lors du calcul par la méthode des éléments frontières est substituée une source quasi-ponctuelle (sphère de rayon 0.02) pour permettre le calcul.

L'erreur en pourcentages sur le potentiel interne selon l'axe X de la sphère est présentée pour les deux méthodes à la figure 3.24. Les intégrales d'influence de la méthode des éléments frontières sont calculées avec 20 points de Gauss.

Evolution de l'erreur sur le potentiel interne d'une sphère selon l'axe X (Eléments quadratiques)



Evolution de l'erreur sur le potentiel interne d'une sphère selon l'axe diagonal X = Z (Eléments quadratiques)



Calcul sur une sphère : comparaison avec la méthode des Eléments Finis

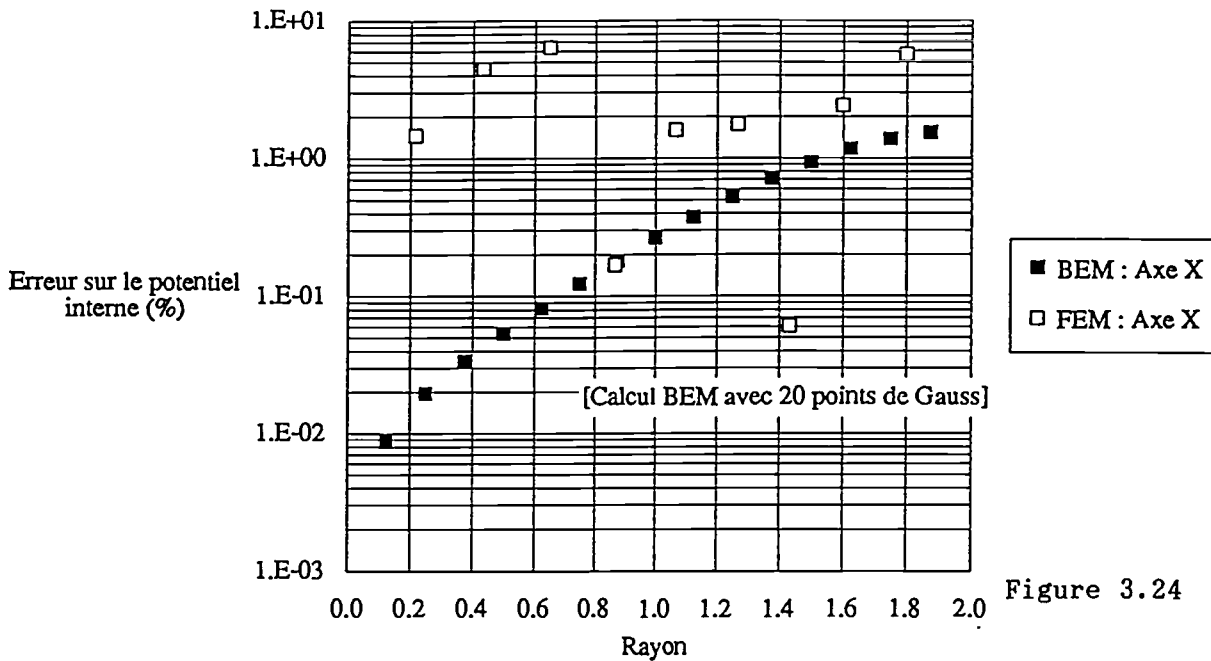


Figure 3.24

L'erreur calculée sur les résultats de la méthode des éléments frontières augmente du centre de la sphère vers l'extérieur puisque la discrétisation surfacique ne représente qu'approximativement une sphère de rayon égal à 2. Par contre, l'erreur sur les résultats obtenus avec la méthode des éléments finis est plus importante au centre puisque la source n'est pas exactement ponctuelle et à proximité de la surface pour la même raison que la méthode intégrale. Ainsi, le niveau moyen d'erreur de la méthode des éléments finis est supérieur à la méthode des éléments frontières. La qualité des résultats est cependant similaire pour les rayons voisins de l'unité.

Pour cet exemple particulier de la sphère avec une source ponctuelle, nous constatons donc l'excellente qualité des résultats obtenus avec la méthode des éléments frontières. Cette dernière est par ailleurs plus adaptée à ce type de problème que la méthode des éléments finis.

III.3.3 Règles d'utilisation

La précision de la méthode tridimensionnelle des éléments frontières est très correcte avec peu de points de discrétisation surfacique. Par contre, l'influence du maillage sur la précision des potentiels est importante à proximité de la surface. Le maillage surfacique de la zone où les informations sont recherchées doit être particulièrement soigné.

III.4 CONCLUSION

Ce chapitre a comparé les méthodes de résolution de l'équation de Poisson bidimensionnelle et tridimensionnelle. La précision supérieure de la méthode intégrale surfacique avec peu de points à la frontière sur la méthode volumique de type MSI est mise en évidence. Le choix de la méthode MSI pour calculer les informations à l'intérieur du domaine et comme référence de comparaison a été dicté par la disponibilité de ce code et son utilisation dans la résolution NSQE. En outre, une discontinuité numérique à la frontière du domaine interdit l'usage de la méthode BEM pour le calcul des points intérieurs afin de remplacer le calcul MSI. Ce choix sera confirmé par la suite. La convergence du code MSI est en outre sensible à l'ordre de grandeur des termes sources.

A terme, un maillage spécifique à la pression, moins dense que celui de la vitesse, est à prévoir.

La résolution de l'équation de la chaleur sur une sphère démontre la grande sensibilité des résultats à la régularité du maillage. La précision est très correcte par rapport à la méthode des éléments finis.

Le code intégral tridimensionnel HERMES est maintenant implanté dans le code NSQE. Le couplage entre la résolution itérative de vitesse et de pression est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

COUPLAGE DE LA METHODE DES ELEMENTS FRONTIERES AVEC UN CODE NAVIER STOKES

Suite à l'étude spécifique de la méthode de calcul de pression dans le chapitre précédent, nous nous proposons de caractériser l'influence de ces modules de pression sur le comportement du code NSQE. Il sera alors possible d'utiliser le code sur une géométrie de turbine. Les algorithmes de calcul du champ de vitesse, de turbulence et de correction monodimensionnelle de débit ne seront pas abordés dans ce texte. La référence POMMEL [1990] est exhaustive sur ces sujets.

IV.1 METHODOLOGIE

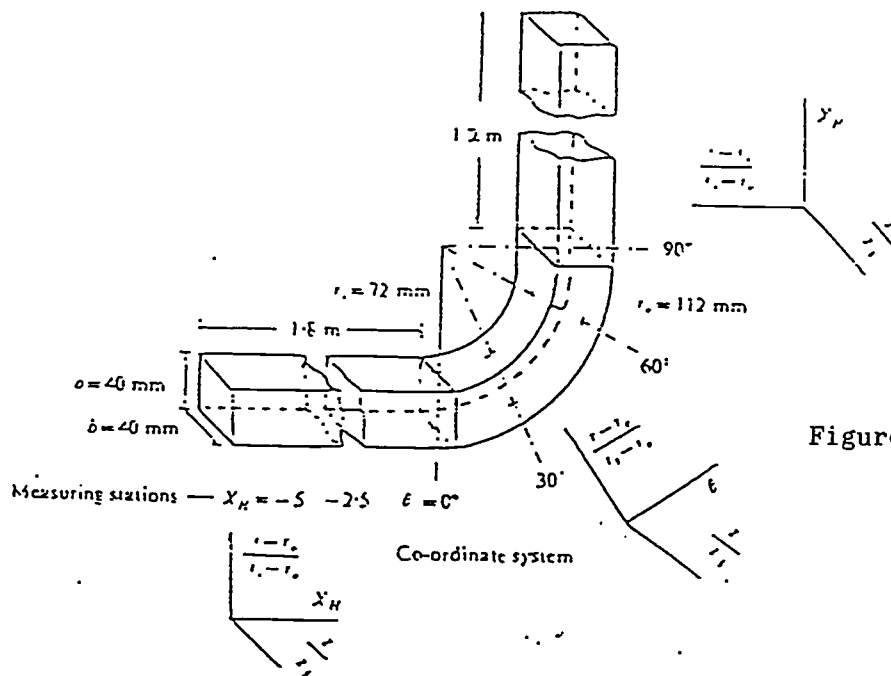
Avant toute étude, les outils de caractérisation de la convergence du calcul et de la relaxation nécessaire pour obtenir cet état convergé du code NSQE sont définis, afin de caractériser les tests numériques. A partir de la version de NSQE existante au début de ce travail, l'utilisation de la méthode intégrale en modes dits "extrait" (MARJANI [1987]) et "complet", sans l'approximation utilisée par MARJANI, seront comparées. Le paragraphe IV.4.1 discutera alors de la diminution de la taille mémoire en proposant un algorithme dit de "déraffinement". L'utilité d'un maillage propre à la pression y sera démontrée. Enfin, la résolution numérique du système est détaillée pour en étudier l'optimisation.

Afin de valider le code NSQE avant son utilisation sur une géométrie de turbine, un certain nombre de mesures expérimentales sur des géométries typiques des canaux inter-aube de turbomachines existent. Dans le cadre de cette étude, les géométries retenues présentent des écoulements à forte ellipticité avec des courbures

plus ou moins prononcées. Le cas test retenu pour ce chapitre est un canal courbé à 90° étudié par TAYLOR [1981].

Cette géométrie offre l'avantage d'être simple (section carrée 0.04 x 0.04 m², rayon de courbure moyen de 0.092 m) tout en présentant des écoulements secondaires importants. La figure 4.1 expose la géométrie et les dimensions du coude.

Des mesures de vitesse, et les tensions de Reynolds correspondantes pour le cas turbulent, existent pour les nombres de Reynolds égaux à 790 et 40000 pour les cas laminaire et turbulent respectivement. Les pressions pariétales sont mesurées dans le cas turbulent. L'amplitude maximum des vitesses secondaires représente 60 à 40% de la vitesse longitudinale débitante dans les cas laminaire et turbulent respectivement.

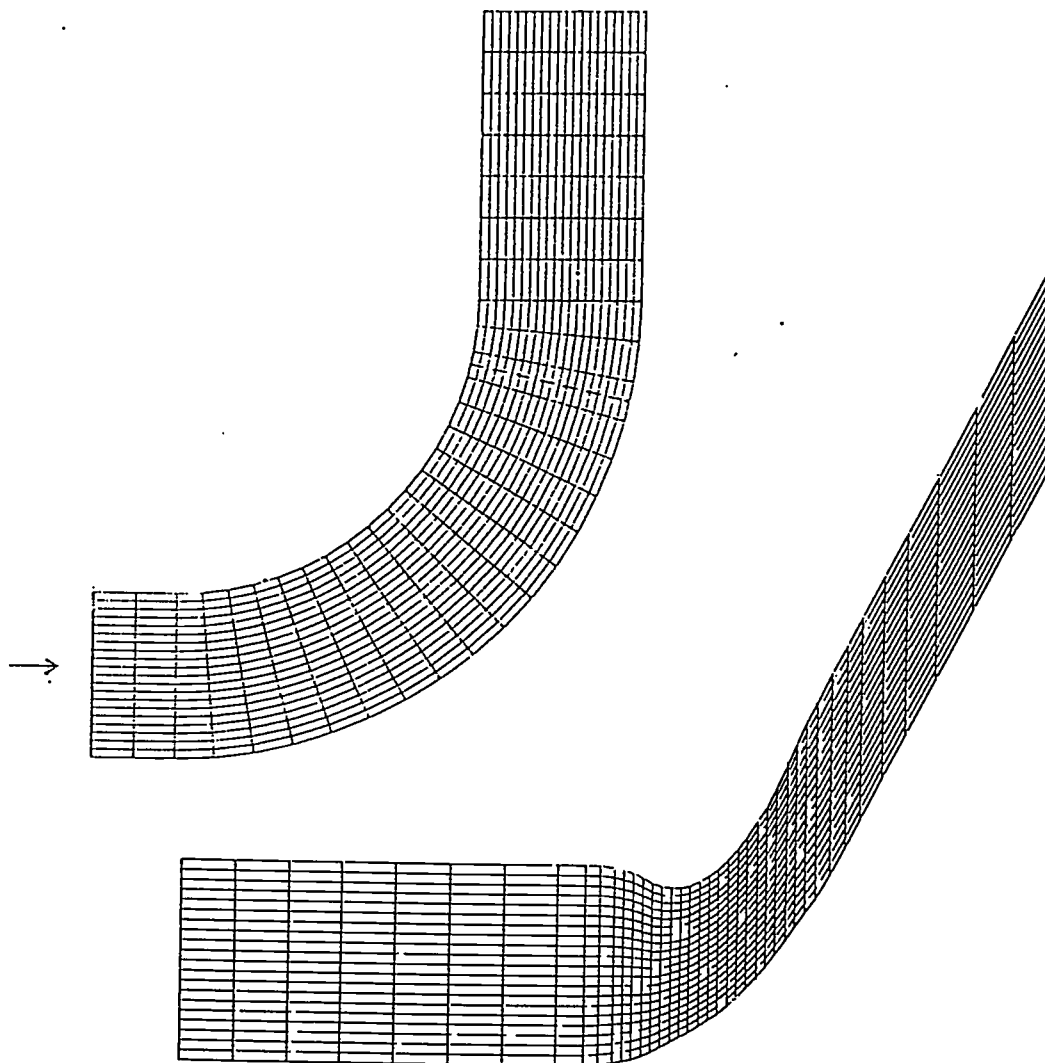


Géométrie du coude à 90° et stations de mesure

Figure 4.1.b

Maillages

: coude à 90° et turbine ECL



Ce cas test ne permet pas d'apprécier la qualité du calcul de la pression quantitativement et qualitativement puisqu'aucune mesure de pression autre que pariétale n'est disponible. A cette fin, une analyse des résultats numériques est présentée à la fin de ce chapitre sur la géométrie du coude de Stanitz, présenté au paragraphe IV.6.2, où des mesures détaillées de pression statique et totale sont disponibles.

Le cas test de référence étant maintenant défini, le paragraphe suivant développe l'utilisation du code NSQE.

IV.2 COMPORTEMENT ET OUTILS D'ANALYSE DU CODE NSQE

IV.2.1 DEFINITION DE LA CONVERGENCE

Avant de comparer différentes configurations de calcul sur une même géométrie, il est nécessaire de définir le moment où le calcul est considéré comme terminé, c'est à dire convergé.

Notons que les maillages utilisés pour ce code sont de type front de grille, c'est à dire que le maillage est conçu de telle manière que les points homologues par périodicité appartiennent au même plan transversal. Un plan transversal désignera donc le plan d'axes γ et η relativement à la direction longitudinale ξ (figure 4.1.b). En l'absence de conditions de périodicité, les plans transversaux sont orthogonaux à la direction longitudinale ξ . Le maillage du coude utilise 17 points selon les directions transversales η et γ et 22 plans selon la direction longitudinale ξ (figure 4.1.b).

Dans un processus pseudo-parabolisé de balayages de l'amont vers l'aval, deux critères sont possibles.

Un premier critère global est la convergence du débit qui est une inconnue du calcul. Ainsi, le processus sera convergé lorsque les débits amont et aval seront égaux.

Le coefficient de convergence correspondant peut s'écrire :

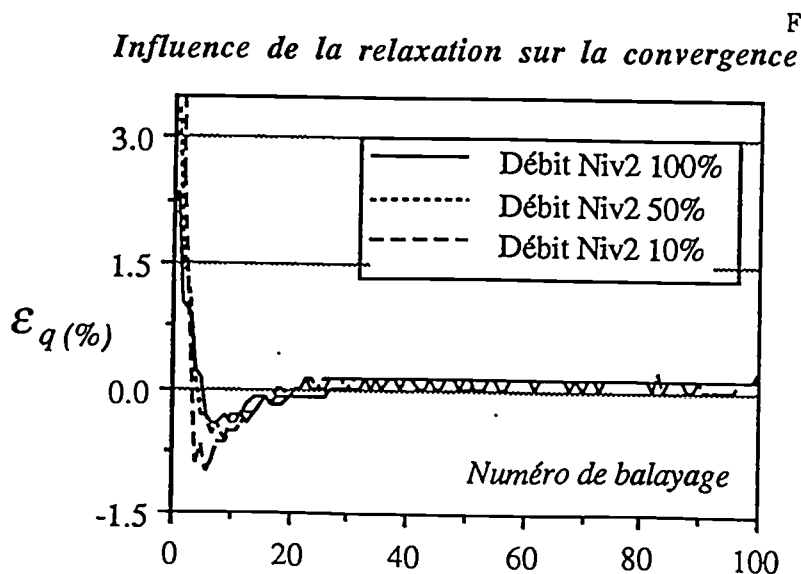
$$\epsilon_Q (\%) = 200 \frac{Q_{\text{Amont}} - Q_{\text{Aval}}}{Q_{\text{Amont}} + Q_{\text{Aval}}} \quad (4.1)$$

avec $\epsilon_q = 0\%$ à convergence.

Ce coefficient ne permet pas de vérifier la convergence interne du calcul. Un débit convergé n'implique pas la stabilité du calcul dans un plan transversal. Un critère local est donc nécessaire. Ce coefficient choisi caractérise le niveau de correction de pression au cours des balayages. Si la correction est nulle, il n'y a plus de transferts entre la vitesse et la pression aussi le calcul est-il convergé.

Pour un balayage donné, ce coefficient, noté ϵ_p , est le maximum local de correction de pression, en pourcentage de la pression dynamique, dans le canal.

Les figures 4.2 et 4.3 illustrent les évolutions du coefficient de débit ϵ_q et de coefficient de pression ϵ_p . La précision exigée sur la pression est de 1%. Il est donc inutile de comparer les différentes configurations à moins de 1%. Notons le comportement instable du calcul associé à la courbe " $\alpha_r=100\%$ ". Cette instabilité n'est pas visible sur l'évolution de ϵ_q . Les 3 courbes, distinctes sur la figure 4.3 sont d'ailleurs confondues sur la figure 4.2.



Influence de la relaxation sur la convergence

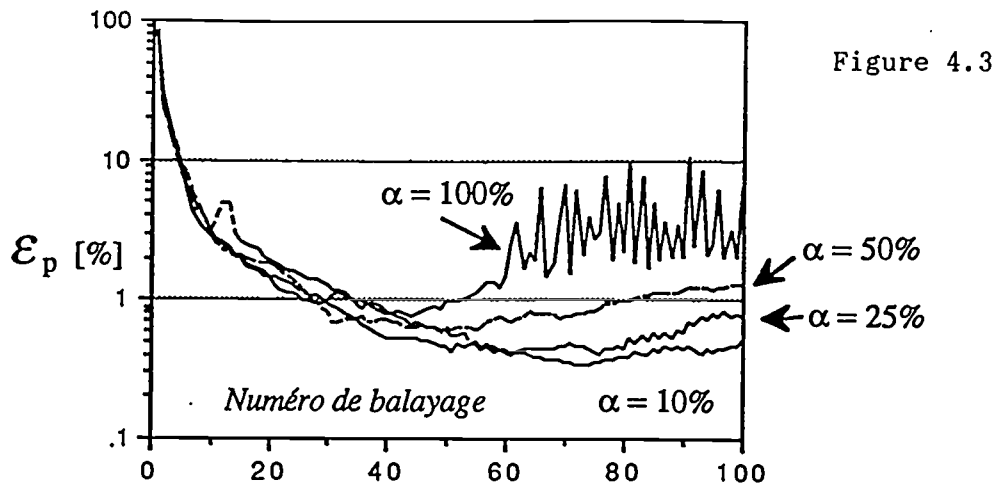


Figure 4.3

Ainsi, le critère de débit est utile pour indiquer la tendance du calcul et la stabilisation du calcul autour de corrections voisines de 1% (balayages 25-30 sur la figure 4.2). Par contre, il ne peut déceler les tendances instables des courbes " $\alpha_r = 100\%$ " et " $\alpha_r = 50\%$ " visibles sur la figure 4.3. Cette dernière figure confirme également la convergence à 0.8% des cas " $\alpha_r = 10\%$ " et " $\alpha_r = 25\%$ ".

En conclusion, seul le critère de convergence ε_p sera utilisé par la suite pour confirmer la convergence d'un cas test.

IV.2.2 IMPORTANCE DE LA RELAXATION

Le chapitre III démontrait l'importance d'une relaxation sur le calcul de la correction de pression dans la méthode MSI. Cette relaxation est introduite sous la forme d'un coefficient, noté α_r [%], compris entre 100 et 0. La correction est complètement réintroduite à chaque itération temporelle si $\alpha_r = 100\%$.

Il est permis de se demander si, par exemple, pour $\alpha_r = 25\%$, la correction de pression est complètement réintroduite en 4 itérations.

De plus, il existe a priori un seuil $\alpha_r = \alpha_{rs}$, tel que pour toute relaxation supérieure à α_{rs} , le calcul diverge. En deçà, le résultat doit être indépendant de la relaxation.

Afin de confirmer ces remarques, quatre calculs, correspondants chacun à un niveau de relaxation différent (10, 25, 50 et 100%), sont présentés à la figure 4.3. Le niveau de déraffinement est 2 (cf. paragraphe IV.4).

Les 40 premiers balayages ont un comportement similaire pour les 4 cas. Mais dès le 50ème balayage, les calculs avec une relaxation supérieure ou égale à 50% divergent ($25 < \alpha_{rs} \leq 50$). Cette divergence est d'autant plus prononcée que α_r augmente.

Cette relaxation est indispensable pour MSI (chapitre II). Ce calcul itératif a d'ailleurs épuisé le nombre maximum d'itération possible (200) sur quelques plans pour le cas à $\alpha_r = 100\%$ au 10ème balayage. Mais cet indice n'est pas suffisant pour prévoir la divergence. Il est d'ailleurs absent pour le cas à $\alpha_r = 50\%$

Ainsi, une dizaine de balayages stabilisés à $\epsilon_p = 0.4\%$ semble être un bon indice de convergence (cas $\alpha_r = 25\%$ et $\alpha_r = 10\%$). Ce sera le critère adopté dans la suite de ce travail.

Comparons les résultats obtenus par les configurations convergées $\alpha_r = 25\%$ et $\alpha_r = 10\%$.

Nous choisissons d'utiliser les variables adimensionnelles de coefficients de pression et de vitesse pour analyser les résultats. Ces coefficients sont définis selon

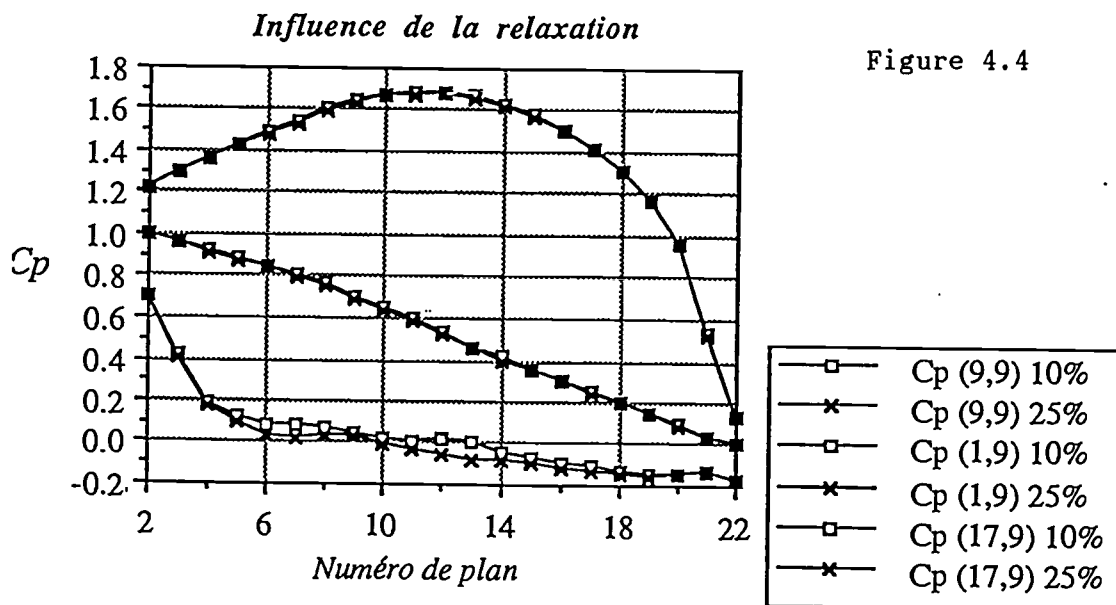
$$C_p = \frac{P - P_{ref}}{P_{A_{mont}} - P_{ref}} \quad (4.2)$$

$$c_u = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2}{P_{\text{Amont}} - P_{\text{ref}}} \quad c_v = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{P_{\text{Amont}} - P_{\text{ref}}} \quad c_w = \frac{\frac{1}{2} \rho W^2}{P_{\text{Amont}} - P_{\text{ref}}}$$

$$C_v = \frac{\frac{1}{2} \rho (U^2 + V^2 + W^2)}{P_{\text{Amont}} - P_{\text{ref}}}$$

La pression P_{Amont} est une pression définie à l'amont du canal inter-aube. Nous choisissons de la prendre au centre du premier plan. La pression de référence P_{ref} est choisie au centre du dernier plan.

Des profils de C_p et C_v caractéristiques sont présentés aux figures 4.4 à 4.8. Ces courbes présentent l'évolution longitudinale de ces paramètres pour une position (η, γ) constante. Chacune de ces positions est repérée sur le schéma 4.9. L'accord entre les 2 calculs est remarquable et confirme l'hypothèse émise au début du paragraphe. Les différences observées localement s'expliquent par la différence des chemins de convergence entre les 2 calculs. Le temps calcul du cas avec $\alpha_r = 10\%$ est en effet plus long de 10 mn sur l'ALLIANT FX80.



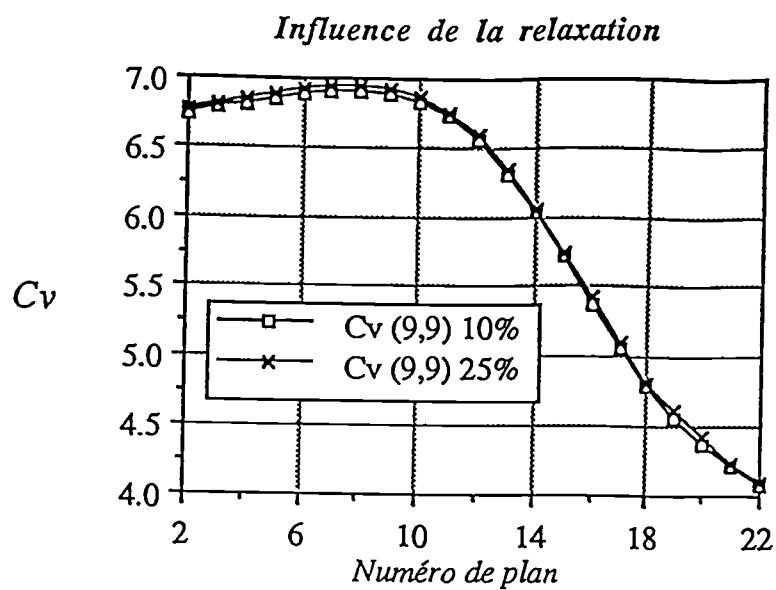


Figure 4.5

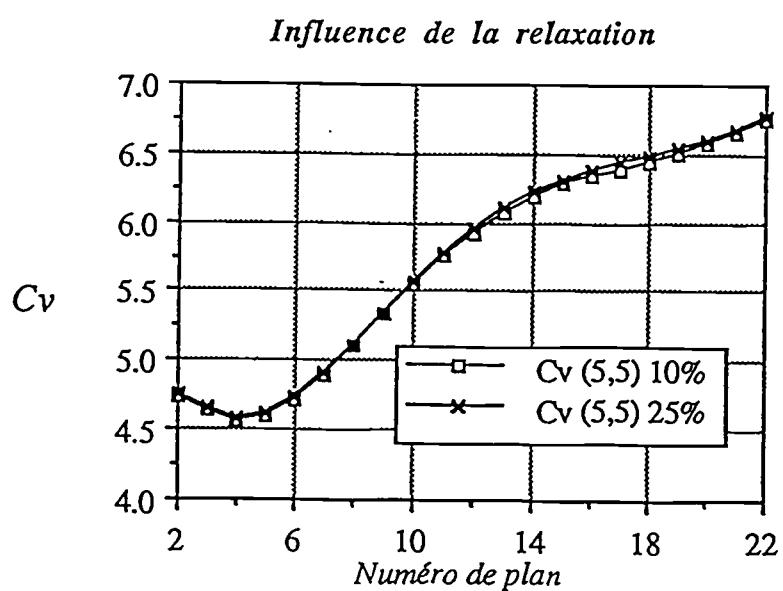


Figure 4.6

Influence de la relaxation

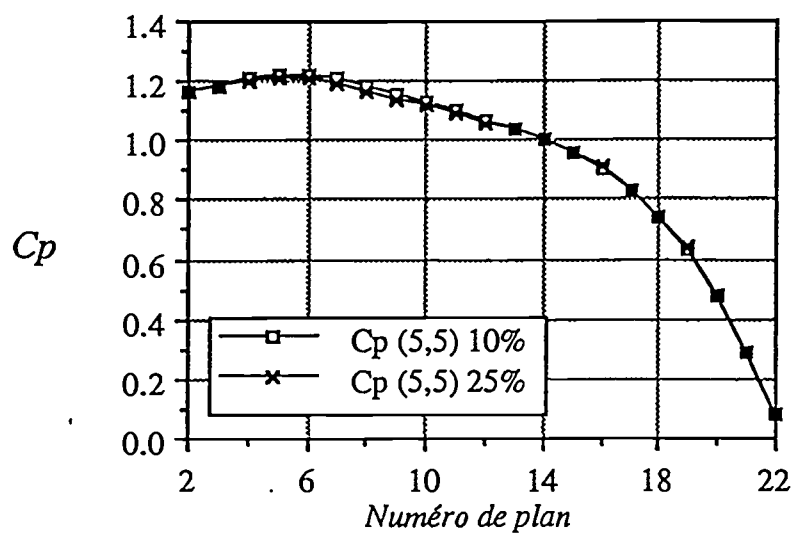


Figure 4.7

Influence de la relaxation

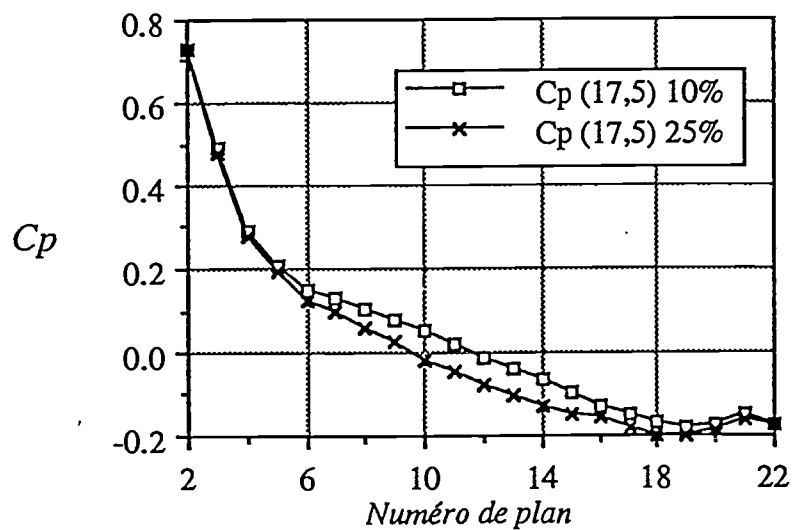
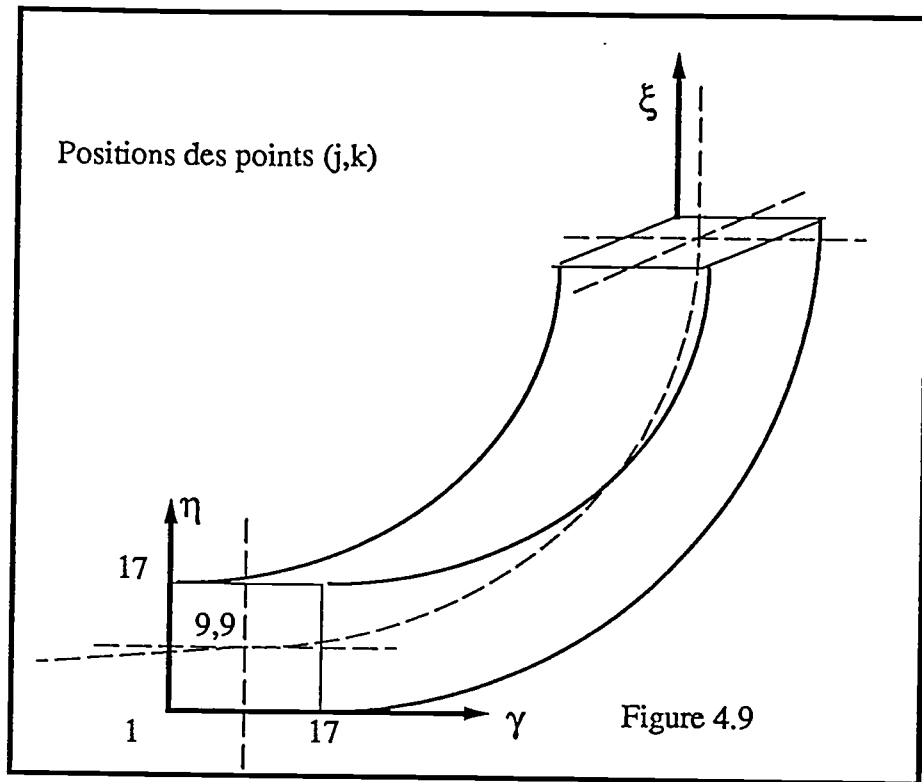


Figure 4.8



Pour conclure, le choix du paramètre de relaxation α_r est indifférent à condition d'assurer la convergence du calcul.

Le comportement du code et l'influence du paramètre de relaxation α_r sur MSI, l'unique paramètre variable selon le cas test, sont maintenant connus. La suite de ce chapitre aborde le comportement de la résolution intégrale.

IV.3 MATRICE EXTRAITE OU COMPLETE

Deux modes d'utilisation du système intégral obtenu à partir du système (2.34) sont possibles. Le premier résout le système complet tandis que le second introduit une simplification et ne

conserve que les équations relatives aux inconnues du plan courant utilisées dans le code NSQE. Les paragraphes ci-dessous présentent ces deux modes de calcul et précise les domaines d'utilisation de l'une et l'autre des deux méthodes.

IV.3.1 INTRODUCTION

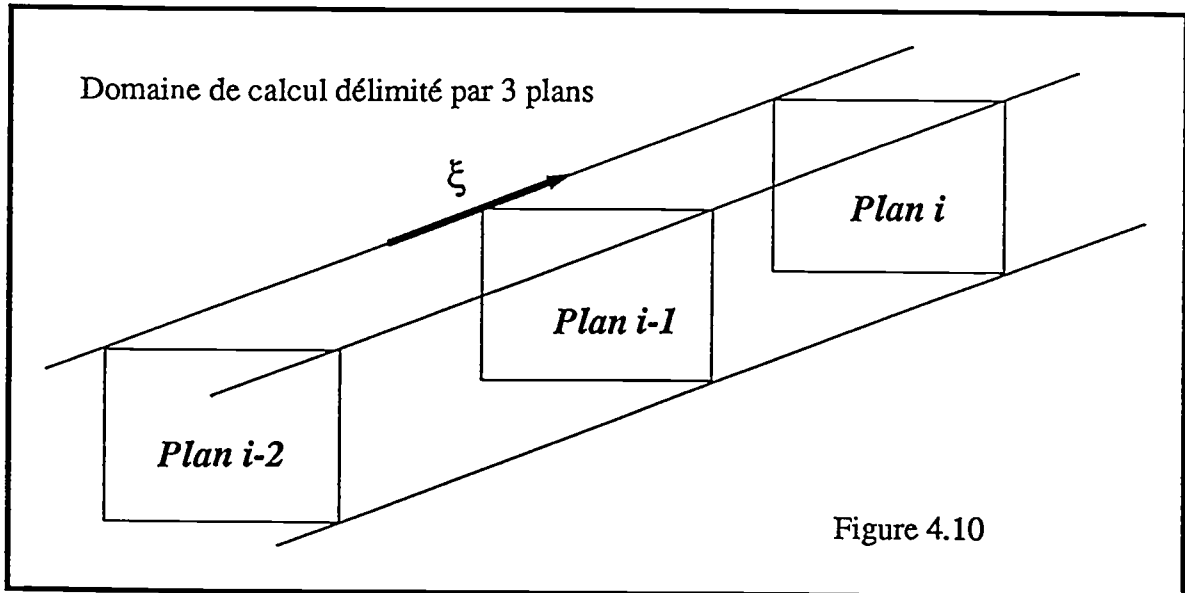
Avec la configuration à 3 plans de la figure 4.10, le système peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \text{Coe}_{i-2}^{i-2} & \text{Coe}_{i-1}^{i-2} & \text{Coe}_i^{i-2} \\ \text{Coe}_{i-2}^{i-1} & \text{Coe}_{i-1}^{i-1} & \text{Coe}_i^{i-1} \\ \text{Coe}_{i-2}^i & \text{Coe}_{i-1}^i & \text{Coe}_i^i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \zeta^{i-2} \\ \zeta^{i-1} \\ \zeta^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{Cl} + \text{Vol})^{i-2} \\ (\text{Cl} + \text{Vol})^{i-1} \\ (\text{Cl} + \text{Vol})^i \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

où

$$\begin{cases} \text{Coe}_{\alpha}^{\beta} & : \text{Matrice d'influence du plan } \alpha \text{ sur le plan } \beta \\ \zeta^{\alpha} & : \text{Inconnues du plan } \alpha \\ (\text{Cl} + \text{Vol})^{\alpha} & : \text{Conditions aux limites} \end{cases}$$

et sources volumiques du plan α



Rappelons que nous cherchons à calculer les inconnues $[\zeta]$ de type Dirichlet qui serviront de conditions aux limites pour la résolution bidimensionnelle dans le plan $i-1$. Pour des raisons de capacité de calcul alors disponibles (taille mémoire et temps calcul), EL MARJANI [1987] n'utilisait que le système extrait suivant :

$$\left| \text{Coe}_{i-1}^{i-1} \right| \times \left| \zeta^{i-1} \right| = \left| (Cl + Vol)^{i-1} \right| \quad (4.4)$$

Le système conserve cependant une influence tridimensionnelle par le calcul adéquat des coefficients de la diagonale via l'équation (2.25) rappelée ci-dessous:

$$(2.25) \quad T_M - \sum_{N=1}^{NP} H_N^M = 0 \quad (4.5)$$

Cette configuration donne des résultats satisfaisants mais comporte certaines limitations.

En effet, l'hypothèse de domaine fermé, nécessaire à l'application du théorème de Green, n'est plus vérifiée. Il est naturel d'analyser les conséquences de cette approximation sur le comportement global du calcul.

Dans une première partie, les différences entre les résolutions extraite et complète seront visualisées sur le cas test du coude à 90 degrés dans la configuration présentée au paragraphe IV.1. La deuxième partie exposera ensuite une résolution simplifiée du système matriciel. Elle permettra de mettre en évidence l'origine de ces écarts. Une méthodologie justifiant l'emploi de ces deux configurations dans le cadre du code NSQE sera alors définie.

IV.3.2 COMPARAISON DES METHODES SUR LE COUDE A 90°

Les comportements des calculs et les résultats en modes extrait et

complet (déraffinement niveau 2: cf. IV.4.1) sont comparés sur le coude à 90°. L'étude porte à la fois sur le comportement numérique et les résultats obtenus à convergence.

La courbe 4.11 présente plusieurs résultats. Nous considérons ici le comportement du calcul au cours de la convergence à partir de l'analyse de la correction maximum de pression en fonction des balayages du calcul en mode extrait (noté "maxcor extr") et du calcul en mode complet de niveau 2 (noté "maxcor 2"). Le calcul en mode extrait nécessite environ 80 balayages amont/aval pour converger à 0.4 %, soit un temps calcul en mode vectoriel sur Alliant FX80 de 541.37 mn. Le calcul complet ne nécessite que 60 balayages, soit 350 mn. Toutefois un rapport de 30.6 existe entre les tailles de matrices pour le calcul en mode complet par rapport au calcul en mode extrait. L'évolution de la convergence en mode extrait laisse apparaître également plus d'oscillations sur la courbe de correction de pression.

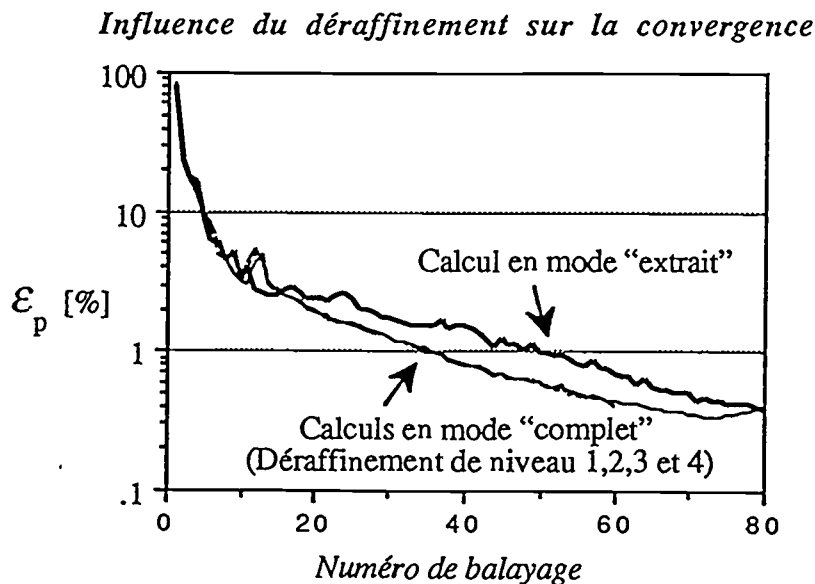


Figure 4.11

Cet excès de balayages démontre que le transfert elliptique de la pression entre l'amont et l'aval du canal est plus lent pour le

cas en mode extrait. Ceci est probablement lié à un comportement local du calcul de correction de pression différent. Les conditions aux limites pour un volume de calcul courant sont imparfaitement respectées dans le mode extrait par rapport au cas en mode complet où les conditions aux limites sont imposées en amont et en aval du domaine local de calcul.

Les figures 4.12 à 4.16 présentent des évolutions de différents coefficients de pression et de vitesse selon des lignes de maillage ξ (figure 4.9). L'analyse porte sur la différence des résultats obtenus entre les modes extrait et complet.

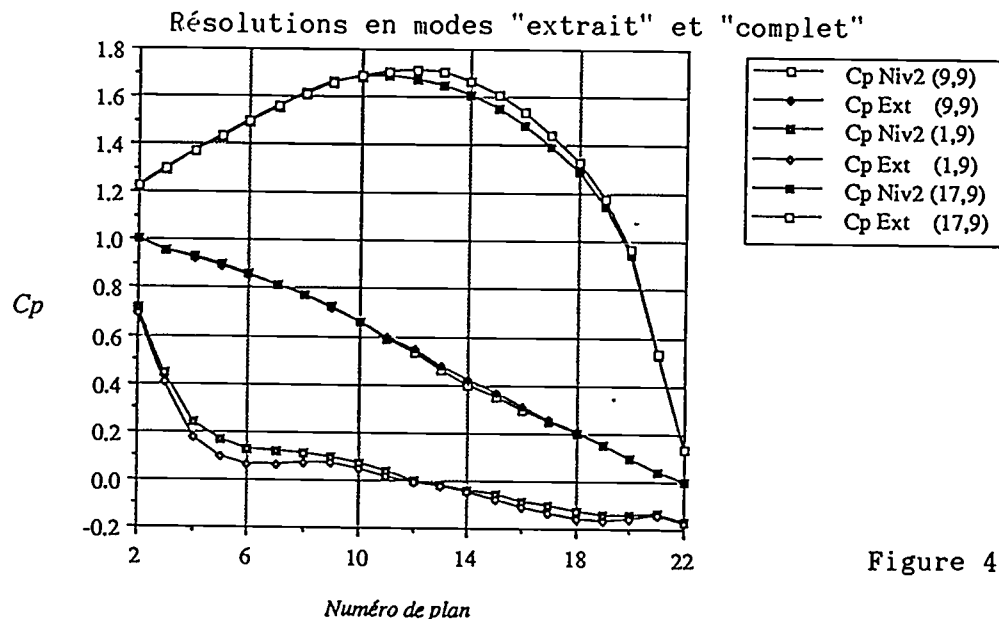


Figure 4.12

Les profils longitudinaux de C_p selon ξ au centre du canal (Position 9,9), à l'extrados (Position 17,9) et l'intrados (position 1,9) sont tracés figure 4.12. Les courbes au centre sont confondues mais le calcul extrait surévalue la pression à l'intrados et minimise la pression à l'extrados.

La vitesse est également surévaluée au centre par le calcul extrait (figure 4.14). Le débit à convergence du calcul extrait est en effet supérieur de 0.5 % au calcul complet.

Résolutions en modes "extrait" et "complet"

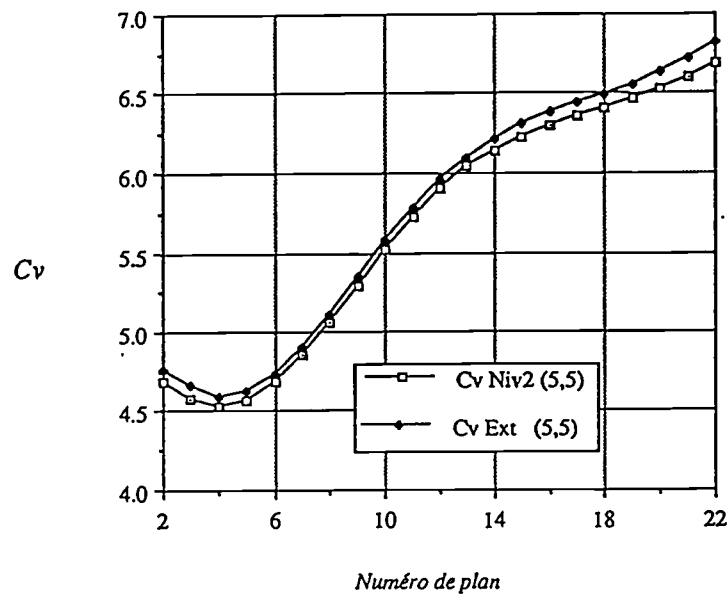


Figure 4.13

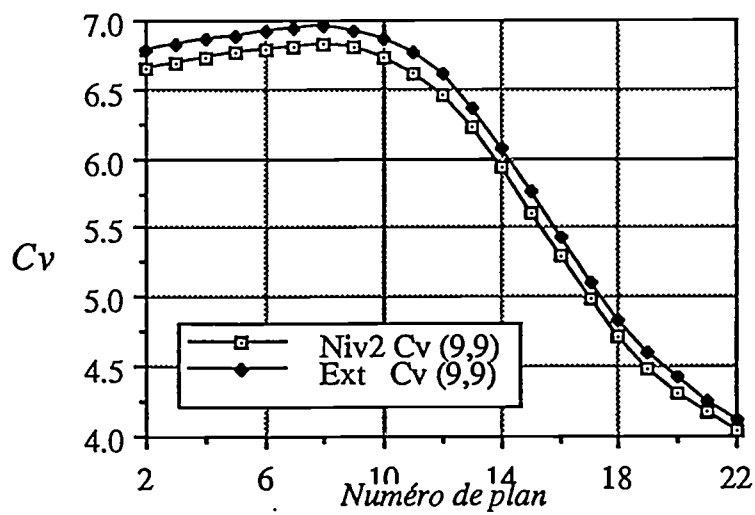


Figure 4.14

Résolutions en modes "extrait" et "complet"

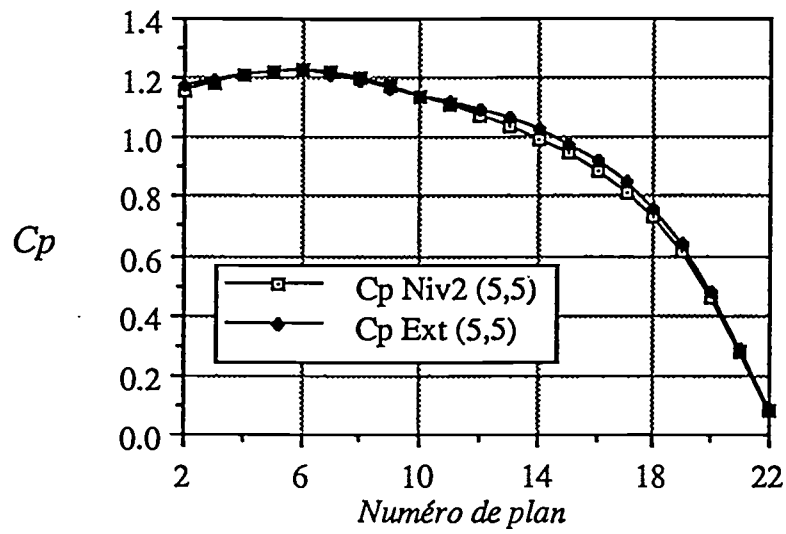


Figure 4.15

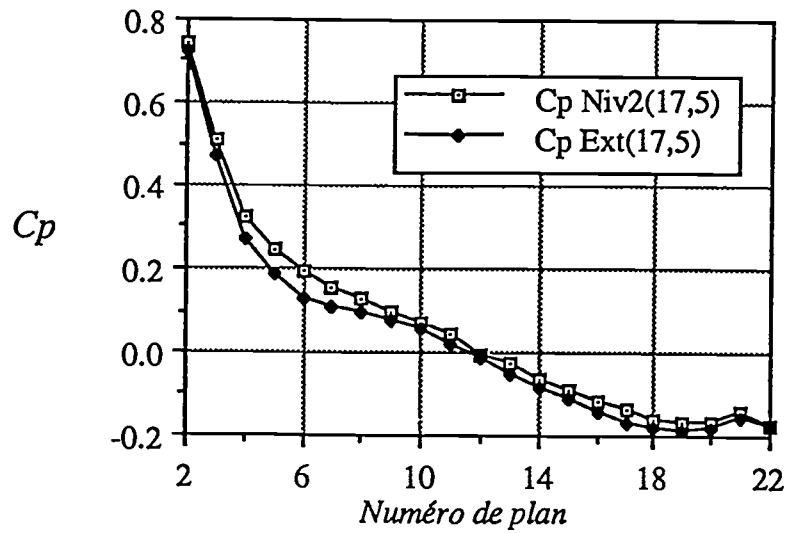


Figure 4.16

En conclusion, les résultats à convergence présentent de faibles différences locales. Par contre, le calcul extrait est moins stable et plus lent à la convergence. Le paragraphe suivant se propose de justifier cet écart.

IV.3.3 ANALYSE MONODIMENSIONNELLE DU SYSTEME

Un exemple simple permet de visualiser le comportement de la résolution en mode extrait.

Soit le jeu de conditions aux limites suivant :

- Conditions homogènes
- Dirichlet aux plans amont et aval
- Neuman au plan central
- calcul non périodique

Par analogie, le système (4.3) est assimilé au système 3x3 suivant

$$\begin{pmatrix} G_1 & H_1 & G_4 \\ G_2 & H_2 & G_5 \\ G_3 & H_3 & G_6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

x et z représentent des dérivées normales moyennes selon ξ sur les plans amont et aval respectivement; y est une valeur moyenne de Dirichlet sur la frontière du plan central. G et H sont respectivement des coefficients de Neuman et de Dirichlet.

Pour simplifier encore le problème, supposons que les plans i-2 et i aient une position spatiale symétrique de part et d'autre du plan central i-1, pour lequel des conditions de Neuman sont imposées (figure 4.10).

Le système (4.6) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} G_1 & H_1 & G_3 \\ G_2 & H_2 & G_2 \\ G_3 & H_1 & G_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

La résolution de ce système conduit aux résultats (indiqués "c" pour "Complet") :

$$y_c = \frac{2 G_2 \cdot d_1 - d_2 \cdot (G_1 + G_3)}{\Delta} \text{ et } x_c = \frac{H_1 \cdot d_2 - H_2 \cdot d_1}{\Delta} = z_c$$

$$\text{avec } \Delta = 2 G_2 \cdot H_1 - H_2 \cdot (G_1 + G_3)$$

L'égalité $x = z$ est attendue. En effet, les symétries géométrique et physique du problème impliquent l'égalité des flux amont et aval.

Ces derniers résultats sont comparés au calcul de y à partir du système extrait (indiqué "e" pour "extrait") :

$$H_2 \cdot y_e = d_2 \text{ d'où } y_e = d_2 / H_2 \quad (4.9)$$

L'équation suivante permet de définir la compatibilité entre les deux résolutions y_c et y_e :

$$\frac{2 G_2 \cdot d_1 - d_2 \cdot (G_1 + G_3)}{2 G_2 \cdot H_1 - H_2 \cdot (G_1 + G_3)} \cong \frac{d_2}{H_2} \Rightarrow \begin{cases} G_2 \cdot d_1 \cong 0 \\ G_2 \cdot H_1 \cong 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Ainsi, les influences du plan $i-1$ sur les plans amont et aval ($G_2 \cong 0$) et vice-versa ($H_1 \cong 0$) doivent être négligeables pour avoir l'égalité des résultats.

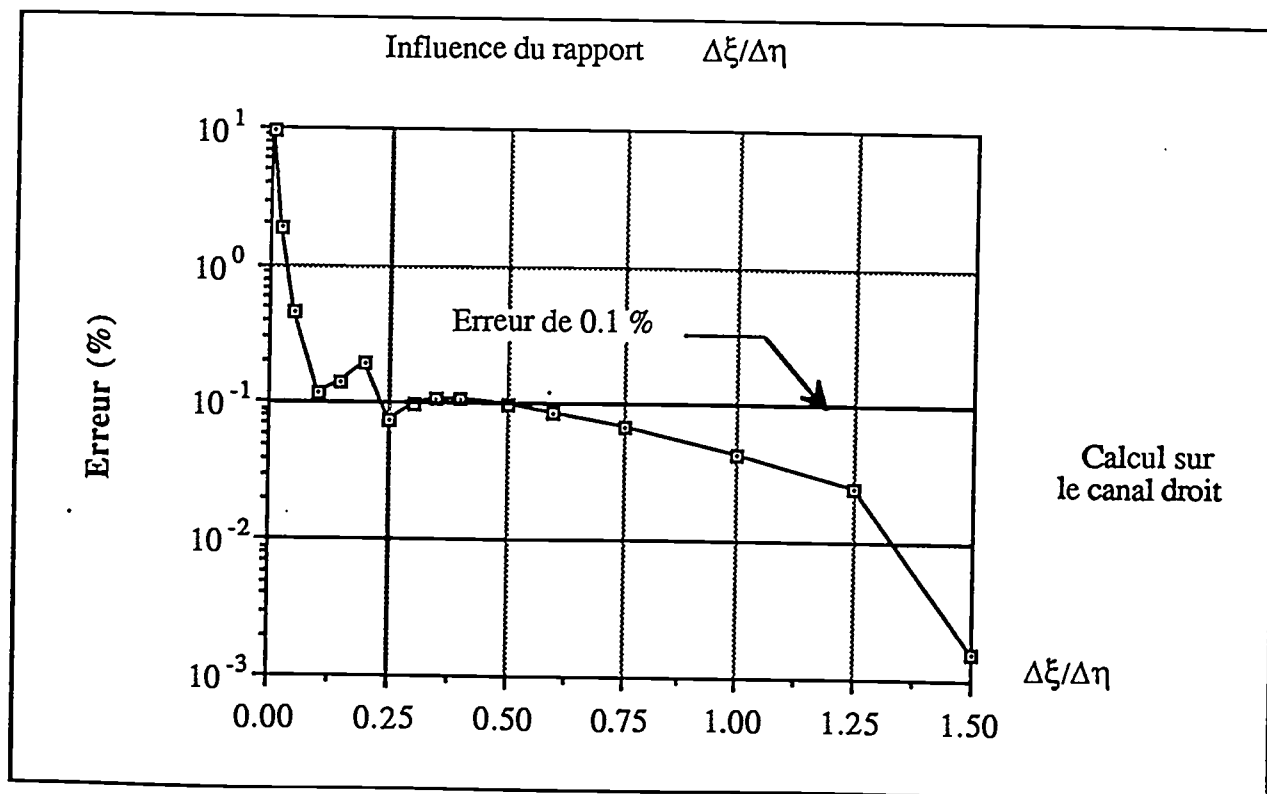
Cette condition est vérifiée si les plans $i-2$ et i sont situés assez loin du plan central, la distance intervenant comme $1/r$ dans les coefficients H et G .

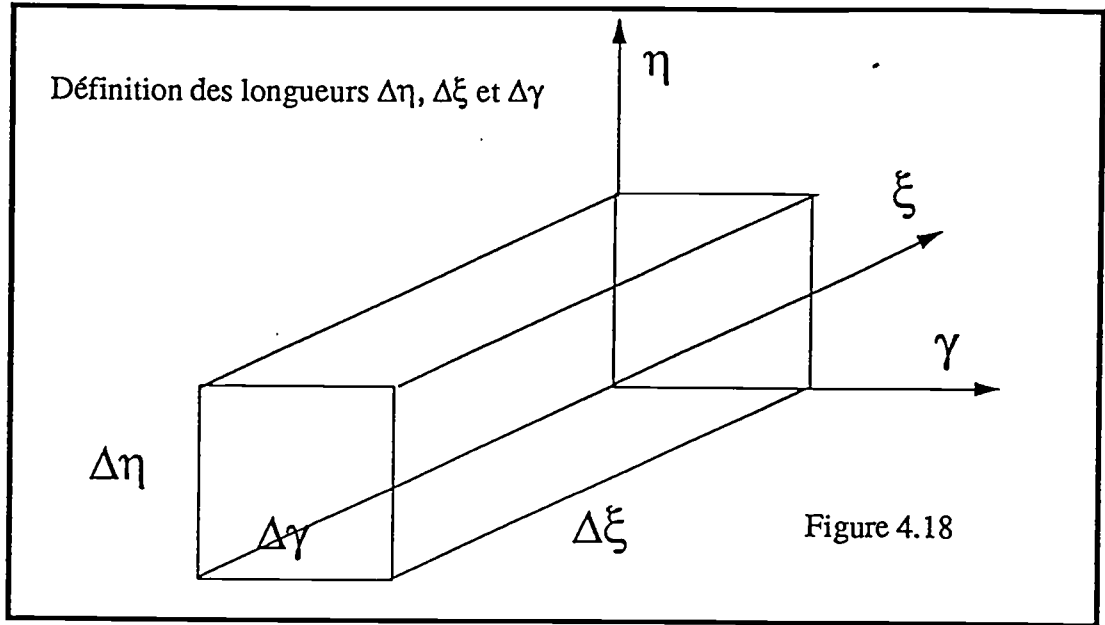
Il s'agit alors de définir un critère d'éloignement qui soit fonction d'une distance d'influence caractéristique. Celle-ci peut être choisie comme la distance maximale entre deux plans successifs selon la direction longitudinale ξ dans le bloc de calcul à trois plans (i-2,i-1,i).

Les calculs présentés ci-dessous visualisent la conclusion obtenue précédemment.

Le graphique 4.17 présente l'évolution de l'erreur ϵ (équation (4.11)) entre un calcul en mode extrait et un calcul en mode complet de type NSQE (résultats au deuxième plan, 2 itérations temporelles, relaxation de $\alpha_r = 0.6$ pour assurer la convergence du module MSI) en fonction de l'éloignement des plans amont et aval rapporté à la longueur d'un côté de la géométrie (figure 4.18). La géométrie est parallélipipédique de côté 1 avec un maillage transversal 21x21.

Figure 4.17





Pour chaque rapport $\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}$, la courbe 4.17 présente la moyenne quadratique des écarts entre les corrections de pression à la frontière calculées en mode extrait et complet en pourcentage de la moyenne des corrections de pression de la frontière du calcul en mode complet.

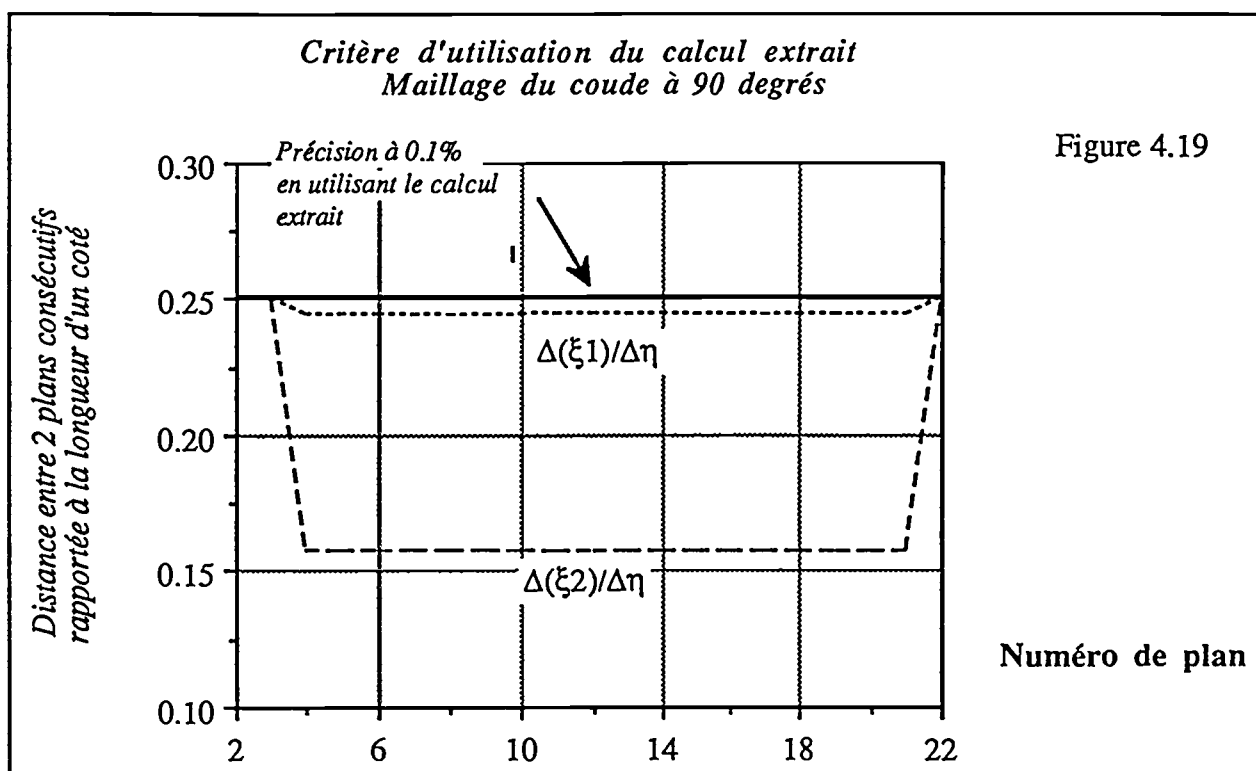
$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{M \in (\Gamma)} \left(\delta p_c(M) - \delta p_e(M) \right)^2}{\sum_{M \in (\Gamma)} \delta p_c(M)^2} = f\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\right) \quad (4.11)$$

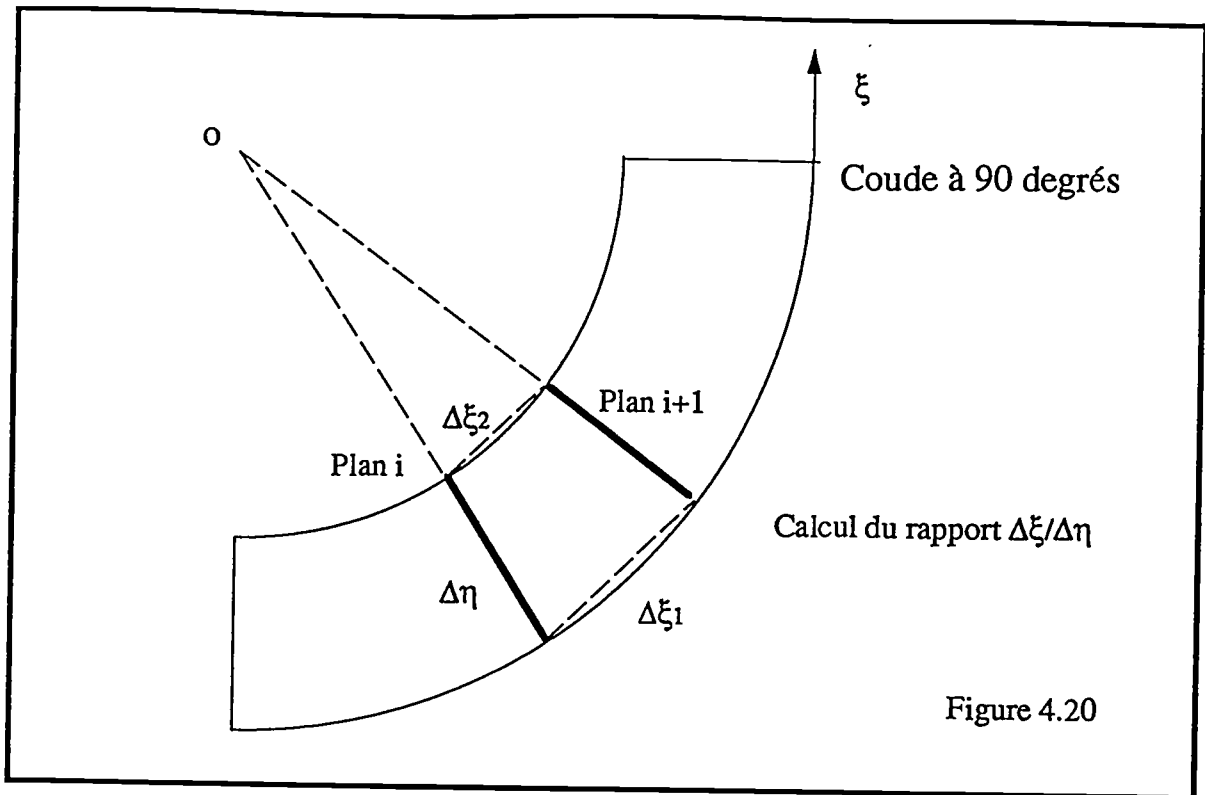
Ainsi, ce n'est qu'à partir d'un rapport $\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}$ de 0.25 que les résultats entre les calculs réalisés en mode extrait et complet sont confondus à 0.1 %.

Ce résultat est sans doute directement extrapolable à une géométrie quelconque.

Pour vérifier cette affirmation, basée sur un critère exclusivement géométrique, nous présentons ci-dessous les résultats obtenus sur le coude à 90° (courbe 4.19).

Le seuil de qualité "0.1%" est tracé horizontalement sur la figure. On constate, en se reportant au schéma de la figure 4.20 pour les notations, que le rapport $\Delta\xi_2/\Delta\eta$ est égal à 0.15. Selon la courbe 4.17, ce rapport correspond à une différence voisine de 0.5 % pour les résultats. Cet ordre de grandeur correspond à l'écart entre les débits de ces deux calculs (0.9420 et 0.9466 pour les calculs en mode complet et extrait respectivement). L'utilité de ce critère est donc confirmée.





IV.3.4 CONCLUSION ET LIMITATIONS DE LA RESOLUTION COMPLETE

Une bonne résolution spatiale dans la direction ξ nécessite l'emploi du mode de calcul complet pour atteindre la précision espérée en fonction de l'espacement utilisé entre 3 plans consécutifs. Les zones rectilignes situées en amont et aval des bords d'attaque et de fuite d'une turbine se prêtent particulièrement à l'approximation dite extraite. Par contre, les bords d'attaque et de fuite devront utiliser la méthode complète puisque les évolutions locales de l'écoulement exige un raffinement longitudinal important du maillage.

Mais l'utilisation de la résolution complète peut devenir impossible si le maillage devient important. Par exemple, pour un domaine de calcul limité à 3 plans de $N \times N$ points, la taille mémoire de la matrice extraite est en $16 N^2$ et la matrice complète

en $4(N+1)^4$! En effet, le plan intermédiaire contribue pour $4(N-1)$ points à la discrétisation surfacique (seule sa frontière intervient) et les plans amont et aval de $2N^2$ points. La précision supérieure est donc chèrement payée. La figure 4.21 présente quelques tailles de matrices exprimées en Megaoctets en fonction de la dimension du maillage transversal. Ainsi pour un maillage transversal 80×80 , la taille de la matrice BEM avoisine les 688 Megaoctets (notée "Niveau 1" sur la figure 4.21). Diminuer la taille des matrices devient primordial pour assurer la viabilité de la méthode intégrale au sein de NSQE. Ce sera l'objet des paragraphes ci-dessous.

IV.4 METHODE DITE DE "DERAFFINEMENT"

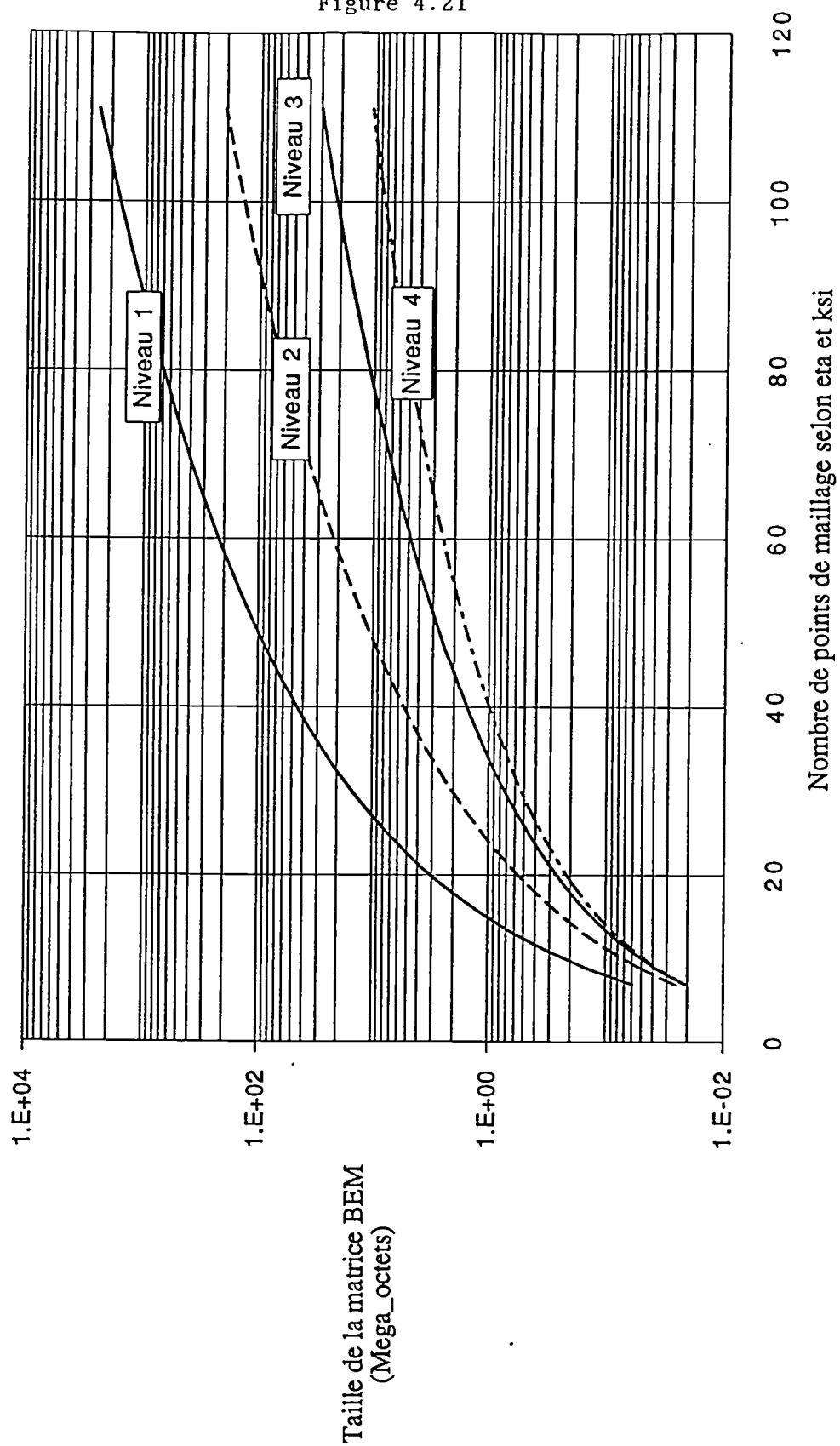
La diminution de la taille de la matrice BEM revient à diminuer le nombre de points pris en compte dans la discrétisation surfacique. En remarquant que les points des plans amont et aval ne servent qu'à fixer le niveau de correction de pression, il est justifié d'éliminer certains points de ces plans.

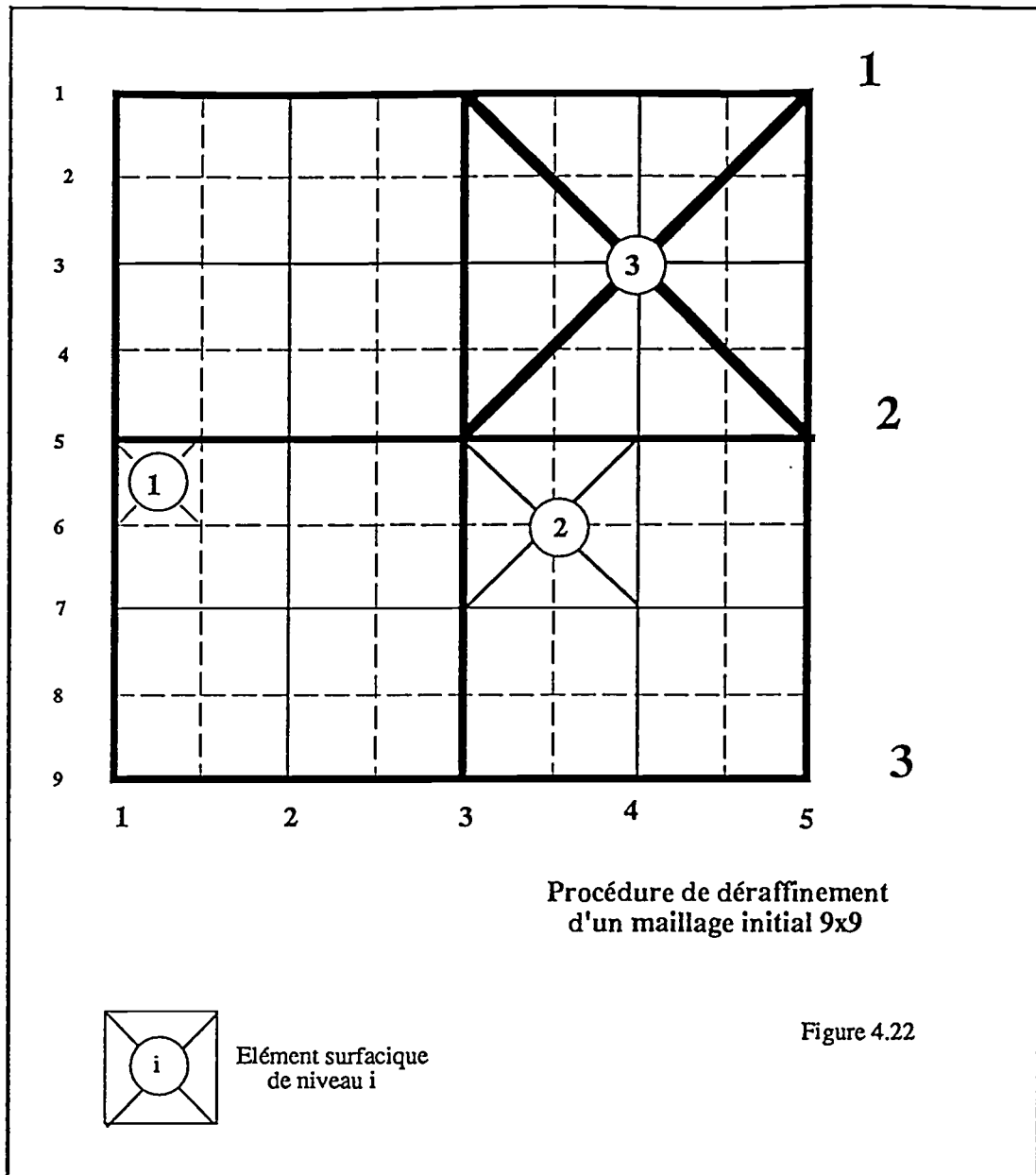
IV.4.1 ALGORITHME DE "DERAFFINEMENT"

La méthode de diminution du nombre de points des plans extrêmes, nommée par la suite "méthode de déraffinement", utilise le maillage de vitesse comme maillage initial.

L'algorithme consiste à prendre en compte un point sur deux à partir du maillage d'origine. Par exemple, le maillage transversal 17×17 (déraffinement dit de niveau 1) du coude à 90° peut être déraffiné en maillage 9×9 (Niveau 2), puis 5×5 (Niveau 3) et enfin en 3×3 (Niveau 4). Le schéma 4.22 visualise ce déraffinement. Les tailles de matrices seront respectivement 1.65 Megaoctets, 204, 52 et 27 Kilo-octets (cf. tableau 4.28). L'économie est sensible et les tailles mémoires deviennent raisonnables. Ce déraffinement est ainsi possible jusqu'au niveau NMAX tel que $N = 2^{NMAX} + 1$.

Influence du niveau de déraffinement sur la taille des matrices BEM



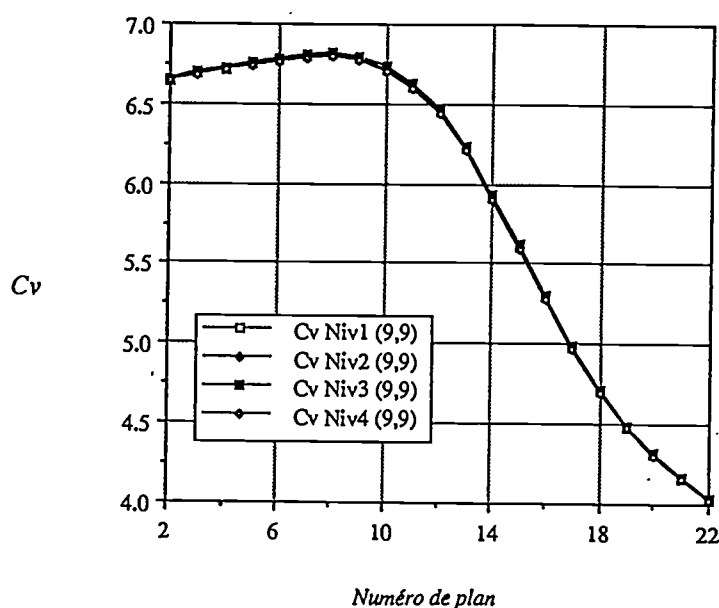


Il reste cependant à démontrer que l'influence de déaffinement reste négligeable sur les résultats.

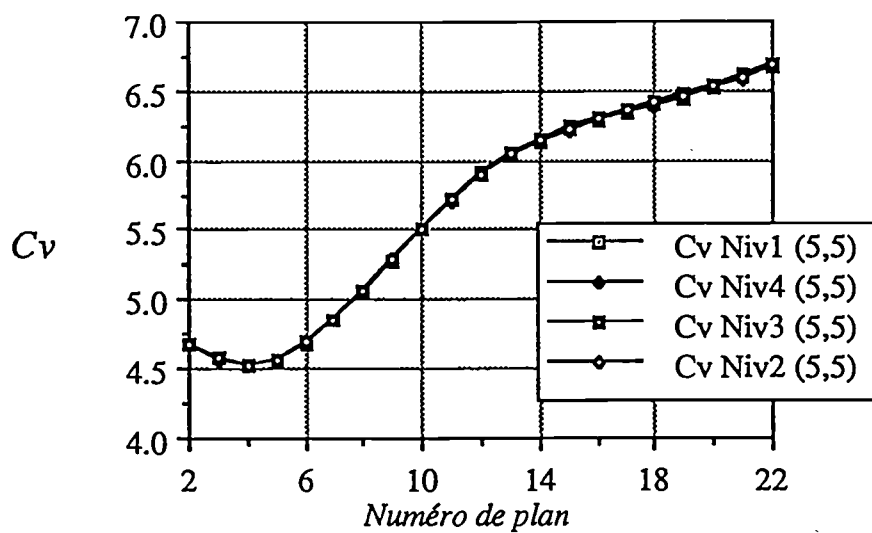
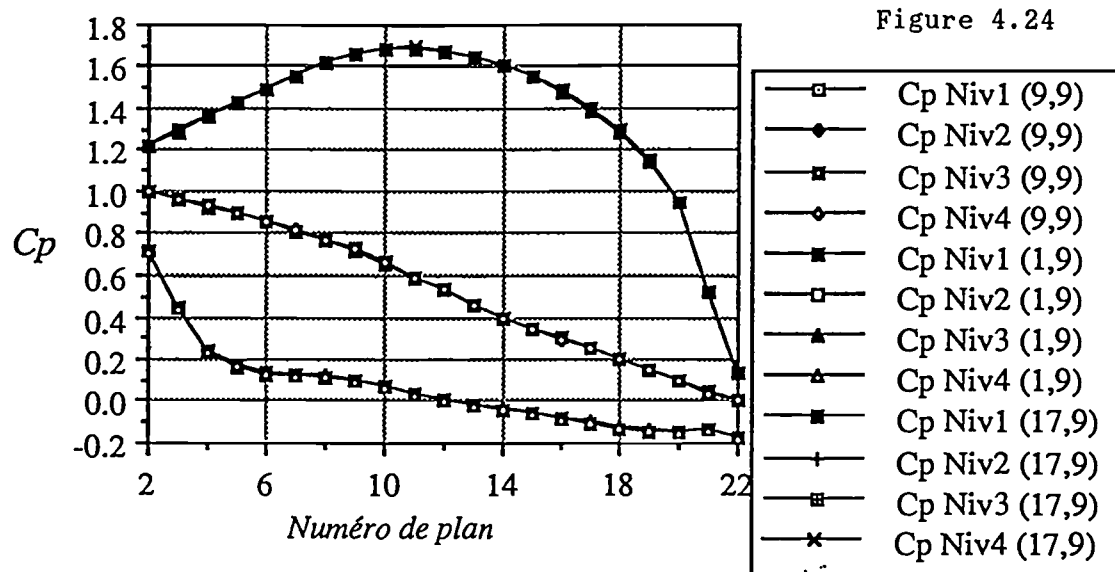
IV.4.2 INFLUENCE DU DERAFFINEMENT : CAS TEST DU COUDE A 90°

Pour tester l'influence de cet algorithme de diminution du nombre de points, 4 niveaux successifs de déraffinement sont appliqués au maillage 17x17 du coude à 90°. Les évolutions de l'erreur ϵ_p au cours du processus de convergence, présentées à la figure 4.11, sont quasiment confondues. Ainsi, le comportement numérique du code est indépendant du niveau de déraffinement. Les profils de coefficients de pression C_p et de vitesse C_v sont présentés aux figures 4.23 à 4.27 sous la même forme que pour les comparaisons précédentes. Ils ne présentent pas de différences sensibles.

Figure 4.23



Les seuls paramètres modifiés sont, d'évidence, la taille mémoire exigée par le calcul et le temps calcul de résolution, directement relié à la taille mémoire. Ces différents paramètres sont présentés au tableau 4.28.



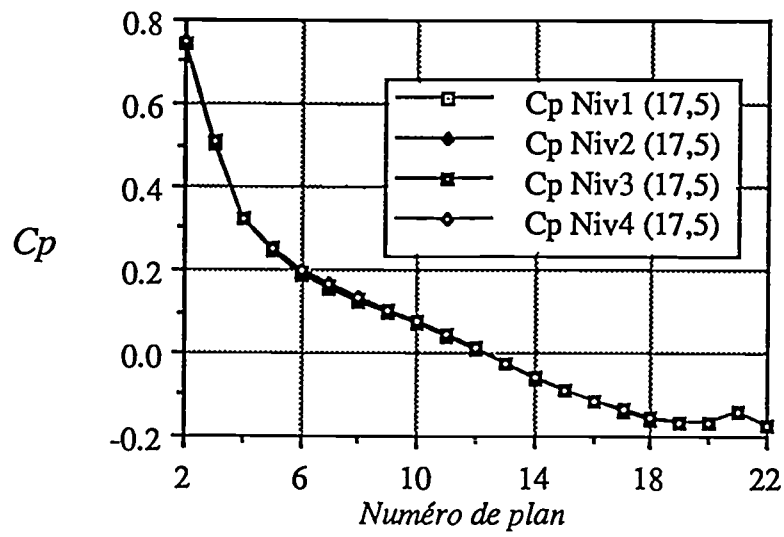


Figure 4.26

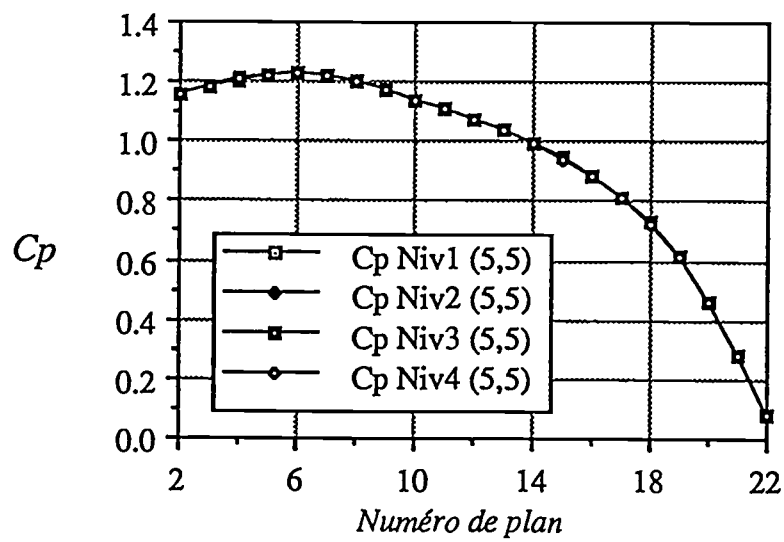


Figure 4.27

Nous remarquons, en comparant ces dernières figures aux figures 4.12 à 4.16, que le calcul en mode extrait introduit effectivement une erreur ($\frac{\Delta \xi_2}{\Delta \eta} \approx 0.15$). Il existe bien un effet elliptique selon la direction longitudinale ξ qui subsiste au niveau de déraffinement 4.

Cas test	Taille	Tps CPU	Tps CPU	Débit
Coude à 90°	[/extrait]	[/niveau 4]	[mn]	
Niveau 1 (60 bal.)	100.6			0.9421
Niveau 2 (60 bal.)	30.6	1.31	438.11	0.9420
Niveau 3 (60 bal.)	14.3	1.07	357.00	0.9415
Niveau 4 (60 bal.)	9.2	1.00	333.62	0.9412
Extrait (60 bal.)	1.0	1.30	431.40	-----
Extrait (80 bal.)	1.0	1.62	541.37	0.9466

Figure 4.28 : Caractéristiques des différents calculs

A la lecture de ce tableau, l'utilisation du niveau de déraffinement maximum est possible. On remarquera que le temps calcul varie peu en fonction du déraffinement. En effet, le temps calcul lié à la taille de la matrice d'influence dans NSQE ne correspond qu'à la recomposition L.U du système.

Ainsi, cet algorithme de déraffinement nous conduit à choisir un

maillage de pression, au moins aux plans amont et aval, différent du maillage de vitesse. La question est posée : pourquoi ne pas utiliser directement un maillage propre à la pression moins raffiné que celui de vitesse ? Le paragraphe suivant argumente et développe cette idée.

IV.4.3 MEMOIRE : MAILLAGE PROPRE A LA PRESSION

Les écoulements modélisés par le code Navier Stokes NSQE sont visqueux, tridimensionnels et turbulents. Aussi le maillage de vitesse doit-il être raffiné à la paroi pour reproduire correctement le comportement de la couche limite.

Par exemple, NIEHUIS [1989], dans son calcul Navier Stokes d'une grille d'aubage rectiligne, place le premier point de maillage à environ 0.1% de la largeur du canal. CAMBIER [1989], pour le calcul de la grille d'aube ECL (Chapitre V), place la première maille près du bord d'attaque à $2.10^{-3}\%$ du pas interaube.

Cette densification du maillage est très coûteuse en taille mémoire au niveau de la résolution intégrale de l'équation de pression, comme le montrait le paragraphe précédent. Il est cependant possible de montrer que le maillage de pression ne nécessite pas autant de points que le maillage de vitesse en comparant les échelles de variation de la correction de pression et de vitesse dans le plan transversal.

Soit l'équation de correction de pression (1.25), rappelée ci-dessous, dans un repère bidimensionnel (ξ, η) . A grand nombre de Reynolds, avec $\theta = \nabla \vec{V}$ pour un écoulement incompressible, cette équation se simplifie en

$$\nabla^2 \delta p \simeq \rho \vec{\nabla} \cdot (\theta \cdot \vec{V}) \quad (4.12)$$

Le maillage longitudinal selon la direction ξ est moins raffiné

que le maillage du plan transversal selon la direction η en raison de l'hypothèse de parabolisation ($\Delta\xi \gg \Delta\eta$). Le gradient de correction de pression longitudinal est donc très inférieur au gradient transversal. Le terme de correction de pression varie donc comme

$$\nabla^2 \delta p \approx \left(\frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{1}{\Delta\eta^2} \right) \delta p \approx \frac{1}{\Delta\eta^2} \delta p \quad (4.13)$$

Le terme de divergence se décompose comme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\theta \vec{\nabla}) &\approx \theta^2 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \theta \approx \theta^2 + \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\Delta\xi} \\ \frac{\theta}{\Delta\eta} \end{pmatrix} \approx \theta^2 + \left(\frac{U}{\Delta\xi} + \frac{V}{\Delta\eta} \right) \theta \\ &\approx 2\theta^2 \approx 2 \frac{U^2}{\Delta\xi^2} + 2 \frac{V^2}{\Delta\eta^2} + 4 \frac{U \cdot V}{\Delta\xi \Delta\eta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où U désigne la vitesse selon la direction longitudinale ξ et V la vitesse transversale selon η .

A proximité de la paroi, selon le modèle de couche limite (chapitre I), en supposant $U \approx U_\infty$, avec une épaisseur de couche limite δ voisine de $\Delta\eta$ et une longueur caractéristique L selon ξ , la vitesse transversale V est de l'ordre de

$$V \approx V_\infty \approx \frac{\delta}{L} U_\infty \quad (4.15)$$

ainsi,

$$\frac{U}{\Delta\xi} \approx \frac{V}{\Delta\eta} \quad (4.16)$$

Il vient alors

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\Delta\eta^2} \delta p}{\frac{V^2}{\Delta\eta^2}} \approx 4 \text{ à } 8 \quad (4.17)$$

d'où, en définissant l'échelle de longueur de correction de pression L_p et de vitesse transversale L_v comme

$$L_p = \frac{\delta p}{\rho g} \quad (4.18) \quad L_v = \frac{v^2}{g},$$

où g est l'accélération terrestre.

le rapport entre ces deux échelles de variation, à proximité immédiate de la paroi, est

$$\frac{L_p}{L_v} \simeq 4 \text{ à } 8 \quad (4.19)$$

Il existe un rapport 2 au minimum entre l'échelle de variation de la vitesse et celle de la correction de pression. Le maillage de pression peut donc être défini en ne prenant qu'une partie du maillage de vitesse. La taille des matrices du système intégral peut être réduite d'un facteur 2 au minimum. L'implantation d'une telle procédure nécessite néanmoins la définition d'un mode de transfert de la correction de pression au maillage de vitesse qu'il reste à définir.

IV.5 RESOLUTION DU SYSTEME ET TEMPS CALCUL

Les paragraphes précédents illustraient le comportement numérique et qualitatif du code NSQE. Comme il a été remarqué à propos des tailles mémoires au paragraphe IV.4.3, le concept du code NSQE n'est industrialisable que si les temps calcul nécessaires à la convergence restent très inférieurs à ceux des codes résolvant les équations de Navier Stokes tridimensionnelles complètes disponibles actuellement.

Ce paragraphe présente une analyse du temps calcul de toute la chaîne NSQE. Il y sera démontré la nécessité d'une optimisation de l'algorithme intégral de la méthode des éléments frontières.

IV.5.1 ANALYSE DU TEMPS DE CALCUL DES DIFFERENTS MODULES DE NSQE

L'analyse détaille les 3 étapes d'une résolution NSQE. Tout d'abord, les coefficients d'influence de deux blocs sont calculés (module COEINF). L'assemblage des matrices d'influences correspondantes est fait par le module PEGASE. Ces matrices ont été utilisées pour le calcul avec 40 balayages amont-aval sur la géométrie du coude à 90° déraffinée au niveau 2. Les calculs sont réalisés en mode vectoriel monoprocesseur sur ALLIANT FX-80. Les temps obtenus sont ainsi suffisamment longs pour permettre une analyse temporelle.

Pour rappel, le calcul des coefficients et matrices d'influence est isolé de la résolution Navier-Stokes proprement dite. En effet, ces derniers sont purement géométriques. Il est donc inutile de les recalculer à chaque balayage. De plus, les matrices sont décomposées à l'extérieur du code NSQE (module PEGASE).

Les résultats de cette analyse sont exposés ci-dessous. Chacun des 3 modules est décomposé en ses sous-modules principaux. Le pourcentage de temps calcul passé dans chaque partie est précisé.

A titre indicatif, 88.66 secondes sont nécessaires pour calculer les coefficients de deux blocs de 3 plans (i-2,i-1,i); le calcul des 2 matrices correspondantes demande 18.50 secondes. Les 40 balayages sont réalisés en 5591 secondes. Notons que l'algorithme de choix du nombre optimum de points de Gauss est utilisé.

a) CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE

La répartition du temps de calcul des coefficients d'influence est présentée ci-dessous. On notera la part importante du calcul des intégrales particulières. Ceci est lié à l'algorithme d'optimisation du nombre de points de Gauss (Annexe 3).

COEINF (100%)

[	Calcul des intégrales (96%)	Intégrales particulières : 30%
		Intégrales non particulières : 66%
	Divers : 4%	

b) CALCUL DES MATRICES D'INFLUENCE

Le graphique ci-dessous montre l'intérêt qu'il existe à isoler la décomposition LU qui représente 49% du temps global.

L'importance de la numérotation et de l'algorithme de construction de la matrice est mise en lumière. Par exemple, bien qu'il y ait 5 fois plus de points aux plans ξ_{i-2} et ξ_i qu'au plan central ξ_{i-1} , le rapport de temps calcul entre ces plans n'est que de 3.5. L'algorithme est donc moins bien conçu aux plans intermédiaires.

L'optimisation de ce module semble toutefois inutile puisqu'il ne demande que 18.5 secondes. Ce ne serait bien sûr pas le cas dans une application instationnaire.

PEGASE (100%)

[	Décomposition LU : 49%	
	Divers : 10%	
	Construction de la matrice (41%)	[Plans ξ_{i-2} et ξ_i : 32%
		Plan ξ_{i-1} : 9%

c) CODE NSQE

Une éventuelle optimisation doit être évidemment réservée en priorité au code NSQE. Ce module représente le coût de la résolution Navier-Stokes lors de son usage industriel, les matrices d'influences étant calculées et stockées une fois pour toutes.

Intéressons-nous plus particulièrement au coût de la pression qu'il est intéressant de comparer à celui de la vitesse. BENOCCI [1988] rappelle que le calcul de la pression représente classiquement 70 % du coût d'un code Navier-Stokes. Nous constatons que, globalement, le temps calcul du code NSQE se répartit à moitié entre la pression et la vitesse.

L'opportunité du choix de MSI pour la résolution bidimensionnelle dans le plan central est également pleinement démontré. Il ne représente que 6% du temps total. Par comparaison, le calcul des potentiels internes par la méthode intégrale demanderait un temps calcul équivalent au calcul surfacique complet.

Le calcul des intégrales volumiques apparaît également comme un gros consommateur de temps calcul ! Une éventuelle optimisation doit en premier lieu s'appliquer à cette dernière partie. La solution la plus simple semble être d'établir un critère d'influence, fonction de la distance entre le terme source et le point de calcul. Cette influence étant en $1/r$, il est possible d'éviter le calcul d'un certain nombre de termes $[f(\theta).J^{-1}]_{i,j,k}$ (annexe 6).

NSQE (100%)

Divers : 13%			
Calcul de la vitesse : 46%			
Calcul de pression (41%)	Résolution MSI : 6%		
	Résolution BEM (35%)	Produit LU : 13%	
		Intégrales Volumiques : 22%	

IV.6 VALIDATION DU CALCUL NAVIER-STOKES

Nous nous sommes attachés jusqu'à présent au seul comportement numérique du couplage entre le code Navier Stokes NSQE et le calcul de la correction de pression par la méthode des éléments frontières.

La validation du calcul Navier Stokes est l'objet des paragraphes suivants. Les résultats du code NSQE sont proposés sur les écoulements turbulents dans le coude à 90° et le coude de Stanitz.

IV.6.1 Coude courbé à 90°

Ce cas test est présenté au début de ce chapitre au paragraphe IV.1. La configuration de calcul utilise un maillage transversal 21x21 et un maillage longitudinal selon ξ de 40 plans (figure 4.29). L'écoulement est turbulent avec un nombre de Reynolds égal à 400000. Les sections de mesure sont présentées sur la figure 4.29.

Le calcul est convergé à partir du 35ème balayage.

Maillage du coude à 90°
et sections de mesure

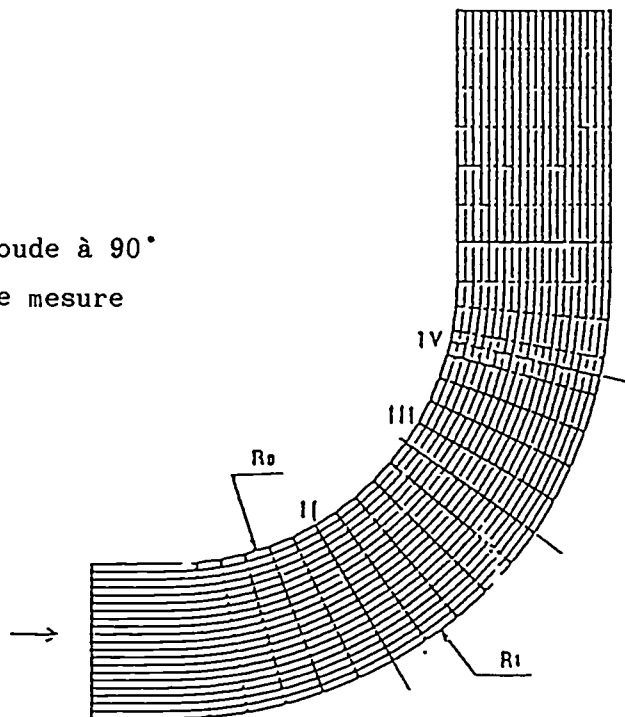


Figure 4.29

Les profils calculés et mesurés au centre du canal sont présentés

aux figures 4.30 à 4.33. L'abscisse 0 correspond au centre du canal et l'abscisse 1 à la paroi.

Les profils de vitesse de U_{ξ} et V_{η} sont correctement prédits (figures 4.30, 4.31, 4.32, 4.33) aux 4 sections de mesures (30°, 60°, 75°, 90°). Un déficit important de vitesse apparaît à la paroi. En effet, la trop faible densité du maillage ne permet pas de capter correctement le comportement de l'écoulement à la paroi. La taille de la couche limite est ainsi artificiellement augmentée d'où une surestimation des pertes.

Le niveau des vitesses transversales est correct au centre du canal dans toutes les sections de mesure (figures 4.34, 4.35, 4.36, 4.37). La faible densité du maillage ne permet pas de détecter le pic de vitesse à la paroi et le déplace artificiellement vers l'intérieur du canal.

Malgré la faible densité du maillage qui induit un comportement pariétal incorrect, les niveaux de vitesse sont très correctement reproduits par le calcul. Ce résultat est d'autant plus remarquable que les vitesses transversales représentent jusqu'à 30% de la vitesse longitudinale (figure 4.36).

IV.6.2 Coude de Stanitz

L'expérience réalisée par STANITZ [1953] porte sur un coude courbé à 90° de section rectangulaire variable. Le rapport entre les sections amont et aval du coude est de 2 (41.9 x 30.3 cm² à l'entrée) (Figure 4.38). La géométrie du coude a été conçue à l'aide d'un calcul potentiel bidimensionnel pour éviter tout décollement (STANITZ [1952]) et l'écoulement présente deux importants tourbillons de passage.

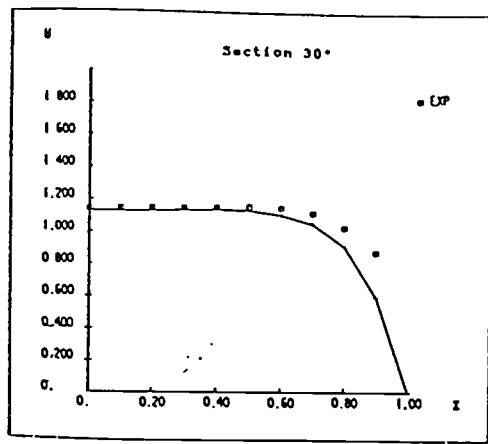


Figure 4.30

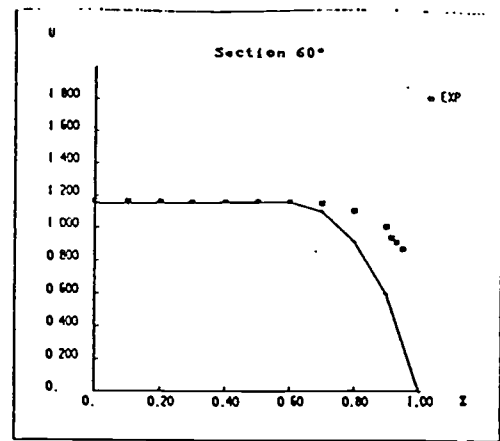


Figure 4.31

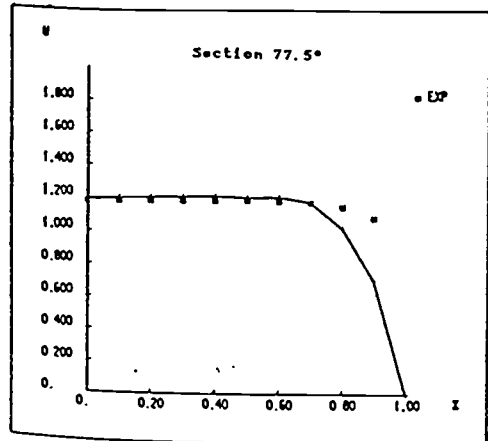


Figure 4.32

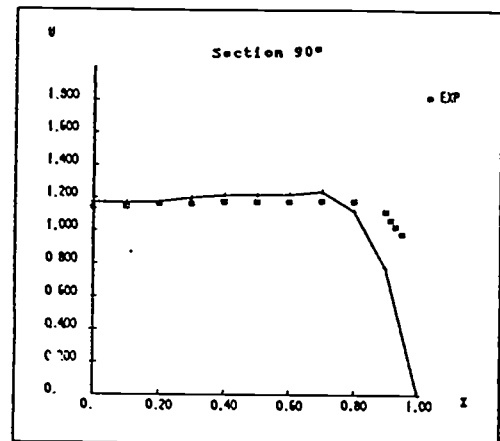


Figure 4.33

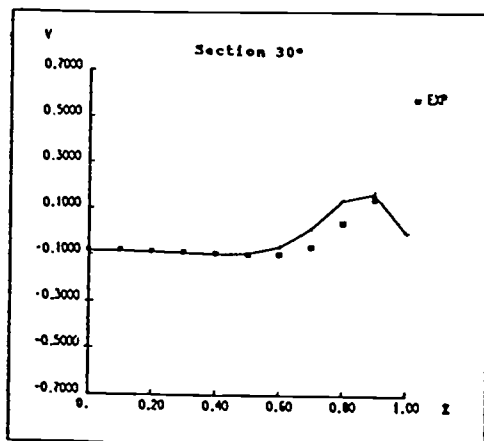


Figure 4.34

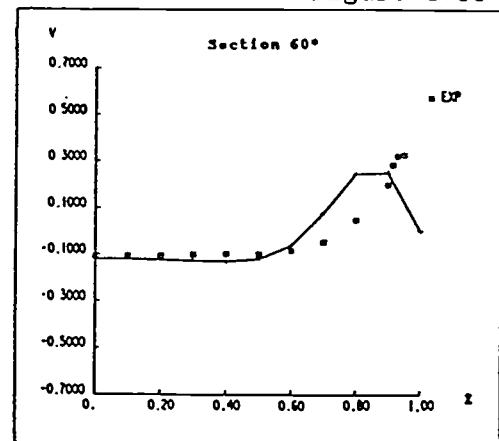


Figure 4.35

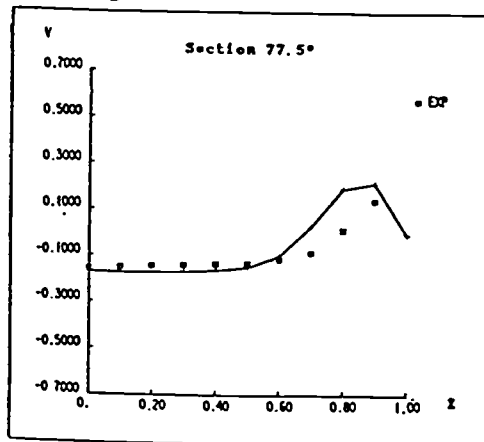


Figure 4.36

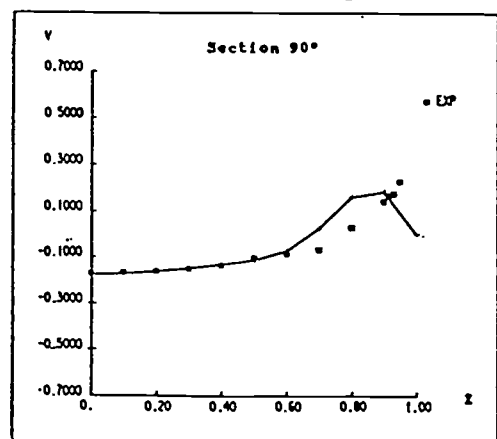
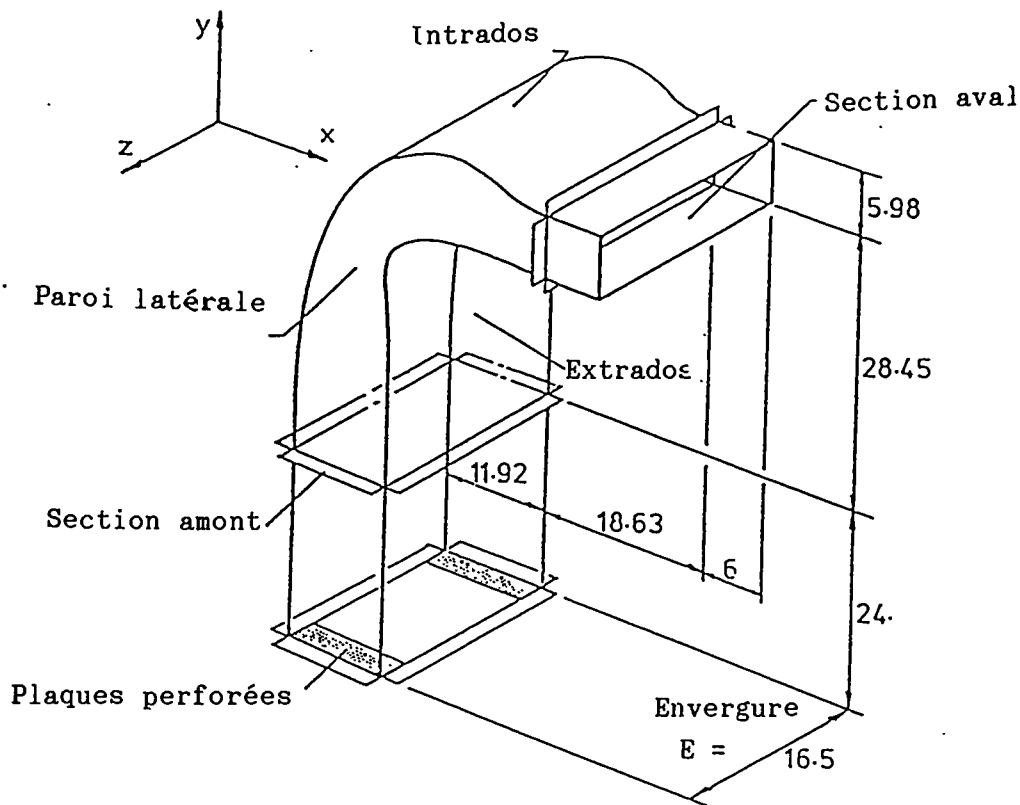


Figure 4.37



Géométrie du coude de Stanitz (dimension en inches)

Figure 4.38

Nous nous proposons de comparer les résultats numériques et expérimentaux pour la configuration d'écoulement incompressible à nombre de Mach égal à 0.26. Le calcul compressible à nombre de Mach $M = 0.4$ est présenté dans POMMEL [1990].

Le maillage utilise 50 points selon la direction longitudinale ξ et 17×17 points dans le plan transversal (η, γ) . Le fichier de vitesse d'entrée est construit à partir du profil expérimental et la pression est uniforme en sortie. Le calcul est convergé au quarantième balayage à $\epsilon_p = 0.5\%$. Les coefficients de pression sont définis en utilisant $P_{ref} = P_{atm}$ (101450 Pa) et la pression P_{amont} est la pression d'arrêt à l'entrée.

Le canal de Stanitz est intéressant dans la mesure où les effets directs et indirects de la viscosité sont importants.

La formation des tourbillons de passage dans le coude est en effet un résultat indirect de la viscosité, causé par la réorientation de la vorticité transversale dans le coude comme nous le montrons dans la suite.

Des plaques perforées en amont du canal (figure 4.38) permettaient d'augmenter artificiellement la taille des couches limites à l'entrée du coude. Le mouvement tourbillonnaire du fluide dans ces couches qui induit des tourbillons de passage peut être décrit par un calcul tridimensionnel non visqueux.

Illustrons la formation de cette structure tourbillonnaire en analysant l'effet de la courbure du canal et du changement de section (LEBOEUF [1991]).

Notons le rotationnel de vitesse $\vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{V}$. Soit un canal de section constante dont les parois sont concentriques (figure 4.39). Les composantes de la vitesse amont $\vec{u}$ dans le repère cylindrique sont

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

La vorticité dans la section amont sera, en supposant les composantes de vitesse radiale et verticale négligeables dans le champ amont par rapport à la vitesse selon θ (hypothèse vérifiée pour les canaux coudés à 90° et de Stanitz)

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} [u_\theta] \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r u_\theta] \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

L'équation de transport de la vorticité, obtenue par application du rotationnel à l'équation de quantité de mouvement, projetée selon θ conduit à

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\Omega_\theta}{\rho} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (4.22)$$

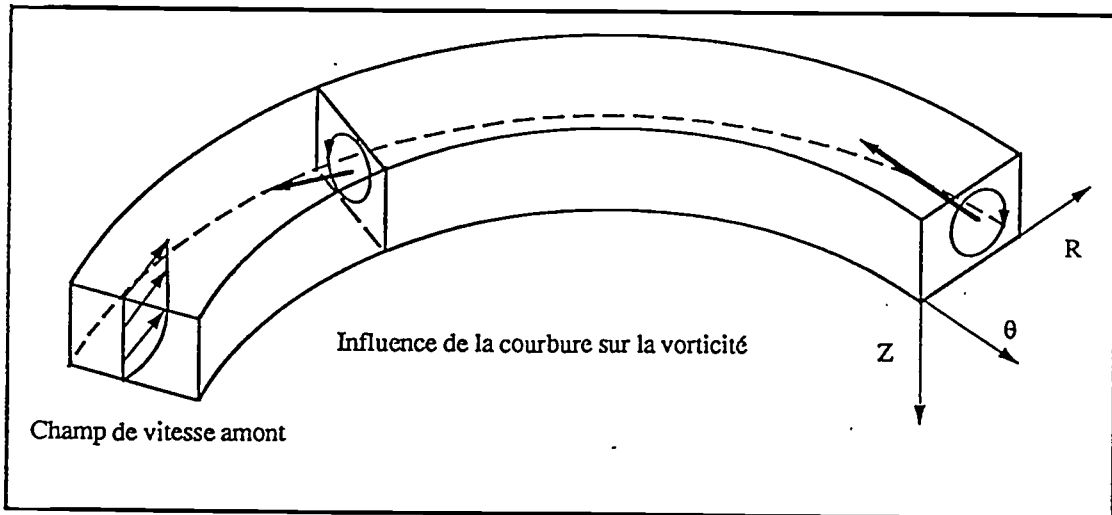


Figure 4.39

La vitesse est nulle à la paroi inférieure, ainsi la composante u_θ augmente lorsque z augmente, donc le gradient $\frac{\partial u_\theta}{\partial z}$ est négatif. La composante circulaire Ω_θ de $\vec{\Omega}$ est négative puisque le gradient $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\Omega_\theta}{\rho}$ selon l'axe θ est négatif et Ω_θ est nulle en amont. Un mouvement du fluide en direction du centre de courbure va donc apparaître et générer ainsi une structure tourbillonnaire.

Ce raisonnement est directement applicable à la configuration du canal à 90°. Par contre, dans le cas du canal de Stanitz, la variation de section renforce ce déplacement fluide. Supposons une conduite droite selon l'axe X de section S variable et les forces extérieures comme dérivant d'un potentiel (figure 4.40). L'équation de transport de vorticité, projetée selon X, se simplifie à l'aide de la conservation du débit $Q = S u_x$ dans le canal, où u_x est la vitesse selon l'axe X, et s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Omega_x}{\rho u_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_x = K \rho u_x = \rho K Q \frac{1}{S} \quad (4.15)$$

Avec la diminution de la section S, la composante Ω_x augmente et donc la taille du tourbillon de passage augmente lorsque S diminue. Nous retrouvons cette configuration dans le canal de Stanitz.

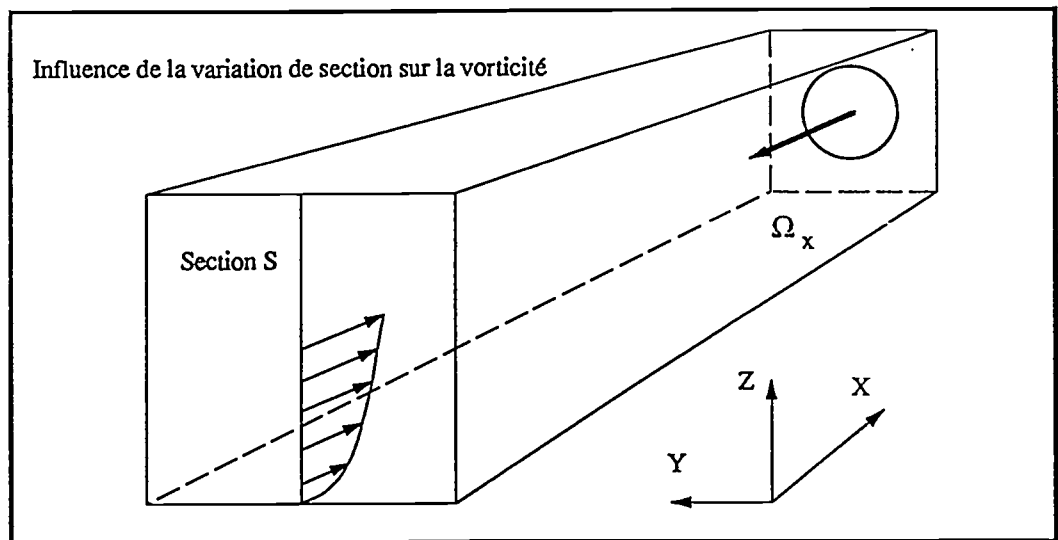


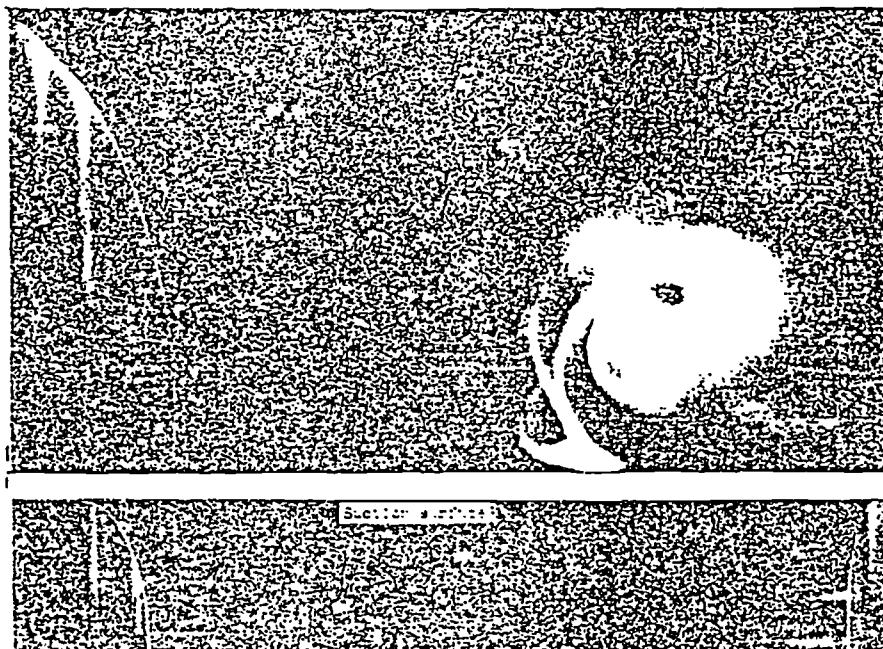
Figure 4.40

Ainsi, les deux effets non visqueux liés à la diminution de section et à la courbure génèrent une structure tourbillonnaire tridimensionnelle croissante vers l'aval. Ces tourbillons de passage sont visibles sur la visualisation (figure 4.41) proposée par STANITZ [1953] et dans le profil de vitesses secondaires calculées avec le code NSQE présenté à la figure 4.42. Ces deux structures sont également visibles dans la carte des iso-pressions d'arrêt dans un plan transversal représentée à la figure 4.43. Ces phénomènes tridimensionnels sont donc correctement reproduits par le calcul.

Par contre si les pertes visqueuses de pression totales sont recherchées, le calcul doit reproduire le comportement de la couche visqueuse pariétale et le mélange turbulent de l'écoulement. Un calcul tridimensionnel visqueux est alors nécessaire.

Figure 4.41

Visualisation par de la fumée montrant la formation d'un tourbillon de passage à la sortie du coude. La fumée est injectée à l'entrée du canal dans la couche limite (STANITZ [1953])



NACA
C-33171

Figure 4.42 : Champ de vitesse transversal calculé

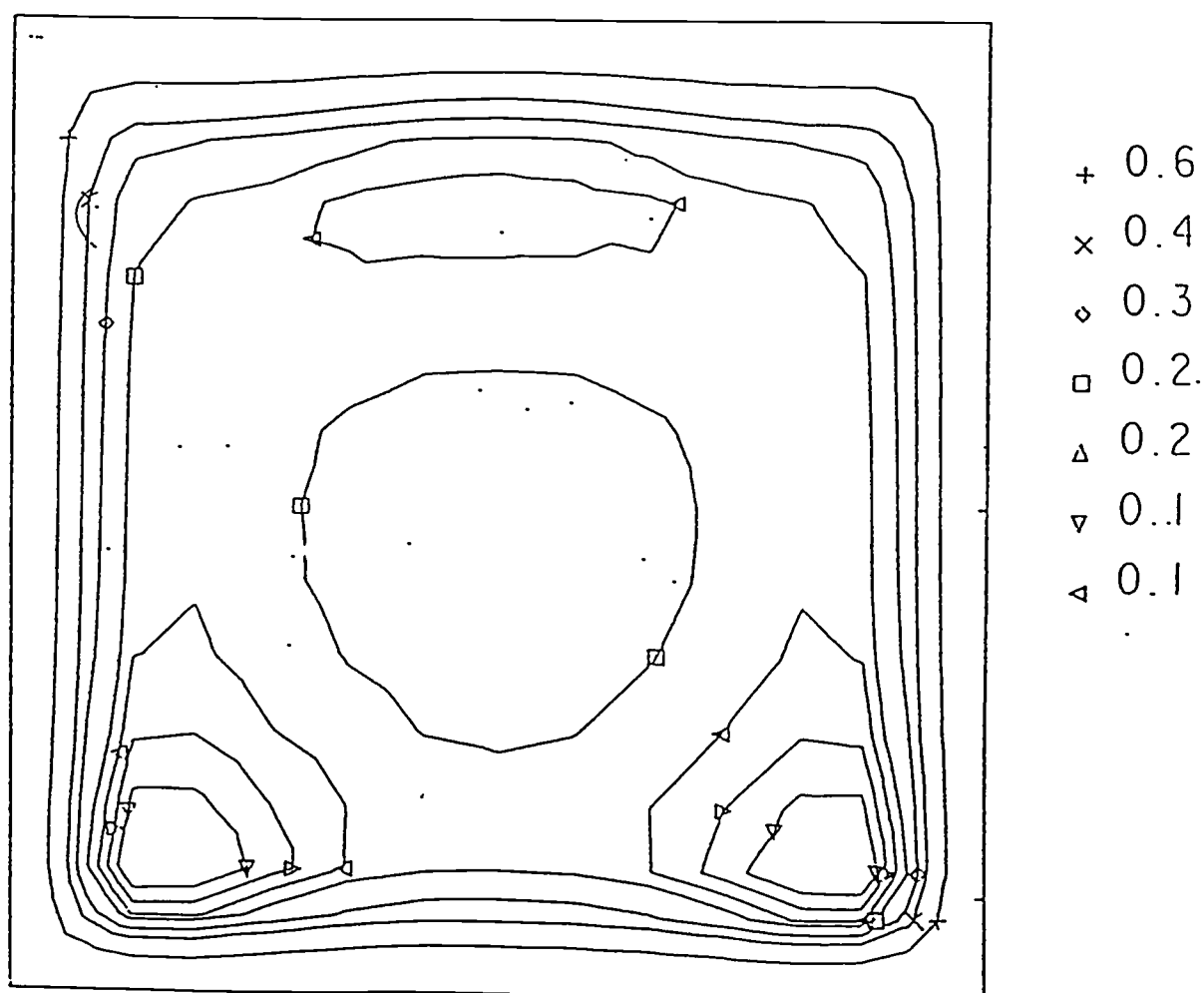
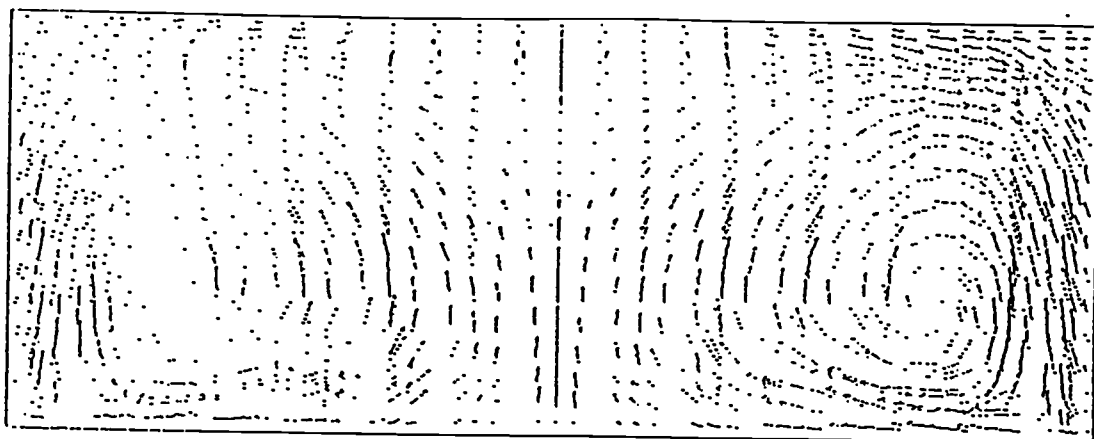
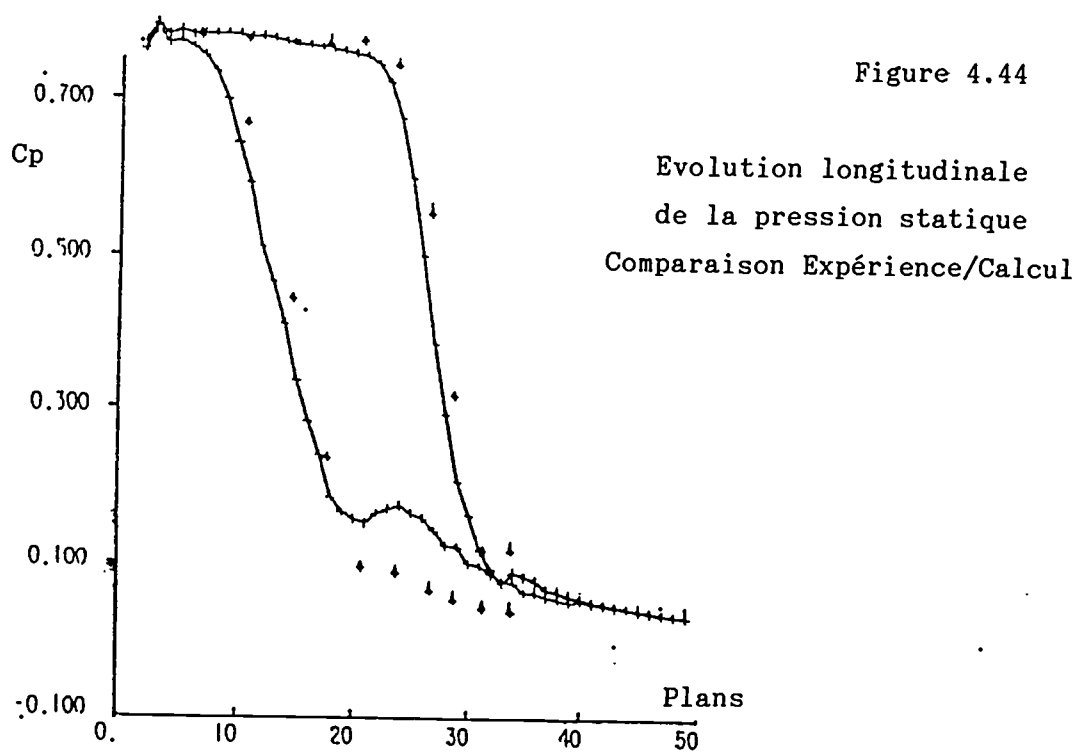


Figure 4.43 : Iso-pression d'arrêt dans un plan transversal

Pour quantifier ces processus visqueux, comparons les mesures expérimentales de pression et les résultats de calcul au centre du canal selon la direction longitudinale. La figure 4.44 présente les profils de pression intrados et extrados au quart de l'envergure (4.125 inches de la paroi). Les gradients de pression extrados et intrados sont correctement reproduits. La comparaison des profils transversaux de pression pariétale à la figure 4.45 atteste de la bonne reproduction à l'intrados. La pression calculée reste légèrement inférieure aux mesures. Par contre, sur la face extrados, le calcul ne reproduit pas le niveau correct de pression dans la partie aval du coude. La pression reste trop élevée comme le confirme la comparaison des profils transversaux de pression statique à la figure 4.46. Malgré l'allongement du canal droit aval, il est possible que l'imposition d'un champ de pression uniforme à l'aval soit responsable de ce comportement aval. Rappelons que la correction de pression est toujours calculée avec une condition de Dirichlet homogène en aval du domaine local de calcul.



Profils de pression statique à la paroi au quart de l'envergure

Figure 4.45 : Face intrados

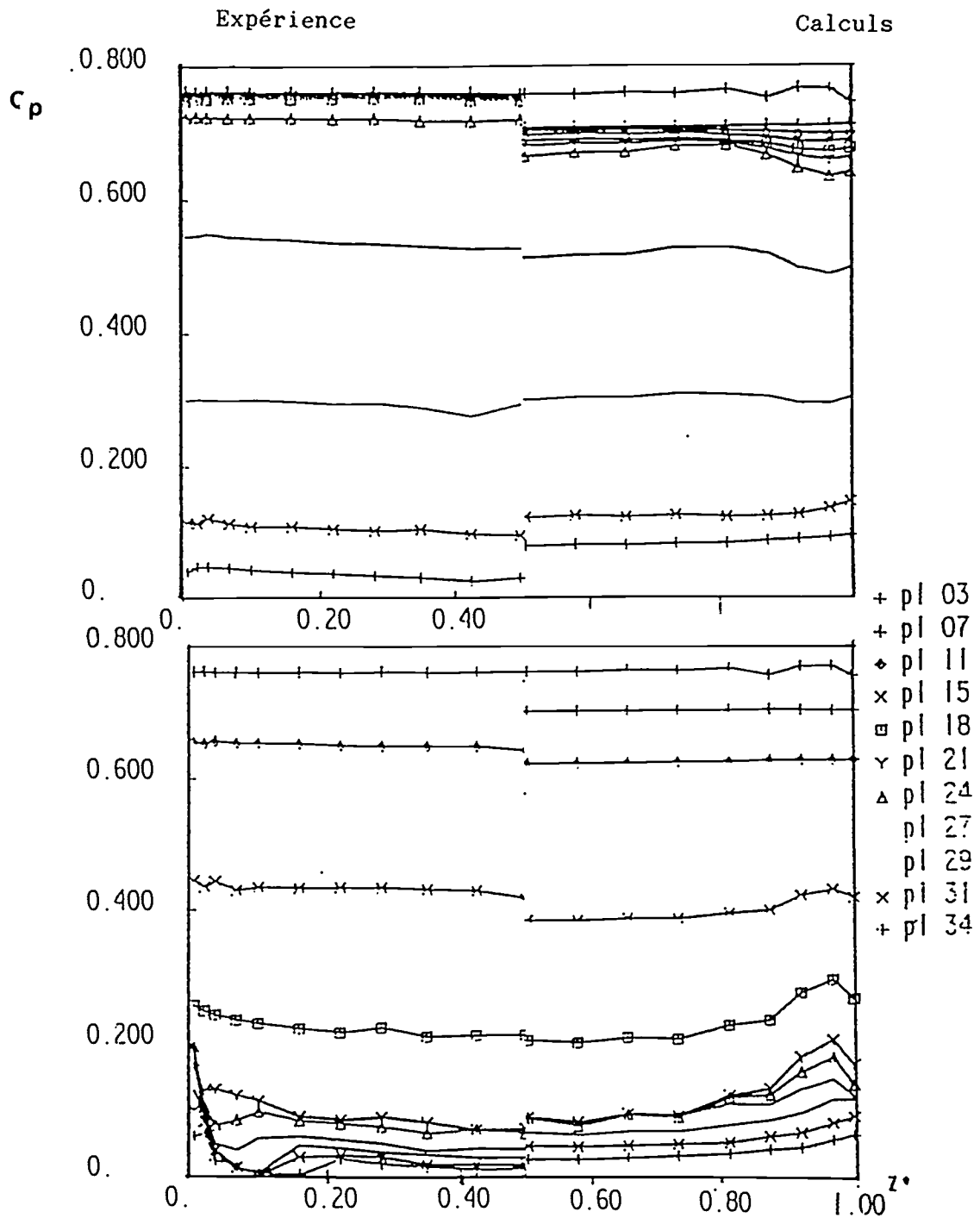


Figure 4.46 : Face extrados

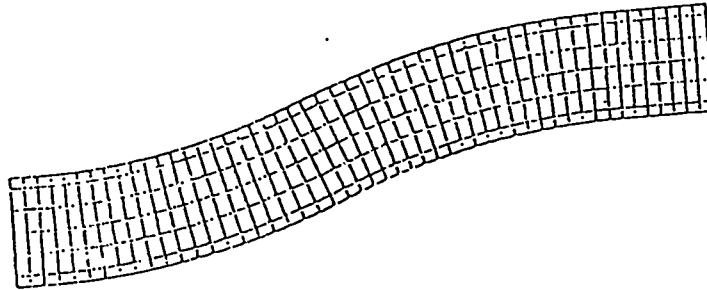
que nous le montrions ci-dessus avec l'équation (4.23), la composante longitudinale de la vorticité $\vec{\Omega}$ sera conservée, aux pertes pr es. Cette vorticité est incompatible avec un champ uniforme de pression statique.

L'utilisation d'une condition de non réflexion (HIRSCH [1988]) semble appropriée pour éliminer toute réflexion sur la frontière aval des perturbations transportées par les caractéristiques qui sortent du domaine. Ces perturbations sont visibles sur le champ d'iso-pression statique dans le plan de symétrie du canal à la figure 4.44. L'effet elliptique apparaît avant la courbure des parois mais des oscillations apparaissent à l'intrados à l'aval.

Il serait également possible d'imposer un niveau de pression moyen au centre du plan aval et d'imposer une condition de Neuman homogène dans le reste du plan pour le calcul de la correction de pression par la méthode BEM. Cette solution est très facilement mise en oeuvre avec la structure du code actuel qui permet un traitement local des conditions aux limites.

Cette sensibilité du code au type de conditions aux limites est mise en évidence ci-dessous sur un cas test simple. Considérons un canal en "S" (TAYLOR [1982]) de section carrée avec un maillage transversal 7x7 et 51 stations longitudinales (figure 4.47). Sans appliquer de déraffinement du maillage, nous nous proposons de comparer la convergence du calcul de l'écoulement interne laminaire selon le type de conditions aux limites appliquées au domaine restreint de calcul de la correction de pression.

Un premier calcul est fait en déterminant la correction de pression avec la méthode MSI dans le plan de calcul courant. Comme référence, le même calcul est effectué en utilisant la méthode des éléments frontières tridimensionnelle pour trouver les corrections de pression internes.



Maillage 7x7x51 du canal en "S"

Figure 4.47

Les conditions aux limites comparées sont :

	Plan amont	Plan aval
Cas 1	$\delta p = 0$	$\delta p = 0$
Cas 2	$\frac{\partial}{\partial n} \delta p = 0$	$\delta p = 0$

La figure 4.48 présente l'évolution du facteur de convergence ε_p [%] au cours des balayages. Pour la configuration "2", seul le calcul BEM3D complet converge puisque le calcul avec MSI ne termine pas le premier balayage (comportement identique en imposant des conditions de Neuman sur les deux faces). Par contre, les deux méthodes convergent dans la configuration "1". La convergence est toutefois plus rapide avec le calcul BEM3D.

En effet, l'utilisation de conditions aux limites de Dirichlet sur

les faces amont et aval du bloc de calcul renforce le comportement bidimensionnel de la correction de pression. Ainsi, avec ce type de conditions aux limites, le comportement du code avec la méthode MSI est identique avec une méthode tridimensionnelle complète BEM. L'utilisation de la méthode MSI est donc justifié dans cette configuration et permet d'éviter un calcul tridimensionnel trop coûteux.

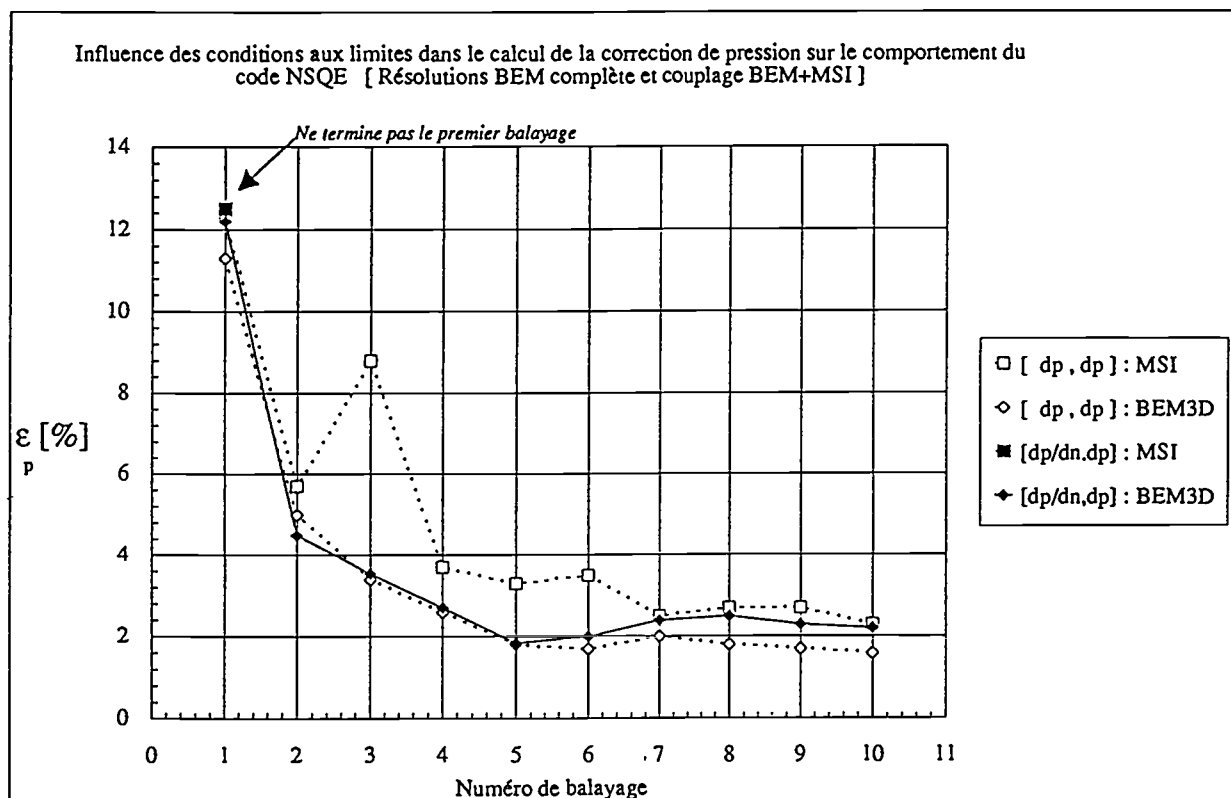


Figure 4.48

Revenant au coude de Stanitz, la carte des iso-pression d'arrêt, figure 4.43, permet d'observer la surestimation de l'épaisseur des couches limites à la paroi. Comme nous le remarquons avec le coude à 90°, le maillage transversal trop lâche est en cause.

Ainsi, le code NSQE reproduit correctement les effets tridimensionnels caractéristiques d'un canal coudé à section

variable. Les tourbillons de passage apparaissent et les niveaux de pression statique sont corrects sur la face intrados du canal de Stanitz. L'influence de la condition de pression uniforme à l'aval du canal semble perturber l'écoulement à la sortie de la courbure et empêcher le calcul de déterminer le niveau de pression aval correct. Le maillage utilisé semble insuffisant pour capter la couche limite puisque celle-ci est artificiellement augmentée en raison du faible nombre de points dans le maillage transversal.

IV.7 CONCLUSION

Ce chapitre illustre le couplage entre la méthode intégrale des éléments frontières avec le code Navier Stokes tridimensionnel NSQE.

Après une première présentation des outils de convergence et autres paramètres du calcul comme la relaxation de la correction de pression, les calculs avec les matrices dites "extraite" et "complète" ont été comparés. Le calcul avec la matrice complète, correct mathématiquement, est indispensable si le pas longitudinal du maillage est faible.

L'utilisation systématique des matrices complètes a nécessité le développement d'une méthode de déraffinement du maillage dans les plans amont et aval du domaine local de calcul pour limiter la taille mémoire nécessaire au calcul. L'influence de ce déraffinement est négligeable sur les valeurs numériques obtenues.

L'analyse des temps de calcul de chaque élément du code NSQE démontre la nécessité d'optimiser le calcul des intégrales volumiques.

Enfin, la validation du code sur les géométries des coudes à 90° et de Stanitz démontre le comportement correct du code et son aptitude à reproduire les gradients de pression et les structures tourbillonnaires tridimensionnelles dans un coude. Une

modification de la condition de pression aval s'impose pour éliminer les perturbations réfléchies sur la frontière aval qui perturbent l'écoulement à la sortie du coude.

Ainsi, le code NSQE reproduit correctement les effets essentiellement non visqueux dans un coude. L'étape suivante consiste à tester ce calcul dans une configuration où l'influence de la viscosité est importante. Le calcul d'un écoulement interne dans un canal de turbine est donc bien adapté à cette validation. Le chapitre suivant illustre le comportement du code NSQE sur la grille de turbine de l'Ecole Centrale de Lyon. Le traitement particulier du bord d'attaque dans la méthode des éléments frontières sera d'abord détaillé.

CHAPITRE V

UTILISATION INDUSTRIELLE : CALCUL D'UNE TURBINE

L'objectif recherché dans la définition du code NSQE est le calcul d'écoulements internes de turbine avec des tailles mémoires requises inférieures à celles habituellement utilisées par des codes similaires utilisant des solutions tridimensionnelles complètes et avec des temps calculs compétitifs.

Afin de valider le concept de quasi-ellipticité utilisé dans le code NSQE, nous choisissons de calculer l'écoulement interne dans la turbine ECL étudiée expérimentalement à l'Ecole Centrale de Lyon. Les nombreuses mesures expérimentales de vitesse et de pression disponibles nous permettront de qualifier les résultats numériques.

La configuration expérimentale est exposée dans un premier temps. Les conditions aux limites et le traitement des zones critiques de l'écoulement dans la méthode des éléments frontières sont ensuite présentés avant d'analyser les résultats numériques.

V.1 PRESENTATION DU CAS TEST : LA TURBINE ECL

La grille d'aube utilisée consiste en 9 aubages non vrillés d'une grille directrice de turbine à gaz (ONVANI [1983]). L'aube présente une hauteur $L = 0.274$ m et une corde de 0.163 m. Le pas interaube est de 0.141 m. L'angle de calage λ des aubages est de 41.30° compté par rapport à la direction axiale Ox . La géométrie complète est présentée à la figure 5.1.

Quatre sections de mesure sont placées en amont de la grille, six dans le passage interaube et quatre en aval (figure 5.2).

Figure 5.1 : Géométrie de la grille d'aube ECL

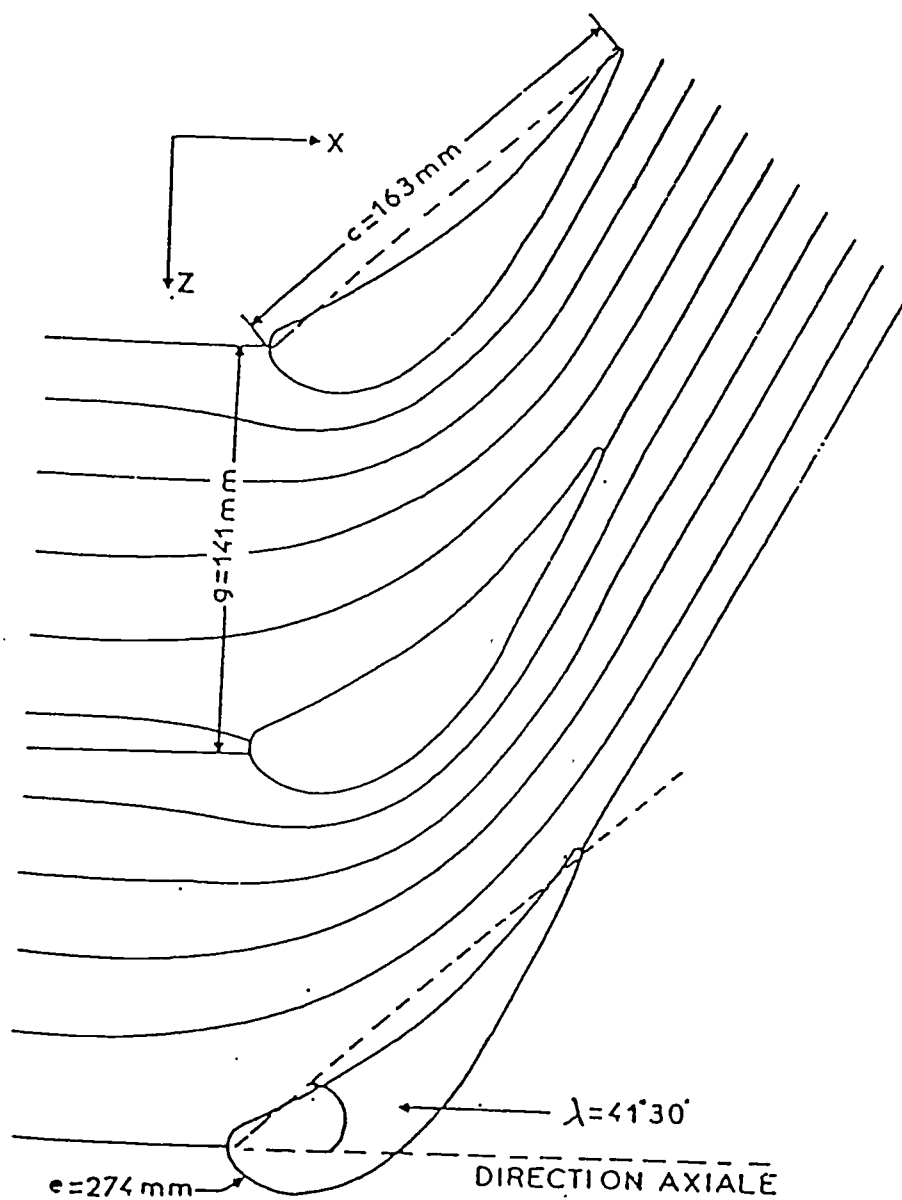
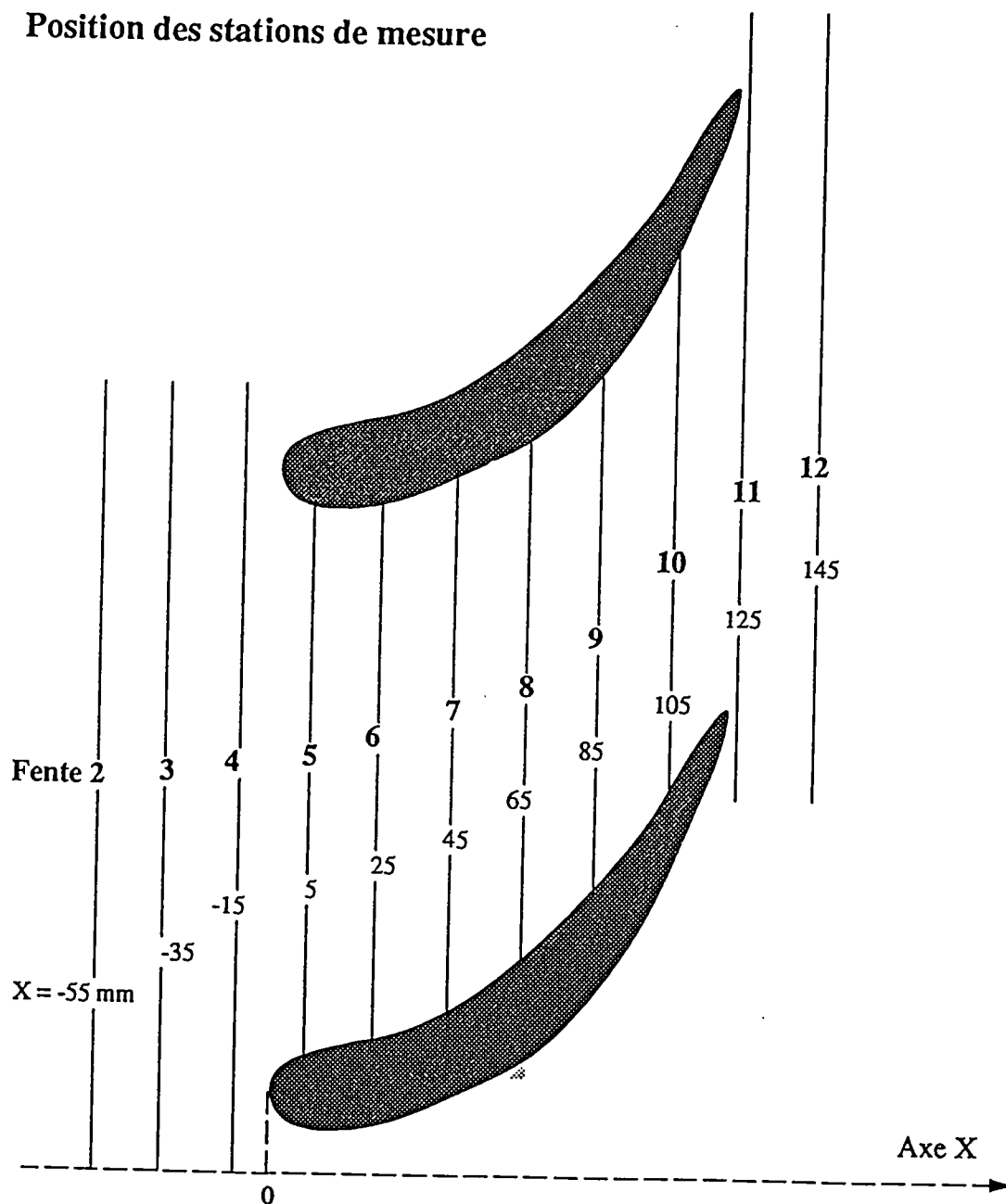


Figure 5.2 : Positions des stations de mesure

Position des stations de mesure



La fente 1 est située en amont à $X = -240 \text{ mm}$

Les conditions expérimentales données dans un plan situé à 24 mm du front de grille sont une vitesse amont extérieure à la couche limite égale à 15.2 m/s. L'épaisseur de couche limite sur la plaque plane qui forme la paroi latérale $z = 0$ mm est $\delta = 50$ mm dans le plan $x = -24$ mm. Le nombre de Reynolds calculé avec la corde correspondant à ces conditions est de 165000 et le nombre de Mach est égal à 0.044.

La pression statique de référence est $P_{ref} = 0.06$ mCE.

V.2 INFLUENCE ET CHOIX DES CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites du domaine complet et de chaque domaine de calcul restreint ont été décrites au chapitre I. L'implantation des conditions aux limites pour le traitement du bord d'attaque d'une aube de turbine dans le calcul BEM est détaillée ci-dessous.

Les bords d'attaque et de fuite sont des points de transition entre les zones à parois périodiques et solides. Lorsque le domaine de calcul de la correction de pression comprend l'un de ces plans, les conditions aux limites sont mixtes puisqu'elles sont à la fois périodiques et non périodiques. Le traitement d'une telle transition était l'objet du paragraphe II.2.2 pour une géométrie bidimensionnelle. Cette étude est maintenant appliquée au bord d'attaque.

Considérons par exemple le cas du bord d'attaque présenté à la figure 5.3.

En utilisant des domaines de calcul délimités par trois plans, en balayant de l'amont vers l'aval, le plan du bord d'attaque est successivement à l'aval du bloc (figure 5.3.1), au centre du bloc (figure 5.3.2) et à l'amont du bloc (figure 5.3.3). Rappelons que les surface des domaines de calcul au voisinage des bords d'attaque et de fuite sont discrétisées avec des éléments linéaires.

Traitement du bord d'attaque dans la méthode des éléments frontières

(Seules les inconnues de la résolution intégrale sont spécifiées)

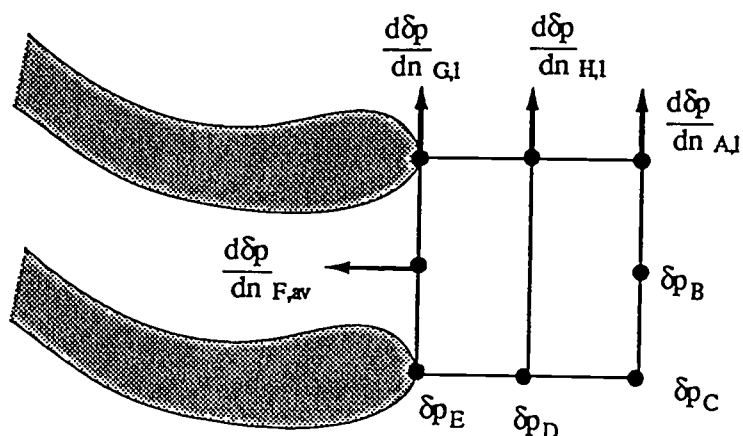


Figure 5.3.1

Le plan aval
est au bord d'attaque

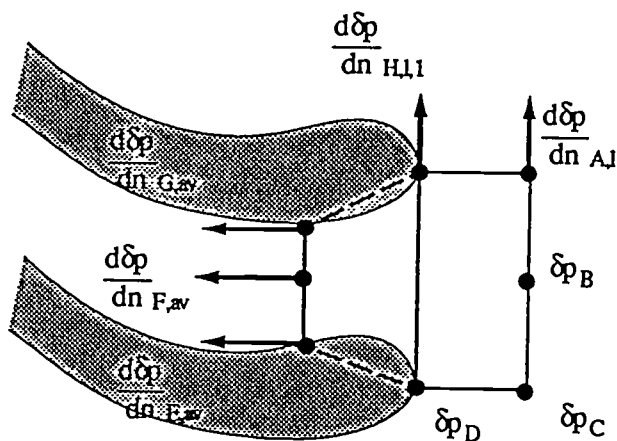


Figure 5.3.2

Le plan central
est au bord d'attaque

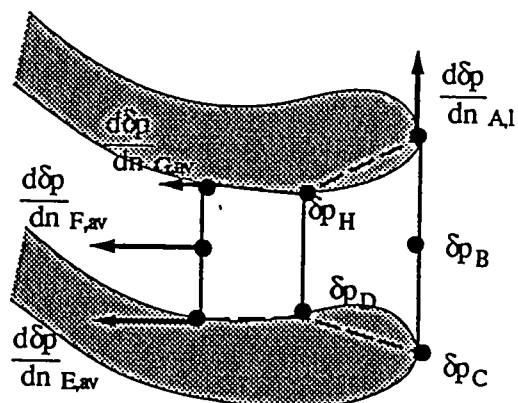


Figure 5.3.3

Le plan amont
est au bord d'attaque

Les différentes variables de Dirichlet et de Neuman de la surface d'un domaine à 3 plans sont répertoriées ci-dessous.

Variable	Plan amont	Plan central	Plan aval
Dirichlet	$\delta p_A \delta p_B \delta p_C$	$\delta p_D \delta p_H$	$\delta p_E \delta p_F \delta p_G$
Neuman	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} A, am \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n} A, l$	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} D, l, (1, 2)$	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} E, av \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n} E, l$
	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} B, am$	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} H, l, (1, 2)$	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} F, av$
	$\frac{\partial \delta p}{\partial n} C, am \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n} C, l$		$\frac{\partial \delta p}{\partial n} G, av \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n} G, l$

L'ensemble de ces 22 variables et de leurs indices est présenté à la figure 5.4 pour une surface située dans un plan (ξ, η) à γ constant en dehors des parois latérales.

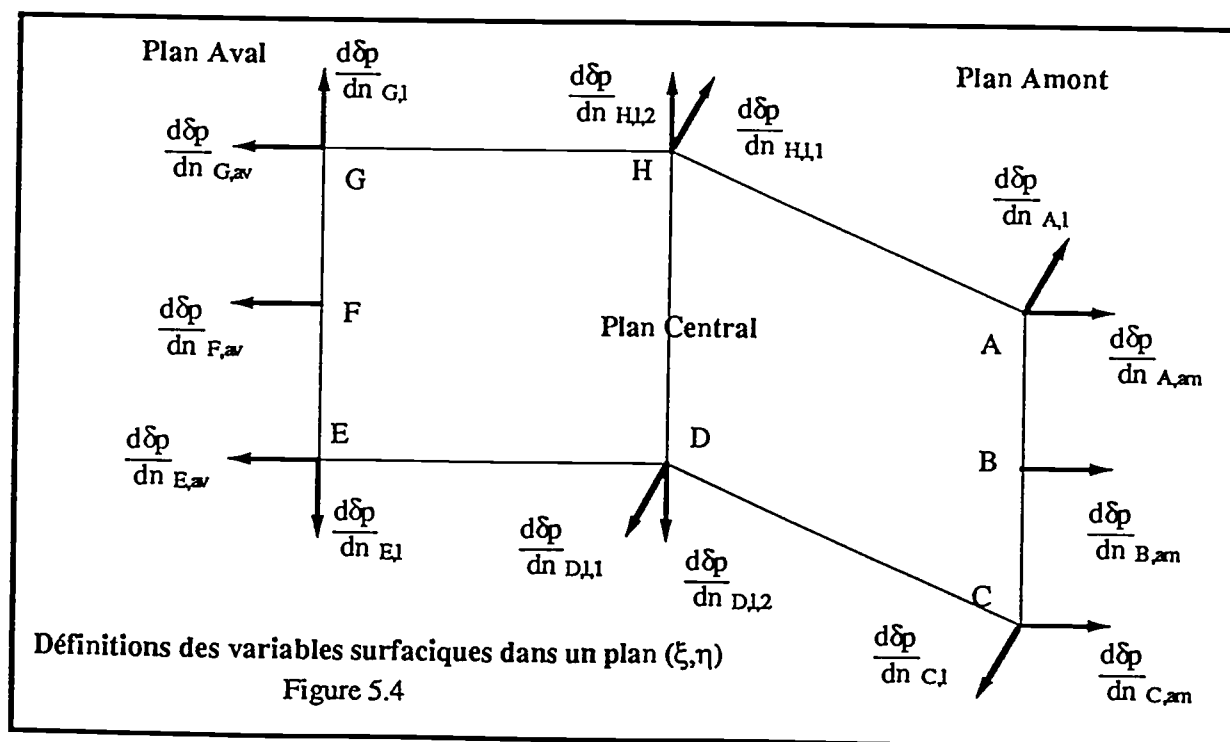


Figure 5.4 : Définition des variables surfaciques

Les indices "am" et "av" désignent respectivement les directions normales aux faces "AMont" et "AVal". L'indice "l" désigne les faces "Latérales" GH et EC. Les variables de Neuman propres aux normales au plan (A,C,E,G) ne sont pas répertoriées puisque ces faces sont les moyeu et carter de l'aubage et les dérivées normales de correction de pression sont donc imposées comme nulles. Les dérivées normales (1) et (2) des faces latérales aux points D et H ne sont distinguées que lorsque le plan central est au bord d'attaque ou dans le canal inter-aube.

Ces 22 variables représentent 8 positions géométriques. Les conditions aux limites doivent ainsi fixer 14 variables.

Les 3 positions possibles du domaine restreint et les conditions aux limites correspondantes sont décrites ci-dessous.

V.2.1 Le plan aval du bloc est au bord d'attaque (Figure 5.3.1)

Les équations de périodicité traduisent le comportement identique des parois AG et CE.

Périodicité des faces AG et CE : $\delta p_A = \delta p_C$; $\delta p_D = \delta p_H$; $\delta p_E = \delta p_G$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A, am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C, am}; \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{D, l} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H, l}$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E, l} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G, l}; \quad \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C, l} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A, l}$$

Conditions de parois solides : $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E, av} = 0 = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G, av}$

Cette condition est contraignante pour la définition du maillage puisqu'elle oblige la ligne de maillage à arriver normalement au bord d'attaque.

Champ de pression statique imposé au plan aval : $\delta p_F = 0$

Au plan amont, nous avons le choix entre les conditions de Neuman ou de Dirichlet. La condition de Neuman est choisie, pour renforcer l'influence elliptique du plan aval.

Condition de Neuman au plan amont : $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{B,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,am} = 0$

Les inconnues de cette configuration sont alors

$$\delta p_C; \delta p_B; \delta p_D; \delta p_E; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,1}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H,1}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{F,av}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,1}$$

Nous choisissons de favoriser la condition de paroi solide au plan aval. La correction de pression n'est donc pas imposée comme nulle au plan aval sur les parois périodiques. La condition de pression nulle est imposée aux points internes du plan aval seulement.

V.2.2 Le plan central du bloc est au bord d'attaque (Figure 5.3.2)

Les conditions de périodicité n'existent plus au plan (E,F,G).

Périodicité des faces AH et CD : $\delta p_A = \delta p_C; \delta p_D = \delta p_H$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,am}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{D,1,1} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H,1,1}$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,1} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,1}$$

Les dérivées normales en H et D indicées "1,2" sont nulles puisque les lignes de maillage HG et DE représentent la paroi de l'aubage. La paroi est en effet discrétisée linéairement en raison de l'utilisation d'éléments linéaires.

Conditions de parois solides :

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E,1} = 0 = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,1} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{D,1,2} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H,1,2}$$

La correction de pression est maintenant imposée comme nulle dans le plan aval complet.

Champ de pression statique imposé au plan aval : $\delta p_F = \delta p_F = \delta p_E = 0$

Condition de Neuman au plan amont : $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{B,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,am} = 0$

Les inconnues de cette configuration sont

$\delta p_C; \delta p_D; \delta p_B; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,1}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H,1,1}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{F,av}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E,av}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,av}$

V.2.3 Le plan amont du bloc est au bord d'attaque (Figure 5.3.3)

Les conditions de périodicité ne sont appliquées qu'au plan amont du bloc.

Périodicité du plan amont : $\delta p_A = \delta p_C; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,am}$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,1} = - \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,1}$$

Conditions de parois solides : $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E,1} = 0 = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,1}$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{D,1,2} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{H,1,2} = 0$$

Champ de pression statique imposé au plan aval : $\delta p_F = \delta p_F = \delta p_E = 0$

Condition de Neuman au plan amont : $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{B,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,am} = \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{C,am} = 0$

Les inconnues de cette configuration sont

$$\delta p_C; \delta p_B; \delta p_D; \delta p_H; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{A,1}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{F,av}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E,av}; \frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,av}$$

Le traitement du bord de fuite est similaire. Il ne sera pas détaillé dans ce document.

V.2.4 REMARQUE SUR LE CHOIX DES CONDITIONS AUX LIMITES

Le choix des conditions aux limites conditionne la structure de la matrice à résoudre pour calculer les corrections de pression. Selon la répartition des coefficients de Neuman et de Dirichlet qui sont d'un ordre de grandeur différent dans la matrice, cette dernière sera plus ou moins facilement inversible numériquement.

Par exemple, pour le cas de la turbine traitée ci-dessous, deux algorithmes d'inversion de matrice par la méthode LU ont été testés sur les matrices de cette géométrie. Une erreur ϵ_{LU} [%] est définie selon

$$\epsilon_{LU}^2 = 10^4 \sum_{i=1}^M \left(1 - \sum_{j=1}^M A_{ij} X_j \right)^2$$

M est le nombre de noeuds de discrétisations de la surface du bloc de calcul à trois plans (210 dans notre cas), X est la solution calculée par la méthode LU du système $A X = B$ avec, pour tout $i \in [1,M]$, $B(i) = 1$.

Les résultats sont présentés aux figures 5.5. et 5.5.b.

Soit la configuration des conditions aux limites "CL1". Pour cette configuration, les dérivées normales de pression amont et aval sont des inconnues sur les parois des faces amont et aval de chaque domaine à 3 plans pour le calcul de la correction de

pression. Ceci afin d'imposer la condition de Dirichlet $\delta p = 0$ comme nous en montrions la nécessité précédemment.

Une résolution LU classique offre une précision de l'ordre de 0.0006 % sauf au bord de fuite où l'erreur augmente jusqu'à 0.01 % (figure 5.5.a). Cette différence de niveau peut expliquer des difficultés de convergence et des oscillations importantes rencontrées au bord de fuite qui génèrent des points décollés. Le calcul ne peut alors plus converger.

Par contre, en utilisant un algorithme LU plus sophistiqué avec une recherche de pivot, l'erreur moyenne chute à 0.0003 %. L'erreur est encore maximale au bord de fuite où elle avoisine même 150 % (soit 0.5 % par point en moyenne).

En changeant les conditions de Neuman homogènes sur les dérivées normales $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{E,1}$ et $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,1}$, lorsque le plan est périodique, ou la condition de Dirichlet sur δp si le plan n'est pas périodique, en conditions de Neuman homogènes sur les dérivées normales $\frac{\partial \delta p}{\partial n}_{G,av}$, nous obtenons un jeu de conditions aux limites que nous dénommerons "CL2".

Nous constatons alors la disparition du comportement particulier de la résolution LU au bord de fuite, particulièrement lorsque la condition CL2 est appliquée sur l'intégralité du canal de la turbine. La précision est alors de l'ordre de 0.0004 % pour 210 points.

Une procédure de vérification sur la résolution du système LU est donc importante pour vérifier le jeu de conditions aux limites et éviter ces situations.

Figure 5.5.a

Influence des conditions aux limites sur la résolution LU

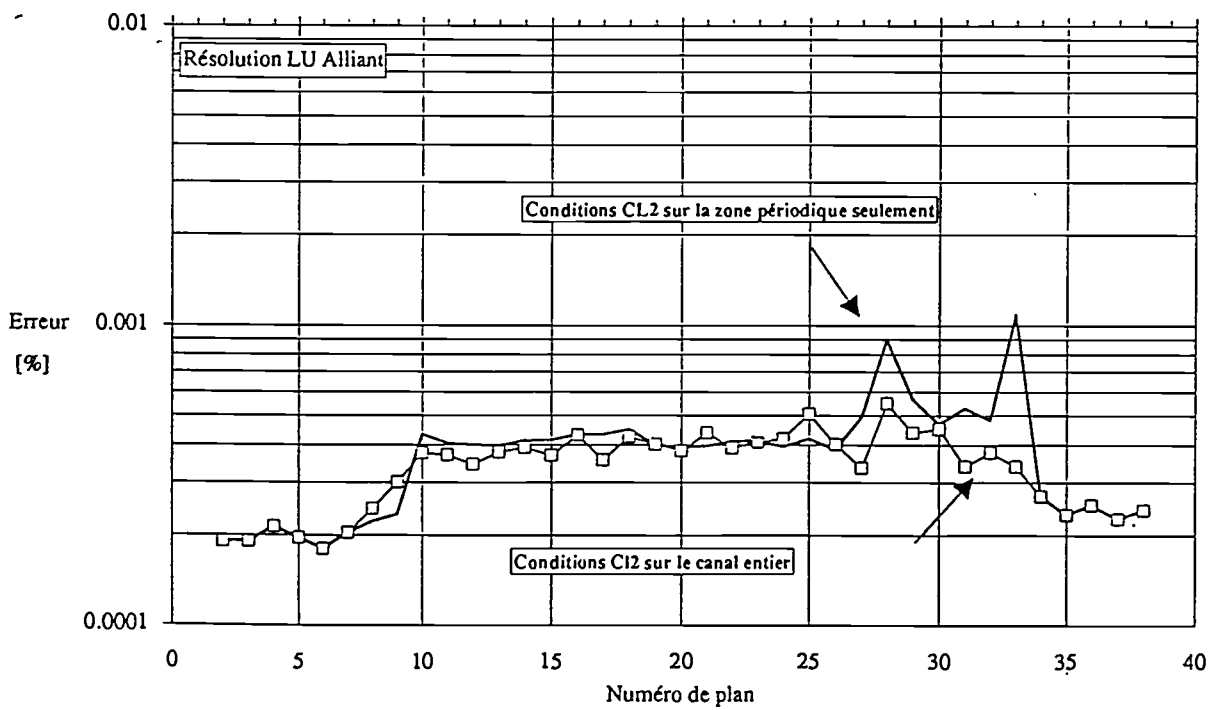
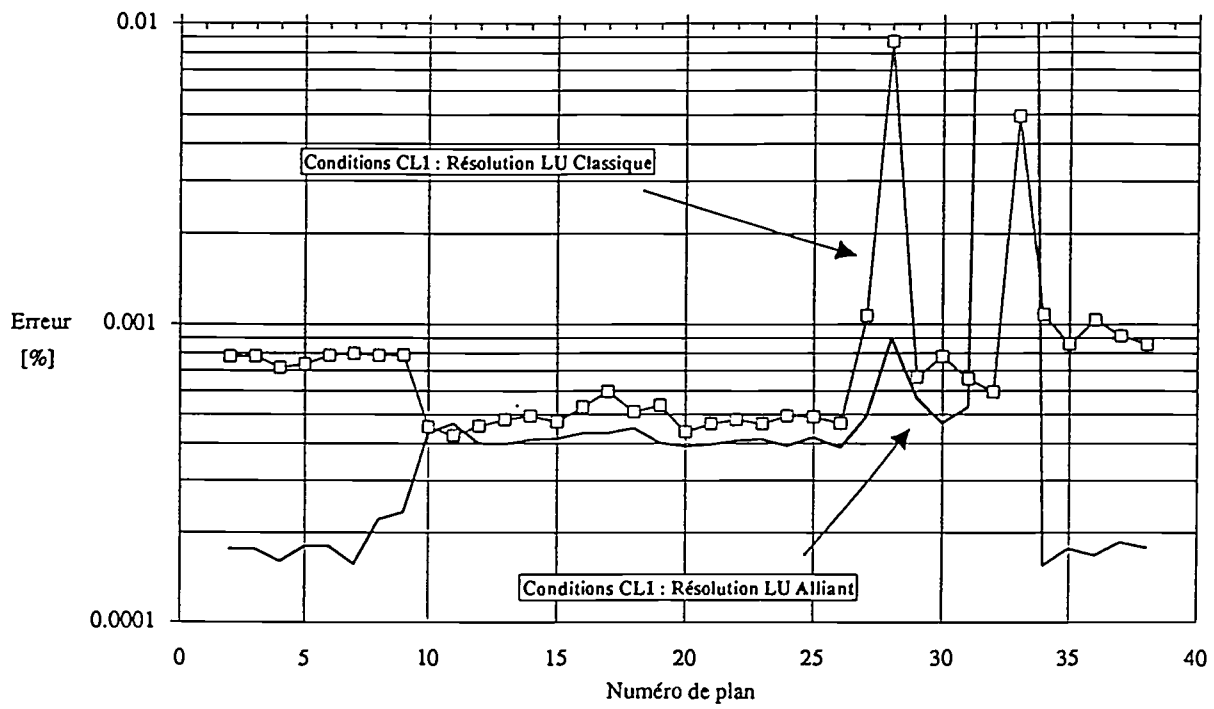


Figure 5.5.b

V.2.5 CONCLUSION

Le traitement du bord d'attaque dans la méthode des éléments frontières illustre encore une fois la grande souplesse d'utilisation de cette méthode où chaque direction normale à la paroi apparaît naturellement.

Par rapport aux exemples traités au chapitre précédent, le traitement des bords d'attaque et de fuite est la seule modification apportée au module de calcul de la correction de pression pour calculer l'écoulement interne d'une grille de turbine.

Le paragraphe suivant expose les résultats obtenus sur la grille de turbine présentée au début de ce chapitre.

V.3 RESULTATS

La géométrie de la grille de turbine est discrétisée avec un maillage du type front de grille avec 17 points selon les directions η et γ répartis régulièrement et 38 points selon la direction longitudinale ξ . Le maillage transversal selon η est réalisé par l'"empilement" du maillage bidimensionnel représenté à la figure 5.6. Ce maillage reste bien sûr très grossier pour cette configuration. Les stations de mesure sont présentées sur ce graphique. Ces dernières correspondent à des plans de maillage pour faciliter la comparaison avec les mesures expérimentales.

Les bords d'attaque et de fuite sont respectivement situés aux stations longitudinales 9 et 33 (figure 5.6).

Le bord d'attaque est modifié en pointe pour faciliter le calcul. Le bord de fuite est également aminci. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux est donc délicate aux fentes 3, 4 et 11.

Maillage 38x17x17 de la turbine ECL

La position des sections de mesure est
signalée par un trait fort.

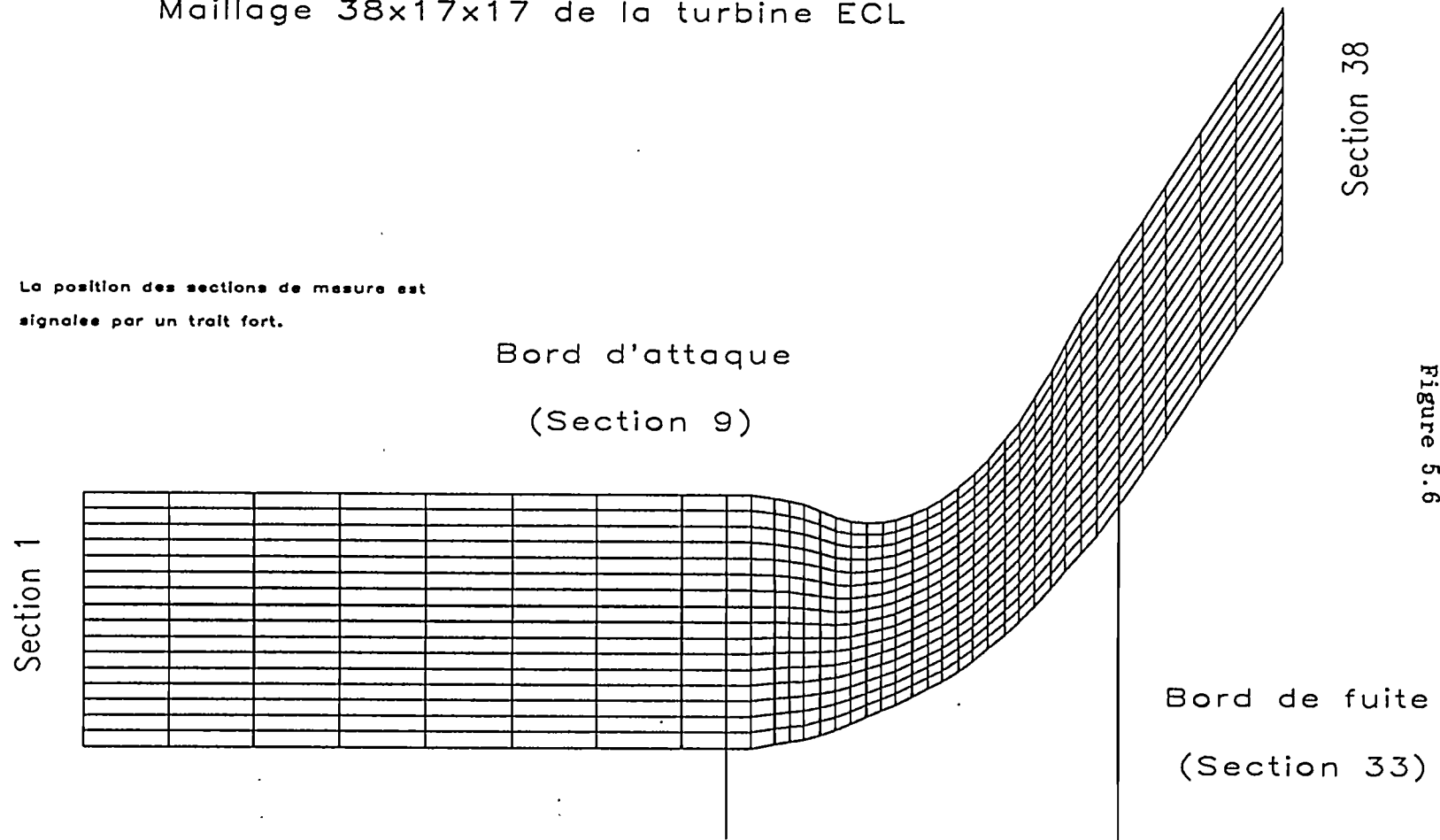


Figure 5.6

Trois configurations de calcul sont testées. Les deux modèles de turbulence de BALDWIN-LOMAX et de BULEEV sont comparés. L'utilisation de l'équation simplifiée de correction de pression est également utilisée avec le modèle de BULEEV pour le troisième test.

Dans la version actuelle du code NSQE, il n'est pas possible d'obtenir la convergence du calcul sur cette configuration. La comparaison des profils longitudinaux de pression aux mesures expérimentales aux figures 5.7, 5.8 et 5.9 explique cette difficulté de convergence.

Sur ces trois figures, le coefficient de pression est calculé comme

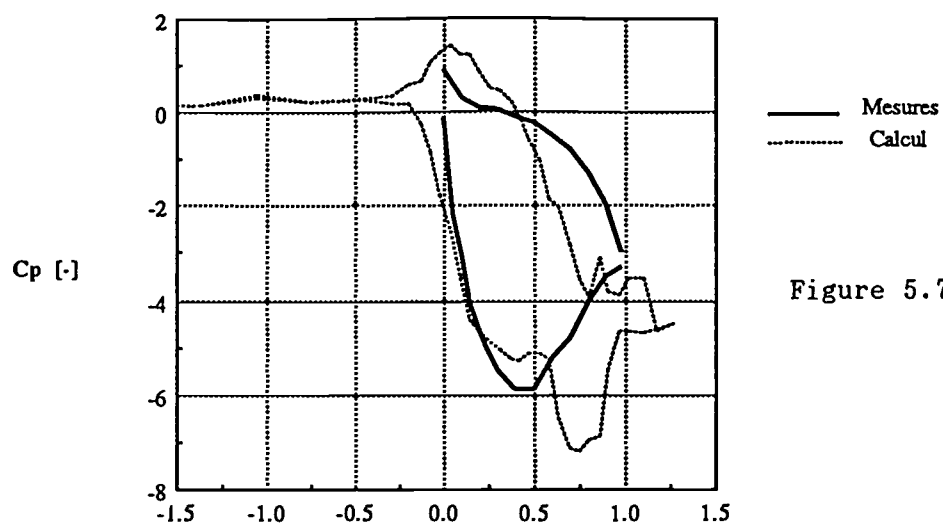
$$C_p = \frac{P - P_{\text{amont}}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} \quad [-]$$

où P_{amont} est la pression statique au premier plan du domaine de calcul au centre du canal. La différence de niveau de C_p entre l'amont et l'aval permet d'évaluer les pertes produites par le calcul. Ainsi, le niveau de C_p varie à l'aval selon les pertes générées par le calcul.

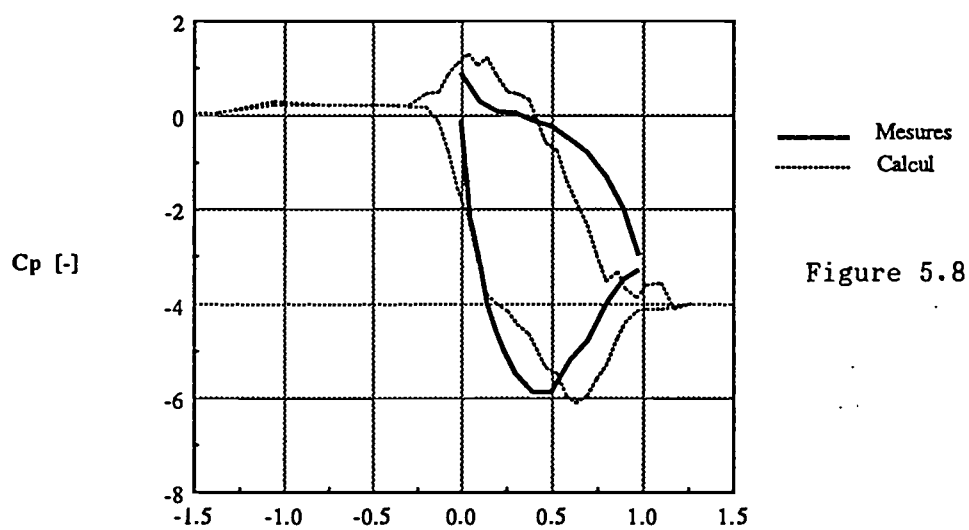
La comparaison avec le profil expérimental démontre une surévaluation des pertes dans le canal inter-aube. Les calculs qui utilisent le modèle de turbulence de BULEEV, référencés "Buleev" et "Modèle" sur les figures 5.8 et 5.9 respectivement, surestiment de 1 les pertes et le calcul avec le modèle de BALDWIN-LOMAX (figure 5.7) de 1.5 environ.

Il est à noter que le modèle de turbulence de BULEEV génère des pertes visqueuses plus importantes que le modèle de BALDWIN-LOMAX et une attention particulière doit être apportée aux coefficients de viscosité numérique ϵ_{im} et ϵ_{ex} .

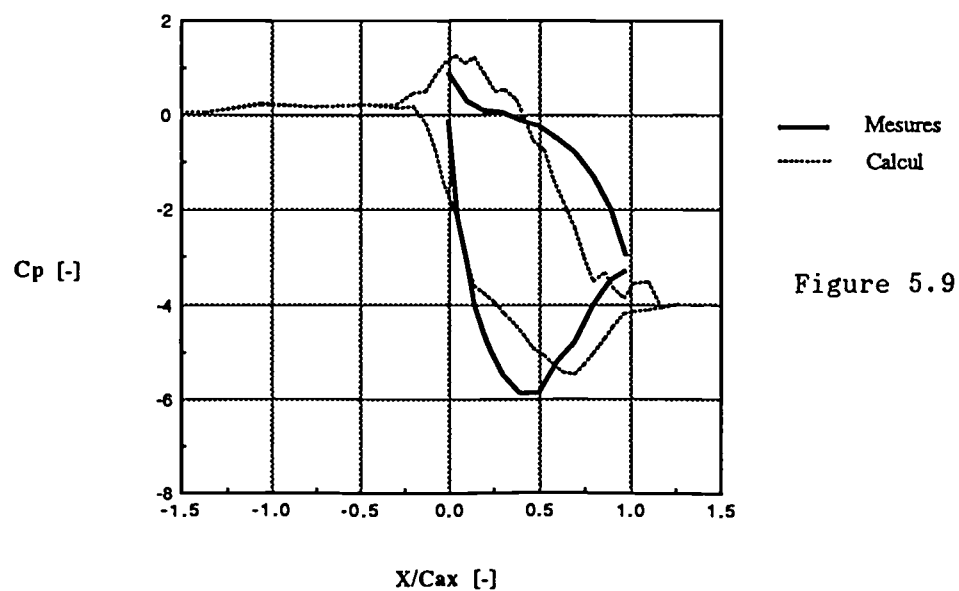
Distribution de pression sur l'aube
Modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX



Modèle de turbulence de BULEEV



Equation Modèle



Les profils obtenus dans les trois cas se comportent correctement sur la face extrados du profil. Par contre, la présence de points décollés sur la face intrados perturbe le profil de pression et d'importantes oscillations sont visibles au bord de fuite.

Le bord de fuite mince provoque une chute de pression visible sur la face intrados.

Le calcul avec le modèle de BULEEV (figures 5.8 et 5.9) se comporte mieux puisqu'il gère les points décollés de manière plus satisfaisante que le modèle de BALDWIN-LOMAX. Ce dernier tend en effet à favoriser l'extension des zones décollées et accentue ainsi les oscillations au bord de fuite (figure 5.7).

Des pertes trop importantes générées par le calcul sont caractérisées par une différence de C_p aval de l'ordre de 1. Comme nous pouvions le prévoir, une part de ces pertes provient de la grossièreté du maillage régulier qui induit une surestimation de l'épaisseur de la couche limite et donc des pertes.

Selon notre expérience, il semblerait que l'utilisation de l'équation simplifiée de correction de pression atténue ces perturbations sur la face extrados (Figure 5.9). Ce résultat reste à confirmer.

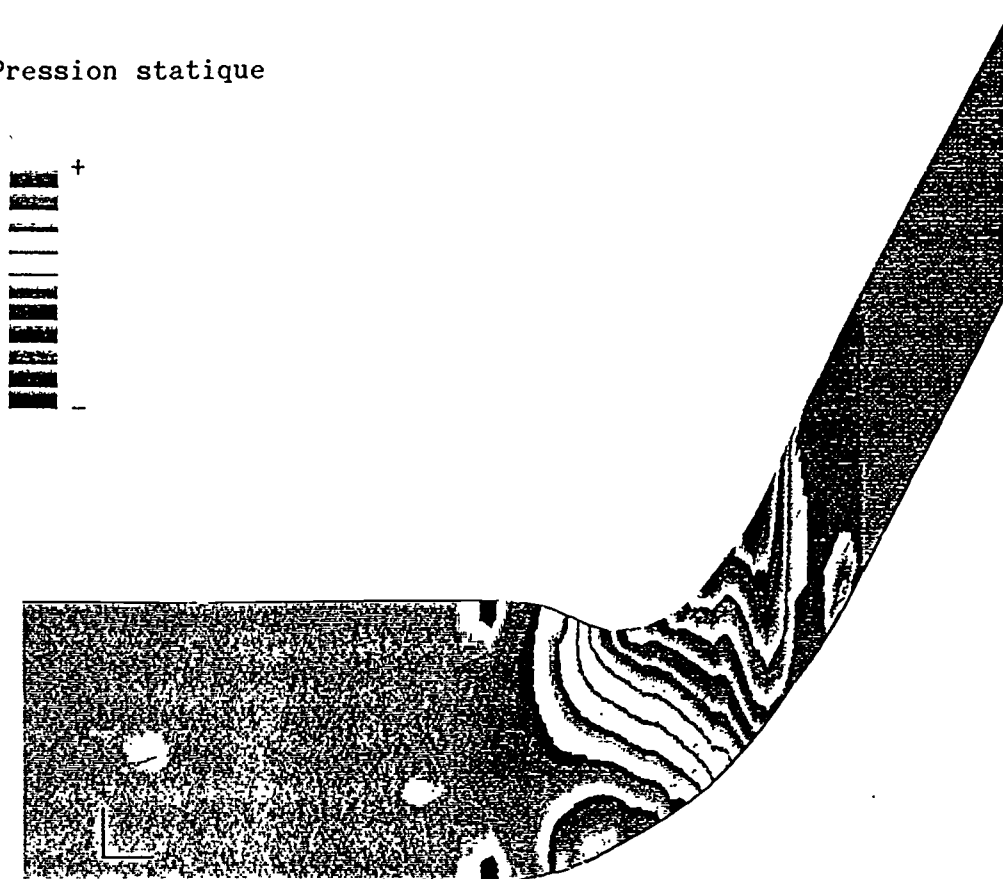
Les résultats analysés par la suite correspondent au cas test de la figure 5.8. Le temps calcul de ce cas est de 3 heures CPU sur un Alliant FX80, soit quelques minutes sur un CRAY.

Une visualisation des courbes d'iso-pression statique selon la direction longitudinale à mi-envergure est présentée à la figure 5.10 (page suivante). Nous observons deux zones de haute pression à l'extrados et à l'intrados au niveau du bord d'attaque.

Figure 5.10

Isovaleurs de pression statique à mi-envergure
selon une section longitudinale

Pression statique

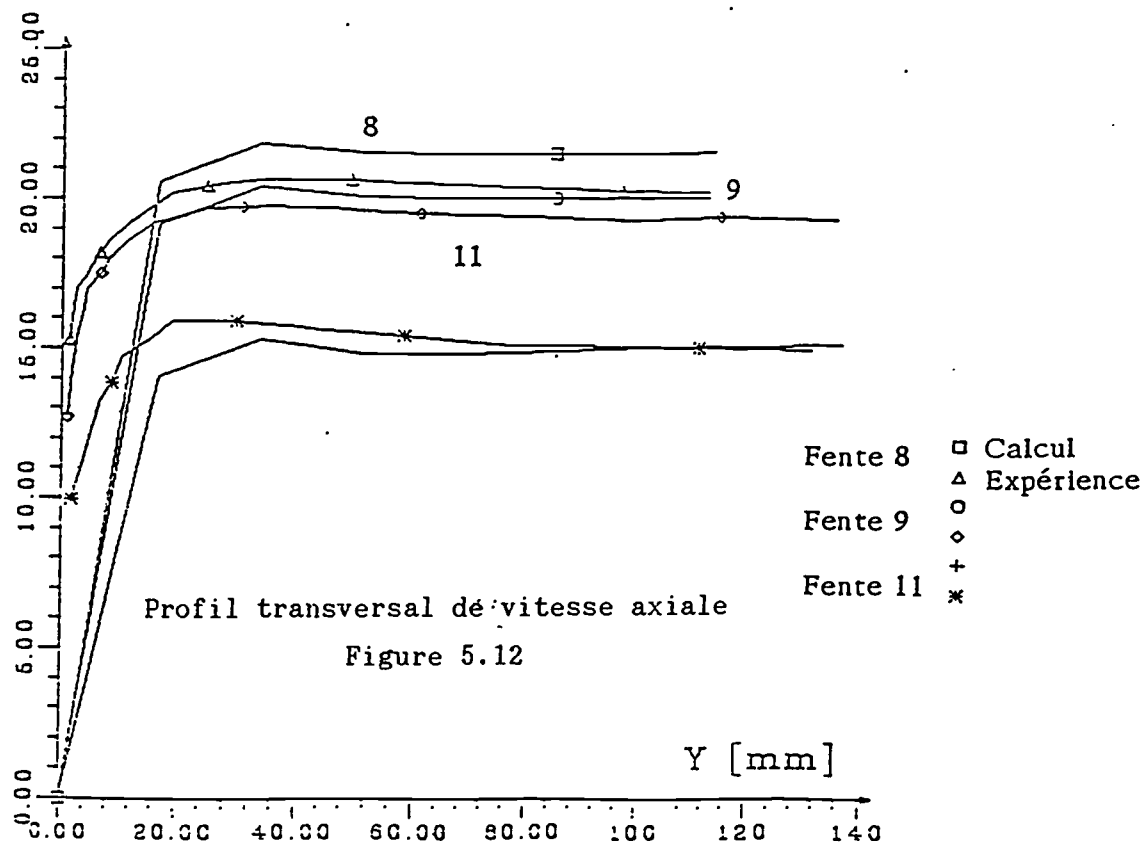
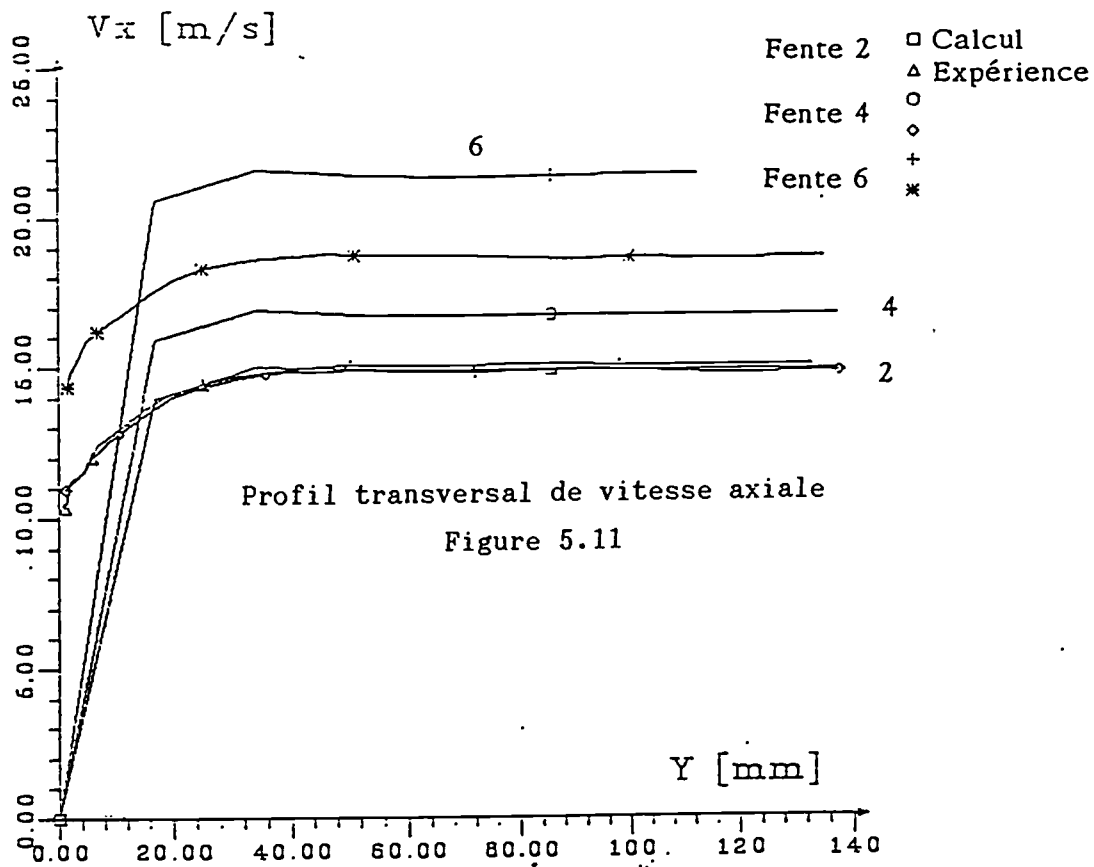


Nous nous proposons de comparer ci-dessous les mesures expérimentales et les calculs de la vitesse longitudinale V_x (figures 5.11 et 5.12) aux sections de sondage référencées 2, 4, 6, 8, 9 et 11 à la figure 5.6.

Le niveau de vitesse extérieure est correct en amont et en aval du canal (fentes 2 et 11 respectivement). La surévaluation de la vitesse au bord d'attaque (fentes 4 et 6) par rapport à l'expérience atteste d'une génération de pertes trop forte localisée au bord d'attaque. Ces pertes sont convectées dans le canal. L'inadéquation du maillage est visible à la paroi où l'épaisseur de la couche limite est artificiellement accrue, induisant ainsi une génération surestimée de pertes. La conjonction de ces deux effets conduit à une pression statique en aval trop faible comme nous le remarquons précédemment sur la figure 5.8 puisque le débit est correctement restitué (fente 11).

L'examen des isovaleurs de la composante transversale de vitesse selon l'envergure, V_y , aux fentes 4, 8, 10 et 12, illustrées aux figures 5.13, 5.14, 5.15 et 5.16 respectivement (page suivante) permettent d'observer les structures tourbillonnaires des tourbillons de passage observées sur le coude de Stanitz.

Le sillage aval est parfaitement visible sur la figure 5.17 où sont présentées les isovaleurs de pression totale dans une section longitudinale du canal. L'épaisseur de la zone "bleue" de basse pression totale sur le face extradors du canal inter-aube illustre une fois de plus la grossièreté du maillage employé.

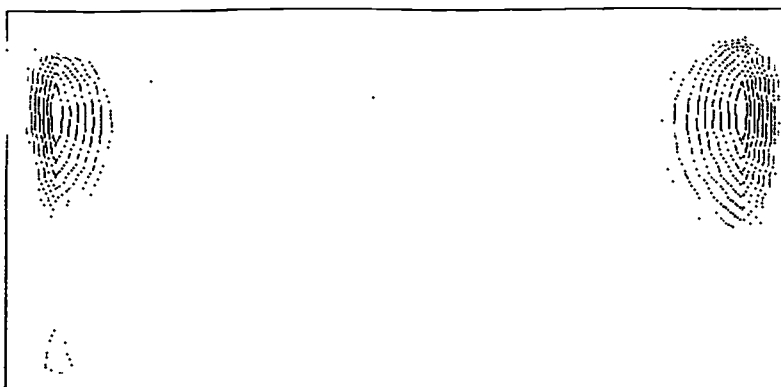


ISOVALEURS DE VITESSE TRANSVERSALE V_y

FENTE 4
Figure 5.13

↑ Axe Z
← Axe Y

intrados

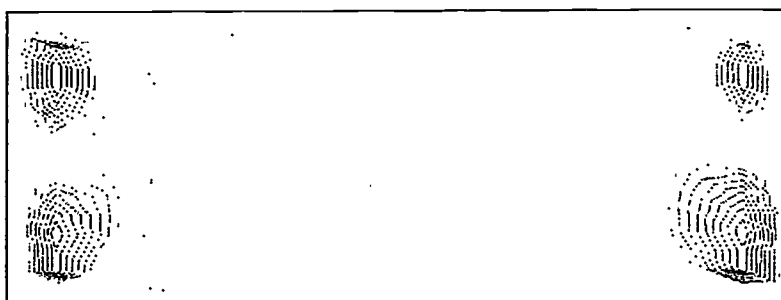


Axe Y (Envergure)

extrados

FENTE 8
Figure 5.14

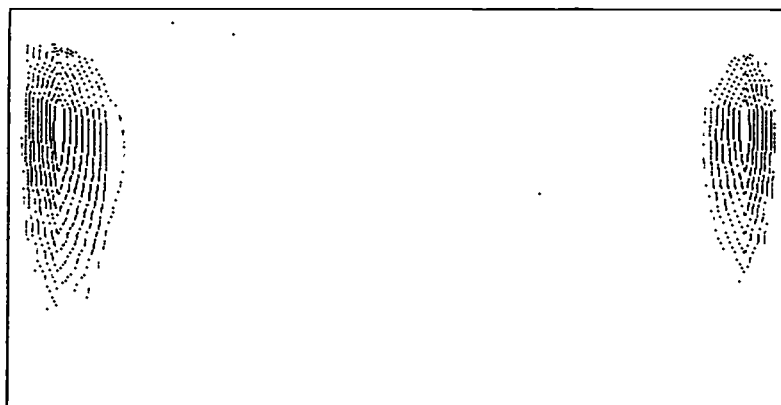
intrados



extrados

FENTE 10
Figure 5.15

intrados



extrados

FENTE 12
Figure 5.16

intrados

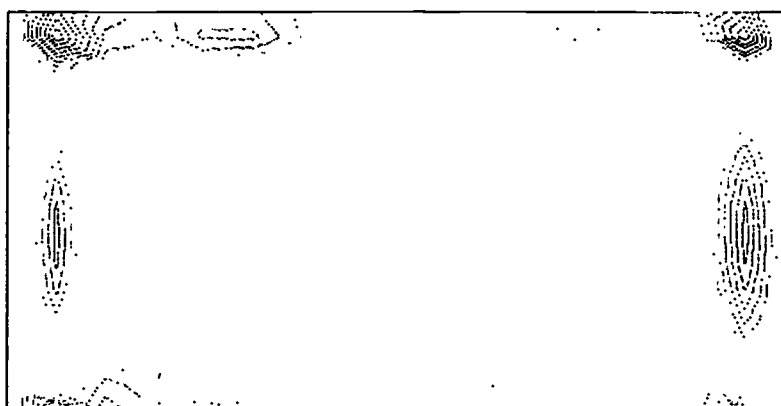
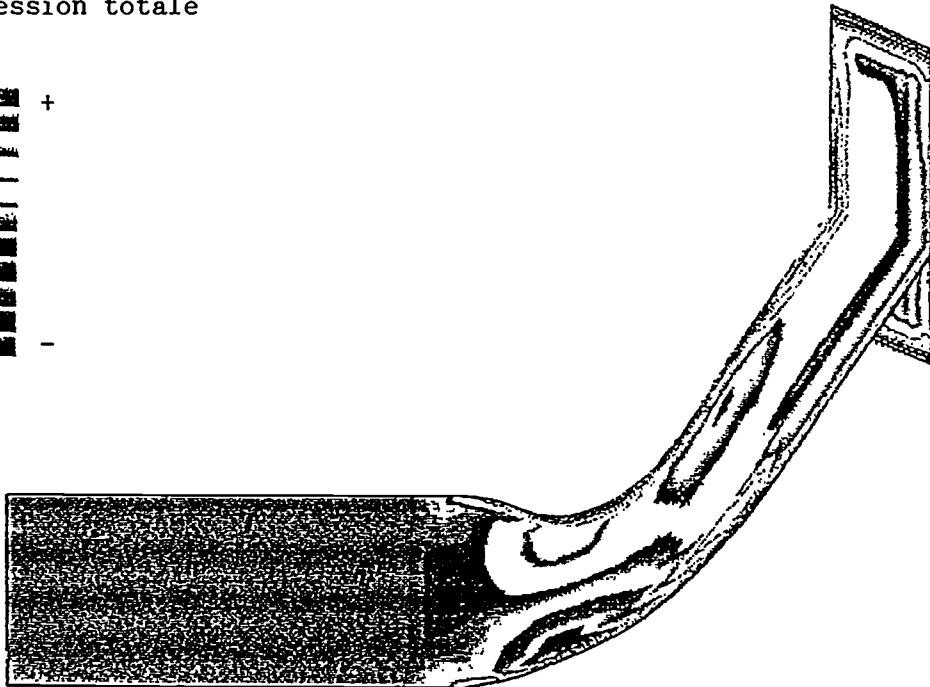
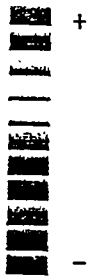


Figure 5.17

Isovaleurs de pression totale
selon une section longitudinale

Pression totale



V.4 CONCLUSION

La souplesse d'emploi de la méthode des éléments des éléments frontières permet de traduire correctement les conditions aux limites particulières qui apparaissent lors des transitions entre les zones d'écoulement périodique et non périodique. La sensibilité de la méthode de résolution L.U aux conditions aux limites est importante et une grande attention doit être portée à ce point.

Des résultats sur la configuration réelle d'écoulement dans le cas de la turbine E.C.L sont présentés.

L'utilisation de l'équation simplifiée de correction de pression semble jouer un rôle stabilisateur sur le calcul sans modifier les résultats qu'il reste à confirmer. Le modèle de turbulence de BULEEV donne des résultats intéressants et atténue les oscillations en aval observées avec le modèle de BALDWIN-LOMAX.

Une comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats numériques est proposée dans la configuration de calcul utilisant le modèle de BULEEV et l'équation complète de correction de pression.

Le débit massique est correctement conservé. Les profils transversaux de vitesse axiale montrent une surestimation des pertes au niveau du bord d'attaque et dans le canal inter-aube. Cet effet est amplifié par le maillage grossier qui accroît artificiellement la couche limite. Ces pertes trop élevées sont convectées et dégradent l'écoulement secondaire. Les structures tourbillonnaires sont illustrées. La pression statique est ainsi trop basse en aval comme nous l'observons sur le profil longitudinale de pression statique.

Ainsi, en utilisant un maillage transversal plus dense et raffiné à la paroi, le code NSQE semble tout à fait à même de reproduire qualitativement et quantitativement l'écoulement interne d'une turbine avec des coûts en temps calcul de l'ordre de quelques minutes sur un CRAY.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

Au début de cette étude, à l'issue du travail de EL MARJANI [1987], le code Navier Stokes tridimensionnel NSP comportait des limitations inhérentes à la parabolisation. L'utilisation de la méthode des éléments frontières pour vérifier la conservation de la masse par le calcul d'une correction de pression était simplifiée.

Ce travail a porté essentiellement sur le développement de la méthode des éléments frontières, l'analyse de son comportement et ses limitations, travail que EL MARJANI n'avait pas eu le temps de réaliser.

La condition de fermeture du domaine de résolution de l'équation de Poisson dans le code NSQE est maintenant vérifiée. L'analyse des conditions aux limites a permis de transformer le code Navier Stokes en code Quasi Elliptique où chaque domaine de calcul de la correction de pression est compatible avec les équations complètes de Navier Stokes.

Rappelons l'essentiel des résultats de la présente étude.

Afin de développer un code de résolution intégral complètement tridimensionnel, la validation et l'analyse du comportement de cette méthode ont été réalisés sur des cas tests analytiques bidimensionnels et tridimensionnels. La grande précision de la méthode des éléments frontières est démontrée, permettant d'envisager l'utilisation d'un maillage propre à la pression moins raffiné que celui de la vitesse. L'existence d'une discontinuité à la paroi du potentiel interne interdit, dans l'état actuel du code, d'utiliser le calcul intégral pour calculer les potentiels

internes au domaine de résolution. La grande sensibilité de la précision du calcul à la qualité de la discrétisation surfacique est confirmée.

Le couplage de la méthode intégrale avec le code Navier Stokes NSQE qui sert de support d'application a été développé. Les limitations du calcul intégral dans le code NSP sont éliminées. Le domaine de résolution est maintenant fermé et le calcul de la correction de pression n'est plus simplifié. Par contre, la tridimensionnalité du calcul, qui induit des tailles de matrices trop importantes, nous a conduit à définir un algorithme de diminution du nombre de points utilisés pour définir le maillage surfacique.

Ce couplage entre le support Navier Stokes et la méthode intégrale est illustré sur la géométrie du coude à 90° pour valider le calcul de vitesse et sur le coude de Stanitz pour valider le calcul de la pression. Les résultats sont très satisfaisants, malgré un maillage peu raffiné, justifiant ainsi l'application de ce calcul à une géométrie réelle de turbomachine.

Des résultats numériques sur le calcul de l'écoulement interne dans la grille d'aube de l'Ecole Centrale de Lyon ont été présentés.

Avec un temps calcul de 3 heures sur un Alliant FX80 en mode monoprocesseur, soit quelques minutes sur un CRAY, le comportement physique de l'écoulement interne d'une turbine est reproduit. Le débit est correct mais une génération de pertes excessives au bord d'attaque, accentuée par la grossièreté du maillage qui accroît artificiellement la taille de la couche limite, induit une pression statique trop faible en aval et une dégradation de l'écoulement secondaire.

Certaines évolutions semblent ainsi nécessaires.

En effet, l'utilisation de maillages plus denses et raffinés à la paroi tout en conservant un coût global de calcul équivalent à celui du cas test de la turbine, que ce soit en taille mémoire ou en temps calcul, est possible en définissant un maillage spécifique à la pression. Remarquons d'ailleurs que le temps calcul du code NSQE évolue linéairement avec le nombre de noeuds du maillage.

Ainsi, cette approche originale d'une méthode de marche fortement elliptique du code Navier-Stokes NSQE fournit des résultats corrects sur des géométries variées comme un coude courbé à 90° à section constante ou non ou un canal inter-aube de turbine avec des coûts en temps calcul réduits.

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

- Figure I.1 : Ecoulements secondaires (VAVRA [1960])
Figure I.2 : Création d'un tourbillon en fer à cheval
(NIEHUIS [1989])

CHAPITRE 1

- Figure 1.1 : Domaine de calcul de pression et de vitesse
Figure 1.2 : Conditions aux limites sur le domaine de calcul
Figure 1.3 : Algorithme de résolution de NSQE

CHAPITRE 2

- Figure 2.1 : Domaine de contrôle de la méthode intégrale
Figure 2.2 : Exemple de maillage surfacique
Figure 2.3 : Position de M par rapport à (Ω)
Figure 2.4 : Numérotation des éléments et des noeuds
Figure 2.5 : Calcul des coefficients de Neuman.
Figure 2.6 : Domaine de calcul de l'équation de Poisson
dans le code NSQE
Figure 2.7 : Domaine de contrôle des méthodes intégrales directe
et indirecte.
Figure 2.8 : Exemple de conditions aux limites

CHAPITRE 3

- Figure 3.1 : Résolution de l'équation de la chaleur sur un disque
avec une source ponctuelle
- Figure 3.2 : Maillage bidimensionnel 11x11 d'un disque
- Figure 3.3 : Résolution d'un laplacien sur une disque.
Comparaison MSI/BEM2D (potentiels internes)
- Figure 3.4 : Calcul potentiel sur un disque
Erreur moyenne sur les dérivées normales
- Figure 3.5 : Résolution de l'équation de Poisson
sur une plaque plane
- Figure 3.6 : Comportement du calcul intégral à la frontière
- Figure 3.7 : Evolution de Δ en fonction de la densité du maillage
- Figure 3.8 : Position de l'axe de calcul par rapport à l'élément
surfaccique en vis-à-vis
- Figure 3.9 : Résolution d'un Laplacien sur un disque
Calcul du potentiel interne
Coefficient T calculé ou imposé
- Figure 3.11 : Résolution de l'équation de Laplace
sur une plaque plane.
- Figure 3.12 : Calcul MSI
Convergence du potentiel au centre
en fonction de la densité de maillage.
- Figure 3.13 : Cas test tridimensionnel : Sphère
- Figure 3.14 : Maillage tridimensionnel 7x11x11 d'une sphère
- Figure 3.15 : Maillage tridimensionnel 7x11x11 d'une sphère
- Figure 3.16 : Evolution de l'erreur sur le potentiel constant
dans une sphère à charge nulle de rayon 2
- Figure 3.17 : Maillage tridimensionnel 11x11x11 d'une sphère
- Figure 3.18 : Maillage tridimensionnel 11x11x11 d'une sphère
- Figure 3.19 : Evolution de l'erreur sur le potentiel interne
d'une sphère selon l'axe Y (Eléments quadratiques)
- Figure 3.20 : Evolution de l'erreur sur le potentiel interne
d'une sphère selon l'axe Y (Eléments linéaires)

- Figure 3.21 : Influence du nombre minimum de points de Gauss
- Figure 3.22 : Evolution de l'erreur sur le potentiel interne
d'une sphère selon l'axe x (Eléments quadratiques)
- Figure 3.23 : Evolution de l'erreur sur le potentiel interne
d'une sphère selon l'axe diagonal X=Z
(Eléments quadratiques)
- Figure 3.24 : Evolution de l'erreur sur le potentiel interne
d'une sphère selon l'axe X - Calcul FEM et BEM

CHAPITRE 4

- Figure 4.1.a : Géométrie du coude à 90 degrés
Sections de mesure
- Figure 4.1.b : Maillages front de grille du coude à 90° et de la
turbine ECL
- Figure 4.2 : Influence de la relaxation sur la convergence de ϵ_q
- Figure 4.3 : Influence de la relaxation sur la convergence de ϵ_p
- Figure 4.4 : Influence de la relaxation sur Cp
- Figure 4.5 : Influence de la relaxation sur Cv(9,9)
- Figure 4.6 : Influence de la relaxation sur Cv(5,5)
- Figure 4.7 : Influence de la relaxation sur Cp(17,5)
- Figure 4.8 : Influence de la relaxation sur Cp(5,5)
- Figure 4.9 : Positions étudiées dans le plan (η, γ)
- Figure 4.10 : Domaine de calcul à 3 plans
- Figure 4.11 : Influence du déraffinement sur la convergence de ϵ_p
- Figure 4.12 : Résolutions en modes extrait et complet : Cp
- Figure 4.13 : Résolutions en modes extrait et complet : Cv(9,9)
- Figure 4.14 : Résolutions en modes extrait et complet : Cv(5,5)
- Figure 4.15 : Résolutions en modes extrait et complet : Cp(17,5)
- Figure 4.16 : Résolutions en modes extrait et complet : Cp(5,5)
- Figure 4.17 : Influence du rapport $\Delta\xi/\Delta\eta$
- Figure 4.18 : Définitions des termes $\Delta\gamma$, $\Delta\eta$ et $\Delta\xi$
- Figure 4.19 : Critère d'utilisation du calcul extrait
Maillage du coude à 90°

Figure 4.20 : Calcul du rapport $\Delta\xi/\Delta\eta$ dans le coude à 90°

Figure 4.21 : Influence du déraffinement sur la taille mémoire

Figure 4.22 : Procédure de déraffinement d'un maillage initial 9x9

Figure 4.23 : Influence du déraffinement : Cv(9,9)

Figure 4.24 : Influence du déraffinement : Cp

Figure 4.25 : Influence du déraffinement : Cv(5,5)

Figure 4.26 : Influence du déraffinement : Cp(17,5)

Figure 4.27 : Influence du déraffinement : Cp(5,5)

Figure 4.28 : Caractéristiques des différents calculs

Figure 4.29 : Maillage du coude à 90° et sections de mesure

Figure 4.30 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante longitudinale U à la section "30°"

Figure 4.31 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante longitudinale U à la section "60°"

Figure 4.32 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante longitudinale U à la section "77.5°"

Figure 4.33 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante longitudinale U à la section "90°"

Figure 4.34 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante transversale U à la section "30°"

Figure 4.35 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante transversale U à la section "60°"

Figure 4.36 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante transversale U à la section "77.5°"

Figure 4.37 : Comparaison entre les mesures et le calcul
Composante transversale V à la section "90°"

Figure 4.38 : Géométrie du coude de Stanitz

Figure 4.39 : Influence de la courbure sur la vortacité

Figure 4.40 : Influence de la variation de section
sur la vortacité

Figure 4.41 : Visualisation de la formation d'un tourbillon de passage

Figure 4.42 : Champ de vitesse transversal calculé

Figure 4.43 : Iso pression d'arrêt dans un plan transversal

Figure 4.44 : Evolution longitudinale de la pression statique
 Figure 4.45 : Pression statique sur la face intrados
 Figure 4.46 : Pression statique sur la face extrados
 Figure 4.47 : Maillage 7x7x51 du canal en "S"
 Figure 4.48 : Influence des conditions aux limites
 sur le comportement du code NSQE

CHAPITRE 5

Figure 5.1 : Géométrie de la grille d'aube ECL
 Figure 5.2 : Positions des stations de mesure
 Figure 5.3 : Traitement du bord d'attaque dans la méthode
 des éléments frontières
 Figure 5.4 : Définition des variables surfaciques
 Figure 5.5.a : Influence des conditions aux limites
 sur la résolution LU - Conditions CL1
 Figure 5.5.b : Influence des conditions aux limites
 sur la résolution LU - Conditions CL2
 Figure 5.6 : Maillage 17x71x38 de la turbine ECL
 Figure 5.7 : Distribution de pression sur l'aubage
 Calcul avec le modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX
 Figure 5.8 : Distribution de pression sur l'aubage
 Calcul avec le modèle de turbulence de BULEEV
 Figure 5.9 : Distribution de pression sur l'aubage
 Calcul avec l'équation de correction de pression
 simplifiée
 Figure 5.10 : Isovaleurs de pression statique à mi-envergure
 Figure 5.11 : Profils de vitesse longitudinale V_x - Fentes 2,4,6
 Figure 5.12 : Profils de vitesse longitudinale V_x - Fentes 8,9,11
 Figure 5.13 : Isovaleurs de vitesse transversale V_y - Fente 4
 Figure 5.14 : Isovaleurs de vitesse transversale V_y - Fente 8
 Figure 5.15 : Isovaleurs de vitesse transversale V_y - Fente 10
 Figure 5.16 : Isovaleurs de vitesse transversale V_y - Fente 12
 Figure 5.17 : Isovaleurs de pression totale à mi-envergure

ANNEXE 1

Figure A1.1 : Coordonnées cartésiennes et locales

ANNEXE 3

Figure A3.1 : Élément surfacique quadratique à 9 noeuds

Figure A3.2 : Découpage en triangles de l'élément quadratique selon la position de la singularité.

Figure A3.3 : Changements de repères dans le découpage en triangles d'un élément quadratique

Figure A3.4 : Distances caractéristiques dans la définition d'un critère de qualité d'intégration

ANNEXE 4

Figure A4.1 : Domaines de calcul des méthodes directe et indirecte

ANNEXE 5

Figure A5.1 : Géométrie et positions des points d'impact

Figure A5.2 : Conditions aux limites

Figure A5.3 : Coordonnées locales d'un élément constant

Figure A5.4 : Influence de la position des points d'impact sur la dérivée normale

ANNEXE 6

Figure A6.1 : Domaine de calcul de la méthode de Monte-Carlo

BIBLIOGRAPHIE

ALKALAI K.

Etude théorique d'écoulements bidimensionnels et tridimensionnels potentiels avec termes sources rotationnels. Application aux turbomachines

Thèse de doctorat - Lyon I - Décembre 1983

BALDWIN R.S., LOMAX H.

Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows

AIAA paper N°78-257 (1978)

BENBOUTA N., FERRAND P., LEBOEUF F.

Convergence acceleration for linear systems iterative resolution and applications to computational fluids dynamics.

High Performance Computing - DELHAYE J.L. and GELENBE E. Editors - Elsevier Science Publishers B.V (North Holland), 1989

BENMASOUR N., OUAZAR D., BREBBIA C.A.

Boundary element approach to one-dimensionnal wave equation. Computers methods & water ressources 1988.

BENOCCI C.

An explicit finite differences solver for the incompressible Reynolds averaged Navier Stokes equations for the Alliant DSP 9000 computer.

Technical memorandum 45 - Von Karman Institute - July 1988

BENOCCI C., MICHELASSI V.

The influence of the wall boundary condition on a solution of the incompressible Navier Stokes equations.

Technical Memorandum 42 - Von Karman Institute - August 1986

BESKOS D.E.

Potential theory
in "Boundary element methods in mechanics"
Edited by D.E.BESKOS - Elsevier Science Publishers B.V 1987

BREBBIA C.A., BUTTERFIELD R.

Formal equivalence of direct and indirect boundary element
methods.
Appl. Math. Modelling, 1978, Vol. 2, June

BREBBIA C.A., DOMINGUEZ J.

Boundary elements : An introductory course
Computational Mechanics Publications - McGraw-Hill book Company
1989

BREBBIA C.A., TANG W.

On the treatment of body forces integrals in boundary
elements
Computer Methods & Water Resources 1988 - Marocco - Springer
Verlag

BREBBIA C.A., WALKER S.

Introduction to boundary element method
Recent Advances in Boundary Element Methods - C.A.BREBBIA -
Pentech Press 1979

CAMBIER L., ESCANDE B.

Calcul de l'écoulement tridimensionnel turbulent dans un
aubage rectiligne de turbine.
AGARD-CP-469, Luxembourg, Septembre 1989

DAVIS R.L, CARTER J.E

Counterrotating streamline pattern in a transitional separation bubble.

AIAA, J. Vol 24 N°5, PP.850-851, Mai 1986

DELERE J., MARVIN J.G.

Shock wave boundary layer interactions
Agardograph AG-280 (1986)

DAUTRAY R., LIONS J.L.

Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques - Tome 1.

Série scientifique - Collection du CEA - MASSON 1984

DAWES W.N.

A pre-processed implicit algorithm for 3D viscous compressible flow

6th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Gottingen, Septembre 1985

DAWES W.N.

Application of full Navier-Stokes solvers to turbomachinery flow problems.

VKI Lecture Series 2: Numerical techniques for viscous flow calculations in turbomachinery bladings, January, 20-24, 1986

DOMINY R.G., HARDING S.C.

An investigation of secondary flows in nozzle guide vanes
AGARD Conference Proceedings N°469 - Luxembourg - 1989

EL GHAZANI

Calcul de l'écoulement dans une turbomachine à l'aide des variables de CLEBSCH et par une méthode d'éléments finis.

Thèse de doctorat - LYON I - 1990

FRANSSON T., PANDOLFI M.

Numerical investigation of unsteady subsonic compressible
flows through an oscillating cascade
ASME paper 86-GT-304, 1986

GALLUS H.E., WESKAMP K., ZESCHKY J.

Computational prediction and measurements of the flow in
axial turbine cascades and stages.
AGARD-CP-469, Luxembourg, Septembre 1989

GEROLYMOS G.

Implicit Euler computations of unsteady flow in vibrating
cascades
A paraître, 1990

GILES M.

Calculation of unsteady wake/rotor interaction
Journal of propulsion, Vol. 4, N°4, Juillet-Août 1988

GIPSON G.S.

Boundary element fundamentals - Basic Concepts and recent
developpements in the Poisson equation.
Topics in engineering - Volume 2 - BREBBIA & CONNOR Editors -
Computational Mechanics Publications 1987

GRILLI S.T.

Application of the boundary element method to solve elliptic
fluid mechanics problems
Computer Methods & Water Resources 1988 - Marocco - Springer
Verlag

GRUNDMANN R.

Solution method of parabolized Navier-Stokes equations.
Lecture Series 1986-02, Von Karman Institute

GUERMOND J.L.

A systematic formula for the asymptotic expansion of singular integrals
Journal of applied mathematics and physics - Vol. 38, Septembre 1987

HAH C.

Generation and decay of secondary flows and their impact on aerodynamic performance of modern turbomachinery components.
AGARD-CP-469, Luxembourg, Septembre 1989

HIRSCH C.

Numerical computation of internal and external flows.
Volume 1: Fundamentals of numerical discretization
John Wiley & Sons editors -1988

HIRSCH C.

Numerical computation of internal and external flows.
Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows
John Wiley & Sons editors -1988

HORTON G.C.

Secondary flow predictions for a transonic nozzle guide vane
AGARD Conference Proceedings N°469 - Luxembourg - 1989

HUFF D., REDDY T.

Numerical analysis of supersonic flow through oscillating cascade sections by using a deforming grid
AIAA paper N°89-2805, 1989

KULISA-BELLOIR P.

Etude théorique des écoulements visqueux en présence d'injections pariétales en vue du refroidissement des turbines.

Thèse de doctorat - LYON I - Avril 1989

LARREY E., PARKINSON E., FERRAND P., LEBOEUF F.

Analyse de l'erreur de quadrature dans la méthode des éléments frontières.

22^{ème} Congrès national d'analyse numérique, SMAI, Loctuly 1990

LEBOEUF F.

Ecoulements tridimensionnels visqueux en turbomachines

Cours de DEA 1990-1991 - ECL & EPFL

LEBOEUF F., KULISA-BELLOIR P., EL MARJANI A.

Viscous computations in turbomachines based on the use of integral equations

5th International Conference on numerical methods in laminar and turbulent flows, Montreal, July 1987, Pineridge Press (Ed. TAYLOR, HABASHI, HAFEZ)

LIGGETT A.

Fluid Mechanics

in "Boundary element methods in mechanics"

Edited by D.E.BESKOS, Elsevier Science Publishers B.V 1987

EL MARJANI A.

Contributions expérimentale et théorique à l'étude des écoulements tridimensionnels visqueux dans les turbomachines.

Thèse de doctorat - LYON I - Septembre 1987

NI R.

A multiple-grid scheme for solving the Euler equations

AIAA Journal - Volume 20, N°11, Novembre 1982

NIEHUIS R., LUCKING P., STUBERT N.

Experimental and numerical study on basic phenomena of
secondary flows in turbines

AGARD Conference Proceedings N°469 - Luxembourg - 1989

ONVANI A.

Etude expérimentale des écoulements secondaires en grille
d'aubes de turbine en absence et en présence d'injections discrètes
à la paroi.

Thèse de doctorat - LYON I - Septembre 1983

OUAZAR D.

Applications of the method of fundamental solutions in water
resources

Computer methods & Water Resources 1988

PARKINSON E., POMMEL F., EL MARJANI A., FERRAND P., LEBOEUF F.

A quasi elliptical numerical resolution of the parabolic
Navier stokes equations in turbomachines, with the boundary
element method.

6th International Conference on numerical methods in laminar and
turbulent flows - Swansea - July 1989 - Pineridge Press (Ed.
TAYLOR, HABASHI, HAFEZ)

PATANKAR S.V.

Numerical heat transfer and fluid flow
Hemisphere publishing corporation, Mc Graw Hill

POMMEL F.

Développement d'une méthode de résolution quasi elliptique
des équations de Navier Stokes tridimensionnelles appliquée aux
turbomachines.

Thèse de doctorat - LYON I - Septembre 1990

PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEULKOLSKY S.A., VETTERLING W.T.

Numerical Recipes in C

Cambridge University Press 1988

PULLIAM T.H., STEGER J.L

Implicit finite difference simulation of three dimensional compressible flows

AIAA, J. Vol 18 N°2, 1980

RAI M., MADAVAN N.

Multi-airfoil Navier Stokes. Simulations of turbine rotor interaction

AIAA paper N°88-0361, 1988

RUBIN S.G.

A review of marching procedures for parabolized Navier Stokes equations

Numerical and physical aspects of aerodynamic flows - Springer Verlag, 1982

RUDY D.H., STRICKWERDA J.C.

A non-reflecting outflow boundary condition for subsonic Navier Stokes calculations

Journal of Computational Physics, 36, 55-70, 1980

SCHWAB C.H., WENDLAND W.L.

3D BEM Numerical Integration

in "Boundary Elements in Engineering VIII" - C.A. Brebbia and Meier G. Editors - Springer 1985

SIDEN L.

Unsteady Navier Stokes Solver for the simulation of
compressor flutter in turbomachines

Department of turbomachinery, Chalmers University of technology,
Göteborg, Suède 1990

SKERGET P., ALUJEVIC A., BREBBIA C.A.

Analysis of laminar fluid flows by boundary elements.
in "Numerical methods in laminar and turbulet flow" - Taylor
Editor - Pineridge press - 1985

SKERGET P., ALUJEVIC A., BREBBIA C.A.

Non linear fluid problems by boundary elements
in "Numerical methods for non-linear problems" - Taylor, Owen,
Hinton and Damjanic Editors - Pineridge press - Dubrovnik 1986.

SKERGET P., ALUJEVIC A., ZAGAR I., KUHN G. [a]

Time dependent recirculation flow by the boundary element
method

ZAMM - Z. angew. Math. Mech. 69 (1989) 4

SKERGET P., ALUJEVIC A., ZAGAR I., REK Z., KUHN G., BREBBIA C.A.
[d]

Boundary element method for laminar and turbulent flow of
incompressible viscous fluid

SKERGET P., KUHN G., ALUJEVIC A.

Analysis of mixed-convection flow problems by BEM
ZAMM - Z. angew. Math. Mech. 68 (1988) 5

SKERGET P., KUHN G., ALUJEVIC A., BREBBIA C.A. [b]

Time dependent transport problems by BEM
Adv. Water Resources, 1989, Volume 12, Mars

SKERGET P., ZAGAR I., ALUJEVIC A. [c]

Combined forced and free laminar convection in the inclined tube by BEM

SIDI A., FORD R.F, SMITH D.A.

Acceleration of convergence of vector sequences
SIAM J. Num. Anal. Vol 23 N°1, february 1986

STANITZ J.

Design of two-dimensionnal channels with prescribed velocity distribution along the channel walls. NACA TN 2593. 1952

STANITZ J., OSBORN W., MIZISIW J.

An experimental investigation of secondary flow in an accelerating rectangular elbow with 90° of turning.
NACA TN 3015. 1953

STROUD A.H., SECREST D.

Gaussian quadrature formula
Prentice Hall, 1966

TAYLOR A.M.K.P., WHITELAW J.H., YIANNESKIS

Measurements of laminar and turbulent flows in a curved duct with thin inlet bounadry layers.
NASA contractor Report 3367, 1981

TAYLOR A.M.K.P., WHITELAW J.H., YIANNESKIS

Developing flow in S shaped ducts - I. Square section duct
NASA contractor Report 3550, 1982

VALLAT B.

Calcul d'écoulements internes en turbomachines à l'aide d'une version parabolisée des équations de Navier Stokes
Thèse de docteur ingénieur - LYON I - Juillet 1985

VAVRA M.H.

Aero-thermodynamics and flows in turbomachines
J.Wiley and Sons - 1960

WARFIELD M.J.

A zonal equation method for three dimensional locally elliptic laminar and turbulent flows.

PhD thesis - Pennsylvania State University - December 1987

WARFIELD M.J., LAKSHMINARAYANA B.

Calculation of a three-dimensionnal locally elliptic flow with a zonal equation method.

AIAA-87-1141-CP, Proceedings of the 8th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, Hawaii, June 1987

WARMING R.F, BEAM R.M

On the construction and application of implicit factored schemes for conservation laws

SIAM - AMS Proceeding, Vol 11, 1978

WEARING J.L., PATTERSON C., SHEIKH M.A.

An indirect discrete boundary method for fluid flows.

5th International Conference on numerical methods in laminar and turbulent flows, Montreal, July 1987, Pineridge Press (Ed. TAYLOR, HABASHI, HAFEZ)

WEGENER D., QUEST J., HOFFMAN W.

Secondary flow in a turbine guide vane with low aspect ratio

AGARD Conference Proceedings N°469 - Luxembourg - 1989

WENDLAND W.L.

On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems.

in "Mathematics of finite elements and applications" - J. Whitenau Ed. - Academic Press 1985

YANG R., LIN S., RAI M.

Unsteady aerodynamics of rotor stator interaction in a turbine stage

AIAA Paper N°88-0360, 1988

ANNEXE 1

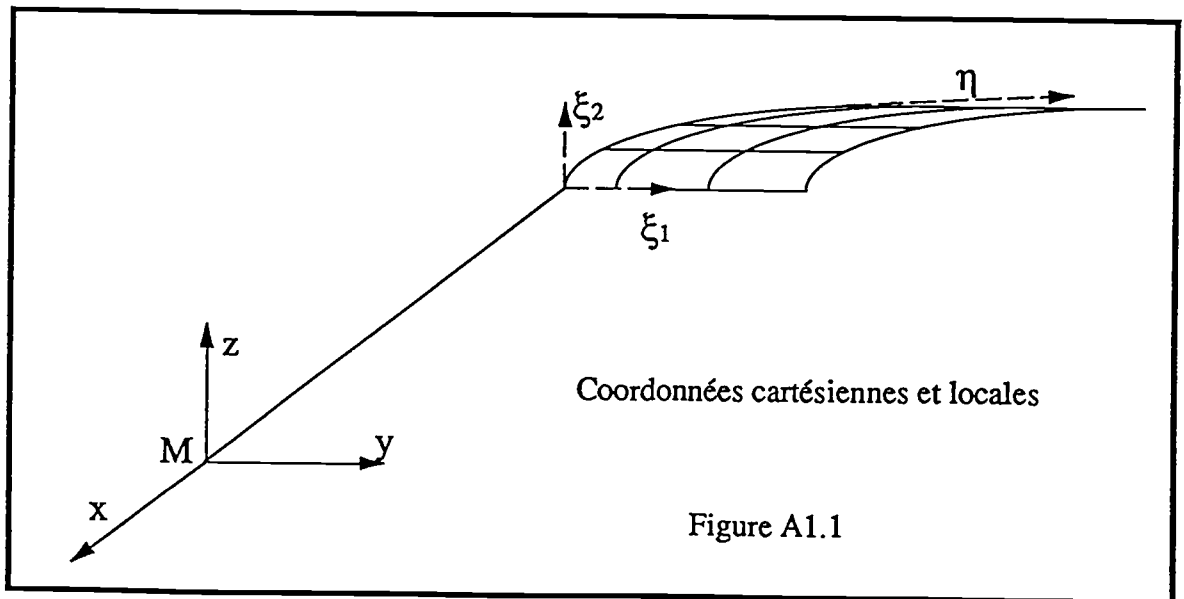
CHANGEMENTS DE REPERES

Il est nécessaire de définir le passage du système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées locales de l'élément surfacique (ζ_1, ζ_2, η) (figure A1.1). Le passage d'un repère à l'autre du gradient d'une fonction u se fait par la matrice Jacobienne définie comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_{\zeta_1} \\ u_{\zeta_2} \\ u_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\zeta_1} & y_{\zeta_1} & z_{\zeta_1} \\ x_{\zeta_2} & y_{\zeta_2} & z_{\zeta_2} \\ x_{\eta} & y_{\eta} & z_{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \text{en notant } u_x = \partial u / \partial x.$$

Cette relation s'écrit aussi :

$$\begin{bmatrix} u_{\zeta_1} \\ u_{\zeta_2} \\ u_{\eta} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$



En appliquant ces dernières relations au vecteur position $\vec{r}(x,y,z)$, le jacobien peut s'écrire sous la forme suivante, en calculant ce déterminant par une décomposition de la troisième ligne :

$$\det(J) = x_\eta \cdot \begin{vmatrix} y_{\zeta_1} & z_{\zeta_1} \\ y_{\zeta_2} & z_{\zeta_2} \end{vmatrix} - y_\eta \cdot \begin{vmatrix} x_{\zeta_1} & z_{\zeta_1} \\ x_{\zeta_2} & z_{\zeta_2} \end{vmatrix} + z_\eta \cdot \begin{vmatrix} x_{\zeta_1} & y_{\zeta_1} \\ x_{\zeta_2} & y_{\zeta_2} \end{vmatrix}$$

$$\det(J) = \begin{bmatrix} x_\eta \\ y_\eta \\ z_\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{\zeta_1} \cdot z_{\zeta_2} - z_{\zeta_1} \cdot y_{\zeta_2} \\ - (x_{\zeta_1} \cdot z_{\zeta_2} - z_{\zeta_1} \cdot x_{\zeta_2}) \\ x_{\zeta_1} \cdot y_{\zeta_2} - x_{\zeta_2} \cdot y_{\zeta_1} \end{bmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_i} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial y}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial z}{\partial \zeta_i} \right)$$

Nous obtenons également l'égalité des différentielles de volume :

$$d\Omega = dx \cdot dy \cdot dz = | \det(J) | \cdot d\zeta_1 \cdot d\zeta_2 \cdot d\eta$$

et la différentielle de surface s'écrit :

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} \right| \cdot d\zeta_1 \cdot d\zeta_2.$$

Le vecteur normal (non normé) à l'élément est:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} = \vec{n}$$

$$\text{Ainsi } \vec{n} = \begin{bmatrix} y_{\zeta_1} \cdot z_{\zeta_2} - z_{\zeta_1} \cdot y_{\zeta_2} \\ - (x_{\zeta_1} \cdot z_{\zeta_2} - z_{\zeta_1} \cdot x_{\zeta_2}) \\ x_{\zeta_1} \cdot y_{\zeta_2} - x_{\zeta_2} \cdot y_{\zeta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

La norme de $\vec{n}$ est : $|\vec{n}| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2}$

Ainsi, les intégrales surfaciques s'écrivent :

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma)} f \, d\sigma &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta_2} \right| d\zeta_1 \cdot d\zeta_2 \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f |\vec{n}| d\zeta_1 \cdot d\zeta_2 \end{aligned}$$

ANNEXE 2

EQUATION DE CORRECTION DE PRESSION

On considère un écoulement en rotation à vitesse constante pour un fluide visqueux incompressible. L'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{1}{Re} \nu \vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega} + \frac{4}{3} \nu \vec{\nabla} \theta \end{aligned} \quad (A2.1)$$

avec $\theta = \nabla \cdot \vec{V}$, $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ et $\vec{\omega}$ constant.

Soit la divergence de l'équation (A2.1) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nu \vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega} - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \nu \vec{\nabla} \theta \right\} = 0 \end{aligned} \quad (A2.2)$$

Dans la suite, la divergence de chacun des termes est calculée.

A2.1 TERMES DE ROTATION

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right\} &= \\ &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \wedge (2\vec{\omega}) - 2\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ &= - 2 \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \text{ car } \nabla \vec{\omega} = 0 \\ &= - 2 \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} - 2 \vec{\omega}^2 \end{aligned}$$

$$d'où - 2 \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} - 2 \vec{\omega}^2 = \nabla \cdot \left\{ 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right\} \quad (A2.3)$$

A2.2 TERMES VISQUEUX

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{Re} \nu \vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega} - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \nu \vec{\nabla} \theta \right\} &= \frac{1}{Re} \nu \nabla \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega}) - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \nu \nabla \cdot \vec{\nabla} \theta \\ &= - \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \nu \nabla^2 \theta \quad (A2.4) \end{aligned}$$

A2.3 TERMES CONVECTIFS

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}$$

en sommant sur les indices répétés.

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \theta \quad (A2.6) \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ peut être décomposé de manière à faire apparaître

la fonction de dissipation φ , invariante par changement de repère.

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\
&= (\nabla \vec{v}) : (\nabla \vec{v})^t
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est décomposé en deux parties symétrique et antisymétrique respectivement selon

$$(\nabla \vec{v}) : (\nabla \vec{v})^t = \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} - \bar{\bar{\Omega}} : \bar{\bar{\Omega}}$$

$$\text{avec } D_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \text{ et } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\}.$$

En soustrayant les deux termes $\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}}$ et $\bar{\bar{\Omega}} : \bar{\bar{\Omega}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} - \bar{\bar{\Omega}} : \bar{\bar{\Omega}} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{4} \left\{ 4 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\} = (\nabla \vec{v}) : (\nabla \vec{v})^t
\end{aligned}$$

Le terme $\bar{\bar{\Omega}} : \bar{\bar{\Omega}}$ peut s'écrire comme $\bar{\bar{\Omega}} : \bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} \vec{\bar{\Omega}} \cdot \vec{\bar{\Omega}}$. De même, nous introduisons la fonction de dissipation φ telle que

$$2 \varphi = \theta^2 - \vec{D} : \vec{D}$$

La divergence des termes convectifs peut alors être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) : (\nabla \vec{v})^t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \theta \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial t} - 2 \varphi + \theta^2 - \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \theta \end{aligned}$$

En remarquant que $\theta^2 + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \theta = \vec{\nabla}(\theta \vec{v})$, il vient

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla}(\theta \vec{v}) - 2 \varphi - \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$$

A2.4 TERME DE PRESSION

La divergence s'écrit directement pour un fluide incompressible

$$\nabla \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right\} = \frac{1}{\rho} \nabla^2 p \quad (A2.8)$$

A2.5 FORMULATION INCOMPRESSIBLE DE L'EQUATION DE PRESSION

La divergence de l'équation de quantité de mouvement s'écrit, en regroupant ses différents termes :

$$-2 (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} + \vec{\omega}^2) + \frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{\nabla}(\theta \vec{v}) - 2 \varphi - \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla^2 \theta = 0$$

Isolons le laplacien de pression :

$$\nabla^2 p = 2\rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} + \vec{\omega}^2) - \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho \vec{\nabla}(\theta \vec{v}) + 2 \rho \varphi + \frac{1}{2} \rho \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \rho \nu \nabla^2 \theta$$

On définit alors la correction de pression δp en isolant les termes fonctions de la divergence de vitesse :

$$\nabla^2 \delta p = + \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho \vec{\nabla}(\theta \vec{V}) - \frac{4}{3} \rho \nu \frac{1}{Re} \nabla^2 \theta = - \rho f(\theta) \quad (A2.9)$$

Notons la nature linéaire de l'opérateur $f(\theta)$ qui permet, en résolvant $\nabla^2 \delta p = -\rho f(\theta)$, d'éliminer la contribution de la divergence de vitesse en annulant celle de $f(\theta)$.

Ainsi, la pression corrigée $p + \delta p$ vérifiera-t-elle l'équation de continuité avec

$$\nabla^2 (p + \delta p) = 2\rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} + \vec{\omega}^2) + 2\rho \varphi + \frac{1}{2} \rho \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \quad (A2.10)$$

ou encore, sous forme compacte,

$$\frac{1}{2\rho} \nabla^2 (p + \delta p) = \left\{ \frac{1}{2} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} + \varphi \quad (A2.11)$$

Le terme $f(\theta)$ est ainsi éliminé de l'équation pour la pression et les deux champs de vitesse et de pression ($p + \delta p$) et ($\vec{V}$) deviennent compatibles au sens de la conservation de la masse.

A2.6 FORMULATION COMPRESSIBLE DE L'EQUATION DE PRESSION

Dans une configuration compressible, la divergence θ et le rotationnel $\vec{\Omega}$ sont redéfinis comme

$$\theta = \nabla \cdot \rho \vec{V} \quad \Omega = \vec{\nabla} \wedge \rho \vec{V}. \quad (A2.12)$$

L'équation de pression complète est établie de manière identique au calcul incompressible. Le calcul de la divergence du terme convectif est cependant présenté ci-dessous. Une formulation identique à l'expression incompressible est recherchée en introduisant la masse volumique ρ dans les variables utilisées ci-dessus.

Le terme convectif s'écrit comme

(A2.13)

$$\nabla \left\{ (\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} = \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Les 2 membres de l'équation (A2.13) sont décomposés ci-dessous.

$$\begin{aligned} \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\} &= \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right\} \\ &= (\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \left\{ \frac{\theta}{\rho} \right\} - (\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} \\ (A2.14) \quad &= \frac{1}{\rho} \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta - \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \theta - (\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} \end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'équation (A2.13) se décompose selon

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right\} \\ (A2.15) \quad &= \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \rho \vec{V}) : (\nabla \cdot \rho \vec{V})^t - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

or

$$(\nabla \cdot \rho \vec{V}) : (\nabla \cdot \rho \vec{V})^t = \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}} - \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \quad (A2.16)$$

avec

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \right\} \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \right\} \end{aligned}$$

$$2 \rho^2 \varphi = \theta^2 - \bar{\bar{D}} : \bar{\bar{D}}$$

Ce deuxième terme de l'équation (A2.13) devient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \vec{v}) : (\nabla \rho \vec{v})^t - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \\
 (A2.17) \qquad &= -2 \rho \varphi + \frac{1}{\rho} \theta^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

Regroupons les 2 termes de l'équation (A2.13).

$$\begin{aligned}
 \nabla \left\{ (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \right\} &= \frac{1}{\rho} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \theta - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \theta - (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \right\} \\
 &\quad - 2 \rho \varphi + \frac{1}{\rho} \theta^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} \\
 (A2.18) \qquad &= \frac{1}{\rho} \nabla (\rho \theta \vec{v}) - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \theta \\
 &\quad - (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \right\} - 2 \rho \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

En calculant les divergences des autres termes de l'équation de quantité de mouvement et en isolant les termes où la fonction θ intervient, l'équation de correction de pression compressible s'écrit

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 p &= 2 (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} + \rho \vec{\omega}^2) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{v} \rho - \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v} \rho) \\
 (A2.19) \qquad &+ (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \right\} + 2 \rho \varphi + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} + f(\theta)
 \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{f(\theta) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla^2 \theta + \frac{1}{\rho} \left\{ \vec{v} \cdot \vec{v} \rho \right\} \theta - \frac{1}{\rho} \nabla \left\{ \rho \vec{v} \theta \right\}} \quad (A2.20)$$

Nous retrouvons ainsi une formulation de $f(\theta)$ proche de l'expression incompressible avec une nouvelle définition de la divergence θ . L'équation (A2.19) peut encore s'écrire, sous forme compacte

$$\nabla^2 p = 2\rho \left\{ \frac{1}{2\rho} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2\rho} \vec{\Omega} + \vec{\omega} \right\} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \rho$$

(A2.21)

$$- \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}} \nu \nabla(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho) + (\rho \vec{v} \cdot \nabla) \left\{ \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho \right\} + 2 \rho \varphi + \frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_i} + f(\theta)$$

ANNEXE 3

CALCUL DES INTEGRALES D'INFLUENCES

$$h_{n,k}^M = - \int_{(\sigma_n)} \Phi_k \cdot q^* d\sigma_n \quad g_{n,k}^M = \int_{(\sigma_n)} \Phi_k \cdot u^* d\sigma_n$$

$$\text{Application tridimensionnelle } u^* = - \frac{1}{4 \pi r}$$

L'objet de cette annexe est le calcul des intégrales d'influences par la méthode de Gauss. Rappelons l'importance de ces calculs qui conditionnent la qualité des résultats. De nombreux travaux portent d'ailleurs sur les différentes techniques possibles selon le domaine d'application (GUERMOND [1987], SCHWAB [1985], WENDLAND [1985]).

A3.1 Calcul des valeurs caractéristiques

Soit le point d'impact M de coordonnées (X_M, Y_M, Z_M) dans un repère (O, x, y, z) . Soit également l'élément surfacique σ_n à NK noeuds de coordonnées $(X_{n,k}, Y_{n,k}, Z_{n,k})$ où k varie de 1 à NK, et NK fonctions d'interpolations Φ_k associées à cet élément n.

L'annexe 1 montre qu'une intégrale de la forme $\int_{(\sigma_n)} \Phi_k \cdot f d\sigma_n$ devient $\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi_k \cdot f |\vec{n}| d\xi_1 d\xi_2$ dans le repère surfacique (ξ_1, ξ_2) de l'élément.

$\vec{n}$ est le vecteur normal à l'élément tel que $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2}$.

Une quantité QP est interpolée dans l'élément surfacique en fonction de ses valeurs nodales QP_k et les fonctions d'interpolation Φ_k . On écrit :

$$QP = \sum_k QP_k \Phi_k(\xi_1, \xi_2) \quad (A3.1)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{NI} \Phi_k(\xi_1, \xi_2) = 1$$

Le vecteur $\vec{r}$ entre le point d'impact M et un point source quelconque d'interpolation $Q(\xi_1, \xi_2)$ est donc de coordonnées $(XQ - X_M, YQ - Y_M, ZQ - Z_M)$ dans le repère (O, x, y, z) .

Ainsi la composante de $\vec{r}$ selon l'axe (O, X) s'écrit par exemple :

$$r_X = \sum_{k=1}^{NI} \left\{ \Phi_k \cdot XQ_k - X_M \right\} (\xi_1, \xi_2)$$

La normale $\vec{n}$ s'écrit alors :

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} = \left\{ \begin{array}{c} X_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_1} \\ Y_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_1} \\ Z_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_1} \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{c} X_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_2} \\ Y_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_2} \\ Z_{n,k} \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_2} \end{array} \right\} (\xi_1, \xi_2) \quad (A3.2)$$

Ainsi, en appliquant la quadrature de Gauss à l'intégrale de $\Phi_k \cdot f$ sur (σ_n) , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi_k \cdot f \cdot |\vec{n}| \, d\xi_1 d\xi_2 \\ & = \sum_{i=1}^{NG1} \sum_{j=1}^{NG2} \left\{ \Phi_k \cdot f \cdot |\vec{n}| \right\}_{(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})} \omega_i \cdot \chi_j \end{aligned} \quad (A3.3)$$

où NG1 et NG2 sont les nombres de points de Gauss utilisés selon les directions ξ_1 et ξ_2 respectivement. Les coefficients de Gauss correspondant sont $\left\{ \omega_i \right\}_{i \in [1, NG1]}$ et $\left\{ \chi_j \right\}_{j \in [1, NG2]}$.

A3.2 Calcul des coefficients d'influence

La fonction de Green dans un espace tridimensionnel est $u^* = -\frac{1}{4\pi r}$ et la dérivée normale associée $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$.

Pour calculer les coefficients d'influence $g_{n,k}^M$ et $h_{n,k}^M$, il convient de distinguer 2 situations selon la position de M par rapport à la surface (σ_n) . En effet, si M appartient à cet élément, un traitement particulier doit être appliqué pour calculer l'intégrale puisque r est voisin de zéro.

A3.2.1 Calcul non singulier : $M \notin (\sigma_n)$

Les coefficients d'influence s'écrivent alors :

$$4\pi g_{n,k}^M = - \int_{\sigma_n} \Phi_k \frac{1}{r} \, d\sigma_n = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi_k \frac{1}{r} |\vec{n}| \, d\xi_1 d\xi_2 \quad (A3.4)$$

et

$$\begin{aligned}
4\pi h_{n,k}^M &= \int_{\sigma_n} \phi_k \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma_n = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_k \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} |\vec{n}| d\xi_1 d\xi_2 \\
&= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_k \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} d\xi_1 d\xi_2 \quad (A3.5)
\end{aligned}$$

Avec la quadrature de Gauss, ces intégrales deviennent :

$$4\pi g_{n,k}^M = - \sum_{i=1}^{NG1} \sum_{j=1}^{NG2} \left\{ \phi_k \frac{1}{r} |\vec{n}| \right\}_{(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})} \omega_i \cdot \chi_j \quad (A3.6)$$

$$4\pi h_{n,k}^M = \sum_{i=1}^{NG1} \sum_{j=1}^{NG2} \left\{ \phi_k \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} \right\}_{(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})} \omega_i \cdot \chi_j \quad (A3.7)$$

L'exemple de l'élément quadratique à 9 noeuds illustre ce calcul intégral. Le schéma de cet élément, et sa numérotation, sont présentés à la figure A3.1. Les fonctions d'interpolation sont exposées ci-dessous.

Fonctions d'interpolation

$$\begin{aligned}
4 \Phi_1 &= (1 - \xi_1) (1 - \xi_2) \xi_1 \xi_2 \\
4 \Phi_2 &= - (1 + \xi_1) (1 - \xi_2) \xi_1 \xi_2 \\
4 \Phi_3 &= (1 + \xi_1) (1 + \xi_2) \xi_1 \xi_2 \\
4 \Phi_4 &= - (1 - \xi_1) (1 + \xi_2) \xi_1 \xi_2 \\
2 \Phi_5 &= - (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2) \xi_1 \xi_2 \\
2 \Phi_6 &= (1 + \xi_1) (1 - \xi_2^2) \xi_1 \\
2 \Phi_7 &= (1 - \xi_1^2) (1 + \xi_2) \xi_2 \\
2 \Phi_8 &= - (1 - \xi_1) (1 - \xi_2^2) \xi_1 \\
\Phi_9 &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2)
\end{aligned} \quad (A3.8)$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^9 \Phi_k = 1 \quad (A3.9)$$

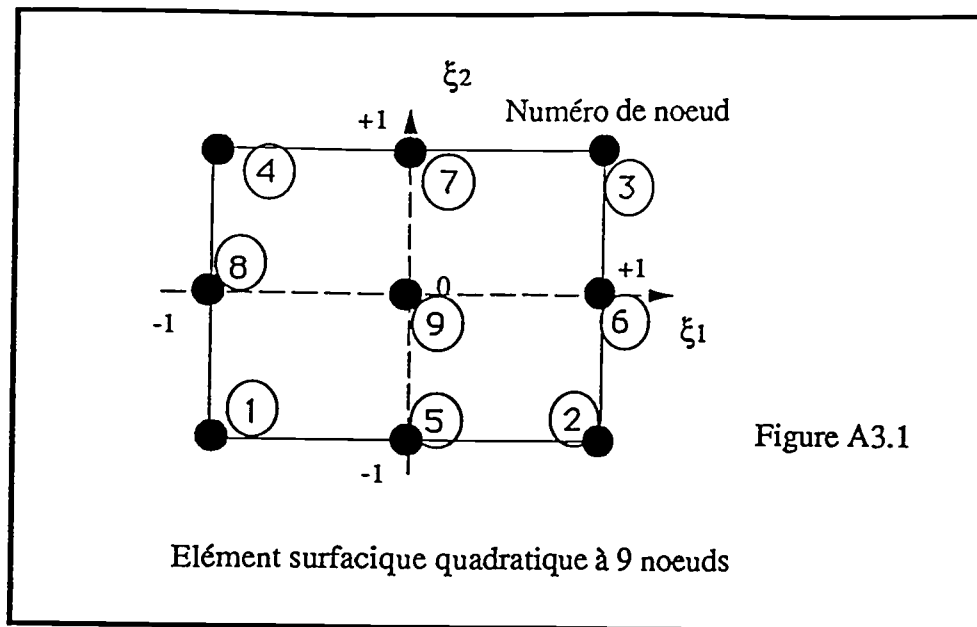


Figure A3.1

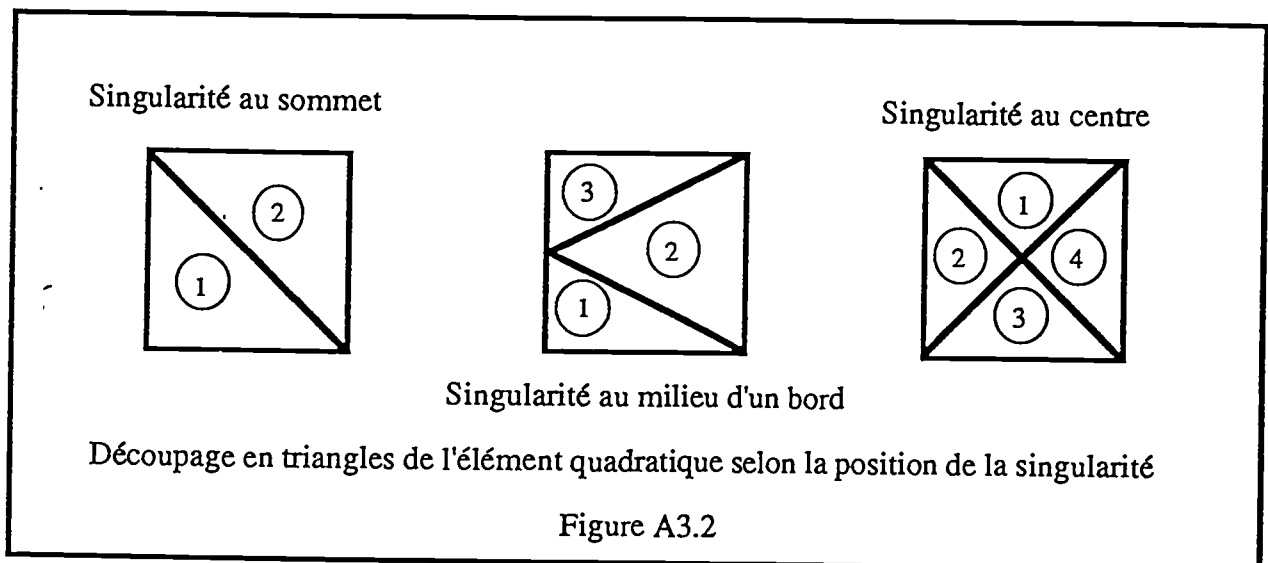


Figure A3.2

A3.2.2 Calcul singulier : $M \in (\sigma_n)$

Un traitement particulier est adopté. L'élément σ_k est découpé en triangles (figure A3.2) de manière à concentrer le nombre de points de Gauss autour de la singularité. Chaque triangle est ensuite transformé en un carré où est effectuée l'intégration.

Les relations de transformation du rectangle en triangles et vice-versa sont détaillées ci-dessous et sur la figure A3.3 qui

illustre ces transformations sur un exemple.

Première Transformation : Carré d'intégration (γ_1, γ_2) en triangle d'intégration (η_1, η_2) .

$$\eta_1 = \frac{1 + \gamma_1}{2} \quad \eta_2 = \frac{1 - \gamma_1}{2} \cdot \frac{1 + \gamma_2}{2}$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_1} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \frac{1 - \gamma_1}{2} \quad (A3.10)$$

Les points 1 et 2 du carré sont transformés en un seul point M, choisi coïncidant avec la singularité. M correspond au point 1 sur la figure A3.3.

Deuxième transformation : Triangle d'intégration (η_1, η_2) et élément (ξ_1, ξ_2) où le couple $(\xi_1, \xi_2)(i)$ désigne les coordonnées du point "i" du triangle dans le repère initial de l'élément quadratique (ξ_1, ξ_2) .

$$\xi_1 = \xi_1(1) \eta_1 + \xi_1(2) \eta_2 + \xi_1(3) (1 - \eta_1 - \eta_2)$$

$$\xi_2 = \xi_2(1) \eta_1 + \xi_2(2) \eta_2 + \xi_2(3) (1 - \eta_1 - \eta_2)$$

$$\begin{aligned} \text{et } J_2 &= (\xi_1(1) - \xi_1(3)) (\xi_2(2) - \xi_2(3)) \\ &\quad - (\xi_1(2) - \xi_1(3)) (\xi_2(1) - \xi_2(3)) \end{aligned} \quad (A3.11)$$

Les intégrales d'influences s'écrivent alors

$$4\pi g_{n,k}^M = - \sum_{\text{triangles}} \sum_{i=1}^{NG1} \sum_{j=1}^{NG2} \left\{ \Phi_k \frac{1}{r} |\vec{n}| \right\}_{(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})} \omega_i \cdot \chi_j \quad (A3.12)$$

$$4\pi h_{n,k}^M = \sum_{\text{triangles}} \sum_{i=1}^{NG1} \sum_{j=1}^{NG2} \left\{ \Phi_k \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} \right\}_{(\xi_{1,i}, \xi_{2,j})} \omega_i \cdot \chi_j \quad (A3.13)$$

A3.3 Exemple

Illustrons ces changements de repère sur un exemple. Plaçons la singularité au point 1 d'un élément quadratique. Cet élément est découpé en deux triangles. Le triangle "1" est décrit par les 3 points (1), (2) et (3) tels que :

$$\begin{array}{ll} \xi_1(1) = -1 & \xi_2(1) = -1 \\ \xi_1(2) = 1 & \xi_2(2) = -1 \\ \xi_1(3) = 1 & \xi_2(3) = 1 \end{array}$$

Ces 3 points correspondent aux points "i" dans l'expression (A3.11). Les transformations se décomposent selon :

Repère (ξ_1, ξ_2)	Repère (η_1, η_2)	Repère (γ_1, γ_2)
Point 1 $(-1, -1) \rightarrow$	$(+1, 0)$	$(+1, -1)$ $(+1, +1)$
Point 2 $(+1, -1) \rightarrow$	$(0, +1)$	$(-1, +1)$
Point 3 $(+1, +1) \rightarrow$	$(0, 0)$	$(-1, -1)$

Nous remarquons aussi combien la qualité de la méthode des éléments frontières dépend en grande partie de la précision des coefficients d'influence. Une analyse de l'erreur de quadrature est donc utile.

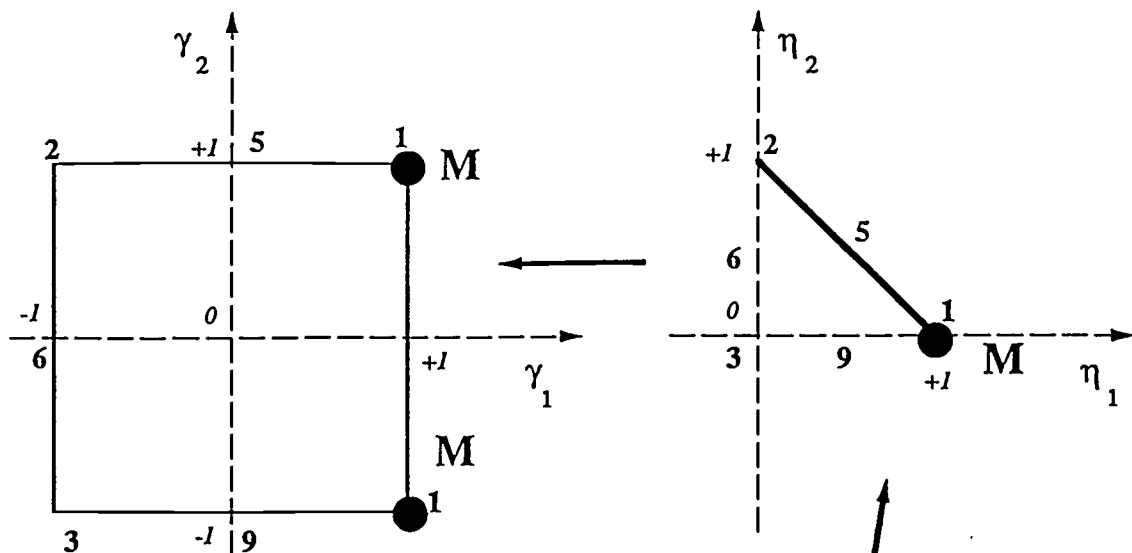


Figure A3.3

Changements de repère
dans le découpage en triangles
d'un élément quadratique

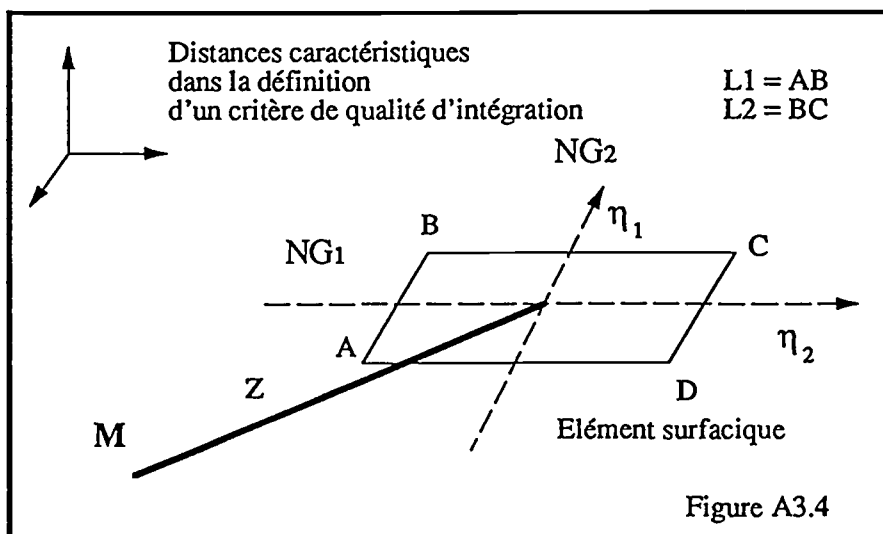
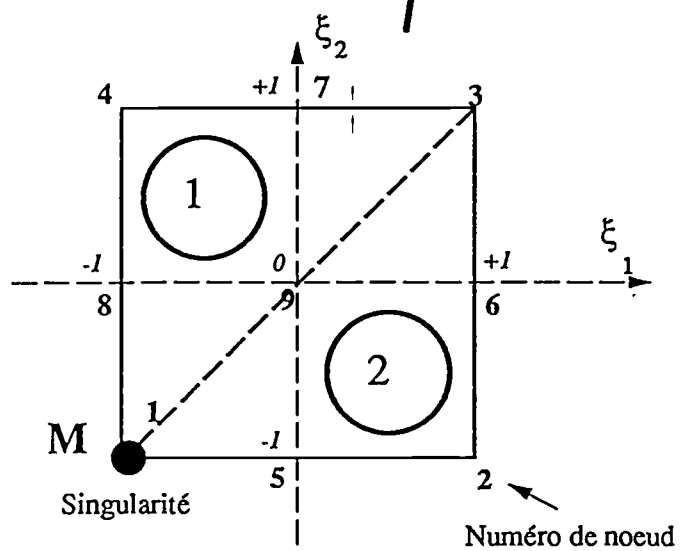


Figure A3.4

A3.3 Analyse de l'erreur de quadrature

Selon les résultats obtenus par LARREY [1990], une grande sensibilité de la précision au nombre N_g de points de Gauss apparait. La distance Z entre le point d'impact M et l'élément et la longueur caractéristique L de l'élément (figure A3.4) influencent aussi la précision.

Pour assurer une précision relative E (%), LARREY propose la formulation suivante pour obtenir un nombre optimum de points de Gauss

$$N_g = \frac{L}{Z} (1 - \log E) \quad (A3.14)$$

Ainsi, il est possible d'adapter localement le nombre de points de Gauss en fonction des différents paramètres. Paradoxalement, par rapport à l'emploi d'un nombre constant de coefficients de Gauss, ce critère permet de diminuer notablement le temps calcul total puisque le nombre moyen de points de Gauss utilisés est 5×5 avec un nombre maximal de 70×70 sur une géométrie tridimensionnelle de turbine par exemple.

A3.5 Conclusion

Nous disposons d'outils d'intégration robustes associés à un critère de qualité. La possibilité est maintenant offerte d'adapter selon chaque direction ξ_1 et ξ_2 le nombre de points de Gauss nécessaires pour respecter une précision donnée.

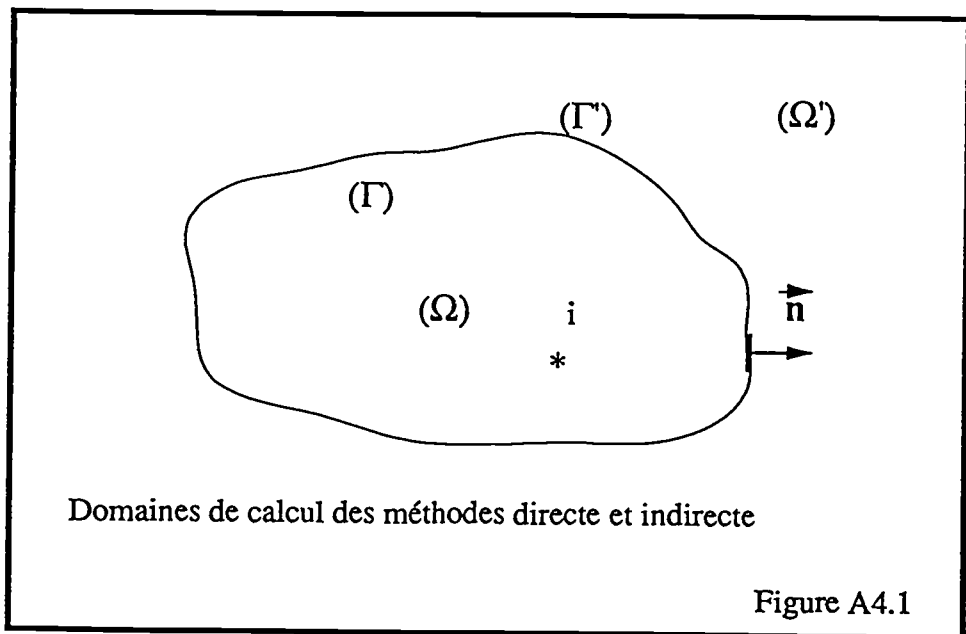
Nous sommes maintenant assurés d'obtenir des résultats indépendants du mode d'intégration.

ANNEXE 4

RESOLUTIONS INTEGRALES DIRECTE ET INDIRECTE

L'objectif de cette annexe est d'établir la méthode de résolution indirecte à partir de la résolution directe exposée au chapitre II.

Soit un domaine (Ω) de frontière (Γ) de normale extérieure $\vec{n}$ (cf. figure A4.1) où l'équation de Poisson $\nabla^2 u + b = 0$ est vérifiée. Soit également un point "i" interne à (Ω) . La solution fondamentale u^* associée à "i" est telle que $\nabla^2 u^* + \Delta(i) = 0$.



L'équation intégrale obtenue directement par l'application du théorème de Green s'écrit :

$$-u_i + \int_{\Gamma} u^*.q \, d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*.u \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^*.b \, d\Omega = 0 \quad (A4.1)$$

Soit l'espace sans sources $(\Omega') = (\Omega_{\infty}) - (\Omega)$, où (Ω_{∞}) est l'espace entier. La frontière de (Ω') est (Γ') avec $(\Gamma) = (\Gamma')$. Soit u' la solution de l'équation de Laplace $\nabla^2 u' = 0$ sur (Ω') . L'équation intégrale obtenue sur ce domaine s'écrit, en prenant le point i précédent:

$$\int_{\Gamma} u^*.q' \, d\Gamma + \int_{\Gamma} q^*.u' \, d\Gamma = 0 \quad (A4.2)$$

Notons l'inversion de signe sur le deuxième terme pour que le terme q^* soit identique dans les équations (A4.1) et (A4.2) puisque la normale à (Γ') est de signe opposé à la normale à (Γ) .

Supposons $u=u'$ sur (Γ) et additionnons les équations (A4.2) et (A4.1), le terme $\int_{\Gamma} q^*.u \, d\Gamma$ disparaît et nous obtenons

$$-u_i + \int_{\Gamma} u^*. (q + q') \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^*.b \, d\Omega = 0 \quad (A4.3)$$

ou, avec $\psi = - (q + q')$,

$$u_i + \int_{\Gamma} u^*.\psi \, d\Gamma - \int_{\Omega} u^*.b \, d\Omega = 0 \quad (A4.4)$$

Cette dernière équation est la forme indirecte de la méthode des éléments frontières. Le potentiel u_i est généré par une distribution ψ de u^* initialement inconnue. La dérivée normale s'obtient par différentiation de (A4.4) selon

$$q_i - \frac{1}{2} \psi_i + \int_{\Gamma} q^* \cdot \psi \, d\Gamma - \int_{\Omega} q^* \cdot b \, d\Omega = 0 \quad (A4.5)$$

En appliquant un maillage surfacique à N points et une discrétisation similaire à celle de la méthode directe (cf. Chap. II), les équations (A4.4) et (A4.5) s'écrivent sous la forme :

$$u_i + \sum_{j=1}^N \psi_j \cdot G_{ij} - B_i(u^*) = 0 \quad (A4.7)$$

$$q_i - \sum_{j=1}^N \psi_j \cdot H_{ij} - B_i(q^*) = 0 \quad (A4.8)$$

$$\text{avec } H_{ij} = - \int_{\sigma_j} q^* \, d\sigma_j + \frac{1}{2} \delta(i,j) \quad \text{et} \quad G_{ij} = \int_{\sigma_j} u^* \, d\sigma_j.$$

Le signe appliqué à $\int_{\sigma_j} q^* \, d\sigma_j$ dans l'expression de H_{ij} permet de conserver la même expression pour les coefficients de Dirichlet dans les méthodes directes et indirectes.

Ces deux équations sont écrites pour N points d'impact. L'application des conditions aux limites permet de construire un système $N \times N$. Sa résolution conduit à la répartition de sources ψ . Il est alors possible de calculer le potentiel ou la dérivée normale en tout point du domaine. Un exemple complet est présenté à l'annexe 5. Si nous comparons les temps calculs nécessaires aux résolutions indirectes et directes, les étapes (A4.7) et (A4.8) n'existent pas dans la résolution directe où les potentiels et dérivées normales inconnues sont des résultats directs de la résolution du système.

Ainsi, la méthode directe est-elle plus rapide que la méthode indirecte.

ANNEXE 5

EXEMPLES DE FORMULATIONS INTEGRALES DIRECTES ET INDIRECTE

Cette annexe présente un exemple simple de résolution intégrale avec les méthodes exposées au chapitre II. Dans l'ordre seront présentées d'une part, la résolution directe avec les singularités placées à la frontière puis à l'extérieur du domaine respectivement et d'autre part la résolution indirecte.

Le calcul analytique des intégrales est en appendice à la fin de cette annexe.

A5.1 CAS TEST : Résolution de $\nabla u^2 = 0$ sur une plaque plane

La géométrie bidimensionnelle du cas test est rectangulaire de coté 1. Chaque face est discrétisée en 1 élément constant pour simplifier les calculs. M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sont les centres des éléments 1, 2, 3 et 4 respectivement (figure A5.1).

Le potentiel est noté "u" et sa dérivée normale "q" avec $q = \frac{\partial u}{\partial n}$.

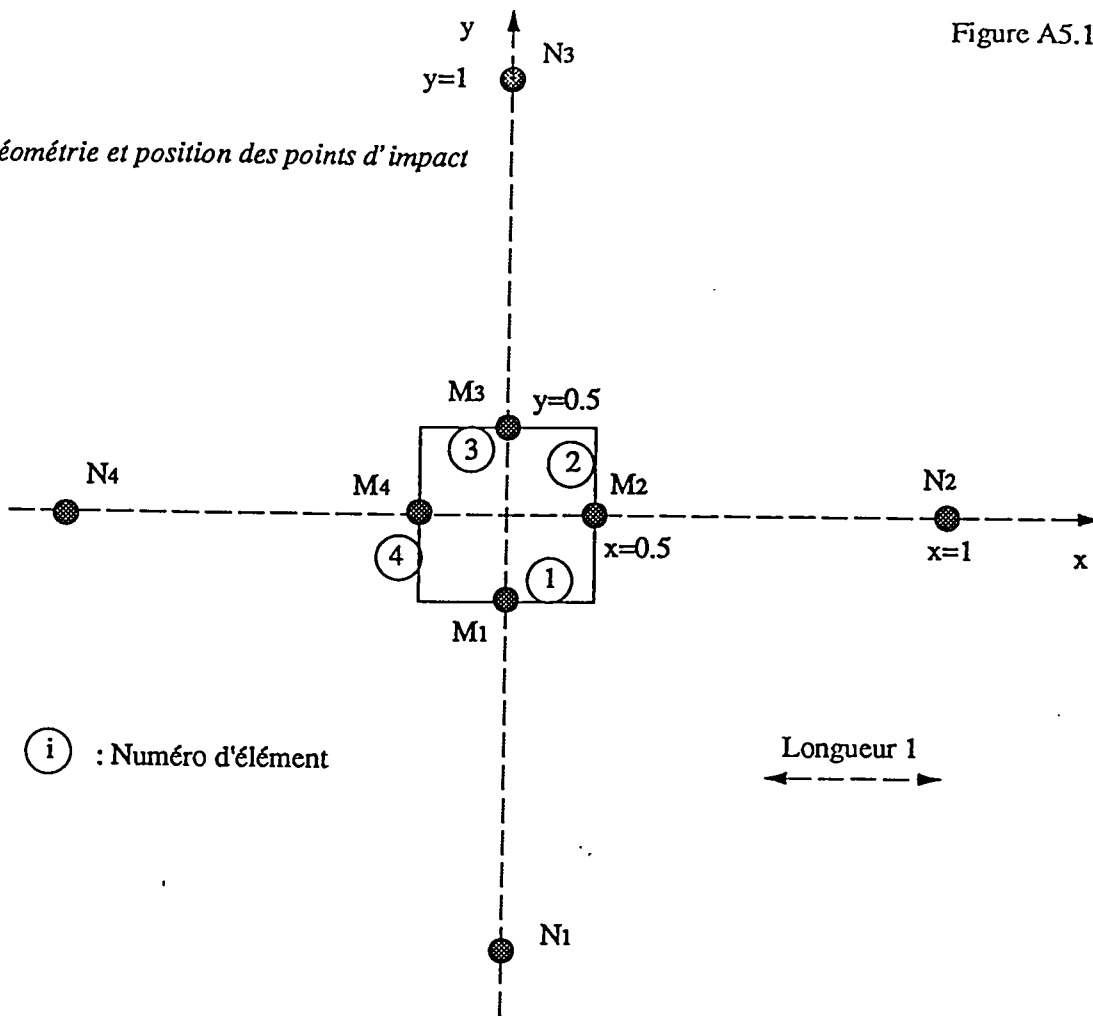
Les conditions aux limites sont :

- Face AB (élément 1): $\bar{u}_{M_1} = 1$; variable inconnue q_{M_1}
- Face BC (élément 2): $\bar{q}_{M_2} = 0$; variable inconnue u_{M_2}
- Face CD (élément 3): $\bar{u}_{M_3} = 0$; variable inconnue q_{M_3}
- Face DA (élément 4): $\bar{q}_{M_4} = 0$; variable inconnue u_{M_4}

La figure A5.2 visualise le cas test et ses conditions aux limites.

Figure A5.1

Géométrie et position des points d'impact



(i) : Numéro d'élément

Longueur 1

Conditions aux limites

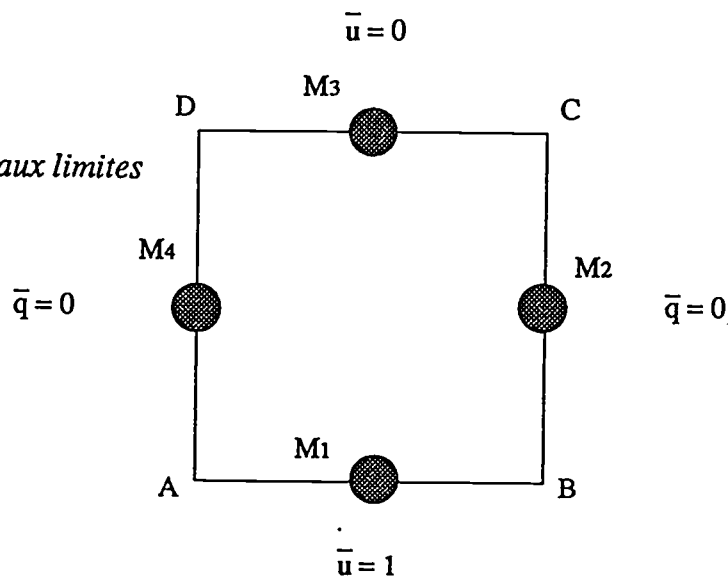


Figure A5.2

A5.2 RESOLUTIONS DIRECTES

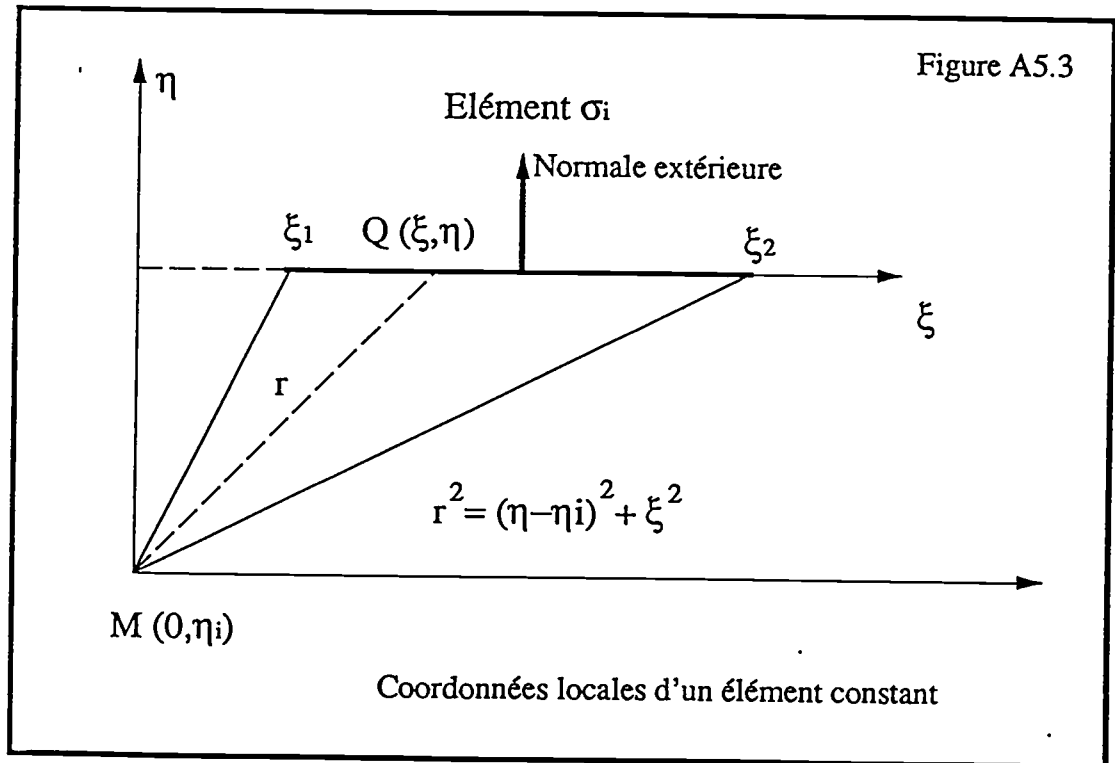
A5.2.1 EQUATION INTEGRALE

A partir de l'équation intégrale (2.33), l'équation discrétisée pour un point d'impact M de position quelconque s'écrit, en fonction des conditions aux limites :

$$G_1^M q_1 + H_2^M u_2 + G_3^M q_3 + H_4^M u_4 = - H_1^M$$

$$\text{avec } G_i^M = \int_{\sigma_i} u^* d\sigma_i, \quad H_i^M = - \int_{\sigma_i} \frac{\partial u^*}{\partial n_j} d\sigma_i$$

et $u^* = - \frac{1}{2\pi} \ln(MQ)$ où Q est un point courant de l'élément σ_i (figure A5.3).



Remarquons qu'il n'y a qu'une seule direction normale pour chaque

élément, ainsi $Nn(\text{élément } i) = 1$. Nous n'indiquerons donc pas les coefficients de Neuman en fonction de la direction normale pour cet exemple. Le choix de la position de M par rapport à (Γ) permet de distinguer les deux résolutions directe et indirecte détaillées au paragraphe II.3.1.

A5.2.2 RESOLUTION POUR $M \in (\Gamma)$

Les singularités M sont placées au centre des éléments surfaciques. Le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_1 & M_1 & M_1 \\ G_1 & H_2 & G_3 & H_4 \\ M_2 & M_2 & M_2 & M_2 \\ G_1 & H_2 & G_3 & H_4 \\ M_3 & M_3 & M_3 & M_3 \\ G_1 & H_2 & G_3 & H_4 \\ M_4 & M_4 & M_4 & M_4 \\ G_1 & H_2 & G_3 & H_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{M_1} \\ u_{M_2} \\ q_{M_3} \\ u_{M_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ -H_1 \\ M_2 \\ -H_1 \\ M_3 \\ -H_1 \\ M_4 \\ -H_1 \end{pmatrix}$$

Pour éviter un calcul particulier pour les coefficients de Dirichlet $H_i^{M_i}$ de la diagonale, ces derniers peuvent être calculés en utilisant (2.25) :

$$\begin{aligned} H_1^{M_1} &= 1 - H_2^{M_1} - H_3^{M_1} - H_4^{M_1} & H_2^{M_2} &= 1 - H_1^{M_2} - H_3^{M_2} - H_4^{M_2} \\ H_3^{M_3} &= 1 - H_1^{M_3} - H_2^{M_3} - H_4^{M_3} & H_4^{M_4} &= 1 - H_1^{M_4} - H_2^{M_4} - H_3^{M_4} \end{aligned}$$

Il reste cependant à calculer $G_1^{M_1}$ et $G_3^{M_3}$ selon un algorithme particulier.

A5.2.3 RESOLUTION POUR $M \notin (\Gamma)$

Les points sources sont à l'extérieur de la plaque sur une surface (Γ') distincte de (Γ) . On choisit de placer les points sources en

face des milieux d'éléments. Soient N_1, N_2, N_3 et N_4 les points sources en vis à vis des points M_1, M_2, M_3 et M_4 respectivement (Cf. figure A5.1). Nous choisissons $M_i N_i = 2$. Le système linéaire à résoudre s'écrit :

$$\begin{pmatrix} G_1^{N_1} & H_2^{N_1} & G_3^{N_1} & H_4^{N_1} \\ G_1^{N_2} & H_2^{N_2} & G_3^{N_2} & H_4^{N_2} \\ G_1^{N_3} & H_2^{N_3} & G_3^{N_3} & H_4^{N_3} \\ G_1^{N_4} & H_2^{N_4} & G_3^{N_4} & H_4^{N_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{M_1} \\ u_{M_2} \\ q_{M_3} \\ u_{M_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_1^{N_1} \\ -H_1^{N_2} \\ -H_1^{N_3} \\ -H_1^{N_4} \end{pmatrix}$$

Aucune des intégrales ne demande un traitement particulier.

A5.3 RESOLUTION INDIRECTE

L'application des équations (A4.7) et (A4.8) à un point M quelconque de la surface permet d'obtenir le potentiel et la dérivée normale au point M de la frontière en fonction d'une combinaison linéaire de quatre sources Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et Ψ_4 . Remarquons qu'il n'est plus possible d'appliquer la relation (2.25). Les intégrales H_M^M doivent être calculées avec un algorithme particulier.

$$u_M + G_1^M \Psi_1 + G_2^M \Psi_2 + G_3^M \Psi_3 + G_4^M \Psi_4 = 0$$

$$q_M - H_1^M \Psi_1 - H_2^M \Psi_2 - H_3^M \Psi_3 - H_4^M \Psi_4 = 0$$

$$\text{avec} \quad H_M^M = - \int_{\sigma_i} \frac{1}{2\pi} \text{Ln } r \, d\sigma + \frac{1}{2}$$

Appliquons les conditions aux limites connues aux points M_1, M_2, M_3 et M_4 .

$$\text{Point } M_1 : 1 + G_1^{M_1} \Psi_1 + G_2^{M_1} \Psi_2 + G_3^{M_1} \Psi_3 + G_4^{M_1} \Psi_4 = 0$$

$$\text{Point } M_2 : 0 - H_1^{M_2} \Psi_1 - H_2^{M_2} \Psi_2 - H_3^{M_2} \Psi_3 - H_4^{M_2} \Psi_4 = 0$$

$$\text{Point } M_3 : 0 + G_1^{M_3} \Psi_1 + G_2^{M_3} \Psi_2 + G_3^{M_3} \Psi_3 + G_4^{M_3} \Psi_4 = 0$$

$$\text{Point } M_4 : 1 - H_1^{M_4} \Psi_1 - H_2^{M_4} \Psi_2 - H_3^{M_4} \Psi_3 - H_4^{M_4} \Psi_4 = 0$$

Le système 4x4 s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} G_1^{M_1} & G_2^{M_1} & G_3^{M_1} & G_4^{M_1} \\ -H_1^{M_2} & -H_2^{M_2} & -H_3^{M_2} & -H_4^{M_2} \\ G_1^{M_3} & G_2^{M_3} & G_3^{M_3} & G_4^{M_3} \\ -H_1^{M_4} & -H_2^{M_4} & -H_3^{M_4} & -H_4^{M_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Connaissant la famille $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, le potentiel au point M_4 , par exemple, s'écrit:

$$u_{M_4} = -G_1^{M_4} \Psi_1 - G_2^{M_4} \Psi_2 - G_3^{M_4} \Psi_3 - G_4^{M_4} \Psi_4$$

Il en est de même pour les autres inconnues.

A5.4 APPLICATION NUMERIQUE

Pour illustrer les trois approches, nous présentons le système $A.X = B$ à résoudre et les résultats obtenus. Une analyse des solutions sera alors possible. La solution théorique au problème est :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

A5.4.1 RESOLUTION INDIRECTE

Le système linéaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1.6931 & -0.3349 & 0.0389 & -0.3349 \\ -1.1071 & -3.1416 & 1.1071 & 0.9273 \\ 0.0389 & -0.3349 & -1.6931 & -0.3349 \\ 1.1071 & 0.9273 & 1.1071 & -3.1416 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5038 \\ 0.2151 \\ -0.0735 \\ 0.2151 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1746 \\ 0.5000 \\ -1.1746 \\ 0.5000 \end{pmatrix}.$$

Les potentiels sont exacts. Les dérivées normales sont entachées d'une erreur de 17%.

A5.4.2 RESOLUTION DIRECTE AVEC SOURCES SURFACIQUES

Le système linéaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -1.6931 & -1.1071 & 0.0389 & -1.1071 \\ -0.3349 & 3.1416 & -0.3349 & -0.9273 \\ 0.0389 & -1.1071 & -1.6931 & -1.1071 \\ -0.3349 & -0.9273 & -0.3349 & 3.1416 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.1416 \\ 1.1071 \\ 0.9273 \\ 1.1071 \end{pmatrix}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1746 \\ 0.5000 \\ -1.1746 \\ 0.5000 \end{pmatrix}.$$

La solution obtenue est totalement identique à celle obtenue avec la résolution indirecte. Nous pouvons prévoir ce résultat puisque les deux approches sont strictement équivalentes (Annexe 4).

A5.4.2 RESOLUTION DIRECTE AVEC SOURCES EXTERNES A (Γ)

Le système linéaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0.7034 & -0.4516 & 1.1032 & -0.4516 \\ 0.7602 & 1.2336 & 0.7602 & -0.3303 \\ 1.1032 & -0.4516 & 0.7034 & -0.4516 \\ 0.7602 & -0.3303 & 0.7602 & 1.2336 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2336 \\ 0.4516 \\ 0.3303 \\ 0.4516 \end{pmatrix}$$

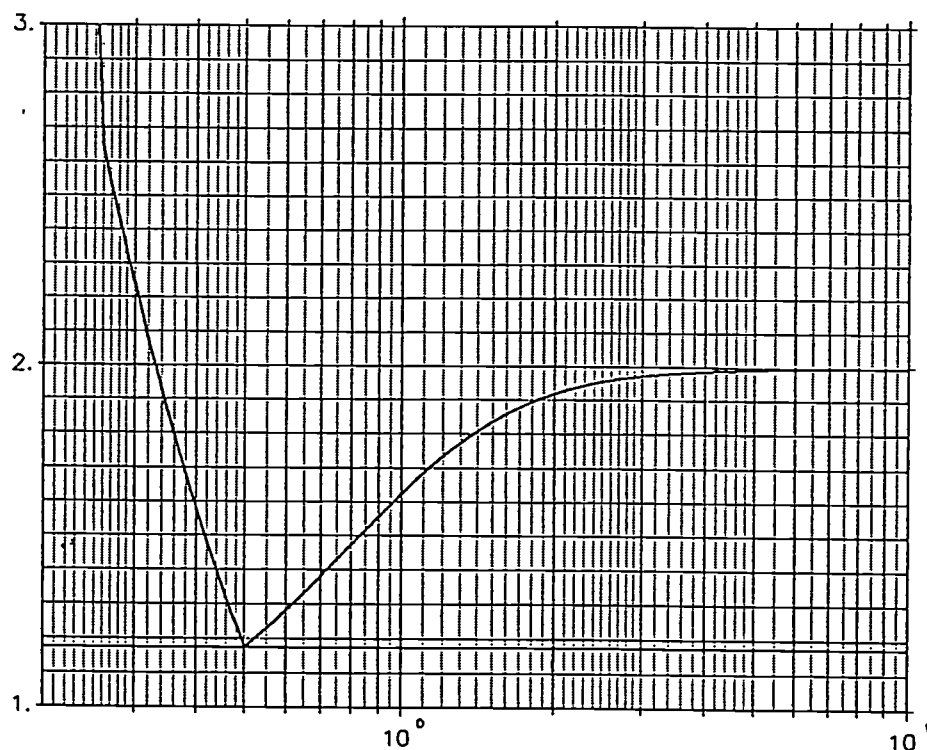
La résolution du système conduit à

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9557 \\ 0.5000 \\ -1.9557 \\ 0.5000 \end{pmatrix}.$$

Les potentiels sont corrects mais les dérivées normales sont fausses. L'erreur est supérieure à celle obtenue par les calculs précédents. En variant la position des points N_1 à l'intérieur ou à l'extérieur du carré, nous observons une évolution particulière de la dérivée normale à l'élément 1. Cette évolution est rapportée à la figure A5.4.

Evolution de la dérivée normale

Figure A5.4



Legendes

- Calculs surf. direct/indirect
- - - Calcul externe

Influence de la position des points d'impact
sur la dérivée normale

Partant de l'intérieur du carré, l'erreur sur la dérivée normale décroît exponentiellement. Lorsque l'abscisse de N_1 est égale à 0.5, c'est à dire $N_1 = M_1$, la dérivée normale est identique au résultat obtenu par les méthodes surfaciques directe ou indirecte. En augmentant l'abscisse de N_1 , l'erreur augmente et la dérivée normale converge vers 2.

L'erreur sur la dérivée normale est toujours supérieure à celle produite par les méthodes dites surfaciques.

A5.5 CONCLUSION

Par l'utilisation des approches surfaciques directe ou indirecte et de la résolution avec sources externes, nous avons mis en évidence sur un exemple simple le comportement des trois méthodes. Le calcul avec sources externes ne nécessite pas d'algorithme particulier pour les coefficients comportant une singularité. L'erreur sur la dérivée normale est cependant plus importante avec cette méthode et le positionnement des sources semble délicat. Les calculs direct et indirect avec sources surfaciques conduisent aux mêmes solutions. Mais la méthode indirecte nécessite plus de calculs. Elle est donc pénalisante au niveau du temps de calcul.

APPENDICE
CALCUL ANALYTIQUE DES INTEGRALES

La formulation analytique des coefficients d'influence pour des éléments constants bidimensionnels est présentée ci-dessous (LIGGET [1987]). $r = MQ$ est la distance entre le point d'impact M et le point source Q courant de l'élément surfacique σ_i . ξ_1 et ξ_2 correspondent aux extrémités de l'élément surfacique décrit dans le sens positif (normale extérieure). η_i est défini à la figure A5.3.

1. Si $\eta_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} * \int_{(\sigma_i)} \text{Ln } r \, d\sigma_i &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \text{Ln } r \, d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \xi_2 \text{Ln } (\eta_i^2 + \xi_2^2) - \xi_1 \text{Ln } (\eta_i^2 + \xi_1^2) \right. \\ &\quad \left. - 2(\xi_2 - \xi_1) + 2\eta_i \left(\tan^{-1} \frac{\xi_2}{\eta_i} - \tan^{-1} \frac{\xi_1}{\eta_i} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$* \int_{(\sigma_i)} \frac{\partial}{\partial n} \text{Ln } r \, d\sigma_i = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial}{\partial n} \text{Ln } r \, d\xi = \tan^{-1} \frac{\xi_2}{\eta_i} - \tan^{-1} \frac{\xi_1}{\eta_i}$$

2. Si $\eta_i = 0$ (Singularité appartenant à σ_i) :

$$* \int_{(\sigma_i)} \text{Ln } r \, d\sigma_i = \left\{ \xi_2 \text{Ln } |\xi_2| - \xi_1 \text{Ln } |\xi_1| - (\xi_2 - \xi_1) \right\}$$

$$* \int_{(\sigma_i)} \frac{\partial}{\partial n} \text{Ln } r \, d\sigma_i = -\frac{\pi}{2} \text{ (ou calcul implicite)}$$

ANNEXE 6

INTEGRALES DE VOLUMES

L'un des problèmes principaux de la méthode des éléments frontières est le traitement des intégrales volumiques de termes sources de la forme

$$\int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega \quad (A6.1)$$

En effet, ces intégrales peuvent être produites par des forces distribuées dans le volume, des termes sources de l'équation de Poisson, des effets de non-linéarité, des conditions initiales dans les problèmes instationnaires...

La première approche consiste à discrétiser le volume en un certain nombre de cellules et à intégrer la fonction b à l'aide de fonction de répartition, à la manière des éléments finis. Ceci est justifié puisqu'il n'y a aucune variable inconnue dans le volume.

Une seconde approche, plus récente, transforme les intégrales volumiques en intégrales surfaciques, permettant ainsi de n'utiliser que la frontière dans le traitement intégral.

Une troisième approche utilise la méthode de Monte-Carlo pour calculer ces intégrales.

Cette annexe présente ces différentes procédures.

A6.1 CALCUL DIRECT DE L'INTEGRALE VOLUMIQUE

A6.1.1 TERMES SOURCES CONCENTRES

Avant de traiter le calcul volumique sous sa forme classique, nous isolons le cas des sources volumiques b_i concentrées aux points Q_i . Leur traitement est simple.

Représentons la fonction au point Q par une somme de contributions de type Dirac :

$$b(Q) = \sum_{i=1}^{N_s} \delta(Q, Q_i) \times b_i \quad (A6.2)$$

où N_s est le nombre de sources concentrées dans le domaine (Ω) .

Ainsi, avec $r_i = MQ_i$,

$$B(M) = \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \sum_{i=1}^{N_s} u^*(r_i) J^{-1} b_i \quad (A6.3)$$

où J^{-1} est le Jacobien de la cellule autour du point Q_i

A6.1.2 TERMES SOURCES QUELCONQUES

L'approche "immédiate" est de diviser le domaine (Ω) en cellules. Une quadrature de Gauss peut alors être appliquée pour calculer les différentes intégrales de volume. Différentes formules de quadrature sont détaillées dans STROUD [1966].

L'avantage de cette approche est sa relative simplicité et sa précision. Par contre, elle nécessite une discrétisation du volume qui peut poser un réel problème si la géométrie est complexe. La simplicité de la méthode intégrale est alors perdue au détriment du travail de maillage. Ainsi, par exemple, GIPSON [1987] compare les 5 mois nécessaires à la réalisation du maillage en éléments finis d'une tête de microscope ionique aux 20 minutes pour le maillage surfacique en éléments frontières.

Nous constatons ainsi l'inadaptation du calcul direct dans le cas d'une géométrie complexe. Il est alors intéressant de transformer ces intégrales volumiques en intégrales surfaciques, puisqu'alors seul interviendra le maillage surfacique.

A6.2 TRANSFORMATION DE L'INTEGRALE VOLUMIQUE EN INTEGRALE SURFACIQUE

A6.2.1 METHODE DE GALERKIN

Cette méthode de transformation repose sur l'utilisation de la fonction de Galerkin, si elle existe, de l'opérateur biharmonique ∇^4 .

Soit le terme $\int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega$.

Supposons qu'il existe une fonction v^* , appelée fonction de Galerkin, telle que

$$\nabla^2 v^* = u^* \quad (A6.4)$$

$$\text{Nous avons alors } \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \nabla^2 v^* d\Omega \quad (A6.5)$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 b \cdot v^* d\Omega + \int_{\Gamma} b \frac{\partial v^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial b}{\partial n} v^* d\Gamma$$

Dans le cas où $\nabla^2 b = 0$, l'intégrale de volume est transformée en deux intégrales surfaciques selon

$$\int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \int_{\Gamma} b \frac{\partial v^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial b}{\partial n} v^* d\Gamma \quad (A6.6)$$

Cette méthode est donc utilisable si l'égalité $\nabla^2 b = 0$ est

vérifiée. Il peut être difficile de trouver la fonction de Galerkin. Ainsi cette méthode n'est applicable que dans certains cas particuliers.

A6.2.2 UTILISATION DE SOLUTIONS PARTICULIERES

Un moyen direct de résoudre l'équation de Poisson $\nabla^2 u = b$ est de la transformer en équation de Laplace à l'aide d'une solution particulière.

Considérons

$$u = v + \hat{v} \quad (A6.8)$$

où $\hat{v}$ est une solution particulière telle que

$$\nabla^2 \hat{v} = b \quad (A6.9)$$

L'équation de Poisson se transforme donc en équation de Laplace $\nabla^2 v = 0$ avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v = \bar{u} - \hat{v} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \bar{q} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad \text{avec } \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \quad (A6.10)$$

Il suffit alors de résoudre classiquement l'équation de Laplace par la méthode intégrale.

Cette méthode n'est utilisable que si la solution particulière $\hat{v}$ est connue. Or cette solution n'est pas toujours définie et reste difficile à trouver.

Il est cependant possible d'approcher $\hat{v}$ pour une fonction quelconque en développant la fonction en série de fonctions connues et de coefficients inconnus. BREBBIA et TANG [1988] proposent deux types de séries détaillées ci-dessous.

A6.3 DEVELOPPEMENT EN SERIE

A6.3.1 EXPANSION EN SERIE DE PUISSANCES

Pour un point d'impact M_i et un point Q du domaine (Ω) , $b(Q)$ est développé en série de fonctions puissances selon

$$b(Q) = \sum_{k=K}^{K_M} \sum_{i=1}^N \alpha_i^k r^k \quad \text{avec } r = \left| \overrightarrow{M_i Q} \right| \quad (A6.11)$$

où N est le nombre de points d'impact à la frontière et K des entiers.

La fonction $\hat{v} = \sum_{k=K}^{K_M} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^k}{(k+1)^2} r^{k+2}$ vérifie $\nabla^2 \hat{v} = b$.

Calculons alors la nouvelle équation intégrale.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla^2 \hat{v} \cdot u^* d\Omega \quad \text{avec } \hat{q} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} \\ &= T(M) \hat{v}(M) + \int_{\Gamma} \hat{v} q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{q} u^* d\Gamma \quad (A6.12) \end{aligned}$$

La nouvelle équation à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} T(M) u(M) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \\ (A6.13) \quad = \quad T(M) \hat{v}(M) + \int_{\Gamma} \hat{v} q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{q} u^* d\Gamma \end{aligned}$$

Soit

$$T(M) (\hat{v}(M) - u(M)) + \int_{\Gamma} (\hat{v} - u) q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} (\hat{q} - q) u^* d\Gamma = 0$$

où, en réintroduisant la variable $v = u - \hat{v}$,

$$T(M) v(M) + \int_{\Gamma} v q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} u^* d\Gamma = 0 \quad (A6.14)$$

Nous retrouvons l'équation intégrale de Laplace sans intégrale volumique.

L'intégrale de volume s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega &= \sum_{k=K}^{K_M} \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \int_{\Omega} u^* r^k d\Omega \\ &= \sum_{k=K}^{K_M} \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \int_{\Omega} u^* \nabla^2 \hat{v}_{k,i} d\Omega \end{aligned} \quad (A6.15)$$

$$\text{avec } \hat{v}_{k,i} = \frac{r^{k+2}}{(k+1)^2} (M_i, Q) \text{ et } \hat{q}_{k,i} = \frac{r^{k+1}}{(k+2)} \frac{\partial r}{\partial n} (M_i, Q) \quad (A6.16).$$

$$\text{Ainsi,} \quad \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \quad (A6.17)$$

$$\sum_{k=K}^{K_M} \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \left(-T \hat{v}_{k,i} - \int_{\Gamma} \hat{v}_{k,i} q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \hat{q}_{k,i} u^* d\Gamma \right) (M_i)$$

Notons que les intégrales h et g calculées précédemment réapparaissent dans la discrétisation surfacique des intégrales surfaciques de (A6.17)

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \end{bmatrix} \quad (A6.18)$$

La convergence n'est pas toujours assurée avec ce développement. L'augmentation de l'ordre du développement permet d'accroître la précision du calcul. La méthode classique pour choisir l'ordre du développement est d'arrêter ce dernier lorsque le terme d'ordre m qui vient d'être ajouté à la série est d'un module inférieur à ϵ fois le module de la somme des $m-1$ termes précédemment calculés. Notons l'existence d'accélérateurs de convergence des séries comme la procédure δ^2 d'AITKEN ou la transformation d'EULER (PRESS [1988]).

A6.3.2 EXPANSION EN SERIE DE FOURIER

Pour résoudre l'équation de Laplace bidimensionnelle par exemple, la fonction b est développée en double série de Fourier selon

$$b(Q) = \alpha_0 f_0 + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \left\{ \alpha_i^k f_i^k + \sum_{j=1}^M \alpha_{ij}^k f_{ij}^k \right\} \quad (A6.19)$$

où $f_0 = 1$, f_i^k sont des fonctions cosinus ou sinus et f_{ij}^k des produits de cosinus ou de sinus. Les termes α_0 , α_i^k et α_{ij}^k sont les coefficients de l'expansion. Les expressions de ces fonctions sont

$$f_i^1 = \cos \left(i\pi \frac{x}{x_0} \right) \quad f_i^2 = \sin \left(i\pi \frac{x}{x_0} \right)$$

$$f_i^3 = \cos \left(i\pi \frac{y}{y_0} \right) \quad f_i^4 = \sin \left(i\pi \frac{y}{y_0} \right)$$

$$f_{ij}^1 = f_i^1 f_j^3$$

$$f_{ij}^2 = f_i^1 f_j^4$$

$$f_{ij}^3 = f_i^2 f_j^3$$

$$f_{ij}^4 = f_i^2 f_j^4$$

avec

$$q_0 = \frac{\partial f_0}{\partial n}; \quad q_i^k = \frac{\partial f_i^k}{\partial n}; \quad q_{ij}^k = \frac{\partial f_{ij}^k}{\partial n}$$

où x_0 et y_0 sont des distances de référence selon les axes $(0,x)$ et $(0,y)$ respectivement.

Les fonctions trigonométriques f_0 , f_i^k et f_{ij}^k vérifient :

$$\nabla^2(\hat{v}_0) = f_0; \quad \nabla^2(\hat{v}_i^k) = f_i^k; \quad \nabla^2(\hat{v}_{ij}^k) = f_{ij}^k$$

avec

$$\hat{v}_i^k = - \left(\frac{x_0}{\pi i} \right)^2 f_i^k \text{ pour } k \in \{1,2\}$$

$$\hat{v}_i^k = - \left(\frac{y_0}{\pi i} \right)^2 f_i^k \text{ pour } k \in \{3,4\}$$

$$\hat{v}_{ij}^k = - \left\{ \left(\frac{i\pi}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{i\pi}{y_0} \right)^2 \right\}^{-1} f_{ij}^k$$

Nous notons

$$\hat{q}_0 = \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial n}; \quad \hat{q}_i^k = \frac{\partial \hat{v}_i^k}{\partial n}; \quad \hat{q}_{ij}^k = \frac{\partial \hat{v}_{ij}^k}{\partial n}$$

L'intégrale de volume s'écrit alors :

$$\begin{aligned} B(M) &= \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega = \beta_0 \left(-T \hat{v}_0 - \int_{\Gamma} \hat{v}_0 q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \hat{q}_0 u^* d\Gamma \right) \\ &+ \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \alpha_i^k \left(-T \hat{v}_i^k - \int_{\Gamma} \hat{v}_i^k q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \hat{q}_i^k u^* d\Gamma \right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{ij}^k \left(-T \hat{v}_{ij}^k - \int_{\Gamma} \hat{v}_{ij}^k q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \hat{q}_{ij}^k u^* d\Gamma \right)$$

ou encore

$$\begin{aligned} B(M) = & \beta_o \left(-T u_o - \int_{\Gamma} u_o q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} q_o u^* d\Gamma \right) \\ & + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \beta_i^k \left(-T f_i^k - \int_{\Gamma} f_i^k q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} q_i^k u^* d\Gamma \right) \\ & + \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_{ij}^k \left(-T f_{ij}^k - \int_{\Gamma} f_{ij}^k q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} f_{ij}^k u^* d\Gamma \right) \end{aligned}$$

avec

$$\beta_o = \alpha_o$$

$$\beta_i^k = \left(\frac{x_o}{\pi_i} \right)^2 \alpha_i^k \text{ pour } k \in \{1,2\}$$

$$\beta_i^k = \left(\frac{y_o}{\pi_i} \right)^2 \alpha_i^k \text{ pour } k \in \{3,4\}$$

$$\beta_{ij}^k = - \left\{ \left(\frac{i\pi}{x_o} \right)^2 + \left(\frac{i\pi}{y_o} \right)^2 \right\}^{-1} \alpha_{ij}^k$$

Ce type d'expansion converge mieux et plus rapidement que la précédente. Par contre, le temps calcul peut devenir rapidement prohibitif s'il est nécessaire de calculer numériquement les coefficients de Fourier (coût de l'ordre de $N \log_2 N$ opérations en utilisant une FFT pour $M=N$).

A6.4 METHODE DE MONTE-CARLO

Pour les géométries très complexes, où aucune des précédentes méthodes de calcul n'est applicable, GIPSON [1987] propose

l'emploi de la méthode de Monte-Carlo.

Cette méthode repose sur l'égalité

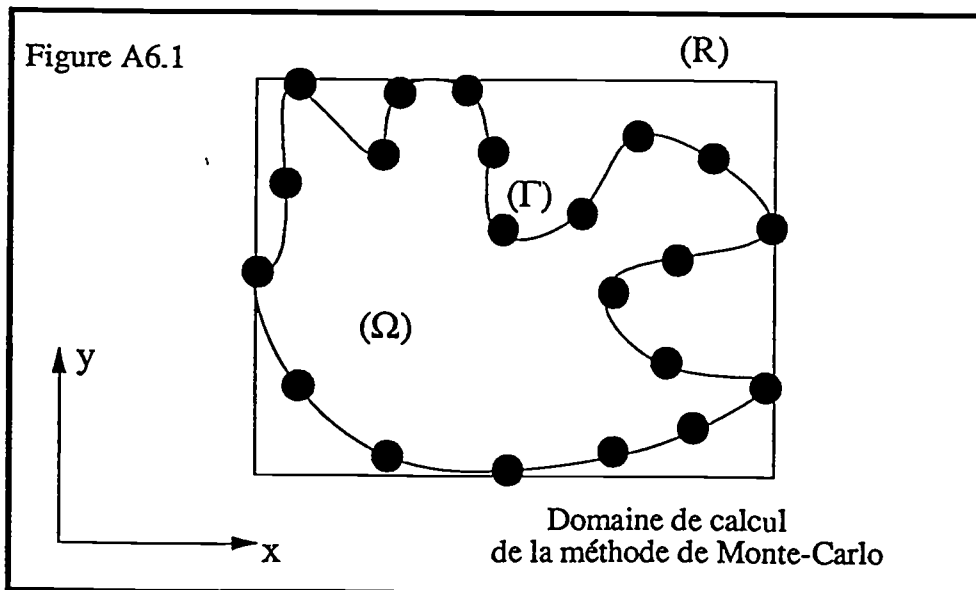
$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \bar{f} \times \text{mes}(\Gamma)$$

qui exprime la valeur moyenne $\bar{f}$ de f , fonction intégrable, sur (Ω) comme l'intégrale de f sur (Ω) divisée par la surface $\text{mes}(\Gamma)$ de (Ω) .

Explicitons cette méthode par un exemple bidimensionnel. Soit le rectangle (R) des extrema de la frontière de (Ω) (figure A6.1). La méthode consiste à choisir aléatoirement un grand nombre N de points (x,y) appartenant à (R) . On calcule alors :

$$\sum_{i=1}^N \Phi(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \Phi^2(x_i, y_i)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \Phi(x_i, y_i) = 0 & \text{si } (x_i, y_i) \in (R)/(\Omega) \\ \Phi(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) & \text{si } (x_i, y_i) \in (\Omega) \end{cases}$$



Nous avons alors

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \frac{\text{mes}(\Gamma)}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i, y_i) = I$$

avec la variance

$$V = \frac{\text{mes}(\Gamma)}{N} \sum_{i=1}^N \Phi^2(x_i, y_i) - I^2.$$

La déviation standard $\sigma = \sqrt{V/N}$ donne un indicateur d'erreur correct pour estimer la précision du calcul. D'après GIPSON, N est de l'ordre de quelques milliers pour obtenir un résultat correct à 4%. Il est évident que cette méthode reste couteuse en temps calcul sans nécessiter un algorithme complexe.

Cette méthode reste donc une solution possible quand toute autre solution est inopérante ou lorsque le temps calcul n'est pas un critère de choix.

A6.5 CONCLUSION

Un certain nombre de méthodes pour calculer les intégrales volumiques apparaissant dans l'équation intégrale ont été présentées.

La première approche en considérant des sources concentrées reste la plus simple si le maillage interne est accessible. Les solutions transformant les intégrales volumiques en intégrales surfaciques restent limitées à certains cas particuliers.

Les développements en séries de puissance ou de Fourier permettent de passer outre la recherche d'une fonction de Galerkin complexe. L'algorithme de calcul est alors notablement complexifié et la maîtrise de la précision semble difficile.

La méthode de Monte-Carlo est couteuse en temps calcul mais a l'avantage d'être un algorithme extrêmement simple.

Nous disposons ainsi d'un certain nombre d'outils pour calculer les intégrales volumiques.

ANNEXE 7

CADRE CLASSIQUE D'APPLICATION DES IDENTITES DE GREEN

La méthode des éléments frontières utilise un certain nombre de propriétés et définitions utilisées au chapitre II. Nous nous proposons de rappeler les propriétés essentielles des équations de Green et de l'opérateur de Laplace. La démonstration des fonctions de Green est extraite de DAUTRAY [1984].

Les résultats essentiels développés dans cette annexe sont les suivants.

La notion de fonction radiale permet d'introduire la notion de potentiel et de fonction de Green. Le théorème de Green rappelé, la différentiation des équations intégrales et la continuité des potentiels et dérivées normales sont exposées. La méthode de résolution directe des éléments frontières est ainsi développée. La notion de potentiel de simple et double couche est également traitée puisque ces fonctions apparaissent dans la méthode de résolution indirecte des éléments frontières.

A7.1 EQUATION DE POISSON

Etant donné une fonction f définie sur Ω , on appelle *solution classique* de l'équation de Poisson $\Delta u = f$ sur Ω toute fonction $u \in C^2(\Omega)$ vérifiant $\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x})$, où Δ est l'opérateur Laplacien, pour tout $\vec{x} \in \Omega$. Cette définition impose la continuité de la fonction f .

A7.2 FORMULES DE GREEN

Les formules classiques d'Ostrogradski et de Green s'énoncent, en supposant les conditions d'existence vérifiées, comme

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \vec{p} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{p} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (A7.1)$$

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega$$

$$\int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, d\Omega$$

Ces formules permettent d'établir l'équation intégrale de correction de pression à partir de l'équation locale de Poisson.

A7.3 FONCTIONS HARMONIQUES

Soit une fonction $u(\vec{x})$ qui ne dépend que de $r = |\vec{x}|$ (une telle fonction est dite radiale). Cette fonction est donc invariante par rotation. Puisque Δu est invariant par rotation, la fonction Δu ne dépendra aussi que de $r = |\vec{x}|$. La formule du Laplacien pour une telle fonction est

$$\Delta u(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) (r) \quad (A7.2)$$

Une *fonction harmonique* $u(\vec{x})$ est telle que $\Delta u(\vec{x}) = 0$. Une fonction harmonique sur Ω est une solution classique de l'équation $\Delta u = 0$ sur Ω appelée *équation de Laplace sur Ω* . Les propriétés principales des fonctions harmoniques sont :

- 1 Toute fonction harmonique sur Ω est analytique sur Ω .
- 2 Une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{R}^n$ tout entier est constante.
- 3 Toute fonction continue solution de l'équation de Laplace sur

un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, est harmonique analytique sur cet ouvert.

-4 Soit $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; alors $H(\Omega)$ est un espace vectoriel, $H(\Omega)$ est stable par dérivation et si $u, v \in H(\Omega)$, alors $u.v \in H(\Omega)$ si et seulement si $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

-5 Le principe du maximum s'énonce : $\min_{\Gamma} u \leq u(x) \leq \max_{\Gamma} u, \forall x \in \Omega$

-6 Si v est harmonique sur $]0, +\infty[$, alors $\frac{dv}{dr} = \frac{c}{r^{n-1}}$ où c est une constante arbitraire. Ainsi, toute fonction radiale harmonique, pour $\vec{x} \neq \vec{0}$, est de la forme :

$$c \operatorname{Log} |\vec{x}| + c_0 \quad \text{si } n = 2$$

$$\frac{c}{|\vec{x}|^{n-2}} + c_0 \quad \text{si } n \geq 3$$

où c et c_0 sont des constantes.

Les fonctions $\operatorname{Log} |\vec{x}|$ dans le cas $n = 2$ et $1/|\vec{x}|^{n-2}$ dans le cas $n = 3$, sont intégrables au voisinage de zéro; elles définissent une distribution u sur $\mathbb{R}^n$.

Rappelons qu'une distribution sur $\mathbb{R}^n$ est une forme linéaire continue sur l'espace $D(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe C^∞ à support dans $\mathbb{R}^n$. Les solutions distribution u de l'équation de Poisson $\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$ sont les distributions qui vérifient $\langle f, \xi \rangle = \langle u, \Delta \xi \rangle$ pour toute fonction $\xi \in D(\mathbb{R}^n)$. La notation $\langle f, \xi \rangle$ désigne la valeur de la distribution f sur la fonction ξ .

Pour étudier le comportement en 0, calculons la distribution Δu définie par :

$$\langle \Delta u, \xi \rangle = \langle u, \Delta \xi \rangle = \int_{\Omega} u \Delta \xi \, d\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\vec{x}| > \epsilon} u \Delta \xi \, d\Omega$$

Nous nous limitons au cas $n = 2$. En coordonnées polaires, il vient

$$\int_{|\vec{x}| > \epsilon} u \Delta \xi \, d\Omega = \int_{\epsilon}^{\infty} r \operatorname{Log} r \, dr \int_0^{2\pi} \Delta \xi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta$$

La formule du Laplacien en coordonnées polaires conduit à

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Delta \xi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \xi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta \right) \end{aligned}$$

puisque $\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} d\theta = 0$, la fonction $\xi(r \cos \theta, r \sin \theta)$ étant périodique. En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{|\vec{x}| > \epsilon} u \Delta \xi \, d\Omega &= \int_{\epsilon}^{\infty} \operatorname{Log} r \, \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \xi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta \right) dr \\ &= -\epsilon \operatorname{Log} \epsilon \left. \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \xi(r \cos \theta, r \sin \theta) \, d\theta \right|_{r=\epsilon} + \int_0^{2\pi} \xi(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta) \, d\theta \, dr \end{aligned}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le premier terme tend vers 0 et le second vers $2\pi \xi(0)$. Ainsi

$$\langle \Delta u, \xi \rangle = 2\pi \xi(0) = 2\pi \int_{\Omega} \Delta u \, \delta(0, M) \, d\Omega \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{si } M \neq 0, \delta(0, M) = 0 \\ \text{si } M = 0, \delta(0, 0) = 1 \end{cases}$$

c'est à dire $\Delta u = 2\pi \delta$ où δ est la masse de Dirac à l'origine 0.

Nous définissons alors :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} |\vec{x}| & ; & E_2 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |\vec{x}| \\ E_n = \frac{1}{k_n |\vec{x}|^{n-2}} & \text{avec } k_n = -(n-2) \sigma_n \end{cases}$$

La fonction localement intégrable E_n est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta E_n = \delta \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

Ainsi, on appelle *solution élémentaire* ou *fondamentale* du Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, toute distribution E sur $\mathbb{R}^n$ solution de l'équation de Poisson

$$\Delta E = \delta \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

Avec cette définition, E_n est *solution élémentaire du Laplacien*; puisque la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ d'une solution élémentaire est solution de l'équation de Laplace. E_n est même, à une constante additive près, la seule solution élémentaire qui ne dépende que de $r = |\vec{x}|$. Cette solution élémentaire est analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La singularité en 0 est traitée ci-dessous.

Soit une fonction radiale harmonique u sur le domaine $\Omega \setminus \{0\}$. D'après les résultats précédents, $u(\vec{x}) = c E_n(\vec{x}) + c_0$ sur $\Omega \setminus \{0\}$. u se prolonge en une fonction analytique sur Ω si et seulement si $c = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour éliminer la singularité en 0 est :

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow 0} |\vec{x}|^{n-2} u(\vec{x}) \quad \text{si } n \geq 3$$

$$u(\vec{x}) \text{ borné lorsque } |\vec{x}| \rightarrow 0 \quad \text{si } n = 2$$

$$\frac{du}{dx}(\vec{x}) \text{ converge lorsque } |\vec{x}| \rightarrow 0 \quad \text{si } n = 1$$

En généralisant, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, $\vec{x}_0 \in \Omega$ et $u \in H(\Omega \setminus \{0\})$. Supposons que la fonction $|\vec{x} - \vec{x}_0|^{n-2} u(x)$ soit bornée lorsque $\vec{x}$ tend vers $\vec{x}_0$. Alors il existe c et c_0 tels que la fonction u définie sur Ω par

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \begin{cases} u(x) - \frac{c}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^{n-2}} & \text{si } x \in \Omega \setminus \{0\} \\ c_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

soit harmonique sur Ω .

En particulier, $c = \lim_{x \rightarrow x_0} |\vec{x} - \vec{x}_0|^{n-2} u(x)$ existe et si $n = 2$ ou,

lorsque $n \geq 3$, si $c = 0$, la fonction u se prolonge par continuité en une fonction harmonique sur Ω . Cette propriété nous permet de définir les potentiels newtoniens qui représentent le principal intérêt de cette étude.

A7.4 POTENTIELS NEWTONIENS

Nous avons définis $E_n(\vec{x}) = E_n(|\vec{x}|)$ qui est analytique harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et solution élémentaire radiale unique, à une constante additive près, du laplacien :

$$\Delta E_n = \delta$$

E_n est le potentiel newtonien de δ , la masse de Dirac à l'origine. En généralisant, $u(\vec{x}) = \sum \alpha_i E_n(\vec{x} - \vec{y}_i)$ est le potentiel de $f = \sum \alpha_i \delta(\vec{y}_i)$. Les propriétés du potentiel sont rappelées.

-1 Le potentiel newtonien est linéaire.

-2 La dérivée $\partial u / \partial x_i$ du potentiel newtonien u de $f \in \xi'$ est le potentiel newtonien de $\partial f / \partial x_i$.

-3 Soient $f \in \xi'$ et une distribution u sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Alors u est le potentiel newtonien de f si et seulement si u est solution de l'équation de Poisson $\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait la condition à l'infini :

$$\text{si } n = 2, \quad \lim_{|\vec{x}| \rightarrow +\infty} u(\vec{x}) = 0$$

$$\text{si } n \geq 3, \quad \lim_{|\vec{x}| \rightarrow +\infty} \left(u(\vec{x}) - \frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle \text{Log}(\vec{x}) \right) = 0$$

Introduisons alors les notions de potentiels de simple et double couche.

A7.5 POTENTIEL DE SIMPLE ET DOUBLE COUCHE

En supposant les conditions d'existence satisfaites, on définit les fonctions u_0 , u_1 et u_2 telles que $u = u_0 + u_1 + u_2$ sur Ω où u_0 , u_1 et u_2 sont les potentiels newtoniens des distributions f_0 , f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$\langle f_0, \delta \rangle = \int_{\Omega} \delta \Delta u \, d\Omega \qquad \langle f_1, \delta \rangle = \int_{\Gamma} \delta \left(- \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$\langle f_2, \delta \rangle = \int_{\Gamma} \frac{\partial \delta}{\partial n} d\Gamma$$

f_0 est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ à support contenu dans $\bar{\Omega}$. f_1 est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ à support contenu dans (Γ) et f_2 est une distribution d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^n$ à support contenu dans (Γ) . On dit que u_1 (resp. u_2) est le potentiel de simple couche (resp. double couche) défini par les fonctions $- \frac{\partial u}{\partial n}$ (resp. u) continues sur Γ .

Etant donné un ouvert borné régulier (Ω) de $\mathbb{R}^n$ et $\phi \in C^0(\Gamma)$, on appelle potentiel de simple couche (resp. double couche) de ϕ le potentiel newtonien de support f défini par :

$$\langle f, \xi \rangle = \int_{\Gamma} \xi(t) \phi(t) \, d\Gamma(t)$$

$$\text{(resp. } \int_{\Gamma} \frac{\partial \xi}{\partial n}(t) \phi(t) \, d\Gamma(t) \text{)}$$

A7.6 REGULARITE DES POTENTIELS DE SIMPLE ET DOUBLE COUCHE

Nous nous proposons d'étudier la régularité de u_1 et u_2 au voisinage de Γ en fonction de celle de ϕ . $\mathbb{R}^n$ se sépare en deux ouverts : l'ouvert Ω borné régulier de bord Γ , appelé par abus de

language intérieur de Γ et noté Ω_i , et l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, appelé encore extérieur de Γ et noté Ω_e . Etant donné une fonction u définie sur $\mathbb{R}^n$, nous noterons u^i (resp. u^e) la restriction de u à Ω_i (resp. Ω_e).

Soit $\phi \in C^0(\Gamma)$, le potentiel de simple couche de la mesure $\phi \, d\Gamma$ sur (Γ) est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ définie selon

$$u_1(x) = \int_{\Gamma} E_n(t-x) \phi(t) \, d\Gamma(t)$$

Le potentiel de double couche de ϕ est le potentiel newtonien de la distribution $-\nabla(\phi \vec{n} \, d\sigma)$ supporté par (Γ) . C'est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ définie selon

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left(E_n(t-x) \right) \phi(t) \, d\Gamma(t) \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Gamma} \sum \frac{(t_i - x_i) \cdot n_i(t)}{|t-x|^n} \phi(t) \, d\Gamma(t) \end{aligned}$$

où $\vec{n}(t)$ est le vecteur normal unitaire à (Γ) en t et externe à (Ω) . On démontre les propriétés suivantes.

-1 Soit Γ le bord d'un ouvert borné régulier et $\phi \in C^0(\Gamma)$. Alors le potentiel de simple couche u_1 est continu sur $\mathbb{R}^n$.

-2 Le potentiel de double couche intérieur u_2^i (resp. extérieur u_2^e) défini par ϕ se prolonge par continuité à $\bar{\Omega}_i$ (resp. $\bar{\Omega}_e$) en posant sur Γ

$$u_2^i(z) = w(z) + \frac{1}{2} \phi(z) \quad (\text{resp. } u_2^e(z) = w(z) - \frac{1}{2} \phi(z))$$

$$\text{avec } w(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial E_n}{\partial n} (t-z) \phi(t) \, d\Gamma(t) \text{ continue sur } \Gamma.$$

-3 La dérivée normale $\frac{\partial u_1^i}{\partial n}$ (resp. $\frac{\partial u_1^e}{\partial n}$) du potentiel de simple

couche intérieur (resp. extérieur) défini par ϕ , est définie sur Γ et donnée par :

$$\frac{\partial u_1^i}{\partial n}(z) = h(z) - \frac{1}{2} \phi(z) \quad (\text{resp.} \quad \frac{\partial u_1^e}{\partial n}(z) = h(z) + \frac{1}{2} \phi(z))$$

avec

$$h(z) = \int_{\Gamma} \vec{\nabla}_{E_n}(z-t) \cdot \vec{n}(z) \phi(t) \, d\Gamma = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Gamma} \frac{(z-t) \cdot n(z)}{|z-t|^n} \phi(t) \, d\Gamma$$

Il est possible de résoudre des problèmes de Dirichlet, Neuman où mixte en utilisant les potentiels de simple et double couche (méthode intégrale de Fredholm). Ce principe est utilisé dans la formulation indirecte des éléments frontières.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr F. LEBOEUF Professeur - LMFA - ECL - Ecully (69),

et les rapports de

Mr J. CHAUVIN Professeur - LEMFI - PARIS VI Orsay (91),

Mr A. NICOLAS Professeur - Dept d'Electrotechnique ECL - Ecully (69),

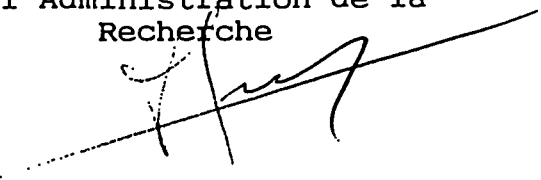
Monsieur **PARKINSON Etienne**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention
du titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 16 mai 1991

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la
Recherche



F. LEBOEUF