

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

par

Emmanuel DEUTSCH

**DISPERSION DE PARTICULES DANS UNE TURBULENCE
HOMOGENE ISOTROPE STATIONNAIRE CALCULEE PAR
SIMULATION NUMERIQUE DIRECTE DES GRANDES
ECHELLES**

soutenue le 16 mars 1992 devant la commission d'Examen :

**Jury MM. A. Berlemont
J.P. Bertoglio
J. Fabre
G. Gouesbet
M. Lance
J.P. Minier
O. Simonin**

P

à Valérie et Lucas et ...

à Pierre et Jean

à Gisèle et Charles

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire National d'Hydraulique de la Direction des Etudes et Recherches d' E.D.F. Je remercie Monsieur P.L. Viollet, responsable du Laboratoire National d'Hydraulique, de m'avoir accueilli au sein du Groupe de Mécanique des Fluides Industrielle, et d'avoir mis à ma disposition les moyens informatiques importants indispensables pour réaliser ce travail.

Tout au long de cette thèse, j'ai eu la chance de travailler avec Monsieur O. Simonin, responsable du Groupe de Mécanique des Fluides Industrielle, qui m'a permis de bénéficier de sa grande expérience des écoulements diphasiques à phase dispersée. Je tiens particulièrement à le remercier d'avoir su orienter ce travail dans des directions intéressantes et d'avoir toujours pu répondre rapidement aux questions posées, et ceci, en me laissant un espace de liberté important.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de Monsieur M. Lance, Professeur à l'Université de Lyon, que je remercie pour la confiance et la sympathie qu'il m'a témoignées.

J'exprime ma gratitude aux membres du jury de thèse qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail :

Monsieur Fabre, Directeur de recherche au CNRS,
Monsieur Gouesbet, Professeur à l'Université de Rouen,
Monsieur Lance, Professeur à l'Université de Lyon,
Monsieur Minier, Ingénieur à EDF,
Monsieur Simonin, Docteur Ingénieur à EDF,

et en particulier à,

Monsieur Berlemont, Chargé de recherche au CNRS,
Monsieur Bertoglio, Chargé de recherche au CNRS,
qui ont bien voulu être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie beaucoup Monsieur J.P. Minier, avec qui j'ai partagé à la fois le bureau et les premiers pas en diphasique. Les nombreuses discussions que l'on

a eues m'ont été très profitables. Je le remercie également pour l'attention qu'il a porté à la relecture de ce mémoire.

Que soit également remercié tout le personnel du Groupe Mécanique des Fluides Industrielle, grâce à qui j'ai pu travailler dans un ambiance fort sympathique. Je remercie tout particulièrement Mademoiselle Thai Van d'avoir accepté de relire ce mémoire afin de détecter les erreurs de frappe et les fautes d'orthographe.

Sommaire

Sommaire	I
Nomenclature (en Français)	VII
Nomenclature (in English)	XIII
Introduction	1
Chapitre 1 : Simulation de la turbulence du fluide	7
1.1 LES : simulation directe des grandes échelles de la turbulence	7
1.1.1 Equations de base	8
1.1.2 Equations du mouvement des grandes échelles	8
1.1.3 Modèle de sous-maille	9
1.1.4 Méthodes numériques.....	12
1.2 Echelles caractéristiques Eulériennes en turbulence homogène	13
1.2.1 Turbulence homogène	13
1.2.2 Turbulence isotrope homogène stationnaire.....	15
1.2.3 Echelles caractéristiques	15
1.3 Description des champs turbulents simulés	17
1.3.1 Méthode utilisée pour entretenir la turbulence.....	18
1.3.2 Calcul du spectre initial	19
1.3.3 Résultats des simulations.....	19
1.3.4 Comparaison avec les calculs de simulation directe	21
Chapitre 2 : Simulation des trajectoires de particules	29
2.1 Position du problème	29
2.2 L'équation du mouvement des particules	31
2.2.1 Premiers travaux.....	31
2.2.2 Etudes de Maxey et Riley (1983) et Gatignol (1983).....	32
2.2.3 Equation Généralisée au cas des Reynolds plus élevés	35

2.2.4	Equations du mouvement utilisées dans les simulations	36
2.3	Interpolation	38
2.3.1	Généralités sur l'interpolation.....	38
2.3.2	Présentation rapide des interpolations utilisées.....	39
2.3.3	Résultats	40
2.4	Intégration des équations du mouvement des particules.....	44
2.4.1	Schéma d'intégration.....	44
2.4.2	Calcul de la dérivée du fluide le long des trajectoires des particules.....	45
2.4.3	Calcul de la dérivée du fluide suivant le fluide	46
2.4.4	Problème lié à l'intégration du terme de traînée	47
2.5	Choix des méthodes numériques utilisées.....	47
2.5.1	Erreur statistique pour le calcul de moments d'ordre 2.....	48
2.5.2	Choix des méthodes numériques : diffusion d'un nuage de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée.....	50
2.5.3	Validation globale.....	53
 Chapitre 3 : Diffusion de particules fluides		59
3.1	Théorie de la diffusion turbulente.....	59
3.1.1	Etude Lagrangienne de la diffusion turbulente : analyse de Taylor	60
3.1.2	Expression du coefficient de diffusion.....	61
3.1.3	Analyse spectrale	61
3.2	Présentation et analyse des résultats	62
3.2.1	Diffusion de particules en turbulence homogène isotrope stationnaire	62
3.2.2	Rapport entre les échelles intégrales temporelles Eulériennes et Lagrangiennes.....	64
3.2.3	Forme de la corrélation Lagrangienne des vitesses	65
 Chapitre 4 : Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire		69
4.1	Calcul du coefficient de dispersion.....	71
4.2	Hypothèses de Tchen	73
4.3	Théorie de Tchen-Hinze.....	74

4.3.1	Calcul du coefficient de dispersion des particules	75
4.3.2	Calcul de la variance des vitesses fluctuantes des particules	76
4.4	Extension de la théorie de Tchen-Hinze : hypothèse de l'équilibre local.....	78
4.4.1	Linéarisation de l'équation du mouvement des particules	78
4.4.2	Turbulence du fluide "vu" par les particules.....	80
4.4.3	Caractéristiques du mouvement fluctuant des particules	82
4.5	Effet de croisement de trajectoires.....	83
4.5.1	Etude de Csanady.....	83
4.5.2	Etude du cas limite : la dispersion est dominée par la vitesse de glissement	84
4.5.3	Expressions générales	88
Chapitre 5	: Modélisation Eulérienne du mouvement de particules dans un écoulement turbulent.....	91
5.1	Equations du mouvement moyen.....	93
5.1.1	Equations locales instantanées	93
5.1.2	Equations du mouvement moyen	95
5.1.3	Transfert de quantité de mouvement aux interfaces.....	96
5.1.4	Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire	98
5.2	Modélisation de la turbulence	100
5.2.1	Modélisation de la turbulence de la phase continue.....	100
5.3	Modélisation du mouvement fluctuant de la phase dispersée	101
5.3.1	Modèle d'entraînement local par la turbulence du fluide	101
5.3.2	Equations de transport des contraintes cinétiques du mouvement fluctuant des particules.....	105
5.4	Dispersion d'un nuage de particules ayant un gradient de vitesse moyenne non nul, dans un écoulement turbulent homogène isotrope stationnaire.....	107
Chapitre 6	: Présentation et analyse des résultats	109
6.1	Introduction.....	109

6.2 Conditions de calcul.....	110
6.2.1 Méthodes numériques.....	110
6.2.2 Domaine de calcul et conditions de périodicité	111
6.2.3 Calcul des statistiques.....	112
6.2.4 Conditions initiales et durée du calcul.....	114
6.3 Influence de la position de l'échelle de coupure (LES) sur les résultats des simulations	114
6.3.1 Particules denses.....	115
6.3.2 Sédiments.....	116
6.3.3 Bulles	117
6.4 Dispersion d'un nuage de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire en l'absence de croisement de trajectoires.....	121
6.4.1 Théorie de Tchen-Hinze standard	125
6.4.2 Extension de la théorie de Tchen-Hinze.....	135
6.4.3 Coefficient de dispersion du modèle Eulérien.....	141
6.4.4 Transitoire d'énergie	142
6.4.5 Corrélations Lagrangiennes de la vitesse des particules.....	146
6.4.6 Dérivée suivant le fluide ou suivant la particule.....	148
6.5 Etude de l'effet de croisement de trajectoires.....	151
6.5.1 Temps d'interaction "turbulence du fluide-particules"	155
6.5.2 Variance du mouvement fluctuant des particules et covariance du mouvement corrélé.	160
6.5.3 Calcul du coefficient de dispersion	166
6.5.4 Coefficient de dispersion du modèle Eulérien.....	168
6.5.5 Corrélations Lagrangienne de la vitesse des particules	169
6.6 Dispersion d'un nuage de particules soumis à un gradient de vitesse moyenne non nul	173
6.6.1 Présentation du calcul	173
6.6.2 Calcul des contraintes turbulentes du mouvement fluctuant des particules.....	178
6.6.3 Calcul des coefficients de transport.....	181
Conclusion.....	185
Annexe 1 : Interpolations	191

Annexe 1 : Interpolations.....	191
I.1 Interpolation linéaire.....	191
I.2 Interpolation quadratique ESTET.....	192
I.3 Interpolation cubique par la méthode des splines.....	194
Annexe 2 : La méthode de Runge-Kutta.....	197
Annexe 3 : La méthode de Runge-Kutta modifiée.....	201
Annexe 4 : Quelques trajectoires de particules.....	203
Bibliographie.....	207
Communications.....	213

Nomenclature

Lettres Latines

- b : Paramètre adimensionnel prenant en compte la contribution de la force de pression et de masse ajoutée.
- c : Paramètre prenant en compte la contribution de la force de Basset.
- C_A : Coefficient correcteur du terme de masse ajoutée.
- C_D : Coefficient correcteur du terme de traînée.
- C_p : Coefficient utilisé dans la modélisation Eulérienne pour prendre en compte l'effet de croisement de trajectoire.
- C_s : Constante de Smagorinsky.
- D_1^t : Coefficient de diffusion turbulente du fluide.
- D_2^t : Coefficient de dispersion des particules.
- D_{12}^t : Tenseur de dispersion binaire fluide-particules.
- d_p : Diamètre des particules.
- dt : Pas de temps.
- dx : Taille des mailles.
- $\bar{D}_{1,ij}$: Tenseur du taux de déformation du champ de vitesse du fluide à grande échelle.
- E^e : Spectre tridimensionnel Eulérien de l'énergie turbulente.
- E_1 : Spectre Lagrangien des vitesses du fluide.
- E_1 : Spectre Lagrangien de la vitesse du fluide, calculé le long des trajectoires des particules.
- E_2 : Spectre Lagrangien des vitesses des particules.
- $f(r)$: Fonction de corrélation Eulérienne de la vitesse du fluide dans la direction longitudinale.
- $f_{2,i}$: $i^{\text{ème}}$ composante de la force qui s'exerce sur une particule.
- $g(r)$: Fonction de corrélation Eulérienne de la vitesse du fluide dans la direction transversale.
- I : Echelle de longueur intégrale.

- $I_{k,i}$: $i^{\text{ème}}$ composante du terme de transfert aux interfaces diminuée de la contribution du gradient de la pression moyenne.
- k : Nombre d'onde.
- k_{\min} : Le plus petit nombre d'onde simulé.
- k_{\max} : Le plus grand nombre d'onde simulé.
- L_b : Taille du domaine de calcul.
- L_f^e : Echelle de longueur intégrale longitudinale de la turbulence.
- L_g^e : Echelle de longueur intégrale transversale de la turbulence.
- L_{ij} : Tenseur de Léonard.
- P_1 : Pression de la phase continue.
- \bar{P}_1 : Grandes échelles de pression de la phase continue.
- Q_{12} : Fonction de transfert fluide-particule.
- $q_1^2 = \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1$: Energie turbulente du fluide.
- $q_2^2 = \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$: Energie cinétique du mouvement fluctuant des particules.
- $q_{12} = \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2$: Energie cinétique du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules.
- R_{ij} : Tenseur de sous-maille.
- Re^λ : Nombre de Reynolds turbulent calculé à l'aide de la micro-échelle de Taylor.
- Re^p : Nombre de Reynolds particulaire.
- R_{ij}^e : Tenseur des corrélations Eulériennes des vitesses.
- R_1 : Corrélation Lagrangienne des vitesses des particules fluides.
- \mathcal{R}_1 : Corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide calculée le long des trajectoires des particules.
- R_2 : Corrélation Lagrangienne des vitesses des particules.
- S : Coefficient d'asymétrie de la dérivée des vitesses.
- T^e : Echelle temporelle intégrale Eulerienne.

- u_1 : Vitesse instantannée du fluide.
 U_1 : Vitesse moyenne du fluide.
 u''_1 : Vitesse fluctuante du fluide.
 \bar{u}_1 : Grandes échelles de la vitesse du fluide.
 u_1^{sm} : Vitesse de sous-maille du fluide.
 $(\vec{u}_1(t))_2$: Vitesse du fluide "vu" par les particules.
 u_2 : Vitesse instantannée des particules.
 U_2 : Vitesse moyenne des particules.
 u''_2 : Vitesse fluctuante des particules.
 $\langle u''_{1,i} u''_{1,j} \rangle$: Tenseur des contraintes de Reynolds.
 $\langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2$: Tenseur de la variance des vitesses des particules.
 $\langle u''_{1,i} u''_{1,j} \rangle_2$: Tenseur de la variance de la vitesse du fluide calculée le long des trajectoires des particules.
 $\langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2$: Tenseur de la covariance des vitesses fluctuantes fluide-particules.
 v_p : Volume de la particule.
 v_d : Vitesse de diffusion (Eq. 5.1.17).
 v_r : Vitesse relative instantannée entre une particule et le fluide environnant
 V_r : Moyenné de la vitesse relative.
 y_2 : Position d'une particule.
 $\langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t)$: Tenseur de la variance du déplacement de particules fluides.
 $\langle y_{2,i} y_{2,j} \rangle_2(t)$: Tenseur de la variance du déplacement des particules.

Lettres Grecques

- α_k : Taux de présence volumique de la phase k.
- β : rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne.
- δ_{ij} : Symbol de Kronecker.
- Δ_f : Largeur caractéristique du filtre.
- ε : Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
- η : Echelle de longueur de Kolmogorov.
- η_r : Rapport entre le temps d'interaction "fluide-particules" et le temps de relaxation des particules.
- λ : Micro-échelle de Taylor.
- ν_1 : Viscosité moléculaire.
- ν_s : Viscosité de sous-maille.
- ν_1^t : Viscosité turbulente du fluide.
- ν_2^t : Viscosité turbulente des particules.
- ν_{12}^t : Viscosité turbulente du mouvement corrélé fluide-particules.
- ξ_r : Rapport de la vitesse relative entre les deux phases sur la racine carrée de l'énergie turbulente du fluide.
- ρ_1 : Masse volumique du fluide.
- ρ_2 : Masse volumique des particules.
- τ_η : Echelle de temps de Kolmogorov.
- τ_{12}^F : Temps de relaxation de la particule.
- τ_1^t : Echelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide.
- τ_{12}^t : Echelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide calculée le long des trajectoires de particules (Temps d'interaction "particules-turbulence").
- τ_2^t : Echelle intégrale temporelle Lagrangienne des particules.

Autre symboles

$\frac{\partial}{\partial t}$: Dérivée partielle par rapport au temps.

$\frac{\partial}{\partial x_j}$: Dérivée spatiale dans la direction j .

$\frac{d}{dt}$: Dérivée particulaire en suivant une particule.

$\frac{D}{Dt}$: Dérivée particulaire en suivant une particule fluide.

$\langle \rangle_1$: Opérateur de moyenne défini sur le fluide.

$\langle \rangle_2$: Opérateur de moyenne défini sur les particules.

\cdot_i : $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur ou la $i^{\text{ème}}$ composante normale d'un tenseur.

\cdot_t : Composante dans la direction parallèle à la vitesse de glissement (effet de croisement de trajectoire).

\cdot_j : Composante dans les directions perpendiculaires à la vitesse de glissement.

\cdot_{ij} : Composante d'un tenseur.

Nomenclature

Roman Symbols

- b : Coefficient for the pressure force and added-mass force.
- c : Coefficient for the Basset force.
- C_A : Corrector coefficient for the added-mass force.
- C_D : Corrector coefficient for the drag force.
- C_β : Crossing-trajectories parameter used in the two-phase flow Eulerian modelling.
- C_s : Smagorinsky constant.
- D_1^t : Fluid eddy diffusivity.
- D_2^t : Particle eddy diffusivity.
- D_{12}^t : Fluid-particle eddy diffusivity.
- d_p : Particle diameter.
- dt : Time separation.
- dx : Grid spacing in the x-direction.
- $\bar{D}_{1,ij}$: Strain rate tensor of the large scales fluid velocity.
- E^e : Three-dimensional spatial energy spectrum.
- E_1 : Lagrangian frequency spectrum of the fluid velocity.
- E_1 : Lagrangian frequency spectrum tensor of the fluid velocity computed along particle path.
- E_2 : Lagrangian frequency spectrum of the particles velocity.
- $f(r)$: Fluid Eulerian correlation of the longitudinal velocity component.
- $f_{2,i}$: Component of the force acting on a particle.
- $g(r)$: Fluid Eulerian correlation of the lateral velocity component.
- I : Integral length scale.
- $I_{k,i}$: Component of the interfacial momentum transfer rate between phases after subtraction of the mean pressure contribution.
- k : Wave number.

- k_{\min} : The smallest wave number used in the simulation.
- k_{\max} : The largest wave number used in the simulation.
- L_b : Length of the computational box.
- L_f^e : Longitudinal integral length scale.
- L_g^e : Lateral integral length scale.
- L_{ij} : Leonard tensor.
- P_1 : Instantaneous pressure.
- \bar{P}_1 : Large scale pressure.
- Q_{12} : Particle response coefficient.
- $q_1^2 = \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1$: Turbulence kinetic energy.
- $q_2^2 = \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$: Kinetic energy of the fluctuating particle motion.
- $q_{12} = \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2$: Kinetic energy of the fluctuating fluid-particle motion.
- R_{ij} : Subgrid scale tensor.
- Re^λ : Taylor microscale Reynolds number.
- Re^p : Particle Reynolds number.
- R_{ij}^e : Fluid Eulerian velocity correlation tensor.
- R_1 : Fluid Lagrangian velocity autocorrelation tensor.
- \mathcal{R}_1 : Lagrangian autocorrelation of the fluid velocity computed along particle path.
- R_2 : Particle velocity autocorrelation.
- S : Skewness of the velocity derivative.
- T^e : Eulerian integral time scale.
- u_1 : Instantaneous fluid velocity.
- U_1 : Mean fluid velocity.
- u''_1 : Fluctuating fluid velocity.

- \bar{u}_1 : Large scale fluid velocity.
- u_1^{sm} : Subgrid-scale fluid velocity.
- $(\vec{u}_1(t))_2$: Fluid velocity viewed by the particles.
- u_2 : Instantaneous particle velocity.
- U_2 : Mean particle velocity.
- u''_2 : Fluctuating particle velocity.
- $\langle u''_{1,i} u''_{1,j} \rangle$: Reynolds stress tensor.
- $\langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2$: Particle velocity variance tensor.
- $\langle u''_{1,i} u''_{1,j} \rangle_2$: Fluid velocity variance tensor computed along particle path.
- $\langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2$: Fluid-particle velocity covariance tensor.
- v_p : Particle volume.
- v_d : Diffusion velocity (Eq. 5.1.17).
- v_r : Instantaneous relative velocity between a particle and the surrounding fluid.
- V_r : Mean relative velocity.
- y_2 : Particle position.
- $\langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t)$: Fluid particle displacement tensor.
- $\langle y_{2,i} y_{2,j} \rangle_2(t)$: Particle displacement tensor.

Greek Symbols

- α_k : Volumetric fraction for the phase k.
- β : Ratio of the Lagrangian to Eulerian integral time scales.
- δ_{ij} : Kronecker delta.
- Δ_f : Filter width.
- ε : Dissipation rate of turbulent kinetic energy.
- η : Kolmogorov length scale.
- η_r : Ratio of the eddy-particle interaction to the particle characteristic time.
- λ : Taylor microscale.
- ν_1 : Kinematic viscosity.
- ν_s : Subgrid viscosity.
- ν_1^l : Fluid eddy-viscosity.
- ν_2^l : Particle eddy-viscosity.
- ν_{12}^l : Fluid-particle eddy-viscosity.
- ξ_r : Ratio of the relative velocity to the Rms fluid velocity fluctuation.
- ρ_1 : Fluid density.
- ρ_2 : Particle density.
- τ_η : Kolmogorov time scale.
- τ_{12}^F : Particle characteristic time.
- τ_1^l : Fluid Lagrangian integral time scale.
- τ_{12}^l : Fluid Lagrangian integral time scale computed along particle path (Eddy-particle interaction time).
- τ_2^l : Particle Lagrangian integral time scale.

Other Symbols

$\frac{\partial}{\partial t}$: Partial derivative with respect to t .

$\frac{\partial}{\partial x_j}$: Partial derivative with respect to x_j .

$\frac{d}{dt}$: Time dérivative following a particle.

$\frac{D}{Dt}$: Time dérivative following a fluid element.

$\langle \rangle_1$: Averaging operator associated to the fluid.

$\langle \rangle_2$: Averaging operator associated to the particles.

$_{,i}$: i th component of a vector or i th normal component of a tensor.

$_{\parallel}$: Component in the parallel to the mean relative velocity directions (Crossing-trajectories effects).

$_{\perp}$: Component in the lateral to the mean relative velocity directions.

$_{,ij}$: ij th component of a tensor.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la modélisation des écoulements diphasiques présentant une phase continue et une phase dispersée, et plus particulièrement dans celui de l'étude des caractéristiques fluctuantes de la phase dispersée, induites par un écoulement porteur turbulent.

La connaissance des écoulements diphasiques est très utile dans l'étude de nombreux procédés industriels, la sidérurgie, l'industrie chimique, le traitement des eaux, mais également pour étudier le transport de particules dans l'atmosphère (polluants, gouttes d'eau) et de sédiments dans les écoulements fluviaux ou maritimes. D'autre part, elle s'inscrit directement dans certaines préoccupations techniques d'E.D.F. : les écoulements à bulles dans les centrales thermiques et nucléaires, le procédé du lit fluidisé circulant étudié pour les nouvelles centrales thermiques utilisant la combustion du charbon pulvérisé ou l'utilisation de combustible liquide dans les chambres de combustion de turbines à gaz. Ces applications ont motivé le développement de logiciels de simulation d'écoulements turbulents diphasiques, Melodif (2D) puis ASTRID (3D), à la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F.

L'objectif de cette étude est double. Le premier est d'essayer d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans les processus de transport de particules discrètes placées dans un champ turbulent. Le second est d'affiner et de valider certaines hypothèses de fermeture utilisées pour la prédiction numérique des écoulements diphasiques turbulents, à l'aide d'un modèle utilisant des équations de transport Eulériennes pour les deux phases, modèle développé depuis plusieurs années au Laboratoire National d'Hydraulique d'E.D.F. (Simonin et Viollet, 1988).

Afin de modéliser l'agitation turbulente de la phase dispersée et les termes de transferts interfaciaux entre les phases, l'approche Eulérienne s'appuie sur la description Lagrangienne du mouvement des particules qui permet l'analyse théorique du transport de particules par une turbulence homogène.

Historiquement, le problème de la diffusion de particules fluides a été abordé par une approche Lagrangienne. Ainsi dès 1921, Taylor présente une étude monodimensionnelle de la diffusion de particules fluides. Batchelor (1949)

étend cette analyse au cas tridimensionnel, puis Corrsin (1953) étudie la diffusion dans le cas d'une turbulence homogène cisailée stationnaire.

La dispersion de particules ayant une masse volumique différente de celle du fluide a également été traitée en utilisant le point de vue Lagrangien. Tchen (1948) montre que, si l'on attend un temps infini, la dispersion de particules est égale à la diffusion de particules fluides. Hinze (1959) relie la variance des vitesses des particules à l'énergie turbulente du fluide. Csanady (1963) étudie le cas de particules ayant une vitesse moyenne différente de celle du fluide. Il met en évidence ce qu'il appelle l'effet de croisement de trajectoires et montre que les particules dispersent alors moins vite que les particules fluides. Hjelmelt et Mockros, Meek et Jones, Pismen et Nir, Gouesbet et al., utilisent également une approche Lagrangienne pour analyser les phénomènes de dispersion.

Pendant longtemps, les théoriciens n'ont pu confronter leurs analyses avec des résultats expérimentaux, car les statistiques Lagrangiennes sont malheureusement très difficiles à mesurer. C'est pourquoi une des principales difficultés pour comprendre les processus de transport par la turbulence a été d'essayer de relier des grandeurs Eulériennes aux grandeurs Lagrangiennes. De nombreuses personnes ont tenté de déterminer le rapport entre les échelles temporelles Eulériennes et Lagrangiennes, que ce soit par des considérations théoriques, Saffman (1962) et Corrsin (1963), ou à partir de résultats expérimentaux obtenus dans des turbulences de grille : Uberoi et Corrsin (1953), Shlien et Corrsin (1974), Snyder et Lumley (1971), Sato et Yamamoto (1987). On constate également un manque de données expérimentales sur la dispersion de particules. Seuls Snyder et Lumley (1971) et Wells et Stock (1984) ont réalisé des mesures de dispersion de particules dans une turbulence de grille.

A cause de la décroissance de la turbulence, l'analyse de tous ces résultats est difficile. En effet, la mesure de la diffusion ou de la dispersion dépend de la distance à la grille du point d'injection des particules, mais également de la position du premier point de mesure. Pour interpréter quantitativement les résultats dans une turbulence décroissante, il faut connaître avec précision les conditions initiales sur l'ensemble des particules et effectuer un recalage des données expérimentales, Shlien et Corrsin (1974). L'idéal serait donc de pouvoir faire des simulations physiques de la dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, mais ceci n'est pas réalisable.

Très récemment, l'avènement des supercalculateurs a permis d'entreprendre des simulations numériques directes d'écoulements turbulents. Ces simulations permettent de calculer une turbulence homogène isotrope maintenue artificiellement stationnaire, dans laquelle on peut simuler la diffusion ou la dispersion de particules. Cette approche a déjà été suivie par Yeung et Pope (1989) pour la diffusion d'un nuage de particules fluides et par Squires et Eaton (1990) pour la dispersion de particules. C'est cette voie qui a été choisie pour tenter de répondre aux questions posées au début de cette thèse (1988).

La première partie de ce travail a consisté à mettre en place une "expérience numérique", c'est-à-dire à développer les outils permettant de simuler le mouvement de particules discrètes dans des champs turbulents. Il faut préciser que l'on s'intéresse dans cette étude uniquement aux écoulements diphasiques à phase dispersée, c'est-à-dire à des écoulements dans lesquels le diamètre des inclusions est très petit devant les échelles caractéristiques de la phase continue. Il faut également noter que l'on restreint l'étude au cas où la phase dispersée est suffisamment diluée pour que son influence sur le champ de vitesse de la phase continue puisse être négligée.

Les champs de vitesse du fluide sont calculés par une approche apparentée à la simulation directe, qui consiste à calculer directement les grandes échelles de la turbulence et à modéliser les plus petites. Ce choix a été dicté par des raisons historiques, puisqu'une telle approche a été développée au L.N.H. (E.D.F.) depuis longtemps, au cours de deux thèses, Baron (1982), Khoudli (1988) et de divers travaux, Laurence (1985). Cette approche pourrait étonner certains lecteurs puisque l'on prétend faire une expérience numérique alors que l'on ne résout pas directement les équations de Navier-Stokes et que les petites échelles dissipatives de la turbulence sont modélisées. Elle se justifie si l'on considère que ce sont les grandes échelles de la turbulence, porteuses d'énergie, qui contribuent de façon significative aux mouvements des particules, et que ces échelles ne sont pas modélisées mais obtenues directement à partir du calcul. Cette méthode présente en outre deux avantages non négligeables. Elle permet d'obtenir des champs turbulents à nombres de Reynolds plus élevés que ceux obtenus par des simulations directes, plus proches de ceux existant dans la plupart des applications. Elle permet surtout de simuler des champs turbulents dans des domaines plus grands, et donc de moins subir, pour le calcul des statistiques Lagrangiennes,

les effets néfastes des conditions de périodicité qui sont utilisées pour le calcul de turbulence homogène.

Dans le premier chapitre de ce rapport, nous présentons le modèle utilisé pour simuler la turbulence, ainsi qu'une description de la méthode utilisée pour maintenir les champs turbulents stationnaires. Nous définissons également, d'un point de vue Eulérien, les échelles caractéristiques de la turbulence, dans le but d'analyser et de valider les résultats des simulations. Ces résultats, dans le cas de la turbulence homogène stationnaire, sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus par Wells et Stock (1984) et aux résultats de simulations directes de Yeung et Pope (1989), et Squires et Eaton (1990). Nous discutons, en outre, des avantages et des inconvénients de la LES (Large Eddy Simulation ou simulation directe des grandes échelles de la turbulence) par rapport à la simulation directe et nous essayerons d'en fixer les limites.

Au chapitre 2, le problème de la simulation de trajectoires de particules est abordé. Il débute par une présentation de l'équation du mouvement des particules, dont l'expression de certains termes est toujours un sujet de réflexion. Il continue par une description détaillée des méthodes numériques utilisées pour simuler les trajectoires, du schéma d'intégration et de la méthode d'interpolation, avec une estimation de son influence sur un spectre de turbulence. Il se termine par une présentation de résultats de tests numériques effectués afin de choisir le schéma d'intégration et la discrétisation des forces s'exerçant sur les particules. Ils ont consisté à simuler la diffusion de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée. Nous analysons également quelques résultats de diffusion de particules fluides ou de dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, considérés comme significatifs pour valider les méthodes numériques utilisées.

La diffusion de particules fluides est étudiée dans le chapitre 3. Après avoir exposé les résultats théoriques de Taylor (1921) et de Batchelor (1949), nous présentons les résultats de diffusion de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope stationnaire. Nous observerons le bon accord des résultats avec l'analyse théorique. Le rapport entre l'échelle temporelle intégrale Lagrangienne et l'échelle temporelle intégrale Eulérienne est comparé avec ceux relevés dans la littérature. Nous discuterons également de

la forme de la fonction d'autocorrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide.

Le chapitre 4 débute par un exposé des travaux de Tchen et Hinze, qui, en utilisant des hypothèses assez restrictives, étudient la dispersion d'un nuage de particules dans un champ de turbulence homogène stationnaire. Afin de s'affranchir de l'hypothèse, que durant son mouvement chaque particule suit la même particule fluide, nous proposons une extension de la théorie de Tchen-Hinze, qui utilise explicitement la notion de fluide "vu" par les particules. Nous verrons que, dans ce cadre, l'effet de croisement de trajectoires est un phénomène physique particulier pour lequel nous savons estimer les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules. Nous nous apercevons alors que cet effet modifie non seulement la vitesse de dispersion des particules (Csanady, 1963) mais aussi le niveau d'énergie du mouvement fluctuant des particules.

Dans le chapitre 5, l'aspect modélisation Eulérienne du mouvement de particules dans un champ turbulent est exposé. Ce modèle est celui utilisé dans les codes diphasiques de la Direction des Etudes et Recherches d'E.D.F. : Melodif (2D), ASTRID (3D). La dégénérescence du modèle dans le cas d'une turbulence homogène stationnaire est étudiée afin d'exprimer un coefficient de dispersion. Un travail similaire est réalisé pour calculer un coefficient de viscosité turbulente dans le cas d'un écoulement turbulent homogène simplement cisailé.

Dans le chapitre 6, les résultats des simulations de dispersion de nuages de particules (25000-100000) dans une turbulence homogène stationnaire sont présentés. Trois types de particules sont étudiés : des particules avec une masse volumique très grande devant celle du fluide (particules denses), des particules avec une masse volumique légèrement plus importante que celle du fluide (sédiments), et enfin des particules beaucoup plus légères que le fluide (bulles). Dans cette turbulence, on a étudié également l'effet de croisement de trajectoires et celui d'un gradient de vitesse moyenne de particules sur la dispersion d'un nuage de particules denses. Les résultats sont comparés aux modèles théoriques. Certaines caractéristiques du fluide "vu" par les particules sont présentées. Quelques hypothèses de fermeture

utilisées dans le modèle Eulérien sont validées, notamment celles concernant l'expression des coefficients de transport : dispersion et viscosité turbulente.

Chapitre 1

Simulation de la turbulence du fluide

Au début de ce travail, nous avons décidé d'utiliser les résultats des simulations de la turbulence du fluide comme des données, afin de concentrer nos efforts sur la simulation du mouvement des particules et sur l'interprétation physique des résultats. A priori, cette décision était justifiée par le bon accord des résultats des simulations présentées dans la thèse de A. Khoudli avec les mesures expérimentales de Comte-Bellot et Corrsin (1966) pour le cas d'une décroissance de turbulence homogène isotrope et ceux de Champagne et al. (1970) dans le cas d'un écoulement turbulent homogène cisailé.

Malheureusement, ces simulations ne permettent pas d'obtenir des champs turbulents stationnaires, qui sont les plus propices à l'étude Lagrangienne de la dispersion de particules. Pour s'affranchir des problèmes posés par l'instationnarité de ces champs turbulents, on s'est intéressé aux simulations de turbulence homogène isotrope entretenue (maintenue artificiellement stationnaire). Un effort de validation a donc été fait, afin de vérifier que les résultats de ces simulations respectaient bien certains critères connus de la turbulence homogène stationnaire, et pour les comparer avec ceux obtenus en simulation directe par Squires et Eaton (1990), ainsi que Yeung et Pope (1989).

1.1 LES : simulation directe des grandes échelles de la turbulence

La LES est apparentée à la simulation directe. Elle consiste à simuler directement toute une gamme d'échelles turbulentes comprises entre la plus grande échelle de la turbulence et une échelle dite de coupure. Toutes les autres, comprises entre cette échelle de coupure et l'échelle de Kolmogorov, sont appelées échelles de sous-maille et doivent être modélisées. Comme en simulation directe, l'étendue de la gamme des échelles turbulentes simulées dépend directement du nombre de points du maillage. Il est donc évident que,

pour un même nombre de points, l'approche LES donne accès à des nombres de Reynolds plus élevés. Par contre, elle ne peut en aucun cas donner des informations sur les petites échelles de la turbulence.

1.1.1 Equations de base

L'objectif est de résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes. Dans le cas d'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible, les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_{1,i} = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} u_{1,i} + \rho_1 u_{1,j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} P_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho_1 \nu_1 \frac{\partial}{\partial x_j} u_{1,i} \right] \quad (1.1.2)$$

dans lesquelles $u_{1,i}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse instantanée du fluide non perturbé par la présence des particules, P_1 la pression, ρ_1 la masse volumique, ν_1 la viscosité cinématique du fluide. On applique, dans ce mémoire, la convention d'Einstein qui suppose la sommation des indices répétés.

1.1.2 Equations du mouvement des grandes échelles

Dans l'approche LES utilisée, la séparation des échelles est imposée naturellement par le maillage. L'échelle de coupure qui sépare les échelles simulées directement et celles qui sont modélisées, est fixée implicitement par la taille des mailles.

Les équations qui régissent le mouvement des grandes échelles sont obtenues par le filtrage des équations du mouvement instantané. Le filtre induit directement par le maillage peut être exprimé formellement comme un produit de convolution :

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} G(\vec{x} - \vec{x}', \Delta_f) \cdot f(\vec{x}', t) d\vec{x}' = G * f \quad (1.1.3)$$

dans laquelle Ω désigne le domaine spatial de calcul, Δ_f la largeur caractéristique du filtre spatial et G la fonction non explicitée qui caractérise le filtre.

Chaque champ f peut donc être décomposé en un champ des grandes échelles et un champ résiduel :

$$f(\vec{x},t) = \bar{f}(\vec{x},t) + f^{sm}(\vec{x},t)$$

La fonction G vérifie les hypothèses de commutation de l'opération de filtrage avec la dérivation spatiale et temporelle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} f} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{f} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} f}$$

En revanche, cette opération de filtrage n'est pas idempotente : $\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}$.

En appliquant ce filtre aux équations de Navier-Stokes, on obtient le système d'équations du mouvement des grandes échelles :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_{1,i} = 0 \tag{1.1.4}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_{1,i} + \rho_1 \bar{u}_{1,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_{1,i} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{P}_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_{1,i} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_1 L_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_1 C_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_1 R_{ij} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

$L_{ij} = \overline{u_{1,i} u_{1,j}} - \bar{u}_{1,i} \bar{u}_{1,j}$ est appelé tenseur de Léonard, $C_{ij} = \overline{u_{1,i}^{sm} u_{1,j}} + \overline{u_{1,i} u_{1,j}^{sm}}$ tenseur des termes croisés, et $R_{ij} = \overline{u_{1,i}^{sm} u_{1,j}^{sm}}$ tenseur de sous-maille.

Ces trois termes doivent être modélisés : le premier parce que l'on ne connaît pas explicitement le filtre spatial, les autres puisqu'ils font intervenir des grandeurs non simulées. Cette opération est appelée modélisation de sous-maille.

1.1.3 Modèle de sous-maille

Dans la littérature, il existe différentes approches pour modéliser ces termes. Ce débat étant hors de propos dans ce travail, nous nous contenterons ici de présenter la modélisation utilisée. Pour plus d'informations le lecteur pourra

se référer à la thèse de M. Khoudli (1988) ou au rapport de Bardina et al.(1983).

Modélisation du tenseur de sous-maille.

Ce modèle repose sur l'hypothèse que l'action des structures turbulentes, plus petites que l'échelle de coupure, peut être réduite à un phénomène de diffusion. Ceci permet d'adopter une modélisation du type viscosité turbulente :

$$R_{ij} = -2 v_s \bar{D}_{1,ij} \quad (1.1.6)$$

avec

$$\bar{D}_{1,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_{1,i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_{1,j} \right) \quad (1.1.7)$$

v_s , appelé coefficient de viscosité turbulente de sous-maille, est déterminé à l'aide du modèle de Smagorinsky.

Si le nombre de Reynolds de l'écoulement turbulent est suffisamment grand pour laisser place à un grand nombre d'échelles turbulentes, on peut isoler toute une gamme d'échelles dans laquelle les échanges d'énergie des grandes échelles vers les petites se font à un taux constant ϵ . Cette zone est appelée zone inertielle ou "zone de quasi-équilibre" et présente la particularité d'avoir un spectre d'énergie qui décroît en suivant une loi constante en puissance $-5/3$ (loi de Kolmogorov).

Le taux de transfert ϵ peut être calculé directement à l'aide de la viscosité cinématique et de la plus petite échelle spatiale turbulente, appelée échelle de dissipation visqueuse ou échelle de Kolmogorov η .

$$\epsilon = \frac{v^3}{\eta^4} \quad (1.1.8)$$

Par analogie, nous supposons que le taux moyen de transfert d'énergie, des échelles turbulentes simulées vers les échelles de sous-maille, peut être exprimé à l'aide de la viscosité moyenne de sous-maille $\langle v_s \rangle$ et de la plus petite échelle de longueur simulée Δ_f .

$$\epsilon_s = \frac{\langle v_s \rangle^3}{\Delta_f^4} \quad (1.1.9)$$

Si la coupure se trouve dans la zone inertielle, zone de quasi-équilibre, la dissipation moyenne de sous-maille est égale à la production de l'énergie de sous-maille :

$$\epsilon_s = \langle 2 v_s \bar{D}_{1,ij} \bar{D}_{1,ij} \rangle \quad (1.1.10)$$

Le modèle de Smagorinsky pour la viscosité turbulente est obtenu à partir des relations (1.1.9) et (1.1.10) appliquées localement.

$$\nu_s = (C_s \Delta_f)^2 \sqrt{2 \overline{D_{1,ij}} \overline{D_{1,ij}}} \quad (1.1.11)$$

Négliger les variations spatiales de la viscosité de sous-maille n'apporte pas de grandes différences sur les résultats (voir Bardina et al.).

C'est pourquoi, pour faciliter la résolution numérique des équations, la viscosité de sous-maille est calculée de la façon suivante :

$$\nu_s = \langle (C_s \Delta_f)^2 \sqrt{2 \overline{D_{1,ij}} \overline{D_{1,ij}}} \rangle \quad (1.1.12)$$

C_s est appelé la constante de Smagorinsky. Elle a été fixée à 0.12 en simulant la décroissance de la turbulence de grille de Comte-Bellot.

Modélisation du tenseur des termes croisés.

Le tenseur des termes croisés est modélisé en s'inspirant du "Scale similarity model" proposée par Bardina et al.. Ils ont supposé que :

$$\overline{u_{1,i}^{sm} u_{1,i}^{sm}} = \overline{u_{1,i}^{sm}} \overline{u_{1,i}^{sm}}, \text{ et } \overline{u_{1,i}^{sm} u_{1,j}^{sm}} = \overline{u_{1,i}^{sm}} \overline{u_{1,j}^{sm}}$$

Le tenseur des termes croisés peut donc s'écrire :

$$C_{ij} = (\overline{u_{1,i}} - \overline{u_{1,i}}) \overline{u_{1,j}} + (\overline{u_{1,j}} - \overline{u_{1,j}}) \overline{u_{1,i}} \quad (1.1.13)$$

Dans la pratique, c'est la divergence de C_{ij} qui intervient dans l'équation (1.1.5). Elle est exprimée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} C_{ij} = \overline{u_{1,j}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_{1,i}} - \overline{u_{1,i}}) + (\overline{u_{1,j}} - \overline{u_{1,j}}) \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_{1,i}} \quad (1.1.14)$$

Le premier terme est négligé, le second est pris en compte par une modification du champ convecteur. Les termes de la forme $\overline{u_{1,i}}$ ne peuvent pas être obtenus directement. Ils sont approchés par un filtrage Gaussien du champ à grande échelle.

Ce filtre Gaussien est défini de la façon suivante :

$$G(\vec{x}-\vec{x}', \Delta_f) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\Delta_f} \exp\left(-\frac{6(\vec{x}-\vec{x}')^2}{\Delta_f^2}\right) \quad (1.1.15)$$

avec $\Delta_f = 2 dx$, la taille de la maille.

Modélisation du terme de Léonard

La contribution du terme de Léonard est estimée par un filtrage Gaussien du champ de vitesse à grande échelle après l'étape de convection,

$$\overline{u_{1,j}^c} = \overline{u_{1,i}^n} + \overline{u_{1,i}^c} - \overline{u_{1,i}^n} \quad (1.1.16)$$

dans laquelle $\overline{u_{1,i}^n}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du champ de vitesse à l'instant t^n , et $\overline{u_{1,i}^c}$ le résultat de l'étape de convection.

1.1.4 Méthodes numériques

Le code de calcul de LES développé au LNH successivement par Baron (1982), Laurence (1985), Khoudli (1988) est basé sur une discrétisation en différences finies. Une méthode de séparation des opérateurs, appelée méthode des pas fractionnaires, est utilisée. Elle permet de résoudre séparément chaque opérateur de nature différente avec des méthodes numériques appropriées.

Les équations de bilan sont scindées en trois parties :

- convection,
- diffusion + termes sources,
- pression.

La convection est résolue à l'aide d'une formulation faible de la méthode des caractéristiques (Laurence 1985, Khoudli 1988).

Les étapes de diffusion et de pression sont résolues par transformation de Fourier dans les directions de périodicité associées à une méthode d'élimination de Gauss (Schmidt et al. 1984).

Conditions aux limites.

Dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope, les champs de vitesse moyenne et de pression sont supposés périodiques. On applique donc dans chaque direction des conditions de périodicité.

Par exemple, dans la direction x_1 du domaine de calcul de longueur L_b , on applique :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 + L_b, x_2, x_3) \quad (1.1.17)$$

Par contre, dans le cas où l'on a un gradient de vitesse moyenne constant dans une direction, on utilise une condition de périodicité qui tient compte du décalage provoqué par la différence des vitesses moyennes aux extrémités (Baron 1982).

Ainsi, si l'on impose un gradient de la vitesse moyenne $\langle \bar{u}_{1,1} \rangle$ dans la direction 3, on applique :

$$f(x_1, x_2, x_3 + L_b) = f(x_1 - U_{\max} t, x_2, x_3) \quad (1.1.18)$$

avec

$$S = \frac{\partial}{\partial x_3} \langle \bar{u}_{1,1} \rangle = \frac{U_{\max}}{L_b} \quad (1.1.19)$$

1.2 Echelles caractéristiques Eulériennes en turbulence homogène

Les échelles caractéristiques de la turbulence nous permettent de définir les champs turbulents simulés, mais également de vérifier qu'ils respectent bien certains critères connus de la turbulence. Dans ce chapitre, nous définissons ces échelles et ces critères.

1.2.1 Turbulence homogène

Nous rappelons que l'on peut décomposer le champ de vitesse en un champ moyen et un champ fluctuant : $u_{1,i} = \langle u_{1,i} \rangle + u''_{1,i}$. L'opérateur de moyenne vérifie les axiomes de Reynolds.

Précisons que, selon les auteurs, le terme homogène peut désigner, soit une turbulence dans laquelle toutes les propriétés statistiques (y compris $\langle u \rangle$) de la turbulence sont invariantes par translation, soit une turbulence où seules les propriétés statistiques des fluctuations de vitesse le sont. Craya (1958) a montré qu'une telle turbulence n'est possible que si le gradient de la vitesse moyenne est constant. Nous nous placerons dans la deuxième interprétation.

Tenseur des corrélations Eulériennes de vitesse

On définit le tenseur des corrélations de vitesse,

$$R_{ij}^e(\vec{r}, t) = \frac{\langle u''_{1,i}(\vec{x}, t) u''_{1,j}(\vec{x} - \vec{r}, t) \rangle}{\sqrt{\langle u''_{1,i}^2(\vec{x}, t) \rangle} \sqrt{\langle u''_{1,j}^2(\vec{x} - \vec{r}, t) \rangle}} \quad (1.2.1)$$

dans lequel \vec{x} est le vecteur position et \vec{r} le vecteur qui sépare les deux points de la corrélation.

Remarque : toutes les grandeurs sont prises au même instant t et pour alléger les notations, la variable t n'est plus écrite dans ce chapitre.

Le tenseur des corrélations Eulériennes vérifie les propriétés suivantes :

homogénéité

$$R_{ij}^e(\vec{r}) = R_{ji}^e(-\vec{r}) \quad (1.2.2)$$

inégalité de Schwartz

$$\left| R_{ij}^e(\vec{r}) \right| \leq 1 \quad (1.2.3)$$

incompressibilité

$$\frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij}^e(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} R_{ij}^e(\vec{r}) \quad (1.2.4)$$

Tenseur de densité spectrale d'énergie

Le tenseur de densité spectrale d'énergie $\Phi_{ij}(\vec{k})$ est défini à partir de la transformée de Fourier du tenseur des corrélations des vitesses. Puisque la turbulence est homogène, il s'écrit :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle \langle u_{1,j}^2 \rangle} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\vec{r}) \exp[-i \vec{k} \cdot \vec{r}] d\vec{r} \quad (1.2.5)$$

Le spectre Eulérien d'énergie $E^e(k)$ est obtenu en intégrant $\Phi_{ii}(\vec{k})$ sur une sphère S_k de rayon k .

$$E^e(k) = \int_{S_k} \Phi_{ii}(\vec{k}) dS_k \quad (1.2.6)$$

Ce spectre apparaît bien comme une densité spectrale d'énergie. En effet :

$$\frac{1}{2} \langle u_{1,i}^2 \rangle = \int_0^{+\infty} E^e(k) dk \quad (1.2.7)$$

Vorticité et Enstrophie

La vorticité $\vec{\omega}$ de l'écoulement est le rotationnel du champ des fluctuations de vitesse.

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}''_1 \quad (1.2.8)$$

On définit l'enstrophie D à partir de la moyenne du rotationnel au carré.

$$D = \frac{1}{2} \langle \omega_{1,i} \omega_{1,i} \rangle \quad (1.2.9)$$

Elle est reliée au spectre d'énergie par la relation :

$$D = \int_0^{+\infty} k^2 E^e(k) dk \quad (1.2.10)$$

1.2.2 Turbulence isotrope homogène stationnaire

La turbulence est dite isotrope si toutes les caractéristiques statistiques du champ fluctuant sont invariantes par rotation. Dans ce cas, le tenseur des corrélations $R_{ij}^e(\vec{r})$ peut s'écrire sous une forme particulière :

$$R_{ij}^e(\vec{r}) = \left[g(r) \delta_{ij} + \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j \right] \quad (1.2.11)$$

$f(r)$ représente la fonction de corrélation longitudinale des vitesses et $g(r)$ la fonction de corrélation transversale, avec :

$$f(r) = R_{ii}^e(\vec{r}e_i) \text{ et } g(r) = R_{ii}^e(\vec{r}e_j)_{j \neq i} \quad (\text{sans sommation sur les indices}).$$

Ces fonctions permettent de définir l'échelle de longueur intégrale I et la micro échelle de Taylor λ :

$$I = \int_0^{+\infty} f(r) dr \quad (1.2.12)$$

$$\lambda = \left[-\frac{2}{g''(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.13)$$

Nous pouvons montrer qu'elles vérifient l'égalité suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} f(r) dr = 2 \int_0^{+\infty} g(r) dr = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\langle u_i'^2 \rangle} \int_0^{+\infty} E^e(k) dk \quad (1.2.14)$$

En turbulence isotrope, le taux de dissipation ϵ peut être calculé à partir du spectre d'énergie.

$$\epsilon = 2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E^e(k) dk \quad (1.2.15)$$

Il est relié à l'enstrophie par la relation:

$$\epsilon = 2\nu D. \quad (1.2.16)$$

1.2.3 Echelles caractéristiques

Echelles intégrales de la turbulence

Les échelles de longueur intégrales représentent la dimension des grandes structures turbulentes.

Nous définissons deux échelles, longitudinale et transversale, respectivement par :

$$L_f^e = \frac{1}{3} L_{i,i,i}^e = \frac{1}{3} \int_0^{L_b} R_{ii}^e(\vec{r}_i) dr \quad (1.2.17)$$

$$L_g^e = \frac{1}{6} \sum_{j \neq i} L_{i,i,j}^e = \frac{1}{6} \sum_{j \neq i} \int_0^{L_b} R_{ii}^e(\vec{r}_j) dr \quad (1.2.18)$$

L_b est la taille du domaine de simulation.

Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, elles vérifient, d'après (1.2.14), la propriété suivante :

$$\frac{L_f^e}{L_g^e} = 2 \quad (1.2.19)$$

Ces échelles de longueur sont utilisées pour calculer l'échelle temporelle Eulérienne appelée également temps de retournement du tourbillon.

$$T^e = \frac{L_f^e}{\sqrt{\langle u''_{1,i}{}^2 \rangle}} \quad (1.2.20)$$

où, par convention,

$$\langle u''_{1,i}{}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle \quad (1.2.21)$$

Micro échelle de Taylor

Dans le cas de la turbulence homogène isotrope, la micro échelle de Taylor λ peut être reliée à l'énergie turbulente et au taux de dissipation (via le calcul de la vorticité).

$$\lambda^2 = \frac{15 \nu \langle u''_{1,i}{}^2 \rangle}{\varepsilon} \quad (1.2.22)$$

En turbulence homogène simplement cisailée (dans le cas d'un gradient sur la composante $\langle u_{1,i} \rangle$), nous pouvons calculer l'échelle de Taylor de la manière suivante :

$$\lambda^2 = \lambda_{11,1}^2 = \frac{\langle u''_{1,1}{}^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u''_{1,1} \right)^2 \right\rangle} \quad (1.2.23)$$

Echelles de Kolmogorov

Les échelles de Kolmogorov sont les plus petites échelles de la turbulence. Nous pouvons définir une échelle de longueur, de temps et de vitesse en fonction des grandeurs caractéristiques à petite échelle, ε et ν :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_\eta = (\nu \varepsilon)^{\frac{1}{4}} \quad (1.2.24)$$

Nombres de Reynolds turbulents

La micro échelle de Taylor λ est utilisée en simulation directe pour calculer le nombre de Reynolds turbulent :

$$Re = \frac{\lambda \sqrt{\langle u''_1{}^2 \rangle}}{\nu} \quad (1.2.25)$$

Il est possible d'en construire un autre à partir de l'échelle intégrale.

$$Re = \frac{L_f \sqrt{\langle u''_1{}^2 \rangle}}{\nu} \quad (1.2.26)$$

Coefficient d'asymétrie

Un des critères utilisés pour déterminer si la turbulence est pleinement développée est de vérifier la valeur du coefficient d'asymétrie S .

$$S = \frac{\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u''_{1,i} \right)^3 \rangle}{\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u''_{1,i} \right)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (1.2.27)$$

Pour une turbulence pleinement développée, il doit être compris entre 0.4 et 0.5 (Tavoularis 1978).

1.3 Description des champs turbulents simulés

L'étude Lagrangienne de la dispersion de particules dans des champs turbulents stationnaires permet l'analyse théorique la plus poussée. Bien que n'existant pas en situation réelle, il est possible d'obtenir des champs turbulents homogènes isotropes stationnaires à l'aide des simulations numériques. Nous décrivons dans cette partie la méthode utilisée pour obtenir ces champs.

Les champs simulés correspondent à un de ceux mesurés par Wells et Stock (1983). Les résultats des simulations sont comparés avec ceux de Yeung et Pope (1989) et de Squires et Eaton (1990).

1.3.1 Méthode utilisée pour entretenir la turbulence

Il existe différentes méthodes pour entretenir une turbulence isotrope. Eswaran et Pope (1988), qui utilisent un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes dans l'espace de Fourier, rajoutent dans les équations un terme source qui agit uniquement sur les petits nombres d'onde. Squires et Eaton (1990) utilisent une approche identique.

La méthode que nous avons utilisée consiste à corriger, nombre d'onde par nombre d'onde, le spectre tridimensionnel afin qu'il conserve sa forme initiale. Cela revient à calculer un terme source pour chaque nombre d'onde. A la fin de chaque pas de temps, nous calculons le spectre de chaque composante du champ de vitesse. Le rapport de ce spectre avec celui choisi initialement permet de déterminer un coefficient pour chaque nombre d'onde :

$$C_j(k_i, t^n) = \frac{E_j^e(k_i, t^n)}{E^0(k_i)}, \quad \forall i = (1, \dots, N) \quad (1.3.1)$$

dans laquelle E_j^e est le spectre calculé à l'instant t^n à partir de la $j^{\text{ème}}$ composante de vitesse, E^0 le spectre initial choisi, k_i le $i^{\text{ème}}$ nombre d'onde et N le nombre de longueurs d'onde simulés.

par définition, nous savons que :

$$E_j^e(k_i, t^n) = \langle \hat{u}_{1,j} \hat{u}_{1,j}^*(k_i, t^n) \rangle \quad \text{sans sommation sur } j \quad (1.3.2)$$

dans laquelle $\hat{u}_{1,j}$ représente la transformée de Fourier de la $j^{\text{ème}}$ composante de la vitesse fluctuante et l'exposant $*$ son conjugué.

Le coefficient C_j est utilisé pour corriger, dans l'espace de Fourier, le champ de vitesse, nombre d'onde par nombre d'onde.

$$\hat{u}_{1,j} \rightarrow \frac{\hat{u}_{1,j}}{\sqrt{C_j(k_i, t^n)}} \quad \text{sans sommation sur } j \quad (1.3.3)$$

Le champ de vitesse final présente alors un spectre égal au spectre initial. Ceci implique la stationnarité de l'énergie turbulente et de la dissipation (Eq. 1.2.7 et Eq. 1.2.14).

1.3.2 Calcul du spectre initial

Nous avons simulé une turbulence ayant les mêmes caractéristiques que celles mesurées par Wells et Stock (1983, p. 50) dans une turbulence de grille à la position $X/M = 15$ (M est la taille d'une maille de la grille).

Pour simuler cette expérience, nous avons besoin de connaître le spectre tridimensionnel. Ceux mesurés par W. et S. sont monodimensionnels. Bien qu'il existe une relation analytique pour calculer un spectre tridimensionnel à partir de la dérivée seconde du spectre monodimensionnel, le calcul effectué à partir des données relevées sur les courbes expérimentales reste imprécis. Nous avons donc choisi de simuler un écoulement turbulent présentant une viscosité, une énergie turbulente, un taux de dissipation identique à ceux de W. et S., mais avec un spectre tridimensionnel calculé analytiquement à l'aide d'une méthode proposée par Cambon et al. (1981) :

$$E^c(k) = 1.5 \varepsilon^{\frac{2}{3}} L^{\frac{5}{3}} \frac{(kL)^\xi}{\left(1 + (kL)^2\right)^{\frac{\xi}{2} + \frac{5}{6}}} \exp(-1.5 \gamma (K\eta)^{\frac{4}{3}}) \quad (1.3.4)$$

$$L = \beta \frac{(\langle u_1'^2 \rangle)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad \xi = 3.31$$

dans lesquelles γ et β sont des constantes déterminées afin que le spectre vérifie les équations (1.2.7) et (1.2.15).

1.3.3 Résultats des simulations

Les simulations de turbulence isotrope entretenue sont effectuées dans des boîtes cubiques avec des maillages de 64^3 . Les conditions aux limites utilisées sont des conditions de périodicité dans les trois directions.

Nous avons calculé trois fois la même turbulence en déplaçant l'échelle de coupure. Ces calculs sont appelés TH11, TH12, TH13. Les caractéristiques sont données dans le tableau 1.1.

Les dimensions du maillage permettent de calculer les bornes de la fenêtre spectrale simulée. Le plus petit nombre d'onde est inversement proportionnel à la plus grande échelle spatiale, L_b .

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{L_b}$$

Le plus grand nombre d'onde est relié au plus petit par le théorème de Shannon.

$$k_{\max}^m = k_{\min} \frac{Im-1}{2} \text{ pour un spectre monodimensionnel}$$

$$k_{\max}^t = k_{\min} \frac{Im-1}{2} \sqrt{3} \text{ pour un spectre tridimensionnel}$$

Pour les trois calculs, les bornes des fenêtres spectrales sont :

$$\text{THI1 } k_{\min} = 24 \quad k_{\max}^t = 1360$$

$$\text{THI2 } k_{\min} = 32 \quad k_{\max}^t = 1773$$

$$\text{THI3 } k_{\min} = 49 \quad k_{\max}^t = 2720$$

Sur les figures 1.3.1 à 1.3.3, sont superposés les bandes spectrales simulées et le spectre de turbulence. Nous remarquons que, dans chaque cas, elles contiennent le sommet du spectre, et que les fréquences de coupure se situent bien dans la zone inertielle, ou au delà, comme le veut l'hypothèse de base de la LES.

Sur les figures 1.3.4 à 1.3.6, les spectres d'énergie et de dissipation sont présentés sous une forme normalisée. Nous constatons qu'aucun des trois calculs ne permet de prendre en compte les échelles de dissipation. Par contre, ils donnent accès à la plupart des échelles énergétiques.

Dans le tableau 1.1 sont comparés les paramètres de simulation avec ceux mesurés par Wells et Stock. La lecture de ce tableau suggère plusieurs remarques.

- 1) Avec la LES, il est possible d'accéder à toutes les échelles énergétiques (THI3).
- 2) Le rapport entre les échelles de longueur longitudinale et transversale est proche de la valeur théorique : 2.
- 3) Pour THI3 ET THI2, la valeur du coefficient d'asymétrie S indique que la turbulence est bien développée. Par contre, pour THI1, cette valeur est un peu faible.
- 4) Les échelles intégrales de temps T_e calculées s'accordent bien avec celle mesurée par Wells et Stock.

Dans le tableau 1.2, nous pouvons noter que les contraintes normales du tenseur de Reynolds sont parfaitement isotropes. La production parasite de contraintes de cisaillement est faible ; pour THI1 il y a un maximum de 6 %, pour THI2 de 1.5%, et pour THI3 de 3%.

Dans le tableau 1.3, nous avons inscrit les échelles de longueur intégrales définies par les équations (1.2.17, 1.2.18). Nous définissons respectivement un écart maximum et un écart moyen à l'isotropie par :

$$\Delta_{\max} = \sup \left(\left| L_{\text{ii},i}^e - L_r^e \right| / L_r^e \text{ et } \left| L_{\text{ii},j}^e - L_g^e \right| / L_g^e \right) \text{ (sans sommation d'indice)}$$

$$\Delta_{\text{moy}} = \frac{1}{9} \left(\left| L_{\text{ii},i}^e - (3 L_r^e) \right| / L_r^e + \sum_{j \neq i} \left(\left| L_{\text{ii},j}^e - (6 L_g^e) \right| / L_g^e \right) \right)$$

Nous constatons que l'isotropie est correcte pour chaque calcul et qu'elle s'améliore lorsque la taille du domaine augmente. En effet, dans ce cas, le rapport, échelle de longueur intégrale sur taille du domaine de calcul, croît. Cela tend également à améliorer la résolution des grandes échelles de la turbulence.

L'analyse de tous ces résultats permet d'espérer que les champs simulés représentent correctement une turbulence homogène isotrope stationnaire. Les simulations de dispersion de particules ont été faites avec les champs THI2 et THI3. Dans des situations isotropes, nous avons utilisé en priorité les résultats du calcul THI3, calcul qui donne accès à la quasi totalité des échelles énergétiques. Par contre, dans des situations où il est utile de mesurer l'anisotropie, nous avons utilisé THI2 qui est plus isotrope. En ce qui concerne THI1, les trop faibles valeurs de l'énergie turbulente simulée et du coefficient d'asymétrie nous ont conduit à ne pas l'utiliser, malgré ses très bonnes propriétés d'isotropie.

1.3.4 Comparaison avec les calculs de simulation directe

Dans le tableau 1.1, sont également inscrits les résultats obtenus en simulation directe par Yeung et Pope et Squires et Eaton. Nous constatons que ces deux calculs, menés sur le même maillage, sont de nature assez différente.

Yeung et Pope ont choisi de privilégier le Reynolds turbulent avec l'inconvénient d'avoir un rapport, échelle de longueur intégrale sur taille du domaine de calcul, élevé.

Pour calculer les statistiques Lagrangiennes d'un nuage de particules fluides, il faut attendre un certain temps (plusieurs fois T_e en supposant que l'échelle intégrale Eulérienne est du même ordre de grandeur que l'échelle

intégrale Lagrangienne). Pendant ce temps, entraînées par le mouvement turbulent, les particules se déplacent sur une distance de plusieurs fois L_f . Dans le cas où le rapport L_f/L_b est trop élevé, les particules sortent du domaine de calcul. Les statistiques Lagrangiennes sont alors influencées par les conditions de périodicité utilisées pour le calcul de la turbulence fluide.

Ce problème est amplifié lorsque l'on veut simuler la dispersion de particules denses. En effet, pour des diamètres conséquents, le temps de relaxation des particules devient plus grand que l'échelle de temps de la turbulence. Le temps nécessaire au calcul des statistiques Lagrangiennes des particules est donc rallongé.

Ceci justifie le choix de Squires et Eaton, qui, pour simuler la dispersion de particules denses, ont privilégié le rapport des échelles en sacrifiant la valeur du nombre de Reynolds turbulent.

Les simulations de turbulence avec la LES permettent de s'affranchir plus facilement de ce problème. On peut se demander si, pour simuler la dispersion de particules denses, cet avantage n'équilibre pas le handicap de la modélisation de sous-maille, étant bien entendu, que l'on arrive avec la LES à simuler correctement toutes les échelles énergétiques.

Par contre, pour valider les résultats de dispersion de particules légères, ayant un temps de relaxation plus petit que l'échelle de la turbulence, il est indispensable d'évaluer l'effet de l'absence de la représentation des petites échelles de la turbulence dans les calculs en LES.

	THI1	THI2	THI3	W. et S.	Y. ET P.	S. et E.
N^3	64^3	64^3	64^3	x	64^3	64^3
Δx	0.004	0.003	0.002	x	0.096	0.1
ρ_1 (kg/m ³)	1.17	1.17	1.17	1.17	x	x
ν_1 (m ² /s)	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	0.025	0.1
$\sqrt{\langle u''_i{}^2 \rangle}$	0.270	0.283	0.30	0.31	1.549	5.12
ϵ (m ² /s ³)	6.17	6.17	6.17	6.17	2.5	207.04
$0.5 L_b$ (m)	0.128	0.096	0.064	x	3.1	3.14
L_f^e (m)	$7.80 \cdot 10^{-3}$	$7.82 \cdot 10^{-3}$	$7.66 \cdot 10^{-3}$	$8.71 \cdot 10^{-3}$	1.12	0.49
L_g^e (m)	$3.98 \cdot 10^{-3}$	$3.85 \cdot 10^{-3}$	$3.98 \cdot 10^{-3}$	x	0.49	x
L_f^e / L_g^e	1.96	2.03	1.92	x	2.27	x
λ (m)	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	0.6	0.43
η (m)	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-3}$	0.05	0.047
Re_e^λ	37	38	41	42	38	22
$Re_e^{L^e}$	144	150	157	183	69.5	25
$L_f^e / 0.5 L_b$	0.061	0.081	0.118	x	0.362	0.156
λ / L_f^e	0.25	0.25	0.26	0.23	0.53	0.87
η / L_f^e	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.044	0.096
$k_{\min} \eta$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-3}$	x	0.05	0.047
$k_{\max}^m \eta$	0.118	0.153	0.235	x	1.5	1.41
$k_{\max}^l \eta$	0.20	0.265	0.40	x	x	x
T^e (s)	0.029	0.028	0.026	0.028	0.72	0.15
T^e (s)	x	x	x	0.024	1.446	0.19
τ_η (s)	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	0.1	0.022
T^e / τ_η	x	x	x	1.15	0.507	0.79
$\Delta t / \tau_\eta$	0.95	0.68	0.43	x	0.025	x
S	0.28	0.32	0.36	x	0.54	0.4
ν_s (m ² /s)	$11.6 \cdot 10^{-5}$	$8.42 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-5}$	x	x	x

Tableau 1.1 : Paramètres de simulation des calculs de turbulence homogène isotrope stationnaire. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Wells et Stock (W., S.), de simulation de directe de Yeung et Pope (Y., P.), de Squires et Eaton (S., E.).

Rq : T^e est l'échelle de temps définie par : $T^e = 0.5 \frac{\langle u''_{i,1} u''_{i,1} \rangle}{\epsilon}$,

dt le pas de temps et ρ_1 la masse volumique.

	THI1	THI2	THI3
$\langle u''_{1,1} u''_{1,1} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	1.000	1.000	1.000
$\langle u''_{1,1} u''_{1,2} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	0.005	0.002	0.030
$\langle u''_{1,1} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	0.006	0.015	0.006
$\langle u''_{1,2} u''_{1,2} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	1.000	1.000	1.000
$\langle u''_{1,2} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	0.006	0.007	0.029
$\langle u''_{1,3} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1{}^2 \rangle$	1.000	1.000	1.000

Tableau 1.2 : Tenseur de Reynolds de la turbulence fluide.

	THI1	THI2	THI3
$L_{11,1}^c / L_f^c$	1.04	0.93	0.98
$L_{11,2}^c / L_g^c$	0.99	0.91	0.93
$L_{11,3}^c / L_g^c$	1.02	1.01	0.90
$L_{22,1}^c / L_g^c$	1.04	0.99	0.97
$L_{22,2}^c / L_f^c$	0.98	1.01	1.07
$L_{22,3}^c / L_g^c$	0.94	1.09	1.01
$L_{33,1}^c / L_g^c$	1.00	1.06	1.15
$L_{33,2}^c / L_g^c$	1.01	0.93	1.05
$L_{33,3}^c / L_f^c$	0.99	1.06	0.91
Δ_{max}	0.06	0.09	0.15
Δ_{moy}	0.02	0.05	0.07
L_f^c / L_g^c	1.96	2.03	1.92

Tableau 1.3 : Echelles de longueur intégrales calculées à partir des trois composantes de vitesse dans les trois directions d'espace (Eq. 1.2.17 et 1.2.18), adimensionnées par les échelles de longueur isotropisées.

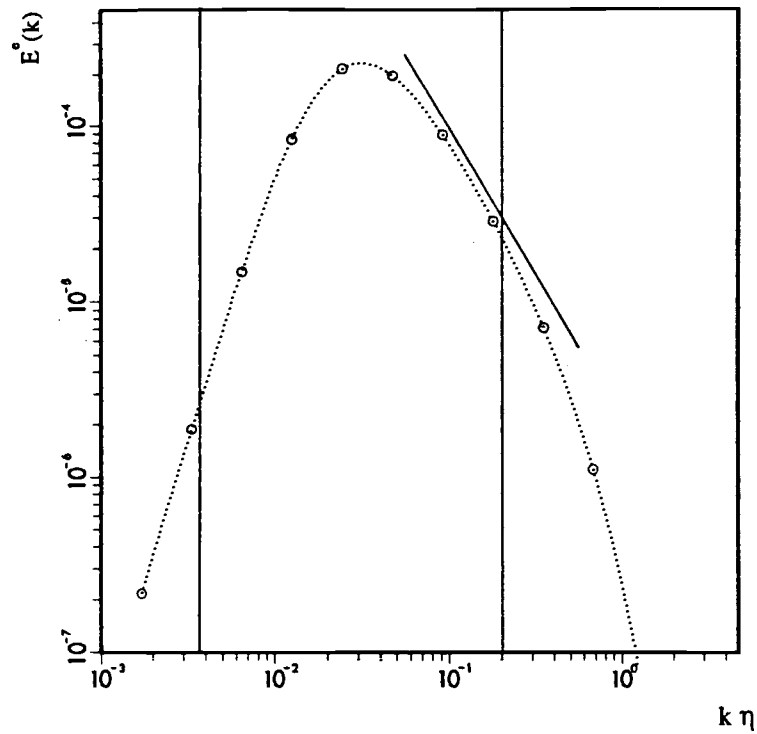


Figure 1.3.1 : Spectre de turbulence tridimensionnel sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH11. Nous indiquons également la pente en $-5/3$.

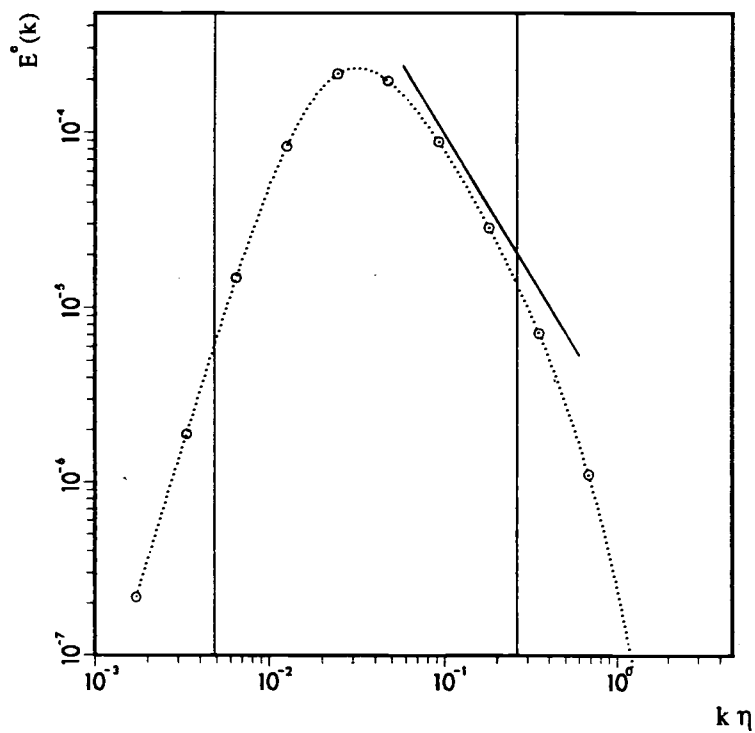


Figure 1.3.2 : Spectre de turbulence tridimensionnel sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH12. Nous indiquons également la pente en $-5/3$.

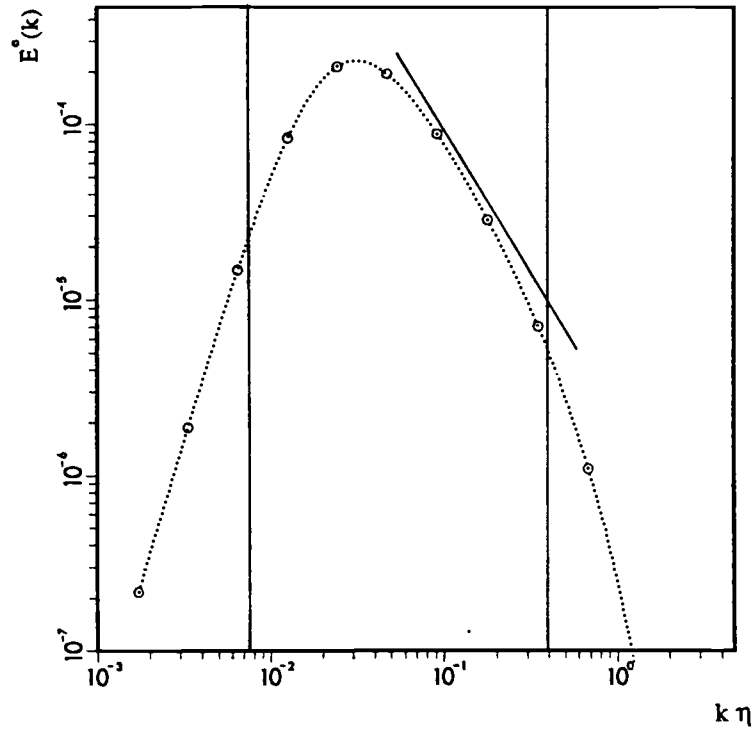


Figure 1.3.3 : Spectre de turbulence tridimensionnel sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH13. Nous indiquons également la pente en $-5/3$.

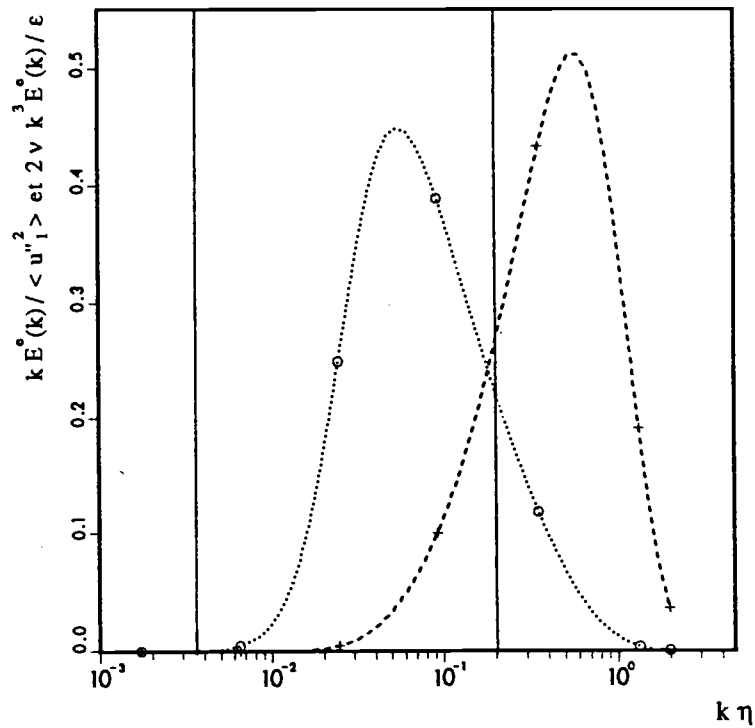


Figure 1.3.4 : Spectre d'énergie et de dissipation sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH11.

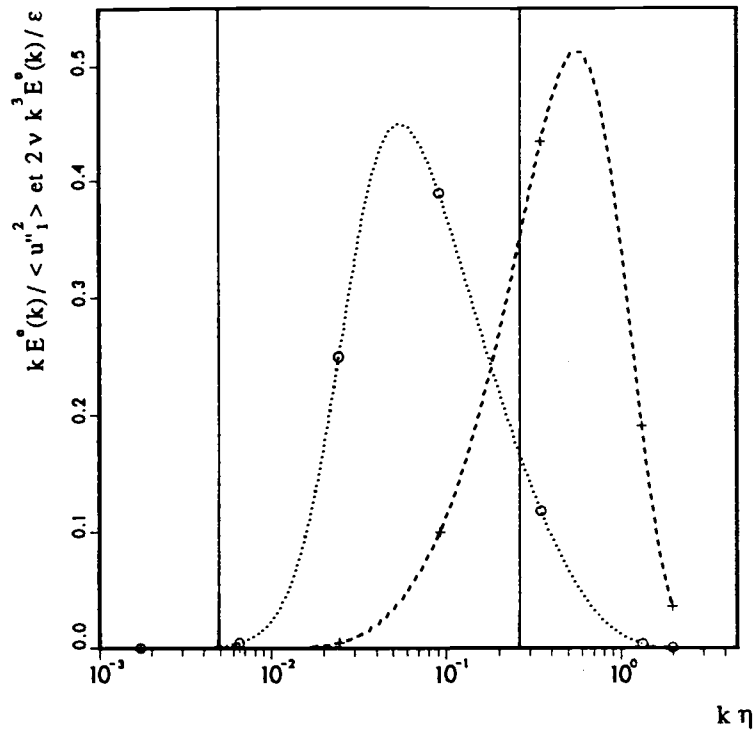


Figure 1.3.5 : Spectre d'énergie et de dissipation sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH12.

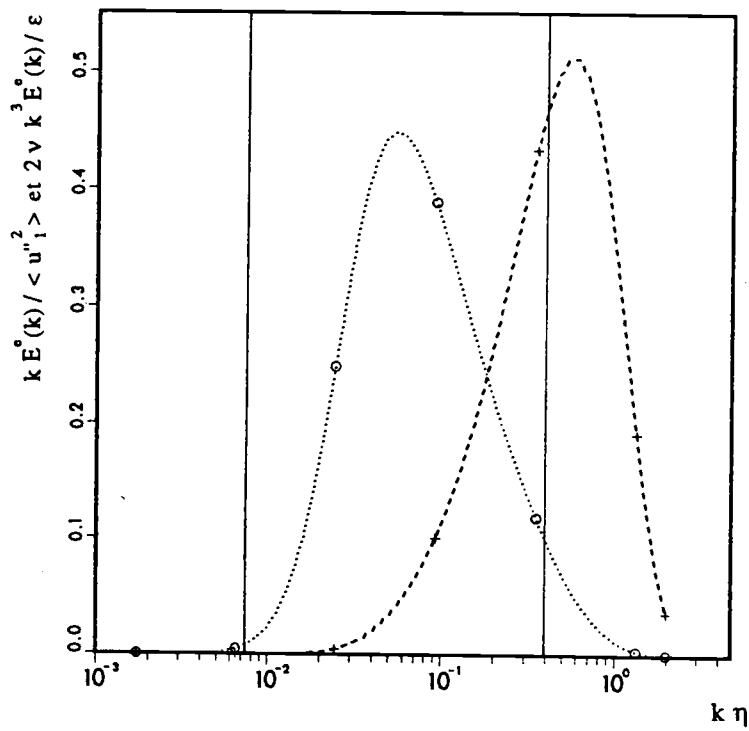


Figure 1.3.6 : Spectre d'énergie et de dissipation sur lequel nous avons tracé la bande spectrale simulée correspondant au calcul TH13.

Chapitre 2

Simulation des trajectoires de particules

2.1 Position du problème

Dans les champs turbulents calculés avec la LES, on cherche à accéder aux statistiques Lagrangiennes, afin d'analyser le comportement de particules fluides ou de particules ayant une masse volumique différente du fluide (dans toute la suite, lorsque l'on écrira particules, on sous-entendra que l'on parle de particules à masse volumique différente de celle du fluide).

On simule le mouvement d'un grand nombre de particules marquées. Pour chacune d'elles, on résout les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} y_{2,i}(t) = u_{2,i}(t) \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = f_{2,i}(\vec{u}_1(t))_2, \vec{u}_2(t), t) \quad (2.1.2)$$

$$(\vec{u}_1(t))_2 = \vec{u}_1(\vec{y}_2(t), t) \quad (2.1.3)$$

\vec{y}_2 et \vec{u}_2 sont la position et la vitesse d'une particule.

f_2 est la force qui s'exerce sur cette particule.

$(\vec{u}_1(t))_2$ est la vitesse du fluide localement non perturbée par la présence de la particule, que l'on appelle également vitesse du fluide "vu" par les particules.

La qualité des résultats obtenus à partir des simulations du mouvement des particules, est fortement conditionnée par les méthodes numériques mises en œuvre. Un effort tout particulier doit être fourni, afin d'évaluer les erreurs numériques commises et pour en estimer l'importance et les effets.

La précision des résultats dépend de plusieurs facteurs : de la simulation de la turbulence du fluide, de l'expression de la force qui s'exerce sur chaque particule, des méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations du mouvement des particules, et enfin du nombre de particules simulées.

Dans la suite, on suppose que le continuum est calculé avec une précision suffisante, sans toutefois oublier que tous les biais provenant du calcul de la turbulence, sont transmis directement aux mouvements des particules.

L'expression de la force qui s'exerce sur chaque particule est difficile à obtenir. Depuis de nombreuses années, ce calcul a fait l'objet d'un débat, dont on exposera les grandes lignes dans la deuxième partie de ce chapitre.

La résolution numérique de ces équations pose un double problème : l'intégration numérique des équations (2.1.1 et 2.1.2) et le calcul du fluide "vu" par les particules (2.1.3).

La principale difficulté pour simuler le mouvement des particules est l'interpolation du fluide. En effet, l'interpolation tend à filtrer les hautes fréquences de la turbulence, et il arrive même qu'elle crée de l'énergie sur certaines (on parle ici de fréquences spatiales). Plusieurs schémas d'interpolation ont été essayés ; l'un d'eux, utilisant des splines cubiques donne des résultats satisfaisants. Ces interpolations sont exposées dans la troisième partie de ce chapitre.

Pour intégrer les trajectoires, on a testé deux schémas de Runge-Kutta d'ordre deux. Un effort particulier a été apporté au choix de la discrétisation des forces de masse ajoutée et de pression. La méthode de Runge-Kutta a été modifiée dans le but d'impliciter le terme de traînée. Ces méthodes sont décrites dans la quatrième partie.

Le choix du schéma d'intégration et de la discrétisation des forces de masse ajoutée et de pression a été effectué en simulant la diffusion d'un nuage de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée. Dans ces simulations, les particules fluides sont considérées comme des particules à part entière, le mouvement de chacune d'elles est calculé en intégrant la force de pression. Les résultats de ces tests sont présentés dans la cinquième partie de ce chapitre, dans laquelle nous essayons également d'estimer le nombre de particules nécessaires pour représenter correctement les moments d'ordre deux de la turbulence.

2.2 L'équation du mouvement des particules

Pour simuler la dispersion de particules dans des champs de turbulence, il faut connaître précisément l'équation du mouvement des particules. On suppose que les particules sont des petites sphères rigides indéformables, qu'elles ne sont pas en rotation et qu'elles n'interagissent pas entre elles. Malgré toutes ces hypothèses simplificatrices, cette équation est difficile à établir rigoureusement et est toujours sujet à réflexion quant à l'expression de certains termes. L'objet n'est pas ici d'intervenir dans ce débat, mais de rappeler brièvement les principaux travaux publiés dans la littérature. On présentera ensuite la forme des équations que l'on a choisie pour simuler numériquement le mouvement des particules.

2.2.1 Premiers travaux

Le point de départ est la formulation de Basset-Boussinesq-Oseen (BBO) qui concerne le cas des particules dans un champ au repos. La $i^{\text{ème}}$ composante de la force exercée sur la particule s'écrit :

$$F_i = 3\pi d_p \rho_1 \nu_1 u_{1,i} + \frac{v_p}{2} \rho_1 \frac{\partial u_{1,i}}{\partial t} + \frac{3}{2} d_p^2 \rho_1 \sqrt{\pi \nu_1} \int_{-\infty}^t \frac{\partial u_{1,i}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.2.1)$$

dans laquelle, d_p est le diamètre et $v_p = \frac{1}{6} \pi d_p^3$ le volume de la particule.

ρ_1 est la masse volumique et ν_1 la viscosité cinématique du fluide.

$u_{1,i}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse du fluide.

$\frac{\partial}{\partial \tau}$ est la dérivée partielle par rapport au temps.

Dans cette équation, plusieurs termes apparaissent. Le premier représente la force de traînée visqueuse. Le deuxième est le terme de masse ajoutée : on l'interprète en disant qu'une accélération relative de la particule entraîne une accélération d'une masse de fluide autour d'elle. Le dernier terme dans l'équation correspond à la force de Basset. Elle représente la mémoire de la particule, soit plus précisément l'histoire de ses accélérations passées. Cette force n'existe que dans le cas de mouvements instationnaires de la sphère. En effet, chaque accélération relative est communiquée d'abord à la couche limite qui entoure la particule, puis ensuite, par diffusion, au reste du fluide.

Il y a alors création de gradients de vitesse et donc apparition d'une force de résistance supplémentaire qui diminue avec le temps.

Dans le repère en translation l'équation du mouvement des particules est obtenue en considérant une particule se déplaçant à la vitesse $(u_{2,i} - u_{1,i})$ dans un fluide au repos. L'équation s'écrit alors :

$$v_p \rho_2 \frac{d}{dt} u_{2,i} = F_{1,i} + F_{2,i} \quad (2.2.2)$$

avec :

$$F_{1,i} = v_p \rho_1 \frac{d}{dt} u_{1,i} \quad (2.2.3)$$

$$F_{2,i} = v_p \frac{18 \rho_1 v_1}{d_p^2} (u_{1,i} - u_{2,i}) + \frac{v_p}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} (u_{1,i} - u_{2,i}) + v_p \frac{9 \rho_1}{d_p} \sqrt{\frac{v_1}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (u_{1,i} - u_{2,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.2.4)$$

dans lesquelles, ρ_2 est la masse volumique et $u_{2,i}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse de la particule.

$F_{1,i}$ est la force supplémentaire introduite par Tchen sur des bases intuitives. On l'appelle parfois force de "gradient de pression", elle est due à l'accélération du fluide. Nous devons noter que la force $F_{2,i}$ est obtenue en supposant que le champ de vitesse du fluide est au repos par rapport à un repère lié à une particule fluide. Il faut donc que le champ soit homogène.

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{2,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ est la dérivée particulaire en suivant la particule.

Il y a eu par la suite toute une série de travaux pour savoir comment exprimer la force $F_{1,i}$, s'il fallait dériver suivant le fluide ou suivant la particule. Corrsin et Lumley (1956), Buevich (1966), Riley (1971), ...

2.2.2 Etudes de Maxey et Riley (1983) et Gatignol (1983)

Maxey et Riley (1983) et Gatignol (1983) ont cherché à obtenir l'expression de la force totale dans le cas non homogène, en suivant une analyse plus rigoureuse. Ils adoptent un formalisme qui consiste à décomposer le calcul de la force qui s'exerce sur la particule en deux parties :

$$v_p \rho_2 \frac{d}{dt} u_{2,i} = F_{1,i} + F_{2,i} \quad (2.2.5)$$

La première contribution $F_{1,i}$ est la force qui s'exerce sur une particule fluide en l'absence de la particule. La deuxième contribution $F_{2,i}$ est la force qui résulte de la perturbation du champ de vitesse provoquée par la présence de la particule.

Maxey et Riley supposent, d'une part, que le nombre de Reynolds particulaire est très petit devant 1,

$$R_e^p = \frac{d_p |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{\nu_1} \ll 1 \quad (2.2.6)$$

et d'autre part, que le diamètre des particules est négligeable devant l'échelle de longueur de Kolmogorov, $d_p \ll \eta_k$.

Ils trouvent en incluant la force d'Archimède,

$$F_{1,i} = \nu_p \rho_1 \frac{D}{Dt} u_{1,i} + \nu_p (\rho_2 - \rho_1) g_i \quad (2.2.7)$$

et

$$F_{2,i} = \nu_p \frac{18 \rho_1 \nu_1}{d_p^2} (u_{1,i} - u_{2,i} + \frac{d_p^2}{24} \Delta u_{1,i}) + \frac{\nu_p}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} (u_{1,i} - u_{2,i} + \frac{d_p^2}{40} \Delta u_{1,i}) \\ + \nu_p \frac{9 \rho_1}{d_p} \sqrt{\frac{\nu_1}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (u_{1,i} - u_{2,i} + \frac{d_p^2}{24} \Delta u_{1,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.2.8)$$

dans lesquelles, Δ désigne le Laplacien.

Dans $F_{2,i}$, on voit apparaître les termes de Faxen qui proviennent de la non uniformité du champ de vitesse vue par la particule.

Minier (1988), montre que, sous ces deux hypothèses toutes les dérivées sont égales, nous avons :

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$$

Le débat qui consiste à savoir s'il faut dériver selon le fluide ou la particule ne peut donc se situer dans ce contexte. D'autre part, il exprime ce qu'il appelle le paradoxe de l'équation de Maxey et Riley. Par une analyse en ordre de grandeur de l'équation finale, en supposant que le diamètre des particules est très petit devant l'échelle de longueur de Kolmogorov, il montre que alors tous les termes sont négligeables devant la traînée de Stokes.

Gatignol fait l'analyse en ordre de grandeur de l'équation de Navier-Stokes exprimée dans le repère de la particule. Ceci lui permet de calculer l'équation du mouvement des particules avec des hypothèses moins restrictives que

Maxey et Riley. Elle suppose que le nombre de Reynolds particulaire est très petit devant 1, et que le Strouhal est de l'ordre de 1. Ces hypothèses sont vérifiées lorsque le diamètre des particules est du même ordre de grandeur que l'échelle de longueur de Kolmogorov $d_p \approx \eta_k$. Gatignol signale que, si le Strouhal est très petit devant 1 (ce qui revient à dire que le diamètre de la particule est très petit devant l'échelle de Kolmogorov), alors les forces instationnaires sont négligeables devant le terme de traînée.

Gatignol suit ensuite la même méthode de décomposition en un champ non perturbé et un champ perturbé. Elle obtient :

$$F_{1,i} = v_p \rho_1 \frac{D}{Dt} u_{1,i}^v + v_p (\rho_2 - \rho_1) g_i \quad (2.2.9)$$

$$F_{2,i} = v_p \frac{18 \rho_1 v_1}{d_p^2} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) + \frac{v_p}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} (u_{1,i}^v - u_{2,i}) + v_p \frac{9 \rho_1}{d_p} \sqrt{\frac{v_1}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (2.2.10)$$

dans laquelle, $u_{1,i}^v$ est la vitesse moyenne du fluide que l'on obtient en moyennant le fluide non perturbé par la présence de la particule sur le volume de la particule.

$u_{1,i}^s$ est la vitesse calculée en moyennant le fluide sur la surface de la particule.

Ces vitesses sont évaluées à l'aide d'un développement limité par rapport au centre de la sphère :

$$u_{1,i}^v = u_{1,i} + \frac{d_p^2}{40} \Delta u_{1,i} + \frac{d_p^4}{4480} \Delta^2 u_{1,i} \quad (2.2.11)$$

$$u_{1,i}^s = u_{1,i} + \frac{d_p^2}{24} \Delta u_{1,i} + \frac{d_p^4}{1920} \Delta^2 u_{1,i} \quad (2.2.12)$$

Remarque : comme dans l'étude de Maxey et Riley, les deux hypothèses de départ conduisent à l'égalité des dérivées.

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$$

2.2.3 Equation généralisée au cas des Reynolds plus élevés

Les analyses mathématiques qui viennent d'être décrites supposent toujours un nombre de Reynolds particulaire négligeable. Dans ce cas, les dérivées suivant la particule ou suivant le fluide sont identiques. Toutefois, en pratique, cette hypothèse n'est pas souvent vérifiée, et si l'on cherche à généraliser l'équation du mouvement pour traiter les cas où le Reynolds est plus grand, nous sommes confrontés à deux problèmes. Le premier est de savoir s'il faut dériver suivant le mouvement du fluide ou des particules, puisque ces dérivées sont alors distinctes. Les choix sont effectués à partir de raisonnements physiques. Le deuxième est d'exprimer des coefficients correcteurs qui prennent en compte la modification de la contribution de chaque force provoquée par l'augmentation du nombre de Reynolds. Ces coefficients ont été calculés expérimentalement.

Choix des dérivées

La première contribution $F_{1,i}$ est la force qui s'exercerait sur une particule fluide qui serait à la place de la particule. Si l'on se place dans le cas où la particule tend vers une particule fluide $\rho_2 = \rho_1$, alors cette dérivée doit être la dérivée suivant le fluide :

$$F_{1,i} = \frac{v_p}{2} \rho_1 \frac{D}{Dt} u_{1,i}$$

$F_{2,i}$ est la force qui résulte de la perturbation du champ de vitesse provoquée par la présence de la particule.

Auton et al. (1988) ont montré, dans le cas de fluides irrotationnels non visqueux, que la force de masse ajoutée devait s'écrire :

$$\frac{v_p}{2} \rho_1 \left(\frac{D}{Dt} u_{1,i} - \frac{d}{dt} u_{2,i} \right)$$

Par contre, pour la force de Basset qui est en fait très souvent négligée, on ne dispose d'aucun résultat. On choisit de garder $\frac{d}{dt} u_{1,i}$.

Coefficients correcteurs

Si l'on cherche à étendre le domaine de validité de ces équations pour des nombres de Reynolds particulaire plus grands, il est d'usage d'introduire des

coefficients correcteurs pour la traînée de Stokes (Clift et al., 1978), et pour la force de masse ajoutée et la force de Basset (Odar-Hamilton, 1964) :

Le terme de traînée pour des nombres de Reynolds $R_e^P < 1000$ s'écrit alors :

$$v_P \frac{3}{4} C_D \rho_1 \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{d_p} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) \quad \text{où } C_D = \frac{24}{R_e^P} (1 + 0.15 R_e^{P 0.687})$$

Les forces de masse ajoutée et de Basset pour des nombres de Reynolds $R_e^P < 60$ s'écrivent :

$$v_P C_A \rho_1 \left(\frac{D}{Dt} u_{1,i}^v - \frac{d}{dt} u_{2,i} \right) \quad \text{où } C_A = 1,05 - \frac{0,066}{(Ac + 0,12)} \quad \text{et } Ac = \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|^2}{d_p \left| \frac{d}{dt} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \right|}$$

$$v_P C_H \frac{3 \rho_1}{2 d_p} \sqrt{\frac{v_1}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad \text{où } C_H = 2,88 + \frac{3,12}{(Ac+1)^3}$$

Equations généralisées

Ceci nous permet d'écrire l'équation généralisée sous la forme complète proposée par Minier (1988). L'équation de Gagniol étendue au cas des nombres de Reynolds particulaire plus grands s'écrit :

$$v_P \rho_2 \frac{du_{2,i}}{dt} = v_P \frac{3}{4} C_D \rho_1 \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{d_p} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) + v_P C_A \rho_1 \left(\frac{D}{Dt} u_{1,i}^v - \frac{d}{dt} u_{2,i} \right) + v_P \rho_1 \frac{D}{Dt} u_{1,i}^v$$

$$+ v_P C_H \frac{3 \rho_1}{2 d_p} \sqrt{\frac{v_1}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} (u_{1,i}^s - u_{2,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + v_P (\rho_2 - \rho_1) g_i \quad (2.2.13)$$

2.2.4 Equations du mouvement utilisées dans les simulations

Les équations que l'on a utilisées, dérivent directement de l'équation de Gagniol généralisée. On suppose que le diamètre des particules est suffisamment petit pour éviter que la dimension de la particule ne joue un rôle de filtre spatial pour les petites échelles de la turbulence. On choisira donc des particules de diamètre inférieur ou égal à l'échelle de longueur de Kolmogorov. Dans ce cas, les termes de Faxen, qui décroissent en fonction du rapport d_p / η_k , deviennent négligeables.

Nous conservons le coefficient correcteur du terme de traînée, mais nous prenons constants les coefficients des termes de masse ajoutée et de Basset

car leur expression est remise en cause (Rivero, 1991). Dans ce cas, l'équation 2.2.13 peut s'écrire sous une forme s'apparentant à la forme classique introduite par Hinze (1959) :

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\tau_{12}^F} + b \frac{D}{Dt} u_{1,i} - c \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (u_{2,i} - u_{1,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + e g_i \quad (2.2.14)$$

dans laquelle τ_{12}^F est le temps de relaxation de la particule :

$$\tau_{12}^F = \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{d_p}{C_D |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}$$

et

$$b = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2}} \quad c = \frac{9}{d} \frac{\sqrt{\frac{v_1}{\pi}}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2}} \quad e = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2}}$$

Lorsque le Reynolds particulaire tend vers zéro, le temps de relaxation de la particule tend bien vers l'expression utilisée habituellement :

$$\tau_{12}^F \rightarrow \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{d_p^2}{18 v_1}$$

La non linéarité de l'équation (2.2.14), due à la dérivée de la vitesse du fluide en suivant le mouvement du fluide, complique l'étude théorique des écoulements diphasiques. Elle empêche l'analyse de Fourier utilisée par Hinze pour modéliser le comportement de particules discrètes placées dans un champ turbulent homogène isotrope stationnaire (Cf. chapitre 4). Elle complique le calcul des termes de transferts interfaciaux (Cf. chapitre 5) dans les modèles diphasiques utilisant la représentation Eulérienne pour les deux phases (Simonin, 1988).

C'est pourquoi, dans la pratique, l'équation 2.2.14 est parfois approchée en utilisant la dérivée qui suit le mouvement des particules.

On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\tau_{12}^F} + b \frac{d}{dt} u_{1,i} - c \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (u_{2,i} - u_{1,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + e g_i \quad (2.2.15)$$

Nous remarquons que, pour simuler le mouvement des particules en utilisant les équations 2.2.14 ou 2.2.15, il suffit de connaître la valeur de la vitesse du fluide non perturbé par la présence locale de la particule au centre de cette

particule. Nous pourrions donc, dans les simulations Lagrangiennes, considérer chaque particule comme un point situé au centre de la particule.

2.3 Interpolation

La principale difficulté lorsque l'on veut simuler le mouvement de particules discrètes dans un écoulement turbulent est de connaître la vitesse du fluide "vu" par les particules.

$$(u_{1,i}(t))_2 = u_{1,i}(y_{2,j}(t), t) \quad (2.3.1)$$

Le champ de vitesse Eulerien est exprimé uniquement sur le maillage de calcul ; pour le connaître sur la position de chaque particule, on doit l'interpoler. Les champs de vitesse turbulents sont fortement non linéaires. Si l'on veut exprimer, avec une précision suffisante, la vitesse du fluide "vu" par les particules, il faut utiliser un schéma d'interpolation très précis. Ce schéma doit également posséder des propriétés de régularité, afin d'éviter d'engendrer des solutions parasites accompagnant souvent les schémas précis.

L'interpolation idéale existe. Elle consiste à interpoler, dans l'espace spectral, tous les modes de la turbulence. Cette solution a été écartée à cause de son coût calcul prohibitif.

2.3.1 Généralités sur l'interpolation

Après avoir localisé une particule au point \vec{x} intérieur à une cellule du maillage, on cherche une fonction permettant d'approximer le champ de vitesse en tout point de la cellule d'interpolation. Cette fonction prend en compte la valeur du champ de vitesse sur des noeuds voisins. On cherche à l'écrire sous la forme :

$$u_{1,i}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N g_j(\alpha, \beta, \gamma) u_{1,i}^j \quad (2.3.2)$$

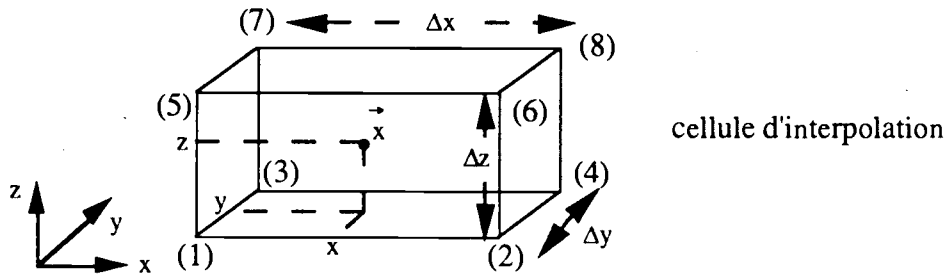
dans laquelle :

$u_{1,i}^j = u_{1,i}(x(j))$ est la valeur de la vitesse du fluide sur le noeud $x(j)$,

$\alpha = \frac{x - x(1)}{\Delta x}$, $\beta = \frac{y - y(1)}{\Delta y}$, $\gamma = \frac{z - z(1)}{\Delta z}$ sont les coordonnées locales du point dans la cellule d'interpolation,

g_j une fonction de pondération affectée à chaque nœud $x(j)$.

La précision de l'interpolation dépend directement du nombre de noeuds, N , utilisés.



2.3.2 Présentation rapide des interpolations utilisées

On a testé trois types d'interpolations différentes dans une configuration tridimensionnelle : une interpolation linéaire, une interpolation quadratique et une interpolation cubique. Ces méthodes sont toutes les trois décrites dans l'annexe 1. On se contente ici d'en résumer les grandes lignes.

L'interpolation linéaire a été utilisée pour sa simplicité de mise en œuvre informatique, et pour son faible coût de temps calcul. Cette méthode n'assure que la continuité du champ de vitesse, on dit qu'elle est précise à l'ordre 1. Elle prend en compte les huit noeuds de la cellule entourant le point d'interpolation.

L'interpolation quadratique est une méthode d'interpolation utilisée dans le code de turbulence tridimensionnelle aux différences finies, développée au LNH (ESTET, Laurence et al, 1988). C'est une extension directe de l'interpolation linéaire. En effet, l'idée est d'utiliser non plus la valeur du champ de vitesse aux noeuds de la cellule d'interpolation, mais le développement de Taylor à l'ordre 1 de ce champ. Cette méthode est précise à l'ordre 2, elle assure la continuité de la fonction et de sa dérivée. Si l'on exprime le développement de Taylor avec des dérivées centrées, cette interpolation utilise la valeur du champ de vitesse aux trente-deux noeuds entourant le point. Cette interpolation a un défaut majeur, elle génère des dérivées, seconde, troisième et quatrième, discontinues. Pour limiter cet effet

secondaire, on remplace localement cette interpolation quadratique par l'interpolation linéaire, lorsque la dérivée varie brusquement.

L'interpolation cubique est à la fois précise et régulière. Elle a été développée dans l'industrie automobile pour tracer des géométries complexes (Bartels et al. 1987). L'idée de base est simple : on cherche à déterminer des splines cubiques, permettant à la fonction d'interpolation d'assurer la continuité du champ de vitesse, des dérivées première et seconde, dans tout le domaine de calcul. Sa mise en œuvre est difficile, puisque pour assurer l'égalité entre la fonction d'interpolation et la valeur du champ de vitesse aux noeuds de la cellule d'interpolation, on doit procéder à l'inversion de $im.jm+im.km+jm.km$ matrices tridiagonales. Cette interpolation, précise à l'ordre trois, utilise la valeur du champ de vitesse aux soixante-quatre noeuds entourant le point. Le coût calcul supplémentaire, engendré par l'inversion des matrices, est compensé lorsque l'on interpole un grand nombre de points. En effet, grâce à la bonne régularité de cette interpolation, il n'est pas nécessaire d'effectuer de test sur les dérivées.

Yeung et Pope (1988) ont testé diverses interpolations, pour leurs simulations de diffusion de particules fluides. Ils ont choisi une interpolation à l'aide de splines cubiques.

2.3.3 Résultats

On a testé ces interpolations afin d'essayer de mesurer leur influence sur les résultats de simulations Lagrangiennes. On a tenté de répondre à deux questions, à savoir, quelle est l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules, et comment l'interpolation modifie un spectre de turbulence.

Le premier test est le plus simple. Il s'agit de déterminer le niveau d'énergie turbulente capté par une distribution aléatoire d'un grand nombre de particules placées dans un champ de turbulence homogène isotrope stationnaire.

L'énergie totale est celle que l'on calcule sur les $im.jm.km$ noeuds du maillage :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{im.jm.km} \sum_{j=1}^{im.jm.km} (u''_{1,i}^j u''_{1,i}^j) \quad (2.3.3)$$

dans laquelle, $u''_{1,i}$ est la composante fluctuante de la vitesse du fluide. Elle est égale à la vitesse instantanée du fluide puisque la vitesse moyenne est nulle. L'énergie du fluide "vu" par les particules est calculée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^j) u''_{1,i}(\vec{x}^j)) \quad (2.3.4)$$

dans laquelle N_p est le nombre total de particules et \vec{x}^j la position de la $j^{\text{ème}}$ particule.

On note $\langle \rangle$ l'opérateur de moyenne lorsque l'on moyenne sur le maillage vitesse, et $\langle \rangle_1$ lorsque l'on moyenne sur des particules fluides.

Dans le tableau 2.1, on a inscrit les résultats obtenus pour un nombre de particules $N_p=266144$. Ce nombre a été choisi parce qu'il correspond à une particule par maille. Le champ de vitesse utilisé correspond à une turbulence de type TH13, dont les caractéristiques sont décrites dans le chapitre 1 (Tableau 1.1). A la fin du tableau, on a indiqué le temps CPU consommé par ces interpolations (pour 1000 particules).

	Linéaire	quadratique	cubique
$\frac{1}{2} \langle u'_{1,i} u'_{1,i} \rangle$	0.131	0.131	0.131
$\frac{1}{2} \langle u'_{1,i} u'_{1,i} \rangle_1$	0.104	0.128	0.127
% d'énergie filtrée	20.5%	2.37%	3.29%
Tps CPU (1000)	$6.5 \cdot 10^{-6}$	$13.5 \cdot 10^{-6}$	$16.6 \cdot 10^{-6}$

Tableau 2.1 : Perte d'énergie turbulente causée par l'interpolation.

Ce premier résultat montre que l'interpolation linéaire filtre une quantité très importante d'énergie turbulente. Par contre, on constate un bon niveau de conservativité pour les deux autres. Il semble même, au vu de ce premier résultat, que l'interpolation quadratique soit légèrement meilleure que l'interpolation cubique.

Cette analyse qui ne tient compte que de la conservativité du niveau de turbulence est trop grossière. Pour juger plus précisément de la qualité de l'interpolation, on va essayer de mesurer en quoi elle peut modifier les structures de la turbulence, et par conséquent influencer les résultats de simulation Lagrangienne. Pour cela, nous allons observer l'effet de l'interpolation sur un spectre de turbulence. On a donc interpolé le champ de

vitesse sur un maillage décalé par rapport au maillage de calcul, afin de pouvoir calculer un spectre turbulent tridimensionnel (Eq. 1.2.7 et 1.2.8) sur un champ de vitesse interpolé.

Sur la figure 2.3.1, on a superposé le spectre calculé sur le maillage vitesse avec ceux calculés sur le maillage décalé. Sur la figure 2.3.2, on a représenté l'écart de chaque spectre à celui calculé sur le maillage vitesse.

Nous devons noter que le maillage est décalé dans la position la plus défavorable, puisque l'on a placé chaque point d'interpolation au centre du maillage vitesse. Ceci explique l'impression d'un filtrage plus grand par rapport à celui noté dans le tableau 2.1.

On constate que l'interpolation linéaire filtre l'énergie sur la plus grande partie de la bande spectrale simulée. Cette interpolation est donc inutilisable si l'on veut représenter correctement le transport turbulent. Ces figures mettent en évidence le mauvais comportement de l'interpolation quadratique qui tend à déplacer de l'énergie turbulente des petites échelles vers les plus grandes. Ceci explique le bon niveau de conservativité de l'énergie turbulente. Ce comportement interdit l'utilisation de cette interpolation pour les simulations Lagrangiennes, car il est très difficile d'imaginer de quelle manière cet effet peut biaiser les résultats.

Par contre, on constate que l'interpolation du champ de vitesse par la méthode de splines cubiques restitue correctement les grandes structures turbulentes et filtre progressivement les petites. On peut donc considérer que l'effet de cette interpolation est de réduire la fenêtre spectrale simulée. Pour des simulations de particules denses, qui sont entraînées plutôt par le mouvement turbulent à grande échelle, on peut penser que cette interpolation a un effet négligeable. En revanche, pour des calculs de dispersion de particules légères, il est indispensable d'évaluer l'absence de la représentation des petites échelles. Cette remarque rejoint celle que l'on a formulée à la fin du chapitre 1.

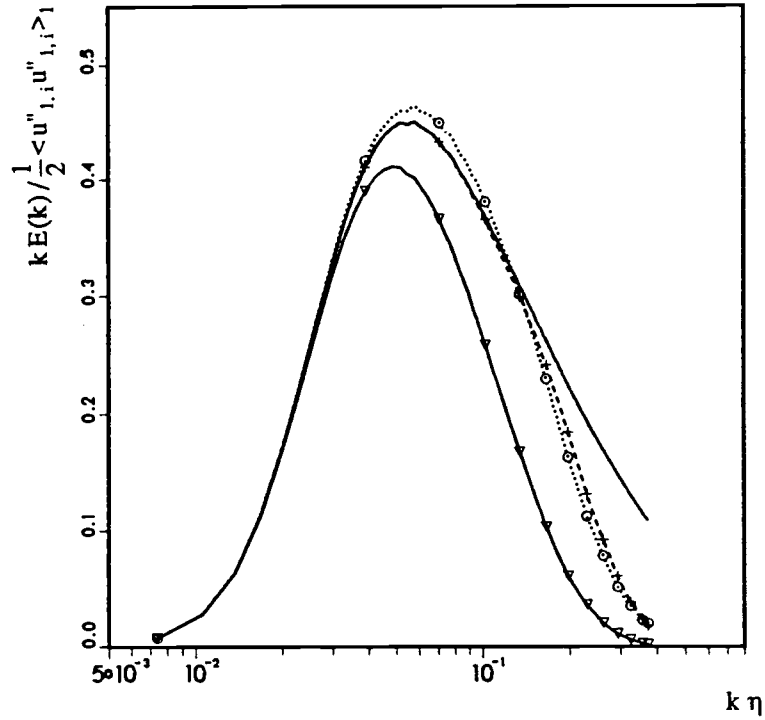


Figure 2.3.1 : —, spectre calculé sur le maillage vitesse. Spectres calculés à partir d'un champ de vitesse interpolé sur un maillage décalé : $-\nabla-$, interpolation linéaire ; $\cdots\circ\cdots$, interpolation quadratique ; $-+-$, splines cubiques.

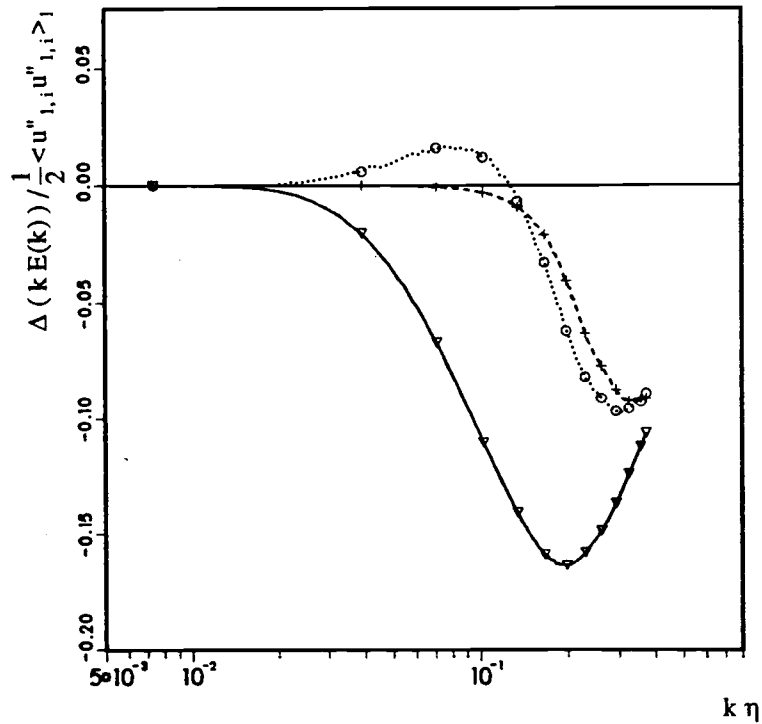


Figure 2.3.2 : Ecart entre le spectre interpolé et ceux calculés sur maillage vitesse. —, spectre calculé sur le maillage vitesse. Spectres calculés à partir d'un champ de vitesse interpolé sur un maillage décalé : $-\nabla-$, interpolation linéaire ; $\cdots\circ\cdots$, interpolation quadratique ; $-+-$, splines cubiques.

2.4 Intégration des équations du mouvement des particules

Pour simuler les trajectoires des particules dans les champs de turbulence calculés avec la LES, on intègre simultanément les équations suivantes.

$$\frac{d}{dt} y_{2,i}(t) = u_{2,i}(t) \quad (2.4.1)$$

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i}(t) - (u_{1,i}(t))_2}{\tau_{12}^F} + b \frac{d}{dt} u_{1,i}(t) + e g_i \quad (2.4.2. a)$$

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i}(t) - (u_{1,i}(t))_2}{\tau_{12}^F} + b \frac{D}{Dt} u_{1,i}(t) + e g_i \quad (2.4.2. b)$$

dans lesquelles (Cf. Chapitre 2.2.4) :

$$\tau_{12}^F = \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{d_p}{C_D |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}$$

Les équations de la quantité de mouvement utilisées ici (Eq. 2.4.2. a et b), sont les équations que nous avons présentées dans la partie 2.2.4 (Eq. 2.2.14 et 2.2.15) et dans lesquelles nous avons négligé la force de Basset. Les forces de pression et de masse ajoutée sont calculées en dérivant la vitesse du fluide, le long de la trajectoire de la particule (Eq. 2.4.2. a) ou bien le long de la trajectoire d'une particule fluide (Eq. 2.4.2. b).

2.4.1 Schéma d'intégration

Ces équations sont résolues par une méthode de Runge-Kutta dont les principes généraux sont rappelés dans l'annexe 2.

Le choix de schémas d'ordre deux est un bon compromis entre la précision et la complexité de la méthode. Les tests menés par Lamrini (1987), s'ils ont montré des différences très importantes entre un schéma d'ordre un et un schéma d'ordre deux, n'ont pas montré d'écarts significatifs entre les schémas d'ordre supérieur ou égal à deux. D'autre part, les schémas d'ordre deux permettent d'assurer plus facilement la cohérence entre le schéma d'intégration et la discrétisation des dérivées temporelles contenues dans l'expression de la force.

On peut remarquer également que c'est une méthode d'ordre deux qui a été utilisée par Yeung et Pope (1988) et Squires et Eaton (1990) pour leurs simulations Lagrangiennes.

On a testé deux schémas d'ordre deux différents.

Le premier, appelé RK2A (voir annexe 2), consiste à intégrer chaque variable x des équations du mouvement des particules de la manière suivante :

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \Delta t f(x_n, t_n) \\ k_2 &= 2 \Delta t f(x_n + 1/2 k_1, t_n + \Delta t) \\ x_{n+1} &= x_n + k_2 \end{aligned}$$

Si l'on veut éviter d'interpoler la vitesse du fluide entre deux instants de calcul, cette solution conduit à prendre pour l'intégration du mouvement des particules, un pas de temps deux fois plus grand que celui utilisé dans le calcul de la turbulence fluide, Δt .

Le deuxième, appelé RK2B est défini par :

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(x_n, t_n) \\ k_2 &= \Delta t f(x_n + k_1, t_n + \Delta t) \\ x_{n+1} &= x_n + 0.5(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

dans laquelle Δt est le pas de temps utilisé pour le calcul de la turbulence fluide.

2.4.2 Calcul de la dérivée du fluide le long des trajectoires des particules

Le choix de la discrétisation de la dérivée temporelle est très important, si l'on veut traiter correctement la dispersion de bulles ou de sédiments. On a essayé plusieurs discrétisations pour la calculer.

La première, appelée DER1, est la plus simple puisque l'on traite la dérivée de manière explicite. Pendant la durée du pas de temps entre t^n et t^{n+1} elle reste constante et elle vaut :

$$\frac{d}{dt} u_{1,i}(t^n) = \frac{u_{1,i}(\vec{y}_2, t^n) - u_{1,i}(\vec{y}_2, t^{n-1})}{\Delta t} \quad (2.4.3).$$

La deuxième méthode, nommée DER2, consiste à calculer la dérivée entre t^n et t^{n+1} . Si l'on utilise le fait que l'on peut estimer la position de la particule

avant de calculer la vitesse de la particule en ce point, il est possible d'assurer une parfaite cohérence avec le schéma d'intégration. A chaque sous-pas, on calcule la dérivée le long de l'incrément.

La contribution au premier incrément de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\left(\frac{d}{dt} u_{1,i}(t^n) \right)^1 = \frac{u_{1,i}(\vec{y}_2 + \vec{k}_1, t_n + \Delta t) - u_{1,i}(\vec{y}_2, t^n)}{\Delta t}, \quad \vec{k}_1 = \vec{u}_2 \Delta t \quad (2.4.4).$$

La contribution au deuxième incrément de l'équation de la quantité de mouvement est :

$$\left(\frac{d}{dt} u_{1,i}(t^n) \right)^2 = \frac{u_{1,i}(\vec{y}_2 + \vec{k}_2, t_n + \Delta t) - u_{1,i}(\vec{y}_2, t^n)}{\Delta t}, \quad \vec{k}_2 = \vec{u}_2(\vec{y}_2 + \vec{k}_1, t_n + \Delta t) \Delta t \quad (2.4.5)$$

2.4.3 Calcul de la dérivée du fluide suivant le fluide

Pour calculer la force de masse ajoutée et de pression en dérivant la vitesse du fluide suivant des trajectoires fluides, on a utilisé une méthode analogue à DER2. Pendant chaque sous-pas, en parallèle au calcul du mouvement de la particule, on détermine une trajectoire de particule fluide le long de laquelle on peut dériver la vitesse du fluide vue par les particules.

La contribution au premier incrément de l'équation de la quantité de mouvement est :

$$\left(\frac{D}{Dt} u_{1,i}(t^n) \right)^1 = \frac{u_{1,i}(\vec{y}_2 + \vec{k}_1, t_n + \Delta t) - u_{1,i}(\vec{y}_2, t^n)}{\Delta t}, \quad \vec{k}_1 = \vec{u}_1(\vec{y}_2, t^n) \Delta t \quad (2.4.6)$$

La contribution au deuxième incrément de l'équation de la quantité de mouvement est :

$$\left(\frac{D}{Dt} u_{1,i}(t^n) \right)^2 = \frac{u_{1,i}(\vec{y}_2 + \vec{k}_2, t_n + \Delta t) - u_{1,i}(\vec{y}_2, t^n)}{\Delta t}, \quad \vec{k}_2 = \vec{u}_1(\vec{y}_2 + \vec{k}_1, t_n + \Delta t) \Delta t \quad (2.4.7)$$

On peut remarquer que, lorsque la particule tend à se comporter comme une particule fluide (par exemple : lorsque le diamètre tend vers zéro), \vec{u}_2 tend vers \vec{u}_1 . Dans ce cas, l'égalité entre la dérivée suivant la particule ou suivant une particule fluide est respectée.

2.4.4 Problème lié à l'intégration du terme de traînée

Le pas de temps utilisé pour intégrer ces équations est imposé directement par celui du calcul de la turbulence. Lorsque les particules ont un temps de relaxation τ_{12}^F très petit (petites particules denses, bulles, sédiment), le rapport $\Delta t / \tau_{12}^F$ devient très grand, empêchant toute tentative d'intégration. Il y a deux solutions : la première est de baisser suffisamment le pas de temps du calcul de la turbulence, mais ceci entraîne un coût calcul prohibitif pour la simulation des champs turbulents. La deuxième est de modifier le schéma d'intégration.

La méthode (Lamrini-Simonin, 87), que l'on a utilisée consiste à séparer en deux le deuxième membre des équations (2.4.2. a et b).

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = \left(-\frac{u_{2,i}(t)}{\tau_{12}^F} \right) + \left(\frac{(u_{1,i}(t))_2}{\tau_{12}^F} + b \frac{d}{dt} u_{1,i}(t) \right)$$

La première partie, implicite, est considérée comme une variable durant chaque sous-pas. La deuxième, explicite, est maintenue constante pendant chaque sous-pas. La méthode de Runge-Kutta modifiée est présentée dans l'annexe 3.

2.5 Choix des méthodes numériques utilisées

Dans cette partie, après avoir estimée "expérimentalement" l'erreur statistique, nous présentons les résultats de diffusion d'un nuage de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée. Ces simulations ne sont pour nous qu'un test numérique choisi pour des raisons économiques. Si elles nous ont permis d'effectuer un certain nombre de choix numériques, elles ne peuvent être considérées comme une validation suffisante. C'est pourquoi pour compléter cette validation, tout au long de nos travaux, nous avons eu le souci, chaque fois que cela était possible, de vérifier la cohérence des résultats avec les connaissances théoriques. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons certains résultats obtenus au cours de diverses simulations de diffusion et de dispersion de particules de densité différente de celle du fluide, en turbulence homogène isotrope stationnaire, qui permettent de valider l'expérience numérique. L'analyse

des résultats numériques fait appel à des résultats théoriques qui sont détaillés dans les chapitres 3 et 4.

2.5.1 Erreur statistique pour le calcul de moments d'ordre 2

Avant de présenter les résultats des simulations Lagrangiennes, nous allons essayer d'évaluer "expérimentalement" l'erreur statistique commise pour calculer des moments turbulents d'ordre 2, qui sont les plus utilisés pour modéliser le transport de particules par la turbulence.

Le moment d'ordre 2, dont la précision ne dépend que du nombre de particules, est la turbulence du fluide "vu" par des particules fluides. En effet, en théorie, il ne peut exister aucune corrélation entre des structures turbulentes particulières et la position de ces particules. Nous pouvons donc calculer l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules, sur un nuage de particules distribuées aléatoirement dans le champ de turbulence.

Rigoureusement, on peut définir l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules par :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s} = \text{Lim}_{(N_p \rightarrow \infty)} \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^j) u''_{1,i}(\vec{x}^j)) \quad (2.5.1)$$

dans laquelle N_p est le nombre total de particules et \vec{x}^j la position de la $j^{\text{ème}}$ particule déterminée par un tirage aléatoire.

Ce niveau d'énergie turbulente, à l'erreur d'interpolation près, correspond au niveau d'énergie calculé sur le maillage vitesse de la L.E.S..

Dans la pratique, cette quantité est inaccessible puisque l'on a toujours un nombre fini de particules. D'autre part, numériquement, les tirages sont pseudo-aléatoires, et il n'est donc pas possible d'obtenir des tirages aléatoires de séries trop longues. On essaye d'approcher cette valeur en moyennant les résultats obtenus à partir de plusieurs réalisations indépendantes de séries de tirages aléatoires. On approxime l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules par :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s} = \frac{1}{\Omega_p} \sum_{\Omega_p} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^j) u''_{1,i}(\vec{x}^j)) \right) \quad (2.5.2)$$

dans laquelle Ω_p est le nombre de réalisations.

Ce test a été réalisé sur un champ de turbulence de type TH13, dont les caractéristiques sont données au chapitre 1 (Tableau 1.1). En utilisant $N_p = 200000$ particules et en effectuant $\Omega_p = 100$ réalisations, nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s} = 0.1260.$$

L'erreur statistique relative est définie par:

$$\Delta_{stat}(N_p) = \text{Max} \frac{\left| \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s} - \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^j) u''_{1,i}(\vec{x}^j)) \right|}{\langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s}} \quad (2.5.3)$$

Il existe une expression théorique qui permet de calculer l'erreur statistique. En effet, d'après le théorème de la limite centrale (Tennekes et Lumley, 1972), l'erreur statistique doit décroître, pour des moments d'ordre 2, de manière inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de particules.

$$\Delta_{stat} = \frac{C}{\sqrt{N_p}} \quad (2.5.4)$$

Sur la figure 2.5.1 on compare les résultats de ce test à l'expression analytique définie ci-dessus. Le maximum de l'erreur statistique relative est calculé sur un ensemble de 100 réalisations différentes. En choisissant la constante de proportionnalité $C=2$, nous obtenons un bon accord entre l'erreur calculée avec 2.5.3 et celle prédite par l'expression analytique 2.5.4. Ces résultats nous ont permis de déterminer le nombre de particules en fonction de la précision recherchée. Dans les cas où toutes les grandeurs sont homogènes isotropes, on a utilisé un échantillon de 25000 particules nous permettant d'avoir une précision de l'ordre du pour cent pour les calculs des moments d'ordre 2. En revanche, lorsque nous avons introduit du cisaillement, nous avons effectué des moyennes par plan et donc augmenté le nombre de particules jusqu'à 100000, nombre choisi pour des raisons de taille mémoire (16 Mw).

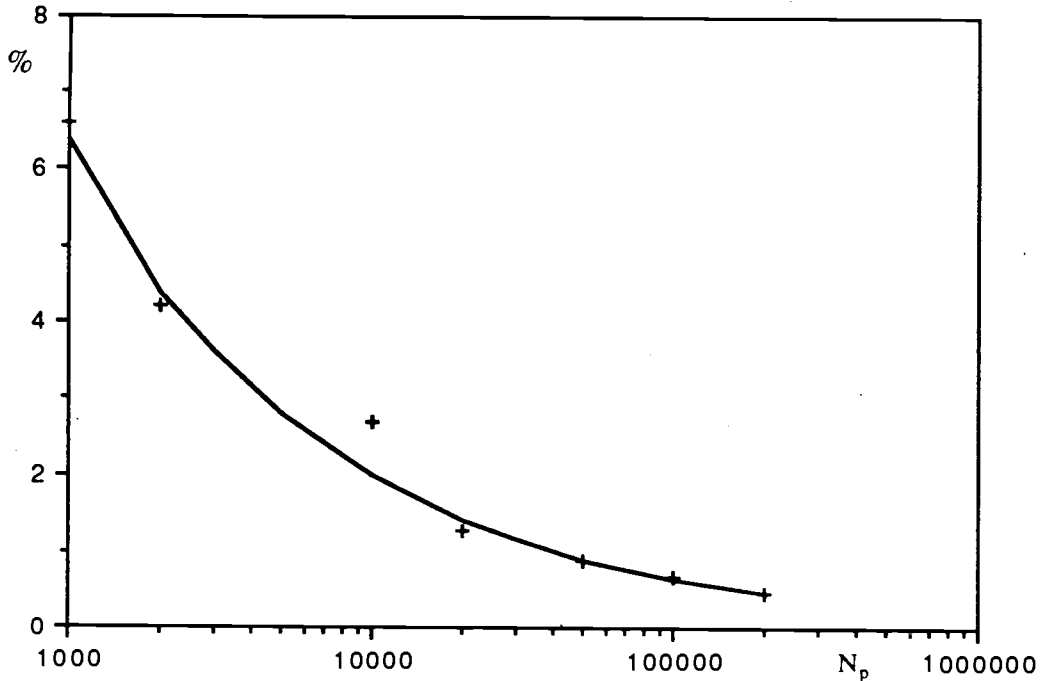


Figure 2.5.1 : + , Erreur statistique calculée à partir de l'équation 2.5.3 ;

-- , Erreur statistique estimée à partir de l'expression $\frac{2}{\sqrt{N_p}}$

2.5.2 Choix des méthodes numériques : diffusion d'un nuage de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée

Nous présentons dans cette partie les résultats de diffusion d'un nuage de particules fluides dans une turbulence homogène isotrope figée qui nous ont permis d'effectuer un certain nombre de choix numériques.

Dans ces simulations, les particules fluides sont considérées comme des particules à part entière et le mouvement de chacune d'elles est calculé en intégrant la force de pression.

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = \frac{D}{Dt} u_{1,i}(t) \quad (2.5.5)$$

A l'instant initial, on impose pour chaque particule l'égalité entre la vitesse du fluide "vu" par la particule et la vitesse de la particule. Les particules diffusent dans un domaine de dimension infinie. Puisque nous ne connaissons la turbulence du fluide que dans un domaine fini, le domaine de calcul de la turbulence par la L.E.S., la vitesse du fluide "vu" par chaque particule est calculée en appliquant la même condition de périodicité que

celle utilisée pour le calcul de la turbulence du fluide à l'aide de la L.E.S. (Eq.1.1.17).

Les trajectoires des particules sont calculées dans un champ de turbulence de type TH13, figé à un pas de temps. Nous avons utilisé 15000 particules.

Parmi les test effectués, nous avons choisi d'en présenter trois :

Cas 1

Le schéma d'intégration est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 RK2A (Annexe 2).

La dérivée est calculée de manière explicite DER1 (Eq.2.4.3)

Cas 2

Le schéma d'intégration est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 RK2B (Annexe 2).

La dérivée est calculée de manière explicite DER1 (Eq.2.4.3)

Cas 3

Le schéma d'intégration est le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 RK2B (Annexe 2).

La dérivée est calculée avec la méthode DER2 (Eq 2.4.4 et Eq 2.4.5)

Nous rappelons ici que, pour la diffusion de particules fluides, les dérivées DER2 et DER3 sont strictement identiques.

Le critère principal pour juger de la qualité de chaque schéma est d'observer les variations des niveaux d'énergie turbulente au cours du temps. Puisque nous simulons la diffusion de particules fluides, la turbulence du fluide "vu" par les particules doit être égale à l'énergie turbulente des particules. En outre, ce niveau d'énergie, à l'erreur statistique près, doit être égal à celui que nous avons calculé à l'aide de l'équation 2.5.2

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,j} u''_{1,j} \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle u''_{2,j} u''_{2,j} \rangle_1 \quad (2.5.6)$$

avec $\frac{1}{2} \langle u''_{1,j} u''_{1,j} \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle u''_{1,j} u''_{1,j} \rangle_{1s} = 0.1260$.

L'énergie du fluide "vu" par les particules fluides est calculée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,j} u''_{1,j} \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{1,j}(\vec{x}^j) u''_{1,j}(\vec{x}^j)) \quad (2.5.7)$$

L'énergie des particules fluides est calculée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (u''_{2,i}^j u''_{2,i}^j) \quad (2.5.8)$$

Sur les figures 2.5.2 à 2.5.4, nous présentons les courbes du transitoire de l'énergie du fluide "vu" par les particules et de l'énergie des particules, en superposant avec le niveau d'énergie calculé à partir de l'équation 2.5.2

Sur la figure 2.5.2, sont présentés les résultats du cas 1. On constate que c'est avec ce cas que l'on obtient les plus mauvais résultats. On observe une production numérique d'énergie turbulente de 3 à 4%, ce qui est légèrement supérieur à l'erreur statistique relative pour 15000 particules. D'autre part, on observe un écart important entre l'énergie du fluide "vu" par les particules et l'énergie des particules.

Sur la figure 2.5.3, nous montrons les résultats du cas 2. La seule différence avec le cas précédent est un changement de méthode d'intégration. Alors que ces méthodes sont toutes les deux des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2, on remarque que ce schéma se comporte mieux. La production numérique d'énergie turbulente n'est plus que de l'ordre de 2%, ce qui est comparable à l'erreur statistique relative. Ce schéma conserve cependant un défaut puisque l'on observe un léger écart entre l'énergie du fluide "vu" par les particules et l'énergie des particules.

Sur la figure 2.5.4, nous montrons les résultats du cas 3. La seule différence avec le cas précédent est la discrétisation de la dérivée. On observe un très bon comportement de ce schéma. Cette méthode a tendance à filtrer légèrement l'énergie turbulente, de l'ordre de 1.5%. D'autre part, nous n'observons plus de différence entre l'énergie du fluide "vu" par les particules et l'énergie des particules, puisque les deux courbes sont confondues.

Ces résultats nous ont conduit à utiliser dans toutes les simulations le schéma d'intégration RK2B et à calculer les dérivées de la vitesse du fluide avec la méthode DER2 lorsque l'on dérive suivant le mouvement de la particule ou DER3 lorsque l'on dérive suivant le mouvement du fluide.

2.5.3 Validation globale

Pour compléter la validation des méthodes numériques, nous présentons un certain nombre de résultats significatifs obtenus dans des simulations de diffusion et de dispersion en turbulence homogène isotrope stationnaire, dans des champs turbulents de type TH13.

Dans le chapitre 3.2 sur la diffusion turbulente, on peut observer (figure 3.2.1) la cohérence des résultats numériques avec l'analyse théorique de Taylor pour la diffusion de particules fluides. Ceci valide en partie les méthodes numériques utilisées (schéma d'intégration de la trajectoire, discrétisation temporelle de la force de pression).

Pour valider la méthode de Runge-Kutta modifiée, on a comparé les résultats de la diffusion de particules fluides avec les résultats de dispersion de petites particules denses.

Lorsque le diamètre de particules denses tend vers zéro, l'équation du mouvement des particules denses est réduite à :

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i}(t) - (u_{1,i}(t))_2}{\tau_{12}^F} \quad \text{où } \tau_{12}^F \rightarrow 0$$

La simulation de ces particules est donc pour nous une bonne validation de la méthode de Runge-Kutta modifiée, puisque le seul terme qui subsiste est le terme de traînée que l'on est obligé d'intégrer de manière implicite.

Dans le cadre de la théorie de Tchen-Hinze, nous savons d'après l'équation 4.3.14, que des particules denses dont le diamètre tend vers zéro, doivent se comporter comme des particules fluides. Il doit y avoir égalité entre l'énergie turbulente du fluide calculée en suivant des particules fluides et l'énergie du mouvement fluctuant des particules.

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$$

On note $\langle \cdot \rangle_2$ l'opérateur de moyenne lorsque l'on moyenne sur des particules de masse volumique différente de celle du fluide.

D'après l'équation 4.3.7, nous devons retrouver l'égalité entre le coefficient de dispersion des particules et le coefficient de diffusion du fluide :

$$\lim (t \rightarrow \infty) D_2^t = \lim (t \rightarrow \infty) D_1^t$$

D'autre part, dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen-Hinze, d'après l'équation 4.4.9 nous devons obtenir l'égalité entre l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et l'énergie du mouvement fluctuant des particules :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2 = \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$$

Enfin, d'après l'équation 4.4.8, il doit y avoir égalité entre le coefficient de dispersion des particules et le produit de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules par l'échelle de temps intégrale Lagrangienne du fluide "vu" par les particules :

$$\lim (t \rightarrow \infty) D_2^t = \frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2 \tau_{12}^t$$

Dans le tableau 2.2, nous comparons les grandeurs caractéristiques obtenues en simulant la dispersion de petites particules denses ($d_p = 5$ microns) et la diffusion de particules fluides. Nous constatons une bonne cohérence entre les résultats de ces deux simulations. Nous observons, que conformément à la théorie, les petites particules denses se comportent bien comme des particules fluides.

	Particules de 5 μ	Particules fluides
\bar{d}/τ_{12}^F	10	*
$\frac{1}{3} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	86.6 10 ⁻³	*
$\frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	86.6 10 ⁻³	*
$\frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1$ (m ² /s ²)	*	83.6 10 ⁻³
τ_2^i (s)	23.7 10 ⁻³	*
τ_{12}^i (s)	23.6 10 ⁻³	*
τ_1^i (s)	*	23.5 10 ⁻³
$\lim (t \rightarrow \infty) D_2^i$ (m ² /s)	2.09 10 ⁻³	*
$\lim (t \rightarrow \infty) D_1^i$ (m ² /s)	*	1.95 10 ⁻³
$\tau_2^i \frac{1}{3} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	2.05 10 ⁻³	*

Tableaux 2.2 : Comparaison des résultats de dispersion de particules de 5 μ et de diffusion de particules fluides.

La deuxième validation de la méthode de Runge-Kutta modifiée, consiste à simuler la dispersion d'une classe de particules intermédiaires permettant d'utiliser indifféremment la méthode de Runge-Kutta standard, RK2B, ou la méthode Runge-Kutta modifiée.

Sur le tableau 2.3 nous comparons certaines grandeurs caractéristiques obtenues en simulant la dispersion de particules denses ($d_p=57$ microns) avec l'une ou l'autre de ces méthodes. Nous pouvons constater l'égalité entre les résultats de ces deux simulations.

	RK2B standard	RK2B modifié
\bar{d}/τ_{12}^F	0.1	0.1
$\frac{1}{3} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	43.4 10 ⁻³	43.2 10 ⁻³
$\frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	80.3 10 ⁻³	80.0 10 ⁻³
$\frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2$ (m ² /s ²)	43.7 10 ⁻³	43.5 10 ⁻³
τ_{12}^i (s)	26.1 10 ⁻³	26.0 10 ⁻³
τ_2^i (s)	48.6 10 ⁻³	48.7 10 ⁻³
$\lim (t \rightarrow \infty) D_2^i$ (m ² /s)	2.14 10 ⁻³	2.13 10 ⁻³

Tableaux 2.3 : Comparaison des résultats de dispersion de particules de 57 μ

L'ensemble de ces résultats représentent pour nous un bonne validation de la méthode de Runge-Kutta modifiée.

Dans le chapitre 6, les résultats de dispersion de particules confirmeront les choix de discrétisations effectués. On pourra constater le bon accord des résultats de dispersion avec la théorie de Tchen pour des particules de tailles et de natures différentes. Ceci renforce la validation des schémas numériques dans leur ensemble.

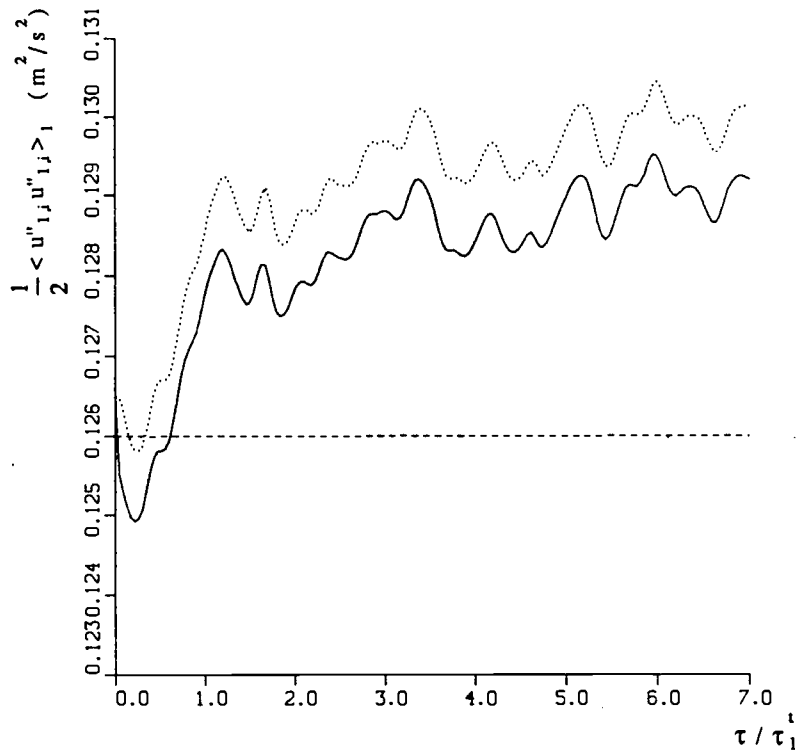


Figure 2.5.2 : Transitoire d'énergie turbulente calculé avec les méthodes numériques du cas 1 :

$$- \cdot - \cdot \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s}; \quad \cdots \cdots \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_1; \quad - \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1 .$$

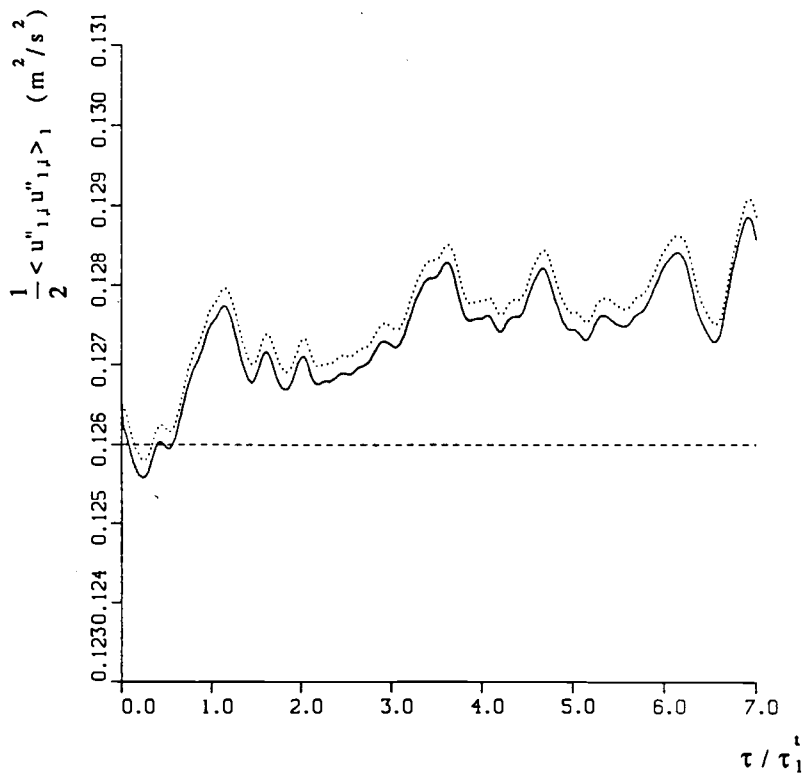


Figure 2.5.3 : Transitoire d'énergie turbulente calculé avec les méthodes numériques du cas 2 :

$$- \cdot - \cdot \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_{1s}; \quad \cdots \cdots \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_1; \quad - \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1 .$$

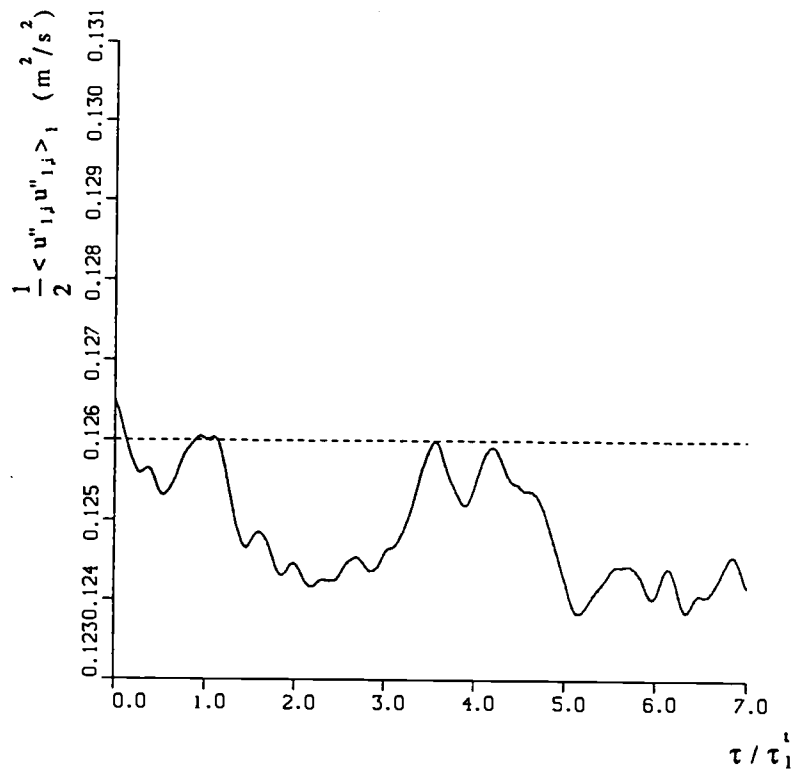


Figure 2.5.4 : Transitoire d'énergie turbulente calculé avec les méthodes numériques du cas 3 :

$$\cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1; \cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_1; \cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1.$$

Chapitre 3

Diffusion de particules fluides

Après un aperçu sur l'approche théorique de la diffusion turbulente (Taylor 1921, Kampé de Fériet 1939, Batchelor 1949, Hinze 1959), on présente dans ce chapitre, les résultats de la diffusion d'un nuage de particules fluides simulée dans les champs turbulents homogènes isotropes stationnaires dont les caractéristiques ont été analysées dans le premier chapitre. Ces simulations permettent d'accéder aux statistiques Lagrangiennes de la turbulence du fluide qui sont utilisées pour modéliser la dispersion de particules de densité différente du fluide. En effet, pour décrire la dispersion, il est indispensable de connaître, d'une part, le rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne et, d'autre part, la forme des corrélations Lagrangiennes des vitesses (Berlemont 1987).

Les résultats des simulations sont comparés avec les résultats expérimentaux de Shlien et Corrsin (1974) et Sato et Yamamoto (1987) en turbulence décroissante et avec les résultats numériques de Yeung et Pope (1989), et de Squires et Eaton (1990) obtenus par simulation directe de turbulence stationnaire.

3.1 Théorie de la diffusion turbulente

Une approche classique pour aborder le problème du transport d'un traceur passif suivant parfaitement le fluide est de supposer que la loi de Fick utilisée dans le cadre de la diffusion moléculaire s'applique également pour la diffusion turbulente.

Après avoir décomposé chaque variable en une partie moyenne et une partie fluctuante, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \langle c \rangle_1}{\partial t} + \langle u_{1,j} \rangle_1 \frac{\partial \langle c \rangle_1}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{1,ij}^t \frac{\partial \langle c \rangle_1}{\partial x_j} \right) \quad (3.1.1)$$

dans laquelle on a négligé la diffusivité moléculaire.

La corrélation turbulente entre la fluctuation de la variable c et la fluctuation de vitesse est modélisée classiquement en utilisant une loi de type gradient.

$$\langle c'' u''_{1,i} \rangle_1 = -D_{1,ij}^t \frac{\partial \langle c \rangle_1}{\partial x_j} \quad (3.1.2)$$

Toute la difficulté consiste alors à calculer le coefficient de diffusion turbulente $D_{1,ij}^t$.

3.1.1 Etude Lagrangienne de la diffusion turbulente : analyse de Taylor

On considère ici une turbulence stationnaire et homogène au sens strict du terme (sans gradient de vitesse moyenne).

La première étude de la diffusion turbulente à l'aide de l'approche Lagrangienne a été menée par Taylor (1921). Il a étudié la diffusion monodimensionnelle de particules fluides à partir d'un point source. Batchelor (1949) a étendu ces résultats au cas tridimensionnel.

A partir de l'équation du mouvement de la particule fluide,

$$\frac{d}{dt} y_{1,i}(t) = u''_{1,i}(t) \quad (3.1.3)$$

$$y_{1,i}(t) = \int_0^t u''_{1,i}(\tau) d\tau, \quad \text{avec } y_{1,i}(0) = 0 \quad (3.1.4)$$

nous pouvons relier le tenseur de la variance du déplacement au tenseur des corrélations des vitesses :

$$\frac{d}{dt} \langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = \sqrt{\langle u''_{1,i}{}^2 \rangle_1 \langle u''_{1,j}{}^2 \rangle_1} \int_0^t (R_{1,ij}(\tau) + R_{1,ji}(\tau)) d\tau \quad (3.1.5)$$

Si le tenseur de corrélation des vitesses est défini par :

$$R_{1,ij}(\tau) = \langle u''_{1,i}(t) u''_{1,j}(t+\tau) \rangle_1 / \sqrt{\langle u''_{1,i}{}^2 \rangle_1 \langle u''_{1,j}{}^2 \rangle_1} \quad (3.1.6)$$

il nous permet de définir une échelle intégrale temporelle Lagrangienne :

$$\tau_{1,ij}^t = \int_0^\infty R_{1,ij}(\tau) d\tau \quad (3.1.7)$$

En intégrant l'équation 3.1.5, nous obtenons :

$$\langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = \int_0^t \left(\sqrt{\langle u''_{1,i}{}^2 \rangle_1 \langle u''_{1,j}{}^2 \rangle_1} \int_0^{t'} (R_{1,ij}(\tau) + R_{1,ji}(\tau)) d\tau \right) dt' \quad (3.1.8)$$

Kampé de Fériet (1939), en intégrant par parties cette équation, obtient une forme permettant de calculer les limites asymptotiques :

$$\langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1} \int_0^t (t-\tau) (R_{1,ij}(\tau) + R_{1,ji}(\tau)) d\tau \quad (3.1.9)$$

Dans le cas où le temps de diffusion tend vers zéro, nous trouvons :

$$\lim_{(t \rightarrow 0)} \langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1} t^2 \quad (3.1.10)$$

Lorsque le temps de diffusion tend vers l'infini nous obtenons :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} \langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1} (\tau_{1,ij}^i + \tau_{1,ji}^i) t \quad (3.1.11)$$

3.1.2 Expression du coefficient de diffusion

Batchelor (1949), en supposant que les composantes du déplacement des particules ont une densité de probabilité normale liée, relie le coefficient de diffusion au tenseur de la variance du déplacement des particules :

$$D_{1,ij}^i(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) \quad (3.1.12)$$

D'après les équations 3.1.11 et 3.1.12, lorsque le temps de diffusion est suffisamment grand, on peut exprimer le coefficient de diffusion sous la forme :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{1,ij}^i(t) = \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1} \frac{1}{2} (\tau_{1,ij}^i + \tau_{1,ji}^i) \quad (3.1.13)$$

Dans la pratique, c'est généralement cette expression du coefficient de diffusion qui est utilisée. A ce titre, ce résultat peut être considéré comme le résultat fondamental de l'analyse de Taylor.

3.1.3 Analyse spectrale

Hinze relie directement le tenseur de la variance du déplacement au spectre Lagrangien des vitesses.

Définissons le spectre Lagrangien des vitesses turbulentes du fluide par :

$$E_{1,ij}(\omega) = \frac{\sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{1,ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (3.1.14)$$

En utilisant l'équation (3.1.9), nous obtenons

$$\langle y_{1,i} y_{1,j} \rangle_1(t) = 2 \int_0^{+\infty} (E_{1,ij}(\omega) + E_{1,ji}(\omega)) \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} d\omega \quad (3.1.15)$$

L'utilisation des expressions (3.1.12 et 3.1.15) permet d'exprimer le coefficient de diffusion en fonction du spectre Lagrangien des vitesses :

$$D_{1,ij}^1(t) = \int_0^{+\infty} (E_{1,ij}(\omega) + E_{1,ji}(\omega)) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (3.1.16)$$

Lorsque le temps de diffusion tend vers l'infini, nous trouvons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_{1,ij}^1 = \frac{\pi}{2} (E_{1,ij}(0) + E_{1,ji}(0)) \quad (3.1.17)$$

avec, d'après 3.1.7 et 3.1.14,

$$E_{1,ij}(0) = \frac{\sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 \langle u_{1,j}^2 \rangle_1}}{\pi} \tau_{1,ij}^1 \quad (3.1.18)$$

3.2 Présentation et analyse des résultats

3.2.1 Diffusion de particules en turbulence homogène isotrope stationnaire

Les calculs de la diffusion de particules fluides ont été menés dans les champs de turbulence homogène isotrope stationnaire, TH12 et TH13, dont les caractéristiques ont été données dans le tableau 1.1 du chapitre 1. Les simulations ont été effectuées avec 25000 particules dans TH13 et 100000 particules dans TH12.

Dans ces simulations, les particules fluides sont considérées comme des particules à part entière, le mouvement de chacune d'elles est calculé en intégrant la force de pression (voir chapitre 2.5.2).

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = \frac{D}{Dt} u_{1,i}(t)$$

Puisque la turbulence est isotrope, on peut simplifier l'écriture de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne, de la variance des vitesses, de la corrélation Lagrangienne des vitesses, et enfin du spectre Lagrangien.

On définit :

$$\tau_1^t = \frac{1}{3} \tau_{1,ii}^t \quad \langle u''_1^2 \rangle_1 = \frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_1 \quad R_1(t) = \frac{1}{3} R_{1,ii}(t) \quad E_1(\omega) = \frac{1}{3} E_{1,ii}(\omega)$$

On définit également le coefficient de diffusion sous la forme :

$$D_1^t(t) = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \langle y_{1,i} y_{1,i} \rangle_1(t) \quad (3.2.1)$$

La relation obtenue par l'analyse de Taylor pour des grands temps de diffusion s'écrit :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_1^t = \langle u''_1^2 \rangle_1 \tau_1^t \quad (3.2.2)$$

On peut observer figure 3.2.1, la cohérence des résultats numériques avec l'analyse théorique de Taylor pour la diffusion de particules fluides. En effet, la valeur du coefficient de diffusion (Eq. 3.2.1) tend bien vers la limite asymptotique prévue par l'analyse de Taylor (Eq. 3.2.2).

Dans les tableaux 3.1.a et 3.1.b, on a inscrit les valeurs des variances des vitesses et des échelles intégrales Lagrangiennes. On peut relever la bonne isotropie de ces variables.

	THI2	THI3
$\langle u''_1^2 \rangle$	0.0740	0.0836
$\langle u''_{1,1} u''_{1,1} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	1.004	1.002
$\langle u''_{1,1} u''_{1,2} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	-0.007	0.030
$\langle u''_{1,1} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	-0.004	0.025
$\langle u''_{1,2} u''_{1,2} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	1.000	0.995
$\langle u''_{1,2} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	0.014	0.008
$\langle u''_{1,3} u''_{1,3} \rangle / \langle u''_1^2 \rangle$	1.000	1.002

Tableau 3.1.a : Contraintes turbulentes calculées à partir des vitesses turbulentes des particules fluides.

	THI2	THI3
τ_1^t	0.0263	0.0233
$\tau_{1,11}^t / \tau_1^t$	0.987	1.020
$\tau_{1,12}^t / \tau_1^t$	0.022	0.028
$\tau_{1,13}^t / \tau_1^t$	0.050	0.060
$\tau_{1,22}^t / \tau_1^t$	1.002	0.994
$\tau_{1,23}^t / \tau_1^t$	0.028	0.056
$\tau_{1,33}^t / \tau_1^t$	1.010	0.986

Tableau 3.1.b : Echelles temporelles intégrales Lagrangiennes.

Dans le tableau 3.1.c on a inscrit la valeur du coefficient de diffusion obtenue à l'aide des deux simulations. Il est intéressant de constater que cette valeur ne varie pas d'une simulation à l'autre.

	THI2	THI3
D_1^1	$1.95 \cdot 10^{-3}$	$1.96 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3.1.c : Coefficient de diffusion

3.2.2 Rapport entre les échelles intégrales temporelles Eulériennes et Lagrangiennes

Un des problèmes les plus difficiles pour modéliser le transport turbulent est de relier les grandeurs Eulériennes et Lagrangiennes. Par exemple, que ce soit par une approche Eulérienne ou Lagrangienne, si l'on veut prendre en compte l'effet d'un glissement moyen entre les particules et le fluide porteur, il est indispensable de connaître la valeur du rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne.

Saffman (1961), à l'aide d'une approche théorique estime la valeur de ce rapport. Il trouve, $\tau_1^1/T^e = 0.8$, en supposant que :

$$\frac{\sqrt{\langle u''_1 \rangle_1}}{\langle u \rangle} \ll 1 .$$

(Nous rappelons que T^e est défini Eq. 1.2.20)

Dans le tableau 3.2, on a inscrit les rapports de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne, obtenus à partir des deux simulations.

Il faut noter que le déplacement de la fréquence de coupure pour le calcul par LES de la turbulence du fluide porteur n'affecte pas ce résultat. Les résultats de ces simulations se situent juste au milieu des valeurs obtenues en simulation directe par Yeung et Pope, et Squires et Eaton.

Yeung et Pope ont calculé ce rapport pour des écoulements ayant des nombres de Reynolds turbulents différents (de 38 à 93). Ils trouvent une valeur moyenne de 0.72 ± 0.06 , sans observer d'évolution liée aux variations du nombre de Reynolds.

	THI2	THI3	Y. et P.	S. et E.
N	64 ³	64 ³	64 ³	64 ³
R_e^λ	38	41	38	22
τ_1^l / T^c	0.95	0.92	0.74	1.04

Tableau 3.2 : Rapports entre les échelles intégrales temporelles Eulériennes et Lagrangiennes obtenus par simulation de turbulence entretenue.

On note : Yeung et Pope (Y., P.), et Squires et Eaton (S.,E.).

Dans le tableau 3.3, on a inscrit le rapport τ_1^l / T^c obtenu expérimentalement en turbulence de grille.

Dans l'expérience de Shlien et Corrsin (1974), les échelles temporelles Lagrangiennes sont estimées en mesurant la diffusion de la température à partir d'un point source. Ils obtiennent une valeur qui se situe dans la fourchette des résultats de simulation. Plus récemment, Sato et Yamamoto (1987) ont mesuré des trajectoires de particules de diamètre de 0.5 mm et ayant une densité proche de celle du fluide, en utilisant un procédé photographique. Ils obtiennent des valeurs plus faibles et observent une diminution de ce paramètre lorsque le nombre de Reynolds augmente.

	S. et C.	S. et Y
R_e^λ	71	25-66
τ_1^l / T^c	1.0	0.6-0.4

Tableau 3.3 : Rapports entre les échelles intégrales temporelles Eulériennes et Lagrangiennes mesurées en turbulence de grille.

On note : Shlien et Corrsin (S., C.), et Sato et Yamamoto (S.,Y.).

3.2.3 Forme de la corrélation Lagrangienne des vitesses

Le deuxième point important pour simuler la dispersion de particules est de connaître la forme des corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide porteur (Cf. chapitre 4). Dans l'approche Lagrangienne, elle sert à déterminer les composantes turbulentes de la vitesse du fluide (Desjonquères 1987). Dans l'approche Eulérienne, elle permet d'estimer le mouvement fluctuant des particules (Hinze, 1959) à partir de la turbulence du fluide.

Hinze suppose que cette fonction de corrélation est de forme exponentielle. Gouesbet et al. (1984), pour le calcul de la dispersion, ont utilisé des corrélations ayant une forme de Frenkiel (1953).

$$R_1(\tau) = \exp\left[\frac{-\tau}{(m+1)\tau_1}\right] \cos\left[\frac{m\tau}{(m+1)\tau_1}\right] \quad (3.2.1)$$

Sur la figure 3.2.2, on a superposé le résultat de la simulation (THI3) avec deux formes de Frenkiel. La première, $m=0$, correspond à la forme exponentielle, la deuxième $m=1$ est celle utilisée par Gouesbet et al. dans leur simulation Lagrangienne. On observe que la corrélation calculée est plutôt de forme exponentielle.

Sur les figures 3.2.3 et 3.2.4, nous présentons les résultats expérimentaux de Sato et Yamamoto et des simulations numériques de Yeung et Pope et Squires et Eaton.

L'homogénéité des résultats semble montrer que la forme de la corrélation des vitesses est de forme exponentielle dans des turbulences isotropes stationnaires à faible nombre de Reynolds.

Ce résultat est à rapprocher de l'observation de Minier et Simonin (1992) qui, dans le cadre de la modélisation diphasique Lagrangienne, montrent que l'utilisation d'une équation de type Langevin pour prédire les vitesses fluctuantes de particules fluides, implique que la corrélation Lagrangienne du fluide est une exponentielle.

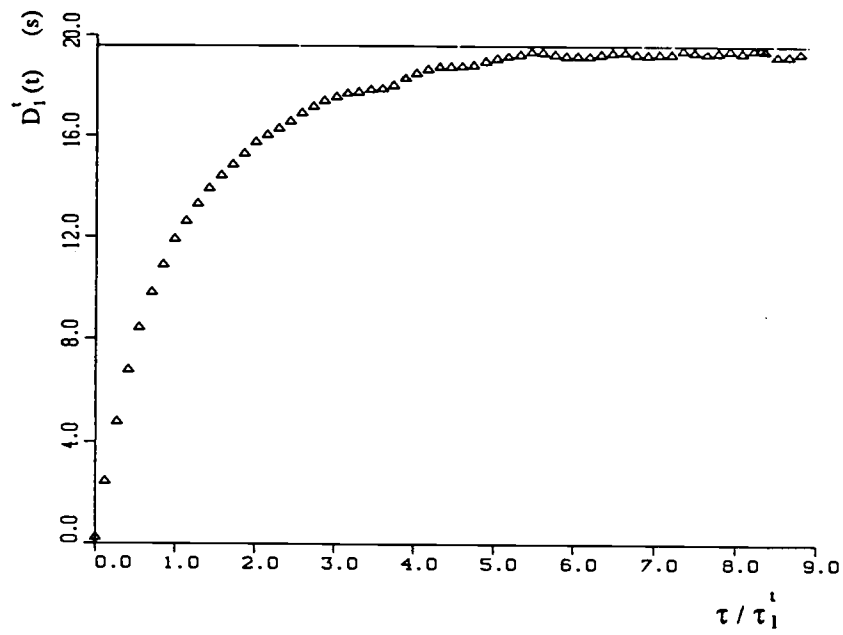


Figure 3.2.1 : Calcul du coefficient de diffusion :
 Δ , transitoire calculé à l'aide de l'équation 3.2.1 ; — , limite asymptotique calculée à l'aide de l'équation 3.2.2.

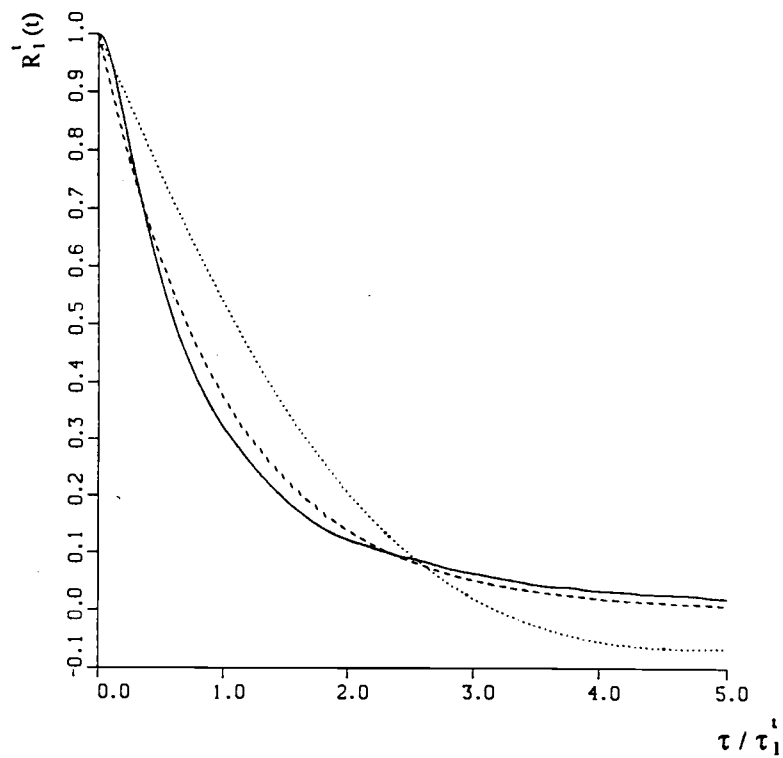


Figure 3.2.2 : Corrélation lagrangienne des vitesses :
 — , résultat de la simulation ; ---, forme de Frenkiel $m=0$; ..., forme de Frenkiel $m=1$.

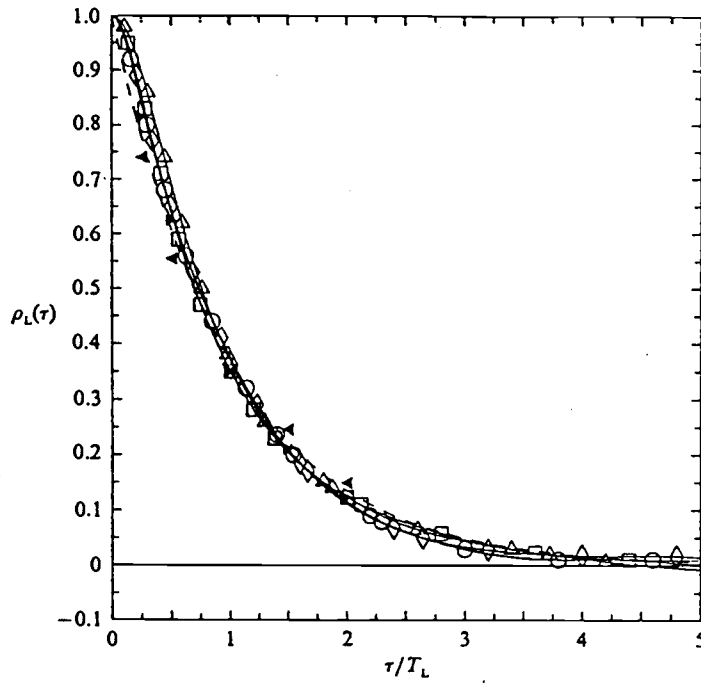


FIGURE 9. Lagrangian velocity autocorrelation functions $\rho_L(\tau)$ against time lag normalized by the Lagrangian integral timescale T_L , from the 128^3 simulations. \triangle , $R_\lambda = 38$; \square , $R_\lambda = 63$; \circ , $R_\lambda = 90$; \diamond , $R_\lambda = 93$. The dashed line is the function $\exp(-\tau/T_L)$. Experimental data from Sato & Yamamoto (1987): \blacktriangleright , $R_\lambda = 46$; \blacktriangleleft , $R_\lambda = 66$.

Figure 3.2.3 : Résultats de Yeung et Pope (1989).

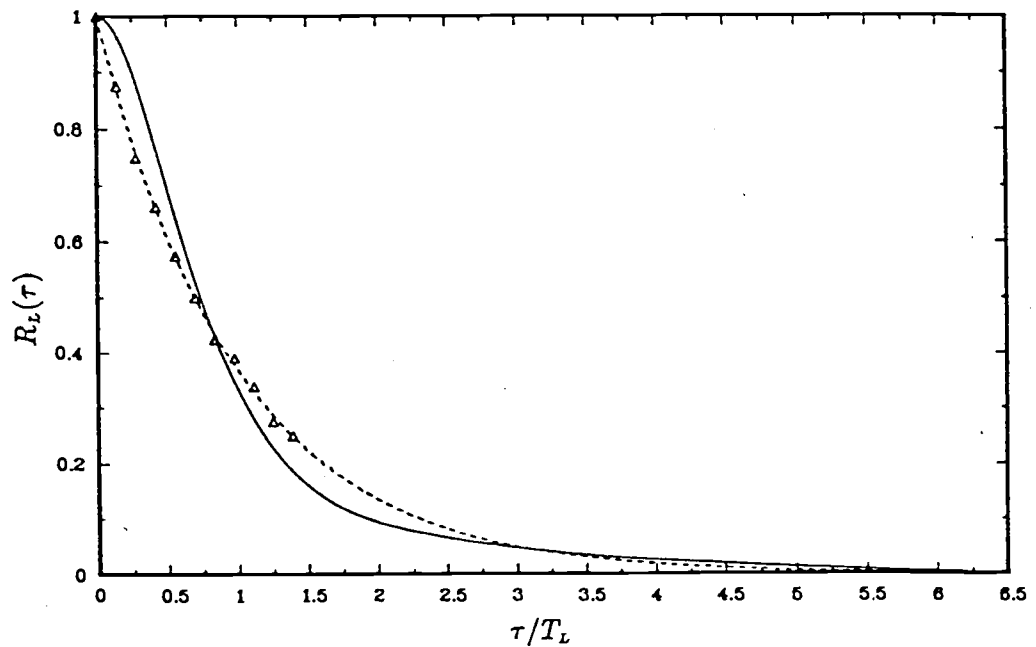


FIGURE 3.17. Lagrangian velocity autocorrelation in forced isotropic turbulence. —, Case FI2; ----, $\exp(-\tau/T_L)$; \triangle , Sato and Yamamoto (1987).

Figure 3.2.4 : Résultats de Squires et Eaton (1990).

Chapitre 4

Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire

La description Lagrangienne du mouvement de particules placées dans un champ turbulent homogène isotrope stationnaire, permet une analyse théorique de la dispersion de particules de densité différente de celle du fluide.

L'approche Lagrangienne peut être utilisée pour mener une analyse du type diffusion turbulente (Taylor-Batchelor). Elle nous permet de retrouver les principaux résultats exprimés dans le chapitre 3. Ces résultats ne relient entre elles que des grandeurs caractéristiques du mouvement fluctuant des particules proprement dit. Si l'on veut aller plus loin, c'est-à-dire si l'on cherche à calculer les propriétés de transport du mouvement fluctuant des particules en fonction des caractéristiques de la turbulence du fluide, cette analyse n'est pas suffisante. Historiquement, le premier qui a calculé des propriétés de transport du mouvement fluctuant des particules en fonction de celles de la turbulence du fluide porteur est Tchen (1947). A partir d'hypothèses assez restrictives, notamment en supposant que les particules durant leur mouvement suivent les mêmes particules fluides, il linéarise l'équation du mouvement des particules et montre qu'au bout d'un temps infini, la dispersion des particules est égale à la diffusion de particules fluides. Hinze (1959), dans le cadre des hypothèses de Tchen, fait une analyse spectrale de la dispersion turbulente et arrive à la même conclusion. D'autre part, en supposant que la corrélation Lagrangienne de la vitesse turbulente du fluide est de forme exponentielle, il relie la variance des vitesses des particules à l'énergie turbulente du fluide. Gouesbet et al. (1984) reprennent les travaux de Hinze en utilisant une autre forme présumée de la fonction d'autocorrélation du fluide (famille de Frenkiel).

L'hypothèse que les particules durant leur mouvement suivent les mêmes particules fluides, est assez restrictive et ne permet pas de prendre en compte divers phénomènes.

Elle exclut, par exemple, la possibilité qu'il puisse y avoir un temps d'interaction "turbulence-particules" (temps pendant lequel, en moyenne, une particule reste dans la même structure turbulente), différent lorsqu'il s'agit de particules ou de particules fluides (temps intégral Lagrangien de la turbulence du fluide). Nous verrons dans le chapitre 6, que des nuages de particules peuvent, selon leur nature, voir la même structure turbulente plus longtemps que des particules fluides, et par conséquent disperser plus rapidement que des particules fluides (résultat en contradiction avec l'analyse de Tchen-Hinze).

Elle ne permet pas, non plus, de prendre en compte une migration éventuelle des particules vers certaines structures privilégiées de la turbulence du fluide. Les résultats des simulations que nous avons effectuées, ont montré que statistiquement, les bulles avaient tendance à se répartir dans des zones de turbulence moins énergétiques. Dans ce cas, l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est plus faible que l'énergie turbulente du fluide. Ce résultat ne peut en aucun cas être pris en compte dans le cadre de la théorie standard de Tchen-Hinze.

Elle oblige, également, à supposer qu'aucune force extérieure ne s'applique sur les particules. Cependant, dans les écoulements en situation réelle, la force de gravité agit sur les particules et génère, selon leur nature, un glissement moyen entre le nuage de particules et le fluide environnant. Csanady 1963, étudie la dispersion d'un nuage de particules denses en présence des forces de gravité. Il sépare les mécanismes de dispersion en deux :

Il traite d'un côté l'effet d'inertie qui concerne l'étude du comportement de particules denses en l'absence de la gravité. Il utilise pour cela le formalisme de Hinze.

Dans un deuxième temps, il étudie ce qu'il appelle l'effet de croisement de trajectoires. Il montre que, sous l'effet d'une vitesse de glissement entre un nuage de particules et le fluide porteur, il y a une diminution du temps d'interaction "turbulence-particules". Dans ce cadre, la prise en compte de l'effet de croisement de trajectoires se résume à une correction du coefficient de dispersion et n'influe pas sur les autres caractéristiques du mouvement fluctuant des particules.

Ces observations nous ont conduit à proposer une extension de l'approche théorique de Tchen-Hinze en supprimant l'hypothèse que les particules durant leur mouvement suivent les mêmes particules fluides. Il faut alors définir directement les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les

particules, énergie turbulente, corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide "vu" par les particules, temps d'interaction fluide-particules. Dans ce cadre, l'effet de croisement de trajectoires devient un cas particulier pour lequel nous savons calculer les statistiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules.

Nous verrons au chapitre 6, qu'à travers cette approche, il est possible d'appréhender correctement un certain nombre de phénomènes physiques. Malheureusement, la qualité des résultats est conditionnée par la connaissance des caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules. Si, dans les simulations que nous avons effectuées, nous sommes capable de connaître toutes les caractéristiques du fluide "vu" par les particules, dans les simulations utilisant soit une modélisation Eulérienne (Simonin, 1990), ou Lagrangienne (Gouesbet et al. 1984, Minier et Simonin 1992, ...), hormis dans le cas particulier de l'effet de croisement de trajectoires, il n'existe pas encore de modèle permettant d'accéder à ces informations.

4.1 Calcul du coefficient de dispersion

Nous supposons que tous les résultats obtenus dans le cadre de la théorie de la diffusion turbulente (Taylor 1921, Batchelor 1948, Hinze 1959) restent valables pour étudier le mouvement de particules. On rappelle ici les principaux résultats présentés dans le chapitre 3 et qui s'appliquent à l'étude de la dispersion de particules.

A partir de l'équation du mouvement fluctuant de chaque particule,

$$\frac{d}{dt} y_{2,i}(t) = u''_{2,i}(t) \quad (4.1.1)$$

nous pouvons relier le tenseur de la variance du déplacement au tenseur des corrélations des vitesses :

$$\frac{d}{dt} \langle y_{2,i} y_{2,j} \rangle_2(t) = \sqrt{\langle u''_{2,i}{}^2 \rangle_2 \langle u''_{2,j}{}^2 \rangle_2} \int_0^t (R_{2,ij}(\tau) + R_{2,ji}(\tau)) d\tau \quad (4.1.2)$$

dans lesquelles $u''_{2,i}$ est la composante fluctuante du mouvement des particules et $\langle \cdot \rangle_2$ l'opérateur de moyenne lorsque l'on moyenne sur des particules de masse volumique différente de celle du fluide.

Le tenseur des corrélations des vitesses est défini par :

$$R_{2,ij}(\tau) = \langle u''_{2,i}(t) u''_{2,j}(t+\tau) \rangle_2 / \sqrt{\langle u''_{2,i}{}^2 \rangle_2 \langle u''_{2,j}{}^2 \rangle_2} \quad (4.1.3)$$

L'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du mouvement fluctuant des particules est définie à partir de l'intégrale du tenseur de corrélation des vitesses :

$$\tau_{2,ij}^t = \int_0^\infty R_{2,ij}(\tau) d\tau \quad (4.1.4)$$

Expression du coefficient de dispersion

Si l'on suppose que les composantes du déplacement des particules ont une densité de probabilité normale liée, nous pouvons relier le coefficient de dispersion au tenseur de la variance du déplacement :

$$D_{2,ij}^t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y_{2,i} y_{2,j} \rangle_2 \quad (4.1.5)$$

Pour de longs temps de dispersion, nous retrouvons le résultat classique de l'analyse de Taylor :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,ij}^t = \sqrt{\langle u''_{2,i}{}^2 \rangle_2 \langle u''_{2,j}{}^2 \rangle_2} \frac{1}{2} (\tau_{2,ij}^t + \tau_{2,ji}^t) \quad (4.1.6)$$

L'analyse spectrale proposée par Hinze permet de relier le coefficient de dispersion au spectre Lagrangien des vitesses fluctuantes des particules :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,ij}^t = \frac{\pi}{2} (E_{2,ij}(0) + E_{2,ji}(0)) \quad (4.1.7)$$

avec :

$$E_{2,ij}(\omega) = \frac{\sqrt{\langle u''_{2,i}{}^2 \rangle_2 \langle u''_{2,j}{}^2 \rangle_2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{2,ij}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (4.1.8)$$

Tout le problème est alors d'essayer de calculer le coefficient de dispersion en fonction des caractéristiques de la turbulence du fluide.

4.2 Hypothèses de Tchen

Les premiers travaux pour essayer d'évaluer le coefficient de dispersion des particules en fonction des caractéristiques turbulentes du champ porteur sont l'œuvre de Tchen (1947). Il étudie la dispersion de petites sphères indéformables placées dans un champ de turbulence homogène stationnaire.

Il émet les hypothèses suivantes :

- (1) la turbulence du fluide est homogène et stationnaire dans un domaine de dimension infinie,
- (2) le nombre de Reynolds particulaire est suffisamment petit :

$$R_e^p = \frac{d_p |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{\nu_1} \ll 1,$$

- (3) le diamètre de la particule est plus petit que l'échelle de longueur de Kolmogorov :

$$d_p \ll \eta_k.$$

- (4) durant son mouvement, la particule suit la même particule fluide,
- (5) aucun champ de force extérieure n'agit sur la particule.

Ces hypothèses lui permettent de linéariser l'équation du mouvement des particules,

$$\frac{d}{dt} u''_{2,i}(t) = - \frac{u''_{2,i}(t) - u''_{1,i}(t)}{\tau_{12}^F} + b \frac{d}{dt} u''_{1,i}(t) - c \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} (u''_{2,i}(\tau) - u''_{1,i}(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau}} \quad (4.2.1)$$

et de montrer que, si l'on attend un temps infini, la dispersion des particules est égale à la diffusion de particules fluides.

Nous rappelons que :

$$\tau_{12}^F = \left(\frac{\rho_2 + 1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{18 \nu_1} \quad b = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{\rho_2 + 1}{\rho_1} + \frac{1}{2}} \quad c = \frac{9}{d} \sqrt{\frac{\nu_1}{\pi}} \frac{1}{\frac{\rho_2 + 1}{\rho_1} + \frac{1}{2}}$$

Emettre l'hypothèse (1) revient à supposer que la turbulence est homogène et stationnaire, dans un domaine suffisamment grand pour permettre aux mouvements fluctuants des particules d'atteindre une valeur asymptotique.

L'hypothèse (2) permet d'utiliser la loi de Stokes pour calculer la force de traînée.

L'hypothèse (3) exprime le fait que le diamètre de la particule doit être suffisamment petit pour ne pas opérer de filtrage spatial de la turbulence du fluide.

D'après les résultats présentés dans le chapitre 2.2.2, nous savons que si les hypothèses (2) et (3) sont vérifiées simultanément, alors la dérivée suivant la particule et la dérivée suivant le mouvement du fluide sont confondues.

Nous avons alors :

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$$

L'hypothèse (4) implique que les statistiques Lagrangiennes de la turbulence calculées le long des trajectoires des particules sont identiques à celles que l'on obtiendrait en suivant des particules fluides.

L'hypothèse (5) est la conséquence directe de l'hypothèse (4). En effet, il est difficile d'imaginer une particule subissant l'effet d'une force extérieure tout en suivant la même particule fluide.

4.3 Théorie de Tchen-Hinze

En utilisant les mêmes hypothèses que Tchen, Hinze (1959) étudie la dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire.

Sous ces hypothèses, l'isotropie de la turbulence implique l'isotropie du mouvement fluctuant des particules (linéarité). Puisque le mouvement fluctuant des particules est isotrope, on peut simplifier l'écriture de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne, de la variance des vitesses, de la corrélation Lagrangienne des vitesses, du spectre Lagrangien, et enfin du coefficient de dispersion.

On définit:

$$\tau_2^t = \frac{1}{3} \tau_{2,ii}^t \quad \langle u''_2^2 \rangle_2 = \frac{1}{3} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2 \quad R_2(t) = \frac{1}{3} R_{2,ii}(t) \quad E_2(t) = \frac{1}{3} E_{2,ii}(t)$$

$$D_2^t(t) = \frac{1}{3} D_{2,ii}^t(t)$$

La relation (Eq. 4.1.6) obtenue à partir de l'analyse de Taylor pour de grands temps de dispersion s'écrit :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_2^t = \langle u''_2 \rangle_2 \tau_2^t \quad (4.3.1)$$

4.3.1 Calcul du coefficient de dispersion des particules

A l'aide de la transformée de Fourier de l'équation linéarisée du mouvement des particules (Eq. 4.2.1), Hinze relie le spectre Lagrangien du mouvement fluctuant des particules au spectre Lagrangien de la turbulence du fluide.

Il obtient la relation suivante :

$$E_2(\omega) = Q_{12}(\omega) E_1(\omega) \quad (4.3.2)$$

avec :

$$Q_{12}(\omega) = (1 + f_1(\omega))^2 + f_2^2(\omega) \quad (4.3.3)$$

$$f_1(\omega) = \omega \left(\omega + c \left(\frac{\pi \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (b-1) / D \quad (4.3.4)$$

$$f_2(\omega) = \omega \left(\frac{1}{\tau_{12} F} + c \left(\frac{\pi \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) (b-1) / D \quad (4.3.5)$$

$$D = \left(\frac{1}{\tau_{12} F} + c \left(\frac{\pi \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(\omega + c \left(\frac{\pi \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (4.3.6)$$

Ce résultat permet de relier le coefficient de dispersion des particules au coefficient de diffusion du fluide. En effet, en remarquant que $E_2(0) = E_1(0)$ et en utilisant les résultats 3.1.17 et 4.1.7, il trouve :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_2^t = \lim_{(t \rightarrow \infty)} D_1^t \quad (4.3.7)$$

Il retrouve ainsi le résultat obtenu par Tchen.

En utilisant les expressions 3.1.13 et 4.1.6, nous pouvons écrire ce résultat sous la forme :

$$\langle u''_2 \rangle_2 \tau_2^t = \langle u''_1 \rangle_1 \tau_1^t \quad (4.3.8)$$

4.3.2 Calcul de la variance des vitesses fluctuantes des particules

Le deuxième volet de l'analyse proposée par Hinze consiste à relier la variance des vitesses fluctuantes des particules à l'énergie turbulente du fluide.

En inversant l'expression 4.1.8 et en remarquant que, par définition, $R_2(0) = 1$, on obtient :

$$\langle u''_2 \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(\omega) d\omega \quad (4.3.9)$$

En remplaçant le spectre du mouvement fluctuant des particules par l'expression calculée en 4.3.2, nous pouvons écrire cette expression sous la forme :

$$\langle u''_2 \rangle_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{12}(\omega) E_1(\omega) d\omega \quad (4.3.10)$$

Cette équation relie la variance des vitesses fluctuantes des particules aux caractéristiques turbulentes du fluide porteur. Pour aller plus loin, il faut connaître l'expression du spectre Lagrangien de la turbulence. Une méthode pour y arriver est de supposer connue la corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide.

Hinze suppose que cette corrélation Lagrangienne est de forme exponentielle.

$$R_1(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad (4.3.11)$$

Gouesbet et al. (1984) se placent dans un cadre plus large en utilisant la corrélation Lagrangienne proposée par Frenkiel (1953).

$$R_1(\tau) = \exp\left[\frac{-\tau}{(m+1)\tau_1}\right] \cos\left[\frac{m\tau}{(m+1)\tau_1}\right]$$

En choisissant la forme exponentielle et en utilisant l'équation 3.1.14, nous obtenons :

$$E_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \langle u''_1 \rangle_1 \quad (4.3.12)$$

En négligeant la force de Basset, la fonction de transfert entre le spectre Lagrangien du mouvement fluctuant des particules et le spectre Lagrangien de la turbulence du fluide peut s'écrire sous une forme plus simple. D'après 4.3.3, nous pouvons écrire :

$$Q_{12}(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{F}\right)^2 + b^2 \omega^2}{\tau_{12}} \frac{\tau_{12}}{\left(\frac{1}{F}\right)^2 + \omega^2} \quad (4.3.13)$$

Nous possédons maintenant tous les éléments pour intégrer l'équation 4.3.10. En utilisant le théorème des résidus (Bass, 1968), nous obtenons :

$$\langle u''_2 \rangle_2 = \langle u''_1 \rangle_1 \left(\frac{b^2 + \frac{\tau_1}{F}}{\tau_{12}} \right) \frac{\tau_{12}}{1 + \frac{\tau_1}{F}} \quad (4.3.14)$$

En suivant une méthode identique, Desjonquères et al. (1986) relie la covariance des vitesses fluide-particules à l'énergie turbulente du fluide. Ils trouvent :

$$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2 = \langle u''_1 \rangle_1 \left(\frac{b + \frac{\tau_1}{F}}{\tau_{12}} \right) \frac{\tau_{12}}{1 + \frac{\tau_1}{F}} \quad (4.3.15)$$

dans laquelle : $\langle u''_1 u''_2 \rangle_2 = \frac{1}{3} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2$.

Il faut également signaler que Friedlander (1957), pour des particules denses et en adoptant une démarche similaire, a relié la variance du mouvement relatif fluide-particule à l'énergie turbulente du fluide.

4.4 Extension de la théorie de Tchen-Hinze : Hypothèse de l'équilibre local

Nous avons discuté, dans l'introduction de ce chapitre, l'intérêt de s'affranchir de l'hypothèse que les particules durant leur mouvement suivent les mêmes particules fluides. Dans le cadre plus large que nous définissons ici, nous intégrons également la possibilité d'étudier la dispersion de particules ayant un nombre de Reynolds particulaire plus important que ne le permet la théorie standard.

Des hypothèses utilisées initialement par Tchen-Hinze, nous ne conservons que les hypothèses (1) et (3) que nous rappelons, ci-après :

-la turbulence est homogène et stationnaire dans un domaine suffisamment grand, pour permettre aux mouvements fluctuants des particules d'atteindre une valeur asymptotique,

-le diamètre des particules est suffisamment petit pour éviter que la dimension de la particule ne joue un rôle de filtre spatial pour les petites échelles de la turbulence.

Dans le cadre plus général de la modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques à phase dispersée, on dira que l'on fait une hypothèse d'équilibre local entre le mouvement fluctuant des particules et la turbulence du fluide.

Nous devons alors résoudre deux problèmes. D'une part, dans le cas des écoulements à nombre de Reynolds particulaire plus grand, l'équation du mouvement qui régit les particules devient non linéaire. D'autre part, puisque les particules durant leur mouvement ne suivent pas les mêmes particules fluides, nous devons introduire des caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules.

4.4.1 Linéarisation de l'équation du mouvement des particules

Le Reynolds particulaire n'étant plus supposé très petit devant 1, la dérivée suivant la particule et la dérivée suivant le mouvement du fluide ne sont plus identifiables (Cf. chapitre 2.2.3).

$$\frac{d}{dt} \neq \frac{D}{Dt}$$

Nous devons également utiliser le coefficient correcteur du terme de traînée, qui prend en compte la modification de la contribution de cette force provoquée par l'augmentation du nombre de Reynolds (Cf. chapitre 2.2.3).

L'équation du mouvement des particules s'écrit alors (Eq. 2.2.14) :

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\tau_{12}^F} + b \frac{D}{Dt} u_{1,i} - c \int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau} (u_{2,i} - u_{1,i}) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + e g_i \quad (4.4.1.a)$$

dans laquelle τ_{12}^F est le temps de relaxation de la particule :

$$\tau_{12}^F = \frac{4}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2} \right) \frac{d_p}{C_D |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|} \text{ avec } C_D = \frac{24}{R_e^p} (1 + 0.15 R_e^{p,0.687})$$

et
$$e = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1}{2}}$$

Malheureusement, cette équation du mouvement des particules n'est plus linéaire. Cette non linéarité, due à la dérivée de la vitesse du fluide en suivant le mouvement du fluide et au coefficient correcteur du terme de traînée, complique notablement l'étude du comportement d'un nuage de particules placées dans un champ de turbulence homogène isotrope stationnaire. Elle empêche de procéder à l'analyse de Fourier telle qu'elle a été menée dans la partie précédente pour calculer les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules.

Pour ne pas s'arrêter là, nous supposons que statistiquement, le choix de l'une ou l'autre des dérivées n'apporte pas une modification fondamentale du comportement des particules. D'autre part, nous linéarisons le coefficient correcteur du terme de traînée en remplaçant la vitesse relative instantanée par la vitesse relative moyenne.

$$|\vec{u}_2 - \vec{u}_1| \approx \sqrt{\langle (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)^2 \rangle_2}$$

Nous obtenons alors l'équation linéarisée suivante.

$$\frac{d}{dt} u_{2,i}(t) = - \frac{u_{2,i}(t) - (u_{1,i}(t))_2}{\tau_{12}^F} + b \frac{d}{dt} (u_{1,i}(t))_2 - c \int_{t_0}^t \frac{d(u_{2,i}(\tau) - (u_{1,i}(t))_2)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + e g_i \quad (4.4.2)$$

dans laquelle, nous notons explicitement $(u_{1,i}(t))_2$ la vitesse du fluide "vu" par les particules.

Nous devons observer, que dans le cas de particules beaucoup plus denses que le fluide, les contributions des termes de pression, de masse ajoutée et de Basset sont négligeables. L'équation 4.4.2, à la linéarisation du coefficient correcteur près, est alors exacte. Par contre, pour les écoulement à bulles, ces termes deviennent importants. C'est pourquoi, dans le chapitre 6, afin de vérifier la validité de l'hypothèse quant au choix de la dérivée, nous avons comparé le résultat de dispersion d'un nuage de bulles dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, calculée respectivement en utilisant la dérivée suivant la particule et la dérivée suivant le fluide. Nous n'observons pas de différences significatives.

4.4.2 Turbulence du fluide "vu" par les particules

Les caractéristiques turbulentes du fluide, calculées sur un nuage de particules en mouvement dans un champ de turbulence, n'ont a priori aucune raison d'être strictement égales à celles que l'on calcule à partir d'un nuage de particules fluides. Nous précisons ici, que nous raisonnons d'un point de vue statistique, mais en aucun cas sur une particule ou une particule fluide isolée. En effet, sous l'action des forces qui s'exercent sur les particules, il peut se produire divers événements pouvant provoquer une différence entre des statistiques turbulentes calculées sur un nuage de particules fluides ou sur un nuage de particules.

La position des particules peut être corrélée avec certaines structures particulières de la turbulence du fluide. Nous constaterons que les bulles, en moyenne, ont tendance à se situer dans des zones de turbulence moins énergétiques. Dans ce cas, l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est différente de l'énergie turbulente du fluide :

$$\langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \neq \langle u_1^2 \rangle_1$$

dans laquelle :

$\langle u_{1,i}^2 \rangle_2$ est l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules,

$\langle u_1^2 \rangle_1$ est l'énergie turbulente du fluide, que l'on peut calculer soit sur une distribution aléatoire de particules, soit sur un nuage de particules fluides.

Le temps d'interaction entre les particules et les grandes structures turbulentes peut être différent de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne de la turbulence. Nous verrons dans la partie suivante, comment sous l'effet d'un glissement moyen entre le nuage de particules et le fluide, ce temps d'interaction diminue. Les résultats des simulations montreront que cet effet n'est pas la cause unique de cette différence, mais que certaines particules ont tendance, en moyenne, à voir vivre les grandes structures turbulentes plus longtemps que des particules fluides.

Dans ce cas :

$$\tau_{12,i}^t \neq \tau_1^t$$

dans laquelle, $\tau_{12,i}^t$ est le temps d'interaction "particules-turbulence",
 τ_1^t est l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne de la turbulence.

Dans le cadre strict des hypothèses de Tchen, l'isotropie de la turbulence implique l'isotropie du mouvement fluctuant des particules. Dans notre cas, ceci n'est plus forcément vrai. Nous verrons par exemple, que le croisement de trajectoires a un effet anisotrope sur les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules et les statistiques Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules. Nous notons donc séparément chaque composante normale des caractéristiques de la turbulence du fluide calculée le long des trajectoires des particules sous la forme suivante :

la corrélation Lagrangienne des vitesses du fluide "vu" par les particules

$$\mathcal{R}_{1,i}(\tau) = \langle u_{1,i}''(t) u_{1,i}''(t+\tau) \rangle_2 / \langle u_{1,i}''^2 \rangle_2 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (4.4.3)$$

l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide "vu" par les particules

$$\tau_{12,i}^t = \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{1,i}(\tau) d\tau \quad (4.4.4)$$

le spectre Lagrangien du fluide "vu" par les particules

$$\mathcal{E}_{1,i}(\omega) = \frac{\langle u_{1,i}''^2 \rangle_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{1,i}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (4.4.5)$$

dans lesquelles $i=(1,3)$ désigne les trois composantes normales de ces tenseurs.

Nous nous rappelons, que si l'on veut calculer l'énergie du mouvement des particules en fonction de l'énergie turbulente du fluide, il faut se donner la forme de la corrélation Lagrangienne du fluide. Puisque, pour des particules fluides, la forme de la corrélation est une exponentielle (d'après les résultats du chapitre 3.2.2), nous supposons que si la turbulence est homogène isotrope stationnaire, les composantes normales du tenseur des corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules restent de forme exponentielle, quel que soit le mouvement moyen des particules (vitesse moyenne : nulle, non nulle, non nulle avec un gradient constant).

$$\mathcal{R}_{1,i}(\tau) = \exp\left[-\tau / \tau'_{12,i}\right] \quad (4.4.6)$$

La validité de cette hypothèse sera discutée dans l'analyse des résultats.

4.4.3 Caractéristiques du mouvement fluctuant des particules

Connaissant les caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules, nous pouvons calculer les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules. Nous suivons pour cela la même démarche que celle décrite en détail dans la partie précédente.

En suivant le formalisme employé dans la théorie standard de Tchen-Hinze, nous obtenons :

-l'expression du coefficient de dispersion,

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,i}^1 = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \int_0^\infty \mathcal{R}_{1,i}(\tau) d\tau \quad (4.4.7)$$

ou

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,i}^1 = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \tau'_{12,i} \quad \text{sans sommation sur } i \quad (4.4.8)$$

-l'énergie du mouvement des particules,

$$\langle u_{2,i}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right] \quad (4.4.9)$$

-la covariance du mouvement corrélé fluide-particules,

$$\langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 = \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2 \left[\frac{b + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right] \quad \text{sans sommation sur } i \quad (4.4.10)$$

dans lesquelles :

$$\eta_{r,i} = \frac{\tau_{12i}^1}{F \tau_{12}} \quad (4.4.11)$$

4.5 Effet de croisement de trajectoires

Cette partie commence par une description sommaire des travaux de Csanady (1963), qui a étudié l'effet d'une vitesse de glissement entre un nuage de particules et le fluide porteur sur la dispersion d'un nuage de particules : l'effet de croisement de trajectoires. Expérimentalement, Wells et Stock (1983) ont mis en évidence, que cette vitesse de glissement engendrait une diminution du coefficient de dispersion des particules. Pour prendre en compte ce phénomène physique dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen, nous avons suivi une démarche proche de celle de Csanady. Nous montrerons alors, que l'effet de croisement de trajectoires ne peut être traité séparément de l'effet d'inertie, et qu'il modifie, non seulement la valeur du coefficient de dispersion des particules, mais aussi la variance des vitesses fluctuantes.

Définition : lorsque nous parlons de vitesse de glissement entre un nuage de particules et le fluide porteur, nous sous-entendons qu'il existe une différence entre la vitesse moyenne d'un nuage de particules et la vitesse moyenne du fluide porteur. En aucun cas, ce terme ne signifie pour nous une différence entre la vitesse instantanée de la particule et la vitesse instantanée de la particule fluide, cette différence comprenant aussi bien l'effet d'inertie de la particule que l'effet de croisement de trajectoires proprement dit.

4.5.1 Etude de Csanady

Csanady (1963) étudie la dispersion de particules dans des écoulements atmosphériques. Il traite séparément l'effet d'inertie et l'effet de croisement

de trajectoires. Il montre que, si la vitesse de glissement entre un nuage de particules et le fluide porteur est grande devant la vitesse turbulente du fluide, alors la corrélation Lagrangienne du fluide "vu" par les particules tend vers une corrélation Eulérienne de la turbulence du fluide.

Par des considérations sur la forme des isoclines des corrélations longitudinales des vitesses, il exprime le coefficient de dispersion dans la direction parallèle à la vitesse de glissement :

$$D_{2,t}^t = D_1^t \left[1 + \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.5.1)$$

dans laquelle β est le rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne, dont la valeur a été longuement discutée dans la chapitre 3.2.1,

$$\beta = \frac{\tau_1^t}{T^e} \quad (4.5.2)$$

ξ_r est le rapport de la vitesse de glissement entre les deux phases sur la racine carrée de l'énergie turbulente du fluide.

$$\xi_r = \frac{V_r}{\sqrt{\langle u''^2 \rangle_1}} \quad (4.5.3)$$

D_1^t est le coefficient de diffusion de particules fluides (Cf. chapitre 3).

En décrivant ce qu'il appelle l'effet de continuité, il montre que le croisement de trajectoires dans la direction perpendiculaire à la vitesse de glissement a un effet deux fois plus important, il trouve :

$$D_{2,j}^t = D_1^t \left[1 + 4 \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.5.4)$$

4.5.2 Etude du cas limite : la dispersion est dominée par la vitesse de glissement

Dans cette partie, nous reprenons l'analyse de Csanady dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen. La corrélation Lagrangienne des vitesses du fluide "vu" par les particules (Eq 4.4.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}_{1,i}(\tau) = \langle u''_{1,i}(t, \vec{x}) u''_{1,i}(t+\tau, \vec{x} + \tau\vec{V} + \vec{y}_2) \rangle_2 / \langle u''_{1,i}^2 \rangle_2 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (4.5.5)$$

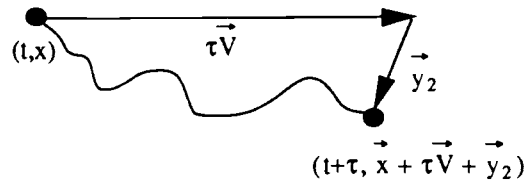
dans laquelle \vec{x} représente la position de la particule à l'instant t , $\vec{x} + \tau\vec{V} + \vec{y}_2$ la position de la particule à l'instant $t+\tau$, et $\vec{V} = \langle \vec{u}_2 \rangle_2 - \langle \vec{u}_1 \rangle_1$ est la différence entre les vitesses moyennes des deux phases.

Nous pouvons décomposer le déplacement de chaque particule en deux : celui qui résulte du mouvement moyen, c'est à dire d'une vitesse de glissement entre le nuage de particules et le fluide porteur,

$$\vec{Y} = \tau\vec{V},$$

et celui généré par le mouvement fluctuant,

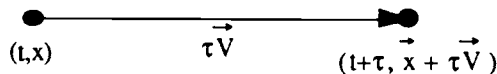
$$\vec{y}_2(\tau) = \int_0^\tau \vec{u}''_2(t) dt.$$



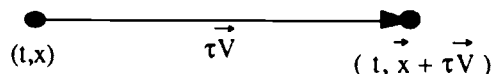
Nous supposons que la vitesse de glissement entre le nuage de particules et le fluide porteur est très grande devant la vitesse fluctuante du fluide

$$v_r = |\vec{V}| \gg \sqrt{\langle u''_i^2 \rangle}.$$

Le déplacement résultant du mouvement fluctuant est alors négligeable devant celui issu du mouvement moyen.



D'autre part, en appliquant "l'hypothèse de Taylor", nous considérons que la turbulence est figée pendant le passage des particules.



Sous ces hypothèses, la corrélation Lagrangienne du fluide calculée le long des trajectoires des particules peut être approximée par :

$$\mathcal{R}_{1,i}(\tau) \approx \langle u''_{1,i}(t, \vec{x}) u''_{1,i}(t, \vec{x} + \tau \vec{V}) \rangle_2 / \langle u''_{1,i}^2 \rangle_2 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (4.5.6)$$

Puisque le déplacement des particules est dominé par la vitesse de glissement, la distribution des particules et l'énergie turbulente du fluide sont décorréliées. L'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est égale à l'énergie turbulente du fluide :

$$\langle u''_{1,i}^2 \rangle_2 = \langle u''_1^2 \rangle_1 \quad (4.5.7)$$

Sous ces hypothèses, la corrélation Lagrangienne peut être identifiée à la corrélation Eulérienne de la turbulence du fluide (Eq. 1.2.11) :

$$\mathcal{R}_{1,i}(\tau) \rightarrow \mathcal{R}_{ij}^e(\vec{r}) = \left[g(r) \delta_{ij} + \frac{f(r) - g(r)}{r} r_i r_j \right]$$

dans laquelle $r_i = V_i \tau$.

Plaçons-nous dans un repère dont une des directions est parallèle à la vitesse de glissement. Les composantes normales du tenseur de corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide "vu" par les particules s'écrivent :

$$\mathcal{R}_{1,1}(\tau) = f(r) \quad \mathcal{R}_{1,j}(\tau) = g(r)$$

dans lesquelles, 1 désigne la direction parallèle à la vitesse de glissement, et j les directions perpendiculaires à la vitesse de glissement.

Rappelons certaines échelles Eulériennes définies au chapitre 1.2.2 :
l'échelle intégrale temporelle Eulérienne

$$T^e = \frac{L_f^e}{\sqrt{\langle u''_1^2 \rangle_1}}$$

les échelles de longueur intégrales longitudinale et transversale.

$$L_f^e = \int_0^{+\infty} f(r) dr \quad L_g^e = \int_0^{+\infty} g(r) dr \quad \text{avec : } L_f^e = 2 L_g^e$$

Temps d'interaction "particules-turbulence du fluide".

A partir de la corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide "vu" par les particules, nous calculons le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide".

Dans la direction parallèle à la vitesse de glissement, nous trouvons :

$$\tau_{12,i}^i = \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{1,i}(\tau) d\tau = \frac{1}{V_r} \int_0^{+\infty} f(r) dr = \frac{L_f^e}{V_r} = \frac{\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle}}{V_r} T^e = \frac{T^e}{\xi_r} \quad (4.5.8)$$

Dans les directions perpendiculaires à la vitesse de glissement, nous obtenons :

$$\tau_{12,j}^i = \int_0^{\infty} \mathcal{R}_{1,j}(\tau) d\tau = \frac{1}{V_r} \int_0^{+\infty} g(r) dr = \frac{L_g^e}{V_r} = \frac{\sqrt{\langle u_1'^2 \rangle}}{V_r} \frac{T^e}{2} = \frac{T^e}{2\xi_r} \quad (4.5.9)$$

Coefficient de dispersion

Ce résultat nous permet d'exprimer directement le coefficient de dispersion du nuage de particules en fonction des caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules.

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,i}^i = \langle u_1'^2 \rangle_1 \frac{T^e}{\xi_r} \quad (4.5.10)$$

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,j}^i = \langle u_1'^2 \rangle_1 \frac{T^e}{2\xi_r} \quad (4.5.11)$$

Lorsque le mouvement des particules est dominé par l'effet de croisement de trajectoires, la dispersion diminue deux fois plus dans les directions perpendiculaires à la vitesse de glissement que dans la direction parallèle.

Variance du mouvement fluctuant des particules

Si nous supposons que dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, la corrélation Eulérienne des vitesses du fluide est de forme exponentielle, alors les corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluides "vu" par les particules s'écrivent :

$$\mathcal{R}_{1,f}(\tau) = \exp\left(-\tau / \frac{T^c}{\xi_r}\right) \quad (4.5.12)$$

$$\mathcal{R}_{1,j}(\tau) = \exp\left(-\tau / \frac{T^c}{2\xi_r}\right) \quad (4.5.13)$$

A partir de ces expressions, nous pouvons calculer l'énergie du mouvement fluctuant des particules dans les directions parallèle et perpendiculaires :

$$\langle u_{2,f}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,f}^2 \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,f}}{1 + \eta_{r,f}} \right] \quad \text{avec} \quad \eta_{r,f} = \frac{T^c}{\xi_r \tau_{12}^F} \quad (4.5.14)$$

$$\langle u_{2,j}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,j}^2 \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,j}}{1 + \eta_{r,j}} \right] \quad \text{avec} \quad \eta_{r,j} = \frac{T^c}{2\xi_r \tau_{12}^F} \quad (4.5.15)$$

Dans le cadre de l'extension la théorie de Tchen, il est clair que l'effet de croisement de trajectoires modifie le niveau d'énergie du mouvement fluctuant des particules et joue donc également sur l'effet d'inertie. Dans ce cas limite, pour des particules denses, $b=0$, nous observons que la diminution d'énergie est plus importante dans la direction perpendiculaire au croisement de trajectoires que dans la direction parallèle.

4.5.3 Expressions générales

Pour décrire les mécanismes de dispersion sur toute la gamme des situations comprises entre l'absence de croisement de trajectoires et le mouvement dominé par le croisement de trajectoires, nous cherchons une expression générale de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne de la turbulence du fluide "vu" par les particules. Nous avons choisi, pour sa simplicité, d'utiliser une loi de raccordement différente de celle proposée par Csanady. Cette loi est semblable à celle qui est obtenue dans le cadre de la modélisation diphasique Lagrangienne, s'appuyant sur une équation de type Langevin pour prédire les vitesses fluctuantes du fluide (Minier et Simonin, 1992), (à la vitesse relative près, puisque les modèles Lagrangiens utilisent, non pas la vitesse relative entre le mouvement moyen d'un nuage de particules et le fluide porteur, mais la différence entre les vitesses instantanées).

$$\tau_{12,i}^i(\xi_r) = \tau_{12}^i \frac{1}{1 + \beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i}{\tau_1^i} \right)} \quad (4.5.16)$$

$$\tau_{12,j}^i(\xi_r) = \tau_{12}^i \frac{1}{1 + 2 \beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i}{\tau_1^i} \right)} \quad (4.5.17)$$

dans lesquelles : τ_{12}^i est le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide" en l'absence de croisement de trajectoires.

Cette échelle intégrale temporelle Lagrangienne de la turbulence du fluide "vu" par les particules nous permet d'exprimer la valeur du coefficient de dispersion dans chaque direction :

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,i}^i = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \tau_{12}^i \frac{1}{1 + \beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i}{\tau_1^i} \right)} \quad (4.5.18)$$

$$\lim_{(t \rightarrow \infty)} D_{2,j}^i = \langle u_{1,j}^2 \rangle_2 \tau_{12}^i \frac{1}{1 + 2 \beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i}{\tau_1^i} \right)} \quad (4.5.19)$$

et si l'on suppose que les corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules sont de forme exponentielle, nous obtenons :

$$\langle u_{2,i}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right] \quad \text{avec } \eta_{r,i} = \frac{\tau_{12,i}^i(\xi_r)}{\tau_{12}^F} \quad (4.5.20)$$

$$\langle u_{2,j}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,j}^2 \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,j}}{1 + \eta_{r,j}} \right] \quad \text{avec } \eta_{r,j} = \frac{\tau_{12,j}^i(\xi_r)}{\tau_{12}^F} \quad (4.5.21)$$

Si, dans les simulations que nous avons effectuées, nous sommes capables de connaître toutes les caractéristiques du fluide "vu" par les particules, dans les simulations utilisant, une modélisation Eulérienne (Simonin, 1990) ou Lagrangienne (Berlemont, 1987, Minier et Simonin, 1992), on ne peut accéder à ces informations. C'est pourquoi, dans la pratique, on suppose que :

(1) l'énergie turbulente du fluide "vu" les particules est égale à l'énergie turbulente du fluide, $\langle u_{1,i}^2 \rangle_2 = \langle u_{1,j}^2 \rangle_2 = \langle u_1^2 \rangle_1$,

(2) le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide" en l'absence de croisement de trajectoires est égal à l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide, $\tau_{12}^i = \tau_1^i$.

Sous ces hypothèses, les équations ci-dessus s'écrivent :

$$\tau_{12,t}^i = \tau_1^i \frac{1}{1 + \beta \xi_r} \quad \tau_{12,j}^i = \tau_1^i \frac{1}{1 + 2 \beta \xi_r}$$

$$\lim (t \rightarrow \infty) D_{2,t}^i = \langle u_1''^2 \rangle \tau_{12,t}^i$$

$$\lim (t \rightarrow \infty) D_{2,j}^i = \langle u_1''^2 \rangle \tau_{12,j}^i$$

Nous pouvons conclure cette partie, en observant que l'effet de croisement de trajectoires s'intègre directement dans l'extension de la théorie de Tchen. C'est un phénomène physique particulier pour lequel nous savons approximer la turbulence du fluide "vu" par les particules.

Chapitre 5

Modélisation Eulérienne du mouvement de particules dans un écoulement turbulent.

L'un des objectifs des calculs de dispersion de particules dans des champs de turbulence obtenus par la simulation directe des grandes échelles de la turbulence (LES) est d'affiner et de valider certaines hypothèses de fermeture utilisées pour la prédiction numérique des écoulements diphasiques turbulents, à l'aide d'un modèle utilisant des équations de transport Eulériennes pour les deux phases.

L'exposé détaillé de la construction du modèle, la justification de chaque hypothèse, l'explication de diverses options de modélisation, ont fait l'objet de nombreuses publications : (Delhaye, 1974 ; Ishii, 1975 ; Drew, 1983). Nous nous contentons ici d'exposer dans les grandes lignes la démarche qui a été suivie pour développer ce modèle. En revanche, nous détaillons plus particulièrement l'aspect fermeture des coefficients de transport turbulents de la phase dispersée, obtenus à partir de la dégénérescence du modèle dans le cas asymptotique d'une turbulence homogène isotrope stationnaire.

L'élaboration de ce modèle, des équations de base de la Mécanique des Milieux Continus jusqu'aux fermetures les plus sophistiquées (Simonin 1991.a), est le fruit d'un cheminement long et complexe.

A partir des équations de Navier-Stokes et en utilisant le formalisme des distributions (Schwartz, 1961), nous pouvons établir des équations de bilan dans les deux phases, une phase continue et une phase dispersée, et les relations aux discontinuités aux interfaces. L'utilisation de la décomposition de Reynolds permet d'obtenir les équations de bilan du mouvement moyen et du mouvement fluctuant. Une des grandes difficultés est la fermeture des termes de transfert aux interfaces et des contraintes cinétiques turbulentes.

Dès 1987, Simonin et Viollet modélisent les termes de transfert aux interfaces en utilisant l'expression de la force qui s'exerce sur une inclusion isolée (traînée et masse ajoutée). La moyenne de cette force instantanée fait apparaître un terme de corrélation entre les fluctuations des vitesses du fluide et la position des particules. Ce terme représente une vitesse de

diffusion qui prend en compte le transport des particules par le mouvement turbulent de l'écoulement porteur. Cette vitesse, modélisée en utilisant une loi de type gradient, est proportionnelle au gradient de taux de présence. Le coefficient de proportionnalité est un coefficient de dispersion supposé initialement comme étant proportionnel au coefficient de dispersion, lui-même calculé à l'aide de l'expression de Csanady (1963).

L'analyse du modèle, dans le cas asymptotique de la turbulence homogène isotrope stationnaire (Simonin, 1990), a montré que la dispersion turbulente d'un nuage de particules était la somme de deux contributions, l'une provenant directement du mouvement fluctuant des particules, l'autre de l'entraînement par la turbulence du fluide. La deuxième contribution qui est prise en compte à travers la vitesse de diffusion, est modélisée intuitivement comme le produit de la variance du mouvement corrélé turbulence du fluide-particules et du temps d'interaction fluide-particules. D'autre part, l'expression du terme de transfert aux interfaces est également complétée, en intégrant la contribution de la corrélation position des particules-fluctuations de la force de pression.

Les contraintes cinétiques turbulentes dans les deux phases, sont modélisées à l'aide du concept de viscosité turbulente. A partir d'une analyse de l'équation de transport des contraintes cinétiques fluctuantes de la phase dispersée, en négligeant les termes de transport convectifs et diffusifs, Simonin et Viollet (1990.a) montrent que la viscosité turbulente de la phase dispersée ne peut être identifiée au coefficient de diffusion. En effet, ils trouvent que la contribution de l'agitation propre des particules est deux fois plus faible dans le terme de viscosité turbulente que dans le terme de dispersion.

Jusqu'alors, le mouvement fluctuant de la phase dispersée était modélisé à l'aide d'un modèle d'équilibre local avec la turbulence du fluide. L'énergie du mouvement fluctuant des particules et l'énergie du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules sont calculées dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen-Hinze. Afin de prendre en compte l'effet de mémoire (dans le cas où le temps de relaxation des particules est grand) et l'anisotropie du mouvement fluctuant des particules, un modèle de turbulence plus sophistiqué a été développé (Simonin, 1991.a). Ce modèle est basé sur les équations de transport des contraintes cinétiques du mouvement fluctuant des particules et de l'énergie du mouvement fluctuant corrélé fluide-

particules. En outre, il intègre également des termes de collisions interparticulaires pour simuler des écoulements plus chargés en particules.

Ce modèle permet de simuler correctement des jets chargés en particules et un écoulement à swirl gaz-particules (Simonin, 1991.b). Ces écoulements ont la particularité d'avoir une dispersion qui dépend de la mémoire des conditions d'injection et une anisotropie très marquée.

Les développements ont été confirmés par les résultats des simulations directes des grandes échelles de la turbulence (LES). Ces résultats (Deutsch et Simonin, 1991.a) valident la modélisation du coefficient de dispersion binaire qui prend en compte le transport des particules par le mouvement corrélé fluide-particules. L'expression de ce coefficient peut être obtenue analytiquement dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen (Deutsch et Simonin, 1991.b). Les calculs de dispersion de particules, ayant un gradient de vitesse moyenne non nul, montrent que la contribution de l'agitation propre des particules est deux fois plus faible dans le terme de viscosité turbulente que dans le terme de dispersion.

5.1 Equations du mouvement moyen

5.1.1 Equations locales instantanées

Décrivons rapidement le formalisme mathématique adopté pour obtenir les équations du mouvement de chaque phase k , dans le cadre d'une modélisation purement Eulérienne d'écoulements diphasiques turbulents.

Un domaine diphasique Ω peut être représenté comme la réunion de sous-domaines Ω_k purement monophasiques dans lesquels nous pouvons utiliser les équations de Navier-Stokes. Pour étendre le domaine de validité de ces équations dans tout le domaine Ω , nous les multiplions par une fonction caractéristique de présence χ_k définie par :

$\chi_k(M,t) = 1$, si le point $M \in \Omega_k$ à l'instant t ,

$\chi_k(M,t) = 0$, sinon.

Cette fonction vérifie au sens des distributions (Schwartz, 1961) les égalités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_k + w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_k = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \chi_k = -n_{k,j} \delta_k \quad (5.1.2)$$

dans lesquelles w_j est la vitesse de déplacement de l'interface, $n_{k,j}$ la normale extérieure au domaine Ω_k occupé par la phase k et δ_k la distribution de Dirac représentant le saut à l'interface.

A l'aide de ce formalisme, les équations locales instantanées décrivant le mouvement de chaque phase dans tout le domaine Ω sont calculées, ainsi que les relations aux discontinuités.

Bilan de masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \chi_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j \chi_k = -\rho [u_j - w_j] n_{k,j} \delta_k \quad (5.1.3)$$

Classiquement, la relation aux discontinuités s'écrit :

$$\sum_{k=1}^2 \rho [u_j - w_j] n_{k,j} \delta_k = 0 \quad (5.1.4)$$

et s'il n'y a pas de transfert de masse :

$$\rho [u_j - w_j] n_{k,j} \delta_k = 0 \quad (5.1.5)$$

La discontinuité est une discontinuité de contact et dans chaque milieu, les vitesses normales à l'interface des deux phases sont égales à la vitesse normale du déplacement de l'interface.

Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i \chi_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j \chi_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \chi_k + \rho g_i \chi_k + \sigma_{ij} n_{k,j} \delta_k \quad (5.1.6)$$

La relation aux discontinuités s'écrit :

$$\sum_{k=1}^2 \sigma_{ij} n_{k,j} \delta_k = f_{s,i} \delta_s \quad (5.1.7)$$

dans laquelle $f_{s,i}$ représente la force de tension interfaciale.

5.1.2 Equations du mouvement moyen

Pour obtenir les équations du mouvement moyen, la démarche consiste à décomposer chaque variable en une grandeur moyenne et fluctuante. Cette décomposition vérifie les axiomes de Reynolds.

L'opérateur de moyenne défini dans tout le domaine Ω est noté : $\langle \cdot \rangle$.

Le taux de présence moyen de la phase k est calculé à l'aide de l'expression :

$$\alpha_k = \langle \chi_k \rangle \quad (5.1.8)$$

Nous définissons plusieurs moyennes :

-la moyenne phasique,

$$\langle g \rangle_k = G_k = \frac{\langle g \chi_k \rangle}{\alpha_k} \quad (5.1.9)$$

-la moyenne phasique pondérée par la masse volumique (de type Favre)

$$\langle \rho g \rangle_k = \rho_k G_k = \frac{\langle \rho g \chi_k \rangle}{\alpha_k} \quad (5.1.10)$$

G_k est la moyenne d'une grandeur quelconque g :

$\langle \cdot \rangle_k$ est l'opérateur de moyenne associée à la phase k .

Nous cherchons à établir les équations pour une classe particulière d'écoulements diphasiques, les écoulements diphasiques à phase dispersée, Nous supposons que :

- (1) le diamètre des inclusions est très petit devant les échelles caractéristiques moyennes de la phase continue,
- (2) les particules sont suffisamment dispersées dans la phase continue pour qu'elles n'interagissent pas entre elles,
- (3) les particules sont supposées être en translation dans l'écoulement,
- (4) la contribution de la viscosité moléculaire est négligée dans l'équation de la quantité de mouvement de la phase continue.

Sous ces hypothèses, les équations du mouvement moyen s'écrivent (Simonin, cours Aussois 1991) :

Bilan de masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_k \rho_k U_{k,i} = 0 \quad (5.1.11)$$

dans laquelle, $U_{k,i}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la vitesse dans la phase continue, ($k=1$) et dans la phase dispersée ($k=2$), et ρ_k la masse volumique de la phase k .

Bilan de quantité de mouvement

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial}{\partial t} U_{k,i} + \alpha_k \rho_k U_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{k,i} = - \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_i} P_1 + \alpha_k \rho_k g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k \langle \rho u''_i u''_j \rangle_k + I_{k,i} \quad (5.1.12)$$

dans laquelle u''_i est la partie fluctuante de la vitesse instantanée, P_1 est la pression moyenne de la phase continue, $I_{k,i}$ est le terme de transfert aux interfaces diminué de la contribution du gradient de la pression moyenne.

A partir de l'équation aux discontinuités, nous obtenons la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^2 I_{k,i} = 0 \quad (5.1.13)$$

5.1.3 Transfert de quantité de mouvement aux interfaces.

La modélisation du terme de transfert interfacial dans les équations de quantité de mouvement s'appuie sur l'analyse Lagrangienne qui permet de calculer directement la force qui s'exerce sur chaque inclusion (Cf. chapitre 2.2).

A partir de la forme linéarisée de l'équation du mouvement des particules (Eq. 4.4.2) et en négligeant la contribution de la force de Basset, la force volumique qu'exerce le fluide environnant sur une particule en translation s'écrit :

$$f_{2,i} = - \rho_1 F_D v_{r,i} - \rho_1 C_A \frac{dv_{r,i}}{dt} + (\rho_1 \frac{du_{1,i}}{dt} - \rho_1 g_i) \quad (5.1.14)$$

dans laquelle $v_{r,i}$ est la vitesse relative locale définie en chaque point de la phase dispersée : $v_{r,i} = u_{2,i} - u_{1,i}$, $u_{2,i}$ est la vitesse instantanée de la particule,

$u_{1,i}$ est la vitesse instantanée du fluide localement non perturbé par la présence de la particule (Cf. chapitre 2.2).

Nous reconnaissons dans cette équation les forces de traînée et de masse ajoutée. La partie entre crochets exprime la force qui s'exercerait sur une particule fluide en l'absence de la particule. En négligeant la viscosité moléculaire, ce terme est égal au gradient de pression.

Le terme de transfert aux interfaces $I_{k,i}$, induit par le mouvement relatif des particules est obtenu en moyennant la force volumique s'exerçant sur chaque particule (Simonin, 1990) :

$$I_{1,i} = -I_{2,i} = \alpha_2 \rho_1 F_D V_{r,i} - \rho_1 \langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2 + \alpha_2 \rho_1 C_A \left[\frac{\partial V_{r,i}}{\partial t} + U_{2,j} \frac{\partial V_{r,i}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2 \rho_1 C_A \langle u''_{2,j} v''_{r,i} \rangle_2 \quad (5.1.15)$$

Dans le membre de droite de cette équation, nous identifions successivement les différentes contributions : la force de traînée linéarisée, la corrélation distribution des particules-fluctuations de pression, la force de masse ajoutée induite par le mouvement relatif moyen et par le mouvement relatif fluctuant.

$V_{r,i}$, est la vitesse relative moyenne entre la vitesse de translation des particules et la vitesse du fluide "vu" par les particules. Elle est calculée à partir de la moyenne phasique définie plus haut :

$$V_{r,i} = \langle u_{2,i} - u_{1,i} \rangle_2 = U_{2,i} - U_{1,i} - \langle u''_{1,i} \rangle_2 \quad (5.1.16)$$

La moyenne des fluctuations de la turbulence du fluide "vu" par les particules n'a, a priori, aucune raison d'être nulle. En effet, (Cf. chapitre 3.1) la corrélation fluctuation de la concentration d'un traceur passif-fluctuation de la vitesse du fluide est non nulle et proportionnelle au gradient de la concentration moyenne (Eq. 3.1.2).

Dans le cas limite où le diamètre des particules tend vers zéro, les particules tendent à se comporter comme des particules fluides et, par conséquent, comme un traceur passif. C'est pourquoi, pour modéliser ce terme, Simonin et Viollet (1988) introduisent une vitesse de diffusion proportionnelle au gradient du taux de présence et écrite pour des raisons de symétrie sous la forme suivante :

$$V_{di} = \langle u''_{1,i} \rangle_2 \quad (5.1.17)$$

$$V_{di} = -D_{12}^t \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \right] \quad (5.1.18)$$

Cette vitesse de diffusion prend en compte la dispersion de particules induite par le mouvement corrélé particules-turbulence du fluide. En étudiant le comportement du modèle Eulérien dans une turbulence homogène isotrope stationnaire et en utilisant des résultats obtenus dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen, nous pouvons calculer explicitement ce terme.

5.1.4 Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire

Calculons le mouvement moyen d'un nuage de particules placées dans une turbulence homogène isotrope stationnaire. Imaginons que l'on puisse maintenir constant le gradient de taux de présence et plaçons-nous dans le cadre de l'approximation de diffusion turbulente (Cf. chapitres 3.1 et 4.1). L'équation qui régit le transport de particules s'écrit :

$$\alpha_2 U_{2,i} = -D_{2,ij}^t \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} \quad (5.1.19)$$

dans laquelle $D_{2,ij}^t$ est le tenseur de dispersion défini dans le chapitre 4. Dans le modèle Eulérien, ce coefficient n'apparaît pas explicitement. Nous allons néanmoins essayer de l'identifier.

A partir de l'équation de quantité de mouvement (Eq. 5.1.13 et 5.1.15), nous obtenons :

$$\alpha_2 \rho_1 F_D V_{ri} + (\rho_1 C_A \langle u''_{2,j} v''_{ri} \rangle_2 + \rho_2 \langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 - \rho_1 \langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2) \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2 = 0 \quad (5.1.20)$$

Remarque : rigoureusement, cette équation est obtenue en soustrayant la vitesse limite de chute à la vitesse moyenne des particules et en retirant la contribution de la gravité.

La vitesse limite de chute est définie par :

$$V_{lc,i} = \frac{g_i \rho_2 - \rho_1}{F_D \rho_1}$$

Cette équation peut s'écrire, conformément aux notations du chapitre 4.4, sous la forme :

$$\alpha_2 V_{r,i} = - \left[\tau_{12}^F \langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 - b \tau_{12}^F \langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2 \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2 \quad (5.1.21)$$

Puisque la vitesse moyenne du fluide est nulle, la vitesse relative moyenne est égale à :

$$V_{r,i} = U_{2,i} - V_{d,i} \quad (5.1.22)$$

Si l'on suppose que $\alpha_2 \ll 1$, la vitesse de diffusion s'écrit :

$$V_{d,i} = - D_{12}^t \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} \quad (5.1.23)$$

Finalement à partir des équations 5.1.19 et 5.1.21, nous pouvons calculer le coefficient de dispersion du modèle Eulérien (Simonin, 1990) :

$$D_{2,ij}^t = D_{12,ij}^t + \tau_{12}^F \left[\langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 - b \langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2 \right] \quad (5.1.24)$$

Cette relation montre que, dans le modèle Eulérien, la dispersion est la somme de deux contributions séparées : l'une résultant de la corrélation particules-turbulence du fluide, l'autre correspondant à l'agitation propre des particules et proportionnelle au temps de relaxation des particules.

Les composantes normales du tenseur de dispersion binaire s'écrivent :

$$D_{12,i}^t = D_{2,i}^t - \tau_{12}^F \left[\langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2 - b \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 \right] \quad \text{sans sommation sur } i \quad (5.1.25)$$

Les résultats obtenus dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen nous permettent de calculer ces composantes normales. En effet, nous avons obtenu les relations suivantes :

$$D_{2,i}^t = \langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \tau_{12,i}^t$$

$$\langle u''_{2,i} \rangle_2^2 = \langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right]$$

$$\langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 = \langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \left[\frac{b + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right]$$

avec :

$$\eta_{r,i} = \frac{\tau_{12,i}^t}{\tau_{12}^F}$$

dans lesquelles nous n'appliquons la convention de sommation sur l'indice i .

Finalement, en reportant ces résultats dans l'équation (5.1.25), nous obtenons :

$$D_{12,i}^t = \tau_{12,i}^t \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 \quad \text{sans sommation sur } i \quad (5.1.26)$$

5.2 Modélisation de la turbulence

5.2.1 Modélisation de la turbulence de la phase continue

La turbulence de la phase continue est modélisée par analogie avec les écoulements monophasiques, les particules étant supposées petites devant les échelles caractéristiques de la turbulence.

Une approche classique est d'utiliser le concept de viscosité turbulente :

$$\begin{aligned} \langle \rho u''_j u''_i \rangle_1 = & -\rho_1 v_1^t \left[\frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{1,j}}{\partial x_i} \right] \\ & + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left[\frac{1}{2} \langle \rho u''_m u''_m \rangle_1 + \rho_1 v_1^t \frac{\partial U_{1,m}}{\partial x_m} \right] \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

dans laquelle v_1^t est la viscosité turbulente de la phase continue modélisée comme le produit de l'énergie turbulente q_1^2 par un temps caractéristique de la turbulence τ_1^t :

$$v_1^t = \frac{2}{3} q_1^2 \tau_1^t \quad (5.2.2)$$

$$\rho_1 q_1^2 = \frac{1}{2} \langle \rho u''_i u''_i \rangle_1$$

Le temps caractéristique de la turbulence est estimé en fonction de l'énergie turbulente et du taux de dissipation ε_1 :

$$\tau_1^t = \frac{3}{2} C_\mu \frac{q_1^2}{\varepsilon_1} \quad (5.2.3)$$

L'énergie turbulente et le taux de dissipation sont calculés à l'aide d'un modèle standard $q^2 - \epsilon$ dans lequel sont inclus les termes de transfert aux interfaces (Simonin et Viollet, 1988).

A l'aide du formalisme développé dans la partie 5.1, il est possible d'établir rigoureusement l'équation de l'énergie turbulente de la phase continue et de calculer le terme de transfert interfacial. Après plusieurs pages de calculs et en ne conservant que la contribution de la force de traînée, nous obtenons :

$$\Pi_{q_1} = \alpha_2 \rho_1 F_D \langle u''_{1,i} v''_{r,i} \rangle_2 + \alpha_2 \rho_1 F_D V_{d,i} V_{r,i} \quad (5.2.4)$$

La contribution du transfert interfacial dans l'équation du taux de dissipation est calculée suivant la démarche utilisée classiquement dans les écoulements monophasiques qui consiste à supposer que les termes sources sont proportionnels aux termes sources de l'équation de l'énergie turbulente (Elgobashi et Abou-Arab, 1983).

$$\Pi_{\epsilon_1} = C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon_1}{q_1} \Pi_{q_1} \quad (5.2.5)$$

5.3 Modélisation du mouvement fluctuant de la phase dispersée

5.3.1 Modèle d'entraînement local par la turbulence du fluide

Si le temps de relaxation des particules est suffisamment petit, les caractéristiques turbulentes des particules ont le temps d'atteindre leur valeur asymptotique. L'hypothèse d'équilibre local peut être appliquée. L'énergie du mouvement fluctuant des particules et la variance du mouvement corrélé fluctuant fluide-particules peuvent alors être modélisées en utilisant les résultats obtenus dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen (Cf. chapitre 4.4).

Les contraintes cinétiques du mouvement fluctuant des particules peuvent être modélisées à l'aide du concept de viscosité turbulente (Elgobashi et Abou-Arab, 1983 ; Pourahmadi et Humphrey, 1983) :

$$\begin{aligned} \langle \rho u''_j u''_i \rangle_2 = & -\rho_2 v_2^t \left[\frac{\partial U_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{2j}}{\partial x_i} \right] \\ & + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left[\frac{1}{2} \langle \rho u''_m u''_m \rangle_2 + \rho_2 v_2^t \frac{\partial U_{2m}}{\partial x_m} \right] \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

dans laquelle v_2^t est la viscosité du mouvement fluctuant des particules.

Pour modéliser ce terme, la première idée est de suivre la même démarche que pour la phase continue, et donc de supposer que la viscosité du mouvement fluctuant des particules peut être obtenue comme le produit de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant q_2^2 par un temps caractéristique du mouvement fluctuant des particules τ_2^t :

$$v_2^t = \frac{2}{3} q_2^2 \tau_2^t \quad (5.3.2)$$

dans laquelle

$$\rho_2 q_2^2 = \frac{1}{2} \langle \rho u''_i u''_i \rangle_2$$

Si l'on suppose que le temps caractéristique du mouvement fluctuant des particules est l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne des particules (Eq. 4.1.4), la viscosité du mouvement fluctuant des particules peut être proportionnelle au coefficient de dispersion "efficace" écrit sous une forme isotrope (Eq. 4.3.1).

En utilisant l'équation 5.1.25 et en supposant l'isotropie du mouvement fluctuant des particules et du mouvement corrélé fluctuant fluide-particules, la viscosité s'écrit :

$$v_2^t = D_{12}^t + \tau_{12}^F \frac{1}{3} (2 q_2^2 - b q_{12}^2) \quad (5.3.3)$$

dans laquelle

$$\rho_2 q_{12}^2 = \langle \rho u''_{i,1} u''_{i,2} \rangle_2$$

Les contraintes cinétiques du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules sont modélisées, elles aussi, à l'aide du concept de viscosité turbulente (Simonin, 1991.a) :

$$\begin{aligned} \langle \rho u''_{2,i} u''_{1,j} \rangle_2 = & -\rho_2 v_{12}^t \left[\frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{1,j}}{\partial x_i} \right] \\ & + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left[\frac{1}{2} \langle \rho u''_{1,m} u''_{2,m} \rangle_2 + \rho_2 v_{12}^t \frac{\partial U_{2,m}}{\partial x_m} \right] \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

où la viscosité du mouvement fluctuant corrélé fluide particules v_{12}^t est calculée en fonction de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules, q_{12}^2 et du temps d'interaction "particules-turbulence du fluide", τ_{12}^t :

$$v_{12}^t = \frac{1}{3} q_{12}^2 \tau_{12}^t \quad (5.3.5)$$

Ce coefficient de viscosité est égal au coefficient de diffusion binaire D_{12}^t .

Toutes les caractéristiques turbulentes de la phase dispersée sont calculées à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Cf. chapitre 4). Toutefois, dans le cadre de la modélisation Eulérienne, nous ne connaissons pas les caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules. Nous supposons que :

(1) l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est égale à l'énergie turbulente du fluide,

$$\langle u''_{1,i}^2 \rangle_2 = \frac{2}{3} q_1^2 \quad (5.3.6)$$

(2) le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide", en l'absence de croisement de trajectoires, est égal à l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne de la turbulence du fluide

$$\tau_{12}^t = \tau_1^t \quad (5.3.7)$$

Le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide", qui prend en compte l'effet de croisement de trajectoires, est calculé à l'aide de l'expression de Csanady (Simonin et Viollet, 1988).

$$\tau_{12}^t = \tau_1^t \frac{1}{\sqrt{1 + C_\beta \xi_r^2}} \quad (5.3.8)$$

Nous savons, d'après les résultats du chapitre 4.5, que sous l'effet du croisement de trajectoires, le mouvement fluctuant des particules est

anisotrope, et donc que les caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules le sont également.

Dans ce modèle, toutes les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules et de la turbulence du fluide sont supposées isotropes. Il faut donc choisir un temps d'interaction "particules-turbulence du fluide" unique et, par conséquent, déterminer le coefficient C_β en fonction de la direction que l'on cherche à représenter correctement. En accord avec les résultats du chapitre 4.5, il doit être compris entre β^2 et $4\beta^2$, β étant le rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne dont la valeur a été longuement discutée au chapitre 2.2.

Remarque : à partir d'une analyse des résultats expérimentaux de Wells et Stock (1983), la valeur $C_\beta=0.45$, dans la direction parallèle au croisement de trajectoires, a souvent été utilisée (Simonin, 1990).

Dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen, il est alors possible de calculer toutes les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules et du mouvement corrélé fluctuant utilisées pour la fermeture de ce modèle.

$$q_2^2 = q_1^2 \left[\frac{b^2 + \eta_r}{1 + \eta_r} \right] \quad (5.3.9)$$

$$q_{12} = 2 q_1^2 \left[\frac{b + \eta_r}{1 + \eta_r} \right] \quad (5.3.10)$$

dans laquelle

$$\eta_r = \tau_{12}^l / \tau_{12}^F$$

La contribution du mouvement fluctuant dans le terme de transfert interfacial de l'équation de l'énergie turbulente, est obtenue directement à partir des expressions ci-dessus. :

$$\langle u''_{i,j} v''_{r,i} \rangle_2 = \left[q_{12} - 2 q_1^2 \right]$$

5.3.2 Equations de transport des contraintes cinétiques du mouvement fluctuant des particules

Lorsque les particules denses ont un temps de relaxation plus important, les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules n'ont plus le temps d'atteindre la valeur asymptotique obtenue dans la théorie de Tchen. Cette modélisation, qui suppose l'entraînement local des particules par la turbulence du fluide, ne peut plus être utilisée car elle ne peut prendre en compte les effets de mémoire qui peuvent être prédominants. Pour introduire ces effets, il faut utiliser des équations de transport pour calculer les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules.

Par similitude avec la modélisation de la turbulence du fluide, la première idée est d'écrire une équation de transport sur l'énergie cinétique du mouvement fluctuant des particules. Dans ce cas, le problème de l'anisotropie du mouvement des particules évoqué plus haut n'est pas résolu. D'autre part, si l'anisotropie locale de la phase continue peut être résorbée rapidement sous l'action de la force de pression qui favorise le retour à l'isotropie, l'anisotropie du mouvement fluctuant des particules ne peut être résorbée aussi rapidement. On observe ainsi en général, que le mouvement fluctuant des particules est sensiblement plus anisotrope que la turbulence du fluide. (mesures expérimentales de Fleckhaus et al., 1987).

Ceci justifie le choix effectué par Simonin (1991.a) qui propose de traiter directement une équation de transport pour chaque composante du tenseur des contraintes cinétiques du mouvement fluctuant des particules, alors que la turbulence du fluide reste modélisée par un modèle q^2 - ϵ .

Si l'on suppose que les particules sont beaucoup plus denses que le fluide, le terme de transfert aux interfaces se réduit à la contribution de la force de traînée. Si la phase dispersée est suffisamment diluée, on peut négliger les collisions interparticulaires et cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha_2 \rho_2 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_{2m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \langle u''_{2i} u''_{2j} \rangle_2 = & - \frac{\partial}{\partial x_m} \alpha_2 \rho_2 \langle u''_{2i} u''_{2j} u''_{2m} \rangle_2 \\ & - \alpha_2 \rho_2 \left[\langle u''_{2i} u''_{2m} \rangle_2 \frac{\partial U_{2j}}{\partial x_m} + \langle u''_{2j} u''_{2m} \rangle_2 \frac{\partial U_{2i}}{\partial x_m} \right] \\ & - \alpha_2 \rho_2 \frac{2}{\tau_{12}} \left[\langle u''_{2i} u''_{2j} \rangle_2 - R_{12ij} \right] \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Le premier terme du membre de droite représente le transport des contraintes cinétiques par le mouvement fluctuant des particules et est modélisé classiquement à l'aide d'une loi de type gradient. Le deuxième est un terme de production par les gradients de la vitesse moyenne et le troisième prend en compte le transfert aux interfaces :

$$R_{12ij} = \frac{1}{2} \left[\langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2 + \langle u''_{2,i} u''_{1,j} \rangle_2 \right] \quad (5.3.12)$$

Cette équation permet d'exprimer un coefficient de viscosité du mouvement fluctuant des particules (Simonin et Viollet, 1990). En effet, en négligeant le transport par le mouvement moyen et le mouvement fluctuant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 = R_{12ij} \\ - \frac{1}{2} \tau_{12}^F \left[\langle u''_{2,i} u''_{2,m} \rangle_2 \frac{\partial U_{2,j}}{\partial x_m} + \langle u''_{2,j} u''_{2,m} \rangle_2 \frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_m} \right] \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

En utilisant l'expression 5.3.4 et si l'on néglige la contribution des contraintes de cisaillement devant la contribution des contraintes normales, au premier ordre, cette équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 = - \frac{v_{12}^i}{2} \left[\frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{1,j}}{\partial x_i} \right] \\ - \left(\frac{v_{12}^i}{2} + \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2 \right) \left[\frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{2,j}}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Supposons que les gradients de la vitesse moyenne des particules soit non nul et à peu près égal au gradient de la vitesse moyenne du fluide :

$$\frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_j} = \frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_j} \quad (5.3.15)$$

Sous ces hypothèses et en utilisant les équations 5.3.1, 5.3.4 et 5.3.14, le coefficient de viscosité du mouvement fluctuant des particules utilisé dans le modèle d'entraînement local s'écrit :

$$v_2^i = v_{12}^i + \frac{\tau_{12}^F}{2} \frac{2}{3} q_2^2 \quad (5.3.16)$$

Ce résultat montre que la contribution de l'agitation propre des particules est deux fois plus faible dans le terme de viscosité turbulente que dans celui du coefficient de dispersion (5.1.25). La viscosité turbulente, ainsi calculée, est différente de celle que l'on a obtenue (Eq. 5.3.3) à l'aide d'une méthode utilisée classiquement dans les écoulements monophasiques. Les résultats de simulation (Cf. chapitre 6) valideront la deuxième expression (Eq. 5.3.16).

Les équations de transport des contraintes cinétiques fluctuantes du mouvement corrélé fluide-particule ne peuvent être obtenues directement à partir des équations locales instantanées. Simonin (1991.a) propose une équation de transport de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules obtenue à partir d'une approche semi-empirique.

5.4 Dispersion d'un nuage de particules ayant un gradient de vitesse moyenne non nul, dans un écoulement turbulent homogène isotrope stationnaire.

L'objectif de cette partie est de valider l'expression du coefficient de viscosité du mouvement fluctuant des particules. Pour cela, nous avons simulé dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, la dispersion d'un nuage de particules auxquels nous imposons un gradient de vitesse moyenne non nul.

Plaçons-nous dans la situation que nous avons réellement simulée. A l'aide d'une force extérieure, nous imposons un gradient de vitesse moyenne pour les particules :

$$\frac{\partial U_{2,1}}{\partial x_3} = S$$

Dans ce cas, les termes extra-diagonaux du tenseur des contraintes turbulentes des particules (Eq. 5.3.14) se résument à :

$$\langle u''_{2,1} u''_{2,3} \rangle_2 = - \left(\frac{v_{12}}{2} + \frac{1}{2} \tau_{12} \frac{2}{3} q_2^2 \right) \frac{\partial U_{2,1}}{\partial x_3} \quad (5.4.1)$$

En utilisant l'équation 5.3.1, nous pouvons calculer la viscosité turbulente du nuage de particules, nous obtenons :

$$v_2^t = \frac{v_{12}^t}{2} + \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2 \quad (5.4.2)$$

Parce que le gradient de la vitesse moyenne du fluide est nul, la contribution de la viscosité du mouvement fluctuant corrélé fluide particule est deux fois plus faible dans cette expression que dans celle obtenue dans le cadre de la modélisation Eulérienne (Eq. 5.3.16).

Lorsque le temps de relaxation des particules est grand, cette expression tend vers la même limite que l'expression obtenue dans le cadre de la modélisation Eulérienne.

$$\lim (\tau_{12}^F \rightarrow \infty) \quad v_2^t = \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2 \quad (5.4.3)$$

L'objectif principal des simulations avec un gradient de vitesse moyenne sur le nuage des particules, dont les résultats sont présentés dans le chapitre 6, est de valider ce comportement asymptotique (Eq. 5.4.3).

Les autres objectifs sont de :

- comparer la contrainte cinétique de cisaillement du mouvement fluctuant des particules avec l'expression théorique 5.4.1,
- vérifier que les composantes normales respectent les expressions théoriques obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen (Cf. chapitre 4.4).

Chapitre 6

Présentation et analyse des résultats

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations de dispersion d'un nuage de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire calculée à l'aide de la L.E.S (Cf. chapitre 1).

Ces simulations ont deux buts.

Le premier est d'améliorer la perception des phénomènes physiques mis en jeu dans les processus de transport de particules discrètes placées dans un champ turbulent, notamment en vérifiant les diverses hypothèses utilisées pour la construction des modèles théoriques que l'on a présentés dans le chapitre 4. Nous essayerons de répondre à plusieurs questions. Par exemple : est-ce que l'hypothèse de Tchen, qui suppose qu'en l'absence de croisement de trajectoires, la turbulence du fluide "vu" par les particules est statistiquement identique à la turbulence du fluide, est justifiée ? Ou encore, pour l'extension de cette théorie, avons-nous le droit de supposer que les corrélations Lagrangiennes de particules placées dans une turbulence homogène isotrope stationnaire ont une forme exponentielle, quel que soit le mouvement relatif des particules ?

Le deuxième objectif est de valider les hypothèses de fermeture des coefficients de transport turbulent de la phase dispersée, le coefficient de dispersion binaire D_{12}^i et le coefficient de viscosité du mouvement fluctuant des particules v_2^i . Ces coefficients interviennent, pour la prédiction numérique des écoulements diphasiques turbulents, dans le modèle utilisant des équations de transport Eulériennes pour les deux phases (Cf. chapitre 5).

Dans ces simulations, les particules sont des particules discrètes dont le comportement ne dépend que de deux paramètres :

- le temps de relaxation des particules τ_{12}^F ,
- le paramètre b qui mesure l'effet des forces de pression et de masse ajoutée.

Nous pourrions nous contenter de présenter les résultats en fonction de ces paramètres, mais afin de simuler des situations physiquement réalistes, nous

avons préféré raisonner à partir des caractéristiques physiques des particules. Nous nous donnons la masse volumique et le diamètre des particules et nous calculons seulement dans un deuxième temps les paramètres.

Ainsi, nous avons étudié trois types de particules :

- (1) des particules denses ayant une masse volumique beaucoup plus grande que celle du fluide $\rho_2/\rho_1=2000$,
- (2) des sédiments ayant une masse volumique un peu plus importante que celle du fluide $\rho_2/\rho_1=2$,
- (3) des particules beaucoup plus légères que celle du fluide $\rho_2/\rho_1=0.001$, correspondant au cas des bulles dans de l'eau.

Le premier cas correspond à des configurations de type combustion de charbon pulvérisé ou de pulvérisation de gouttes. Nous avons étudié la dispersion de ces particules pour des diamètres allant de $5\ \mu\text{m}$ à $120\ \mu\text{m}$ et dans trois configurations physiques différentes : sans croisement de trajectoires, avec croisement de trajectoires et en imposant un gradient de vitesse moyenne sur le nuage de particules.

Le deuxième cas correspond au transport de sédiments dans des écoulements fluviaux ou maritimes. Dans cette étude, le diamètre des particules varie de $0.5\ \text{mm}$ à $3.0\ \text{mm}$ et la seule configuration physique étudiée est le cas sans croisement de trajectoires.

Le dernier cas correspond à des écoulements à bulles. Le diamètre des particules varie de $0.5\ \text{mm}$ à $2.0\ \text{mm}$ et la configuration physique étudiée est le cas sans croisement de trajectoires.

6.2 Conditions de calcul

6.2.1 Méthodes numériques

Les trajectoires des particules sont calculées à l'aide des méthodes numériques exposées dans le chapitre 2. Pour mémoire, nous rappelons que :

- (1) les équations utilisées pour intégrer les trajectoires des particules sont précisées dans le chapitre 2.4,

- (2) dans tous les calculs, la vitesse du fluide "vu" par les particules est interpolée à l'aide de la méthode des splines d'ordre 3 (Cf. Chapitre 2.3),
- (3) les tests numériques présentés dans le chapitre 2.5 nous ont permis de choisir le schéma d'intégration RK2B (Cf. 2.4.1) avec implicitation du terme de traînée (Cf. Annexe 3) et la discrétisation de la dérivée DER2 et DER3 (Cf. 2.4.2 et 2.4.3).

6.2.2 Domaine de calcul et conditions de périodicité

Dans les simulations numériques, les particules dispersent dans un domaine de dimension infinie.

En effet, même si nous calculons la turbulence du fluide dans un domaine fini, la vitesse du fluide "vu" par les particules peut être calculée dans un domaine infini en appliquant la condition de périodicité utilisée pour le calcul de la turbulence du fluide à l'aide de la L.E.S (Eq. 1.1.17).

Cependant, afin que le calcul des corrélations Lagrangiennes du mouvement fluctuant des particules ne soit pas affecté par les conditions de périodicité, nous considérons que ce calcul doit être achevé avant que les particules n'aient pu parcourir en moyenne une distance de l'ordre de la taille du domaine de calcul L_b .

Nous devons définir une échelle de longueur caractéristique de la distance parcourue par une particule pendant la durée de la mesure Lagrangienne.

L'ordre de grandeur de la durée de la mesure Lagrangienne est l'échelle de temps intégrale du mouvement fluctuant des particules τ_2^i .

La vitesse de déplacement moyen de chaque particule dans le domaine de calcul varie selon les simulations.

Dans le cas où la vitesse moyenne des particules est nulle, la vitesse caractéristique du déplacement moyen de chaque particule est la variance de la vitesse fluctuante des particules. Le produit de cette vitesse et de l'échelle intégrale temporelle nous permet d'estimer une échelle de longueur représentative du déplacement moyen de chaque particule dans le domaine de calcul :

$$L_2^i = \sqrt{\langle u''^2 \rangle_2} \tau_2^i$$

Lorsque le croisement de trajectoires est important, la vitesse qui contribue le plus au déplacement de chaque particule est la vitesse moyenne du nuage de particules. Dans ce cas, l'échelle de longueur caractéristique s'écrit alors :

$$L_2^{CT} = V_r \tau_2^i$$

Dans cette expression, V_r est égale à la vitesse moyenne du nuage de particule puisque la vitesse moyenne du fluide est nulle.

Si le nuage de particules a un gradient de vitesse moyenne non nul, nous choisissons la vitesse moyenne maximum et nous obtenons :

$$L_2^{CT} = U_{\max} \tau_2^i$$

Si cette échelle de longueur est petite devant la taille du domaine de calcul L_b , les statistiques Lagrangiennes du nuage de particules peuvent être calculées correctement sans être affectées par la condition de périodicité. Dans ce cas, les simulations respectent l'hypothèse de Tchen (Cf. Chapitre 4.3) qui suppose que les particules dispersent dans une turbulence homogène stationnaire dans un domaine de dimension infinie.

6.2.3 Calcul des statistiques

Afin d'éviter toute ambiguïté, nous précisons de quelle manière les statistiques sont calculées.

Calcul des énergies cinétiques

A chaque pas de temps, nous calculons les contraintes cinétiques turbulentes du fluide "vu" par les particules, du mouvement fluctuant des particules et du mouvement corrélé fluide-particule qui sont définies respectivement par :

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^k) u''_{1,i}(\vec{x}^k))$$

$$\frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} (u''_{2,i}(\vec{x}^k) u''_{2,i}(\vec{x}^k))$$

$$\frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} (u''_{1,i}(\vec{x}^k) u''_{2,i}(\vec{x}^k))$$

où \vec{x}^k est la position de la $k^{\text{ième}}$ particule à l'instant t .

Calcul des statistiques Lagrangiennes

Les statistiques Lagrangiennes commencent à être calculées lorsque le mouvement fluctuant des particules a atteint son état stationnaire.

Pour des raisons de place mémoire, il est impossible de stocker les résultats de tous les pas de temps. A la fin de chaque pas de temps, les corrélations Lagrangiennes sont calculées en utilisant le résultat du pas de temps t^0 correspondant à un état stationnaire.

Corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules :

$$R_{1,ij}(\tau) = \frac{\frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \left(u''_{1,i}(\vec{x}^k, t^0) u''_{1,j}(\vec{x}^k, t^0 + \tau) \right)}{\sqrt{\langle u''_{1,i}(t^0) \rangle_2 \langle u''_{1,j}(t^0 + \tau) \rangle_2}}$$

Corrélations Lagrangiennes des particules :

$$R_{2,ij}(\tau) = \frac{\frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \left(u''_{2,i}(\vec{x}^k, t^0) u''_{2,j}(\vec{x}^k, t^0 + \tau) \right)}{\sqrt{\langle u''_{2,i}(t^0) \rangle_2 \langle u''_{2,j}(t^0 + \tau) \rangle_2}}$$

Les échelles temporelles intégrales Lagrangiennes sont calculées en intégrant ces corrélations.

Calcul du coefficient de dispersion

Le coefficient de dispersion est calculé en dérivant la variance du déplacement :

$$D_{2,ij}^t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y''_{2,i} y''_{2,j} \rangle_2$$

avec :

$$\langle y''_{2,i} y''_{2,j} \rangle_2(t) = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \left(y''_{2,i}(\vec{x}^k, t+1) - y''_{2,i}(\vec{x}^k, t^0) \right) \left(y''_{2,j}(\vec{x}^k, t+1) - y''_{2,j}(\vec{x}^k, t^0) \right)$$

6.2.4 Conditions initiales et durée du calcul

A l'instant initial, on impose, pour chaque particule, l'égalité entre la vitesse du fluide "vu" par la particule et la vitesse de la particule. La durée de chaque calcul varie selon la nature des particules. Nous avons observé qu'il fallait attendre un temps de l'ordre de trois fois τ_{12}^F avant que le mouvement des particules n'atteigne le régime stationnaire. Ensuite, pour calculer les statistiques Lagrangiennes du mouvement fluctuant des particules et notamment l'échelle de temps intégrale, il faut simuler la dispersion pendant une durée de quelques τ_2^i .

6.3 Influence de la position de l'échelle de coupure (LES) sur les résultats des simulations

Les champs turbulents utilisés pour ces simulations de dispersion sont obtenus avec une méthode qui consiste à calculer directement les grandes échelles de la turbulence. Les autres échelles, inférieures à l'échelle de coupure, sont modélisées à l'aide d'un modèle de sous-maille (Cf. chapitre 1). Nous allons essayer de déterminer de quelle manière le fait de ne simuler que les grandes échelles de la turbulence peut altérer les résultats des simulations.

L'analyse des résultats, présentés dans le chapitre 1, nous avait permis de conclure que l'on pouvait avec cette approche, obtenir une turbulence homogène isotrope stationnaire de qualité et accéder directement à la quasi totalité des échelles énergétiques de la turbulence du fluide (Calcul TH13).

Si dans le repère Eulérien nous sommes capable de situer précisément la coupure et de connaître la position de la fenêtre spectrale simulée, nous ne savons pas la transposer dans le repère Lagrangien. Nous ne pouvons donc pas, dans le repère Lagrangien, séparer les échelles simulées des échelles modélisées. Pour évaluer l'effet éventuel de la coupure sur les résultats de dispersion, nous allons procéder par déduction en se comparant aux résultats de diffusion.

Nous avons observé au chapitre 3, que, dans les champs turbulents calculés avec la LES, nous sommes capables de simuler correctement la diffusion de

particules fluides. En effet, les résultats de diffusion de particules fluides respectent les expressions théoriques de Taylor. D'autre part, la forme de la corrélation Lagrangienne de la vitesse du fluide et le rapport de l'échelle temporelle Lagrangienne sur l'échelle temporelle Eulérienne concordent avec les résultats obtenus en simulation directe par Yeung et Pope (1989) et Squires et Eaton (1990).

Pour évaluer l'effet éventuel de la coupure sur les résultats de dispersion, nous avons comparé, pour chaque type de particules, le spectre Lagrangien d'énergie turbulente de particules fluides avec le spectre Lagrangien d'énergie du mouvement fluctuant des particules.

Le spectre Lagrangien des particules fluides est calculé à partir de l'expression théorique 4.3.12 qui suppose que la corrélation Lagrangienne de la turbulence du fluide est de forme exponentielle (hypothèse vérifiée dans le chapitre 3). Le spectre Lagrangien du mouvement fluctuant des particules est calculé à partir de l'expression théorique 4.3.10.

6.3.1 Particules denses

Sur la figure 6.3.1, nous avons superposé le spectre Lagrangien d'énergie turbulente du fluide avec un spectre Lagrangien d'énergie du mouvement fluctuant de particules denses. Le cas présenté correspond aux particules de 57 μm de diamètre dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.3.

Nous constatons que la contribution des petites échelles (hautes fréquences spectrales) sur le spectre d'énergie est beaucoup moins importante pour ce type de particules que pour des particules fluides.

Si l'on suppose que les statistiques Lagrangiennes du fluide sont calculées correctement et puisque les particules denses sont moins sensibles aux petites échelles de la turbulence, nous pouvons estimer que la coupure n'a pas d'effet sur le résultat de ces simulations.

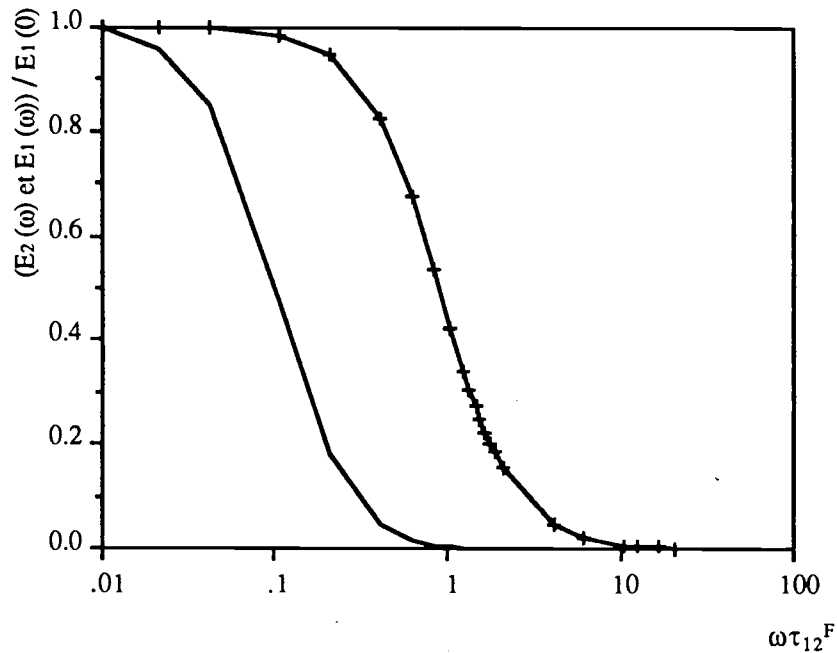


Figure 6.3.1 : —, spectre d'énergie Lagrangien des vitesses fluctuantes de particules denses ($d_p=57 \text{ mm}$), calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.2.
 -+-, spectre d'énergie Lagrangien de la turbulence du fluide, calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.12.

6.3.2 sédiments

Sur la figure 6.3.2, nous avons superposé le spectre Lagrangien d'énergie turbulente avec un spectre Lagrangien d'énergie du mouvement fluctuant de sédiments. Le cas représenté correspond aux sédiments de 1 mm de diamètre dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.4. Nous constatons que la contribution des petites échelles est un peu moins importante pour ce type de particules que pour des particules fluides.

Notre conclusion est la même que pour le type de particules précédent, nous estimons que la coupure à un effet négligeable sur les résultats de ces simulations.

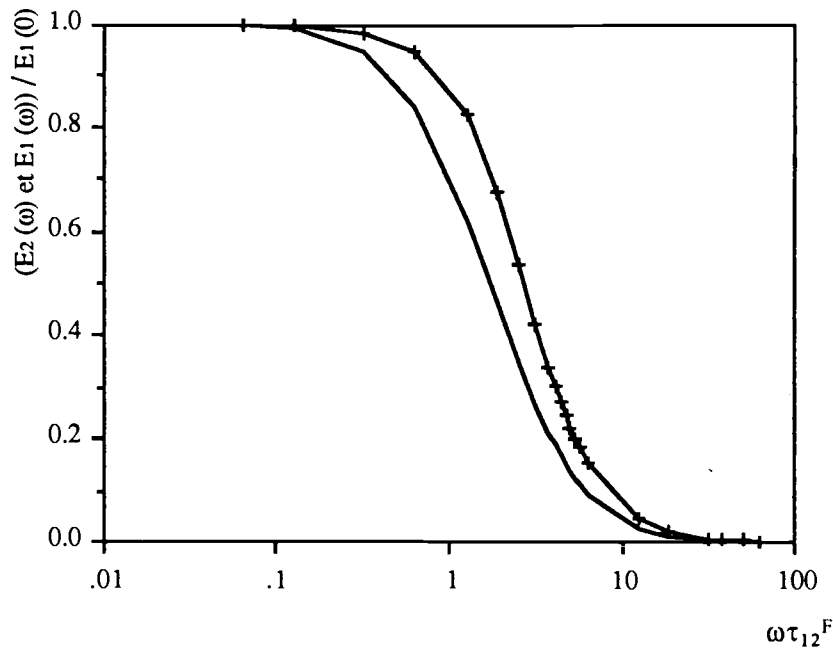


Figure 6.3.2 : —, spectre d'énergie Lagrangien des vitesses fluctuantes de sédiments ($d_p=1$ mm), calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.2.
 +-, spectre d'énergie Lagrangien des vitesses fluctuantes du fluide, calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.12.

6.3.3 Bulles

Sur la figure 6.3.3, nous avons superposé le spectre Lagrangien d'énergie turbulente du fluide avec un spectre Lagrangien d'énergie du mouvement fluctuant de bulles. Le cas représenté correspond aux bulles de 1 mm de diamètre dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.4.

Nous constatons que la contribution des petites échelles est plus importante pour ce type de particules que pour des particules fluides. Pour juger de l'effet de la coupure nous ne pouvons plus procéder par comparaison avec la diffusion. Le seul recours qui nous reste est de comparer les résultats de simulations effectuées dans des champs turbulents dans lesquels nous avons déplacé la position de la coupure.

La dispersion de bulles a été calculée dans des champs turbulents de types TH12 et TH13. Dans le tableau 6.1, nous comparons les résultats des deux simulations.

Si l'on excepte la diminution attendue du niveau d'énergie dans le cas TH12, nous observons que le comportement particulier des bulles n'est pas modifié d'une simulation à l'autre.

En effet, dans les deux cas nous observons la diminution de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules, et un coefficient de dispersion des bulles inférieur au coefficient de diffusion de particules fluides.

Sur la figure 6.3.4, nous avons comparé l'énergie du mouvement fluctuant des particules calculée avec la LES avec celle prédite dans le cadre de L'extension de la théorie de Tchen.

Les résultats des deux simulations sont comparables. Néanmoins, ceux obtenus dans les champs turbulents TH13 semblent légèrement meilleurs. Ceci peut s'expliquer, puisque dans les simulations TH13 les petites échelles sont mieux représentées. Le léger décalage qui subsiste avec la courbe théorique provient probablement de l'absence des petites échelles de la turbulence.

En conclusion, nous estimons que les résultats de dispersion des bulles dans les champs turbulents calculés avec la LES donnent qualitativement satisfaction. Par contre, quantitativement, les résultats sont légèrement dégradés à cause de l'absence des petites échelles.

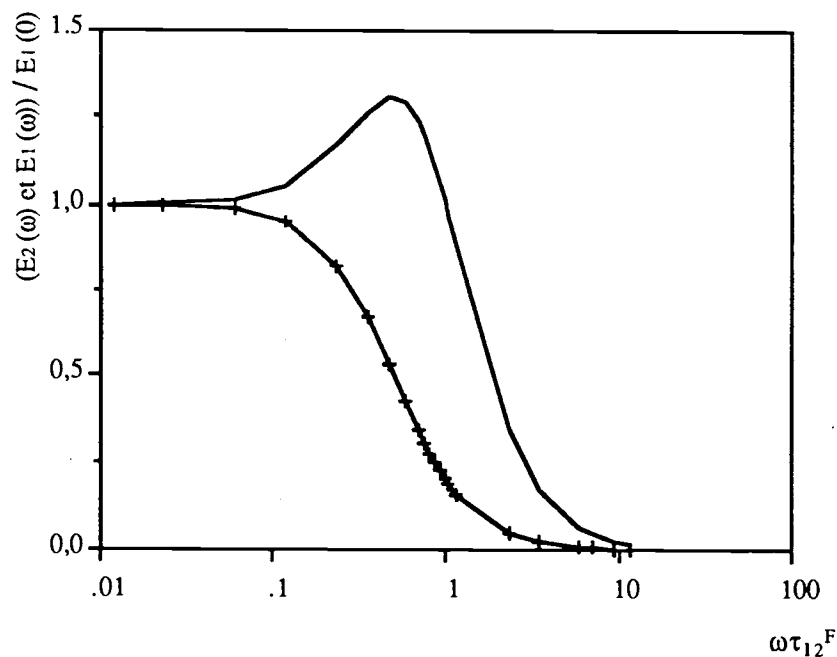


Figure 6.3.3 : —, spectre d'énergie Lagrangien des vitesses fluctuantes de bulles, ($d_p=1$ mm), calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.2.
 -+, spectre d'énergie Lagrangien des vitesses fluctuantes du fluide, calculé à l'aide de l'expression théorique 4.3.12.

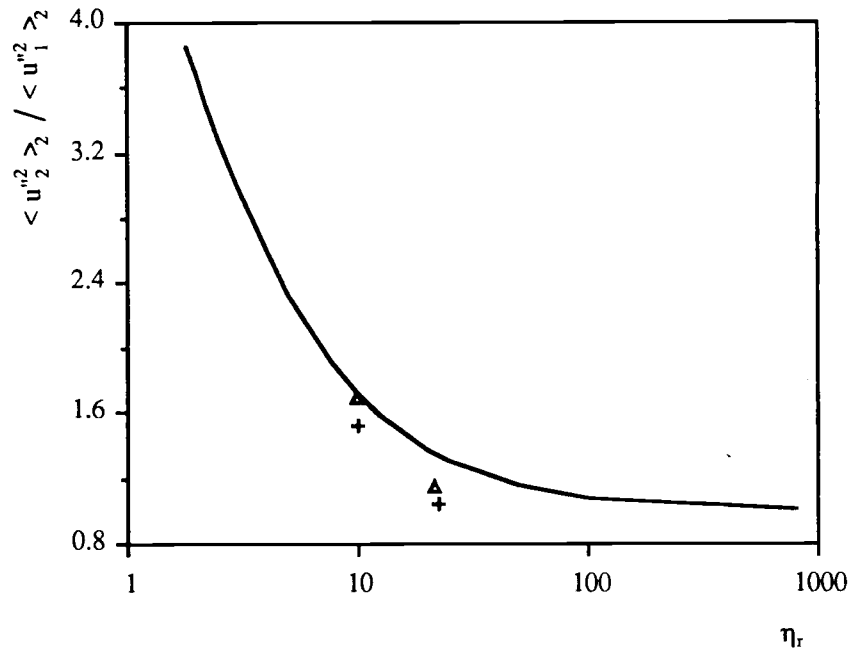


Figure 6.3.4 : Energie turbulente du mouvement fluctuant des bulles calculée dans deux champs turbulents différents, comparée avec l'expression théorique de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.9).
 —, extension de la théorie de Tchen,
 +, résultat des simulations dans THI2 ;
 Δ , résultat des simulations dans THI3.

	caractéristiques des bulles			
	THI2		THI3	
	10000		25000	
N_p				
d_p (mm)	1	2	1	2
τ_{12}^F (s)	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$3.17 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$
R_e^P	6.49	25.6	7.76	30.3
τ_1^t / τ_{12}^F	21.4	8.36	19.9	7.95
Caractéristiques du mouvement fluctuant des particules				
$\langle u''_2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.064	0.067	0.069	0.0825
$\langle u''_2 \rangle_2 / \langle u''_1 \rangle_2$	1.12	1.52	1.15	1.68
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.059	0.0495	0.0625	0.0575
τ_2^t (s)	$24.4 \cdot 10^{-3}$	$20.4 \cdot 10^{-3}$	$22.9 \cdot 10^{-3}$	$18.1 \cdot 10^{-3}$
L_2^t (m)	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$
Caractéristiques du fluide "vu" par les particules				
$\langle u''_1 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.057	0.044	0.060	0.049
$\langle u''_1 \rangle_2 / \langle u''_1 \rangle_1$	0.77	0.59	0.71	0.59
τ_{12}^t (s)	$27.4 \cdot 10^{-3}$	$32. \cdot 10^{-3}$	$26.1 \cdot 10^{-3}$	$30.1 \cdot 10^{-3}$
τ_{12}^t / τ_1^t	1.04	1.20	1.12	1.28
$\tau_{12}^t / \tau_{12}^F$	22.3	10.1	22.3	10.2
$d_p / \Delta x$	0.33	0.66	0.5	1.
Coefficients de dispersion				
D_2^t (m^2/s)	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
$\tau_2^t \langle u''_2 \rangle_2$ "	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.415 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^t \langle u''_1 \rangle_2$ "	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.375 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$
D_2^t / D_1^t	0.8	0.71	0.80	0.75

Tableau 6.1 : Résultats de dispersion de bulles obtenus à partir de simulations dans des champs turbulents de types THI2 et THI3. Rôle de la coupure.

6.4 Dispersion d'un nuage de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire en l'absence de croisement de trajectoires

Dans les champs turbulents de type TH13, nous avons simulé la dispersion de trois types de particules, denses, sédiments et bulles. Dans chaque cas, le nuage est constitué de 25000 particules.

Les paramètres et les résultats des simulations sont donnés dans les tableaux : 6.2 pour les particules denses, 6.3 pour les sédiments et 6.4 pour les bulles.

Nous allons analyser les résultats de dispersion à la lumière des théories exposées dans le chapitre 4.

Dans le début du chapitre 4, partie 4.1, nous avons supposé que tous les résultats obtenus dans le cadre de la diffusion turbulente s'appliquaient aussi aux particules de masse volumique différente de celle du fluide.

La conséquence de cette hypothèse est contenue dans l'équation 4.1.6 qui exprime que, si l'on attend un temps infini, le coefficient de dispersion des particules est égal au produit de l'échelle temporelle Lagrangienne et de la variance du mouvement fluctuant des particules. Nous pouvons observer figure 6.4.1 que les simulations confirment ce résultat.

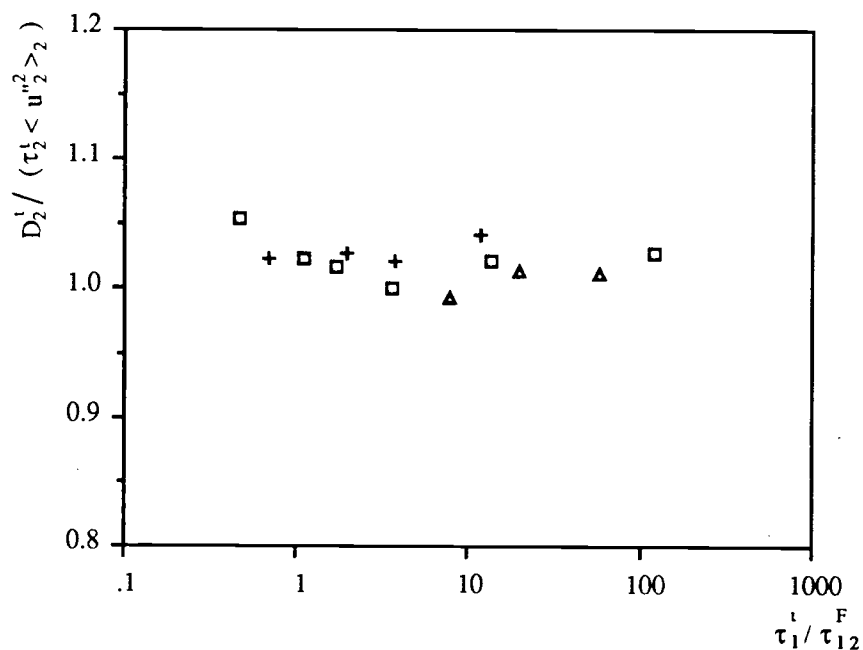


Figure 6.4.1 : Rapport du coefficient de dispersion à l'infini calculé à l'aide de l'équation 4.1.5 sur celui estimé à partir de l'équation 4.1.6 : Δ , bulles, + sédiments, \square , particules.

	Particules denses , b=0					
N_p	25000					
d_p (μm)	5	15	30	45	57	90
τ_{12}^F (s)	$0.194 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$6.49 \cdot 10^{-3}$	$13.9 \cdot 10^{-3}$	$21.6 \cdot 10^{-3}$	$49.6 \cdot 10^{-3}$
R_e^p	$8.45 \cdot 10^{-3}$	0.099	0.433	0.884	1.28	2.45
τ_1^t / τ_{12}^F	121.0	13.8	3.62	1.69	1.09	0.474
caractéristiques du mouvement fluctuant des particules						
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.087	0.085	0.068	0.052	0.043	0.028
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.087	0.085	0.068	0.052	0.043	0.028
τ_2^t (s)	$24. \cdot 10^{-3}$	$27. \cdot 10^{-3}$	$36. \cdot 10^{-3}$	$43. \cdot 10^{-3}$	$49. \cdot 10^{-3}$	$70. \cdot 10^{-3}$
L_2^t (m)	$7.08 \cdot 10^{-3}$	$7.88 \cdot 10^{-3}$	$9.40 \cdot 10^{-3}$	$9.80 \cdot 10^{-3}$	$10. \cdot 10^{-3}$	$12. \cdot 10^{-3}$
caractéristiques de la turbulence "vu" par les particules						
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.087	0.089	0.083	0.080	0.080	0.083
τ_{12}^t (s)	$23.6 \cdot 10^{-3}$	$25.7 \cdot 10^{-3}$	$29.4 \cdot 10^{-3}$	$28.6 \cdot 10^{-3}$	$26.8 \cdot 10^{-3}$	$25.6 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^t / \tau_{12}^F$	122.00	15.10	4.54	2.06	1.24	0.515
Rapports d'échelles						
L_2^t / L_b	0.055	0.062	0.073	0.077	0.078	0.094
d_p / η	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$10. \cdot 10^{-2}$	$20. \cdot 10^{-2}$	$30. \cdot 10^{-2}$	$38. \cdot 10^{-2}$	$60. \cdot 10^{-2}$
$d_p / \Delta x$	$0.25 \cdot 10^{-2}$	$0.75 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$
$\tau_{12}^F / \Delta t$	0.29	2.6	9.7	21.2	31.8	74.2
τ_{12}^F / τ_η	0.12	1.9	4.1	9.0	13.5	31.6
coefficient de dispersion						
D_2^t (m^2/s)	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$2.14 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$
$\tau_2^t \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$2.02 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^t \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$	$2.29 \cdot 10^{-3}$	$2.14 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$

Tableau 6.2 : Paramètres et résultats de simulation de dispersion de particules denses en turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3).

	Sédiments, b=0.6			
N_p	25000			
d_p (mm)	0.5	1	1.5	3
τ_{12}^F (s)	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$6.31 \cdot 10^{-3}$	$11.9 \cdot 10^{-3}$	$33.6 \cdot 10^{-3}$
R_c^P	1.46	5.71	11.	29.4
τ_1^i / τ_{12}^F	11.9	3.72	1.97	0.70
caractéristiques du mouvement fluctuant des particules				
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.086	0.079	0.071	0.057
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.087	0.083	0.77	0.068
τ_2^i (s)	$24.5 \cdot 10^{-3}$	$29. \cdot 10^{-3}$	$34. \cdot 10^{-3}$	$46. \cdot 10^{-3}$
L_2^i (m)	$7.18 \cdot 10^{-3}$	$8.15 \cdot 10^{-3}$	$9.00 \cdot 10^{-3}$	$11.1 \cdot 10^{-3}$
caractéristiques de la turbulence "vu" par les particules				
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.089	0.089	0.087	0.085
τ_{12}^i (s)	$23.5 \cdot 10^{-3}$	$26. \cdot 10^{-3}$	$28. \cdot 10^{-3}$	$31. \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	12.0	4.11	2.34	0.93
Rapports d'échelles				
L_2^i / L_b	0.056	0.063	0.070	0.086
d_p / η	3.3	6.6	10.	20.
$d_p / \Delta x$	0.25	0.5	0.75	1.5
$\tau_{12}^F / \Delta t$	2.95	9.45	18.2	50.0
τ_{12}^F / τ_η	1.26	4.02	7.74	21.3
coefficient de dispersion				
D_2^i (m^2/s)	$2.19 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$2.31 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$

Tableau 6.3 : Paramètres et résultats de dispersion de sédiments en turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3).

	Bulles, b=3		
N_p	25000		
d_p (mm)	0.5	1	2
τ_{12}^F (s)	$0.39 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$
R_e^P	1.52	7.76	30.3
τ_1^t / τ_{12}^F	59.5	19.9	7.95
	caractéristiques du mouvement fluctuant des particules		
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.079	0.069	0.0825
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.0775	0.0625	0.0575
τ_2^t (s)	$23.3 \cdot 10^{-3}$	$22.9 \cdot 10^{-3}$	$18.1 \cdot 10^{-3}$
L_2^t (m)	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$
	caractéristiques de la turbulence "vu" par les particules		
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.077	0.060	0.059
τ_{12}^t (s)	$23.6 \cdot 10^{-3}$	$26.1 \cdot 10^{-3}$	$30.1 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^t / \tau_{12}^F$	60.5	22.3	10.2
	Rapports d'échelles		
L_2^t / L_b	0.051	0.044	0.040
d_p / η	3.3	6.6	13.3
$d_p / \Delta x$	0.25	0.5	1.
$\tau_{12}^F / \Delta t$	0.59	1.76	4.45
τ_{12}^F / τ_η	0.25	0.75	1.90
	coefficient de dispersion		
D_2^t (m^2/s)	$1.83 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
$\tau_2^t \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	$1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.415 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^t \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	$1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$

Tableau 6.4 : Paramètres et résultats de dispersion de bulles en turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3).

6.4.1 Théorie de Tchen-Hinze standard

Dans le chapitre 4.3, nous avons exposé la théorie de Tchen-Hinze standard. Cette théorie repose sur les hypothèses de Tchen. Observons dans quelle mesure nos simulations les respectent, et si nos résultats concordent avec cette théorie.

Hypothèse 1 : La turbulence du fluide doit être homogène et stationnaire dans un domaine de dimension infinie.

Dans les tableaux de résultats, nous remarquons que le rapport L_2^t/L_b ne dépasse jamais 10%. D'après les conclusions de la partie 6.2.2, nous pouvons donc considérer que cette hypothèse est toujours vérifiée.

Hypothèse 2 : Pour calculer la force de traînée avec la loi de Stokes, il faut que le nombre de Reynolds particulaire soit suffisamment petit.

Nous avons vu dans le chapitre 2.4 que, si le nombre de Reynolds particulaire est plus grand, il est possible de corriger la loi de traînée. Cette hypothèse n'est donc pas fondamentale. Observons néanmoins que, pour des particules denses, le nombre de Reynolds particulaire est petit, la correction du terme de traînée est négligeable. Par contre, dans les simulations de sédiments et de bulles, le nombre de Reynolds particulaire est plus grand et donc la correction du terme de traînée joue un rôle.

Hypothèse 3 : Le diamètre de la particule est plus petit que l'échelle de longueur de Kolmogorov : $d_p \ll \eta_k$.

Ce critère est excessif. En effet, la limitation sur le diamètre des particules intervient à deux niveaux différents : dans l'expression de l'équation du mouvement des particules, et pour éviter le filtrage spatial des échelles de turbulence.

Nous avons vu (cf. chapitre 2.2) que, pour calculer rigoureusement l'équation du mouvement de la particule, Gagniol suppose que le diamètre de la particule est du même ordre de grandeur que l'échelle de Kolmogorov. Lorsque le diamètre est d'un ordre inférieur, toutes les forces sont négligeables devant la force de traînée.

Le diamètre de la particule doit également être suffisamment petit pour ne pas opérer de filtrage spatial sur les échelles turbulentes qui contribuent au mouvement des particules. Nous avons observé au chapitre 1.3 que, lorsque la

maille est de l'ordre de la micro-échelle de Taylor (calcul TH13), nous pouvons accéder par le calcul à la quasi totalité de l'énergie turbulente. Cela laisse supposer que les échelles inférieures à l'échelle de Taylor sont peu énergétiques.

Puisque l'échelle de Kolmogorov est plus petite que la micro-échelle de Taylor, le critère $d_p \leq \eta_k$ est suffisant pour ne pas opérer de filtrage spatial des échelles énergétiques de la turbulence et pour que l'équation du mouvement des particules reste correcte.

Pour les particules denses, ce critère est vérifié. Par contre, dans les simulations de bulles ou de sédiments, nous avons dû choisir des diamètres de particules plus grands que l'échelle de Kolmogorov (dans le cas contraire, le temps de relaxation des particules tend vers zéro et les particules se comportent comme des particules fluides). Ceci ne remet pas en cause l'analyse des résultats à la lumière de la théorie de Tchen-Hinze. En effet, dans nos simulations les particules sont considérées comme des particules discrètes. Donc, que ce soit dans l'analyse théorique ou dans les simulations, nous ne prenons pas en compte un éventuel filtrage spatial des petites échelles de la turbulence par un effet de taille des particules, ni une modification éventuelle de l'équation du mouvement des particules. Par contre, un doute subsiste quant à la représentativité de ces simulations, puisque dans la réalité la dimension des particules peut opérer un filtrage spatial des échelles turbulentes inférieures à la taille du diamètre et provoquer une modification éventuelle de l'équation du mouvement des particules.

Hypothèse 4 : Les caractéristiques turbulentes Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules peuvent être identifiées aux caractéristiques turbulentes du fluide.

Les caractéristiques Lagrangiennes de la turbulence du fluide sont calculées le long des trajectoires de particules fluides. Les résultats de la diffusion ont été présentés dans le chapitre 3. Nous rappelons dans le tableau 6.5 les résultats les plus utiles pour l'analyse :

	Résultats de la diffusion
τ_1^t (s)	$23.3 \cdot 10^{-3}$
$\langle u''_1^2 \rangle_1$ (m^2/s^2)	0.084
D_1^t (m^2/s)	$1.95 \cdot 10^{-3}$

Tableau 6.5 : Résultats de diffusion obtenus dans le champ turbulent (TH13).

Les caractéristiques Lagrangiennes de la turbulence du fluide "vu" par les particules sont calculées directement le long des trajectoires des particules (Cf. Chapitre 4.4).

Si cette hypothèse est vérifiée, alors les caractéristiques de la turbulence intervenant dans cette approche théorique doivent respecter les conditions suivantes :

-l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est égale à l'énergie turbulente du fluide, $\langle u_{1,i}^2 \rangle_1 = \langle u_{1,i}^2 \rangle_2$,

-l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide "vu" par les particules, c'est à dire le temps d'interaction "turbulence-particules", est égale à l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide, $\tau_{12}^l = \tau_1^l$.

Le rapport de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules sur l'énergie turbulente du fluide est représenté sur la figure 6.4.2. Sur la figure 6.4.3, nous avons inscrit le rapport de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide "vu" par les particules (Eq. 4.4.4) sur l'échelle temporelle Lagrangienne du fluide (Eq. 3.1.7).

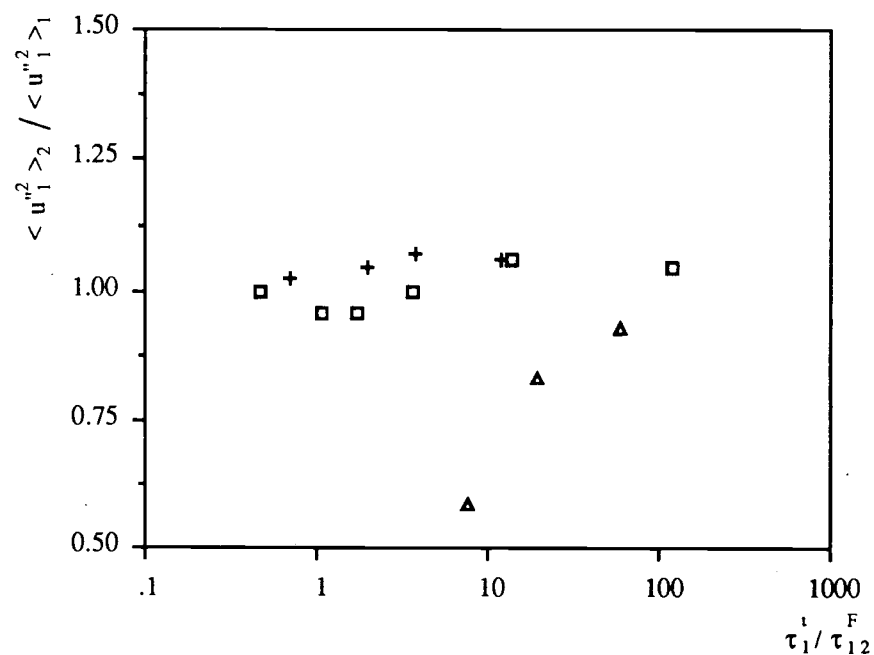


Figure 6.4.2 : Energie turbulente du fluide "vu" par les particules sur l'énergie turbulente du fluide : ▲, bulles, +, sédiments, ◻, particules.

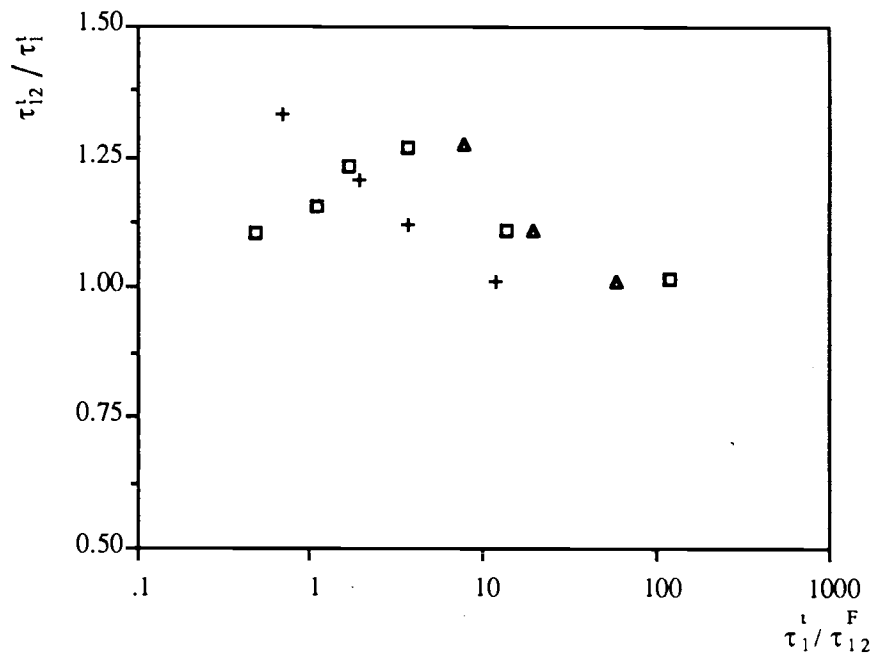


Figure 6.4.3 : Echelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide "vu" par les particules sur l'échelle intégrale Eulérienne du fluide : Δ , bulles, +, sédiments, \square , particules.

Nous observons à la figure 6.4.2 que pour les particules denses et les sédiments, le niveau de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules est égal à celui de l'énergie turbulente du fluide.

En revanche, nous notons le comportement singulier des bulles. En effet, lorsque la dimension des bulles augmente et, par conséquent, lorsque le temps de relaxation augmente, l'énergie turbulente du fluide "vu" par les bulles décroît. Ceci traduit une corrélation des bulles avec des régions dans lesquelles la vitesse du fluide est plus faible et qui pourrait être le centre des tourbillons. Pour les bulles, l'hypothèse 4 n'est pas vérifiée.

Sur la figure 6.4.3, nous remarquons que les bulles et les sédiments ont le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" qui augmente avec le temps de relaxation des particules. Cela signifie que ces particules accompagnent, en moyenne, la même structure turbulente plus longtemps que des particules fluides.

Les particules de petite taille, denses, sédiments et bulles, ont tendance à se comporter comme des particules fluides et le temps d'interaction est égal à l'échelle de temps Lagrangienne des particules fluides.

Nous remarquons un comportement particulier pour les particules denses. En effet, jusqu'à une certaine taille, lorsque le diamètre augmente, le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" croît, passe par un maximum

et diminue ensuite pour atteindre un plateau correspondant à l'échelle intégrale temporelle Eulérienne.

Si l'on compare l'échelle intégrale temporelle Eulérienne (tableau 1.1 cas TH13) et l'échelle temporelle Lagrangienne du fluide "vu" par les particules, pour les grosses particules denses (90 μm), nous obtenons :

$$\frac{T^e}{\tau_{12}} = 0.98$$

Ce résultat est cohérent avec la vision physique du phénomène, qui suppose que, si les particules sont très grosses, elles sont quasiment immobiles à l'échelle de l'évolution de la turbulence du fluide. Dans ce cas, les échelles de la turbulence du fluide "vu" par les particules sont des échelles Eulériennes de la turbulence.

En général, les caractéristiques turbulentes Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules ne peuvent être identifiées parfaitement aux caractéristiques turbulentes du fluide.

Comparaison avec les résultats théoriques de Tchen-Hinze.

Calcul du coefficient de dispersion des particules

Le résultat le plus important, dans le cadre de la théorie standard de Tchen-Hinze, est qu'en l'absence de croisement de trajectoires, si l'on attend un temps infini, le coefficient de dispersion des particules doit être égal au coefficient de diffusion du fluide (Eq. 4.3.7).

Sur la figure 6.4.4, nous avons tracé le rapport du coefficient de dispersion des particules sur le coefficient de diffusion du fluide.

Puisque l'hypothèse fondamentale de la théorie standard de Tchen, qui suppose que les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules sont égales aux caractéristiques turbulentes du fluide, n'est pas respectée, nous ne retrouvons pas ce résultat.

Les particules denses et les sédiments ont un coefficient de dispersion qui suit les évolutions du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules".

Pour une gamme intermédiaire de particules denses, le coefficient de dispersion est maximum. Squires et Eaton (1990), en simulation directe, ont également observé une augmentation du coefficient de dispersion pour une classe intermédiaire de particules.

Pour les bulles, les deux biais statistiques se compensent, mais la diminution de l'énergie de la turbulence du fluide "vu" par les particules l'emporte sur l'augmentation du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules". Nous observons une nette diminution du coefficient de dispersion des bulles. L'écart des résultats numériques avec la prédiction théorique, nous ont conduit à analyser les résultats à la lumière d'une extension de la théorie de Tchen

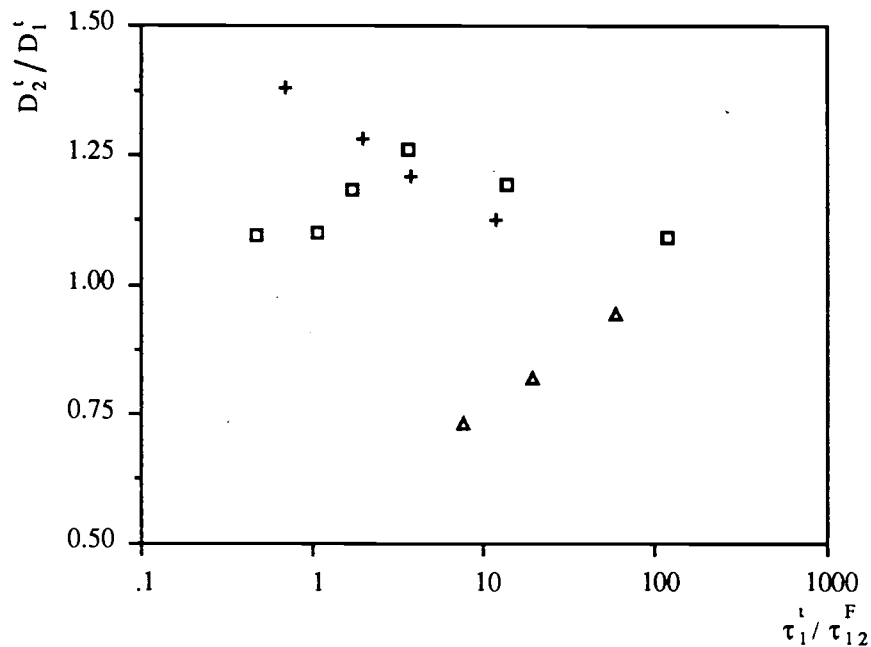


Figure 6.4.4 : Coefficient de dispersion des particules sur le coefficient de diffusion du fluide : Δ , bulles, + sédiments, \square , particules.

Calcul de la variance du mouvement fluctuant des particules et de la covariance du mouvement corrélé fluide-particules

Dans le cadre de la théorie standard de Tchen-Hinze nous avons vu au chapitre 4.3.2 que la connaissance de la fonction d'autocorrélation Lagrangienne du fluide permet d'obtenir directement la variance des vitesses fluctuantes des particules et la covariance du mouvement fluctuant fluide-particules. Les résultats du chapitre 3 ont montré que cette corrélation est bien approchée par une exponentielle. Nous pouvons donc utiliser l'expression 4.3.14 pour prédire la variance du mouvement fluctuant des particules et 4.3.15 pour estimer la covariance du mouvement corrélé fluide-particules, en utilisant les caractéristiques de la turbulence obtenues à partir des calculs de diffusion de particules fluides.

Sur les figures 6.4.5, 6.4.6 et 6.4.7 nous avons inscrit le rapport de la variance du mouvement fluctuant des particules sur l'énergie turbulente du fluide respectivement pour les particules denses, les sédiments et les bulles.

Sur les figures 6.4.8, 6.4.9 et 6.4.10, nous avons inscrit le rapport de la covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules sur l'énergie turbulente du fluide.

Nous observons que les prédictions de la variance et de la covariance sont relativement bonnes pour les particules denses et les sédiments. Par contre, pour les bulles, l'erreur est beaucoup plus importante, et ceci parce que la diminution de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules n'est pas prise en compte.

Nous pouvons conclure cette partie en observant que dans le cadre de la théorie standard de Tchen-Hinze, en l'absence du croisement de trajectoires nous sommes capables de prédire à peu près correctement la variance du mouvement fluctuant des particules et la covariance du mouvement corrélé fluide-particules pour les particules denses et les sédiments. Par contre, à cause de la différence entre le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" et l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide, le coefficient de dispersion peut être sous-estimé d'environ 30 %.

Pour les bulles, l'hypothèse que la turbulence du fluide "vu" par les particules durant leur mouvement est égale à la turbulence du fluide n'est pas vérifiée, ni pour le niveau d'énergie turbulente, ni pour le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules". Ceci explique la mauvaise prédiction de la variance, de la covariance, et du coefficient de dispersion des bulles.

Afin de s'affranchir de cette hypothèse, nous proposons d'analyser les résultats à la lumière de l'extension de la théorie de Tchen proposée dans le chapitre 4.4.

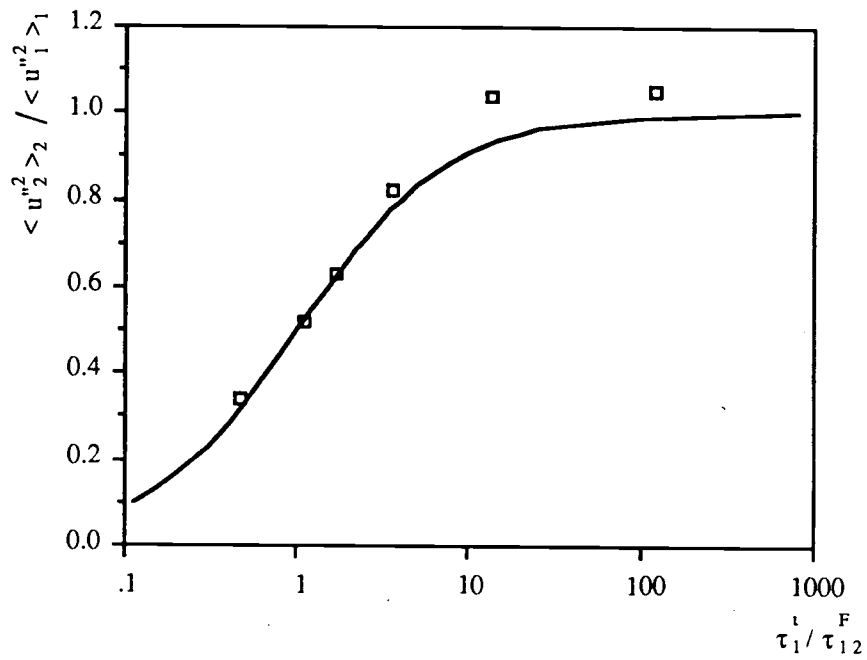


Figure 6.4.5 : Variance du mouvement fluctuant des particules denses :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.14),
 □, résultats des simulations.

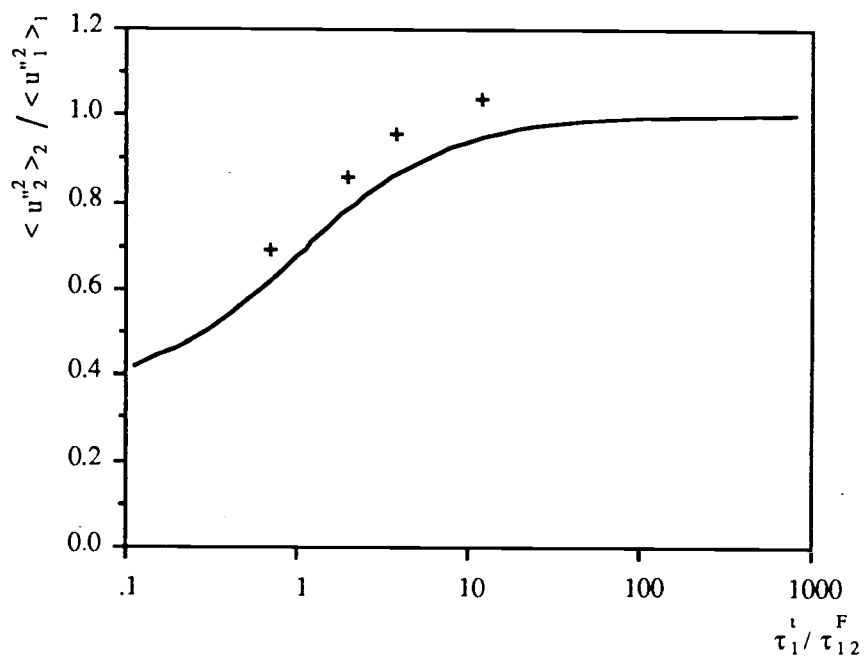


Figure 6.4.6 : Variance du mouvement fluctuant des sédiments :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.14),
 +, résultats des simulations.

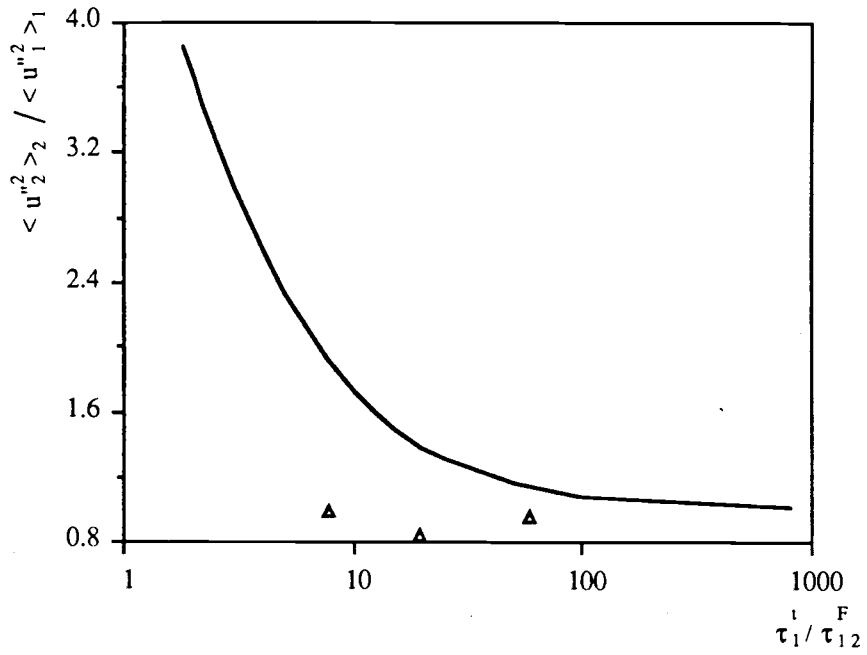


Figure 6.4.7 : Variance du mouvement fluctuant des bulles :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.14),
 Δ , résultats des simulations.

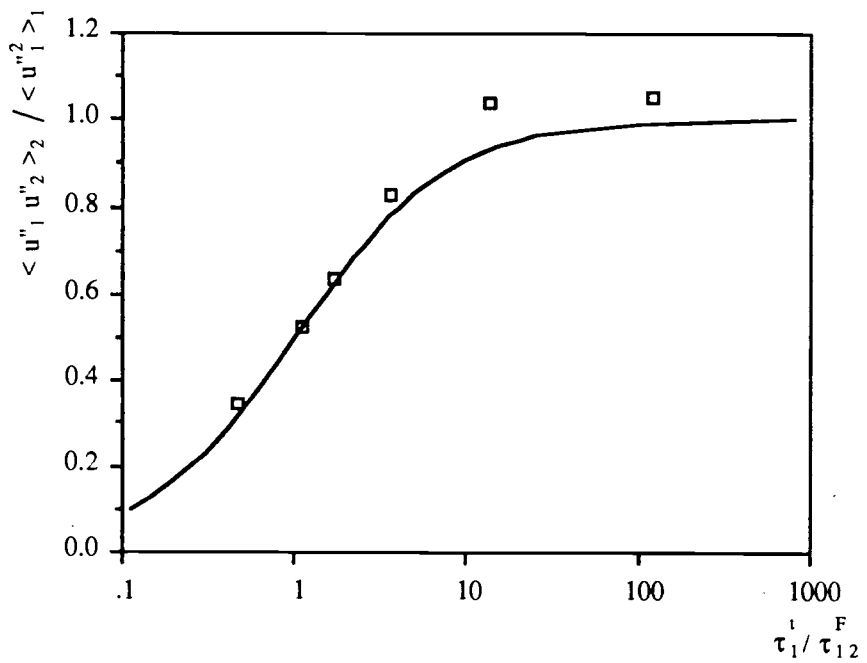


Figure 6.4.8 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules denses :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.15),
 \square , résultats des simulations.

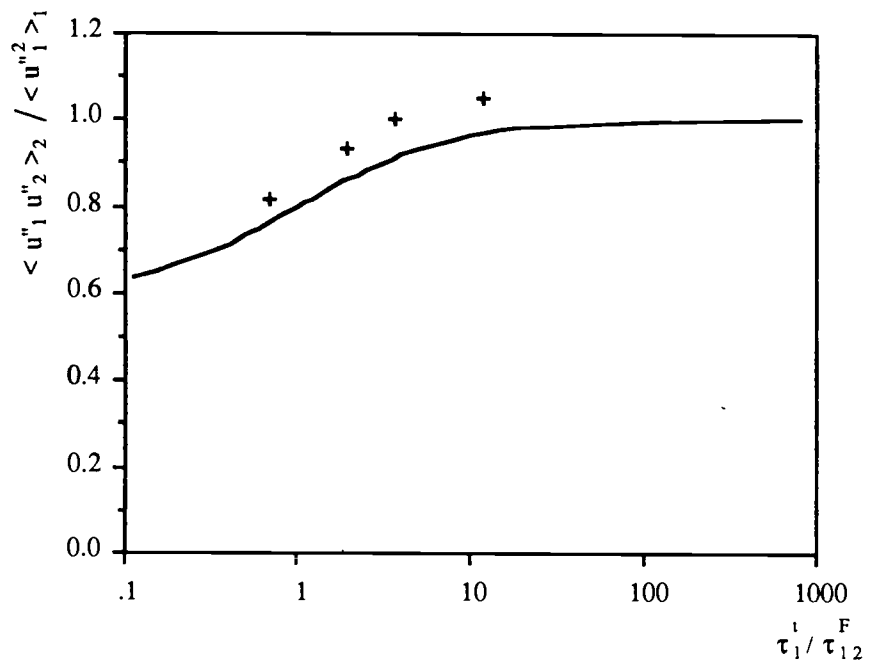


Figure 6.4.9 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-sédiments :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.15),
 +, résultats des simulations.

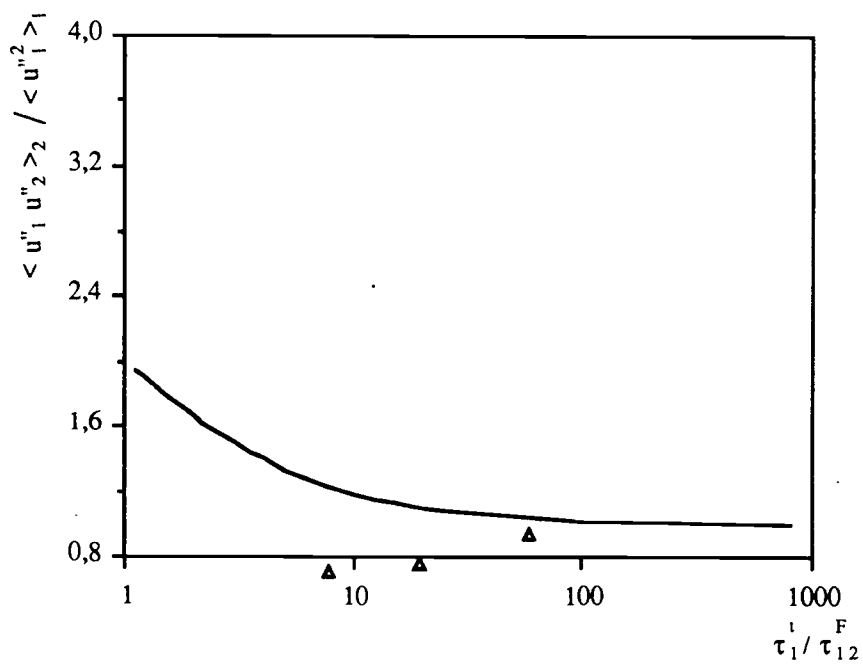


Figure 6.4.10 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-bulles :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.15),
 \Delta, résultats des simulations.

6.4.2 Extension de la théorie de Tchen-Hinze

Dans l'extension de la théorie de Tchen (Cf. chapitre 4.4), nous ne supposons plus que les caractéristiques turbulentes Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules peuvent être identifiées aux caractéristiques turbulentes du fluide. Nous prétendons alors, que si l'on connaît les caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules, nous sommes capables de calculer toutes les caractéristiques du mouvement fluctuant des particules. Pour cela, nous avons formulé l'hypothèse que si la turbulence est homogène isotrope stationnaire, les composantes normales du tenseur des corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules restent de forme exponentielle quel que soit le mouvement des particules.

Sur les figures 6.4.11, 6.4.12 et 6.4.13 sont représentées les corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules (corrélations calculées le long des trajectoires des particules). Nous constatons que ces corrélations sont bien de forme exponentielle. Ceci explique le bon accord des résultats de dispersion avec les prédictions théoriques obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen, que ce soit pour la variance du mouvement fluctuant des particules, figures 6.4.14, 6.4.15, 6.4.16, ou pour la covariance du mouvement corrélé fluctuant fluide-particules, figures 6.4.17, 6.4.18, 6.4.19.

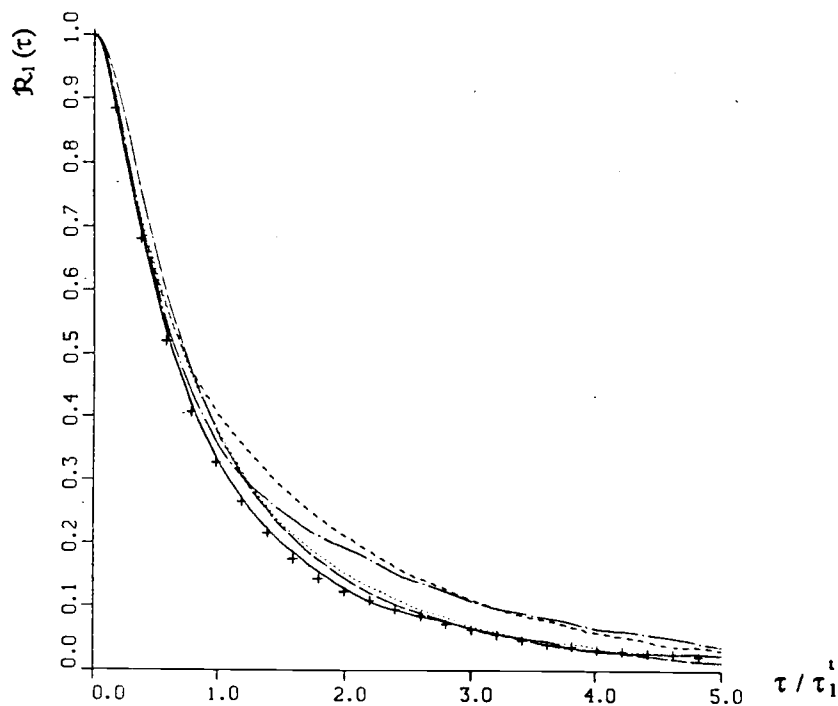


Figure 6.4.11 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules denses :

—, $\tau_1 / \tau_{12} = 121.0$; , $\tau_1 / \tau_{12} = 13.8$; ---, $\tau_1 / \tau_{12} = 3.62$;
 - · - · - , $\tau_1 / \tau_{12} = 1.69$; - - - , $\tau_1 / \tau_{12} = 0.474$; + , particules fluides.

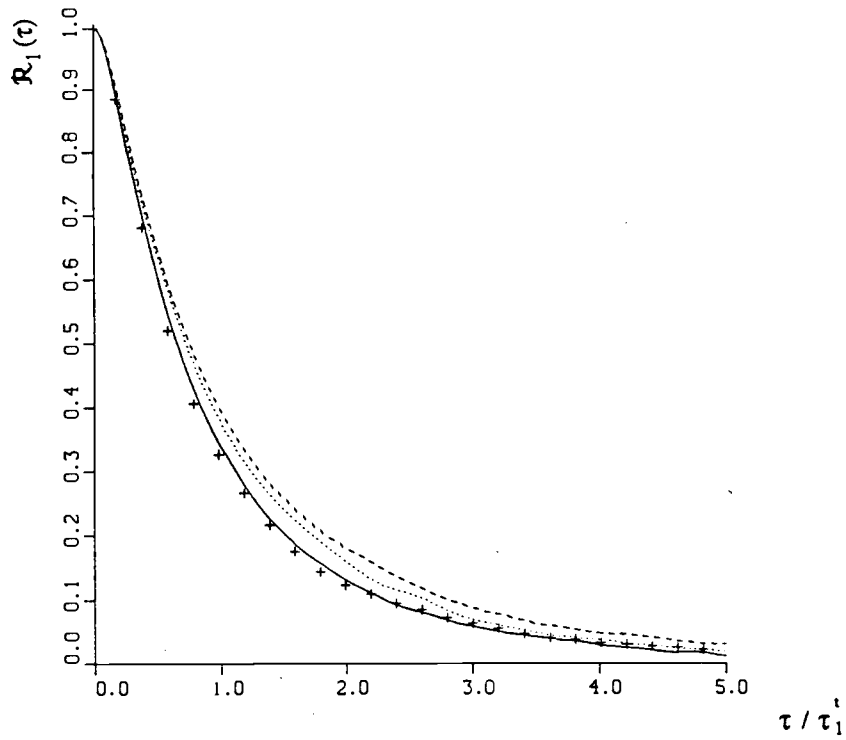


Figure 6.4.12 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les sédiments :
 —, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 11.9$; \cdots , $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 3.72$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 1.97$;
 + , particules fluides.

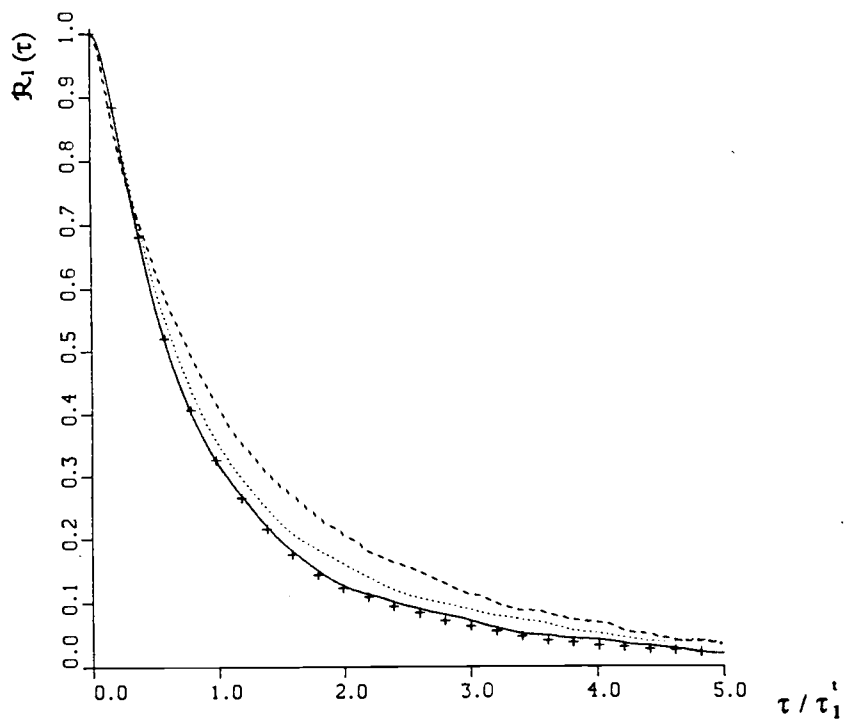


Figure 6.4.13 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les bulles :
 —, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 59.5$; \cdots , $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 19.9$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 7.95$;
 + , particules fluides.

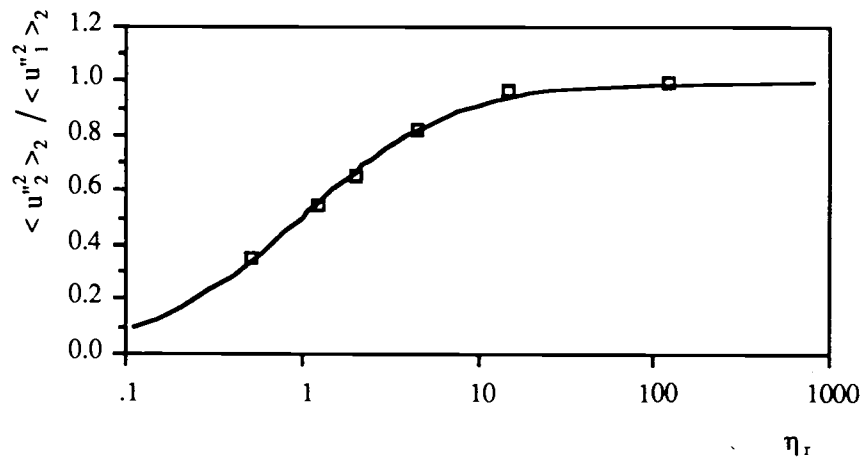


Figure 6.4.14 : Variance du mouvement fluctuant des particules denses :
 — calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq.4.4.9),
 □, résultats des simulations.

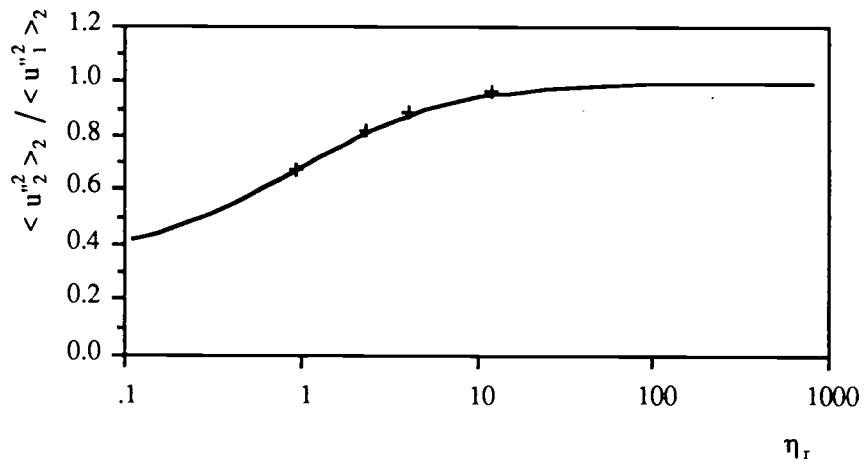


Figure 6.4.15 : Variance du mouvement fluctuant des sédiments :
 — calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq.4.4.9),
 +, résultats des simulations.

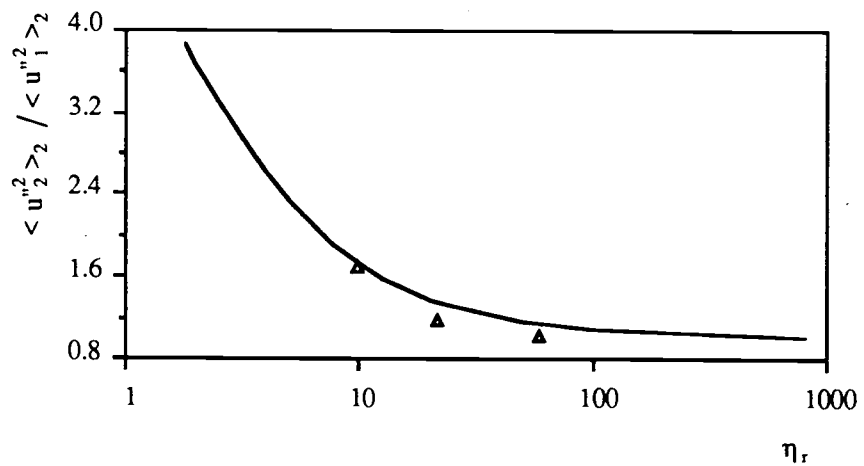


Figure 6.4.16 : Variance du mouvement fluctuant des bulles :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.4.9),
 Δ, résultats des simulations.

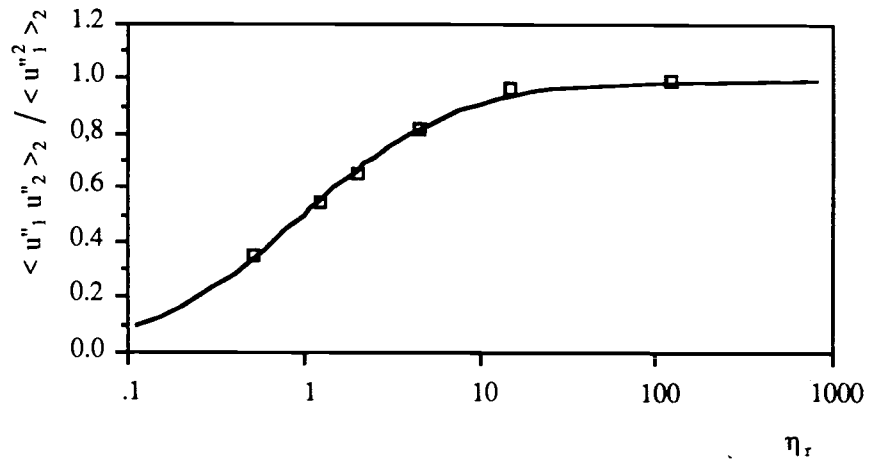


Figure 6.4.17 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules denses :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.4.10),
 □, résultats des simulations.

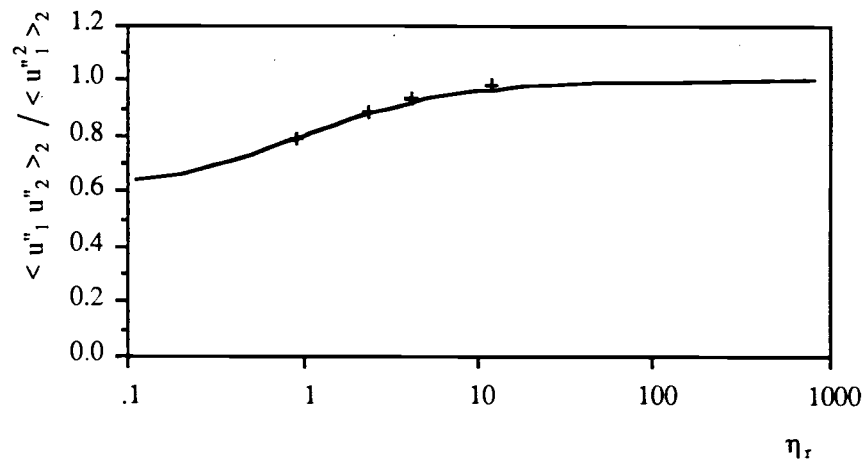


Figure 6.4.18 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-sédiments :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.4.10),
 +, résultats des simulations.

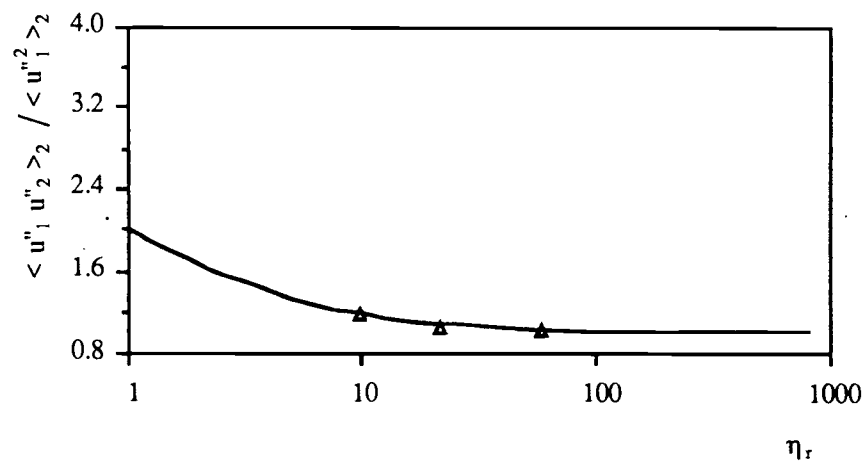


Figure 6.4.19 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-bulles :
 — calculée à l'aide de la théorie standard de Tchen (Eq.4.3.14),
 Δ, résultats des simulations.

Calcul du coefficient de dispersion

Dans l'extension de la théorie de Tchen, le coefficient de dispersion des particules est égal au produit de la variance du fluide "vu" par les particules et du temps d'interaction "turbulence-particules" (Eq. 4.4.8). Sur les figures 6.4.20, 6.4.21, 6.4.22 nous pouvons observer le bon accord entre le coefficient de dispersion calculé dans le cadre de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) et celui estimé à travers l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.8).

Sur ces figures, nous avons également représenté le coefficient de dispersion binaire, D_{12}^1 , introduit dans la modélisation Eulérienne (Eq. 5.1.26). Ce coefficient est comparé avantageusement, à la valeur estimée grâce l'équation (4.4.10) de l'extension de la théorie de Tchen.

Pour les particules de petites dimensions (temps de relaxation petit), ce coefficient de dispersion binaire peut être identifié aux coefficients de dispersion D_2^1 .

Lorsque le temps de relaxation est plus important, l'évolution du coefficient de dispersion binaire est complètement différente selon la nature des particules. Les évolutions suivent les mêmes courbes que la covariance du mouvement corrélé fluide-particules. Les particules denses se décorrèlent lorsque le temps de relaxation augmente et ce coefficient tend vers zéro. En revanche pour les bulles le coefficient de dispersion binaire croît.

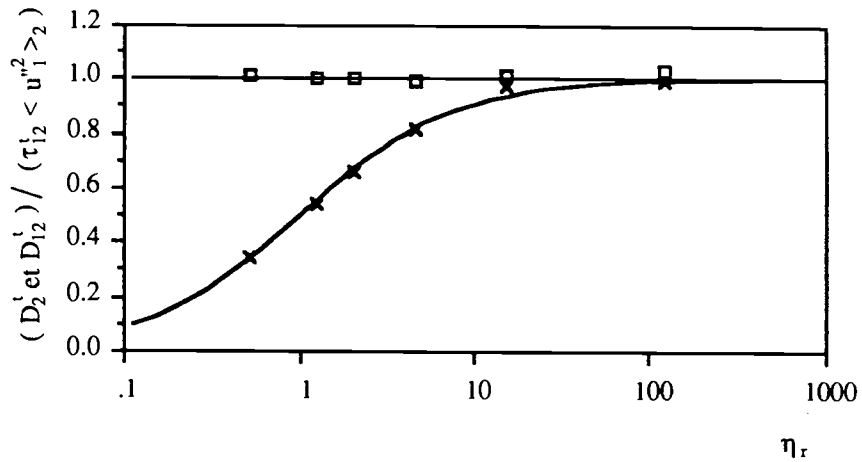


Figure 6.4.20 : Coefficients de dispersion de particules denses : \square , coefficient de dispersion calculé à l'aide de l'équation 4.1.5 ; \times , coefficient de dispersion binaire calculé à l'aide de l'équation 5.1.26 ; —, expressions obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen , Eq.4.4.8 et 4.4.10.

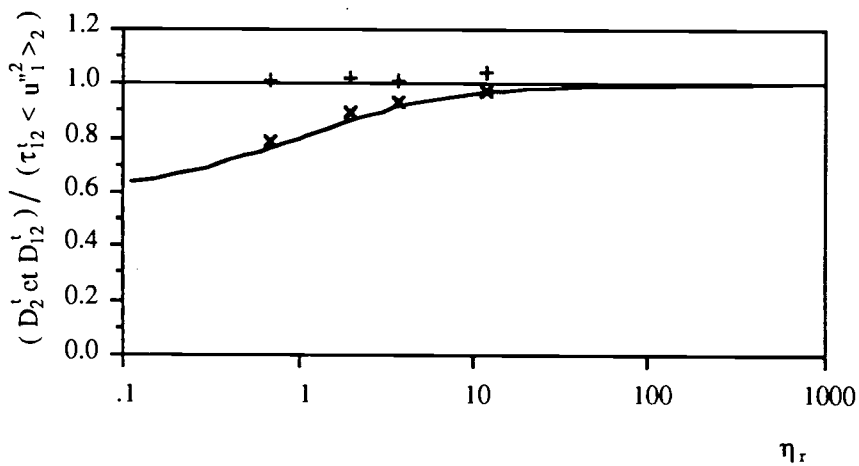


Figure 6.4.21 : Coefficients de dispersion de sédiments : +, coefficient de dispersion calculé à l'aide de l'équation 4.1.5 ; \times , coefficient de dispersion binaire calculé à l'aide de l'équation 5.1.26 ; —, expressions obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen , Eq.4.4.8 et 4.4.10.

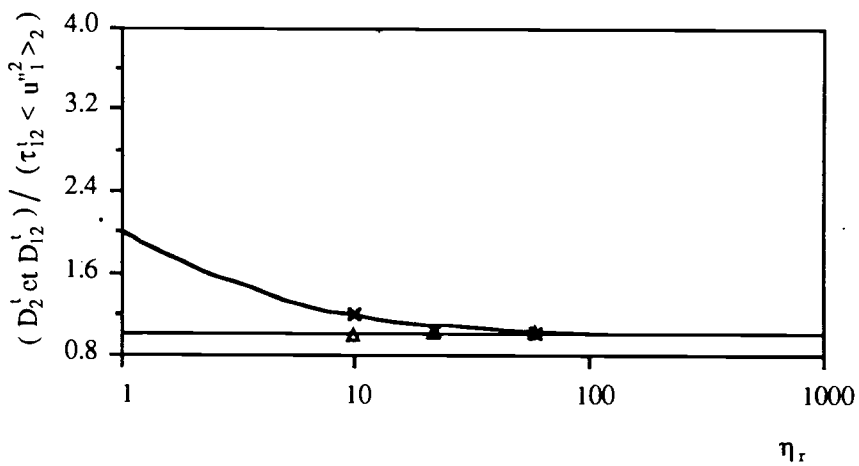


Figure 6.4.22 : Coefficients de dispersion de bulles : Δ , coefficient de dispersion calculé à l'aide de l'équation 4.1.5 ; \times , coefficient de dispersion binaire calculé à l'aide de l'équation 5.1.26 ; —, expressions obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen , Eq.4.4.8 et 4.4.10.

6.4.3 Coefficient de dispersion du modèle Eulérien

Dans le formalisme du modèle à deux fluides, le coefficient efficace de dispersion du modèle Eulérien a été identifié comme la somme de deux contributions, le coefficient de diffusion binaire qui prend en compte la dispersion des particules par le mouvement fluctuant corrélé fluide-particules, et une contribution provenant de l'agitation propre des particules (Eq. 5.1.24). Sur la figure 6.4.23, pour chaque cas traité, nous avons inscrit le coefficient de dispersion calculé directement à partir de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) et le coefficient de dispersion efficace du modèle Eulérien. Nous observons que la valeur du coefficient efficace de dispersion du modèle Eulérien est une bonne approximation du coefficient de dispersion.

A condition de connaître les caractéristiques du fluide "vu" par les particules, le modèle Eulérien permet donc d'obtenir une très bonne valeur du coefficient de dispersion, même lorsque les hypothèses de la théorie de Tchen-Hinze ne sont pas vérifiées.

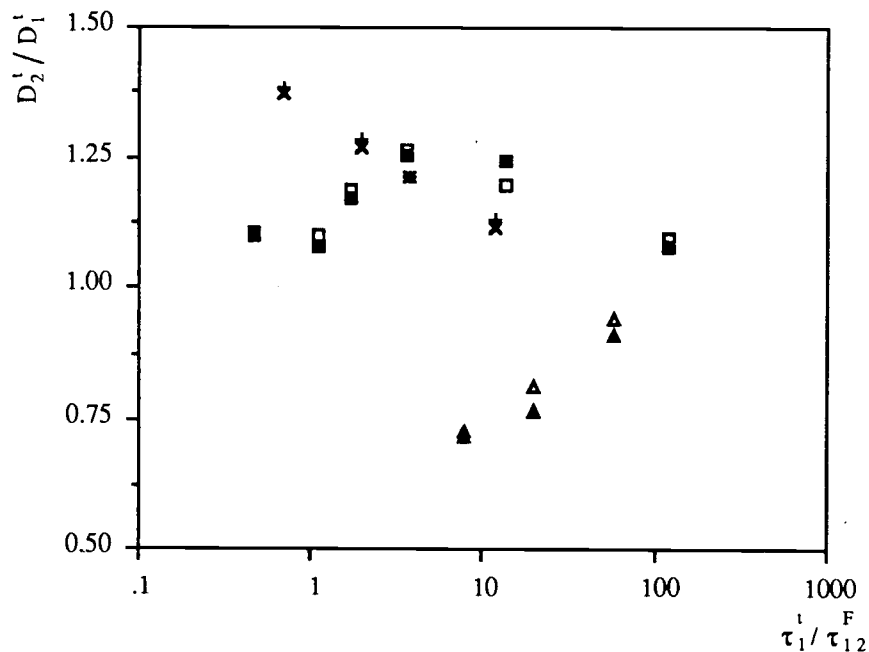


Figure 6.4.23 : Coefficient de dispersion calculé respectivement à l'aide de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) et de l'expression du modèle Eulérien (Eq. 5.1.24) : □ et ■, pour les particules denses ; + et x, pour les sédiments ; ▲ et ▲ pour les bulles.

6.4.4 Transitoire d'énergie

Dans cette partie, nous présentons des résultats de la phase transitoire des calculs de dispersion. Les particules sont injectées dans la turbulence avec une vitesse égale à la vitesse du fluide. Il faut un certain temps pour que les niveaux d'énergie atteignent leur état asymptotique.

Transitoire de particules denses

Sur les figures 6.4.22, 6.4.23 et 6.4.24 sont représentés des transitoires de particules denses. Nous avons inscrit les courbes d'évolutions de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules, de la covariance du mouvement corrélé fluctuant fluide-particules et de l'énergie du mouvement fluctuant des particules. Si le niveau d'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules évolue peu durant cette phase transitoire, nous observons des évolutions différentes, selon qu'ils s'agissent de la covariance ou de l'énergie du mouvement fluctuant des particules. En effet, si la durée du transitoire de l'énergie du mouvement fluctuant des particules (environ 2 fois τ_{12}^F) s'accroît fortement lorsque le temps de relaxation des particules augmente, le temps d'ajustement de la covariance, même s'il augmente, reste de l'ordre de grandeur de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne et est donc beaucoup plus court.

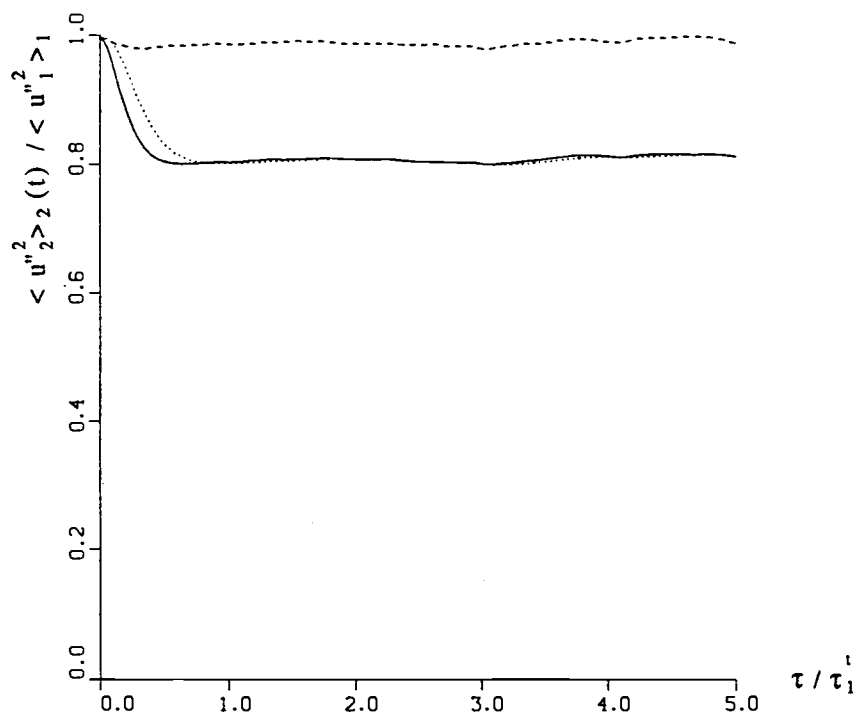


Figure 6.4.22 : Transitoire d'énergie pour des particules denses : $\tau_1^i / \tau_{12}^F = 3.62$.

$$---, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{ — } , \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 ; \cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

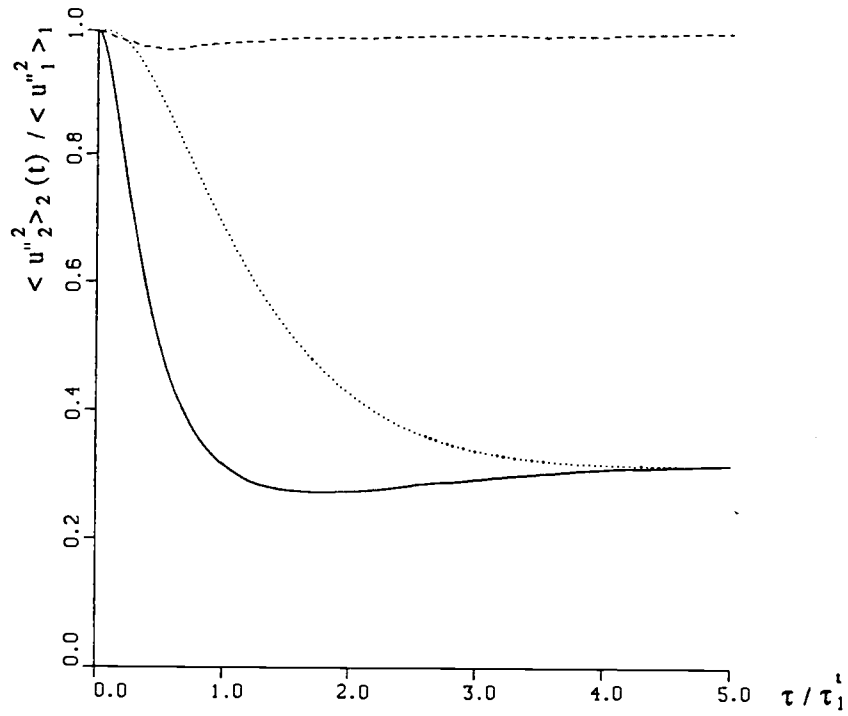


Figure 6.4.23 : Transitoire d'énergie pour des particules denses : $\tau_1 / \tau_{12} = 0.53$.

$$---, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{ — } , \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 ; \cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

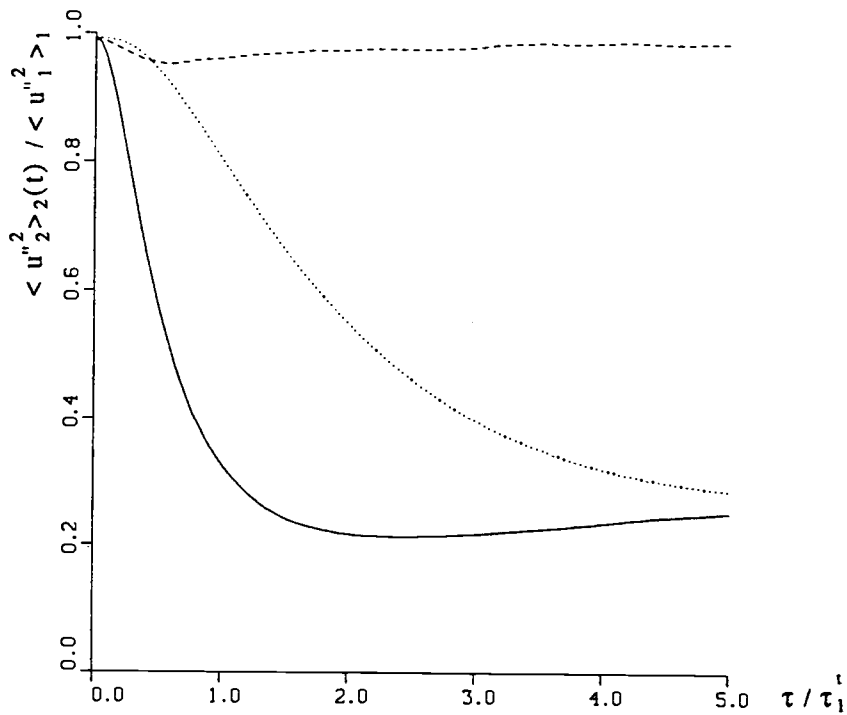


Figure 6.4.24 : Transitoire d'énergie pour des particules denses : $\tau_1 / \tau_{12} = 0.32$.

$$---, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{ — } , \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2 ; \cdots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

Transitoire de sédiments

Sur la figure 6.4.25, est inscrit un transitoire de sédiments. Nous observons que le mouvement des sédiments atteint rapidement son état stationnaire.

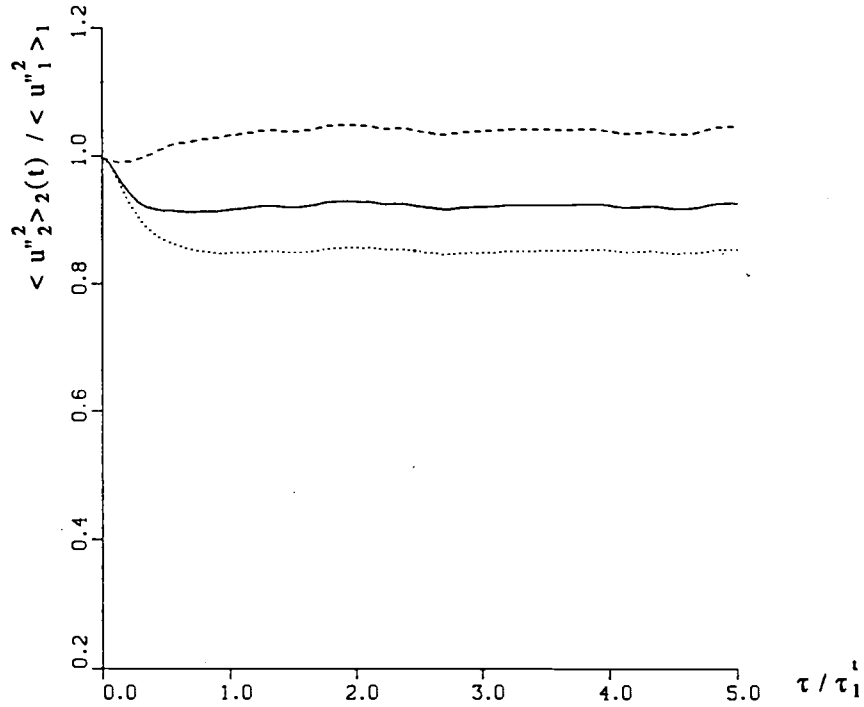


Figure 6.4.25 : Transitoire d'énergie pour des sédiments : $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 1.97$.

$$\text{---}, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{—}, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2; \text{...}, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

Transitoire d'écoulements à bulles

Sur les figures 6.4.26 et 6.4.27 sont représentés des transitoires d'énergie d'écoulements à bulles. Nous observons le comportement singulier de ce type de particules. Le niveau d'énergie du mouvement fluctuant des bulles s'ajuste quasiment instantanément en fonction de l'énergie de la turbulence du fluide "vu" par les particules (le temps de relaxation des particules est petit). Par contre, les particules mettent un certain temps à se corrélérer avec le fluide et à rejoindre des zones moins énergétiques. Nous pouvons observer la lente décroissance de la courbe de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et de la covariance du mouvement corrélé. Cette décroissance est accompagnée par l'énergie du mouvement fluctuant des bulles qui semble suivre l'évolution de l'énergie du fluide "vu" par les particules. Le temps de la décroissance est caractérisé par l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne du fluide, τ_1^t .

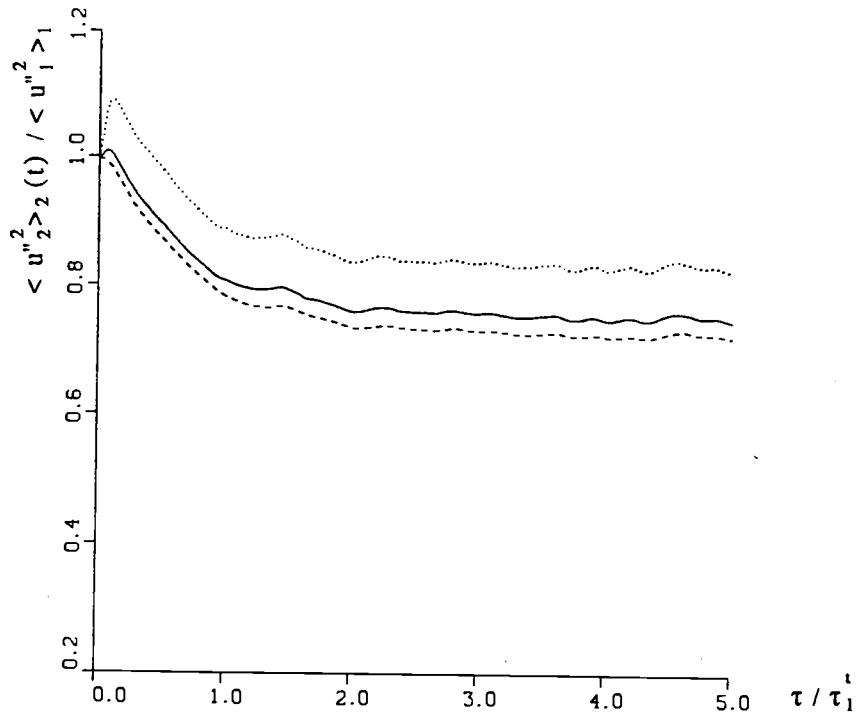


Figure 6.4.26: Transitoire d'énergie pour des bulles : $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 19.9$.

$$---, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{---}, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2; \dots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

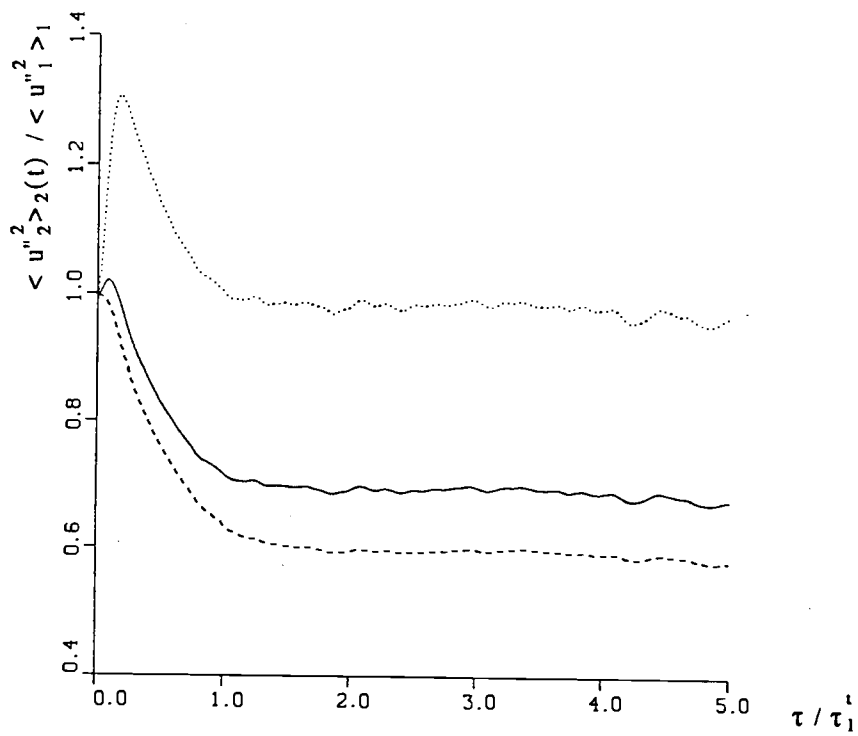


Figure 6.4.27: Transitoire d'énergie pour des bulles : $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 7.95$.

$$---, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{1,i} \rangle_2, \text{---}, \frac{1}{2} \langle u''_{1,i} u''_{2,i} \rangle_2; \dots, \frac{1}{2} \langle u''_{2,i} u''_{2,i} \rangle_2.$$

6.4.5 Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules

A titre indicatif, nous présentons sur les figures 6.4.28, 6.4.29 et 6.4.30 les corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules.

Les particules denses ont une durée de corrélation qui augmente avec le temps de relaxation des particules. En revanche pour les bulles nous observons l'effet inverse. Plus le temps de relaxation augmente et plus elles se décorèlent rapidement.

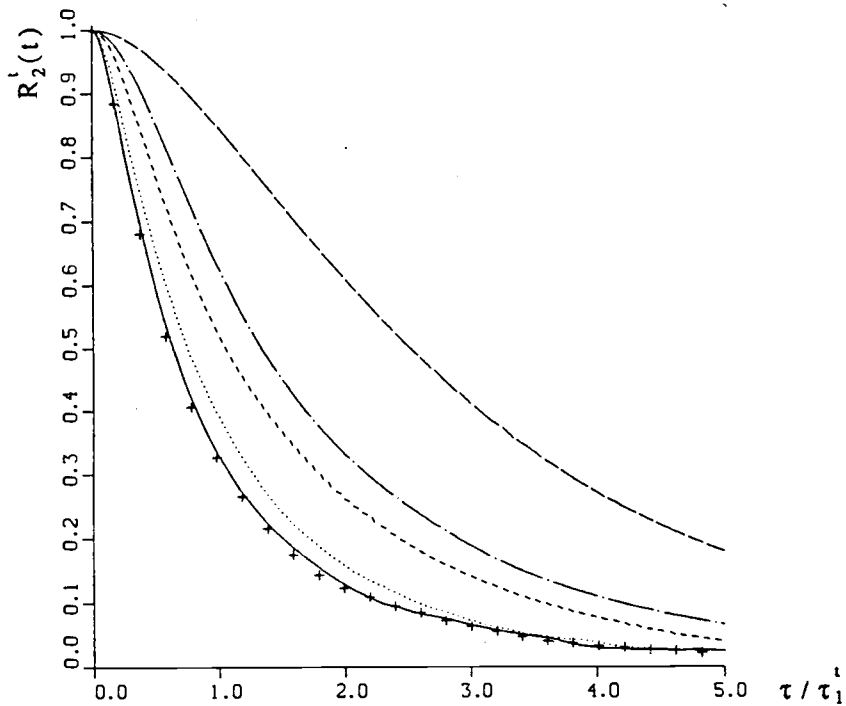


Figure 6.4.28 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules denses :
 —, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 121.0$; \cdots , $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 13.8$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 3.62$;
 $- \cdot -$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 1.69$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 0.474$; + , particules fluides.

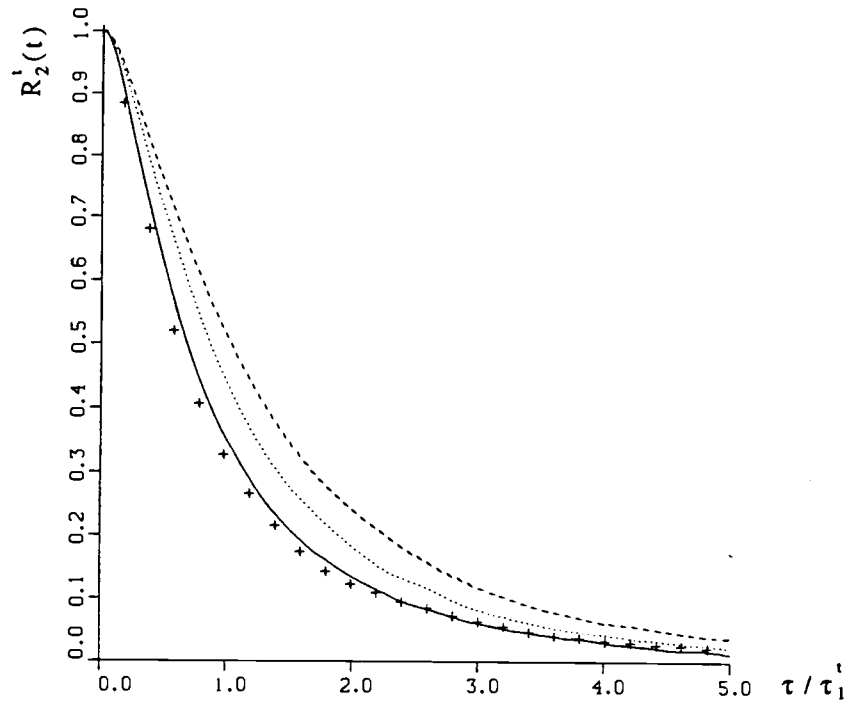


Figure 6.4.29 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des sédiments :
 —, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 11.9$; \cdots , $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 3.72$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 1.97$;
 + , particules fluides.

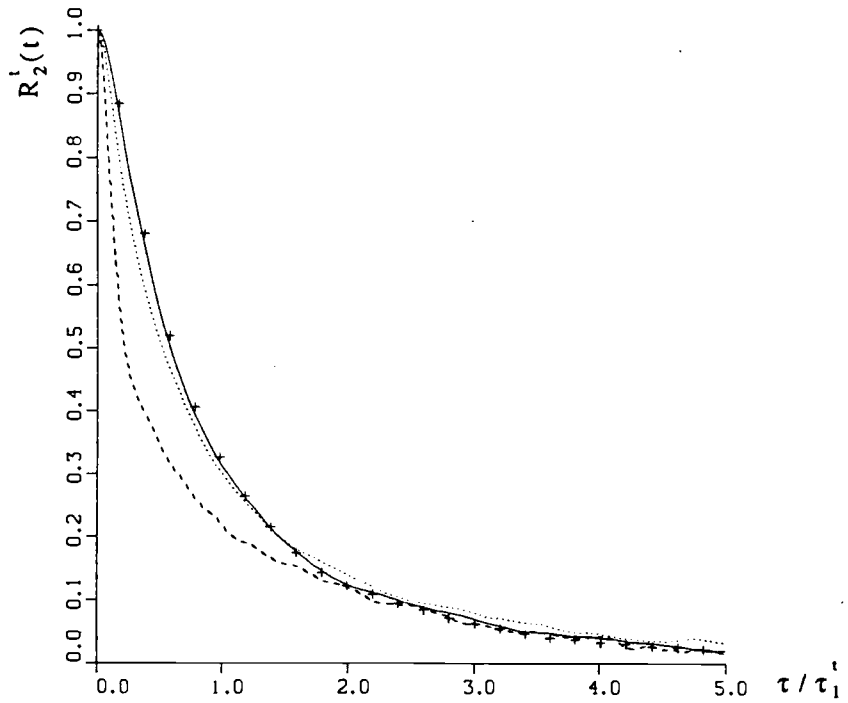


Figure 6.4.30 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des bulles :
 —, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 59.5$; \cdots , $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 19.9$; $---$, $\tau_1^t / \tau_{12}^F = 7.95$;
 + , particules fluides.

6.4.6 Dérivée suivant le fluide ou suivant la particule

Nous avons vu dans le chapitre 2.2.3, que si le nombre de Reynolds particulaire n'est pas négligeable, la dérivée suivant la particule et la dérivée suivant le mouvement du fluide ne sont plus identiques. Si dans nos simulations, nous sommes capable de dériver la vitesse du fluide suivant le mouvement du fluide, l'emploi de cette dérivée rend l'équation du mouvement des particules non linéaire et empêche d'utiliser le formalisme de Hinze, pour relier l'énergie du mouvement fluctuant des particules à l'énergie du fluide "vu" par les particules. C'est pourquoi, dans les modèles numériques, la dérivée suivant le mouvement des particules est parfois utilisée.

Dans le cas de particules denses cette dérivée ne joue aucun rôle, par contre pour les bulles les termes de pression et de masse ajoutée, qui font intervenir cette dérivée, sont très importants. Nous allons donc essayer de déterminer l'influence du choix de l'une ou l'autre de ces dérivées, sur les résultats de dispersion de bulles.

Dans le tableau 6.6, nous comparons les résultats de simulation de bulles obtenus en utilisant respectivement la dérivée suivant le mouvement du fluide ou des particules. Nous ne notons pas de différences importantes entre les deux simulations. On observe toutefois, une légère diminution de l'ordre de 5 % de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et du coefficient de dispersion, lorsque l'on utilise la dérivée suivant le mouvement des particules.

En revanche le temps d'interaction fluide-particules et le rapport de l'énergie du mouvement fluctuant des particules sur l'énergie du fluide "vu" par les particules n'est pas modifié.

Pour simuler la dispersion de bulles dans une turbulence homogène isotrope stationnaire, dériver suivant la vitesse du fluide "vu" par les particules ou bien suivant le mouvement des bulles, ne semble pas modifier notablement les résultats.

	Bulles de 1 mm	
N_p	10000	
	dérivée suivant la particule	dérivée suivant le fluide
τ_{12}^F (s)	$1.23 \cdot 10^{-3}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$
R_e^P	6.49	6.74
τ_1^i / τ_{12}^F	21.4	21.8
	Caractéristiques du mouvement fluctuant des particules	
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.064	0.068
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.059	0.061
τ_2^i (s)	$24.4 \cdot 10^{-3}$	$23.7 \cdot 10^{-3}$
L_2^i (m)	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$
	Caractéristiques du fluide "vu" par les particules	
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.057	0.061
τ_{12}^i (s)	$27.4 \cdot 10^{-3}$	$27.3 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	22.3	22.4
	Coefficients de dispersion	
D_2^i (m^2/s)	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$1.66 \cdot 10^{-3}$
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2 / \langle u''_1{}^2 \rangle_2$	1.12	1.11

Tableau 6.6 Influence de la dérivée suivant le fluide ou suivant la particule
Calcul effectué dans une turbulence de type TH12

6.5 Etude de l'effet de croisement de trajectoires

Dans les champs turbulents de type TH13, nous avons simulé la dispersion de particules denses sur lesquelles nous appliquons une force extérieure. Dans chaque cas, le nuage est constitué de 25000 particules.

La force extérieure génère une vitesse de glissement entre le nuage de particules et le fluide porteur. Cette vitesse est appelée vitesse limite de chute. C'est la différence entre la vitesse moyenne d'un nuage de particules et la vitesse moyenne du fluide porteur.

Cette vitesse produit l'effet de croisement de trajectoires, c'est-à-dire une modification de la perception de la turbulence par les particules.

Nous avons simulé la dispersion de particules de masse volumique $\rho_2/\rho_1=2000$ pour trois diamètres différents. Les paramètres et les résultats des simulations sont donnés dans les tableaux : 6.7 pour les particules de 45 μm , 6.8 pour les particules de 57 μm et 6.9 pour les particules de 90 μm .

Pour chaque type de particules nous avons effectué trois simulations :

- sans action d'une force extérieure,
- avec action de la force de gravité,
- en doublant la force de gravité.

Dans les cas où il y a croisement de trajectoires, nous avons inscrit dans les tableaux la valeur de chaque paramètre, dans les directions parallèle et perpendiculaires à la gravité.

Vérifions que les calculs respectent les deux hypothèses formulées dans l'extension de la théorie de Tchen (Cf. Chapitre 4.4) :

-le rapport L_2^{cr}/L_b est suffisamment petit pour que les statistiques Lagrangiennes ne soient pas affectées par les conditions de périodicité. A l'échelle du mouvement des particules, nous pouvons considérer que la turbulence est homogène stationnaire dans un domaine de dimension infinie.

-les diamètres des particules sont plus petits que l'échelle de Kolmogorov.

Ce critère est suffisant pour affirmer que les particules ne subissent pas un filtrage spatial des échelles énergétiques de la turbulence et pour que l'équation du mouvement des particules reste correcte.

Les deux hypothèses de l'extension de la théorie de Tchen étant respectées, nous pouvons analyser les résultats. Nous avons vu dans le chapitre 4.5, que

	particules de 45 microns				
N_p	25000				
gravité (m/s ²)	g=0	g=9.81		g=19.6	
direction		\perp	//	\perp	//
τ_{12}^F (s)	13.9 10 ⁻³	13.8 10 ⁻³		13.4 10 ⁻³	
R_e^P	0.884	1.01		1.28	
V_r	0.	0.134		0.26	
τ_1^i / τ_{12}^F	1.69	1.71		1.75	
caractéristiques du mouvement fluctuant des particules					
$\langle u''_2 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.052	0.048	0.051	0.043	0.052
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.052	0.048	0.051	0.043	0.052
τ_2^i (s)	43. 10 ⁻³	36. 10 ⁻³	37. 10 ⁻³	28. 10 ⁻³	30. 10 ⁻³
L_2^i (m)	9.80 10 ⁻³	7.9 10 ⁻³	8.4 10 ⁻³	5.8 10 ⁻³	6.8 10 ⁻³
L_2^{CF} (m)	0.	5.0 10 ⁻³		7.8 10 ⁻³	
caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules					
$\langle u''_1 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.080	0.079	0.081	0.0795	0.086
τ_{12}^i (s)	28.6 10 ⁻³	21.8 10 ⁻³	23.1 10 ⁻³	15.3 10 ⁻³	18.0 10 ⁻³
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	2.06	1.60	1.67	1.15	1.34
rapports d'échelles					
L_2^{CF} / L_b	0.0	0.04		0.061	
L_2^i / L_b	0.077	0.062	0.066	0.045	0.053
ξ_r	0.	0.46		0.89	
coefficient de dispersion					
D_2^i (m ² /s)	2.30 10 ⁻³	1.71 10 ⁻³	1.85 10 ⁻³	1.19 10 ⁻³	1.56 10 ⁻³
$\tau_2^i \langle u''_2 \rangle_2$ "	2.26 10 ⁻³	1.73 10 ⁻³	1.86 10 ⁻³	1.21 10 ⁻³	1.55 10 ⁻³
$\tau_{12}^i \langle u''_1 \rangle_2$ "	2.29 10 ⁻³	1.72 10 ⁻³	1.88 10 ⁻³	1.22 10 ⁻³	1.54 10 ⁻³

Tableau 6.7 : Paramètres et résultats de dispersion de particules de 45 μm avec effet de croisement de trajectoires dans une turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3). // , signifie la direction parallèle au croisement de trajectoires, et \perp , les directions perpendiculaires.

particules de 57 microns					
N_p	25000				
gravité (m/s ²)	g=0	g=9.81		g=19.6	
direction		_⊥_	//	_⊥_	//
τ_{12}^F (s)	21.6 10 ⁻³	21.1 10 ⁻³		20.3 10 ⁻³	
R_e^P	1.28	1.59		2.14	
V_r	0.	0.20		0.39	
τ_1^i / τ_{12}^F	1.09	1.12		1.16	
caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules					
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.043	0.0375	0.0435	0.030	0.0405
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.043	0.038	0.044	0.0295	0.041
τ_2^i (s)	49. 10 ⁻³	38. 5 10 ⁻³	39. 10 ⁻³	29. 10 ⁻³	34. 10 ⁻³
L_2^i (m)	10. 10 ⁻³	7.5 10 ⁻³	8.1 10 ⁻³	5.1 10 ⁻³	6.8 10 ⁻³
L_2^{CF} (m)	0.	7.8 10 ⁻³		13.5 10 ⁻³	
caractéristiques de la turbulence "vu" par les particules					
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.080	0.080	0.0855	0.082	0.0875
τ_{12}^i (s)	26.8 10 ⁻³	18.2 10 ⁻³	20.1 10 ⁻³	10.9 10 ⁻³	16.0 10 ⁻³
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	1.24	0.87	0.95	0. 53	0.79
rapports d'échelles					
L_2^{CF} / L_b	0.	0.061		0.10	
L_2^i / L_b	0.078	0.058	0.063	0.040	0.053
ξ_r	0.	0.70		1.36	
coefficient de dispersion					
D_2^i (m ² /s)	2.14 10 ⁻³	1.47 10 ⁻³	1.71 10 ⁻³	0.85 10 ⁻³	1.38 10 ⁻³
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	2.09 10 ⁻³	1.45 10 ⁻³	1.70 10 ⁻³	0.87 10 ⁻³	1.37 10 ⁻³
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	2.14 10 ⁻³	1.46 10 ⁻³	1.72 10 ⁻³	0.88 10 ⁻³	1.40 10 ⁻³

Tableau 6.8 : Paramètres et résultats de dispersion de particules de 57 μm avec effet de croisement de trajectoires dans une turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3). // , signifie la direction parallèle au croisement de trajectoires, et \perp , les directions perpendiculaires.

	particules de 90 microns				
N_p	25000				
gravité (m/s ²)	g=0	g=9.81		g=19.6	
direction		⊥	//	⊥	//
τ_{12}^F (s)	49.6 10 ⁻³	45.9 10 ⁻³		42.2 10 ⁻³	
R_e^P	2.45	3.86		5.78	
V_r	0.	0.445		0.821	
τ_1^i / τ_{12}^F	0.474	0.512		0.557	
caractéristiques du mouvement fluctuant des particules					
$\langle u''_2 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.028	0.0155	0.0222	0.0098	0.0162
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.028	0.0165	0.0228	0.0102	0.0167
τ_2^i (s)	70. 10 ⁻³	51.5 10 ⁻³	55. 10 ⁻³	48.3 10 ⁻³	49.5 10 ⁻³
L_2^i (m)	12. 10 ⁻³	6.4 10 ⁻³	8.2 10 ⁻³	4.8 10 ⁻³	6.3 10 ⁻³
L_2^{CT} (m)	0.	24.4 10 ⁻³		40.6 10 ⁻³	
caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules					
$\langle u''_1 \rangle_2$ (m ² /s ²)	0.083	0.085	0.087	0.085	0.085
τ_{12}^i (s)	25.6 10 ⁻³	8.95 10 ⁻³	14.6 10 ⁻³	5.25 10 ⁻³	9.76 10 ⁻³
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	0.515	0.195	0.318	0.124	0.024
rapports d'échelles					
L_2^{CT} / L_b	0.	0.19		0.32	
L_2^i / L_b	0.094	0.050	0.064	0.037	0.059
ξ_r	0.	1.54		2.84	
coefficient de dispersion					
D_2^i (m ² /s)	2.13 10 ⁻³	0.76 10 ⁻³	1.22 10 ⁻³	0.45 10 ⁻³	0.77 10 ⁻³
$\tau_2^i \langle u''_2 \rangle_2$ "	2.02 10 ⁻³	0.80 10 ⁻³	1.22 10 ⁻³	0.4710 ⁻³	0.80 10 ⁻³
$\tau_{12}^i \langle u''_1 \rangle_2$ "	2.11 10 ⁻³	0.76 10 ⁻³	1.27 10 ⁻³	0.45 10 ⁻³	0.83 10 ⁻³

Tableau 6.9 : Paramètres et résultats de dispersion de particules de 90 µm avec effet de croisement de trajectoires dans une turbulence homogène isotrope stationnaire (THI3). // , signifie la direction parallèle au croisement de trajectoires, et ⊥, les directions perpendiculaires.

l'effet de croisement de trajectoires est un phénomène physique particulier pour lequel nous savons modéliser la turbulence du fluide "vu" par les particules et notamment le temps d'interaction fluide-particules.

6.5.1 temps d'interaction "turbulence du fluide-particules"

D'après le chapitre 4.5 nous savons que, si l'on connaît le rapport β de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne, nous pouvons calculer le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules". Dans le chapitre 3, les simulations de diffusion de particules fluides nous ont permis de calculer ce rapport. Dans les champs turbulents de type TH13, nous avons obtenu :

$$\beta = \frac{\tau_1^t}{T^e} = 0.92$$

Dans le cas où le mouvement des particules est dominé par le croisement de trajectoires :

$$\xi_r = \frac{V_r}{\sqrt{\langle u''_1 \rangle_1}} \gg 1$$

le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" peut être calculé rigoureusement. Dans les directions parallèle et perpendiculaires au croisement de trajectoires, ils valent :

$$\tau_{12,t}^t = \frac{T^e}{\xi_r} \quad \tau_{12,j}^t = \frac{T^e}{2\xi_r},$$

Par contre, les lois de raccordement utilisées pour relier les cas asymptotiques, dispersion en l'absence de croisement de trajectoires et dispersion dominée par l'effet de croisement de trajectoires, ne peuvent être déterminées rigoureusement.

Nous proposons ici de tester deux lois de raccordement. La première est utilisée dans la modélisation diphasique Lagrangienne qui s'appuie sur des équations de type Langevin (raccord de type Langevin). Dans les directions parallèle et perpendiculaires au croisement de trajectoires, elles s'écrivent :

$$\tau_{12,t}^t(\xi_r) = \tau_{12}^t(0) \frac{1}{1 + \beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^t(0)}{\tau_1^t} \right)} \quad \tau_{12,j}^t(\xi_r) = \tau_{12}^t(0) \frac{1}{1 + 2\beta \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^t(0)}{\tau_1^t} \right)}$$

La deuxième loi de raccordement est une loi de type Csanady, généralisée pour s'intégrer dans l'extension de la théorie de Tchen (raccord de type

Csanady). Dans les directions parallèle et perpendiculaires au croisement de trajectoires, elles s'écrivent :

$$\tau_{12,i}^i(\xi_r) = \tau_{12}^i(0) \left(1 + \beta^2 \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i(0)}{\tau_1^i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \tau_{12,j}^i(\xi_r) = \tau_{12}^i(0) \left(1 + 4\beta^2 \left(\xi_r \frac{\tau_{12}^i(0)}{\tau_1^i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Sur la figure 6.5.1 nous avons comparé les résultats des simulations aux expressions théoriques rappelées ci-dessus, dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.

Nous constatons qu'aucune des deux lois de raccordement ne donne pleinement satisfaction. La loi de raccord de type Langevin a une forme qui se rapproche le plus des résultats numériques, mais elle sous-estime beaucoup la valeur du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" (près de la moitié). L'expression de type Csanady a une forme plus éloignée de l'allure des résultats numériques, mais les valeurs obtenues sont en moyenne plus proches des résultats des simulations.

Remarquons que, dans nos calculs, le paramètre de croisement de trajectoires maximum simulé est $\xi_r=3$. Il n'est donc jamais assez grand pour permettre de retrouver la valeur limite du mouvement dominé par le croisement de trajectoires.

Sur la figure 6.5.2, nous avons comparé les résultats des simulations aux expressions théoriques dans la direction perpendiculaire au croisement de trajectoires.

Nous observons les mêmes tendances que celles observées dans la direction parallèle. Le raccord de type Csanady donne de meilleurs résultats.

Conformément aux prédictions théoriques, le temps d'interaction "particules-fluctuations de la vitesse du fluide dans la direction perpendiculaire au croisement de trajectoires" diminue beaucoup plus rapidement que le temps d'interaction "particules-fluctuations de la vitesse du fluide dans la direction parallèle au croisement de trajectoires".

Dans le tableau 6.9, nous notons que le rapport entre l'échelle temporelle dans les directions perpendiculaires et de l'échelle temporelle dans la direction parallèle approche la valeur théorique 2 dans le cas où le paramètre de croisement de trajectoires est important.

Sur les figures 6.5.3 et 6.5.4, nous avons comparé les résultats des simulations avec les expressions utilisées classiquement dans le modèle Eulérien à deux

fluides. Le temps d'interaction "particules-turbulence du fluide" est calculé à l'aide de l'expression de Csanady.

$$\tau_{12}^i(\xi_r) = \tau_1^i \frac{1}{\sqrt{1 + C_\beta \xi_r^2}} \quad (5.3.8)$$

La valeur du coefficient C_β utilisée a été déterminée à partir d'une analyse des résultats expérimentaux de Wells et Stock (1983).

$C_\beta=0.45$, dans la direction parallèle au croisement de trajectoires,

$C_\beta=1.80$, dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.

Nous observons, sur ces figures, le bon accord entre les résultats des simulations et les prédictions utilisées dans la modélisation Eulérienne.

Remarque : si dans la loi de raccordement de type Langevin, nous utilisons un coefficient C_β deux fois plus petit que le rapport β de l'échelle intégrale temporelle Lagrangienne sur l'échelle intégrale temporelle Eulérienne, dans la gamme simulée, les résultats passent par la courbe théorique. Mais dans ce cas, cette expression ne concorde plus avec la valeur asymptotique lorsque le mouvement des particules est dominé par le croisement de trajectoires.

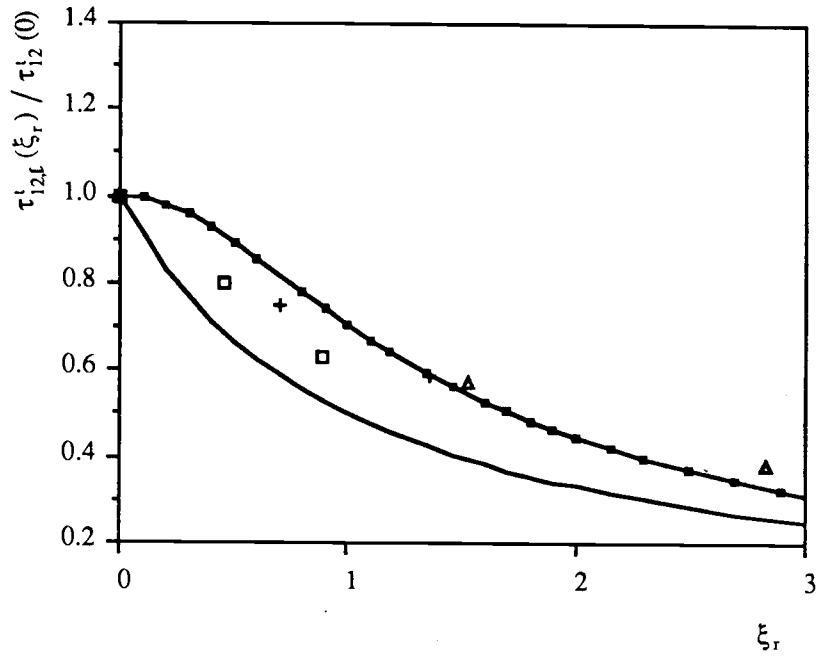


Figure 6.5.1 : Temps d'interaction fluide-particule calculé dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 —, raccord de type Langevin ($\beta=0.92$) ;
 —■, raccord de type Csanady ($\beta=0.92$).

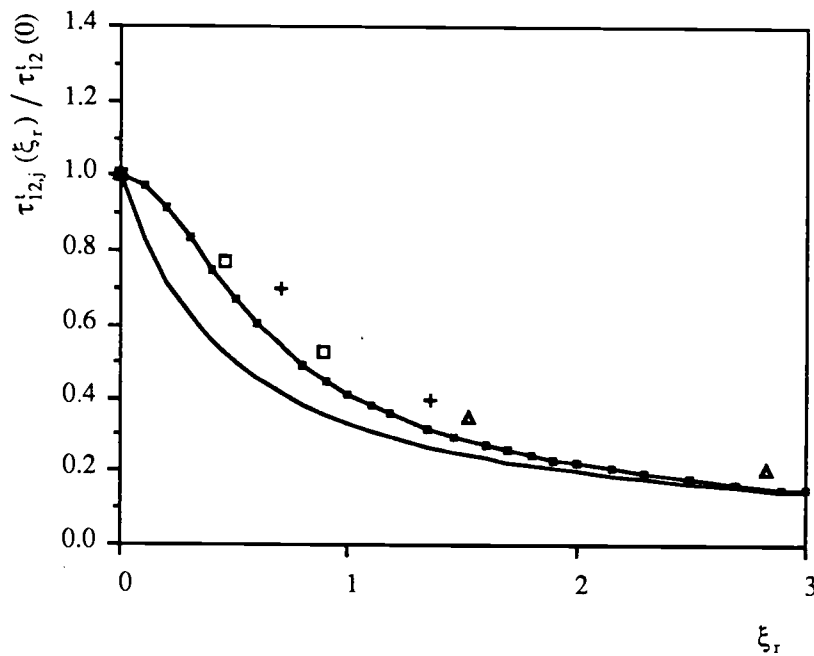


Figure 6.5.2 : Temps d'interaction fluide-particule calculé dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 —, raccord de type Langevin ($\beta=0.92$) ;
 —■, raccord de type Csanady ($\beta=0.92$).

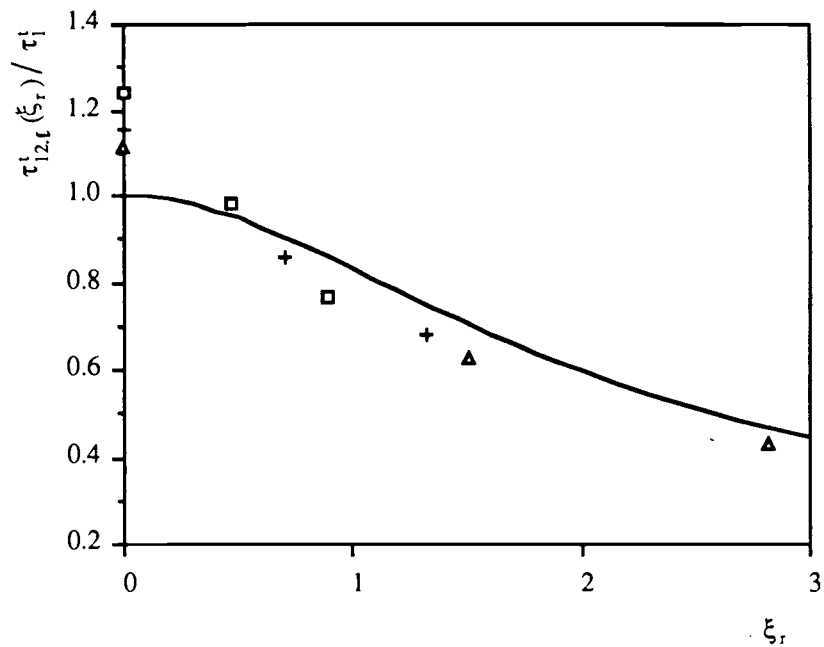


Figure 6.5.3 : Temps d'interaction fluide-particule calculé dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 \square , $+$, \triangle sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μm , 57 μm et 90 μm .
 — expression de Csanady utilisée classiquement dans la modélisation Eulérienne (Eq. 5.3.8) avec $C_\beta=0.45$.

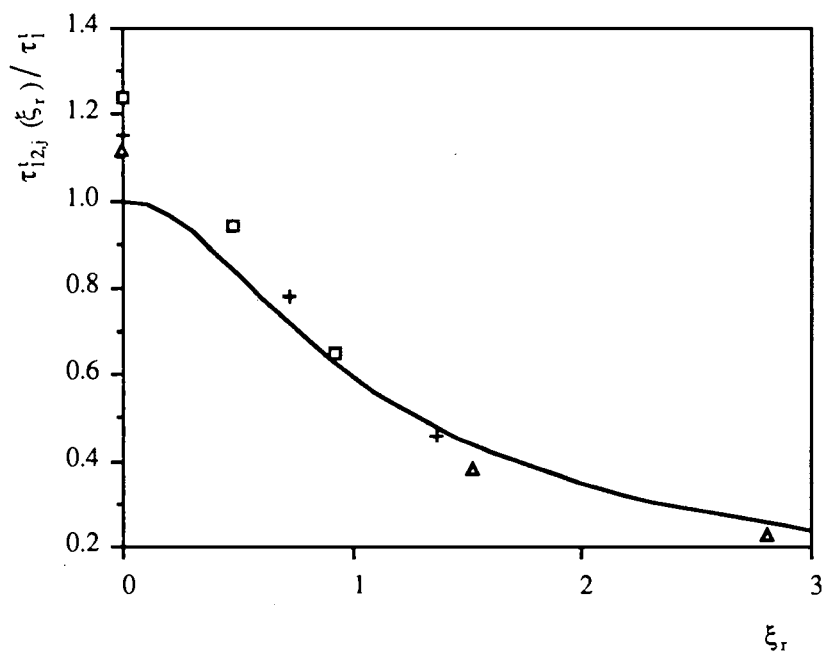


Figure 6.5.4: Temps d'interaction fluide-particule calculé dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 \square , $+$, \triangle sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μm , 57 μm et 90 μm .
 — expression de Csanady utilisée classiquement dans la modélisation Eulérienne (Eq. 5.3.8) avec $C_\beta=1.8$.

6.5.2 Variance du mouvement fluctuant des particules et covariance du mouvement corrélé

Dans l'extension de la théorie de Tchen (Cf. chapitre 4.4) et dans le cas particulier de l'effet de croisement de trajectoires (Cf. chapitre 4.5), nous pouvons calculer l'énergie du mouvement fluctuant des particules et la covariance du mouvement corrélé fluide-particules.

En effet, à condition que les composantes normales du tenseur des corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules soient de forme exponentielle, la connaissance du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" permet de calculer l'énergie du mouvement fluctuant des particules, et la covariance du mouvement corrélé fluide-particules à l'aide des expressions 4.5.20 et 4.5.21.

Sur les figures 6.5.5 et 6.5.6 sont représentées les corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules de $57 \mu\text{m}$, respectivement dans les directions parallèle et perpendiculaires au croisement de trajectoires. Sur les figures 6.5.7 et 6.5.8 sont tracées les corrélations des particules de $90 \mu\text{m}$. Nous constatons que, même lorsque les particules se déplacent avec une vitesse relative moyenne par rapport au fluide, ces corrélations restent de forme exponentielle, que ce soit dans la direction parallèle ou dans celles perpendiculaires au croisement de trajectoires. Nous remarquons également que la vitesse du fluide "vu" par les particules se décorrèle plus rapidement dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires que dans la direction parallèle.

Puisque les corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules restent de forme exponentielle dans chaque direction, nous pouvons observer un bon accord entre les résultats des simulations et les prédictions théoriques obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen, que ce soit pour la variance du mouvement fluctuant des particules, figures 6.5.9 et 6.5.10 ou pour la covariance du mouvement corrélé fluctuant fluide-particules, figures 6.5.11 et 6.5.12.

Nous constatons sur ces figures une diminution de l'énergie du mouvement fluctuant des particules et de la covariance du mouvement corrélé fluide-particules. Cette diminution est plus importante dans les directions

perpendiculaires que dans la direction parallèle au croisement de trajectoires. Elle peut être très importante. En effet, dans le tableau 6.9, dans le cas où le croisement de trajectoires est le plus fort, nous notons que la variance du mouvement fluctuant des particules dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires est trois fois plus faible que dans le cas sans croisement de trajectoires.

Cet effet du croisement de trajectoires, ne peut dans aucun cas être pris en compte dans la théorie standard de Tchen-Hinze. Par contre, nous constatons qu'il s'intègre parfaitement dans le cadre de l'extension de la théorie de Tchen.

Remarque : expérimentalement, en turbulence décroissante, Wells et Stock n'ont pas mesuré de diminution de la variance du mouvement fluctuant.

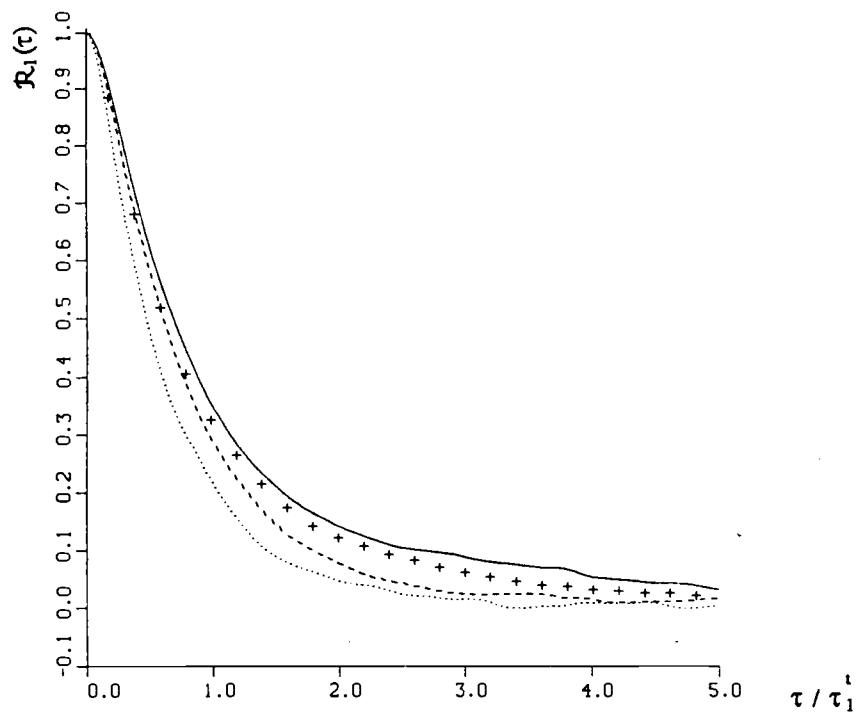


Figure 6.5.5 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules de $57 \mu\text{m}$ dans la direction parallèle au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 0.72$; ····, $\xi_r = 1.4$; +, particules fluides.

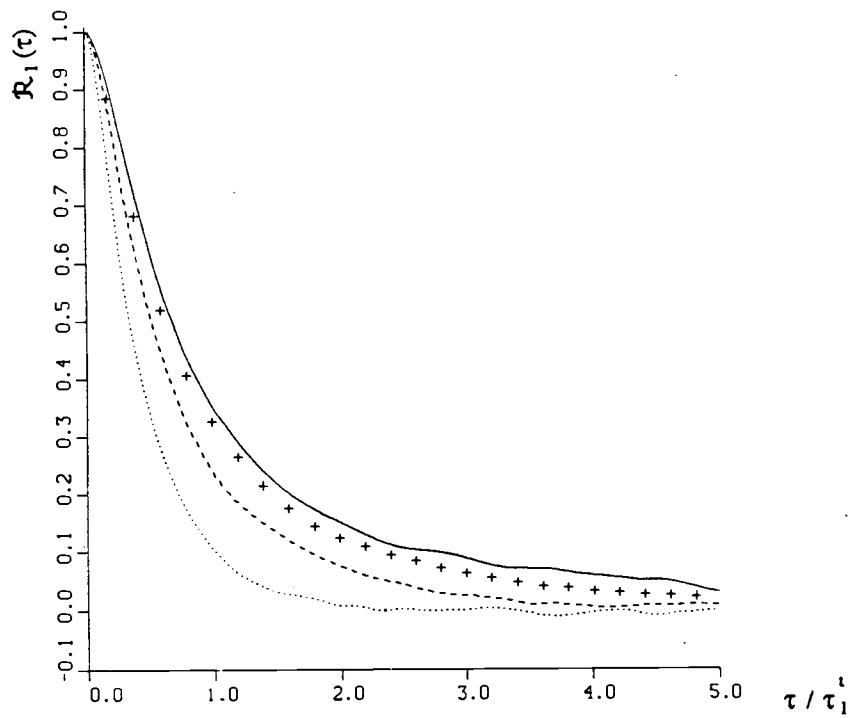


Figure 6.5.6 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules de $57 \mu\text{m}$ dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 0.72$; ····, $\xi_r = 1.4$; +, particules fluides.

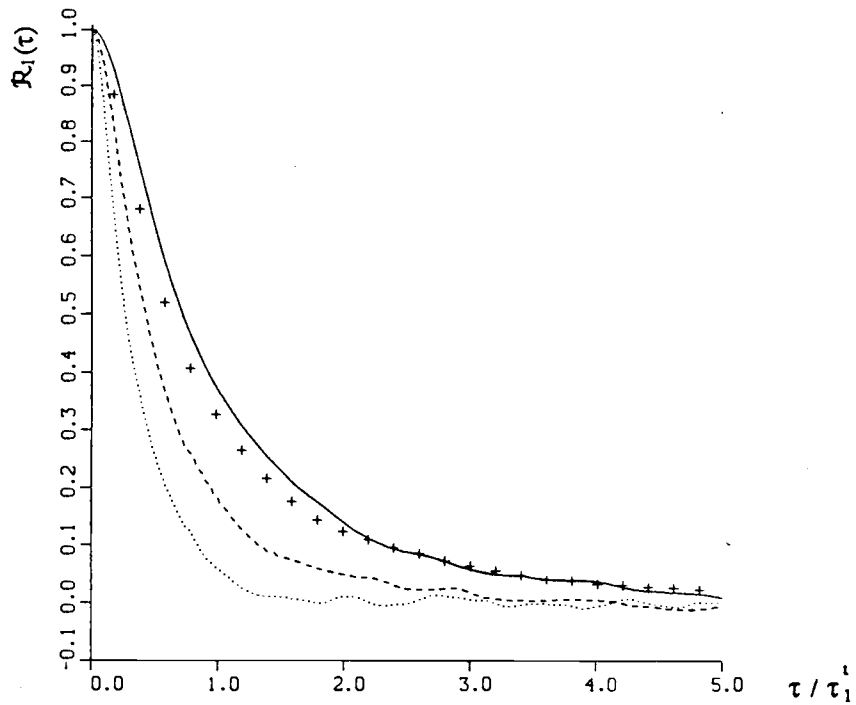


Figure 6.5.7 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules de $90 \mu\text{m}$ dans la direction parallèle au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 1.53$; ····, $\xi_r = 2.81$; + , particules fluides.

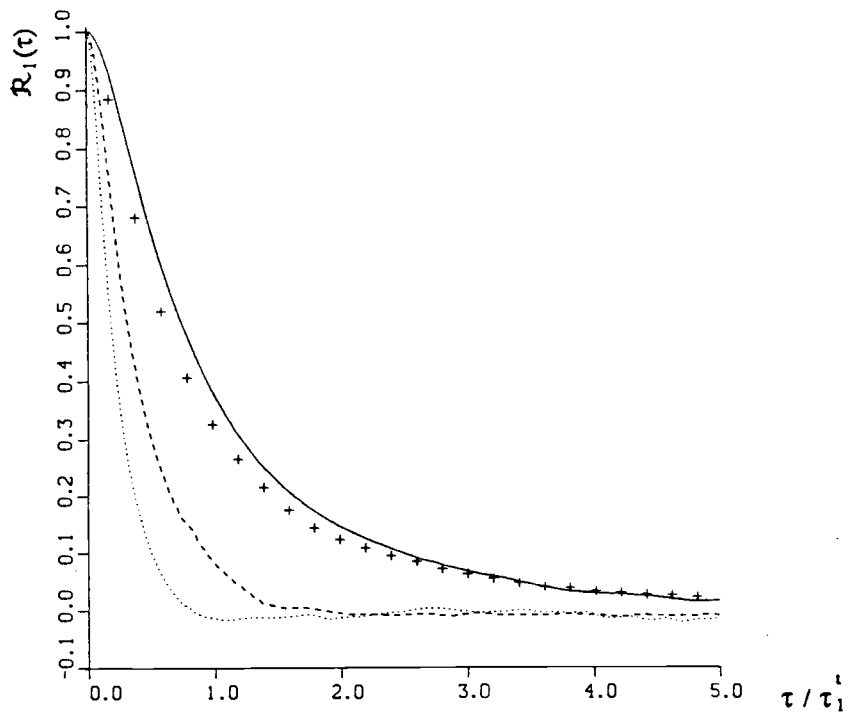


Figure 6.5.8 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par particules de $90 \mu\text{m}$ dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 1.53$; ····, $\xi_r = 2.81$; + , particules fluides.

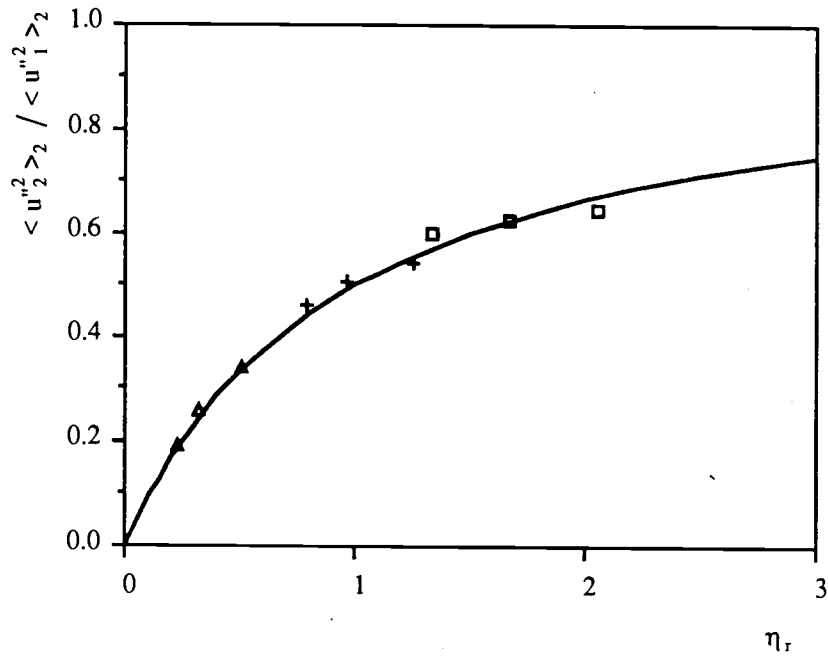


Figure 6.5.9 : Variance du mouvement fluctuant des particules calculée dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 — calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.9).
 □, +, Δ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μm, 57 μm et 90 μm.

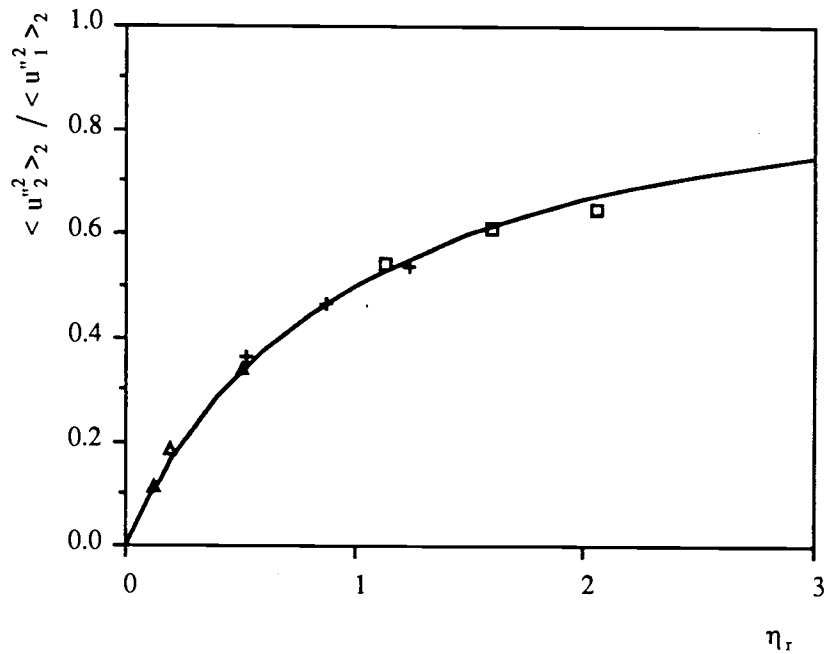


Figure 6.5.10 : Variance du mouvement fluctuant des particules calculée dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 — calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.9).
 □, +, Δ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μm, 57 μm et 90 μm.

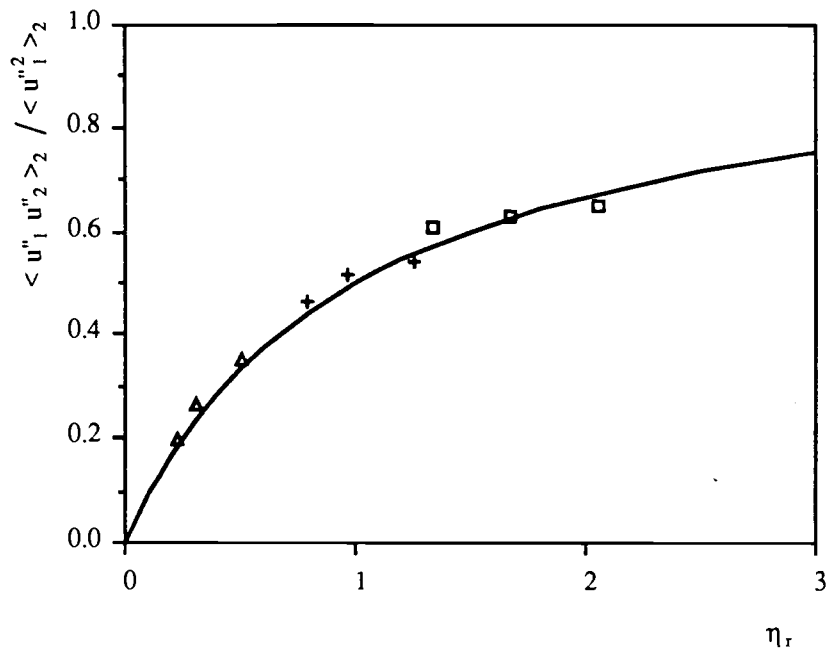


Figure 6.5.11 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules calculée dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 —, calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.10).
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45μm, 57μm et 90 μm.

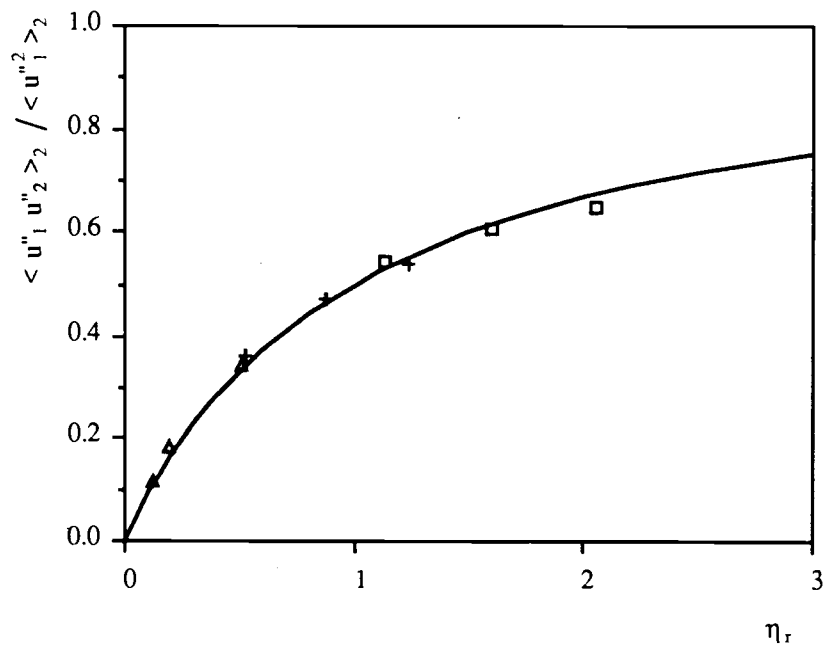


Figure 6.5.12 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules calculée dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 —, calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.10).
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45μm, 57μm et 90 μm.

6.5.3 Calcul du coefficient de dispersion

Dans l'extension de la théorie de Tchen, le coefficient de dispersion des particules est égal au produit de la variance du fluide " v_u " par les particules et du temps d'interaction "turbulence-particules" (Eq. 4.4.8). Dans les tableaux 6.7, 6.8 et 6.9, nous pouvons observer le bon accord entre le coefficient de dispersion calculé dans le cadre de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) et celui estimé à travers l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.8).

Sur les figures 6.5.13 et 6.5.14, nous représentons les résultats des simulations adimensionnés par la valeur du coefficient de dispersion en l'absence de croisement de trajectoires. Ces résultats sont comparés aux expressions théoriques (Eq. 4.5.18 et Eq. 4.5.19), utilisant la valeur du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" données dans la partie 6.5.1.

Puisque la valeur du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" n'est pas parfaitement prédite, que ce soit en utilisant une loi de raccord de type Csanady, ou en utilisant une loi de type Langevin, le coefficient de dispersion n'est pas parfaitement prédit. Nous pouvons formuler les mêmes remarques que celles faites sur l'expression du temps d'interaction.

-La loi de raccord de type Langevin a une forme qui se rapproche le plus des résultats expérimentaux ; par contre, la valeur du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" est beaucoup trop faible, près de la moitié lorsque $\xi_r=3$.

-L'expression de type Csanady a une forme plus éloignée de l'allure des résultats expérimentaux, mais les valeurs obtenues sont en moyenne plus proches de celles simulées.

Sur la figure 6.5.14, nous observons que le coefficient de dispersion diminue beaucoup plus vite dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires que dans la direction parallèle. Dans le tableau 6.9, nous notons que conformément à la théorie, dans le cas où le paramètre de croisement de trajectoires est important (lorsque $\xi_r=3$), le coefficient de dispersion dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires est deux fois plus faible que dans la direction parallèle.

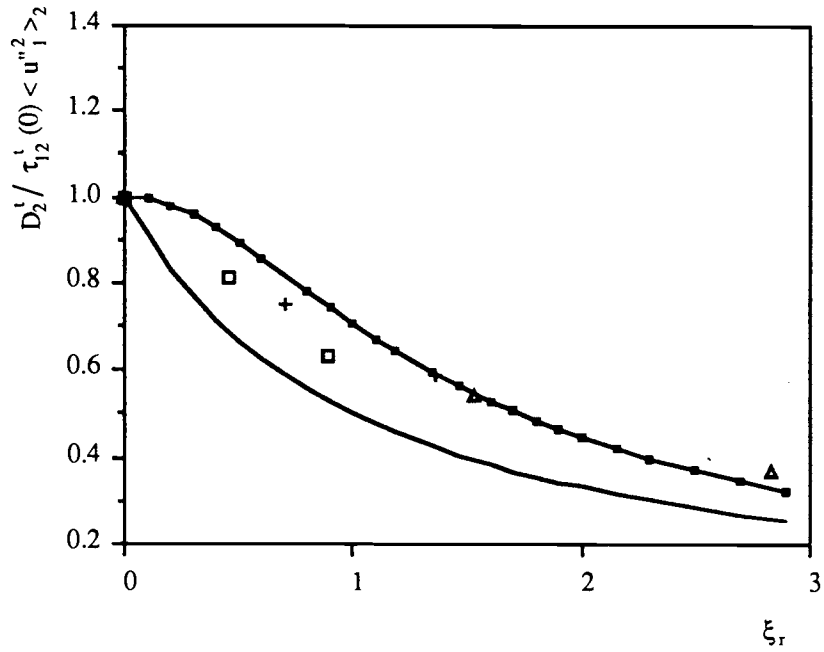


Figure 6.5.13 : Coefficient de dispersion des particules calculé dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 — raccord de type Langevin ($\beta=0.92$) ;
 —●—, raccord de type Csanady ($\beta=0.92$).

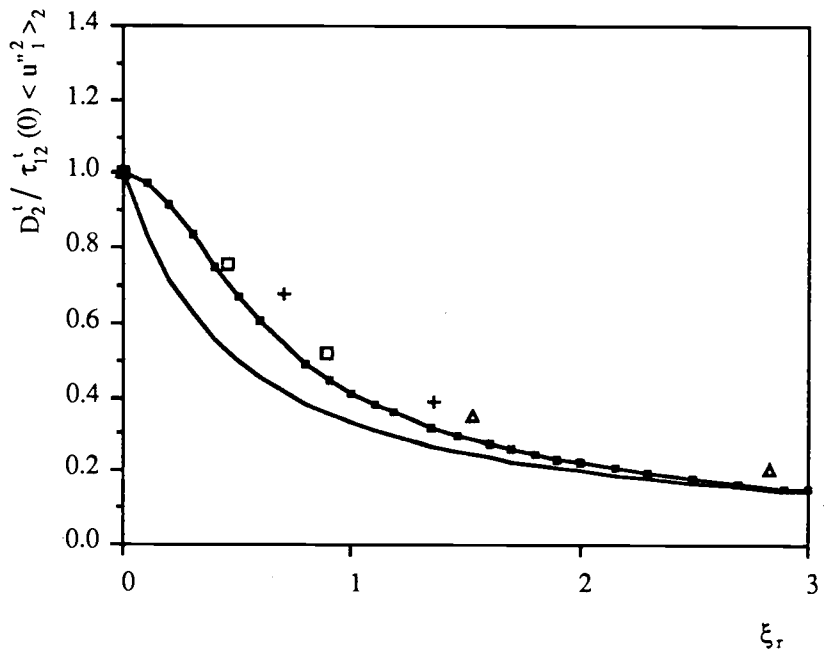


Figure 6.5.14 : Coefficient de dispersion des particules calculé dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 — raccord de type Langevin ($\beta=0.92$) ;
 —●—, raccord de type Csanady ($\beta=0.92$).

6.5.4 Coefficient de dispersion du modèle Eulérien

Sur les figures 6.5.15 et 6.5.16, nous avons comparé le coefficient de dispersion calculé directement à partir de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) et le coefficient de dispersion efficace du modèle Eulérien (Eq. 5.1.24). Nous observons que la valeur du coefficient efficace de dispersion du modèle Eulérien est une bonne approximation du coefficient de dispersion.

A condition de connaître les caractéristiques du fluide "vu" par les particules, le modèle Eulérien permet donc d'obtenir une très bonne valeur du coefficient de dispersion.

Sur ces courbes, nous avons également inscrit l'expression de Csanady utilisée classiquement dans le modèle Eulérien à deux fluides pour estimer le coefficient de dispersion. Nous observons un bon accord avec les résultats de simulations.

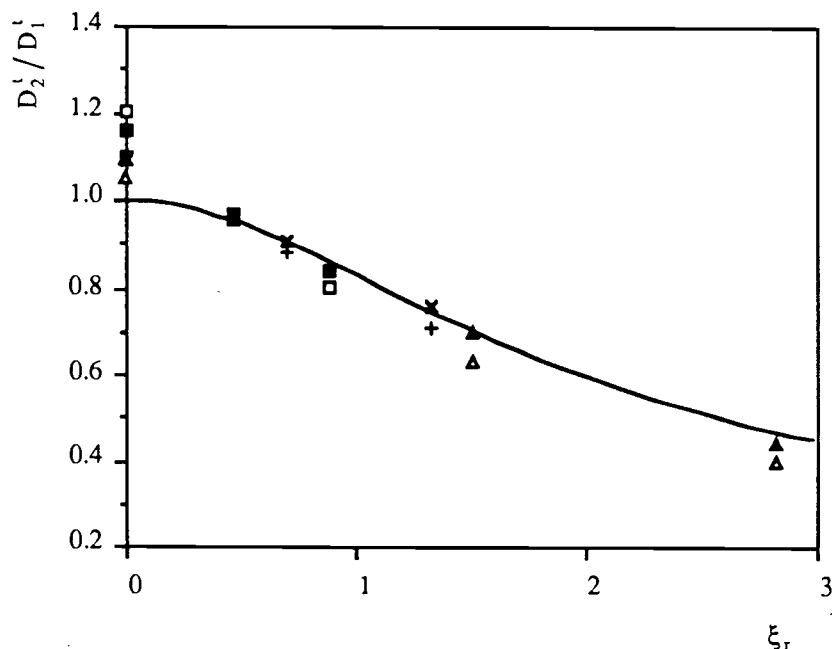


Figure 6.5.15 : Coefficient de dispersion des particules calculé dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 ■, ×, ▲ sont les résultats estimés à partir de l'équation 5.1.24 pour des particules de diamètres : 45 μ m, 57 μ m et 90 μ m.
 — expression de Csanady utilisée classiquement dans la modélisation Eulérienne (Eq 5.3.8) $C_B = 0.45$:

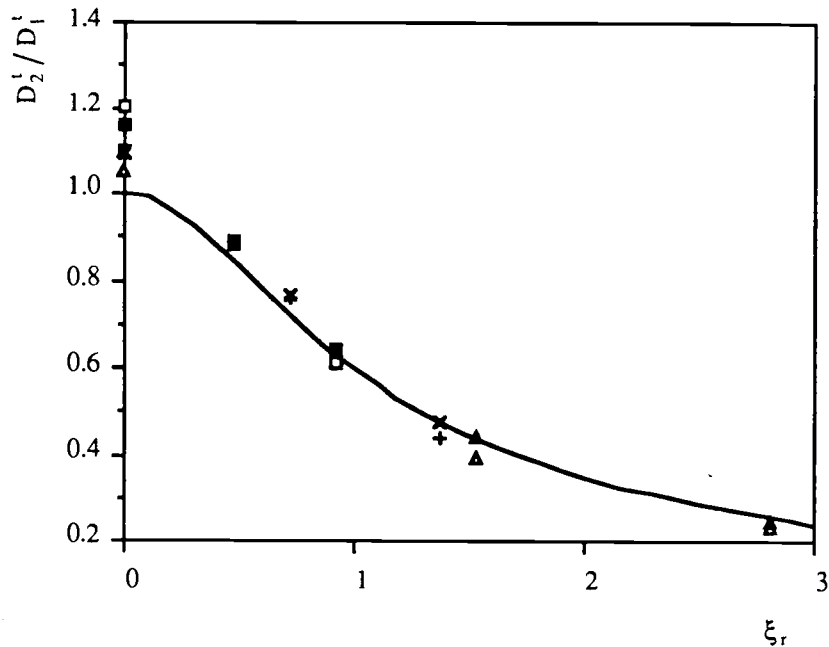


Figure 6.5.16 : Coefficient de dispersion des particules calculé dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires.
 □, +, ▲ sont les résultats directs des simulations pour des particules de diamètres : 45 μm , 57 μm et 90 μm .
 ■, ×, ▲ sont les résultats estimés à partir de l'équation 5.1.24 pour des particules de diamètres : 45 μm , 57 μm et 90 μm .
 — expression de Csanady utilisée classiquement dans la modélisation Eulérienne (Eq 5.3.8) $C_\beta = 1.8$:

6.5.5 Corrélations Lagrangiennes de la vitesse des particules

A titre indicatif, nous présentons sur les figures 6.5.17 et 6.5.18 les corrélations Lagrangiennes de la vitesse des particules de 57 μm , respectivement dans les directions parallèle et perpendiculaires au croisement de trajectoires. Sur les figures 6.5.19 et 6.5.20 sont tracées les corrélations des particules de 90 μm .

Nous constatons que sous l'effet du croisement de trajectoires, les vitesses fluctuantes des particules se décorrèlent plus rapidement. Il est intéressant de constater que l'effet d'anisotropie est relativement faible pour cette variable.

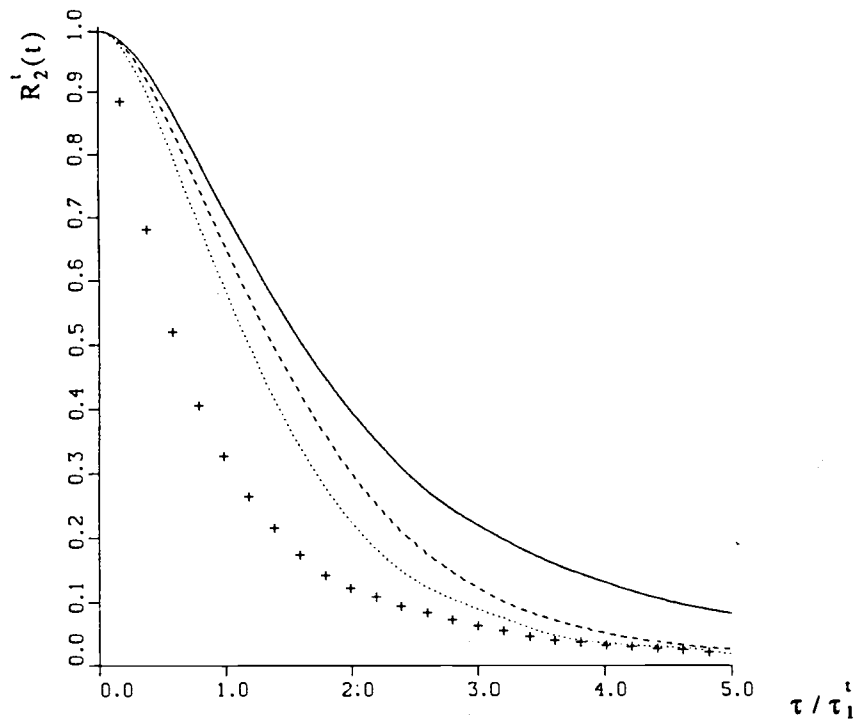


Figure 6.5.17 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules de $57 \mu\text{m}$ dans la direction parallèle au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 0.72$; , $\xi_r = 1.4$; + , particules fluides.

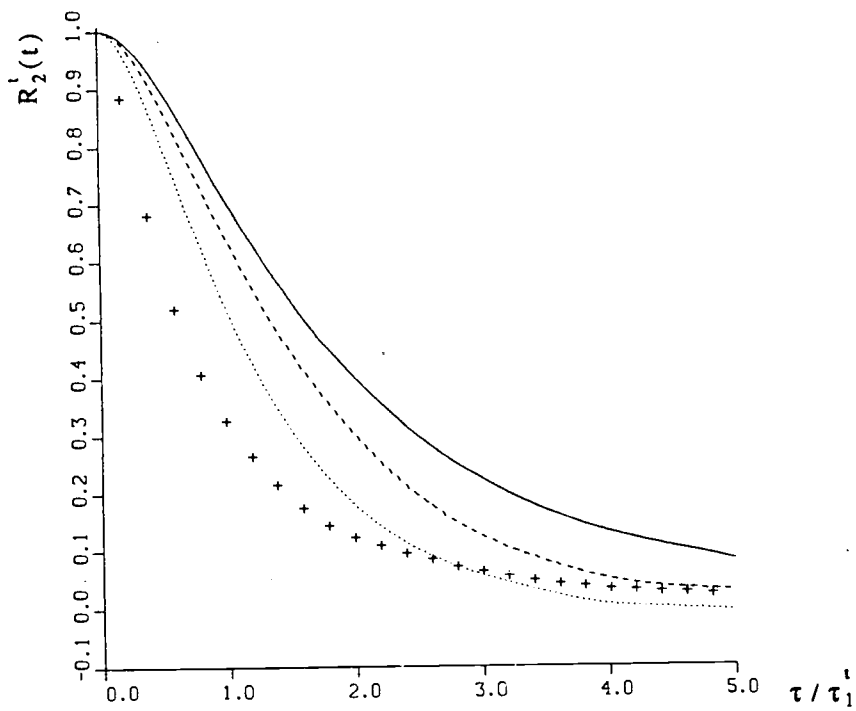


Figure 6.5.18 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules de $57 \mu\text{m}$ dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 0.72$; , $\xi_r = 1.4$; + , particules fluides.

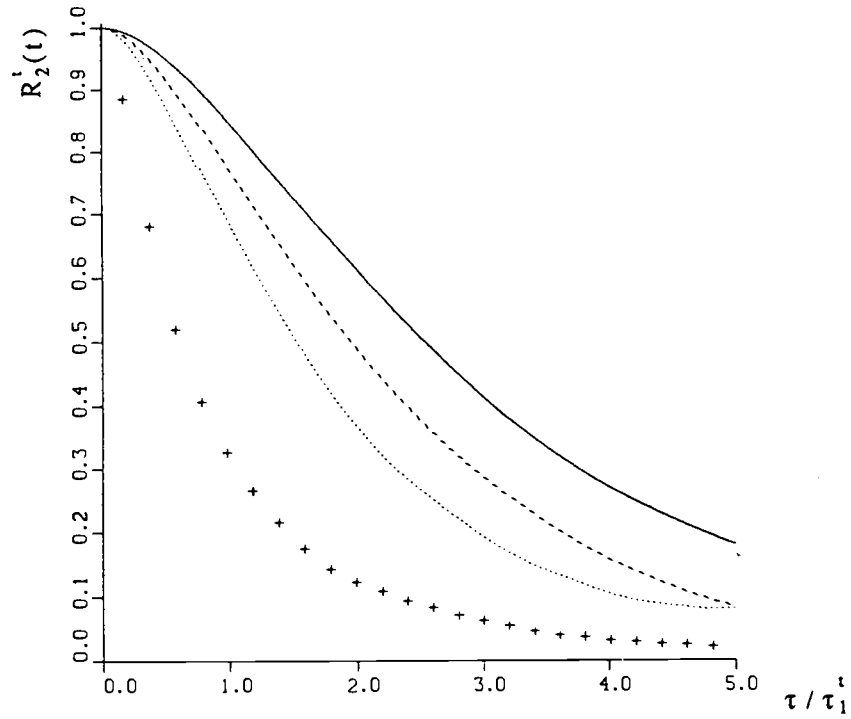


Figure 6.5.19 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules de $90 \mu\text{m}$ dans la direction parallèle au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 1.53$; , $\xi_r = 2.81$; + , particules fluides.

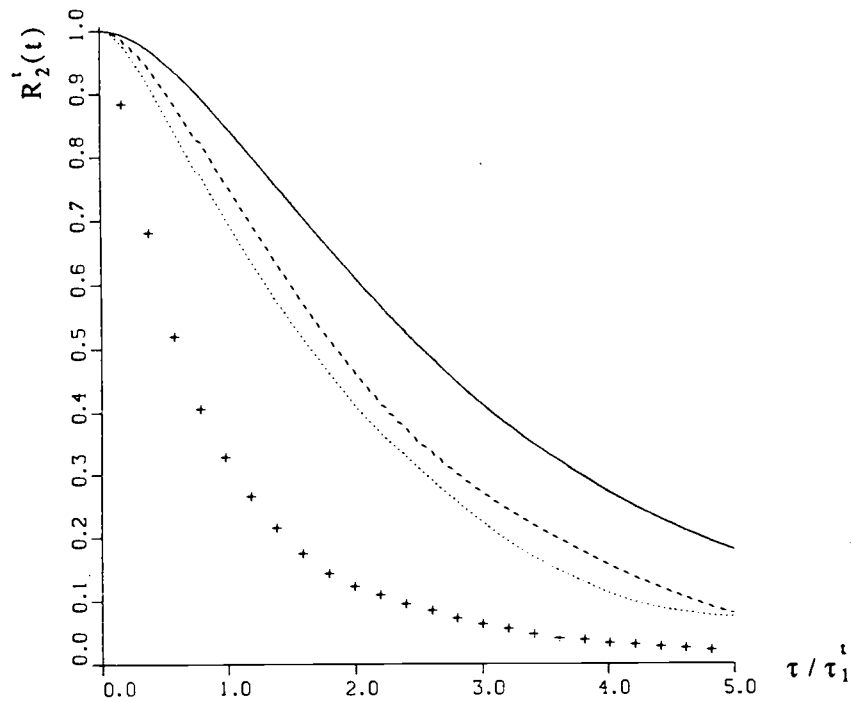


Figure 6.5.20 : Corrélations Lagrangiennes des vitesses des particules de $90 \mu\text{m}$ dans les directions perpendiculaires au croisement de trajectoires :
 —, $\xi_r = 0$. ; ---, $\xi_r = 1.53$; , $\xi_r = 2.81$; + , particules fluides.

6.6 Dispersion d'un nuage de particules soumis à un gradient de vitesse moyenne non nul

6.6.1 Présentation du calcul

Dans cette partie, nous cherchons à calculer la viscosité turbulente d'un nuage de particules placées dans une turbulence homogène isotrope stationnaire.

Pour créer des contraintes cinétiques turbulentes de cisaillement, indispensables pour calculer une viscosité turbulente, nous imposons un gradient de vitesse moyenne au mouvement des particules en appliquant un champ de force extérieure. Afin que le gradient soit constant, le champ de force varie linéairement.

Nous restreignons ici notre étude aux particules denses, $\rho_2/\rho_1 = 2000$. Dans ce cas, la contribution des forces instationnaires est négligeable devant la force de traînée.

Lorsque le mouvement des particules atteint un état stationnaire, et si l'on applique les hypothèses ci-dessus, l'équation de la quantité de mouvement des particules dans le modèle Eulérien (Eq. 5.1.12) est réduite à :

$$\rho_1 F_D (U_{2,1} - U_{1,1}) = \rho_2 A \left(x_3 - \frac{L_b}{2} \right)$$

Dans cette expression, nous considérons un champ de force, d'intensité A , dirigé dans la direction 1, et variant linéairement dans la direction 3.

Puisque la vitesse moyenne du fluide est nulle, nous obtenons :

$$U_{2,1} = \tau_{1,2}^F A \left(x_3 - \frac{L_b}{2} \right) = S \left(x_3 - \frac{L_b}{2} \right)$$

dans laquelle S est le gradient de la vitesse moyenne des particules.

Dans la modélisation Eulérienne, les contraintes cinétiques turbulentes de cisaillement peuvent être reliées au gradient de vitesse moyenne à l'aide d'un coefficient de viscosité turbulente (Eq. 5.3.1 et 5.3.4),

$$\langle u''_{2,1} u''_{2,3} \rangle_2 = -v_2 \frac{\partial U_{2,1}}{\partial x_3}$$

$$\langle u''_{2,1} u''_{1,3} \rangle_2 = -v_{12} \frac{\partial U_{2,1}}{\partial x_3}$$

Pour ces simulations, nous nous sommes heurtés à une difficulté. En effet, afin que les phénomènes soient bien découplés, les calculs doivent respecter des critères qui sont malheureusement antagonistes :

- la vitesse moyenne maximum des particules ne doit pas être trop grande afin que l'effet de croisement de trajectoires ne soit pas trop fort ;
- le gradient de la vitesse moyenne doit être suffisamment grand pour que le niveau des contraintes cinétiques de cisaillement soit d'un ordre de grandeur supérieur au bruit numérique.

Finalement, nous avons choisi un gradient, $S=-5$.

Dans ce cas, la vitesse maximum est égale, sur le bord du domaine, à $U_{max}=0.5$ m/s et l'effet de croisement de trajectoires maximum n'est pas trop important ($\xi_T=1.7$ dans un champ de type TH12).

D'autre part, si l'on suppose que la viscosité turbulente est du même ordre de grandeur que la dispersion turbulente, nous pouvons estimer que le niveau des contraintes cinétiques turbulentes de cisaillement vaut environ 6% du niveau d'énergie. Cela nous permet d'obtenir un niveau de contraintes de cisaillement d'un ordre légèrement supérieur au bruit numérique (Tableaux, 1.2 et 3.1.a).

Dans le chapitre 1, nous avons vu que les champs turbulents de type TH12 avaient à la fois des caractéristiques turbulentes de bonne qualité et un niveau de contraintes de cisaillement parasites relativement faible. Nous avons donc effectué les simulations de dispersion, dans des champs turbulents de type TH12. Chaque nuage de particules est constitué de 100000 particules. Les paramètres et les résultats des simulations sont donnés dans les tableaux : 6.10 pour les particules de diamètre 30 μm et 45 μm , 6.11 pour les particules de 60 μm et 90 μm et 6.12 pour les particules de 120 μm .

d_p	30 μm		45 μm	
direction	\perp	//	\perp	//
τ_{12}^F (s)	6.49 10^{-3}		13.9 10^{-3}	
R_e^P	0.437		0.887	
S	4.96		4.97	
τ_1^i / τ_{12}^F	4.1		1.90	
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.057	0.060	0.043	0.049
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.057	0.060	0.043	0.049
$\langle u''_{2,1} u''_{2,3} \rangle_2$	3.5 10^{-3}		3.9 10^{-3}	
$\langle u''_{1,3} u''_{2,1} \rangle_2$	3.3 10^{-3}		3.2 10^{-3}	
$\langle u''_{1,1} u''_{2,3} \rangle_2$	2.3 10^{-3}		2.3 10^{-3}	
τ_2^i	26.4 10^{-3}	x	35.4 10^{-3}	x
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.073	0.074	0.072	0.0754
$\langle u''_{1,1} u''_{1,3} \rangle_2$	2.4 10^{-3}		2.3 10^{-3}	
τ_{12}^i (s)	19.2 10^{-3}	25.2 10^{-3}	20.1 10^{-3}	23.6 10^{-3}
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	2.96	3.88	1.44	1.70
D_2^i (m^2/s)	1.40 10^{-3}	x	1.45 10^{-3}	x
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	1.50 10^{-3}	x	1.52 10^{-3}	x
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	1.43 10^{-3}	1.86 10^{-3}	1.43 10^{-3}	1.76 10^{-3}

Tableau 6.10 : Paramètres et résultats de dispersion des nuages de particules de 30 et 45 μm , avec un gradient de vitesse moyenne constant dans la direction 3. // , signifie la direction à la vitesse de glissement et \perp , la direction perpendiculaire.

d_p	60 μm		90 μm	
direction	\perp	//	\perp	//
τ_{12}^F (s)	23.7 10^{-3}		49.7 10^{-3}	
R_e^P	1.38		2.40	
S	4.96		4.97	
τ_1^i / τ_{12}^F	1.12		0.53	
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.034	0.040	0.022	0.027
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.034	0.040	0.022	0.027
$\langle u''_{2,1} u''_{2,3} \rangle_2$	3.9 10^{-3}		3.8 10^{-3}	
$\langle u''_{1,3} u''_{2,1} \rangle_2$	2.5 10^{-3}		2.2 10^{-3}	
$\langle u''_{1,1} u''_{2,3} \rangle_2$	1.7 10^{-3}		1.0 10^{-3}	
τ_2^i	45.3 10^{-3}	x	68.6 10^{-3}	x
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.073	0.077	0.075	0.076
$\langle u''_{1,1} u''_{1,3} \rangle_2$	1.7 10^{-3}		1.7 10^{-3}	
τ_{12}^i (s)	19.0 10^{-3}	21.4 10^{-3}	19.5 10^{-3}	23.0 10^{-3}
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	0.80	0.90	0.39	0.46
D_2^i (m^2/s)	1.45 10^{-3}	x	1.45 10^{-3}	x
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	1.52 10^{-3}	x	1.52 10^{-3}	x
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	1.38 10^{-3}	1.80 10^{-3}	1.44 10^{-3}	1.75 10^{-3}

Tableau 6.11 : Paramètres et résultats de dispersion des nuages de particules de 60 et 90 μm , avec un gradient de vitesse moyenne constant dans la direction 3.

d_p	120 μm	
direction	-1-	//
τ_{12}^F (s)	83.4 10^{-3}	
R_c^P	3.43	
S	4.99	
τ_1^i / τ_{12}^F	0.32	
$\langle u''_2{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.0157	0.020
$\langle u''_1 u''_2 \rangle_2$ "	0.0159	0.019
$\langle u''_{2,1} u''_{2,3} \rangle_2$	3.9 10^{-3}	
$\langle u''_{1,3} u''_{2,1} \rangle_2$	1.6 10^{-3}	
$\langle u''_{1,1} u''_{2,3} \rangle_2$	0.65 10^{-3}	
τ_2^i	102. 10^{-3}	x
$\langle u''_1{}^2 \rangle_2$ (m^2/s^2)	0.075	0.076
$\langle u''_{1,1} u''_{1,3} \rangle_2$	1.5 10^{-3}	
τ_{12}^i (s)	20.0 10^{-3}	24.1 10^{-3}
$\tau_{12}^i / \tau_{12}^F$	0.24	0.29
D_2^i (m^2/s)	1.45 10^{-3}	x
$\tau_2^i \langle u''_2{}^2 \rangle_2$ "	1.56 10^{-3}	x
$\tau_{12}^i \langle u''_1{}^2 \rangle_2$ "	1.50 10^{-3}	1.82 10^{-3}

Tableau 6.12 : Paramètres et résultats de dispersion d'un nuage de particules de 120 μm , avec un gradient de vitesse moyenne constant dans la direction 3.

6.6.2 Calcul des contraintes turbulentes du mouvement fluctuant des particules

Contraintes normales

A condition que les composantes normales du tenseur des corrélations Lagrangiennes des vitesses du fluide "vu" par les particules soient de forme exponentielle, la connaissance du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" permet de calculer l'énergie du mouvement fluctuant des particules et la covariance du mouvement corrélé fluide-particules à l'aide des expressions 4.4.9 et 4.4.10.

Sur les figures 6.6.1 et 6.6.2, nous constatons le bon accord des résultats des simulations avec les prédictions théoriques obtenues à travers l'extension de la théorie de Tchen, à la fois pour le calcul de la variance du mouvement fluctuant des particules et pour le mouvement corrélé turbulent fluide-particules, et ceci dans les trois directions d'espace.

Ces résultats indiquent que les corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules, lorsque le cisaillement est faible, conservent une forme exponentielle.

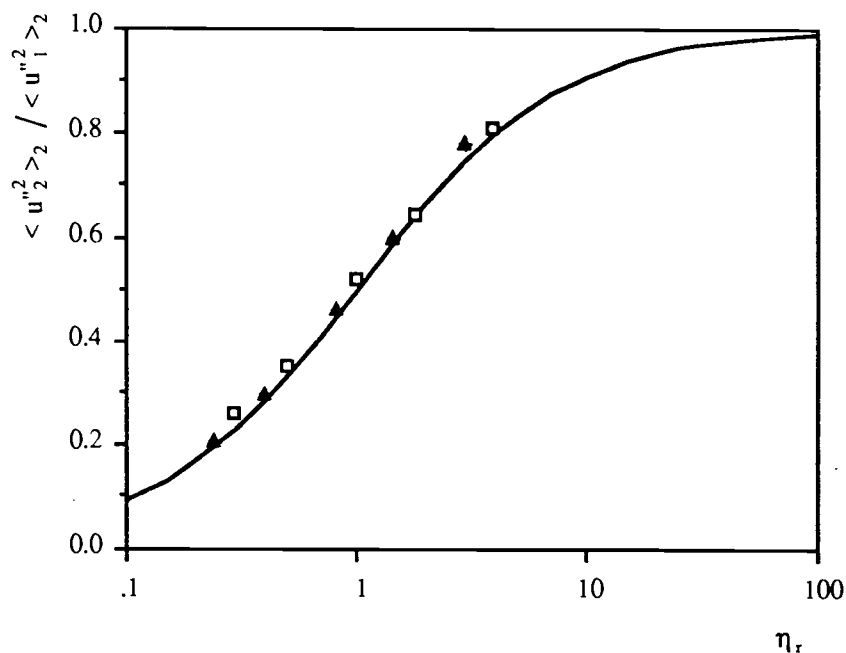


Figure 6.6.1 : Variance du mouvement fluctuant des particules.

—, calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.9).
les marques représentent les résultats des simulations dans chaque direction de l'espace : \square , dans la direction 1 ; $+$, dans la direction 2 ; \triangle , dans la direction 3. (les marques des 2 dernières directions sont superposées).

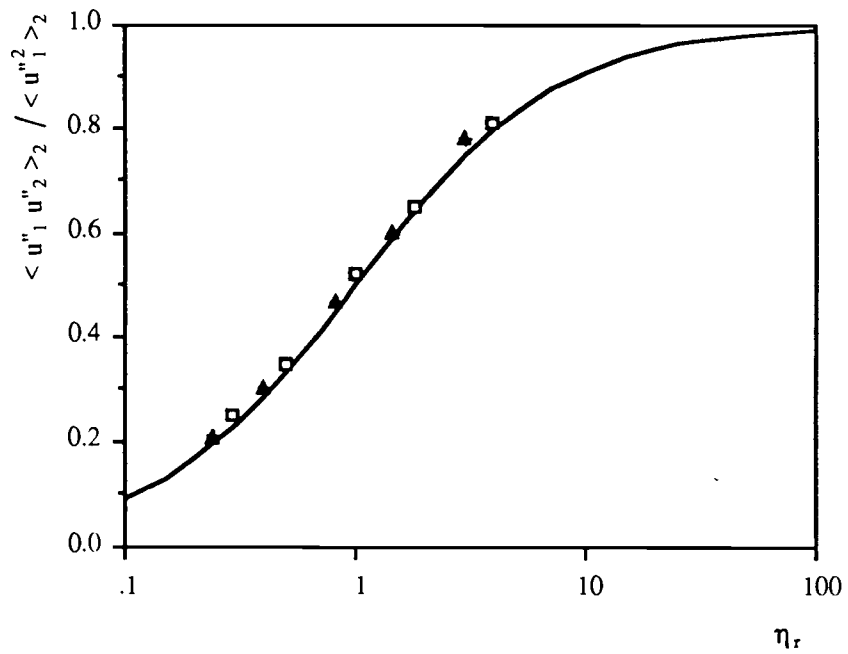


Figure 6.6.2 : Covariance du mouvement fluctuant corrélé fluide-particules calculée dans la direction parallèle au croisement de trajectoires.
 —, calculée à l'aide de l'extension de la théorie de Tchen (Eq. 4.4.10).
 les marques représentent les résultats des simulations dans chaque direction de l'espace : \square , dans la direction 1 ; $+$, dans la direction 2 ; \blacktriangle , dans la direction 3. (les marques des 2 dernières directions sont superposées).

Contraintes de cisaillement

Sur la figure 6.6.3, nous avons inscrit la valeur de la contrainte de cisaillement calculée par les simulations et celle estimée en utilisant l'équation 5.3.13 obtenue dans le cadre de la modélisation Eulérienne. Nous observons un bon accord entre les résultats. Nous avons superposé, sur cette figure, la contribution de la covariance du mouvement corrélé fluide particules (Eq. 5.3.12). Nous constatons que lorsque le temps de relaxation des particules augmente, cette contribution diminue, jusqu'à être négligeable pour les grosses particules.

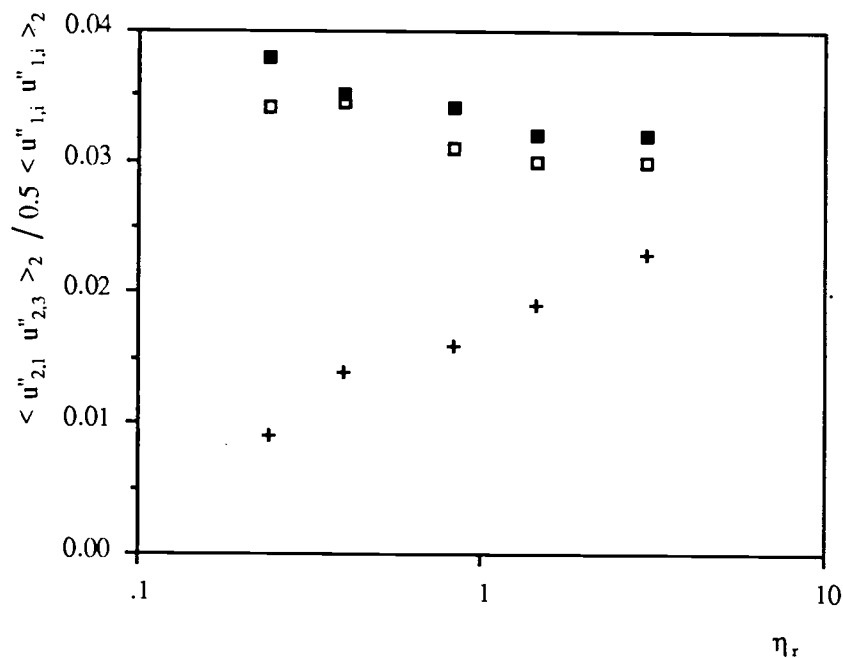


Figure 6.6.3 : Contraintes turbulentes de cisaillement.

□, résultat direct de simulation ; ■, estimation à partir du modèle Eulerien (Eq. 5.3.13) ; +, contribution de la contrainte du mouvement corrélé (Eq. 5.3.12)..

6.6.3 Calcul des coefficients de transport

Calcul du coefficient de dispersion

Sur la figure 6.6.4, nous avons représenté le coefficient de dispersion des particules dans la direction perpendiculaire au mouvement moyen. Ce coefficient de dispersion est adimensionné par le coefficient de diffusion du fluide. La plus petite valeur du coefficient de dispersion s'explique par un effet de croisement de trajectoires provoqué par le mouvement moyen. Sur cette figure, nous avons superposé la valeur du coefficient de dispersion efficace du modèle Eulérien (Eq. 5.1.24). Nous observons un très bon accord entre l'estimation du modèle Eulérien et le résultat des simulations. A condition de connaître la turbulence du fluide "vu" par les particules, le modèle Eulérien permet d'obtenir une très bonne valeur du coefficient de dispersion.

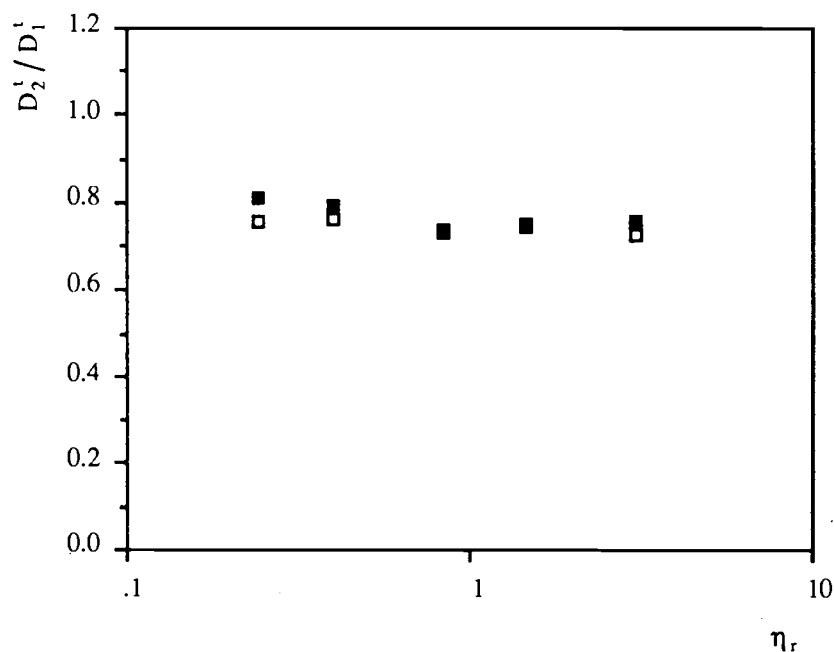


Figure 6.6.4 : Coefficient de dispersion dans la direction 2 : □, calculé à l'aide de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) ; ■, à partir de l'expression du modèle Eulérien (Eq. 5.1.24).

Sur la figure 6.6.5, nous avons inscrit le coefficient de dispersion des particules et le coefficient de dispersion binaire, adimensionnés par le produit du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" et de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules. Nous avons également superposé les valeurs des coefficients de dispersion et de dispersion binaire estimées à partir de l'extension de la théorie de Tchen. Nous observons que, si l'on connaît les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules, l'extension de la théorie de Tchen permet de calculer correctement les coefficients de dispersion.

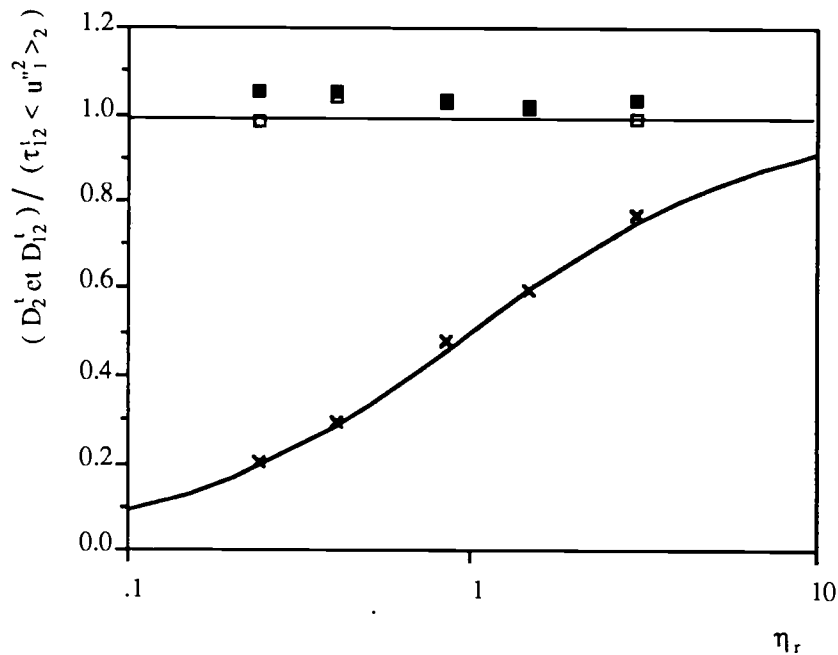


Figure 6.6.5 : Coefficient de dispersion dans la direction 2 : \square , calculé à l'aide de l'approximation de diffusion (Eq. 4.1.5) ; \blacksquare à partir de l'expression du modèle Eulérien (Eq. 5.1.24) ; $+$, Coefficient de dispersion binaire (Eq. 5.1.26).
—, expressions obtenues à partir de l'extension de la théorie de Tchen, (Eq.4.4.8 et 4.4.10).

Calcul de la viscosité turbulente

L'objectif principal de ces simulations est de valider le comportement asymptotique de la viscosité turbulente lorsque le temps de relaxation des particules devient important. En effet, dans ce cas, d'après la théorie, il existe un rapport de 2 entre le coefficient de dispersion et de viscosité turbulente. Sur la figure 6.6.6, nous avons représenté la viscosité turbulente calculée à partir des simulations et adimensionnée par le coefficient de dispersion. Nous avons également superposé l'expression théorique correspondant au cas simulé (Eq. 5.4.2). Nous observons un très bon accord entre la valeur calculée et celle estimée. Sur cette figure, nous avons aussi inscrit la courbe d'évolution de la viscosité turbulente obtenue dans le cadre des hypothèses du modèle Eulerien, c'est-à-dire en supposant que le gradient de la vitesse moyenne du fluide est égal à celui de la vitesse moyenne des particules (Eq. 5.3.16).

Dans le cas asymptotique où le temps de relaxation des particules est important, les viscosités turbulentes estimées à partir des équations 5.3.16 et 5.4.2 ont la même limite.

$$\lim_{(\tau_{12}^F \rightarrow \infty)} v_2^i = \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2$$

Cette limite est confirmée par les résultats des simulations.

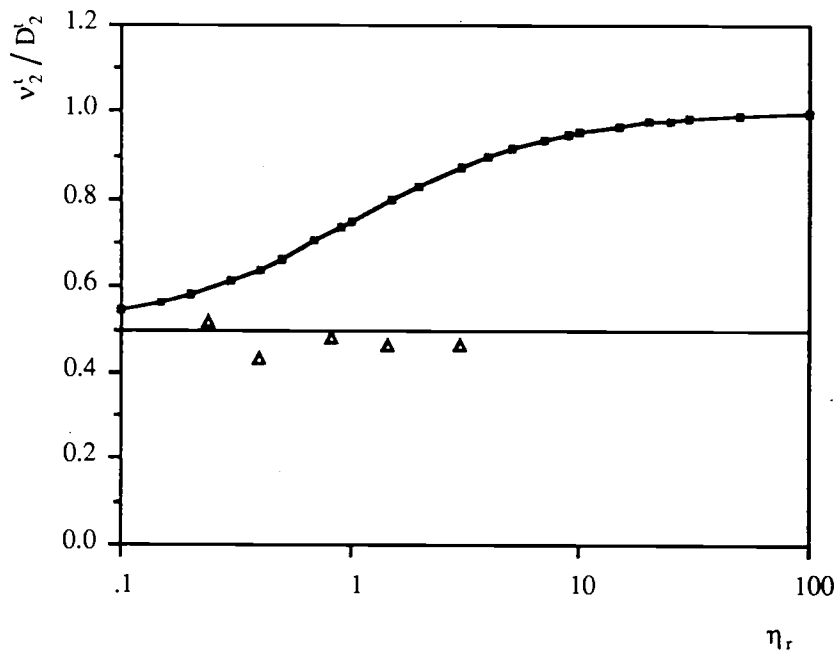


Figure 6.6.6 : Calcul de la viscosité turbulente.

- ▲, résultats des simulations ;
- , expressions obtenues à partir des équations 5.1.24, 5.4.2 et 5.3.5;
- , expressions obtenues à partir des équations 5.1.24, 5.3.16 et 5.3.5.

Conclusion

Au départ cette étude comportait deux objectifs principaux :

- le premier était d'essayer d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans les processus de transport de particules discrètes placées dans un champ turbulent;
- le deuxième était d'affiner et de valider certaines hypothèses de fermeture utilisées pour la modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques utilisant des équations de transport Eulériennes pour les deux phases.

Pour cela, nous avons choisi d'entreprendre des simulations numériques directes de dispersion de particules dans un écoulement turbulent homogène isotrope stationnaire. Pour des raisons pratiques, en l'occurrence l'existence d'un code numérique développé au L.N.H-E.D.F, notre choix s'est porté sur une méthode simulant directement les grandes échelles de la turbulence.

La qualité des résultats de dispersion de particules présentés dans ce type d'approche est complètement tributaire de la qualité des champs turbulents simulés. Ces champs turbulents doivent absolument remplir les deux conditions suivantes :

- il est indispensable de pouvoir accéder à toutes les grandes échelles de la turbulence porteuses d'énergie, qui contribuent de façon significative aux mouvements des particules.
- ces grandes échelles doivent respecter les propriétés de la turbulence homogène isotrope stationnaire.

L'analyse des résultats (chapitre 1.3), a montré que cette méthode permettait de simuler des champs turbulents répondant à ces deux critères (champ TH13).

La deuxième question soulevée par ces simulations est : n'a-t-on pas occulté certains phénomènes physiques liés aux problèmes de la dispersion et de la diffusion turbulente en ne simulant pas les échelles dissipatives de la turbulence?

Les résultats de diffusion (chapitre 3), ont montré un très bon accord avec la théorie et les résultats de simulation directe de Yeung et Pope et de Squires et Eaton. Enfin, dans le chapitre 6, nous avons observé que la contribution des petites échelles de la turbulence était moins importante pour le mouvement

des particules denses et des sédiments que pour des particules fluides. Puisque l'absence des petites échelles n'a pas affecté les résultats de diffusion, nous pouvons penser que cela ne détériore pas les résultats de dispersion pour ce type de particules. Par contre, les bulles sont plus sensibles aux petites échelles. C'est pourquoi nous avons étudié l'effet du déplacement de l'échelle de coupure sur la dispersion de bulles. D'un point de vue qualitatif, nous n'avons pas remarqué de modifications notables du comportement des bulles. En revanche, nous avons observé un meilleur accord des résultats avec les prédictions théoriques lorsque les petites échelles de la turbulence sont mieux représentées.

En fait, nous nous sommes aperçus au cours de ces travaux que la méthode, qui consiste à simuler directement les grandes échelles de la turbulence, présente des avantages par rapport à la simulation directe pour étudier la dispersion de particules denses. En effet, le domaine de simulation de la turbulence est dans ce cas plus grand et permet donc de moins subir, pour le calcul des statistiques Lagrangiennes, les effets néfastes des conditions de périodicité. L'analyse des résultats de simulation directe de Squires et Eaton fait apparaître leur difficulté à simuler correctement la dispersion de particules denses lorsque le temps de relaxation des particules devient trop grand.

Finalement, pour nous, la meilleure garantie quant à la fiabilité de ces simulations est le bon accord de l'ensemble des résultats avec les modèles théoriques.

Nous allons conclure ce travail en rappelant les principaux résultats obtenus à l'aide de ces simulations, et en précisant en quoi ils peuvent être utiles pour le développement ou la validation des modèles Eulériens ou Lagrangiens.

D'un point de vue Lagrangien, nous pouvons relever les résultats suivants :

-ces simulations confirment que la forme des corrélations Lagrangiennes de la vitesse du fluide est une exponentielle. Nous avons également constaté que les corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules restent de forme exponentielle, quel que soit le mouvement relatif des particules par rapport au fluide, vitesse relative du mouvement moyen nulle, croisement de trajectoires, gradient de la vitesse moyenne des particules ;

-le rapport de l'échelle temporelle Lagrangienne sur l'échelle temporelle Eulérienne a été calculé, nous avons trouvé une valeur, $\beta=0.9$, qui se situe dans la fourchette des résultats obtenus en simulation directe ;

-enfin, l'ensemble des résultats constitue une base de données qui pourrait contribuer à la validation des modèles Lagrangiens, particulièrement pour ce qui est de la construction de la corrélation Lagrangienne du fluide "vu" par les particules et du temps caractéristique d'interaction "turbulence du fluide-particules".

Comme cela apparaît tout au long de ce mémoire, l'analyse des résultats a été menée principalement dans le but de valider la modélisation Eulérienne.

Les simulations ont montré les limites de la théorie standard de Tchen-Hinze qui, à cause de l'hypothèse implicite que les caractéristiques de la turbulence du fluide "vu" par les particules sont égales aux caractéristiques de la turbulence calculée le long des trajectoires de particules fluides, ne peut prendre en compte un certain nombre de phénomènes.

Dans le cas "sans croisement de trajectoires" elle exclut, par exemple, la possibilité qu'il puisse y avoir un temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" différent lorsqu'il s'agit de particules ou de particules fluides. Nous avons observé au chapitre 6 que cette différence pouvait provoquer une sous-estimation de 25% de la valeur du coefficient de dispersion estimée à partir de la théorie standard. Ce résultat est en contradiction avec un des résultats principaux de la théorie standard de Tchen-Hinze qui exprime l'égalité entre le coefficient de dispersion et le coefficient de diffusion, quelle que soit la nature des particules.

La théorie standard ne prend pas en compte la migration des bulles vers les zones, localement à plus faibles vitesses. Ceci conduit à une surestimation

importante du coefficient de dispersion des bulles et de l'énergie du mouvement fluctuant des bulles.

Dans cette théorie, la prise en compte de l'effet de croisement de trajectoires est réduite à une correction du coefficient de dispersion. Elle n'intègre pas la variation du niveau d'énergie turbulente. Nous avons pourtant constaté, dans le cas où l'effet de croisement de trajectoires est très important, que l'énergie du mouvement fluctuant de particules denses pouvait être divisée par trois.

Ces observations nous ont conduit à proposer une extension de la théorie standard de Tchen-Hinze. Dans cette extension, l'énergie du fluide "vu" par les particules et le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" sont des inconnues que l'on doit calculer. Dans les simulations directes de dispersion, nous pouvons calculer directement les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules.

L'ensemble des résultats a montré un très bon accord avec l'extension de la théorie de Tchen pour tous les types de particules et ce, quel que soit le mouvement relatif des particules par rapport au fluide.

Nous avons observé dans tous les cas, que le coefficient de dispersion des particules est égal au produit de l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et du temps d'interaction "turbulence du fluide-particules".

Dans cette théorie, l'hypothèse la plus importante que l'on a formulée est que la forme des corrélations Lagrangiennes du fluide "vu" par les particules reste exponentielle, indépendamment du mouvement relatif des particules par rapport au fluide. Les résultats des simulations sont en parfait accord avec cette hypothèse.

Enfin, l'effet de croisement de trajectoires s'intègre parfaitement dans cette théorie. L'influence de l'effet de croisement de trajectoires sur le niveau d'énergie du mouvement fluctuant des particules et du mouvement corrélé "fluide-particules" est parfaitement prise en compte.

Les résultats de la dispersion de particules, ayant un gradient de vitesse moyenne non nul, ont également montré un bon accord avec les prédictions théoriques de l'extension de Tchen-Hinze.

Le dernier sujet abordé concerne la validation de la modélisation des coefficients de transport turbulents dans le modèle diphasique utilisant des équations Eulériennes dans les deux phases.

Les résultats des simulations ont montré que si l'on connaît les caractéristiques turbulentes du fluide "vu" par les particules, le modèle Eulérien permet d'obtenir les valeurs correctes du coefficient de dispersion

efficace. Ce bon accord est observé, pour tous les types de particules et quel que soit le mouvement relatif des particules par rapport au fluide. Nous rappelons que ce coefficient de dispersion efficace est la somme de deux contributions séparées, l'une résultant de l'agitation propre des particules et l'autre provoquée par la corrélation particules-turbulence du fluide. La deuxième contribution est prise en compte à travers le coefficient de dispersion binaire D_{12}^1 utilisé pour modéliser la vitesse de diffusion. Le bon accord entre les résultats des simulations et le coefficient de dispersion efficace déterminé à partir des équations du modèle Eulérien, valide à la fois l'existence du coefficient de dispersion binaire et son expression.

L'autre résultat important concerne l'expression du coefficient de viscosité turbulente du nuage de particules. Les résultats de simulation confirment l'existence d'un Schmidt de 2 entre les coefficients de dispersion et de viscosité turbulente sur la partie qui prend en compte l'agitation propre du mouvement des particules.

Que ce soit pour le calcul des coefficients de transport ou de l'énergie du mouvement fluctuant des particules et du mouvement corrélé fluide-particules, la qualité des résultats est conditionnée par la connaissance du fluide "vu" par les particules. Finalement, nous avons introduit deux variables supplémentaires, l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules".

Si, dans les simulations directes de dispersion que nous avons effectuées, nous sommes capables de connaître toutes les caractéristiques du fluide "vu" par les particules, il n'existe pas d'expression générale permettant de calculer ces informations dans les simulations utilisant soit une modélisation Eulérienne, soit une modélisation Lagrangienne.

En dehors du cas particulier de l'effet de croisement de trajectoires, pour lequel nous savons estimer à la fois le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules" à l'aide d'une loi de type Csanady et le niveau d'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules, il n'existe pas de modèle permettant d'accéder à ces informations.

La suite de ce travail serait peut-être d'essayer d'établir deux équations supplémentaires indispensables pour calculer l'énergie turbulente du fluide "vu" par les particules et le temps d'interaction "turbulence du fluide-particules". Leur connaissance est fondamentale, si l'on veut simuler correctement la dispersion turbulente dans les écoulements à bulles.

Annexe 1 : Interpolations

I.1 Interpolation linéaire

Cette méthode a été utilisée car elle est la plus simple et la moins coûteuse. On cherche à exprimer la fonction d'interpolation sous la forme :

$$u_{1,i}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^8 g_j(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{u}_{1,i}^j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{I.1.1})$$

Les fonctions de pondération g_j sont déterminées afin que le schéma d'interpolation respecte la continuité de la fonction.

Analyse monodimensionnelle

La vitesse u_1 est exprimée dans chaque cellule d'interpolation sous la forme, pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$u_{1,i}(x) = g_j(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^j + g_{j+1}(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^{j+1} \quad (\text{I.1.1})$$

La continuité de la fonction implique :

$$g_j(1) = 0 \quad g_{j+1}(0) = 0 \quad g_j(0) = g_{j+1}(1)$$

La somme des fonctions poids, en tout point de la cellule d'interpolation, doit être égale à un :

$$g_j(\alpha) + g_{j+1}(\alpha) = 1$$

Les polynômes de plus petit degré permettant d'assurer ces conditions sont de degré un. Sous cette forme, on trouve une solution unique :

$$g_j(\alpha) = 1 - \alpha \quad g_{j+1}(\alpha) = \alpha$$

L'égalité de la fonction d'interpolation avec la valeur de la fonction aux noeuds impose :

$$u_{1,i}(x_j) = u_{1,i}^j = \tilde{u}_{1,i}^j \quad u_{1,i}(x_{j+1}) = u_{1,i}^{j+1} = \tilde{u}_{1,i}^{j+1}$$

Extension tridimensionnelle

Des résultats précédents on déduit la formule d'interpolation tridimensionnelle :

$$u_{1,i}(x, y, z) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 g_{j+p}(\alpha) g_{k+q}(\beta) g_{l+r}(\gamma) u_{1,i}^{j+p, k+q, l+r} \quad (I.1.2)$$

Cette interpolation fait intervenir les huit points voisins.

I.2 Interpolation quadratique ESTET

Cette méthode d'interpolation, utilisée dans le code de turbulence tridimensionnel aux différences finies développé au LNH (ESTET), découle directement de l'interpolation linéaire. L'idée est d'interpoler non plus la valeur de la fonction aux noeuds mais le développement de Taylor au premier ordre de cette fonction.

On cherche à écrire la fonction d'interpolation sous la forme :

$$u_{1,i}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^8 g_j(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{u}_{1,i}^j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (I.2.1)$$

avec,

$$\tilde{u}_{1,i}^j(\alpha, \beta, \gamma) = u_{1,i}^j + \alpha \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,i} \right)^j + \beta \Delta y \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,i} \right)^j + \gamma \Delta z \left(\frac{\partial}{\partial z} u_{1,i} \right)^j$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,i} \right)^j$ est la dérivée de la fonction dans la direction x au noeud j.

On cherche à déterminer des fonctions de pondération g_j , afin que le schéma d'interpolation respecte la continuité de la fonction et de sa dérivée dans tout le domaine.

Analyse monodimensionnelle

La vitesse u_1 est exprimée dans chaque cellule d'interpolation sous la forme, pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$u_{1,i}(x) = g_j(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^j(\alpha) + g_{j+1}(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^{j+1}(\alpha) \quad (\text{I.2.2})$$

avec

$$\tilde{u}_{1,i}^j(\alpha) = u_{1,i}^j + \alpha \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,i}^j \right) \quad \tilde{u}_{1,i}^{j+1}(\alpha) = u_{1,i}^{j+1} + (\alpha - 1) \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,i}^{j+1} \right)$$

La continuité de la fonction et de sa dérivée dans tout le domaine implique :

$$g_j(1) = 0 \quad g_{j+1}(0) = 0 \quad g_j(0) = g_{j+1}(1)$$

$$g'_j(1) = 0 \quad g'_{j+1}(0) = 0 \quad g'_j(0) = g'_{j+1}(1)$$

L'égalité de la fonction d'interpolation avec la valeur de la fonction au noeud impose :

$$g_j(0) = 1 \quad g_{j+1}(1) = 1$$

La somme des fonctions poids, en tout point de la cellule d'interpolation doit être égale à un :

$$g_j(\alpha) + g_{j+1}(\alpha) = 1$$

Les polynômes de plus petit degré permettant d'assurer ces conditions sont des polynômes de degré trois. Ils s'écrivent :

$$g_j(\alpha) = (\alpha-1)^2(2\alpha+1) \quad g_{j+1}(\alpha) = (\alpha)^2(3-2\alpha)$$

On peut vérifier que la dérivée de la fonction d'interpolation respecte la valeur de la dérivée des vitesses aux noeuds. Par contre, cette fonction d'interpolation, polynôme de degré quatre, génère une discontinuité des dérivées seconde, troisième et quatrième. Pour limiter les erreurs induites par ce biais, cette interpolation est accompagnée d'un test sur la dérivée de la fonction. Dans le cas où la dérivée varie brusquement, on remplace localement cette interpolation quadratique par l'interpolation linéaire.

Extension tridimensionnelle

L'extension tridimensionnelle de cette interpolation est immédiate :

$$u_{1,i}(x, y, z) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 g_{j+p}(\alpha) g_{k+q}(\beta) g_{l+r}(\gamma) \tilde{u}_{1,i}^{j+p, k+q, l+r}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{I.2.3})$$

avec,

$$\tilde{u}_{1,i}^{j, k, l}(\alpha, \beta, \gamma) = u_{1,i}^{j, k, l} + \alpha \Delta x \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,i}^{j, k, l} \right) + \beta \Delta y \left(\frac{\partial}{\partial y} u_{1,i}^{j, k, l} \right) + \gamma \Delta z \left(\frac{\partial}{\partial z} u_{1,i}^{j, k, l} \right)$$

Si on utilise des dérivées centrées, cette interpolation fait intervenir les 32 noeuds entourant le point.

I.3 Interpolation cubique par la méthode des splines

Cette méthode d'interpolation est à la fois précise et régulière.

On cherche à exprimer $u_{1,i}(\vec{x})$ en fonction des 64 noeuds entourant le point d'interpolation.

$$u_{1,i}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{64} g_j(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{u}_{1,i}^j \quad (I.3.1)$$

Les fonctions de pondération g_j sont déterminées pour que le schéma d'interpolation respecte la continuité de la fonction, de sa dérivée et de la dérivée seconde dans tout le domaine.

Analyse monodimensionnelle

La vitesse $u_{1,i}$ est exprimée dans chaque cellule d'interpolation sous la forme, pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$u_{1,i}(x) = g_{j-1}(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^{j-1} + g_j(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^j + g_{j+1}(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^{j+1} + g_{j+2}(\alpha) \tilde{u}_{1,i}^{j+2} \quad (I.3.2)$$

La continuité de la fonction, de sa dérivée et de sa dérivée seconde dans tout le domaine implique :

$$\begin{aligned} g_{j-1}(1) = 0 & \quad g_{j-1}(0) = g_j(1) & \quad g_j(0) = g_{j+1}(1) & \quad g_{j+1}(0) = g_{j+2}(1) & \quad g_{j+2}(0) = 0 \\ g'_{j-1}(1) = 0 & \quad g'_{j-1}(0) = g'_j(1) & \quad g'_j(0) = g'_{j+1}(1) & \quad g'_{j+1}(0) = g'_{j+2}(1) & \quad g'_{j+2}(0) = 0 \\ g''_{j-1}(1) = 0 & \quad g''_{j-1}(0) = g''_j(1) & \quad g''_j(0) = g''_{j+1}(1) & \quad g''_{j+1}(0) = g''_{j+2}(1) & \quad g''_{j+2}(0) = 0 \end{aligned}$$

Les polynômes de plus petit degré, permettant d'assurer ces conditions de continuité sont de degré trois. On a 16 inconnues pour 15 équations. On ajoute la condition supplémentaire :

$$g_{j-1}(\alpha) + g_j(\alpha) + g_{j+1}(\alpha) + g_{j+2}(\alpha) = 1$$

On obtient alors une solution unique :

$$\begin{aligned} g_{j-1}(\alpha) &= \frac{1}{6} (1-\alpha)^3 & g_j(\alpha) &= \frac{1}{6} (3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 4) \\ g_{j+1}(\alpha) &= \frac{1}{6} (-3\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) & g_{j+2}(\alpha) &= \frac{1}{6} (\alpha)^3 \end{aligned}$$

On cherche à assurer l'égalité de la fonction d'interpolation avec la valeur de la fonction au noeud. Pour cela, le champ $\tilde{u}_{1,i}^{j,k,l}$ est déterminé en résolvant les systèmes suivants :

$$u_{1,i}^{j,k,l} = M_{lv} \tilde{u}_{1,i}^{j,k,v}, \quad \tilde{u}_{1,i}^{j,k,v} = M_{kt} \tilde{u}_{1,i}^{j,t,v}, \quad \tilde{u}_{1,i}^{j,t,v} = M_{js} \tilde{u}_{1,i}^{s,t,v}$$

Cette interpolation a donné les meilleurs résultats.

Elle est précise à l'ordre 3 et possède de bonnes conditions de régularité. En revanche, elle a un coût numérique plus important puisque l'on doit inverser $im.jm + jm.km + im.km$ matrices M . En fait, ce surcoût devient faible si l'on doit interpoler un grand nombre de points puisque cette méthode ne nécessite aucun test sur les dérivées.

Annexe 2 : La méthode de Runge-Kutta.

Généralités

C'est une méthode numérique utilisée pour résoudre des équations différentielles du type :

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), t) \quad (\text{R.1})$$

La méthode est décrite dans le livre de Dautrey-Lyons (Tome 3 p.897-906).

Elle est définie de la manière décrite ci-après.

On se donne :

- un entier $q \geq 1$.
- q nombres réels positifs ou nuls, distincts ou non $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q$.
- $q+1$ formules de quadrature approchée.

$$\int_0^{\tau_i} \Psi(t) dt \approx \sum_{j=1}^q a_{ij} \Psi(\tau_j), \quad i=1, 2, \dots, q$$

$$\int_0^1 \Psi(t) dt \approx \sum_{j=1}^q b_j \Psi(\tau_j)$$

On pose $t_{n,i} = t_n + \tau_i \Delta t$.

Appliquée à la recherche de la solution de l'équation (R.1), l'utilisation des formules approchées donne :

$$x(t_{n,i}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(x(t), t) dt \approx x(t_n) + \Delta t \sum_{j=1}^q a_{ij} f(x(t_{n,j}), t_{n,j}), \quad i=1, \dots, q$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(t), t) dt \approx x(t_n) + \Delta t \sum_{j=1}^q b_j f(x(t_{n,j}), t_{n,j})$$

Supposons que l'on connaisse la solution exacte de l'équation (R.1) à l'instant t_n , $x(t_n) = x_n$, à l'aide du schéma à q pas intermédiaires. On essaye de calculer, à t_{n+1} , une solution approchée de l'équation.

$$x_{n,i} = x_n + \Delta t \sum_{j=1}^q a_{ij} f(x_{n,j}, t_{n,j}) \quad i=1, \dots, q$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \sum_{j=1}^q b_j f(x_{n,j}, t_{n,j})$$

On dit que la méthode est d'ordre n si :

$$|x(t_{n+1}) - x_{n+1}| = o(\Delta t^n)$$

Lorsque la matrice $A(a_{ij})$ est strictement triangulaire inférieure la méthode est explicite. Dans ce cas, le système peut s'écrire sous la forme :

$$k_1 = \Delta t f(x_n, t_n)$$

$$k_i = \Delta t f(x_{n,i}, t_{n,i}) = \Delta t f\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t_n + \tau_i \Delta t\right) \quad i=2, \dots, q$$

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^q b_j k_j$$

k_i représente l'accroissement de la fonction pendant le $i^{\text{ème}}$ sous-pas.

Schémas d'ordre 2

On s'intéresse plus particulièrement aux schémas d'ordre 2, que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$k_1 = \Delta t f(x_n, t_n)$$

$$k_2 = \Delta t f(x_n + a_{21} k_1, t_n + \tau_2 \Delta t)$$

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^2 b_j k_j$$

Les coefficients sont déterminés en comparant la solution à t_{n+1} avec le développement de Taylor de $x(t_{n+1})$ au voisinage de $x(t_n)$.

La méthode est d'ordre 2 si et seulement si les coefficients vérifient les relations suivantes :

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 \tau_2 = 1/2, \quad a_{21} b_2 = 1/2$$

Dans les simulations Lagrangiennes, on a utilisé les deux schémas suivants :

$$\text{RK2A ; } \tau_2 = 1/2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad a_{21} = 1/2$$

$$\text{RK2B ; } \tau_2 = 1, \quad b_1 = 1/2, \quad b_2 = 1/2, \quad a_{21} = 1$$

Annexe 3 : La méthode de Runge-Kutta modifiée

Généralités

Cette méthode est utilisée lorsque l'on peut écrire l'équation (R.1) sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} x(t) = -a(x(t), t)x(t) + b(x(t), t) \quad a(x(t), t) > 0 \quad (\text{R.2})$$

Dans le cas où $a(x(t), t) \cdot dt$ est très grand, l'incrément de la fonction pendant le pas de temps est beaucoup plus grand que la fonction elle-même. On ne peut plus le considérer constant pendant chaque sous-pas. La méthode de Runge-Kutta a donc été modifiée afin de faire varier l'incrément pendant chaque sous-pas.

Les q accroissements k_i sont définis de la manière suivante :

$$\int_{y_n}^{y_n + k_i} \frac{dx}{-a(x_n, t_n)x(t) + b(x_n, t_n)} = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} dt$$

$$\int_{y_n}^{y_n + k_i} \frac{dx}{-a\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t_n + \tau_i \Delta t\right)x(t) + b\left(x_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, t_n + \tau_i \Delta t\right)} = \int_{t_n}^{t_n + \tau_i \Delta t} dt \quad i = 2, \dots, q$$

et l'estimation à t_{n+1} de la fonction $x(t)$ est obtenue à partir de la relation :

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^q b_j k_j$$

Schémas d'ordre 2

Dans le cas particulier des schémas d'ordre 2, l'intégration des formules de quadrature approchée définies précédemment donne :

$$k_1 = \left[x_n - \frac{b}{a}(x_n, t_n) \right] \left[\exp(-a(x_n, t_n) \Delta t) - 1 \right]$$

$$k_2 = \left[x_n - \frac{b}{a}(x_n + a_{21}k_1, t_n + \tau_2 \Delta t) \right] \left[\exp(-a(x_n + a_{21}k_1, t_n + \tau_2 \Delta t) \tau_2 \Delta t) - 1 \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^2 b_j k_j$$

En comparant le développement de cette expression avec le développement de Taylor de $x(t_{n+1})$ au voisinage de $x(t_n)$, on peut montrer que cette méthode est d'ordre 2 si et seulement si les coefficients vérifient les relations suivantes :

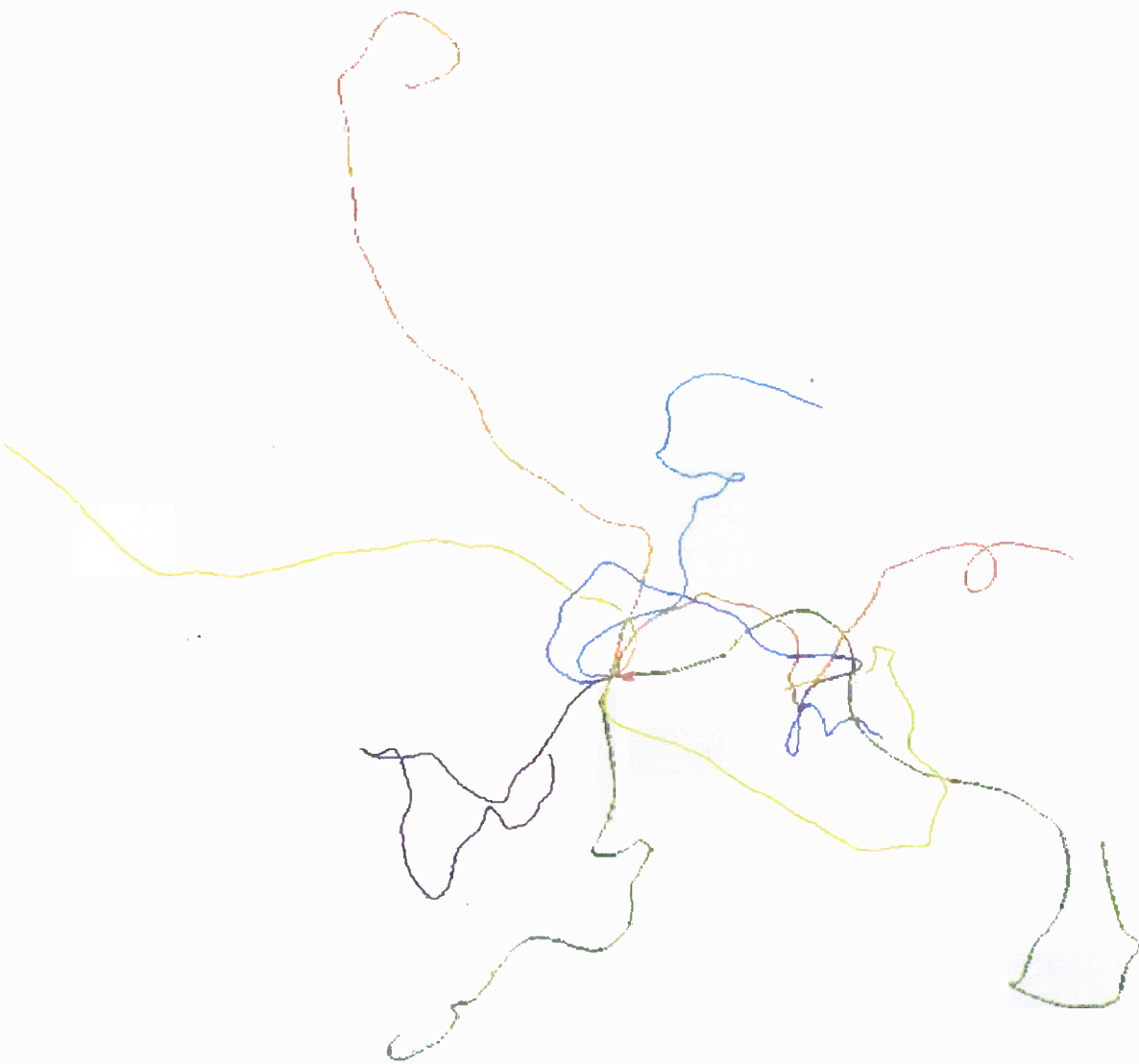
$$b_1 + \tau_2 b_2 = 1, \quad b_1 + \tau_2 \tau_2 b_2 = 1, \quad b_2 \tau_2 \tau_2 = 1/2, \quad a_{21} \tau_2 b_2 = 1/2$$

Dans les simulations Lagrangiennes qui font appel à la méthode de Runge-Kutta modifiée, on a utilisé le schéma :

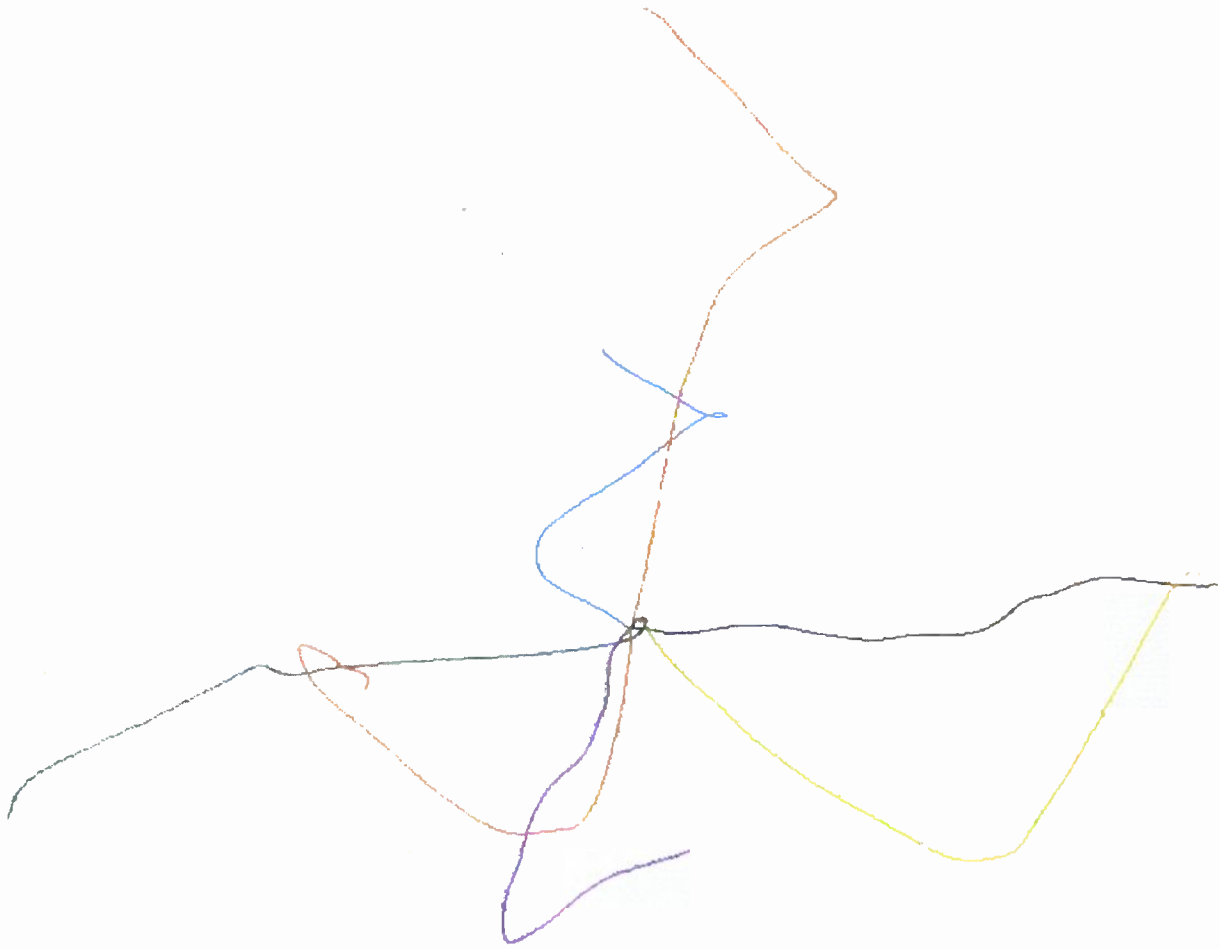
$$\text{RK2B; } \tau_2 = 1, \quad b_1 = 1/2, \quad b_2 = 1/2, \quad a_{21} = 1$$

Annexe 4

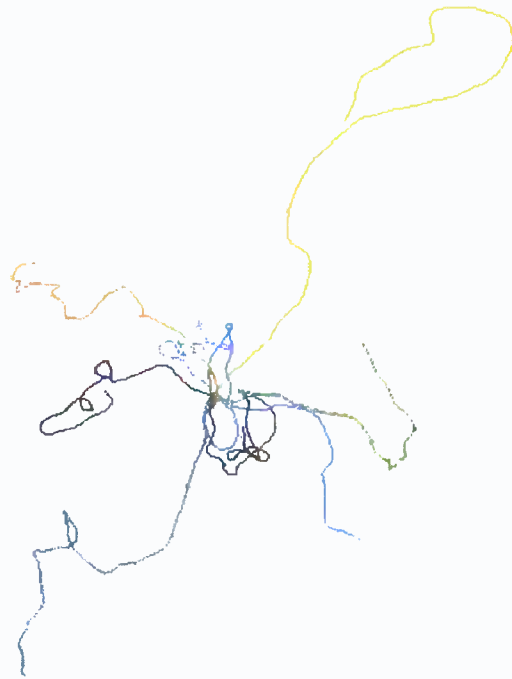
Quelques trajectoires de particules



Fluid particles dispersion in homogeneous stationary turbulence
Dispersion de particules fluides dans une turbulence homogène stationnaire



Heavy particles dispersion in homogeneous stationary turbulence
Dispersion de particules denses dans une turbulence homogène stationnaire



Bubbles dispersion in homogeneous stationary turbulence
Dispersion de bulles dans une turbulence homogène stationnaire

Bibliographie

Auton, T., 1984, "The dynamics of bubbles drops, and particles in motion in liquids", *Ph. D. Dissertation University of Cambridge*, Cambridge, United Kingdom.

Auton, T., Hunt, J.C.R., Prud'homme, M., 1988, "The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 197, pp 241-257.

Baron, F., 1982, "Macrosimulation Tridimensionnelle d'Écoulements Turbulents", *Thèse Université Pierre et Marie Curie*, Paris.

Bardina, J., Ferziger, J. H., Reynolds, W. C., 1983, "Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows", *Dept. Mech. Engng. Rep.*, TF-19, Stanford University, Stanford, California.

Bartels, R.H., Beatty, J.C., Borsky, B.A., 1987, "An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling", Morgan Kaufmann Publishers, California.

Bass, J., 1968, "Cours de mathématiques", Tome 2, pp 774-798, Masson, Paris.

Batchelor, G.K., 1949, "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence I. Eulerian Analysis", *Aus. J. Sci. Res.*, Vol. 2, pp 437-450.

Batchelor, G.K., 1951, "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence II. The Relative Motion of Particles", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 48, pp 345-362.

Berlemont A., 1987, "Modélisation Eulérienne et Lagrangienne de la dispersion particulaire en écoulement turbulent", *Thèse Université de Rouen*, Rouen.

Buevich, Y.A., 1966, "Motion resistance of a particle suspended in a turbulent medium", *Fluid dynamics*, pp 1-119.

Cambon, C., Bertoglio J. P., Jeandel, D., 1981, "Spectral closure for homogeneous Turbulence", *The 1980-1981 AFOSR-HTTM-Stanford conference on complex turbulent flow*, Vol. 3, pp 1307-1311.

Comte-Bellot, G., Corrsin, S., 1966, "The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 25, part 4, pp 657-682.

Comte-Bellot, G., Corrsin, S., 1971, "Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 48, part 2, pp 273-337.

Clift, R., Grace, J.R., Weber, M.E, 1978, "Bubbles, drops and particles", Academic Press.

Corssin, S., 1953, "Remarks on turbulent heat transfert", *Proc. of the Iowa Thermodynamics Symposium*, University of Iowa, Iowa city, USA.

Corrsin, S., 1963, "Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence", *J. Atm. Sc.*, Vol. 20, pp 115-119.

Corssin, S., Lumley, J., 1956, "On the equation of motion for a particle in a turbulent fluid", *Appl. Sci. Res. Sect A*, Vol 6, pp 114-116.

Csanady, G.T., 1963, "Turbulent Diffusion of Heavy Particles in the Atmosphere", *J. Atm. Sc.*, Vol. 20, pp 201-208.

Dautray, R., Lyons, J.L., 1985, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Tome 3, pp 897-906, Masson, Paris.

Delhaye, J.M., 1974, "Jump Conditions and Entropy Sources in Two-Phase Systems", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 1, pp 395-409.

Desjonqueres, P., 1987, "Modélisation Lagrangienne du comportement de particules discrètes en écoulement turbulent", *Thèse Université de Rouen*, Rouen.

Desjonqueres, P., Gouesbet, G., Berlemont, A., Picart, A., 1986, "Dispersion of Discrete Particles by Continuous Turbulent Motions : New Results and Discussions", *Phys. Fluids*, Vol. 29, n° 7, pp 2147-2151.

Deutsch, E., Simonin, O., 1991(a), "Large Eddy Simulation Applied to the Motion of Particles in Stationary Homogeneous Fluid Turbulence", *Turbulence Modification in Multiphase Flows*, ASME 1991, FED-Vol. 110, pp 35-42.

Deutsch, E., Simonin, O., 1991(b), "Large Eddy Simulation Applied to the Modelling of Particulate Transport Coefficients in Turbulent Two-Phase Flows", *Proc. Eighth Symp. on Turbulent Shear Flows*, September 9-11, Munich, Germany.

Drew, D.A., 1983, "Mathematical Modeling of Two-Phase Flow", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol 15, pp 261-291.

Drew, D.A., Lahey, R.T., 1982, "Phase-distribution Mechanisms in Turbulent Low-quality Two-phase Flow in a Circular Pipe", *J. Fluid Mech.*, Vol. 117, pp 91-106.

Eswaran, V., Pope, S.B., 1988, "An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulations of Turbulence", *Computers Fluids*, Vol. 16, pp 257-278.

Fleckhaus, D., Hischida, K., Maeda, M., 1987, "Effect of laden solid particles on the turbulent flow structure of a round jet", *Experiments in Fluids*, Vol. 5, pp 323-333.

Frenkiel, F.N., 1953, "Turbulent diffusion : mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence", *Adv. Appl. Mech* , Vol. 3, pp 61-107.

Friedlander, S. K., 1957, "Behavior of suspended particles in a turbulent fluid", *A.I.Ch.E. J.*, Vol. 3, pp 381-385.

Gatignol, R., 1983, "The Faxen Formulae for a Rigid Particle in an Unsteady Non-Uniform Stokes Flow", *J. de Méc. Th. et Appl.*, Vol. 9, n° 2, pp 143-160.

Gouesbet, G., Berlemont, A., Picart, A., 1984, "Dispersion of Discrete Particles by Continuous Turbulent Motions", *Phys. Fluids*, Vol. 27, n° 4, pp 827-837.

Haworth, D.C., Pope, S. B., 1986, "A generalized Langevin model for turbulent flows", *Phys. Fluids*, Vol. 29, n° 2, pp 387-405.

Hinze, J.O., 1959, "Turbulence", McGraw-Hill Book Company, New York.

Hjelmfelt, A.T., Mockros, L.F., 1966, "Motion of discrete particle in a turbulent fluid", *Appl. Sci. Res.*, Vol. 16, pp 149-161.

Ishii, M., 1975, "Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow", Eyrolles, Paris.

Kampe de Feriet, J., 1939, "Les fonctions aléatoires stationnaires et la statistique de la turbulence homogène", *Ann. Soc. Sci. de Brux.*, Vol. 16, pp 145-194.

Khoudly, M., 1988, "Macrosimulation de Turbulence Homogène en Présence de Cisaillement et de Gradients Thermiques. Application aux Modèles de Fermeture en un Point", *Thèse Ecole Centrale de Lyon* , Lyon.

Lamrini, A., 1987, "Mise en oeuvre d'un traitement Lagrangien des particules dans un modèle numérique d'écoulement turbulent diphasique à inclusions dispersées", *Projet de fin d'études Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, L.N.H., Chatou, France.

Lance, M., Marié, J.L., Bataille, J., 1991, "Homogeneous Turbulence in Bubbly Flows", *J. Fluids Eng.*, Vol 113, pp 295-300.

Laurence, D., 1985, "Advective Formulation of Large Eddy Simulation for Engineering Flows", *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 15, pp 147-160.

Laurence, D., Mattei, J.D., 1988, "Description of the Vectorized Version of the ESTET Code", *EDF Internal report*, HE-41/88.21, L.N.H., Chatou, France.

Maxey, R., Riley, J., 1983, "Equation of motion for a small rigid sphere in a non uniform flow", *Phys. Fluids*, Vol. 26, n° 4, pp 883-889.

Meek, C.C., Jones, B.G., 1973, "Studies of the behaviour of Heavy Particles in a turbulent fluid flow", *J. Atm. Sc.*, Vol. 30, pp 239-244.

Minier, J.P., 1988, "Construction de la trajectoire d'une particule dans un écoulement turbulent", *EDF report*, HE-44/88.16, L.N.H., Chatou, France.

Minier, J.P., Simonin, O., 1992, "A numerical approach of Cyclone Separators", *EDF report*, HE-44/92.02, L.N.H., Chatou, France.

Odar, F., Hamilton, W.S., 1964, "Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid", *J. Fluid Mech.*, Vol 18, part 2, pp 302-314.

Ormancey, A., 1984, "Simulation du comportement de particules dans des écoulements turbulents", *Thèse Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, Paris.

Picart, A., Berlemont, A., Gouesbet, G., 1986, "Modelling and Predicting Turbulence Fields and the Dispersion of Discrete Particles Transported by Turbulent Flows", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, n° 2, pp 237-261.

Pismen, L., M., Nir, A., 1978, "On the motion of a suspended particles in a stationary homogeneous turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 84, pp 193-206.

Pourahmadi, F., Humphrey, J.A.C., 1983, "Modelling Solid-Fluid Turbulent Flows with Application to Predicting Erosive Wear", *Physico Chemical Hydrodynamics*, vol. 4, n° 3, pp 191-219.

Rivero, M., 1991, "Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré", *Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse*, Toulouse.

Saffman, P.G., 1961, "An approximate calculation of the Lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence", *Appl. Sci. Res.*, Vol. 11, pp 245-255.

Sato, Y., Yamamoto, K., 1987, "Lagrangian measurement of fluid-particle motion in an isotropic turbulent field", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 88, pp 63-62.

Schmidt, H., Schumann, U., Volkert, H., 1984, "Three-dimensional, direct and vectorized elliptic solvers for various boundary conditions", *DFVLR*, Mitt. 84, 15

Schwartz, L., 1961, "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", Hermann, Paris.

Simonin, O., Viollet, P.L., 1987, "Numerical Modelling of Devolatilization in Pulverised Coal Injection inside a Hot Coflowing Air Flow", *Proc. U.S.A.-France Workshop on Turbulent Reactive Flows*, Rouen, Lecture Notes in Engineering, Vol. 40, pp 824-846, Springer-Verlag.

Simonin, O., Viollet, P.L., 1988, "On The Computation Turbulent Two-Phase Flows in The Eulerian Formulation", *Proc. Turbulent Two-Phase Flow System*, Euromech 234, May 9-12, Toulouse, FRANCE.

Simonin, O., 1990, "Eulerian Formulation for Particle Dispersion in Turbulent Two-Phase Flows", *Proc. 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, Mars 19-22, Erlangen, R.F.A.

Simonin, O., Viollet, P.L., 1990, "Modelling of Turbulent Two-Phase Jets Loaded with Discrete Particles", *Proc. Int. Seminar Phase-Interface Phenomena in Multiphase Flows*, May 14-18, Dubrovnik.

Simonin, O., 1991(a), "Prediction of the Dispersed Phase Turbulence in Particle-Laden Jets", *Gas-Solid Flows*, ASME 1991, FED-Vol. 121, pp 197-206.

Simonin, O., 1991(b), "Second-Moment Prediction of Dispersed Phase Turbulence In Particle-Laden Flows", *Proc. Eighth Symp. on Turbulent Shear Flows*, September 9-11, Munich, Germany.

Simonin, O., 1991, "Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées", Ecole de printemps de mécanique des fluides numérique, Aussois , France.

Shlien, D.J., Corrsin, S., 1974, "A measurement of Lagrangian velocity autocorrelation in approximately isotropic turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 62, part 2, pp 255-271.

Squires, K.D., Eaton, J.K., 1990, "Particle Response and Turbulence Modification in Isotropic Turbulence", *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp 1191-1203.

Squires, K.D., Eaton, J.K., 1990, "The interaction of particles with homogeneous turbulence", *Dept. Mech. Engng. Rep.*, MD-55, Stanford University, Stanford, California.

Tavoularis, S., Bennett, J.C., Corrsin, S., 1978, "Velocity derivative skewness in small Reynolds, nearly isotropic turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 88, pp 63-62.

Taylor, G.I., 1921, "Diffusion by continous movements", *Proc. Roy. Soc.*, Series A, pp 196-211.

Tchen, C.M., 1947, "Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid.", *Ph. D. University of Delft*, The Hague.

Tennekes, H., Lumley, J., 1972, "First course in turbulence", The MIT Press, Cambridge.

Wells, M.R., Stock, D.E., 1983, "The Effects of Crossing Trajectories on the Dispersion of Particles in a Turbulent Flow", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 136, pp 31-62.

Yeung, P.K., Pope, S.B., 1988, "An Algorithm for Tracking Fluid Particles in Numerical Simulations of Homogeneous Turbulence", *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, pp 373-416.

Yeung, P.K., Pope, S.B., 1989, "Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 207, pp 531-586.

LARGE EDDY SIMULATION APPLIED TO THE MOTION OF PARTICLES IN STATIONARY HOMOGENEOUS FLUID TURBULENCE

E. Deutsch and O. Simonin
Laboratoire National d'Hydraulique—EDF
Chatou, France

ABSTRACT

Statistical characteristics of the fluctuating motion of particles suspended in an homogeneous and steady fluid turbulence are investigated using Large Eddy Simulation (L.E.S.) with 64^3 grid points.

Computations have been carried out for three typical particle/fluid density ratio ($\rho_2/\rho_1 = 2000., 2.$ and 0.001) with the particle equation of motion including drag, fluid pressure and added-mass forces. In order to minimize numerical bias, statistical results for each case were obtained from an ensemble of about 25000 particle trajectories, and special attempts have been made in the treatment of particle equation concerning the projection of instantaneous fluid characteristics on the position of the particles.

The main purpose of this work is to analyse the accuracy of closure assumptions used to model dispersed phase turbulence in the frame of the Eulerian approach. Therefore, numerical predictions are compared with results obtained by an extended approach of the Tchen's theory which takes into account crossing-trajectories effects. A reasonable agreement is obtained for the particles heavier than fluid, but falls into disrepair for the lighter ones ($\rho_2 \ll \rho_1$). Observed discrepancy is directly connected with the correlation which appears between the instantaneous distribution of particles and the turbulent fluid motion.

INTRODUCTION

This study takes part in a more general work on the numerical prediction of turbulent two-phase flows using Eulerian approach for a dispersed phase. As previously observed, the prediction of such flows is strongly affected by the closure assumptions used to compute the statistical characteristics of the particles fluctuating motion. The traditional approach is based on a direct extension of fundamental results concerning the motion of discrete particles suspended in an homogeneous and steady turbulent fluid flow. In the framework of Tchen's theory, it would be possible in principle to determine particle turbulence intensities, transport coefficients and correlations functions in terms of the characteristics of

the continuous turbulent motion, using a given form of a fluid Lagrangian correlation function (Hinze, 1959 ; Csanady, 1963 ; Gouesbet et al., 1984).

However, the fluid correlation function, which leads to practical results, must be written in terms of the fluid velocity fluctuations encountered along discrete particle trajectories and computed by averaging procedure with respect to a large number of particles. In general, this correlation function can not be identified with the standard one computed along the fluid particle trajectories.

As a matter of fact, this identification is probably the more questionable approximation of the Tchen's theory and is justified by the semi-empirical assumption that during the motion of the particles the neighbourhood will be formed by the same fluid particles. But for instance, for a non-zero mean relative velocity between the dispersed and continuous phases, the fluid turbulent motion viewed from a reference frame moving with the mean motion of the particulate phase is not identical to the one observed along the fluid element trajectories, and leads to the so-called crossing-trajectories effects. But even for a zero-mean relative velocity, statistical bias may appear in homogeneous turbulence due to the correlation between the instantaneous distribution of particles and the turbulent fluid motion.

In this paper we present a quantitative analysis of such phenomena which is based on the statistical characteristics of particle trajectories computed in an homogeneous and steady fluid turbulence predicted by Large Eddy Simulation (L.E.S.) with 64^3 grid points.

EULERIAN MODELLING OF PARTICLES MOTION IN TURBULENT FLOWS

Averaged field equations :

In the two-fluid model formulation of two-phase flows, the field equations for each phase can be derived directly from the local instant conservation equations in single-phase flow by density-weighted averaging with in addition average balances of mass, momentum and energy at the interfaces. Restricting our attention to isothermal mixtures, where no phase change occurs, and assuming that the granular stress due to interparticle collision and

the molecular viscous stress in the fluid phase are negligible, the field equations for the two-fluid model is written :

Mass balance :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_k \rho_k U_{k,i} = 0 \quad (1)$$

where, $U_{k,i}$ is the mean velocity i -component for the continuous ($k=1$) and dispersed phases ($k=2$) respectively.

α_k is the volumetric fraction, and ρ_k the mean density.

Momentum balance :

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial}{\partial t} U_{k,i} + \alpha_k \rho_k U_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{k,i} = -\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_i} P_1 + \alpha_k \rho_k g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k \langle \rho u^i u^j \rangle_k + I_{k,i} \quad (2)$$

where u^i is the fluctuating part of the local instantaneous velocity

and $\langle \cdot \rangle_k$ the averaging operator associated to phase k ,

$$\alpha_k \rho_k U_{k,i} = \alpha_k \langle \rho u_i \rangle_k \quad \langle \rho u^i \rangle_k = 0$$

P_1 is the mean pressure of the continuous phase.

$I_{k,i}$ is the part of the interfacial momentum transfer rate between phases which remains after subtraction of the mean pressure contributions.

By assumption, the mean spacing between particles is assumed to be very small with respect to the length scale of variations in the mean flow. Therefore the method of averaging associated to the dispersed phase can be expressed at any point as an ensemble average taken over the large number of particles included in a reference time-space domain centred on the point.

Finally, as particles are assumed to interact only slightly, the momentum interfacial transfer terms in the basic equations can be obtained by averaging from the analysis of the local balance of forces acting on an isolated particle in turbulent flow.

Interfacial momentum transfer :

If we consider a dilute dispersion of small rigid spheres in translation with relative motions of low Reynolds number, the resulting force of volume induced by the surrounding fluid flow on each point included in the dispersed phase can be written :

$$f_{r,i} = -\rho_1 F_D v_{r,i} - \rho_1 C_A \frac{dv_{r,i}}{dt} - \rho_1 C_H \int_{t_0}^t \frac{dv_{r,i}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \left[\rho_1 \frac{d\tilde{u}_{1,i}}{dt} - \rho_1 g_i \right] \quad (3)$$

$v_{r,i}$ is the local instantaneous relative velocity defined on each point included in the particulate phase and given by $v_{r,i} = \tilde{u}_{2,i} - \tilde{u}_{1,i}$.

$\tilde{u}_{2,i}$ is the translation velocity of the particle which contains the point,

$\tilde{u}_{1,i}$ is the characteristic velocity of the surrounding flow field locally undisturbed by the presence of the particle but which remains turbulent.

The first three terms on the right-hand side of Eq. (3) correspond to the drag force, the apparent mass force and the Basset history force respectively. The last two terms are due to the stress applied on the particle by the undisturbed surrounding fluid flow. The derivative d/dt is used there to denote a time derivative following the moving particle.

Since Tchen's proposal, several papers have appeared correcting or modifying terms in the equation of motion for a rigid sphere in a nonuniform flow (Corrsin and

Lumley, 1956 ; Maxey and Riley, 1983 ; Gatignol, 1983). According to Gatignol analysis, the approximate form (3) is valid at low particle Reynolds number, if the size of the sphere is small compared to the length scale of variations in the undisturbed fluid flow so that

$$d^2 |\nabla^2 \tilde{u}_i| \ll |\tilde{u}_i|$$

Finally, constitutive relations for the interfacial transfer terms $I_{k,i}$ in the basic Eulerian equations derive by averaging from the particulate expression. Special care is required to take into account the dispersion effect due to the fluctuations of the momentum transfer term (Simonin, 1990).

Particle dispersion in homogeneous turbulence :

In the framework of the diffusion approximation (Batchelor, 1948 ; Hinze, 1959), the flux induced by the random motion of fluid (or discrete) particles can be written as proportional to the gradient of the volumetric fraction

$$\alpha_k U_{k,i} = -D_{k,ij}^i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \quad (4)$$

where $D_{k,ij}^i$, the effective turbulent diffusion (or dispersion) tensor, is given by :

$$D_{k,ij}^i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y_{k,i} y_{k,j} \rangle_k \quad (5)$$

$\langle y_{k,i} y_{k,j} \rangle_k$ is the time-dependant displacement tensor. $y_{k,i}$ is the i -component of the displacement of a fluid ($k=1$) or a discrete ($k=2$) particle during the time interval t .

For long time dispersion, the dispersion tensor leads to a constant and can be related to the velocity correlation field by

$$D_{k,ij}^i = \sqrt{\langle u_{k,i}^2 \rangle_k \langle u_{k,j}^2 \rangle_k} \int_0^\infty R_{k,ij}(\tau) d\tau \quad (6)$$

where the Lagrangian correlation tensors R_1 and R_2 are computed along the fluid and discrete particles trajectories respectively :

$$R_{k,ij}(\tau) = \langle u_{k,i}^i(t) u_{k,j}^j(t+\tau) \rangle_k / \sqrt{\langle u_{k,i}^2 \rangle_k \langle u_{k,j}^2 \rangle_k} \quad k=1,2$$

and correspond with the energy spectrums E_1 and E_2 written

$$E_{k,ij}(\omega) = \sqrt{\langle u_{k,i}^2 \rangle_k \langle u_{k,j}^2 \rangle_k} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{k,ij}(\tau) \exp[-i\omega\tau] d\tau$$

Finally, it is convenient to define a Lagrangian integral time scale

$$\tau_{k,ij}^i = \int_0^\infty R_{k,ij}(\tau) d\tau \quad (9)$$

In order to steady turbulent dispersion phenomenon in the Eulerian formalism, we consider a distribution of particles ($\alpha_2 \ll 1$) suspended in an homogeneous and steady turbulent fluid flow. In the Eulerian formalism, the particulate flux can be written (Simonin, 1990) :

$$\alpha_2 U_{2,i} = \alpha_2 [V_{r,i} + V_{d,i}]$$

$V_{r,i}$, the averaged value of the local relative velocity, can be obtained from the momentum equation neglecting the Basset force as

$$\alpha_2 V_{r,i} = - \left[\tau_{12}^F \langle u_{2,i}^i u_{2,j}^j \rangle_2 - b \tau_{12}^F \langle u_{1,i}^i u_{2,j}^j \rangle_2 \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2$$

where τ_{12}^F is the characteristic time of particle dragging by the continuous fluid motion or particle relaxation time

$$\tau_{12}^F = F_D^{-1} \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A \right] \quad b = [1 + C_A] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A \right]^{-1} \quad (10)$$

$V_{d,i}$, the drifting velocity, is due to the correlation between the instantaneous distribution of particles and the turbulent fluid motion at large scales with respect to the particle diameter :

$$V_{d,i} = \langle \tilde{u}_{1,i} \rangle_2 - U_{1,i} = \langle u''_{1,i} \rangle_2 \quad (11)$$

and takes into account the dispersion effect due to particles transport by turbulent fluid motion. According to the limit case of particles with diameter tending towards zero, for which the drifting velocity reduces to the single turbulent correlation between the volumetric fraction of the dispersed phase and the velocity of the continuous phase, the velocity $V_{d,i}$ is written as follows :

$$V_{d,i} = -D_{12,ij}^1 \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} \right] \quad (12)$$

Thus, according to the previous expression of the particulate flux, the effective turbulent dispersion tensor for particles can be directly related to the fluid-particle turbulent dispersion one :

$$D_{2,ij}^1 = D_{12,ij}^1 + \tau_{12}^1 \left[\langle u''_{2,i} u''_{2,j} \rangle_2 - b \langle u''_{1,i} u''_{2,j} \rangle_2 \right] \quad (13)$$

Finally, the effective dispersion tensor of the particulate phase can be written as the sum of the binary turbulent diffusion coefficient and a contribution due to the random motion of particles, the correlation between the instantaneous distribution of particles and fluid pressure fluctuations, and dispersive effects of added mass. This contribution is proportional to the particle relaxation time and so becomes negligible when the particle diameter tends towards zero, but points out the prominent part plays by the Reynolds stress tensor of the particle velocity fluctuations when the particle relaxation time is increasing. So, accurate predictions of particle-laden turbulent flows in the Eulerian formalism require reliable knowledge of the individual components of the dispersed-phase Reynolds stress tensor (Simonin and Viollet, 1990).

Particle response coefficient :

The equation governing the fluctuating motion of a discrete particle, written in a reference frame moving with the particle, reads :

$$\left[\rho_2 + \rho_1 C_A \right] \frac{du''_{2,i}}{dt} + \rho_1 F_D u''_{2,i} + \rho_1 C_H \int_{t_0}^t \frac{du''_{2,i}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} =$$

$$\left[\rho_1 + \rho_1 C_A \right] \frac{du''_{1,i}}{dt} + \rho_1 F_D u''_{1,i} + \rho_1 C_H \int_{t_0}^t \frac{du''_{1,i}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

We now introduce the Lagrangian correlation tensor \mathcal{R}_1 , associated to the fluctuating motion of the fluid computed along the particles trajectories :

$$\mathcal{R}_{1,ij}(\tau) = \frac{\langle u''_{1,i}(t) u''_{1,j}(t+\tau) \rangle_2}{\sqrt{\langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \langle u''_{1,j} \rangle_2^2}} \quad (14)$$

which corresponds with the energy spectrum tensor \mathcal{E}_1 .

From the particle motion equation, we may establish a direct relation between energy spectrums with the help of the so-called particle response coefficient Q_{12} (Hinze, 1959 ; Gouesbet et al., 1984) :

$$E_{2,ij}(\omega) = Q_{12}(\omega) \mathcal{E}_{1,ij}(\omega) \quad Q_{12}(\omega) = [1 + f_1]^2 + f_2^2$$

$$f_1 = \omega \left[\omega + c \sqrt{\pi \omega / 2} \right] \frac{[b-1]}{D}$$

$$f_2 = \omega \left[1/\tau_{12}^F + c \sqrt{\pi \omega / 2} \right] \frac{[b-1]}{D} \quad (15)$$

$$D = \left[1/\tau_{12}^F + c \sqrt{\pi \omega / 2} \right]^2 + \left[\omega + c \sqrt{\pi \omega / 2} \right]^2$$

$$c = C_H \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A \right]^{-1}$$

Thus, the turbulent correlation tensor \mathcal{R}_2 , the dispersion tensor $D_{2,ij}^1$, the velocity variance of the dispersed phase or the covariance between fluctuating motions can be computed using a given form of the fluid Lagrangian correlation tensor \mathcal{R}_1 , for instance one obtains :

$$D_{2,ij}^1 = \tau_{12,ij}^1 \sqrt{\langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \langle u''_{1,j} \rangle_2^2} \quad \tau_{12,ij}^1 = \int_0^\infty \mathcal{R}_{1,ij}(\tau) d\tau \quad (16)$$

where $\tau_{12,ij}^1$, the fluid-particle Lagrangian integral time scale, or eddy-particle interaction time, characterize the fluid turbulence viewed by the particles.

But, we must notice that the fluid correlation tensor \mathcal{R}_1 , which leads to the previous results, is written in terms of the fluid velocity fluctuations encountered along the discrete particle trajectories and computed by an averaging procedure with respect to a large number of particles. In general, this correlation function can not be identified directly with the practical fluid correlation tensor \mathcal{R}_1 computed along the fluid particle trajectories.

Crossing-trajectories effects :

Using a slightly different method than the one proposed by Csanady (1963), we can notice that, when the instantaneous displacement of the particles is dominated by the mean relative velocity, the Lagrangian correlation $\mathcal{R}_{1,ij}$ stands for an Eulerian space-time correlation of the fluid velocity fluctuation $u''_{1,i}(t, x_n)$ with the fluid velocity fluctuation $u''_{1,j}(t+\tau, x_n + \tau V_{r,n})$. Moreover, for such large relative velocity the eddy-decay may be neglected compared to the spatial change of correlations, so that $\mathcal{R}_{1,ij}$ reduces to the spatial velocity correlation in the direction of the mean relative motion

$$\mathcal{R}_{1,ij}(\tau) = \frac{\langle u''_{1,i}(t, x_n) u''_{1,j}(t, x_n + \tau V_{r,n}) \rangle_1}{\sqrt{\langle u''_{1,i} \rangle_2^2 \langle u''_{1,j} \rangle_2^2}} \quad (17)$$

As the displacement of the particles is dominated by the mean relative velocity, the instantaneous distribution of particles and the fluid turbulent kinetic energy must be uncorrelated ($\langle u''_{1,i} \rangle_2 = \langle u''_{1,i} \rangle_1$).

Restricting our attention to particles suspended in an homogeneous and isotropic fluid turbulent flows and according to Csanady analysis, the Eulerian longitudinal space correlation, parallel to the mean relative velocity direction ℓ , is written :

$$\mathcal{R}_{1,\ell}(\tau) = \exp \left[-\tau / \tau_{12,\ell}^1 \right] \quad (18)$$

where the eddy-particle interaction time is given by

$$\tau_{12,\ell}^1 = \tau_1^1 \left[1 + \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \beta = \frac{\tau_1^1}{L_1^1} \sqrt{\frac{2}{3} q_1^2}$$

$$\xi_r^2 = \frac{3}{2} \frac{V_r^2}{q_1^2} \quad (19)$$

q_1^2 is the fluid turbulent kinetic energy, L_1^1 is the Eulerian length-scale and τ_1^1 is the Lagrangian time macroscale.

Neglecting the Basset force, we can compute directly the longitudinal velocity variance of the dispersed phase and the velocity covariance between the two phases in terms of the fluid turbulent kinetic energy :

$$\begin{aligned} \langle u''_{2i} u''_{2i} \rangle_2 &= \frac{2}{3} q_i^2 \left[\frac{b^2 + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right] \\ \langle u''_{1i} u''_{2i} \rangle_2 &= \frac{2}{3} q_i^2 \left[\frac{b + \eta_{r,i}}{1 + \eta_{r,i}} \right] \end{aligned} \quad \eta_{r,i} = \frac{\tau_{12,i}}{\tau_{12}} \quad (20)$$

we can note that the expressions obtained for the variance and the covariance are affected by inertial and crossing-trajectories effects simultaneously and lead to standard results of the Tchen's theory for a zero mean relative velocity.

We obtain also the following expression for the effective particle dispersion coefficient (for long diffusion times) as proposed by Csanady :

$$D_{2i}^i = D_i^i \left[1 + \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Comparison of the previous expression with experimental results (Wells and Stock, 1983) shows a good agreement and leads to the approximate value of $\beta^2 = 0.45$.

In the Eulerian two-fluids flow modelling, if we express the fluid-particle dispersion coefficient in terms of the velocity covariance and the eddy-particle interaction time as

$$D_{12,ij}^i = \tau_{12,ij}^i \langle u''_{1i} u''_{2j} \rangle_2 \quad (22)$$

the equation (13) for the effective particle dispersion coefficient leads directly to equality (21).

In isotropic turbulence, the lateral spatial velocity correlations are related to the longitudinal one and we find :

$$r_{1ij}(\tau) = \left[1 - \frac{1}{2} \tau / \tau_{12,i}^i \right] \exp \left[-\tau / \tau_{12,i}^i \right] \quad j \neq i \quad (23)$$

these spatial correlations give statistical results concerning the lateral fluctuating motion which are valid only for the case of high mean relative velocity, for instance

$$\tau_{12,j}^i = \frac{1}{2} \tau_{1i}^i \left[1 + \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Following Csanady proposal, by analogy with the longitudinal case, and in order to improve prediction for zero mean relative velocity, we may assume same forms for the lateral turbulent characteristics than for the longitudinal one with the corresponding eddy-particle interaction time given by :

$$\tau_{12,j}^i = \tau_{1i}^i \left[1 + 4 \beta^2 \xi_r^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

LARGE EDDY SIMULATION METHOD

Fluid turbulence predictions

The computations of particle trajectories in homogeneous fluid turbulence require the knowledge of the instantaneous three-dimensional velocity field. Though the Direct Simulation is the approach the most satisfactory from the theoretical point of view, it is not practical owing to the limitation to low Reynolds number turbulence. But, as the dominant process in particle displacement is the dragging by the large scales of the fluid velocity field, we can use Large Eddy Simulation with a good accuracy.

The Large Eddy Simulation consists in a direct simulation of the large turbulent scales with respect to the mesh size and a local modelling for the small scales influence. The instantaneous velocity can be written : $u_i = \bar{U}_i + u'_i$, where \bar{U}_i is the large scale component and u'_i is the small one. The conservative equations for the large scale can be written as follow :

Mass balance :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_i = 0 \quad (26)$$

Momentum balance

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_i + \bar{U}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{P} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} \end{aligned} \quad (27)$$

L_{ij} is called the Leonard tensor : $L_{ij} = (\bar{U}_i \bar{U}_j - \bar{U}_i \bar{U}_j)$

S_{ij} is called the subgrid tensor : $S_{ij} = (u'_i u'_j + \bar{U}_i u'_j + u'_i \bar{U}_j)$

The numerical code used here (Baron, 1982 ; Laurence, 1985 ; Khoufli, 1988) is based on finite difference discretization and fractional step method. The principle of the fractional method is to split the conservative equations into elementary partial equations and leads to solve separately the following operators :

- advection solved with a weak formulation of the characteristic method.
- diffusion and pressure by Fourier transform and Gauss elimination.

The contribution of the Leonard term is evaluated by a Gaussian filtration of width Δ :

$$\Delta = 2 \text{Dx, where Dx is the size of the mesh.}$$

The subgrid tensor is modelled using a subgrid turbulent viscosity.

$$S_{ij} = -2 \nu_s \bar{D}_{ij} \quad \bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{U}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{U}_j \right) \quad (28)$$

the subgrid viscosity ν_s is computed with the Smagorinsky model :

$$\nu_s = (Cs \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}} \quad (29)$$

where Cs is the Smagorinsky constant ($Cs = 0.12$).

The fluid equations are unchanged by the presence of the particles since the volume fraction of the particles and the interfacial momentum transfer are assumed to be negligible. The homogeneous and isotropic turbulence field, obtained from simulation using 64^3 grid points, stands still artificially by adjustment of the spectrum by comparison with the theoretical Von Karman-Pao form. Fluid turbulent characteristics correspond to the initial measurements of Wells and Stock experiment (1983) in a grid-generated turbulence.

Particle tracking algorithm

In order to minimize numerical bias, statistical results for each case were obtained from an ensemble of about 25000 particle trajectories, and special attempts have been made in the treatment of particle equation concerning the projection of instantaneous fluid characteristics on the position of the particles and the time integration of the particle motion equation.

Three interpolation methods have been tested : linear, cubic based on Taylor development (D. Laurence and J.D. Mattei, 1985) and cubic spline (Bartels et al., 1987). Final choice was made based on the study of the instantaneous fluid velocity field interpolated on a staggered grid. Analysis of the Eulerian turbulence spectrum leads to select the cubic spline according to the shape of the spectrum for the large turbulent scales and the conservation of the turbulent kinetic energy (figure 1).

The particle momentum equation was time advanced using a second-order Runge-Kutta scheme with the same time step as for the fluid velocity field calculation. The numerical study of upper order Runge-Kutta scheme (third and fourth-order) has shown no improvement in the integration of the particle motion equation and in fact a degradation of the treatment of the time derivatives of undisturbed fluid flow velocity.

The particles were released with an initial velocity equal to the local instantaneous fluid velocity. To remove

the influence of the release conditions, the particles were allowed to disperse somewhat before the statistics were calculated. Tests showed that stationary results were obtained after about three times the particle relaxation time. At that time, the accurate calculation of the particle correlation function sets to carry on the simulation during about five times the particle Lagrangian time scale. We can notice that the fluid Lagrangian time scale is equal to thirty time steps of the Large Eddy Simulation.

Computations have been carried out for three typical particle/fluid density ratio ($\rho_2/\rho_1 = 2000., 2.$ and 0.001) with various particle diameters in order to modify appreciably the particle relaxation time (see Table 1). The Basset force contribution is assumed to be negligible in the calculation of particle trajectories, this assumption may reduce the practical accuracy of the simulations for the lightest particles but does not affect the comparison with theoretical results obtained in the frame of the Tchen's theory and based on the same assumption.

Table 1 : Simulation parameters.

"Heavy particles" ($\rho_2/\rho_1 = 2000., b = 0.75 \cdot 10^{-3}$) zero-mean relative velocity :	
$\tau_{12}^F/\tau_1^t = 2.1, 0.91, 0.59, 0.28, 0.072$	and $8.3 \cdot 10^{-3}$;
crossing-trajectories effects :	
$g_t = -9.81 \text{ m/s}^2$	$\tau_{12}^F/\tau_1^t = 2.0, 0.89, 0.58$;
$g_t = -19.6 \text{ m/s}^2$	$\tau_{12}^F/\tau_1^t = 1.8, 0.86, 0.57$.
"Light particles" ($\rho_2/\rho_1 = 2., b = 0.6$) zero-mean relative velocity :	
$\tau_{12}^F/\tau_1^t = 1.43, 0.51, 0.27, 0.084$.	
"Bubbles" ($\rho_2/\rho_1 = 0.001, b = 3.$) zero-mean relative velocity :	
$\tau_{12}^F/\tau_1^t = 0.13, 0.05, 0.017$.	

First validation of the numerical method has been made by simulation of fluid particles trajectories. Figure 2 shows comparison between the two different relations (5) and (6) available to compute the fluid dispersion coefficient.

Next validation step was the analysis of the simulations carried out for discrete particles according to the theoretical relations based on Fourier transforms, as Eq. (15) or (16), which allow to express the particle dispersion coefficient in terms of the fluid turbulence viewed by the particles. The very good agreement between the simulations and theoretical results (figures 3.a and .b) confirm the accuracy of the numerical methods used for the integration of the equation of particle motion.

RESULTS AND DISCUSSION

Particles suspended in turbulent fluid flows :

In a first step, computations were carried out for zero-mean relative velocity (without gravity), in order to study statistical bias appearing in homogeneous turbulence due to the correlation between the instantaneous distribution of particles and the turbulent fluid motion.

As could be seen from figure 4, the numerical predictions of particle trajectories for large density ratios ($\rho_2/\rho_1 = 2000.$ and $2.$) lead to validate a part of the basic assumptions of Tchen's theory since no statistical bias are observed due to the correlation between the distribution of particles and the local instantaneous kinetic energy of the fluctuating motion.

But this result is not confirmed for the lightest particles ($\rho_2/\rho_1 = 0.001$), and we can notice an appreciable decrease of the fluid kinetic energy viewed by the particles (up to fifty per cent) with the increase of the particle relaxation time, which indicates an instantaneous accumulation of the lightest particles in regions of low fluid velocity.

According to the analysis based on the particle response function associated to the equation of motion, the kinetic energy of the particle is locally larger than the one of the surrounding fluid turbulence (figure 8), but due to the statistical bias remains smaller than the turbulent kinetic energy for the whole fluid flow.

On the other hand, we note a statistical bias on the fluid-particle Lagrangian time scale (or eddy-particle interaction time) computed by integration (16) in terms of the fluid correlation function $\mathfrak{R}_{1,i}$ computed along the discrete particles trajectories (figure 5). For heavy particles ($\rho_2/\rho_1 = 2000.$), we can notice an increase (up to thirty per cent) for intermediate values of the particle relaxation time, near to one fifth of the fluid Lagrangian time scale. This is consistent with the idea that very small discrete particles behave as fluid elements and that very large ones have random trajectories unconnected with the local fluid turbulent motion. This phenomenon can be usefully draws together with the one pointed out by Squires and Eaton (1990) concerning the tendency of heavy particles, for intermediate time scales ratios, to collect in low-vorticity regions. Finally, as the particle dispersion coefficient can be written in terms of the "eddy-particle interaction time" using Eq. (16), it may be pointed out that an optimum ratio of the particle relaxation time to the fluid Lagrangian time scale exists such that particle dispersion coefficient will show a maximum value (figure 9).

For low density ratios ($\rho_2/\rho_1 = 2.$ and 0.001), figure 5 shows only an increase of the "eddy-particle interaction time" with the particle relaxation time, but further computations are required to confirm the vanishing of the decrease phenomenon for larger values of the particle relaxation time. On the other hand, figure 9 shows opposite variations of the particle dispersion coefficient in terms of the particle relaxation time and, strange to say, we note an appreciable decrease for the lightest particles ($\rho_2/\rho_1 = 0.001$).

In addition, figures 6, 7 and 8 show particle velocity variances computed by L.E.S. and predicted using proposed extension of the Tchen's theory in terms of the eddy-particle interaction time, computed from L.E.S. results. A very good agreement is obtained for the particles heavier than fluid, but falls into disrepair for the lightest ones. Observed discrepancies must be directly connected with the shape of the fluid Lagrangian correlation functions computed along the particle trajectories which departs from the assumed exponential form.

Finally, figure 9 shows comparisons between the particle dispersion coefficients computed in terms of Large Eddy Simulation results with different theoretical expressions. We can notice that the expression (13) obtained in the frame of the Eulerian two-fluid modelling is in very good agreement with the one (5) obtained in the frame of the diffusion approximation.

Crossing-trajectories effects :

The effect of non-zero mean relative velocity of particles crossing a stationary homogeneous turbulent field is examined based on results of the Large Eddy Simulation for different values of the external force applied on the heavy particles (Table 1).

Figures 10 (a and b) show comparisons of fluid-particle Lagrangian integral time scales computed from the L.E.S. results with analytical predictions. As could be seen from this figures, and according to Csanady's assumptions, the agreement between the simulation data and equations (19) and (25) is improving for large values of the mean relative velocity. Consistent with the so-called continuity effects, the fluid-particle Lagrangian time scale in direction perpendicular to the mean relative velocity are becoming half as large as the one along the parallel direction.

In addition, figures 11 show an extremely good agreement between simulated particle velocity variances and predicted ones using proposed extension of the Tchen's theory in terms of the eddy-particle interaction time computed from L.E.S. results.

Finally, figures 12 show that the general form obtained for the particle dispersion coefficient (13) in the frame of the Eulerian two-fluid modelling is in very good agreement with the one (5) obtained in the frame of the diffusion approximation.

CONCLUSION

Large Eddy Simulation was applied to the motion of particles in homogeneous and steady turbulent fluid flow in order to compare with theoretical results obtained in the frame of the Tchen's theory. The numerical predictions of trajectories of small heavy particles ($\rho_2/\rho_1 = 2000$, and 2.) lead to validate a part of the basic assumptions of Tchen's theory since no statistical bias are observed due to the correlation between the distribution of the particles and the local instantaneous fluid turbulent kinetic energy. On the contrary, results of simulation for the lightest particles ($\rho_2/\rho_1 = 0.001$) exhibit a strong preference to collect in regions of low fluid velocity.

On the whole, this study points out the fact that improvements in Eulerian predictions will pass through a more accurate modelling of the fluid turbulent characteristics viewed by the particles. For instance, closure assumptions must take into account the tendency of the fluid-particle Lagrangian integral time scale, or eddy-particle interaction time, to increase with increasing value of the particle relaxation time. Nevertheless, simulations for heavy particles show that the fluid-particle Lagrangian time does not monotonically increase, therefore there should exist an optimum ratio of the particle relaxation time to the fluid Lagrangian time such that the diffusivity will be a maximum. So, for zero-mean relative velocity, the dispersion of discrete particles may be greater (up to thirty per cent) than that of fluid elements. But, for practical purpose, this effect must be compared with the increase of effective dispersion (up to ten times more) observed in particle-laden jets predictions (Simonin, 1990) due to the non-homogeneity of particle velocity correlations distribution imposed by the memory of injection conditions.

Finally, concerning crossing trajectories effects for heavy particles, we can note a very good agreement between L.E.S. results and algebraical predictions, specially for large values of the mean relative velocity which significantly reduce particle dispersion coefficients and velocity fluctuations. According to theory, because of the

so-called continuity effect, reduction is greater in the directions perpendicular to the particle mean relative velocity than in the parallel one.

REFERENCES

Baron, F., 1982. "Macrosimulation Tridimensionnelle d'Écoulements Turbulents". *Thèse Université Pierre et Marie Curie*, Paris.

Bartels, R.H., Beatty, J.C., Borsky, B.A., 1987. "An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling". Morgan Kaufmann Publishers, California.

Batchelor, G.K., 1948. "Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence II. The Relative Motion of Particles". *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 48, pp 345-362.

Corrsin, S., Lumley, J.L., 1956. "On the Equation of Motion for a Particle in a Turbulent Fluid". *Appl. Sci. Res.*, Vol. 6, pp 114-116.

Csanady, G.T., 1963. "Turbulent Diffusion of Heavy Particles in the Atmosphere". *J. Atm. Sc.*, Vol. 20, pp 201-208.

Gatignol, R., 1983. "The Faxen Formulae for a Rigid Particle in an Unsteady Non-Uniform Stokes Flow". *J. de Méc. Th. et Appl.*, Vol. 9, n° 2, pp 143-160.

Gouesbet, G., Berlemont, A., Picart, A., 1984. "Dispersion of Discrete Particles by Continuous Turbulent Motions". *Phys. Fluids*, Vol. 27, n° 4, pp 827-837.

Hinze, J.O., 1959. "Turbulence". McGraw-Hill Book Company, New York.

Khoudly, M., 1988. "Macrosimulation de Turbulence Homogène en Présence de Cisaillement et de Gradients Thermiques. Application aux Modèles de Fermeture en un Point". *Thèse Ecole Centrale de Lyon*, Lyon.

Laurence, D., 1985. "Advective Formulation of Large Eddy Simulation for Engineering Flows". *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 15, pp 147-160.

Laurence, D., Maitei, J.D., 1988. "Description of the Vectorized Version of the ESTET Code". *EDF Internal report*, HE-41/88.21, L.N.H., Chatou, France.

Maxey, M.R., Riley, J.J., 1983. "Equation of Motion for a Small Rigid Sphere in a Nonuniform Flow". *Phys. Fluids*, Vol. 26, n° 4, pp 883-889.

Simonin, O., 1990. "Eulerian Formulation for Particle Dispersion in Turbulent Two-Phase Flows". *Proc. 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, Mars 19-22, Erlangen, R.F.A.

Simonin, O., Viollet, P.L., 1990. "Modelling of Turbulent Two-Phase Jets Loaded with Discrete Particles". *Proc. Int Seminar Phase-Interface Phenomena in Multiphase Flows*, May 14-18, Dubrovnik.

Squires, K.D., Eaton, J.K., 1990. "Particle Response and Turbulence Modification in Isotropic Turbulence". *Phys. Fluids A*, Vol. 2, pp 1191-1203.

Wells, M.R., Stock, D.E., 1983. "The Effects of Crossing Trajectories on the Dispersion of Particles in a Turbulent Flow". *J. Fluid. Mech.*, Vol. 136, pp 31-62.

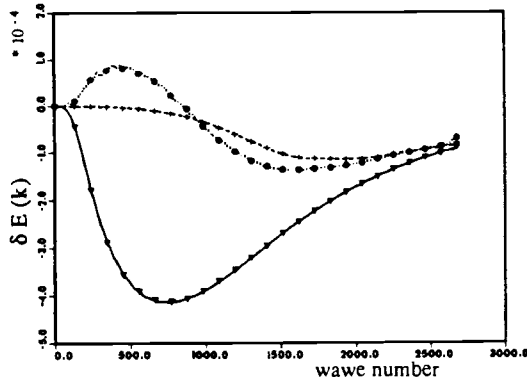


Figure 1 : Error on the eulerian turbulent spectrum due to interpolation on a staggered grid : ∇ linear, \circ cubic, $+$ spline

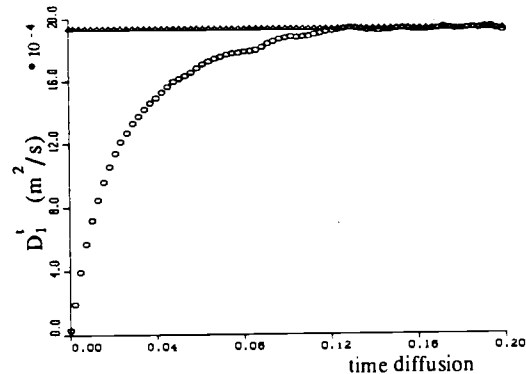


Figure 2 : Diffusion coefficient computed from L.E.S. results in terms of the effective diffusion tensor for fluid particles (Eq. 5) and the fluid velocity correlation fonction (Eq. 6), \circ and Δ respectively.

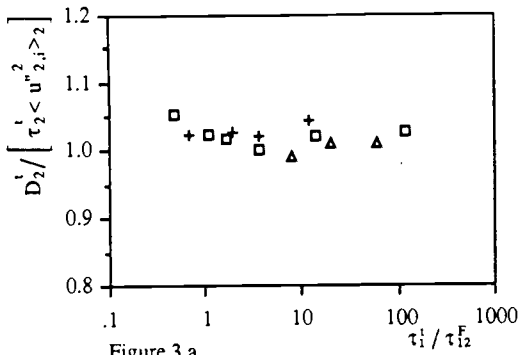


Figure 3.a

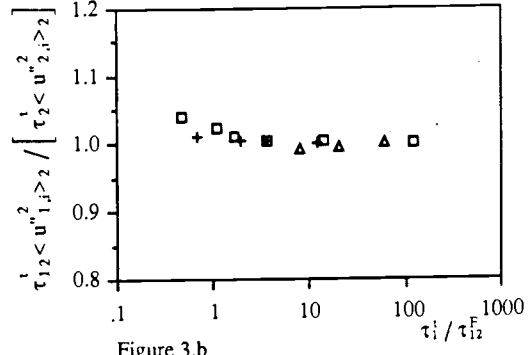


Figure 3.b

Figures 3 : Particle dispersion coefficient computed from L.E.S. results in terms of the effective dispersion tensor (a) using Eq. 5 and the fluid velocity correlation function viewed by the particle (b) using Eq. 16, normalized by the theoretical expression in terms of the particle velocity correlation function using Eq. 6 :
 \square $\rho_2/\rho_1 = 2000$. , $+$ $\rho_2/\rho_1 = 2$. , Δ $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

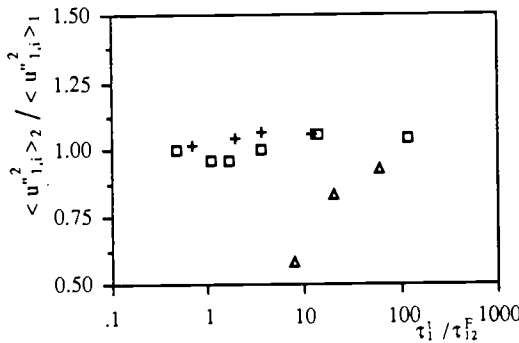


Figure 4 : Variance of the fluid velocity computed along particle trajectories : \square $\rho_2/\rho_1 = 2000$. , $+$ $\rho_2/\rho_1 = 2$. , Δ $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

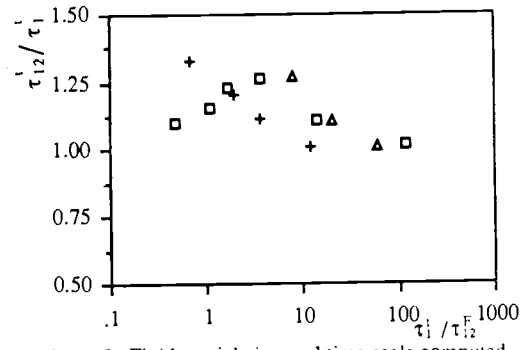


Figure 5 : Fluid-particle integral time scale computed from L.E.S. results : \square $\rho_2/\rho_1 = 2000$. , $+$ $\rho_2/\rho_1 = 2$. , Δ $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

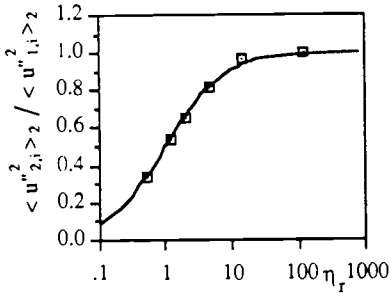


Figure 6 : Heavy particles , $\rho_2/\rho_1 = 2000$.

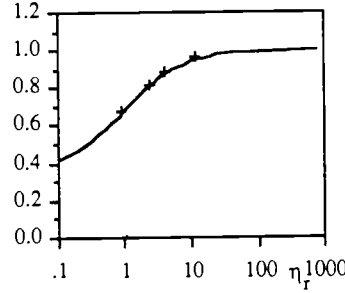


Figure 7 : Light particles , $\rho_2/\rho_1 = 2$.

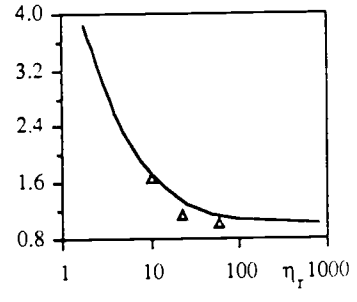


Figure 8 : Bubbles , $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

Figures 6, 7, 8 : Particle velocity variances computed by L.E.S. , comparison with the results of Tchen's theory extension
 \square , $+$ and Δ L.E.S. , — Tchen's theory extension

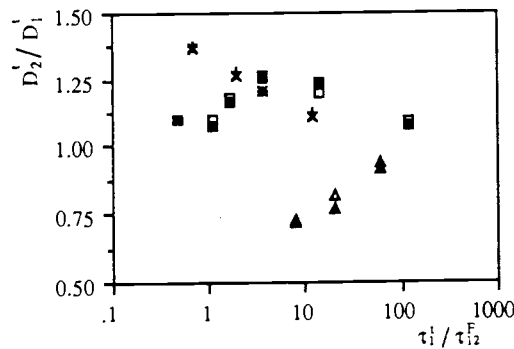
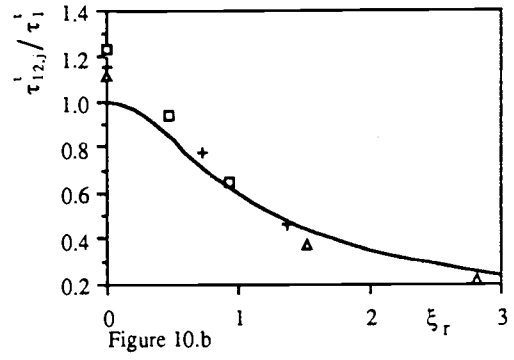
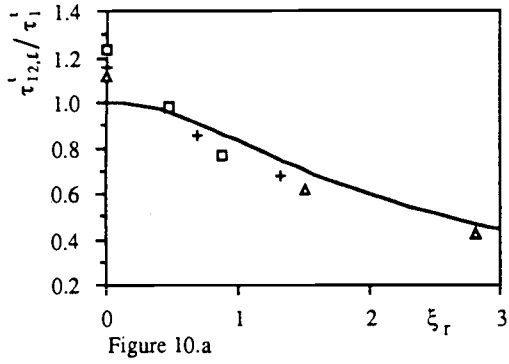
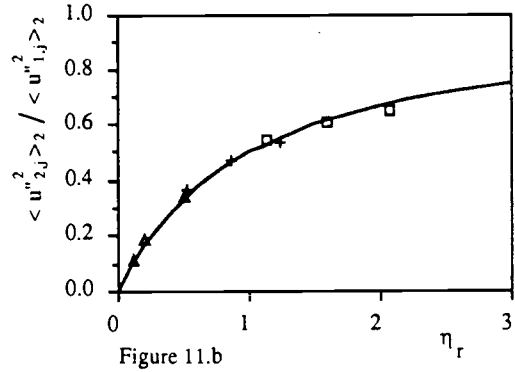
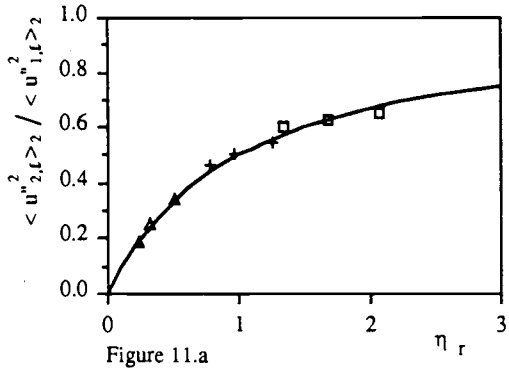


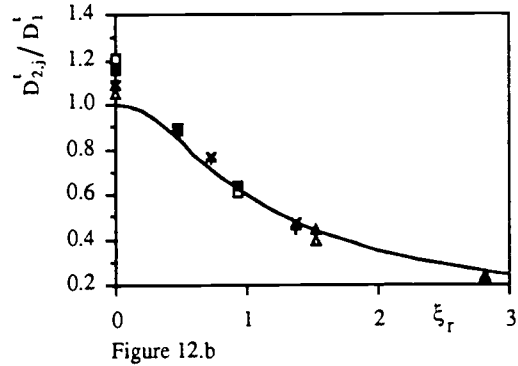
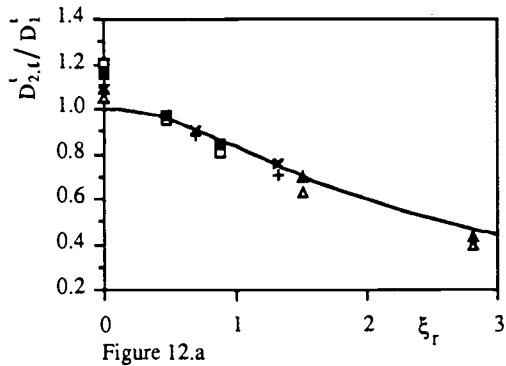
Figure 9 : Particle dispersion coefficient, comparison between theoretical expression obtained in the framework of diffusion approximation (Eq. 5) and Eulerian two-fluid model formalism (Eq. 13) respectively :
 \square and \blacksquare for $\rho_2/\rho_1 = 2000$. , $+$ and \times for $\rho_2/\rho_1 = 2$. , Δ and \blacktriangle for $\rho_2/\rho_1 = 0.001$



Figures 10 : Fluid-particle integrale time scale computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison with prediction of the Tchen's theory extension : \square , + and Δ L.E.S. (particle diameter $d= 45 \mu\text{m}$, $57 \mu\text{m}$ and $90 \mu\text{m}$ respectively), — Tchen's theory extension.



Figures 11 : Particle velocity variances computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison with prediction of the Tchen's theory extension : \square , + and Δ L.E.S. (particle diameter $d= 45 \mu\text{m}$, $57 \mu\text{m}$ and $90 \mu\text{m}$ respectively), — Tchen's theory extension.



Figures 12 : Particle dispersion coefficient computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison between theoretical expression obtained in the framework of diffusion approximation (Eq. 5) and Eulerian two-fluid model formalism (Eq. 13) respectively : \square and \blacksquare for particle diameter $d= 45 \mu\text{m}$, + and \times for particle diameter $d=57 \mu\text{m}$, Δ and \blacktriangle for particle diameter $d=90 \mu\text{m}$, and with Csanady expression (Eq. 21) — .

LARGE EDDY SIMULATION APPLIED
TO THE MODELLING OF PARTICULATE TRANSPORT COEFFICIENTS
IN TURBULENT TWO-PHASE FLOWS

E. Deutsch and O. Simonin

Laboratoire National d'Hydraulique - EDF
6 Quai Watier, 78400 Chatou, France

ABSTRACT

Statistical characteristics of particles suspended in an homogeneous and steady fluid turbulence have been studied using Large Eddy Simulation (L.E.S.). Computations have been carried out for three typical particle/fluid density ratio ($\rho_2/\rho_1 = 2000, 2$ and 0.001) with the particle equation of motion including drag, fluid pressure and added-mass forces.

Numerical predictions are compared with analytical expressions obtained by an extended approach of the Tchen's theory which takes into account crossing-trajectories effects. In parallel, the computation of the particulate transport coefficients validates closure assumptions used in the frame of the Eulerian two-fluid modelling with a special care about the separate contribution to dispersion induced by the transport of particles by the turbulent fluid motion.

INTRODUCTION

This study takes part in a more general work on the numerical prediction of turbulent dispersed two-phase flows using Eulerian equations for both phases. In this approach, the general equations set governing particle motion in homogeneous and steady turbulent two-phase flow leads to identify several terms which contribute simultaneously to the particle dispersion mechanism.

Thus, the correlation between the instantaneous distribution of particles and the fluid velocity fluctuations, at large scale with respect to the particle diameter, induces a separate contribution which predominates for particle diameter tending towards zero. Based on semi-empirical analysis, this contribution may be written in terms of a binary turbulent dispersion coefficient proportional to the mean product between velocity fluctuations of the two phases and an eddy-particle interaction time (Simonin, 1990).

In order to analyse the accuracy of closure assumptions used to compute dispersed phase transport coefficients, mean-square of velocity fluctuations and fluid-particle turbulent interaction terms, we have investigated the statistical characteristics of particle clouds suspended in an homogeneous and steady fluid turbulence using Large Eddy Simulation results.

BASIC EQUATIONS

Averaged field equations

In the two-fluid model formulation, the field equations for each phase can be derived directly from the local instant conservation equations in single-phase flow by density-weighted averaging with in addition average balances of mass, momentum and energy at the interfaces. By assumption, the mean spacing between particles is assumed to be very small with respect to the scale of variations in the mean flow. Therefore the method of averaging associated to the dispersed phase can be expressed at any point as an ensemble average taken over the large number of particles included in a reference time-space domain centred on the point.

Restricting our attention to isothermal mixtures, where no phase change occurs, the field equations for the two-fluid model is written assuming that the

granular stress due to interparticle collision and the molecular viscous stress in the fluid phase are negligible.

Mass balance :

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_k \rho_k U_{k,i} = 0 \quad (1)$$

$U_{k,i}$ is the mean velocity i -component for the continuous ($k=1$) and dispersed phases ($k=2$) respectively, α_k is the volumetric fraction and ρ_k the mean density.

Momentum balance :

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial}{\partial t} U_{k,i} + \alpha_k \rho_k U_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{k,i} = -\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_i} P_1 + \alpha_k \rho_k g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_k \langle \rho u_i^* u_j^* \rangle_k + I_{k,i} \quad (2)$$

u_i^* is the fluctuation of the local instantaneous velocity and $\langle . \rangle_k$ the averaging operator associated to phase k ,

$$\alpha_k \rho_k U_{k,i} = \alpha_k \langle \rho u_i \rangle_k \quad \langle \rho u_i^* \rangle_k = 0$$

P_1 is the mean pressure of the continuous phase,

$I_{k,i}$ is the part of the interfacial momentum transfer rate between phases which remains after subtraction of the mean pressure contributions.

Interfacial momentum transfer

If we consider a dilute dispersion of small rigid spheres in translation with relative motions of low Reynolds number, the resulting force induced by the surrounding nonuniform fluid flow on each point included in the dispersed phase can be written :

$$f_{2,i} = -\rho_1 F_D v_{r,i} - \rho_1 C_A \frac{dv_{r,i}}{dt} - \rho_1 C_H \int_{t_0}^t \frac{dv_{r,i}}{dt} \frac{d\tau}{\gamma t - \tau} + \left[\rho_1 \frac{d\tilde{u}_{1,i}}{dt} - \rho_1 g_i \right] \quad (3)$$

$v_{r,i}$ is the local instantaneous relative velocity defined on each point included in the particulate phase and given by $v_{r,i} = \tilde{u}_{2,i} - \tilde{u}_{1,i}$,

$\tilde{u}_{2,i}$ is the translation velocity of the particle which contains the point,

$\tilde{u}_{1,i}$ is the characteristic velocity of the surrounding flow field locally undisturbed by the presence of the particle but which remains turbulent.

The first three terms on the right-hand side of Eq. (3) correspond to the drag, the added mass and the Basset history force respectively. The last two terms are due to the stress applied on the particle by the undisturbed surrounding fluid flow. The derivative d/dt is used there to denote a time derivative following the moving particle.

Since Tchen's proposal, several papers have appeared correcting or modifying terms in the equation of particle motion. According to Gatignol (1983), the approximate form used there is valid at low particle Reynolds number, if the representative time of the variation rate of the undisturbed fluid flow is of the same order as the characteristic time of the viscous effects acting on the particle. At high particle Reynolds number, we must notice that the fluid velocity

derivatives in the equation (3) should be expressed in terms of the change along the fluid element trajectory. This modification could be especially important in predicting the motion of bubbles in a liquid.

Finally, constitutive relations for the interfacial transfer terms $I_{k,i}$ in the basic Eulerian equations may derive by averaging from the particulate expression. Special care is required to take into account the dispersion effect due to the fluctuations of the momentum transfer terms (Simonin, 1990).

EULERIAN MODELLING OF PARTICLE DISPERSION

Particle dispersion in homogeneous turbulence

In the framework of the diffusion approximation, the flux induced by the random motion of fluid (or discrete) particles is written in terms of the gradient of the volumetric fraction as

$$\alpha_k U_{k,i} = -D_{k,ij}^i \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_j} \quad (4)$$

the effective turbulent diffusion (or dispersion) tensor components are given by :

$$D_{k,ij}^i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle y_{k,i} y_{k,j} \rangle_k \quad (5)$$

where $\langle y_{k,i} y_{k,j} \rangle_k$ is the time-dependant displacement tensor of fluid ($k=1$) and discrete ($k=2$) particles.

For long time dispersion, the dispersion tensor can be related to the velocity correlation field by

$$D_{k,ij}^i = \sqrt{\langle u_{k,i}^2 \rangle_k \langle u_{k,j}^2 \rangle_k} \int_0^\infty R_{k,ij}(\tau) d\tau \quad (6)$$

where the Lagrangian correlation tensors R_1 and R_2 are computed along the fluid and discrete particles trajectories respectively and correspond with the energy spectrums E_1 and E_2 by Fourier transformations.

Finally, it is convenient to define a Lagrangian integral time scale

$$\tau_{k,ij}^i = \int_0^\infty R_{k,ij}(\tau) d\tau \quad (7)$$

In order to steady turbulent dispersion phenomenon in the two-fluid model formalism, we consider a dilute distribution of particles ($\alpha_2 \ll 1$) suspended in an homogeneous and steady turbulent fluid flow. Then, the particulate flux can be written :

$$\alpha_2 U_{2,i} = \alpha_2 [V_{r,i} + V_{d,i}]$$

$V_{r,i}$, the averaged value of the local relative velocity, can be obtained from the momentum equation (2) as

$$\alpha_2 V_{r,i} = - \left[\tau_{12}^F \langle u_{2,i} u_{2,j} \rangle_2 - b \tau_{12}^F \langle u_{1,i} u_{2,j} \rangle_2 \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_2$$

where τ_{12}^F is the characteristic time of particle dragging by the continuous fluid motion or particle relaxation time

$$\tau_{12}^F = F_D^{-1} \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A \right] \quad b = [1 + C_A] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A \right]^{-1} \quad (8)$$

$V_{d,i}$, the drifting velocity, is equal to the correlation between the instantaneous distribution of particles and the velocity fluctuations of the undisturbed fluid flow :

$$V_{d,i} = \langle \tilde{u}_{1,i} \rangle_2 - U_{1,i} = \langle u_{1,i} \rangle_2 \quad (9)$$

and takes into account the dispersion effect due to particles transport by turbulent fluid motion. According to the limit case of particles with diameter tending towards zero, for which the drifting velocity reduces to the single turbulent correlation between the volumetric fraction of the dispersed phase and the velocity of the continuous phase, the velocity $V_{d,i}$ is written as follows :

$$V_{d,i} = -D_{12,ij}^i \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} \right] \quad (10)$$

Thus, according to the previous expression of the particulate flux, the effective turbulent dispersion tensor for discrete particles can be directly related to the fluid-particle one :

$$D_{2,ij}^i = D_{12,ij}^i + \tau_{12}^F \left[\langle u_{2,i} u_{2,j} \rangle_2 - b \langle u_{1,i} u_{2,j} \rangle_2 \right] \quad (11)$$

Finally, the effective dispersion tensor of the particulate phase is obtained as the sum of a binary turbulent dispersion coefficient and a contribution due to the random motion of particles and the fluctuations of the fluid pressure and added mass forces. This last contribution is proportional to the particle relaxation time and so becomes negligible when the particle diameter tends towards zero. And the other hand, the equation (11) points out the prominent part plays by the mean-square of velocity fluctuations when the particle relaxation time is increasing. Thus, accurate predictions of particle-laden turbulent flows in the Eulerian formalism require reliable knowledge of the individual components of the dispersed-phase Reynolds stress tensor (Simonin, 1991).

Particles suspended in turbulent fluid flow

The traditional approach used to compute the statistical characteristics of the particulate fluctuating motion, is based on a direct extension of fundamental results concerning the motion of discrete particles suspended in an homogeneous and steady turbulent fluid flow. In the frame of the Tchen's theory, the dynamic equation for particle motion is Fourier transformed to the frequency domain where it can be solved directly.

For this purpose, we now introduce the Lagrangian correlation tensor \mathcal{R}_1 associated to the fluctuating motion of the fluid computed along the particles trajectories :

$$\mathcal{R}_{1,ij}(\tau) = \langle u_{1,i}(t) u_{1,j}(t+\tau) \rangle_2 / \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \langle u_{1,j}^2 \rangle_2} \quad (12)$$

which corresponds with the energy spectrum tensor \mathcal{E}_1 .

Then, from the particle motion equation (3), using Fourier transformations, we may establish a linear relation between energy spectrums with the help of the so-called particle response coefficient Q_{12} (Gouesbet et al., 1984) written analytically in terms of three independent dimensionless parameters :

$$E_{2,ij}(\omega) = Q_{12}(\tau_{12}^F \omega, C_H / \sqrt{\omega}, b) \mathcal{E}_{1,ij}(\omega) \quad (13)$$

Thus, the turbulent correlation tensor, the effective dispersion tensor and the mean-square velocity of the dispersed phase (but also the velocity covariance between phases) can be computed by numerical integration using a given form of the fluid Lagrangian correlation tensor \mathcal{R}_1 , for instance one obtains :

$$D_{2,ij}^i = \tau_{12,ij}^i \sqrt{\langle u_{1,i}^2 \rangle_2 \langle u_{1,j}^2 \rangle_2} \quad \tau_{12,ij}^i = \int_0^\infty \mathcal{R}_{1,ij}(\tau) d\tau \quad (14)$$

where $\tau_{12,ij}^i$, the fluid-particle Lagrangian integral time scale, or eddy-particle interaction time, characterize the fluid turbulence viewed by the particles.

But, we must notice that the fluid correlation tensor \mathcal{R}_1 , which leads to the previous results, is written in terms of the fluid velocity fluctuations encountered along the discrete particle trajectories. In general, this correlation tensor can not be identified directly with the standard one R_1 computed along the fluid element trajectories. As a matter of fact, this identification is probably the more questionable approximation of the Tchen's theory and is justified by the assumption that, during its motion, the neighbourhood of each particle will be formed by the same fluid element. But, for instance, for a non-zero mean relative velocity between phases, the modifications in the fluid turbulence viewed from a reference frame moving with the particulate phase lead to the so-called crossing-trajectories effects which clearly reduce the dispersion of the particles.

Crossing-trajectories effects

Using a slightly different method than the one proposed by Csanady (1963), we can note that, when the instantaneous displacement of the particles is dominated by the mean relative velocity, the Lagrangian correlation $\mathcal{R}_{1,ij}$ stands for an Eulerian space correlation of the fluid velocity fluctuations. Thus, restricting our attention to homogeneous and isotropic fluid turbulent

flows, the Lagrangian correlation, parallel to the mean relative velocity direction ℓ , is written :

$$\mathcal{R}_{1,\ell}(\tau) = \exp\left[-\tau / \tau_{12,\ell}^i\right] \quad (15)$$

where the eddy-particle interaction time is given by

$$\tau_{12,\ell}^i = \tau_1^i \left[1 + \beta^2 \xi_r^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \beta = \frac{\tau_1^i}{L_1^i} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{V_r^2}{q_i} \quad \xi_r^2 = \frac{3}{2} \frac{V_r^2}{q_i} \quad (16)$$

q_i is the fluid turbulent kinetic energy, L_1^i is the Eulerian length-scale and τ_1^i is the fluid Lagrangian time macroscale.

Neglecting the Basset force, we can compute analytically from equation (13) the longitudinal velocity variance of the dispersed phase, and the velocity covariance between the two phases, in terms of the fluid turbulent kinetic energy viewed by the particles :

$$\langle u_{2,\ell}^* u_{2,\ell}^* \rangle_2 = \langle u_{1,\ell}^* \rangle_2 \left[\frac{b^2 + \eta_r \ell}{1 + \eta_r \ell} \right] \quad \eta_{r,\ell} = \frac{\tau_{12,\ell}^i}{\tau_{12}^F} \quad (17)$$

$$\langle u_{1,\ell}^* u_{2,\ell}^* \rangle_2 = \langle u_{1,j}^* \rangle_2 \left[\frac{b + \eta_{r,\ell}}{1 + \eta_{r,\ell}} \right]$$

we can notice that previous expressions are affected by inertial and crossing-trajectories effects simultaneously, through the characteristic times ratio η_r .

If the instantaneous distribution of particles and the fluid turbulent kinetic energy are uncorrelated so that :

$$\langle u_{1,\ell}^* \rangle_2 = \langle u_{1,\ell}^* \rangle_1 = 2/3 q_1^2$$

we obtain from (14) the expression proposed by Csanady for the effective particle dispersion coefficient

$$D_{2,\ell}^i = D_1^i \left[1 + \beta^2 \xi_r^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Comparison of the previous equation with experimental results (Wells and Stock, 1983) shows a good agreement and leads to the approximate value of $\beta^2 = 0.45$.

Following Csanady proposal, we may assume same forms for the lateral turbulent characteristics than for the longitudinal one, but with a different eddy-particle interaction time because of the continuity effect :

$$\tau_{12,j}^i = \tau_1^i \left[1 + 4\beta^2 \xi_r^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad j \neq \ell \quad (19)$$

Finally, the fluid-particle dispersion coefficient may be written in terms of the velocity covariance and the eddy-particle interaction time as

$$D_{1,2,j}^i = \tau_{12,j}^i \langle u_{1,i}^* u_{2,j}^* \rangle_2 \quad (20)$$

Thus, substituting analytical expressions for the kinetic stress tensor components in the definition of the effective particle dispersion tensor from the two-fluid model formalism (11), we obtain the equality (14) due to the direct Fourier resolution of particle motion equation.

Particle kinetic stress in simple shear flow

The computation of particle velocity fluctuations depends on the interaction with the fluid turbulent motion, but is also modified by the mean gradient of the particle velocity. Restricting our attention to dilute concentrations of heavy particles, we may obtain from the second-moment transport equations (Simonin, 1991), by neglecting convective and diffusive transport, the following equation for the off-diagonal correlations :

$$\langle u_{2,i}^* u_{2,j}^* \rangle_2 = R_{12,ij} - \frac{1}{2} \tau_{12}^F \left[\langle u_{2,i}^* u_{2,m}^* \rangle_2 \frac{\partial U_{2j}}{\partial x_m} + \langle u_{2,j}^* u_{2,m}^* \rangle_2 \frac{\partial U_{2i}}{\partial x_m} \right] \quad (21)$$

where the first contribution, which results from the local dragging by the fluid turbulent motion, is equal to the fluid-particle symmetrical correlation tensor $R_{12,ij}$:

$$R_{12,ij} = \frac{1}{2} \left[\langle u_{1,i}^* u_{2,j}^* \rangle_2 + \langle u_{2,i}^* u_{1,j}^* \rangle_2 \right] \quad (22)$$

The set of equations governing the fluid-particle correlation tensor cannot be derived exactly from the

local instantaneous equations. Nevertheless, from an approximate form of the fluid velocity fluctuation equation of the Langevin type, we may obtain a practical form of the second-moment equation, which reads, neglecting convective and diffusive transport, as follows

$$\langle u_{1,i}^* u_{2,j}^* \rangle_2 = \frac{\eta_r}{1 + \eta_r} \langle u_{1,i}^* u_{1,j}^* \rangle_2 - \frac{\tau_{12}^i}{1 + \eta_r} \left[\langle u_{1,i}^* u_{2,m}^* \rangle_2 \frac{\partial U_{2j}}{\partial x_m} + \langle u_{2,j}^* u_{1,m}^* \rangle_2 \frac{\partial U_{1i}}{\partial x_m} \right] \quad (23)$$

Thus, if the fluid Reynolds shear stress viewed by the particles may be computed with the help of the eddy viscosity concept in terms of the eddy-particle interaction time and the fluid-particle velocity correlation, providing that the mean gradient of the relative velocity may be neglected, we obtain the eddy-viscosity of heavy particle clouds suspended in homogeneous turbulence as

$$v_2^i = \tau_{12}^i \frac{1}{3} q_{12} + \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2 \quad (24)$$

$$\text{where } q_{12} = \sum_{i=1}^3 \langle u_{1,i}^* u_{2,i}^* \rangle_2 \text{ and } q_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle u_{2,i}^* u_{2,i}^* \rangle_2$$

Like the dispersion coefficient, the particulate eddy-viscosity is written as the sum of two separate contributions proportional to the eddy-particle interaction time and the particle relaxation time respectively. According to the effective dispersion coefficient expression, the Schmidt leads to 1/2 for "large" heavy particles ($\eta_r \ll 1$). And the other hand, the previous expression is consistent with the modelling of the fluid turbulence when the particle diameter is tending towards zero ($\eta_r \gg 1$).

On the contrary, if the fluid turbulence remains fully isotropic corresponding to a zero fluid velocity gradient, the effective eddy-viscosity of the particle clouds reduces to the following expression

$$v_2^i = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_{12}^i}{1 + \eta_r} \right] \frac{1}{3} q_{12} + \frac{1}{2} \tau_{12}^F \frac{2}{3} q_2^2 \quad (25)$$

which is decreasing with the particle relaxation time, but has the same limit than (24) for "large" particles.

LARGE EDDY SIMULATION METHOD

Fluid turbulence predictions

The computations of particle trajectories in homogeneous fluid turbulence require the knowledge of the instantaneous three-dimensional velocity field. Though the Direct Simulation is the approach the most satisfactory from the theoretical point of view, it is not practical owing to the limitation to low Reynolds number turbulence. But, as the dominant process in particle displacement is the interaction with the large scales of the fluid velocity field, we can use Large Eddy Simulation with a good accuracy. The numerical methods used there have been developed for many years at the "Laboratoire National d'Hydraulique" (Khoufli, 1988).

The fluid equations are unchanged by the presence of the particles since the volume fraction of the particles and the interfacial momentum transfer are assumed to be negligible. The homogeneous and isotropic turbulence field, obtained from simulation using 64^3 grid points, stands still artificially by adjustment of the spectrum by comparison with the theoretical von Karman-Pao form. Fluid turbulent characteristics correspond to the initial measurements of Wells and Stock experiment (1983) in a grid-generated turbulence.

Particle tracking algorithm

In order to minimize numerical bias, statistical results for each case were obtained from an ensemble of about 25000 particle trajectories. Special attempts were made in the treatment of the particle motion concerning the projection of instantaneous fluid characteristics on the position of the particles and the time integration of the dynamic equation (Deutsch and Simonin, 1991).

The particle momentum equation was time advanced using a second-order Runge-Kutta scheme with the same

time step as for the fluid velocity field calculation. The particles were released with an initial velocity equal to the local instantaneous fluid velocity. To remove the influence of the release conditions, the particles were allowed to disperse somewhat before the statistics were calculated. The Basset force contribution is assumed to be negligible, this assumption may reduce the practical accuracy of the simulations for the lightest particles but does not affect the comparison with the theoretical results obtained in the frame of the Tchen's theory and based on the same assumption.

RESULTS AND DISCUSSION

Particles suspended in turbulent fluid flows

In a first step, computations were carried out for zero-mean relative velocity (without gravity) and three typical particle/fluid density ratio ($\rho_2/\rho_1 = 2000, 2$ and 0.001) with various particle diameters in order to modify appreciably the particle relaxation time.

The results validate the theoretical expressions derived, in the frame of two-fluid model formalism, for the dispersion coefficient (figure 3) and the velocity fluctuations (figures 4 to 9) in terms of the fluid turbulent characteristics viewed by the particles. Thus, in order to improve the accuracy of Eulerian predictions, the closure assumptions should take into account the tendency of the fluid-particle Lagrangian integral time scale, or eddy-particle interaction time, to increase for large values of the particle relaxation time (figure 2).

As the particle dispersion coefficient can be written as proportional to the "eddy-particle interaction time" using Eq. (14), it may be pointed out (figure 3) that the particle dispersion coefficient may be greater than that of fluid elements. But, for practical purpose, this effect must be compared with the increase of effective dispersion (up to ten times more) observed in particle-laden jets predictions (Simonin, 1990) and due to the memory of injection conditions on the particle velocity correlations distribution.

And the other hand, the results of simulation for the lightest particles ($\rho_2/\rho_1 = 0.001$) exhibit large statistical bias (figure 1) due to the correlation between the distribution of the particles and the local instantaneous fluid turbulent kinetic energy, corresponding to a strong preference to collect in regions of low velocity. According to the analysis based on the Fourier transformation of the dynamic equation (Gouesbet et al., 1981), the kinetic energy of the lightest particles is locally larger than the one of the fluid turbulence viewed by the particles (figure 6), but, due to the statistical bias, remains smaller than the average turbulent kinetic energy of the whole fluid flow.

In addition, Figures 10 to 12 show the separate contribution of the fluid-particle dispersion coefficient induces by transport of particles by fluid turbulent motion. These results are consistent with the idea that the dispersion of the very small discrete particles is mainly controlled by the fluid turbulent mixing. However, we can note the surprising results that the fluid-particle dispersion coefficient for the lightest particles may be larger than the effective one owing to the fact that undisturbed fluid pressure and added mass effects induce a negative contribution.

Crossing-trajectories effects

The effect of non-zero mean relative velocity of particles crossing a stationary homogeneous turbulent field is studied based on results of the Large Eddy Simulation for different values of the external force applied on the heavy particles ($\rho_2/\rho_1 = 2000$).

Figures 13 compare the fluid-particle Lagrangian integral time scales, computed from the L.E.S. results, with analytical expressions (16) and (19) with $\beta^2 = 0.45$. We can note a fine agreement between the simulation data and equations, specially for increasing values of the mean relative velocity. Consistent with the so-called continuity effects, the fluid-particle Lagrangian time scale in direction perpendicular to the mean relative velocity are becoming half as large as the one along the parallel direction. Thus, we obtain that the effect of

crossing trajectories reduces the dispersion of the particles, but also the particle and fluid-particle velocity correlations, unequally in directions parallel and normal to the mean relative velocity.

Figures 14 show an extremely good agreement between simulated velocity correlations and analytical expressions (17) obtained in the frame of the Tchen's theory. Finally, figure 15 shows an improvement in the accuracy of the closure assumptions used in the Eulerian two-fluid modelling for non-zero mean relative velocity.

Particle kinetic shear stress

The influence of the mean velocity gradient on the heavy particle kinetic shear stress is studied based on particle clouds with a x_3 linear variation of the mean velocity component $U_{2,1}$ imposed by a non-uniform external force field acting on the particles.

Firstly, figures 16 and 17 show that the computed particle and fluid-particle velocity correlations stand in good agreement with the analytical expressions (17). And the other hand, the particle dispersion coefficient, which may be computed from the displacement tensor (5) in the x_2 direction, is in very good agreement with the theoretical expressions obtained in the frame of two-fluid modelling and is correctly reduced according to an average crossing trajectories effect (figure 19).

Concerning the L.E.S. predictions of the particle Reynolds shear stress component $\langle u_{2,1} u_{2,3} \rangle_2$ influenced by the particle mean velocity gradient, figure 20 shows a fine agreement with the one obtained as the sum of the separate predicted contributions from (21). Thus, the separate contribution $R_{12,ij}$ due to the particle dragging by the fluid turbulence is decreasing with the increase of the particle relaxation time.

And the other hand, figure 21 show the separate fluid-particle velocity correlations which contribute to the particle shear stress. We obtain a fairly good agreement with the semi-empirical equation (23), specially for the component $\langle u_{2,1} u_{1,3} \rangle_2$ influenced by the particle mean velocity gradient. Unfortunately, a part of these correlations is due to the residual anisotropy of the predicted fluid turbulence and thus limit the accuracy of the analysis concerning the particle eddy-viscosity.

However, figure 18 shows the comparison of the theoretical expressions (24) and (25) for particle eddy-viscosity with the effective one computed as the particle shear stress predictions and the mean velocity gradient ratio. The deviation between predictions and the equation (25) is due to the residual fluid turbulence anisotropy in the L.E.S. predictions. Thus, the agreement is increasing with the particle relaxation time, when dispersion effects are mainly controlled by the random motion of particles, and finally, the results validates the limit value $1/2$ obtained for the particle Schmidt ($\eta_r < 1$).

REFERENCES

- Csanady, G.T., 1963, "Turbulent Diffusion of Heavy Particles in the Atmosphere". *J. Atm. Sc.*, Vol. 20, pp.201-208.
- Deutsch, E., Simonin, O., 1991, "Large Eddy Simulation Applied to the Motion of Particles in Stationary Homogeneous Fluid Turbulence". *Proc. Workshop Turbulence Modification in Multiphase Flows*, June 23-26, Portland, U.S.A.
- Gatignol, R., 1983, "The Faxen Formulae for a Rigid Particle in an Unsteady Non-Uniform Stokes Flow". *J. de Méc. Th. et Appl.*, Vol. 1, n° 2, pp 143-160.
- Gouesbet, G., Berlemont, A., Picart, A., 1984, "Dispersion of Discrete Particles by Continuous Turbulent Motions". *Phys. Fluids*, Vol. 27, n° 4, pp 827-837.
- Khoudiy, M., 1988, "Macrosimulation de Turbulence Homogène en Présence de Cisaillement et de Gradients Thermiques. Application aux Modèles de Fermeture en un Point". *Thèse Ecole Centrale de Lyon*, Lyon.
- Simonin, O., 1990, "Eulerian Formulation for Particle Dispersion in Turbulent Two-Phase Flows". *Proc. 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, Mars 19-22, Erlangen, R.F.A.
- Simonin, O., 1991, "Prediction of the Dispersed Phase Turbulence in Particle-Laden Jets". *Proc. 4th Int. Symp. on Gas-Solid Flows*, June 23-26, Portland, U.S.A.
- Wells, M.R., Stock, D.E., 1983, "The Effects of Crossing Trajectories on the Dispersion of Particles in a Turbulent Flow". *J. Fluid. Mech.*, Vol. 136, pp 31-62.

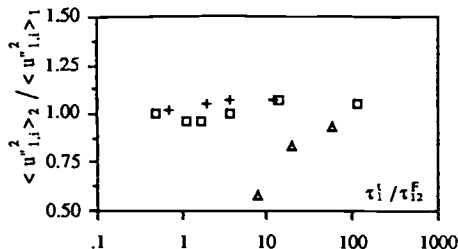


Figure 1: Variance of the fluid velocity computed along particle trajectories: \square $\rho_2/\rho_1 = 2000$, $+$ $\rho_2/\rho_1 = 2$, Δ $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

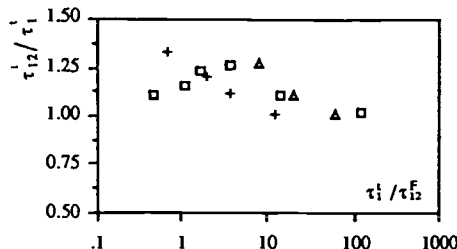


Figure 2: Fluid-particle integral time scale computed from L.E.S. results: \square $\rho_2/\rho_1 = 2000$, $+$ $\rho_2/\rho_1 = 2$, Δ $\rho_2/\rho_1 = 0.001$

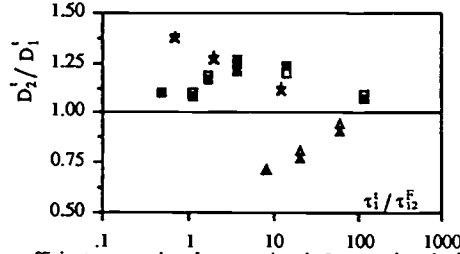
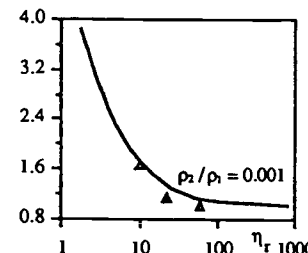
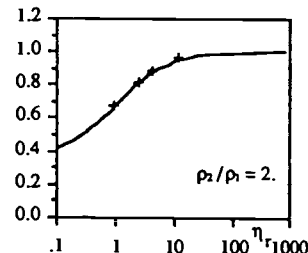
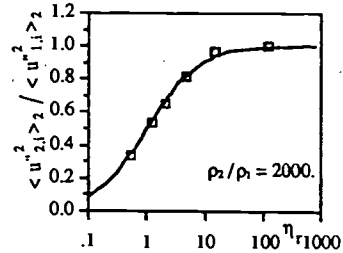
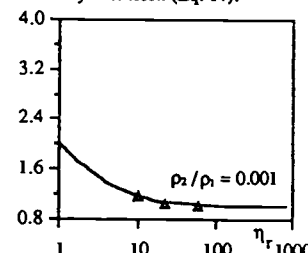
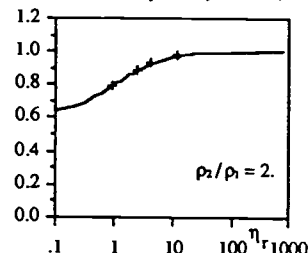
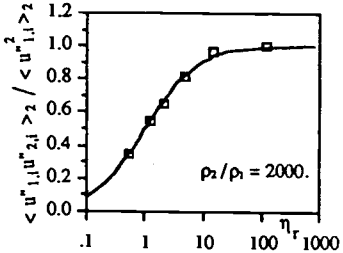


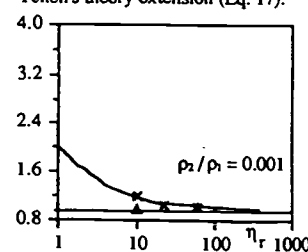
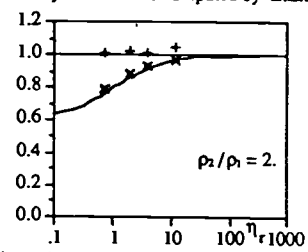
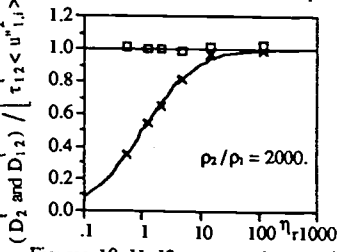
Figure 3: Particle dispersion coefficient, comparison between theoretical expression obtained in the framework of diffusion approximation (Eq. 5) and Eulerian two-fluid model formalism (Eq. 11) respectively: \square and \blacksquare for $\rho_2/\rho_1 = 2000$, $+$ and \times for $\rho_2/\rho_1 = 2$, Δ and \blacktriangle for $\rho_2/\rho_1 = 0.001$



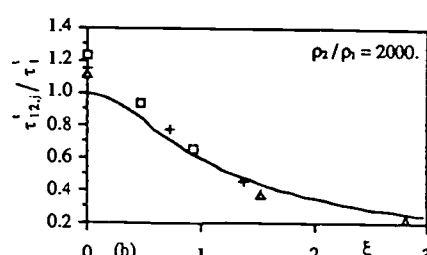
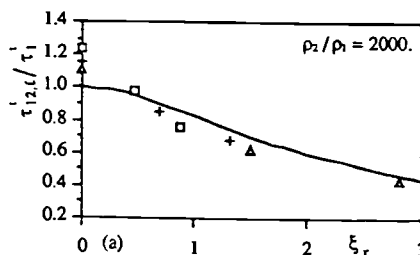
Figures 4, 5, 6: \square , $+$ and Δ , particle velocity variances computed by L.E.S., — Tchen's theory extension (Eq. 17).



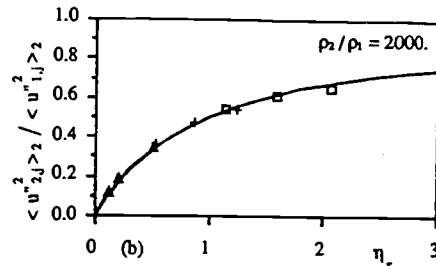
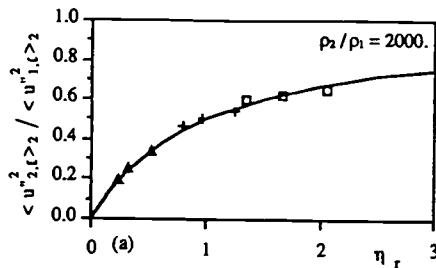
Figures 7, 8, 9: \square , $+$ and Δ , fluid-particle velocity covariances computed by L.E.S., — Tchen's theory extension (Eq. 17).



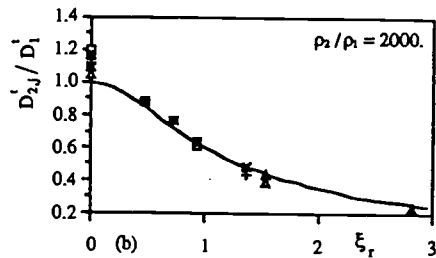
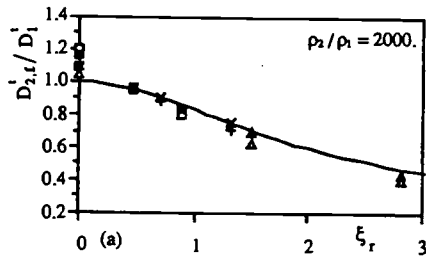
Figures 10, 11, 12: \square , $+$ and Δ , particle dispersion coefficient computed by L.E.S. (Eq. 5); \times , fluid-particle dispersion coefficient computed from L.E.S. results (Eq. 20); — dispersion coefficients (Eq. 11 and 20) computed from the particle and fluid-particle Reynolds stress expressions of the Tchen's theory extension (Eq. 17).



Figures 13: Fluid-particle integrale time scale computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison with Csanady expression ($\beta^2=0.45$): \square , $+$ and Δ L.E.S. (particle diameter $d = 45 \mu\text{m}$, $57 \mu\text{m}$ and $90 \mu\text{m}$ respectively), — Csanady expression.



Figures 14 : Particle velocity variances computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison with prediction of the Tchen's theory extension : \square , + and Δ L.E.S. (particle diameter $d = 45 \mu\text{m}$, $57 \mu\text{m}$ and $90 \mu\text{m}$ respectively), — Tchen's theory extension.



Figures 15 : Particle dispersion coefficient computed from L.E.S. results along the directions parallel (a) and perpendicular (b) to the mean relative velocity, comparison between theoretical expression obtained in the framework of diffusion approximation (Eq. 5) and Eulerian two-fluid model formalism (Eq. 11) respectively : \square and \blacksquare for particle diameter $d = 45 \mu\text{m}$, + and \times for particle diameter $d = 57 \mu\text{m}$, Δ and \blacktriangle for particle diameter $d = 90 \mu\text{m}$, — Csanady expression (Eq. 18).

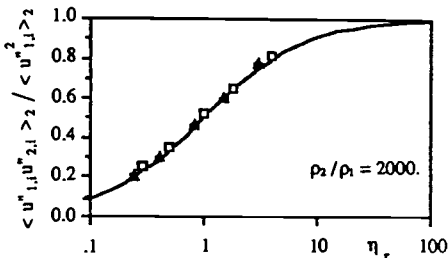
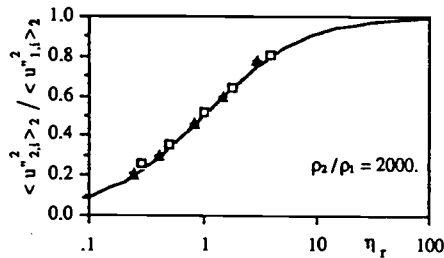


Figure 16 : \square , Δ , +, particle velocity variances computed by L.E.S.; — Tchen's theory extension (Eq. 17).

Figure 17 : \square , Δ , +, fluid-particle velocity covariances computed by L.E.S.; — Tchen's theory extension. (Eq. 17).

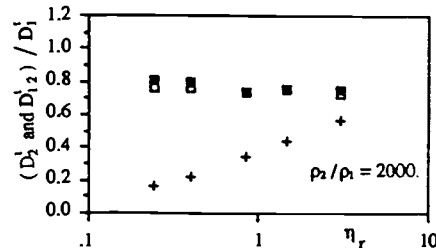
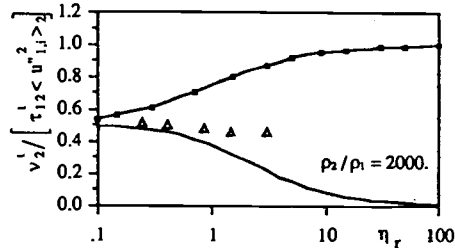


Figure 18 : Δ , effective particle viscosity computed from L.E.S. results; — and — theoretical expressions obtained in the framework of Eulerian two fluid modelling (Eq. 24 and 25).

Figure 19 : \square and \blacksquare , particle dispersion coefficient computed from L.E.S. results (cf. figure 3); +, fluid-particle dispersion coefficient.

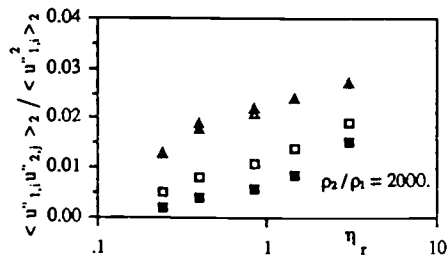
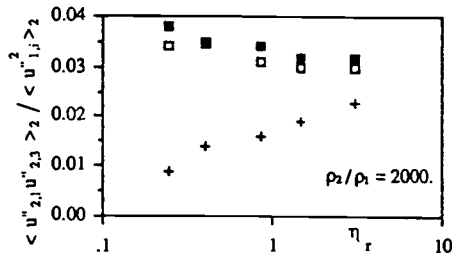


Figure 20 : \square and \blacksquare , particle shear stress computed by L.E.S. and Eulerian two fluid model formalism (Eq.21); + fluid-particle symmetrical tensor (Eq. 22).

Figure 21 : Fluid-particle shear stress computed by L.E.S. and Eulerian two fluid model formalism (Eq.23) respectively : \square and \blacksquare for $\langle u_{1,i} u_{2,j} \rangle_2$, Δ and \blacktriangle for $\langle u_{2,i} u_{1,j} \rangle_2$.

