

T 1474

No d'ordre : 92-64

Année 1992

MEMOIRE DE THESE

présenté pour obtenir le titre de DOCTEUR

ECOLE CENTRALE DE LYON

Spécialité MECANIQUE

Fabrice THOUVEREZ

IDENTIFICATION TEMPORELLE DES
STRUCTURES NON-LINEAIRES

Soutenu le 16/12/92 devant la commission d'Examen

JURY MM.	Lalanne	Président
	Vinh	Rapporteur
	Gibert	Rapporteur
	Jezequel	Examineur
	Bouc	Examineur
	Deck	Examineur

No d'ordre : 92-64

Année 1992

MEMOIRE DE THESE

9
ECOLE CENTRALE DE LYON
B.P. 163 - 69131 ECULLY CEDEX
FRANCE

présenté pour obtenir le titre de DOCTEUR

ECOLE CENTRALE DE LYON



Spécialité MECANIQUE

Fabrice THOUVEREZ

**IDENTIFICATION TEMPORELLE DES
STRUCTURES NON-LINEAIRES**

Soutenu le 16/12/92 devant la commission d'Examen

JURY MM.	Lalanne	Président
	Vinh	Rapporteur
	Gibert	Rapporteur
	Jezequel	Examineur
	Bouc	Examineur
	Deck	Examineur

T 1476
ECOLE CENTRALE DE LYON
BIBLIOTHEQUE
BP 163 F - 69131 ECULLY CEDEX

ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET
 Directeur Adjoint : E. PASCAUD
 Directeur des Etudes : F. SIDOROFF

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 Juillet 1984,
 modifié par l'Arrêté du 21 Mars 1988)

Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mlle)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maitre de Conférences
G. THOMAS	Maitre de Conférences
F. MUSY	Maitre de Conférences

Physico-Chimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maitre de Conférences
A. GAGNAIRE	Maitre de Conférences
C. MARTELET	Maitre de Conférences
R. OLIER	Maitre de Conférences
Y. ROBACH	Maitre de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENO	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maitre de Conférences
D. NGUYEN	Maitre de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

Electronique

R. BLANCHET	Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maitre de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

Electrotechnique

P. AURIOL	Professeur
A. NICOLAS	Professeur
G. ROJAT	Maître de Conférences

Mécanique des Solides

B. CAMBOU	Professeur
F. SIDOROFF	Professeur
L. JEZEQUEL	Professeur
A. DOGUI	Maître de Conférences
C. SURRY	Professeur - E.N.I.S.E.

Technologie des Surfaces

J.M. GEORGES	Professeur
J. SABOT	Professeur
J.M. MARTIN	Professeur
N. ALBEROLA (Mme)	Maître de Conférences
H. MONTES	Maître de Conférences
T. MATHIA	Directeur de Recherche au CNRS
P. KAPSA	Chargé de Recherche au CNRS
J.L. LOUBET	Chargé de Recherche au CNRS

Mécanique des Fluides

J. MATHIEU	Professeur
E. ALCARAZ	Professeur
D. JEANDEL	Professeur
F. LEBOEUF	Professeur
J. BATAILLE	Professeur - Lyon I
B. GAY	Professeur - Lyon I
J. GENGE	Professeur - Lyon I
M. LANCE	Professeur - Lyon I
R. MOREL	Professeur - INSA
C. CAMBON	Chargé de Recherche au CNRS
J.P. BERTOGLIO	Chargé de Recherche au CNRS
P. FERRAND	Chargé de Recherche au CNRS
D. HENRY	Chargé de Recherche au CNRS

Acoustique

G. COMTE-BELLOT (Mlle)	Professeur
D. JUVE	Professeur
M. SUNYACH	Professeur - Lyon I (IUT)
M. ROGER	Maître de Conférences
P. BLANC-BENON	Chargé de Recherche au CNRS

Machines Thermiques

M. BRUN	Professeur
P. ARQUES	Professeur
J.C. CHAMPOUSSIN	Professeur - Lyon I

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au Département de Mécanique des Solides de l'Ecole Centrale de Lyon, dirigé par Monsieur le Professeur L. Jezequel. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour avoir assuré la direction scientifique de cette thèse et pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur M. Lalanne, Directeur du Laboratoire des Structures de l'INSA Lyon qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

J'exprime ma très grande reconnaissance à Monsieur T. Vinh, Professeur à l'ISMCM et à Monsieur R. Gibert, Professeur à l'INSTN à Saclay, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie très vivement le professeur Bouc de l'université de Marseille et Monsieur Deck, Directeur technique de la SOPEMEA pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tout le personnel du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'ECL dont l'amitié m'a été précieuse.

RESUME

A l'heure actuelle, les techniques d'identification connaissent un essor très important et trouvent beaucoup d'applications dans le domaine industriel. Cependant la présence de non-linéarité dans la structure étudiée reste encore un problème majeur. En effet, la plupart des techniques d'identification classiques ne prennent pas en compte le rôle des non-linéarités qui peuvent modifier considérablement le comportement de la structure.

L'objet de ce travail portera donc sur la mise en oeuvre de méthodes d'identification non-linéaires principalement basées sur des techniques non-paramétriques. Nous développerons ainsi de nouvelles stratégies permettant une prise en compte de non-linéarités fortes dans un contexte multi-dimensionnel. Nous aborderons le problème de l'identification au travers de trois méthodes principales : non-paramétrique, séries de Volterra et méthode NARMAX. Pour chacune d'elles, nous proposerons des développements originaux permettant de les améliorer de façon importante. De même, nous leur associerons un "outil" d'analyse (forme normale, force interne, critère statistique, ...) afin qu'elles puissent avoir un rôle d'analyse des phénomènes non-linéaires.

Nous montrerons sur des exemples numériques les possibilités et les limites de chacune de ces méthodes. Puis, nous appliquerons ces techniques à des structures réelles à l'aide d'essais expérimentaux mettant en jeu des amortisseurs non-linéaires ainsi que des non-linéarités localisées.

ABSTRACT

Nowadays, the technics of identification know an important development that have different applications in several fields of industry. However, the presence of non-linearity in elaborated structures remains one of the most important problems. In fact, most of the classical identification technics don't take in consideration the importance of non-linearities that can, substantially, change the behaviour of the structure.

The purpose of this work will be on a practical application of methods of a non-linear identification; which are principally based on non-parametrical technics. In this way, we will develop new strategies allowing strong non-linearities to be taken in consideration in a multi-dimensional context. We will treat the problem of identification through three main methods : non-parametrical, Volterra series and the NARMAX method. We propose original developments that will improve them all. In the same manner, we will associate them with an analytical "tool" (normal form, restoring force, statistical criterion,...) so that they may have an analytical function in the non-linear phenomens.

We will show the possibilities and the limits of every method on numerical examples. After this, we will apply these methods to real structures with the help of some experimental tests, by using non-linear dampers as well as localised non-linearities.

Table des Matières

Introduction	11
1 Identification linéaire	15
1.1 Introduction	15
1.2 Modélisation de l'amortissement	16
1.2.1 Amortissement visqueux	17
1.2.2 Amortissement hystérétique	19
1.3 Méthodes fréquentielles	19
1.3.1 Méthode du pic	20
1.3.2 Lissage du cercle	21
1.3.3 Lissage global	25
1.3.4 Effets résiduels	28
1.4 Méthodes temporelles	28
1.4.1 Identification de la réponse libre	29
1.4.2 Identification des schémas récursif	35
1.4.3 Calcul de l'ordre et validation	53
2 Phénomènes et détections non-linéaires	59
2.1 Introduction	59
2.2 Phénomènes non-linéaires	60
2.2.1 Résonance primaire	60
2.2.2 Sur harmonique	63
2.2.3 Sous harmonique	64
2.2.4 Résonance interne	64
2.2.5 Résonance en combinaison	66
2.2.6 Auto-oscillation	67
2.3 Détections non-linéaires	67

2.3.1	Méthodes directes	68
2.3.2	Méthodes indirectes	77
3	Modèle NARMAX	80
3.1	Introduction	80
3.2	Les représentations récursives non-linéaires	81
3.2.1	Représentation d'un système non linéaire discret	81
3.2.2	NARMAX-polynomial	82
3.2.3	NARMAX-orthogonal	83
3.2.4	NARMAX avec seuils	84
3.2.5	Modèles représentables par un NARMAX	85
3.2.6	Quelques remarques sur le NARMAX-polynomial	87
3.3	Algorithmes d'identification, de sélection et de validation	89
3.3.1	Identification des termes du NARMAX	89
3.3.2	Sélection des termes du NARMAX	93
3.3.3	Méthode de validation	97
3.3.4	Application à la base modale	101
3.3.5	Utilisation de la forme normale dans un modèle NARMAX	103
3.4	Essais numériques	108
3.4.1	Essais mono-dimensionnels	108
3.4.2	Essai multi-dimensionnel	111
3.5	Essai expérimental	115
4	Méthodes non paramétriques	135
4.1	Introduction	135
4.2	Méthode de Caughey et Masri	136
4.2.1	Base théorique	136
4.2.2	Cas mono-dimensionnel	136
4.2.3	Interpolation des P_{ij}	138
4.2.4	Extrapolation des P_{ij}	139
4.3	Applications	142
4.3.1	Oscillateur de Van der Pol	142
4.3.2	Essai expérimental	145

5	Les séries fonctionnelles de Volterra et Wiener	161
5.1	Introduction	161
5.2	Propriétés mathématiques	162
5.2.1	Existence, Unicité et Convergence	162
5.2.2	Causalité, Stabilité et Homogénéité	165
5.3	Identification des séries de Volterra	166
5.3.1	Cas de l'excitation impulsionnelle	166
5.3.2	Cas de l'excitation aléatoire	169
5.3.3	Cas quelconques	170
5.3.4	Par moindres carrés	171
5.3.5	Méthode orthogonale	171
5.4	Réalisation particulière de Volterra	173
5.4.1	Système en cascade	173
5.4.2	Contre réaction unitaire	175
5.4.3	Système multiplicatif	176
5.4.4	Modèle Sm	178
5.5	La représentation de Wiener	179
5.5.1	Cas du bruit blanc gaussien stationnaire	180
5.5.2	Cas d'un bruit non blanc stationnaire	182
5.5.3	Cas du bruit blanc gaussien non-stationnaire	183
6	Identification d'une non-linéarité localisée	186
6.1	Introduction	186
6.2	Formulation du problème	187
6.2.1	Cas de l'excitation aléatoire	189
6.3	Identification du système	190
6.4	Applications	192
6.4.1	Cas monodimensionnel	192
6.4.2	Cas multi-dimensionnel	194
6.5	Conclusion	197
7	Essais expérimentaux	212
7.1	Essai sur un amortisseur non-linéaire	212
7.2	Essai sur poutre non-linéaire	214

Conclusion

221

Introduction

L'identification joue un rôle essentiel dans la connaissance et la mise au point de modèle de prédiction. C'est donc très naturellement qu'on retrouve cette technique dans tous les secteurs d'activités nécessitant la connaissance de lois régissant une grandeur par rapport à des sollicitations externes. Ainsi, en économie (prévision financière), physiologie (pulsation cardiaque par rapport à un volume de produit injecté), thermique, mécanique, un grand nombre de méthodes d'identification a été mise au point toujours avec le souci de représenter au mieux le comportement observé à l'aide des grandeurs mesurées.

En mécanique, l'information dont dispose l'expérimentateur est souvent importante (accélération en plusieurs points, force, ...), mais le modèle qui relie les causes et les effets est souvent inconnu et fort complexe dès que l'on aborde les problèmes multi-dimensionnels. Dans le domaine linéaire, il existe une grande diversité de techniques d'identification dont certaines sont appliquées sur des structures réelles avec succès. Elles permettent de déterminer toutes les caractéristiques modales essentielles à l'expérimentateur pour obtenir un modèle mécanique. En général, ces méthodes sont issues d'algorithmes basés sur les propriétés des solutions des systèmes linéaires. C'est cette bonne connaissance du problème théorique qui permet de mettre au point des méthodes d'identification efficaces car basées sur le "squelette" des solutions analytiques. Cependant dans certains cas le comportement des structures ne répond pas à ce "moule" théorique et les phénomènes observés font appel à des méthodes d'analyse plus complexe en général de type non-linéaire. Il est important de noter, contrairement aux idées reçues, que les effets non-linéaires n'introduisent pas seulement une distorsion du modèle linéaire, mais aussi des comportements très particuliers. Ainsi, nous verrons que les synchronisations sous-harmoniques, sur-harmoniques, résonances internes, ... enrichissent la réponse dynamique des systèmes mécaniques d'effets, qui peuvent occasionner des phénomènes dangereux. La prise en compte de toute cette nouvelle phénoménologie est donc indispensable; ainsi un grand nombre de théories non-linéaires a vu le jour (Volterra et Weiner [3], NARMAX [79], Forme normal [50], ...) dans le but de se rapprocher au mieux de la réalité

avec des concessions théoriques les plus faibles possible. Cette démarche souvent difficile, fait intervenir des concepts mathématiques avancés dont l'application en mécanique n'est pas toujours aisée. Ces modèles généraux occasionnent pour la plupart des coûts de mise en oeuvre informatique très lourds, rendant leurs utilisations délicates. Beaucoup de chercheurs se sont donc intéressés à des systèmes moins généraux (Sm [23], contre-réaction non-linéaire [82], ...) dont l'analyse théorique fournit des solutions plus facilement exploitables. Les techniques de modélisation non-linéaire se divisent en deux grandes catégories, une paramétrique et l'autre non-paramétrique.

La première catégorie correspond à des modèles comportant un ensemble de paramètres physiques fixés par l'utilisateur. Cette procédure permet de caractériser et de maîtriser parfaitement les non-linéarités introduites. Cependant, elle présente le désavantage de nécessiter la connaissance des non-linéarités intervenant dans le comportement observé. Cette analyse est souvent difficile et risquée, tant les phénomènes non-linéaires sont divers et peuvent être dûs à différentes sortes de non-linéarités. L'utilisation d'une technique paramétrique se justifie dans la mesure où il est possible de maîtriser la forme de la non-linéarité (calcul analytique, éléments finis, ...) ou encore de détecter et de sélectionner les termes non-linéaires prépondérants (Ftest [47], critère AIC [39], ...).

La deuxième catégorie correspond aux méthodes non-paramétriques, qui consistent à estimer des paramètres abstraits dont la signification n'a qu'un sens mathématique. On retrouve dans cette classe de technique l'ensemble des méthodes orthogonales ainsi que les développements fonctionnels de Volterra et Weiner. Elle présente l'avantage de ne pas nécessiter de la part de l'utilisateur une connaissance des non-linéarités "en jeu, c'est par excellence des méthodes dites "boîtes noires". Par contre, ce type d'analyse ne permet pas en général d'obtenir un modèle facilement interprétable.

La sélection et la détection restent pour l'instant un étape encore délicate car la plupart des méthodes, si elles sont capables de détecter les effets non-linéaires, peuvent rarement donner la forme des non-linéarités. En général, ces techniques sont basées sur la violation des propriétés linéaires des systèmes (causalité, réciprocité, superposition, ...). Par exemple, la méthode par transformée de Hilbert vérifie le principe de causalité [26] et permet aussi de donner une estimation [2] des caractéristiques non-linéaires à partir des propriétés des moments statistiques. Les théories stochastiques jouent un rôle important dans ce type de techniques. En effet, il est possible à l'aide de tests statistiques de "mesurer" la présence d'un monôme non-linéaire dans une réponse globale. Cette démarche très utilisée en automatique et en économie reste encore peu appliquée aux problèmes mécaniques.

L'objet de ce mémoire portera donc sur la mise en oeuvre de méthodes d'identification non-linéaires principalement basées sur des techniques non-paramétriques. Nous développerons ainsi de nouvelles stratégies permettant une prise en compte de non-linéarités fortes dans un contexte multi-dimensionnel. Puis, nous essayerons chaque fois qu'il sera possible de leur associer un outil d'analyse (bispectre, forme normale, diagrammes des forces internes, ...) afin qu'il soit possible d'en faire une interprétation la plus précise possible.

Le mémoire comporte 7 chapitres :

Le chapitre 1 sera consacré à un rappel des méthodes d'identification linéaires. Nous diviserons ces techniques en deux classes : une fréquentielle et l'autre temporelle. Les méthodes fréquentielles utiliseront les fonctions de transfert pour extraire les caractéristiques modales de la structure tandis que les méthodes temporelles n'utiliseront que les échantillons temporels mesurés. Dans ce dernier type d'approche, nous présenterons les versions "off-line" (estimation grâce à l'ensemble des points de mesure) ainsi que "one-line" (estimation réactualisée à chaque nouveau point de mesure) des algorithmes temporels.

Le chapitre 2 sera plus axé sur les phénomènes non-linéaires et leurs détections. Nous aborderons donc les principaux phénomènes susceptibles d'apparaître sur des systèmes non-linéaires, ainsi que les problèmes liés à la détection des non-linéarités, plus particulièrement au travers de la transformée de Hilbert, des tests statistiques et de la perte des propriétés linéaires.

Dans le chapitre 3, nous étudierons le modèle NARMAX qui est une extension non-linéaire des processus ARMA. Nous présenterons une approche modale afin de pallier aux problèmes de localisation des non-linéarités [33] que nous testerons d'un point de vue numérique et expérimental. Nous appliquerons la théorie de la forme normale à l'espace d'état non-linéaire associé, dans le but de simplifier l'équation récursive et de la rendre interprétable. Nous verrons qu'il est possible de "raccrocher" ce type de schéma à un modèle de Volterra rendant ainsi possible l'analyse bispectrale.

Dans le chapitre 4, nous développerons une technique d'identification de type non-paramétrique basée sur des polynômes orthogonaux comme base de description. Afin

d'utiliser au mieux l'information obtenue expérimentalement, nous appliquerons la méthode développée par Jezequel L. et Argoul P. [65] qui effectue une extrapolation de la solution dans des zones à faible densité de points. Cette technique sera améliorée de façon significative en lui "greffant" une méthode d'optimisation globale. Un essai expérimental sera réalisé sur un amortisseur non-linéaire qui montrera l'efficacité et les limites de cette technique.

Le chapitre 5 concerne l'analyse fonctionnelle de Volterra et Weiner pour les systèmes non-linéaires. Nous rappellerons les principaux résultats et techniques d'identification des noyaux qui leurs sont associés. Nous nous intéresserons aussi à des cas plus particuliers (Sm, système en cascade, ...) qui présentent l'intérêt de fournir une solution analytique directement exploitable d'un point de vue expérimental.

Le chapitre 6 est basé sur l'utilisation des séries de Volterra dans le cas d'un problème à contre réaction non-linéaire. En effet, Billings et Fakouri [81] ont montré que pour des systèmes de ce type il est possible, à l'aide des deux premiers noyaux de Volterra, de connaître tous les paramètres caractéristiques de la structure. Nous avons étendu cette approche aux cas des systèmes multi-dimensionnels définis par deux structures linéaires couplées par une non-linéarité [30]. De plus, grâce au premier et troisième noyaux, nous avons démontré qu'il est possible de connaître tous les paramètres du problème.

Le chapitre 7 a pour but de décrire les différentes expériences qui ont été mises au point. Nous donnerons donc dans le cas de l'amortisseur comme dans le cas de la poutre non-linéaire la description des bans d'essais qui ont permis de tester les méthodes d'identification proposées ainsi que les estimations théoriques du comportement statique de ces deux structures qui ont été utilisées lors de l'analyse des résultats.

Chapitre 1

Identification linéaire

1.1 Introduction

L'identification consiste à déterminer un modèle mathématique qui décrit le mieux possible le comportement du système mécanique étudié à partir d'expériences, et/ou de connaissances a priori sur la structure mécanique. Il y a deux étapes dans l'identification : tout d'abord, la modélisation qui revient à fixer la forme du modèle mathématique reliant les signaux d'entrées et de sorties, puis ensuite l'estimation des paramètres du modèle qui est obtenue par minimisation de l'erreur entre le modèle et l'expérience. Pour le dynamiqueien, les méthodes d'identification linéaires sont presque toujours associées à la détermination des caractéristiques modales du problème auquel il est confronté. Ainsi, un grand nombre de techniques d'identifications empruntées à l'automatique, la chimie ou à d'autres sciences a été utilisé dans ce but. Nous présenterons ici quelques méthodes dont les applications dépassent le cadre de l'analyse modale. La grande diversité des méthodes, nous contraint à les classer afin d'en dégager leur champ d'application. La nature de l'acquisition permet déjà de répartir les méthodes en deux grandes catégories : temporelles et fréquentielles. En effet, des techniques comme : polyréférence, Ibrahim, ITD, ARMA... s'appliquent uniquement sur des échantillons temporels alors que des méthodes comme : méthode du pic, lissage du cercle, moindres carrés fréquentiels... n'utilisent que des mesures dans le domaine fréquentiel. Un classement de ce type peut sembler simpliste du fait de la facilité de passer du domaine fréquentiel au domaine temporel. Mais, il est à noter que ce passage n'est pas toujours aisé comme par exemple dans le cas d'un sinus balayé à pas non constant. Bien d'autres formes de classements peuvent être retenues, par exemple sur les possibilités propres des méthodes : locale (méthode du pic) ou globale (Ibrahim) , mono-excitation (lissage du cercle) ou multi-excitation (polyréférence).

1.2 Modélisation de l'amortissement

L'amortissement est un phénomène de dissipation de l'énergie lors de la vibration d'un système. Cette dissipation s'effectue en grande partie par dégradation de l'énergie mécanique en chaleur et aussi en rayonnement acoustique. Les mécanismes provoquant la dissipation sont liés à des phénomènes physiques complexes. Pour les modéliser, il faut prendre en compte différents processus, comme le frottement externe (liaisons), des couplages fluides (air pumping), et aussi des mécanismes de frottements internes aux matériaux. L'amortissement externe (couplage fluide, liaisons,...) est introduit par l'intermédiaire des conditions aux limites. L'amortissement interne est lié à la structure des matériaux (composites, plastiques,...) et s'introduit directement dans les équations d'équilibre aux moyens des relations de comportement. Une façon classique d'amener l'amortissement est de généraliser la loi de comportement classique de Hooke $\sigma = E\epsilon$ [61] en écrivant une relation entre σ et ϵ faisant intervenir des dérivées temporelles :

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = E\epsilon + bE \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1.1)$$

On notera déjà que le cas $a = 0$ correspond à la combinaison d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Ce type de modélisation empruntée à la théorie de la rhéologie peut se généraliser en écrivant :

$$\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = E\epsilon + E \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{d^n \epsilon}{dt^n} \quad (1.2)$$

En appliquant une transformée de Fourier à cette relation, on obtient :

$$\sigma_0 = E\epsilon_0 \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (j\omega)^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (j\omega)^n} \quad (1.3)$$

où $\sigma = \sigma_0 e^{j\omega t}$ et $\epsilon = \epsilon_0 e^{j\omega t}$. Cette relation peut être réécrite en séparant partie imaginaire et partie réelle :

$$\sigma_0 = [E'(\omega) + jE''(\omega)]\epsilon_0 \quad (1.4)$$

L'inconvénient d'un tel modèle tient au fait qu'il est nécessaire d'avoir un grand nombre de termes a_n et b_n si l'on veut rendre compte du comportement d'un matériau réel sur une grande plage de fréquence. Afin de réduire l'ordre nécessaire à la modélisation de la relation de comportement, on a utilisé la théorie des dérivées fractionnaires qui ont pour but d'étendre la notion de dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction $x(t)$ avec n entier au cas où n est un nombre fractionnel, irrationnel ou même complexe. La définition de la dérivée fractionnaire est donnée par :

$$D^{\alpha_n}(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_n)} \frac{1}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha_n}} dt \quad (1.5)$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction gamma eulérienne et (α_n, β_n) des réels compris entre 0 et

1. On peut alors réécrire la relation 1.2 en terme de dérivées fractionnaires en posant :

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n D^{\alpha_n}(\sigma(t)) = E\epsilon(t) + E \sum_{n=1}^{\infty} b_n D^{\beta_n}(\epsilon(t)) \quad (1.6)$$

Dans le domaine fréquentiel, la relation ci-dessus se transforme en :

$$\sigma_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (j\omega)^{\alpha_n}) = E\epsilon_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (j\omega)^{\beta_n}) \quad (1.7)$$

on obtient alors pour E' et E'' les relations suivantes :

$$E' = E \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (j\omega)^{\beta_n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (j\omega)^{\alpha_n}} \right\} \quad (1.8)$$

$$E'' = E \operatorname{Im} \left\{ \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (j\omega)^{\beta_n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (j\omega)^{\alpha_n}} \right\} \quad (1.9)$$

L'ensemble des résultats que nous venons de rappeler, a pour but de représenter au mieux le module complexe $E^*(\omega) = E'(\omega) + jE''(\omega)$ afin de rendre compte le plus fidèlement possible du comportement des structures dissipatives. Par la suite, nous utiliserons des modèles classiques et simples pour représenter la dissipation. Nous aborderons l'amortissement visqueux défini par :

$$E^*(\omega) = E + jC\omega \quad (1.10)$$

ainsi que l'amortissement hystérétique :

$$E^*(\omega) = E(1 + j\eta) \quad (1.11)$$

qui sont les modèles les plus courants dans l'analyse modale linéaire des systèmes dissipatifs.

1.2.1 Amortissement visqueux

L'amortissement visqueux est introduit dans les équations du mouvement de la manière suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (1.12)$$

où M : matrice de masse
 K : matrice de raideur
 C : matrice d'amortissement visqueux
 X : vecteur des coordonnées
 F : vecteur d'excitation

Lorsque la matrice C est quelconque, les équations du mouvement ne sont pas découplées par les modes propres du système conservatif. La résolution du problème se fait alors en introduisant la notion de vecteurs propres complexes, et en augmentant la dimension du système 1.12.

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \dot{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Les modes propres complexes étant déterminés par la relation suivante :

$$\left[\begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} + \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \right] \psi_k = 0 \quad (1.14)$$

où λ_k : valeur propre complexe associé au mode k
 ψ_k : vecteur propre complexe associé au mode k

La notion de modes propres réels est donc directement associée à la diagonalité de C par rapport à la base modale obtenue sans dissipation (hypothèse de Basile). Cette condition sera vérifiée dans la mesure où C vérifie la relation :

$$CM^{-1}K = KM^{-1}C \quad (1.15)$$

où par la règle de proportionnalité (plus facilement applicable) :

$$C = \alpha K + \beta M \quad (1.16)$$

α et β étant des constantes réelles ce qui assure à C d'être diagonalisable en base réelle car M et K le sont. L'amortissement visqueux une fois introduit dans les équations du mouvement, il est possible d'exprimer la fonction de transfert du système sous la forme :

$$h_{pq}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{r_{pq,k}}{j\omega + \xi_k \omega_k - j\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}} + \frac{r_{pq,k}^*}{j\omega + \xi_k \omega_k + j\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}} \quad (1.17)$$

où p est un point de réponse de la structure et q un point d'excitation. L'expression temporelle de la relation 1.17 est obtenue par transformation de Fourier inverse ce qui

donne :

$$h_{pq}(t) = 2 \sum_{k=1}^n |r_{pq,k}| e^{-\xi_k \omega_k t} \sin[(\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2})t + \phi_{pq,k}] \quad (1.18)$$

L'hypothèse de Basile aurait pour effet de rendre égale à 0 ou 180 la phase $\phi_{pq,k}$. Ce type de représentation est très utilisé en analyse modale pour des fréquences assez faibles. En effet, il est possible de montrer dans le cadre de l'amortissement visqueux, que plus la fréquence augmente, plus la dissipation devient importante, ce qui n'est pas conforme à l'expérience, car l'on observe plutôt une stabilisation du taux de dissipation. L'amortissement hystérétique a donc pour but de rendre compte de ce phénomène en introduisant une raideur complexe jH .

1.2.2 Amortissement hystérétique

La dissipation hystérétique est associée à l'expression complexe de la raideur, qui permet alors de réécrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$M\ddot{X} + (K + jH)X = F \quad (1.19)$$

Ainsi, l'expression de la fonction de transfert est définie par :

$$h_{pq}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{c_{pq,k}}{\omega_k^2(1 + j\delta_k) - \omega^2} \quad (1.20)$$

$c_{pq,k}$ désigne la constante modale du $k^{\text{ème}}$ mode relative entre les deux points p et q . Cette constante est généralement complexe, et représente le couplage entre les différents modes. Comme précédemment, il est possible d'établir une condition pour que les vecteurs propres soient réels :

$$KM^{-1}H = HKM^{-1} \quad (1.21)$$

Une règle de proportionnalité peut être aussi établie, comme pour l'amortissement visqueux, par la relation 1.16.

1.3 Méthodes fréquentielles

Les méthodes fréquentielles sont les premières qui ont été utilisées dans l'analyse modale. Elles exploitent les propriétés des transformées de Fourier appliquées au cas des systèmes mécaniques. Jusqu'à une certaine époque, leurs utilisations étaient limitées à des essais expérimentaux utilisant la méthode du sinus balayé qui permet à l'expérimentateur d'obtenir une fonction de transfert grâce à laquelle, il est possible d'extraire directement les caractéristiques modales. Cette approche a trouvé un essor tout particulier

avec l'apparition d'ordinateurs puissants et rapides, faisant ainsi disparaître les problèmes de coûts numériques liés aux calculs de la transformée de Fourier. Une telle démarche permet une analyse rapide des modes (par la méthode du pic) ainsi qu'une évaluation de la qualité de la mesure (par la cohérence des spectres). Nous verrons plusieurs méthodes d'identification : tout d'abord, mono-dimensionnelles puis, multi-dimensionnelles et pour finir, nous aborderons un problème spécifique à cette technique qui sont les effets résiduels.

1.3.1 Méthode du pic

Cette méthode très classique [1] n'est applicable que dans un cas mono-dimensionnel où les modes sont bien découplés. Dans ce cas, nous pourrions supposer que la réceptance (tableau 1.1) associée à la structure mécanique dans la bande de fréquence contenant un mode isolé, peut s'écrire :

$$h(j\omega) = \frac{r}{j\omega - \lambda} + \frac{r^*}{j\omega - \lambda^*} \quad (1.22)$$

où r : résidu
 λ : pole
 ω : pulsation
 $*$: représente la valeur conjuguée

Un calcul de l'atténuation à 3 Db du spectre au niveau de la résonance ω_r (figure 1.1), nous permet d'estimer le taux d'amortissement dans le cas visqueux ($\lambda = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$) comme dans le cas d'un amortissement hystérétique ($\lambda^2 = \omega_n^2(1+j\eta)$). De même, il sera possible de calculer le résidu de la fonction de transfert r (équation 1.22). Ces calculs sont rendus possibles, dans la mesure où l'on peut supposer que le taux d'amortissement est faible et le mode réel. Si ces conditions sont vérifiées alors :

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r} \quad (1.23)$$

$$\omega_r = \omega_n = \omega_d \quad (1.24)$$

$$h(j\omega_r) = \frac{-r}{\xi\omega_r} \quad (1.25)$$

où ξ : taux d'amortissement
 ω_n : pulsation propre
 ω_d : pulsation amortie ($= \sqrt{1-\xi^2}\omega_n$)

Le cas de l'amortissement hystérétique est obtenu en remplaçant ξ par 2η dans les relations ci-dessus. Cette méthode simple présente cependant quelques limites. Tout d'abord, elle n'est applicable qu'à des modes bien séparés, alors que dans la réalité, les

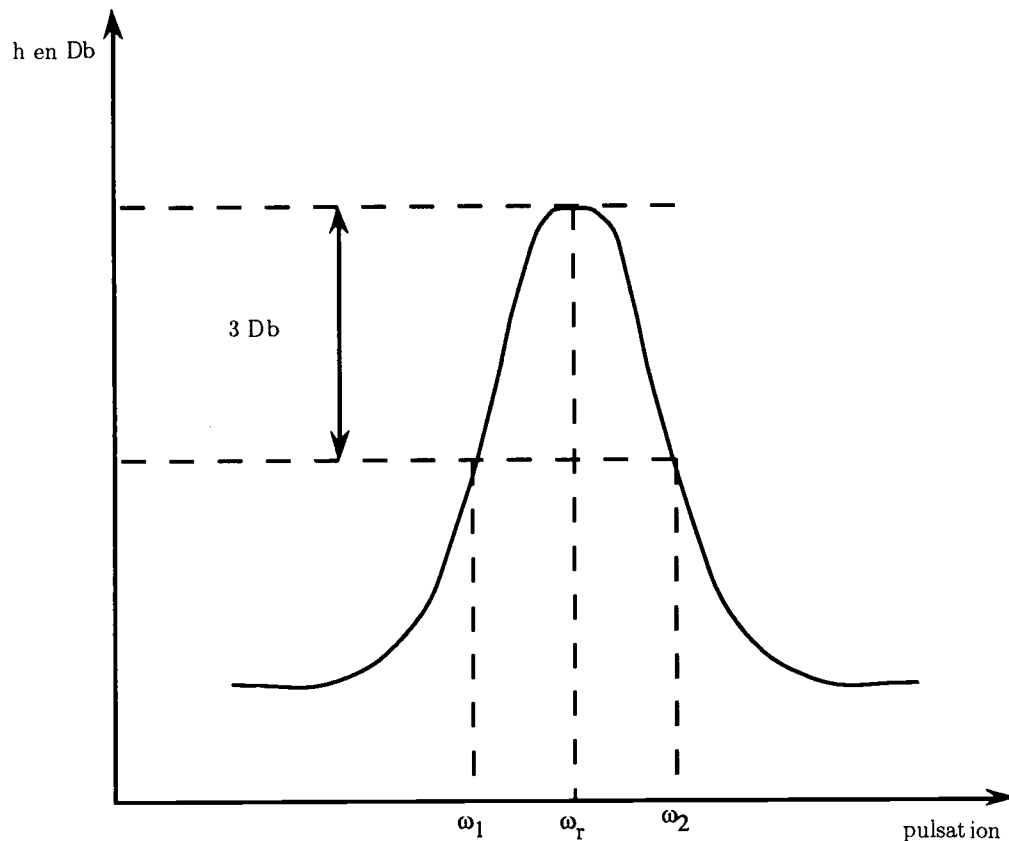


Figure 1.1: Estimation d'un mode par la technique du pic.

modes voisins ont presque toujours une influence mutuelle non négligeable. L'hypothèse d'un taux d'amortissement faible occasionne une grande imprécision sur la valeur exacte du pic en fréquence, et donc, sur l'estimation du résidu. Pour ces raisons, d'autres méthodes plus évoluées ont été mises au point, afin de tenir compte des effets des autres modes, et de l'hypothèse de faibles amortissements.

1.3.2 Lissage du cercle

L'identification par lissage du cercle prend en compte l'ensemble du pic de résonance, et permet d'obtenir la fréquence propre, l'amortissement et le résidu. De plus, il est possible d'introduire des caractéristiques résiduels qui permettent une meilleure estimation du mode. La démonstration proposée ici, est applicable aux cas d'un amortissement visqueux ou hystérétique pour un mode réel ou complexe. Elle suppose une approximation de l'équation 1.22 au voisinage de $\omega = \omega_d$. En effet, on supposera que, seul le premier terme joue alors un rôle, alors que le deuxième, sera approximé par une constante complexe C . Ces approximations [1] ont pour but de montrer que la représentation de h dans le plan de Nyquist est un cercle. Dans certains cas, elles peuvent être évitées [64], si le mode est réel

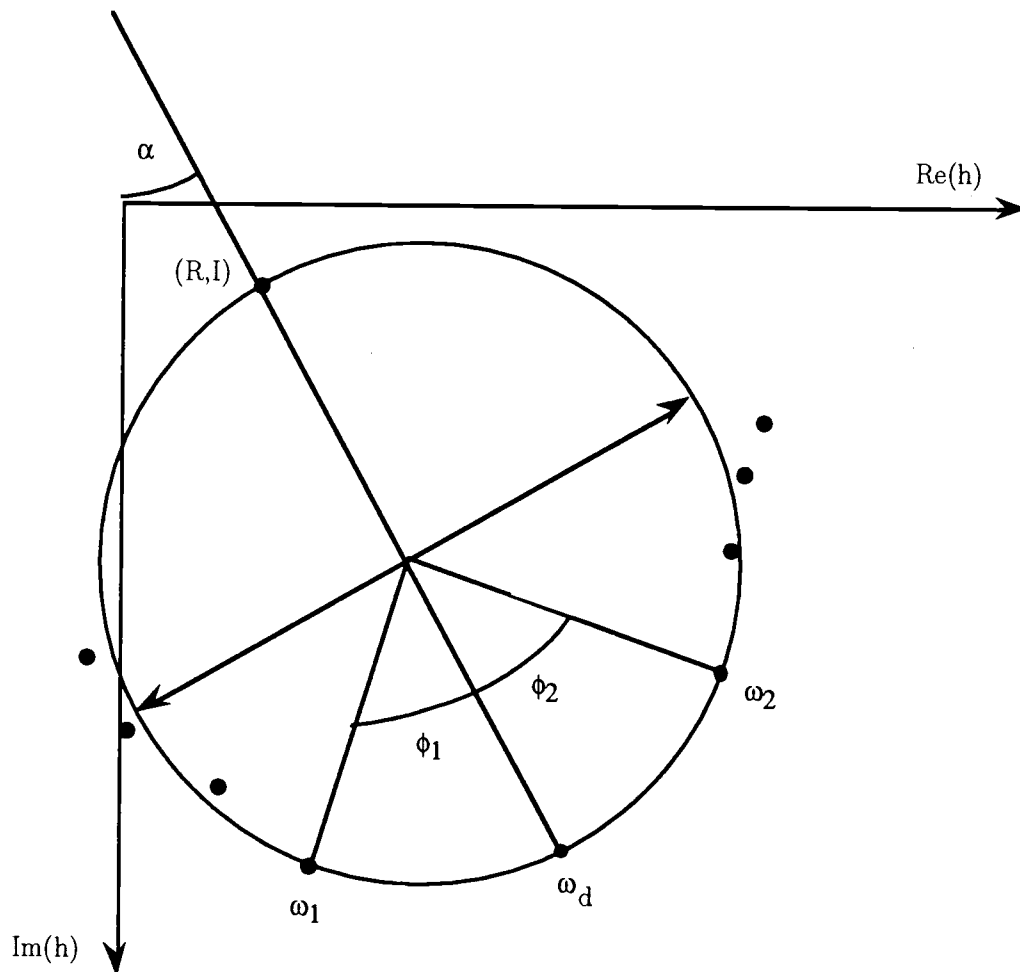


Figure 1.2: Estimation d'un mode par la technique du lissage du cercle.

en analysant la réceptance dans un cas d'amortissement hystérétique, ou la mobilité dans le cas visqueux. En effet, il est alors possible de démontrer que la fonction de transfert correspond (sans aucune approximation) exactement à l'équation d'un cercle.

Soit le système :

$$X = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{j(\omega - \omega_d) + \delta}\right) \quad (1.26)$$

$$Y = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{j(\omega - \omega_d) + \delta}\right) \quad (1.27)$$

où δ : coefficient d'amortissement

vérifie l'équation du cercle:

$$\left(X - \frac{1}{2\delta}\right)^2 + (Y)^2 = \frac{1}{4\delta^2} \quad (1.28)$$

Le résidu $r = U + jV$ de la fonction de transfert h a pour effet de faire dilater et tourner le cercle (figure 1.2). La prise en compte du terme constant $C = R + jI$, transformera l'équation du cercle en :

$$(X - (R + \frac{U}{2\delta}))^2 + (Y - (I + \frac{V}{2\delta}))^2 = \frac{U^2 + V^2}{4\delta^2} \quad (1.29)$$

Une méthode de moindres carrés sera utilisée, afin de déterminer le diamètre et la position du centre du cercle. Soit l'équation générale du cercle :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (1.30)$$

Nous écrivons alors, que l'ensemble des points expérimentaux appartient à un cercle, dont les coefficients seront obtenus en minimisant l'erreur ϵ entre la théorie et l'expérience.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)^2 \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)x_i = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c)y_i = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i + c) = 0 \quad (1.34)$$

L'ensemble de ces équations peut se mettre sous forme algébrique :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x & \sum_{i=1}^n y & n \\ \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n y^2 & \sum_{i=1}^n y \\ \sum_{i=1}^n x^2 & \sum_{i=1}^n xy & \sum_{i=1}^n x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n (x^2 + y^2) \\ -\sum_{i=1}^n (x^2y + y^3) \\ -\sum_{i=1}^n (x^3 + xy^2) \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

La résolution de ce système fournit le triplet (a, b, c) qui nous permet de calculer la position (x_0, y_0) et le diamètre d du cercle.

$$x_0 = -\frac{a}{2} \quad (1.36)$$

$$y_0 = -\frac{b}{2} \quad (1.37)$$

$$d = -\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \quad (1.38)$$

L'estimation des paramètres modaux se fera tout d'abord par le calcul de la fréquence propre. Deux types de démarches sont envisageables :

- Détermination par l'espacement angulaire maximum.

Il s'agit de repérer le plus grand espacement entre les points expérimentaux, la fréquence

Nature de la mesure	Déplacement	Vitesse	Accélération
Nature du transfert	Réceptance	Mobilité	Inertance

Tableau 1.1: Terminologie pour les différentes fonctions de transfert.

propre se trouvant au milieu du plus grand espace (figure 1.2).

- Détermination par la phase.

On repère le point expérimental dont l'angle est le plus proche de α (figure 1.2). Il est alors associé à la fréquence propre.

Cette étape effectuée, le calcul de l'amortissement supposé faible est obtenu en écrivant :

$$\delta = \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_d^2(\tan \phi_1/2 + \tan \phi_2/2)} \quad (1.39)$$

L'amplitude modale est déterminée à l'aide du diamètre du cercle, et de l'angle de phase α . Le diamètre du cercle d et la valeur du coefficient d'amortissement δ permettent grâce à la relation :

$$d = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\delta} \quad (1.40)$$

de déterminer le module de r . Le calcul de la phase α sera donné par la rotation du cercle, ce qui donne la relation supplémentaire :

$$\alpha = \arctan \frac{V}{U} \quad (1.41)$$

qui permet de déterminer le résidu r en obtenant séparément U et V . Le terme correctif $C = R + jI$ s'obtient en calculant la distance qui sépare l'origine du point diamétralement opposé à ω_r . Cette constante associée au second terme de la fonction de transfert permet aussi une prise en compte des perturbations créées par des modes voisins, et de ce fait, d'améliorer l'identification.

Il est important de noter que la nature de la fonction de transfert joue un rôle important dans cette méthode. En effet, une fonction de transfert de type mobilité (Vitesse / Force, tableau 1.1) est effectivement associée à une équation de cercle pour une dissipation visqueuse, alors que ce n'est pas le cas, si celle-ci est de nature hystérétique. Par contre, la réceptance (Déplacement / Force) correspond à un cercle dans le cas d'un amortissement hystérétique, mais pas dans le cas d'un amortissement visqueux. Ces propriétés sont

	Réceptance	Mobilité	Inertance
V	$h_{re}^2 + (h_{im} + \frac{1}{2c\omega})^2 = \frac{1}{4c^2\omega^2}$ Non cercle	$(h_{re} - \frac{1}{2c})^2 + h_{im}^2 = \frac{1}{4c^2}$ Cercle	$h_{re}^2 + (h_{im} - \frac{\omega}{2c})^2 = \frac{\omega^2}{4c^2}$ Non cercle
H	$h_{re}^2 + (h_{im} + \frac{1}{2\eta})^2 = \frac{1}{4\eta^2}$ Cercle	$(h_{re} - \frac{\omega}{2\eta})^2 + h_{im}^2 = \frac{\omega^2}{4\eta^2}$ Non cercle	$(h_{re} - \frac{1}{2m})^2 + (h_{im} - \frac{k}{\eta} \frac{1}{2m})^2 = (1 + \frac{k^2}{\eta^2}) \frac{1}{2m^2}$ Cercle

Tableau 1.2: Existence du cercle dans le plan de Nyquist pour les différentes fonctions de transfert pour un système à 1ddl (V=visqueux et H=hystérétique).

résumées dans le tableau 1.2. On notera quand même, que les autres fonctions de transfert sont assez voisines du cercle, bien qu'analytiquement elles ne le vérifient pas. Cette méthode présente certains inconvénients liés à la nécessité d'avoir un assez bon découplage des modes et une fonction de transfert dans le plan de Nyquist vérifiant une équation de cercle, afin que la détermination des paramètres modaux et plus particulièrement des masses modales soit correcte. Malgré ces inconvénients, elle reste une méthode rapide, et souvent satisfaisante pour une première estimation des modes.

1.3.3 Lissage global

Il s'agit ici d'obtenir l'ensemble de la fonction de transfert mesuré afin de bien prendre en compte les influences des modes entre eux. L'expression de la fonction de transfert est fournie par :

$$h_{il}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{r_{il}}{j\omega - \lambda_k} + \frac{r_{il}^*}{j\omega - \lambda_k^*} \right) \quad (1.42)$$

$$= C \frac{\prod_{p=1}^{2m-1} (j\omega - a_p)}{\prod_{q=1}^m (j\omega - \lambda_q)(j\omega - \lambda_q^*)} \quad (1.43)$$

$$= \frac{\prod_{p=0}^{2m-1} A_{2m-1-p}(j\omega)^p}{\prod_{q=0}^{2m} B_{2m-q}(j\omega)^q} \quad (1.44)$$

où i : numéro du point de mesure
 l : numéro du point d'excitation
 a_p, C, A_p, B_q : constantes complexes

Les coefficients à déterminer sont donc $(r_{i\ell}, \lambda_k)$. On définit alors l'erreur commise entre le modèle et l'expérience comme étant :

$$e(j\omega_n) = h_{i\ell}(j\omega_n) - h_{i\ell}^{mesuré}(j\omega_n) \quad (1.45)$$

$$\epsilon^2 = \sum_{n=1}^p \psi_n e(j\omega_n) e^*(j\omega_n) \quad (1.46)$$

où p : nombre total d'échantillons fréquentiels
 ω_n : $n^{\text{ème}}$ échantillon fréquentiel
 ψ_n : fonction de pondération au temps n

L'équation précédente sera différenciée par rapport aux paramètres $(r_{i\ell}, \lambda_k)$ afin d'obtenir leurs estimations :

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial q} = 0 \quad \text{où} \quad q = (r_{11}, \dots, \lambda_1, \dots) \quad (1.47)$$

Il est important de noter que les équations fournissant le minimum à atteindre sont non-linéaires. On utilisera donc un algorithme approprié, qui correspond en général à une procédure itérative [22]. Une telle méthode présente aussi certains inconvénients liés aux procédures itératives non-linéaires :

-1- Estimation initiale des paramètres : par exemple, par la technique du lissage du cercle (difficile, quand les modes sont proches). Cette étape est importante car elle conditionne souvent le bon fonctionnement et la vitesse de l'algorithme itératif.

-2- Vitesse de convergence. dépend de la précision de l'estimation initiale et peut être améliorée dans un contexte multi-entrée.

-3- Risque de divergence : Ce danger est inhérent aux procédures itératives non-linéaires.

Nous présenterons ici une démarche visant à effectuer tout d'abord une estimation des coefficients A_p et B_q des polynômes de la fonction de transfert. Puis, à l'aide de ces résultats, on calculera les zéros du dénominateur qui correspondent aux λ_k , les résidus étant obtenus par décomposition en élément simple de la fonction de transfert. Afin de calculer les A_p et les B_q , on cherchera à minimiser le critère d'erreur ϵ^2 par rapport à ces variables. Dans le cas visqueux, on rappellera que A_p et B_q sont réels. Une technique originale pour résoudre ce problème de minimisation non-linéaire a été proposée par Jong

1977 [60], qui permet de déterminer les coefficients de la fonction de transfert de manière itérative. En effet, le critère à minimiser peut s'écrire :

$$e(j\omega_n) = \frac{h_{il}(j\omega_n)D(j\omega_n) - N(j\omega_n)}{D(j\omega_n)} \quad (1.48)$$

$$\epsilon^2 = \sum_{n=1}^p \psi_n e(j\omega_n) e^*(j\omega_n) \quad (1.49)$$

où $N(j\omega_n)$: numérateur de la fonction de transfert
 $D(j\omega_n)$: dénominateur de la fonction de transfert

L'algorithme itératif s'établit en écrivant qu'à l'étape k :

$$e_k(j\omega_n) = \frac{h_{il}(j\omega_n)D_k(j\omega_n) - N_k(j\omega_n)}{D_k(j\omega_n)} \quad (1.50)$$

$$\epsilon_k^2 = \sum_{n=1}^p \psi_n e_k(j\omega_n) e_k^*(j\omega_n) \quad (1.51)$$

ϵ_k^2 doit être minimum par rapport aux variables A_p^k et B_q^k qui représentent l'estimation de A_p et B_q à l'étape k . En choisissant judicieusement la fonction de pondération ψ_n , il est possible alors d'établir une relation de récurrence sur la détermination des paramètres. En effet, si $\psi_n = \frac{|D_k(j\omega_n)|^2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2}$ et que le critère est minimisé par rapport aux paramètres associés à l'itération k , on a alors :

$$\begin{pmatrix} R_{AA} & R_{AB} \\ R_{BA} & R_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{2m-1} \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

où $A_0 = C$, $B_0 = 1$ et :

$$R_{AArs} = \sum_{n=1}^p \frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}((j\omega)^{2m-r} (-j\omega)^{2m-s}) \quad (1.53)$$

$$R_{ABrs} = \sum_{n=1}^p -\frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}(h_{il}^*(j\omega)^{2m-r} (-j\omega)^{2m-s}) \quad (1.54)$$

$$R_{BArs} = \sum_{n=1}^p -\frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}(h_{il}^*(j\omega)^{2m-s} (-j\omega)^{2m-r}) \quad (1.55)$$

$$R_{BBrs} = \sum_{n=1}^p \frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}(h_{il} h_{il}^* (j\omega)^{2m-r} (-j\omega)^{2m-s}) \quad (1.56)$$

$$C_{Ar} = \sum_{n=1}^p \frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}(h_{il}^* (j\omega)^{2m-r} (-j\omega)^{2m}) \quad (1.57)$$

$$C_{Br} = \sum_{n=1}^p -\frac{2}{|D_{k-1}(j\omega_n)|^2} \operatorname{Re}(h_{il} h_{il}^* (j\omega)^{2m-r} (-j\omega)^{2m}) \quad (1.58)$$

avec $(r, s) = 1, \dots, 2m$.

Désormais, la détermination des A_p et B_q à l'étape k se ramène à une méthode classique de moindres carrés. L'opération sera répétée jusqu'à convergence des paramètres. On notera, qu'à l'étape 1, il est nécessaire de connaître D_0 , qui, à priori, est inconnu. En général, on estime la valeur initiale D_0 , comme étant égale à 1, si aucune information sur les pôles n'est connue.

1.3.4 Effets résiduels

Les méthodes fréquentielles sont toujours associées à des termes correctifs qui ont pour but de prendre en compte l'influence des modes hors du domaine d'analyse. Ils jouent un rôle essentiel dans une bonne identification. En effet, une fois l'ensemble des modes identifiés, il n'est pas rare de constater que la fonction de transfert synthétisée ne correspond pas tout à fait à l'expérience. L'introduction de termes résiduels permet en général, d'améliorer le spectre sur ses extrémités. Un premier terme associé aux basses fréquences, représentera un effet de masse, et un deuxième, associé aux hautes fréquences jouera le rôle d'une raideur. Ceci nous fournit une fonction de transfert corrigée sous la forme :

$$h_{ij}^{\text{corrigé}}(\omega) = \underbrace{-\frac{1}{\omega^2 R_{ij}^M}}_{\text{correction en masse}} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{r_{ij}}{\omega_n - \lambda_k} + \frac{r_{ij}^*}{\omega_n - \lambda_k^*} \right) + \underbrace{\frac{1}{R_{ij}^K}}_{\text{correction en raideur}} \quad (1.59)$$

Les termes résiduels seront identifiés, soit en les introduisant directement dans l'identification, soit à posteriori, en estimant par exemple, la masse résiduelle à ajouter afin que la courbe expérimentale et la courbe identifiée sans terme résiduel soient le plus proche possible.

1.4 Méthodes temporelles

L'identification temporelle utilise les résultats expérimentaux obtenus dans le domaine temporel. La plupart de ces techniques se sert directement de la solution théorique comme étant le modèle paramétrique à identifier. C'est donc la fonction de transfert, solution du problème stationnaire sans mémoire, qui sera identifiée. Certaines méthodes plus globales, sont basées sur l'utilisation de fonction de transfert dont l'ordre est en général quelconque et dont les caractéristiques ne correspondent pas forcément à un problème mécanique. Cette dernière classe de méthode peut s'avérer très performante lors de la prise en compte de comportement non mécanique, comme par exemple, l'existence d'un bruit de mesure, ou encore d'une dérive des composants de la chaîne d'acquisition. Des techniques comme I.T.D (Ibrahim Time Domain), Prony, polyréférence, font partie de la première classe des

méthodes citées et se basent sur l'identification de la réponse impulsionnelle. Celles-ci peuvent être obtenues indépendamment par balayage sinus, excitation aléatoire ou choc. Ces méthodes globales fournissent l'ensemble des caractéristiques modales pour des essais multi-entrées, multi-sorties. Elles se différencient quelque peu par la mise en forme du problème théorique. D'autres approches plus souples, comme l'identification des processus A.R.M.A. (Auto-regressive Moving Average) ou encore filtre de Kalman sont basées sur l'identification de schémas recursifs et les propriétés des espaces d'état. En effet, notre problème mécanique peut s'exprimer en terme de variables d'état, et donc, être traité par ces méthodes. Il est bon de remarquer qu'elles ne s'appliquent pas uniquement au cas mécanique, mais plus généralement à l'ensemble des problèmes d'identification.

1.4.1 Identification de la réponse libre

Il s'agit donc d'utiliser la solution théorique des problèmes de mécanique linéaire stationnaire et de minimiser l'erreur entre le modèle et la théorie.

Méthode I.T.D. (Ibrahim Time Domain)

Cette technique proposée par Ibrahim et Pappa [71] utilise des propriétés particulières de la réponse impulsionnelle. Elle ramène le problème de l'identification à la résolution d'un problème aux valeurs propres. On obtient ainsi, une estimation des paramètres modaux dans un cas multi-sortie, mais pour un seul point d'excitation. La réponse libre au point i à l'instant t_k pour un système linéaire s'écrit :

$$x_i(t_k) = \sum_{m=1}^n (r_{im} e^{\lambda_m t_k} + r_{im}^* e^{\lambda_m^* t_k}) \quad (1.60)$$

Si l'on considère s instants de t_k ($k \in [1, s]$) indépendants et $2N$ points de mesure, la relation 1.60 peut être alors mise sous forme algébrique :

$$X = R\Lambda \quad (1.61)$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & \cdots & x_1(t_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2N}(t_1) & \cdots & x_{2N}(t_s) \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{2N,1} & \cdots & r_{2N,2n} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 t_1 & \cdots & \exp \lambda_1 t_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp \lambda_{2n} t_1 & \cdots & \exp \lambda_{2n} t_s \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

On notera que $r_{i,n+k} = r_{i,k}^*$ et $\lambda_{n+k} = \lambda_k^*$.

Un deuxième ensemble de mesure est fait à un instant décalé α du premier soit :

$$x_i(t_k + \alpha) = \sum_{m=1}^n (r_{im} e^{\lambda_m(t_k + \alpha)} + r_{im}^* e^{\lambda_m^*(t_k + \alpha)}) \quad (1.64)$$

On notera : \tilde{X} la matrice X à l'instant $t_k + \alpha$ et \tilde{R} la matrice R à l'instant $t_k + \alpha$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\tilde{X} = \tilde{R}A \quad (1.65)$$

Les colonnes de R et \tilde{R} sont liées par la relation :

$$\tilde{R}_{\text{colonne } p} = e^{\lambda_p \alpha} R_{\text{colonne } p} \quad (1.66)$$

Il existe alors une matrice A telle que :

$$\tilde{R} = AR \quad \text{et} \quad \tilde{X} = AX \quad (1.67)$$

La connaissance de A permet de transformer le problème de l'identification des paramètres modaux en un problème de recherches des vecteurs et des valeurs propres qui sont respectivement $\tilde{X}_{\text{colonne } p}$ et $e^{\lambda_p \alpha}$. En effet, on peut écrire :

$$AR_{\text{colonne } p} = e^{\lambda_p \alpha} R_{\text{colonne } p} \quad (1.68)$$

Le calcul de A se fera par une procédure de moindres carrés dont la relation est donnée par :

$$A = (\tilde{X}X^t)(XX^t)^{-1} \quad (1.69)$$

Cette procédure suppose que le nombre de pas en temps s est supérieur au nombre de points de mesure ; ceci afin que la détermination de A se ramène à un moindre carré classique. Les vecteurs et les valeurs propres déterminés peuvent inclure des pseudo-pôles qui seront repérés par rapport aux modes du système par des méthodes de mesure de participation. Un des problèmes de cette méthode est la détermination du nombre de points de mesure, $2N$, nécessaire à l'identification des modes. En général, il est choisi supérieur au nombre de modes participant, ce qui permet une prise en compte des effets du bruit sur la réponse (pseudo-pôles), et donc une meilleure estimation des modes réels. Une amélioration peut être apportée en calculant la matrice A par une méthode de moindres carrés double [54] qui consiste à écrire que :

$$A = \frac{1}{2} \{ (\tilde{X}X^t)(XX^t)^{-1} + (\tilde{X}\tilde{X}^t)(X\tilde{X}^t)^{-1} \} \quad (1.70)$$

Méthode S.S.T.D. (Single-Station Time-Domain)

Il s'agit ici d'une méthode qui utilise un seul point de réponse, et un seul point d'excitation pour effectuer l'estimation des paramètres modaux. Cette technique développée par Zaghool [85] présente l'intérêt d'utiliser, au niveau expérimental, une instrumentation minimal contrairement à celle d'Ibrahim qui nécessite autant de points de mesure que de modes à estimer. Si l'on considère $2n$ points de mesure effectués en i , on a grâce à la relation 1.60 :

$$(x_i(t_1), \dots, x_i(t_{2n})) = (r_{i,1}, \dots, r_{i,2n}) \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 t_1 & \cdots & \exp \lambda_1 t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp \lambda_{2n} t_1 & \cdots & \exp \lambda_{2n} t_{2n} \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

Comme pour la méthode I.T.D., nous avons les relations suivantes : $r_{i,n+k} = r_{i,k}^*$ et $\lambda_{n+k} = \lambda_k^*$. Supposons maintenant qu'on mesure les réponses $x_i(t_k)$ en $2n$ instants arbitraires au même point i , et qu'à chaque instant on prélève n mesures décalées deux à deux d'un pas Δt , ceci conduit à n équations du type 1.71 que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_i(t_1) & \cdots & x_i(t_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i(t_1 + n\Delta t) & \cdots & x_i(t_{2n} + n\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{i,1} & \cdots & r_{i,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{i,1} e^{n\lambda_1 \Delta t} & \cdots & r_{i,2n} e^{n\lambda_{2n} \Delta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 t_1 & \cdots & \exp \lambda_1 t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp \lambda_{2n} t_1 & \cdots & \exp \lambda_{2n} t_{2n} \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

La relation ci-dessus sera notée sous forme simplifiée :

$$X = R\Lambda \quad (1.73)$$

Soit \tilde{X} défini comme étant X , mais à un instant décalé de Δt , on a alors :

$$\tilde{X} = \tilde{R}\Lambda \quad (1.74)$$

avec $\tilde{R}_{\text{colonne } p} = e^{\lambda_p \Delta t} R_{\text{colonne } p}$

On définit aussi $\tilde{\tilde{X}}$, comme étant \tilde{X} à un instant décalé de Δt . Nous pouvons alors définir les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} X \\ \tilde{\tilde{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \tilde{R} \end{pmatrix} \Lambda \quad (1.75)$$

ce que l'on notera sous la forme condensée $\mathcal{X} = \mathcal{R}\Lambda$ en remarquant que l'on a aussi la relation : $\tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{R}}\Lambda$.

Il est clair que la matrice Λ peut s'écrire comme une matrice de Van der Mond, qui est non-singulière dans la mesure où les valeurs propres sont distinctes deux à deux. De plus

les colonnes de \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ sont linéairement indépendantes, ce qui permet de calculer \mathcal{R}^{-1} et d'obtenir, après élimination de Λ :

$$\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{X} \quad (1)$$

Puis en posant $Z = \tilde{\mathcal{X}}\mathcal{X}^{-1}$ (\mathcal{R} et Λ sont non singulières alors \mathcal{X} est inversible) démontre que :

$$Z\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \quad (2)$$

En utilisant la relation $\tilde{R}_{\text{colonne } p} = e^{\lambda_p \Delta t} R_{\text{colonne } p}$, on se ramène alors à un problème aux valeurs propres définies par :

$$Z\mathcal{R}_{\text{colonne } p} = e^{\lambda_p \Delta t} \mathcal{R}_{\text{colonne } p}$$

Le problème à résoudre devient alors standard, et analogue à celui obtenu par la méthode I.T.D. Il est important de noter que les résultats obtenus sont définis en un point, ce qui ne permet pas de connaître les déformées spatiales de la structure étudiée. Il est tout de même possible de les obtenir en répétant la méthode en différents points de mesure.

Polyréférence

C'est à l'heure actuelle, la méthode la plus utilisée dans le monde industriel : elle prend en compte de plusieurs points de réponses, et de plusieurs excitations simultanées, rendant plus performante la détermination des paramètres modaux [7]. En effet, il est facile d'exciter uniformément tous les modes avec plusieurs excitateurs car on peut se placer loin des noeuds de chaque mode. La méthode d'identification par polyréférence se fait en deux étapes distinctes : tout d'abord, on identifie les fréquences propres et les taux d'amortissement du système, puis, dans une seconde étape, on identifie les amplitudes. Nous utiliserons la forme suivante de la réponse impulsionnelle au point p sous une excitation en q à l'instant t_k :

$$h_{pq}(t_k) = \sum_{r=1}^{2n} A_{pqr} e^{\lambda_r t_k}$$

où A_{pqr} : résidu du mode r au point p excité par le point q
 p : numéro du point de réponse ($p = 1, \dots, m$)
 q : numéro du point d'excitation ($q = 1, \dots, L$)
 n : nombre de mode pris en compte

On définit alors le facteur de participation modale W_{jqr} comme étant le coefficient multiplicateur entre le résidu associé à une excitation en j (A_{pjr}) et le résidu associé à une excitation en q (A_{pqr}) pour un mode r . En effet, la théorie prévoit que :

$$A_{pqr} = Q_r \Psi_{pr} \Psi_{qr} \quad r = 1, 2, \dots, 2n \quad (1.80)$$

où Ψ_{pr} : $r^{\text{ème}}$ vecteur propre au point p
 Q_r : coefficient multiplicateur pour le mode r

ce qui implique :

$$A_{pjr} = \frac{\Psi_{jr}}{\Psi_{qr}} A_{pqr} = W_{jqr} A_{pqr} \quad (1.81)$$

Il est alors possible de démontrer que :

$$h_p(k) = W Z^k A_p \quad (1.82)$$

où

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_{2n} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_{211} & W_{212} & \dots & W_{212n} \\ W_{311} & W_{312} & \dots & W_{312n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W_{L11} & W_{L12} & \dots & W_{L12n} \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

$$A_p = \begin{pmatrix} A_{p11} \\ A_{p12} \\ \vdots \\ A_{p12n} \end{pmatrix} \quad h_p(k) = \begin{pmatrix} h_{p1}(t_k) \\ h_{p2}(t_k) \\ \vdots \\ h_{pL}(t_k) \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

Dans une première étape, nous allons déterminer la fréquence propre et l'amortissement par la méthode dite de Prony, pour cela nous introduirons le polynôme matriciel caractéristique d'un système multi-entrées. Ce dernier s'écrit sous la forme :

$$a(0)WZ^r + a(1)WZ^{r-1} + \dots + a(r)WZ^0 = 0 \quad (1.85)$$

où $a(i)$ est une matrice de coefficient de dimension $L \times L$

$a(0)$ choisi arbitrairement égal à l'identité. Ce système d'équations caractéristiques a pour solution l'ensemble des z_i ($i = 1, \dots, 2n$) et pour ordre $r \geq \frac{2n}{L}$.

On démontre alors, qu'il existe un lien entre cette dernière équation 1.85 et la 1.82 qui nous permet d'arriver à l'étape de détermination des coefficients du polynôme matriciel caractéristique, par une méthode de moindres carrés. Soit :

$$BT = R \quad (1.86)$$

où

$$R = -[R_1^p, \dots, R_m^p] \quad R_i^p = [h_i(p), h_i(p+1), \dots, h_i(p+N-1)] \quad (1.87)$$

$$B = -[a(1), \dots, a(p)] \quad (1.88)$$

$$T = -[T_1^p, \dots, T_m^p] \quad T_i^p = \begin{pmatrix} h_i(p-1) & h_i(p) & \dots & h_i(p+N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_i(0) & h_i(1) & \dots & h_i(N-1) \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

avec N , le nombre d'échantillons temporels utilisés en vue de l'obtention des valeurs propres. Les coefficients $a(i)$ seront obtenus par une méthode de moindres carrés en écrivant :

$$B = RT^t(TT^t)^{-1} \quad (1.90)$$

La recherche des fréquences propres et des amortissements s'effectuera en résolvant le système 1.85. Une démarche classique est de déterminer le problème aux valeurs propres associé à chaque équation caractéristique de 1.85. Ceci est possible, en décomposant le système 1.85 en plusieurs équations caractéristiques ne dépendant que de z_i où ($i = 1, \dots, 2n$) seul :

$$- [a(1)z_i^{p-1} + a(2)z_i^{p-2} + \dots + a(p)]\{W_i\} = \{W_i\}z_i^p \quad (1.91)$$

Le problème aux valeurs propres associé est alors défini par :

$$\begin{pmatrix} -a(1) & -a(2) & \dots & -a(p-1) & -a(p) \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{p-1} \\ V_{p-2} \\ \vdots \\ V_0 \end{pmatrix} = z_i \begin{pmatrix} V_{p-1} \\ V_{p-2} \\ \vdots \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

où

$$\begin{cases} V_0 = \alpha z_i^0 W_i \\ V_1 = \alpha z_i^1 W_i \\ \vdots \\ V_{p-1} = \alpha z_i^{p-1} W_i \end{cases} \quad (1.93)$$

Les vecteurs propres sont donnés à un coefficient multiplicateur près α . A l'aide d'un algorithme approprié, on déterminera les valeurs propres du système précédent, et ainsi les fréquences propres et les taux amortissements.

Cette étape effectuée, il reste à déterminer les participations modales A_{pqr} . Elles seront obtenues par moindres carrés.

$$A_p = (B\bar{B}^t)^{-1} B H_p \quad (1.94)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} W^*(Z^*)^0 \\ W^*(Z^*)^1 \\ \vdots \\ W^*(Z^*)^S \end{pmatrix}^t \quad H_p = \begin{pmatrix} h_{p0} \\ h_{p1} \\ \vdots \\ h_{pS} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

où S est le nombre d'échantillons utilisés pour effectuer le calcul des moindres carrés.

Tout comme les méthodes I.T.D. ou S.S.T.D., polyréférence peut identifier des pseudo-pôles qui permettront de prendre en compte des anomalies de mesures. Cette méthode très utilisée dans le domaine industriel donne de bons résultats. Elle présente l'avantage de pouvoir utiliser la réponse d'un système soumis à plusieurs excitations. En effet, lors d'une analyse modale, il n'est pas rare d'utiliser plusieurs excitateurs afin de bien faire ressortir tous les modes. Cette méthode a été programmée afin d'être utilisée ultérieurement dans l'identification des fonctions de transfert.

1.4.2 Identification des schémas récursif

Nous étudierons les schémas récursifs de type ARMA (Auto-Regressive Moving Average), où la réponse à un instant t peut s'exprimer en fonction de l'excitation et de la réponse aux instants précédents. De telles représentations peuvent s'introduire de manière plus générale en utilisant la notion d'espace d'état. Ce dernier, permet de modéliser aussi bien les problèmes différentiel linéaires que les problèmes convolutifs. Il s'utilise en fait, pour tous les modèles linéaires entrée-sortie de dimension finie. Cette modélisation matricielle permet de profiter de l'ensemble des résultats issus de l'algèbre, et lui confère ainsi des propriétés remarquables. Certaines restrictions sur les conditions initiales associées aux variables d'état devront être faites, ainsi que sur la singularité des matrices utilisées; ceci afin de limiter notre problème aux systèmes dit "contrôlables" et "commandables" ayant des conditions initiales nulles. Dans ce paragraphe, un certain nombre de démarches sera présenté. Ainsi, nous aborderons l'identification ARMA, Kalman, Maximum de Vraisemblance, en prenant soin de noter l'existence de procédure directe (dite "off-line") et itérative (dite "on-line"). Certaines de ces techniques ont déjà trouvé des applications très diverses dans des domaines comme l'électronique, la mécanique, le contrôle etc... Le contexte théorique, dans lequel sont développées les méthodes d'identification des schémas récursifs, englobe un grand nombre de phénomènes dont la réponse des systèmes mécaniques mais aussi, d'autres types de comportements. Cette souplesse, qui certes est un avantage, demande par contre une bonne interprétation des résultats de l'identification afin de ne pas se tromper sur la nature des résultats.

Représentation dans l'espace d'état

L'espace d'état d'un système entrée-sortie linéaire de dimension fini en discret s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.96)$$

Les propriétés algébriques de cette représentation sont très nombreuses, et clairement définies [35] [54]. Elles permettent une bonne exploitation de ce type de modélisation. Il existe un lien direct entre les schémas récurrents entrée-sortie et l'espace d'état. Ce lien peut se faire de différentes manières. En général, le problème récurrent défini par :

$$y(t) = a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + a_m u(t-m) \quad (1.97)$$

où y : réponse
 u : excitation
 (n, m) : paramètres de récursion

peut s'exprimer sous la forme 1.96 de plusieurs manières. Ainsi, on pourra l'écrire comme une représentation observable, commandable, ou encore sous toute autre forme.

-1- Forme observable

Il s'agit de l'ensemble des espaces d'état tels que la matrice d'observation Θ est non singulière. La représentation de 1.96 peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n & \dots & \dots & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (1.98)$$

On rappellera que la matrice d'observation est définie par :

$$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

Il existe alors une transformation $P_o = P^{-t}$ qui permet de revenir à l'expression initiale 1.96 ($\bar{x}(t) = P_o^{-1}x(t)$) en posant $P = C$ où C est la matrice de contrôle qui sera définie ultérieurement. De même, on peut définir la forme observable associée au schéma récurrent 1.97 en écrivant :

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_0} \quad i = 1, \dots, n$$

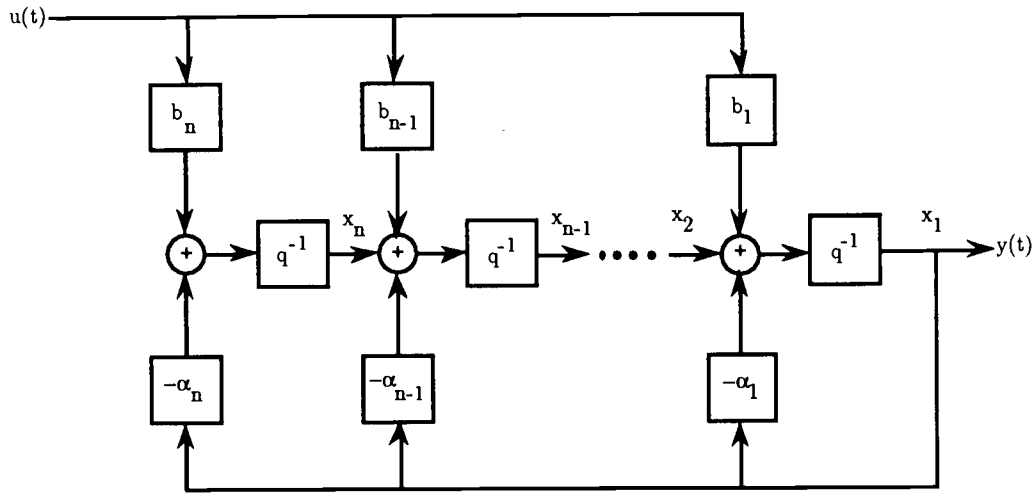


Figure 1.3: Diagramme structurel d'un schéma observable.

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 - a_1 b_0}{a_0} \\ a_0 \\ \vdots \\ \frac{b_n - a_n b_0}{a_0} \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

Cette représentation peut se mettre sous la forme d'un diagramme structurel (figure 1.3). On remarquera que cette forme d'expression a pour effet d'isoler la variable d'observation y , et présente la caractéristique de pouvoir retrouver l'état initial à l'aide de la mesure de la sortie (car Θ est non singulière).

-2- Forme commandable

Ce type de représentation recouvre l'ensemble des espaces d'état tel que la matrice de controle C est non-singulière. Elle prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (1.101)$$

On rappellera que la matrice de controle est définie par :

$$C = \{B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B\} \quad (1.102)$$

La transformation P_c qui permet de revenir à 1.96 est obtenu en écrivant que $P_c = C$.

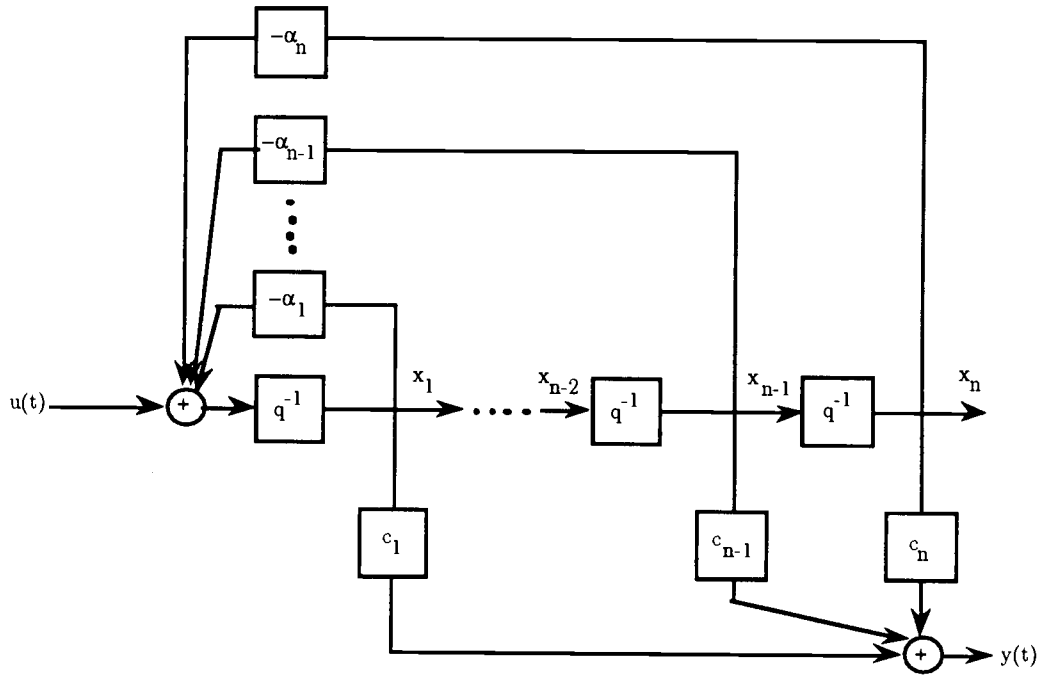


Figure 1.4: Diagramme structurel d'un schéma commandable.

Une forme associée au schéma récursif 1.97 est obtenu en écrivant :

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_0} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n b_0 \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

Cette représentation peut se mettre aussi sous la forme d'un diagramme structurel (Figure 1.4). On remarquera que cette forme d'expression a pour effet d'isoler la variable de commande u .

L'utilisation des schémas récursifs comme 1.97 permet la représentation de la plupart des espaces d'état (qui ne sont pas nécessairement contrôlables et observables) avec des conditions initiales quelconques. Dans un grand nombre de cas (par exemple : identification des fonctions de transferts), on aura affaire à des problèmes observables et commandables. Une attention toute particulière sera portée à la représentation observable, car elle sera utilisée ultérieurement dans la construction d'espace d'état non-linéaire dans le but de simplifier et de rendre interprétable les modèles NARMA (Nonlinear Auto-Regressive Moving Average), via l'utilisation de la forme normale (chapitre 3). Les méthodes temporelles peuvent être classées en deux grandes catégories : celles, dite "off-line", où l'estimation des paramètres du modèle se fait grâce à l'ensemble des mesures entrée-sortie, alors que, les méthodes "on-line" utilisent les points expérimentaux au fur et à mesure. Cette dernière classe regroupe l'ensemble des algorithmes itératifs et adaptatifs. La barrière entre ces 2

techniques n'est pas infranchissable car la plupart des méthodes "off-line" possède leurs équivalents en "on-line", la réciproque par contre n'est pas toujours vraie.

Méthodes off-line

Les méthodes "off-line" consistent en une détermination des paramètres du système en utilisant, en une fois, toute l'information issue de la mesure. Les techniques comme les moindres carrés, le maximum de vraisemblance et les variables instrumentales sont de ce types.

Moindres carrés Cette méthode classique [63] permet la prise en compte de l'influence du bruit de mesure lors de l'identification (figure 1.5). H représente la fonction de transfert en z associée au schéma récursif 1.97 qui s'exprime sous la forme :

$$H(z^{-1}) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}} \quad (1.104)$$

En l'absence de connaissances des caractéristiques du bruit e_k , on le supposera gaussien et décorrélé de l'excitation. Le problème se ramène donc à la détermination des paramètres (a_i, b_i) par minimisation. Soit :

$$y_k = \sum_{i=0}^m a_i u_{k-i} - \sum_{i=1}^n b_i y_{k-i} + v_k \quad (1.105)$$

$$v_k = e_k + \sum_{i=1}^n b_i e_{k-i} \quad (1.106)$$

$$A_p = \begin{pmatrix} u_k & \dots & u_{k-m} & -y_{k-1} & \dots & -y_{k-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & \dots & u_{k-m} & -y_{k+p-2} & \dots & -y_{k+p-n-1} \end{pmatrix}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad Y_p = \begin{pmatrix} y_k \\ \vdots \\ y_{k+p-1} \end{pmatrix} \quad V_p = \begin{pmatrix} v_k \\ \vdots \\ v_{k+p-1} \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

où y : réponse
 u : excitation
 (n, m) : paramètres de récursion
 p : nombre d'échantillons utilisés

Si le bruit est nul, c'est à dire $e_k = 0$, la solution prend alors la forme suivante pour $p = m + n + 1$:

$$\theta = A_p^{-1} Y_p \quad (1.108)$$

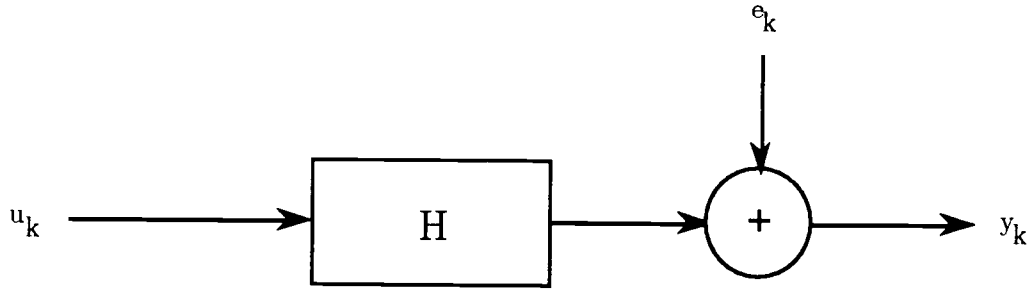


Figure 1.5: Fonction de transfert bruité.

Dans la plupart des cas, on observe toujours la présence de bruits sur la mesure, qui nous conduit alors à calculer une erreur minimale sur l'estimation des paramètres. On démontre alors que celle ci est obtenue en posant :

$$J = (Y_p - \hat{Y}_p)^t W (Y_p - \hat{Y}_p) \quad \text{doit être minimum} \quad (1.109)$$

où

$$\hat{Y}_p = A_p \hat{\theta} \quad \hat{\theta} \text{ étant la valeur estimée de } \theta \quad (1.110)$$

W est une matrice définie positive qui représente une matrice de pondération. Ce qui fournit pour l'estimation de θ :

$$\hat{\theta} = (A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W Y_p \quad \text{avec } p > m + n + 1 \quad (1.111)$$

Une telle méthode est applicable si la matrice $(A_p^t A_p)$ est inversible, cela est en général le cas si tous les modes du système devant être identifiés sont excités. Ce sera le cas pour des excitations comme :

- Aléatoire gaussien
- Pseudo-aléatoire
- Excitation dont le spectre contient au moins les n modes

Elle fournit une estimation sans biais des paramètres dans la mesure où $E(v_p) = 0$, et est statistiquement indépendant de A_p . En effet, on démontre à l'aide de la relation 1.111 que :

$$E[\hat{\theta}] = E[(A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W (A_p \theta + V_p)] \quad (1.112)$$

$$= \theta + E[(A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W V_p] \quad (1.113)$$

Plusieurs situations sont alors envisageables :

- A_p est déterministe -

Alors dans ce cas :

$$E[\hat{\theta}] = \theta + [(A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W] E[V_p] \quad (1.114)$$

seule la condition $E[V_p] = 0$ est nécessaire pour que l'estimation de θ soit sans biais et consistante.

- A_p est stochastique -

Il faut alors que la condition :

$$E[(A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W V_p] = 0 \quad (1.115)$$

soit remplie, si l'on veut avoir une estimation sans biais et consistante. Si A_p est indépendant de V_p , alors on peut écrire :

$$E[\hat{\theta}] = \theta + E[(A_p^t W A_p)^{-1} A_p^t W] E[V_p] \quad (1.116)$$

ce qui revient à dire que l'estimation, dans le cas où A_p est stochastique, est obtenue si A_p et V_p sont indépendants, et le bruit V_p est de moyenne nulle. Seul, un choix judicieux de W peut permettre de vérifier la condition générale 1.115 ; dans la plupart des cas, sa détermination reste difficile. Cependant, grâce à la technique des variables instrumentales, nous verrons qu'il est possible de vérifier cette condition.

Maximum de vraisemblance Cette méthode est basée sur l'estimation la plus probable de θ par rapport aux mesures expérimentales obtenues. Nous définirons l'ensemble des v_k $k = 1, \dots, p$ comme n processus aléatoires indépendants. Dans ces conditions, il est possible de définir la fonction de vraisemblance comme étant égale à :

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_p; \theta) = \prod_{i=1}^p f(v_i; \theta) \quad (1.117)$$

Le maximum de "chance", pour que la réalisation de la fonction de vraisemblance corresponde aux mesures, sera obtenu en maximisant \mathcal{L} par rapport aux θ ce qui revient à dire que la valeur estimée $\hat{\theta}$ est obtenue en écrivant :

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_p; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} (\mathcal{L}(v_1, \dots, v_p; \theta)) \quad (1.118)$$

Dans le cas où \mathcal{L} est deux fois dérivable par rapport à θ , le maximum sera alors obtenu en posant :

$$\left. \frac{\partial \log(\mathcal{L})}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \log(\mathcal{L})}{\partial \theta^2} \text{ définie négative} \quad (1.119)$$

Ici θ est le seul ensemble de paramètres ajustables permettant de réaliser le maximum de \mathcal{L} . Le maximum de \mathcal{L} , par rapport à θ , fournit un estimateur $\hat{\theta}$ qui est consistant, distribué asymptotiquement selon une loi normale et efficace [13]. Ces propriétés assurent que la matrice de covariance de l'estimateur $\hat{\theta}$ atteint asymptotiquement sa borne de Cramer-Rao. Si l'on veut appliquer cette méthode, il faut nécessairement connaître la densité de probabilité du bruit v_k . Dans la plupart des cas, les v_k sont corrélés entre eux; on supposera alors qu'ils sont le résultat d'un filtre linéaire généré par l'ensemble des variables aléatoires e_k , qui sont indépendantes deux à deux, et suivent un processus gaussien à moyenne nulle. On peut alors écrire que :

$$v_k = e_k + \sum_{i=1}^l c_i e_{k-i} \quad (1.120)$$

Dés lors, on peut écrire que la fonction de vraisemblance est définie par :

$$\mathcal{L}(e_1, \dots, e_p; \theta) = \prod_{i=0}^p \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.121)$$

où σ est la variance de l'erreur e_k . Soit :

$$\sigma^2 = E(e^2) \quad (1.122)$$

l'étude de la fonction de vraisemblance se fera au travers de son logarithme.

$$\log \mathcal{L}[(e_1, \dots, e_p; \theta)] = -\frac{p}{2} \log(2\pi) - \frac{p}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^p \frac{e_i^2}{\sigma^2} \quad (1.123)$$

Si la matrice de covariance est connue le maximum de \mathcal{L} est obtenu en minimisant :

$$J_1(\theta) = \frac{1}{2} \frac{Q(\theta)}{\sigma^2} \quad \text{où} \quad Q(\theta) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^p e_i^2 \quad (1.124)$$

Généralement, la variance est inconnue, on écrira alors que la fonction de vraisemblance doit aussi être maximum par rapport à σ^2 , ce qui permet d'écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \sigma^2} = 0 = -\frac{p}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=0}^p e_i^2 \quad (1.125)$$

et impose : $\sigma^2 = Q(\theta)$. On démontre alors que le maximum de vraisemblance est obtenu en minimisant :

$$J_2(\theta) = \log(Q(\theta)) \quad (1.126)$$

On remarquera que le minimum de J_1 ou J_2 assure une minimisation de la variance de l'erreur $Q(\theta)$, ainsi que le maximum de la fonction de vraisemblance. De plus, la variable θ qui dépend des a_i et des b_i , dépend désormais aussi des c_i . La minimisation de J_2 sera réalisée par une méthode de gradient qui permettra d'estimer les variables θ . Soit :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \theta_i} = \frac{2}{p} \sum_{k=0}^p e_k Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_i} \quad (1.127)$$

Le calcul de la matrice hessienne se fait en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{2}{p} \sum_{k=0}^p \frac{\partial e_k}{\partial \theta_j} Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_i} + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n e_k Q(\theta)^{-1} \frac{\partial^2 e_k}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \\ &\quad - \frac{2}{p^2} \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^p e_k Q(\theta)^{-1} \left(e_m \frac{\partial e_m}{\partial \theta_i} + \frac{\partial e_m}{\partial \theta_i} e_m \right) Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_j} \end{aligned} \quad (1.128)$$

Le deuxième terme, quand θ approche la valeur vraie, tend vers zéro. Le dernier terme quant à lui, tend vers zéro, dans la mesure où l'échantillon p est grand [13]. Dans ces conditions, la matrice hessienne peut être approchée par :

$$\frac{\partial^2 J_2^*}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{2}{p} \sum_{k=0}^p \frac{\partial e_k}{\partial \theta_j} Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_i} \quad (1.129)$$

L'estimation des paramètres se fera donc en écrivant l'algorithme suivant :

$$\theta_i(k+1) = \theta_i(k) + \alpha_k \left(\frac{\partial^2 J_2^*}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)^{-1} \frac{\partial J_2}{\partial \theta_i} \quad (1.130)$$

où α_k est un paramètre de descente qui optimise la vitesse de convergence de l'algorithme. Une méthode du nombre d'or [59] peut être utilisée ou encore toute autre technique d'optimisation du pas de descente. Cette procédure nécessite une première estimation des paramètres θ . Celle-ci pourra être obtenue à l'aide d'une méthode des moindres carrés. L'utilisation de l'algorithme de descente avec un calcul analytique du gradient et de la hessienne assure une bonne convergence de la méthode. Nous verrons ultérieurement que l'on peut développer cette technique dans un cadre multi-dimensionnel. Une extension au cas non-linéaire est envisageable, elle sera abordée dans le chapitre concernant les schémas récurrents du type NARMAX.

Variables instrumentales Nous allons aborder une méthode qui permet d'obtenir les paramètres θ d'une manière analogue aux moindres carrés, mais en tenant compte d'une possible corrélation entre V_p et A_p . En effet, on peut montrer que :

$$E[Z^t Y_p] = E[Z^t A_p] \theta + E[Z^t V_p] \quad (1.131)$$

Il est clair que si $E(Z^t V_p)$ est égale à zéro, alors $\hat{\theta}$ converge en probabilité vers θ . Nous estimerons donc $\hat{\theta}$ par la relation :

$$\hat{\theta} = (Z^t A_p)^{-1} Z^t Y_p \quad (1.132)$$

où Z est la matrice des variables instrumentales. Cette matrice doit respecter deux conditions principales, si l'on veut éliminer l'influence du bruit sur l'estimation des paramètres :

$$\det(Z^t A_p) \neq 0 \quad (1.133)$$

$$E(Z^t V_p) = 0 \quad (1.134)$$

Le choix de la matrice Z est donc arbitraire, mais en général on choisit Z égale à :

$$Z = \begin{pmatrix} u_k & \cdots & u_{k-m} & -x_{k-1} & \cdots & -x_{k-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+p-1} & \cdots & u_{k+p-m-1} & -x_{k+p-2} & \cdots & -x_{k+p-n-1} \end{pmatrix} \quad (1.135)$$

où x_k est la réponse du système sans bruit.

L'obtention des x_k nécessaire au calcul de Z (réponse avec $V_p = 0$) sera estimée par \hat{x}_p , à l'aide par exemple d'une méthode de moindres carrés. D'autres expressions de Z sont envisageables. Elles ont toujours pour but de respecter 1.133 et 1.134. Cette méthode présente cependant une difficulté liée à une estimation correcte de Z qui soit indépendante de V_p . Elle peut s'avérer, pour cette raison, moins performante qu'une méthode des moindres carrés généralisés.

Moindres carrés généralisés Cette méthode a pour but, comme la précédente, de prendre en compte le fait que le bruit peut être corrélé avec la réponse. Elle estime par une méthode itérative de minimisation les paramètres du modèle, et ceux associés au bruit. Le bruit sera représenté à l'aide d'un modèle AR (auto-regréssive) excité par un processus aléatoire e_k décorrélé de A_p . On définit alors le système suivant :

$$Y_p = A_p \theta + V_p \quad (1.136)$$

$$V_p = B_p \psi + E_p \quad (1.137)$$

où

$$B_p = \begin{pmatrix} v_{k-1} & \cdots & v_{k-l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{k+p-2} & \cdots & v_{k+p-l-1} \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} \quad E_p = \begin{pmatrix} e_k \\ \vdots \\ e_{k+p-1} \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

Il est alors possible d'écrire que :

$$Y_p = (A_p \ B_p) \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix} + Z_p \quad (1.139)$$

Un résolution par moindre carré est alors possible, ce qui fournit :

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_p \\ \hat{\psi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p^t A_p & A_p^t B_p \\ B_p^t A_p & B_p^t B_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p^t \\ B_p^t \end{pmatrix} Y_p \quad (1.140)$$

Dès lors, il s'agit d'obtenir une première estimation de θ afin de pouvoir calculer l'erreur V_p , et ainsi obtenir une valeur approchée de B_p . Puis grâce à la relation 1.140, on pourra estimer les paramètres θ et ψ . Ces opérations sont répétées jusqu'à convergence des paramètres. On notera que cette algorithme ne converge pas toujours vers la solution optimale (Soderstrom 1974 [92]), du fait de la présence de minimums locaux, spécialement lorsque le rapport signal sur bruit est faible.

Méthode on-line

Les méthodes "on-line" présentent certains avantages, car elles ne nécessitent pas de grande capacité de stockage, et sont en général capables de suivre l'évolution des paramètres au cours du temps. Cette classe d'algorithme [51] est toujours associée à des schémas itératifs qui nécessitent la connaissance d'une estimation initiale des paramètres inconnus. De telles techniques sont susceptibles de fournir une bonne estimation, dans la mesure où le choix de l'état initial est correct, et la convergence assurée. La plupart des méthodes "off-line" possède une formulation "on-line". En effet, la méthode des moindres carrés peut s'exprimer de manière itérative, il en va de même pour des méthodes, comme les variables instrumentales, maximum de vraisemblance, moindres carrés généralisés ; mais il existe aussi des techniques purement itératives comme les méthodes d'approximation stochastique ou encore le filtre de Kalman.

Moindres carrés récursifs Il s'agit de reprendre la théorie des moindres carrés, basée sur la minimisation de l'erreur quadratique, et de lui donner une structure de résolution récursive. Nous chercherons donc un lien entre l'estimation des paramètres θ effectuée à l'étape k soit θ_k , et l'estimation à l'étape $k + 1$ noté θ_{k+1} . Nous rappellerons que l'écart quadratique pondéré peut se mettre sous la forme :

$$\epsilon_p(\theta) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p w_k (y_k - \theta^t \phi_k)^2 \quad (1.141)$$

où

$$\phi_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k-m} \\ -y_{k-1} \\ \vdots \\ -y_{k-n} \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

Nous avons vu précédemment que le minimum de $\epsilon_p(\theta)$ était atteint pour p points de mesure si :

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^p w_k \phi_k \phi_k^t \right)^{-1} \sum_{k=1}^p w_k \phi_k y_k \quad (1.143)$$

Nous noterons par la suite $\bar{R}_k = \sum_{i=1}^k w_i \phi_i \phi_i^t$. L'estimation récursive de \bar{R}_k est obtenue aisément en écrivant :

$$\begin{aligned} \bar{R}_k &= \sum_{i=1}^{k-1} w_i \phi_i \phi_i^t + w_k \phi_k \phi_k^t \\ &= \bar{R}_{k-1} + w_k \phi_k \phi_k^t \end{aligned} \quad (1.144)$$

comme

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \bar{R}_k^{-1} \left(\sum_{i=1}^{k-1} w_i \phi_i y_i + w_k \phi_k y_k \right) \\ \bar{R}_{k-1} \hat{\theta}_{k-1} &= \sum_{i=1}^{k-1} w_i \phi_i y_i \end{aligned} \quad (1.145)$$

On obtient alors, grâce à 1.144 et le système 1.145, l'algorithme récursif suivant :

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \bar{R}_k^{-1} w_k \phi_k (y_k - \hat{\theta}_{k-1}^t \phi_k) \quad (1.146)$$

$$\bar{R}_k = \bar{R}_{k-1} + w_k \phi_k \phi_k^t \quad (1.147)$$

On remarquera que la résolution de schémas récursifs nécessite à chaque pas en temps l'inversion de la matrice \bar{R}_k . Afin d'éviter ce calcul, une propriété algébrique particulière sera appliquée [54], définie par la relation :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1} \quad (1.148)$$

où A , B , C et D sont des matrices de dimensions compatibles et telles que le produit BCD et la somme $A + BCD$ existent. En posant :

$$\begin{aligned} A &= P_k = \bar{R}_k^{-1} \\ B &= \phi_k \\ C &= w_k \end{aligned}$$

$$D = \phi_k^t \quad (1.149)$$

Alors on peut démontrer que :

$$\begin{aligned} P_k &= (P_{k-1}^{-1} + \phi_k w_k \phi_k^t)^{-1} \\ &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \phi_k \phi_k^t P_{k-1}}{1/w_k + \phi_k^t P_{k-1} \phi_k} \end{aligned} \quad (1.150)$$

On obtient ainsi un nouveau système récursif défini par :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + \overbrace{L_k}^{\text{matrice de gain}} \underbrace{(y_k - \hat{\theta}_{k-1}^t \phi_k)}_{\text{erreur de modélisation}} \\ L_k &= \frac{P_{k-1} \phi_k}{1/w_k + \phi_k^t P_{k-1} \phi_k} \\ P_k &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \phi_k \phi_k^t P_{k-1}}{1/w_k + \phi_k^t P_{k-1} \phi_k} \end{aligned} \quad (1.151)$$

L'initialisation de ce schéma récursif nécessite la connaissance de P_0 et $\hat{\theta}_0$. En général, on choisit $P_0 = CI$, ce qui assure à \bar{R} d'être inversible, et $\hat{\theta}_0 = 0$ comme paramètres initiaux. Une autre possibilité serait de prendre pour P_0 la valeur obtenue en calculant $(w_0 \phi_0 \phi_0^t)^{-1}$ associé à un bloc de mesure antérieur au démarrage $t = 0$ de l'algorithme récursif et on prendrait pour $\hat{\theta}_0$ la valeur $\hat{\theta}_0 = P_0 \sum_{k=-N_0}^0 w_k \phi_k y_k$. Cette technique pourra être utilisée, dans des méthodes comme I.T.D., ou encore polyréférence où des calculs de moindres carrés sont utilisés et ainsi donner naissance à une version récursive de ces algorithmes [17].

Variables instrumentales récursives Nous chercherons ici, à exprimer de façon récursive la théorie des variables instrumentales présentée dans le paragraphe des méthodes "off-line". Nous avons vu que l'estimation des paramètres était obtenue à l'aide de la relation :

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^p Z_k \phi_k^t \right)^{-1} \sum_{k=1}^p w_k Z_k y_k \quad (1.152)$$

où Z_k est le vecteur des variables instrumentales devant vérifier les relations 1.133 et 1.134. Une possibilité de choix pour Z_k est de prendre :

$$Z_k = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k-m} \\ -x_{k-1} \\ \vdots \\ -x_{k-n} \end{pmatrix} \quad (1.153)$$

On remarquera une similitude avec les résultats des moindres carrés en posant $\phi_k = Z_k$ et $w_k = 1$; dès lors, on peut démontrer aisément que le schéma récursif associé aux variables instrumentales est fourni par :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + L_k(y_k - \hat{\theta}_{k-1}^t \phi_k) \\ L_k &= \frac{P_{k-1} Z_k}{1 + \phi_k^t P_{k-1} Z_k} \\ P_k &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} Z_k \phi_k^t P_{k-1}}{1 + \phi_k^t P_{k-1} Z_k}\end{aligned}\quad (1.154)$$

où Z_k doit vérifier les relations 1.133 et 1.134, son choix se fera de la même manière que celle présentée dans la version "off-line".

Maximum de vraisemblance récursif En reprenant la forme de l'équation d'évolution définie par un modèle ARMAX :

$$y_k = \sum_{i=0}^m a_i u_{k-i} - \sum_{i=1}^n b_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^l c_i e_{k-i} + e_k \quad (1.155)$$

nous avons démontré précédemment, que l'estimation de θ par la méthode du maximum de vraisemblance est fournie par l'algorithme itératif :

$$\theta_i(k+1) = \theta_i(k) + \alpha_k \left[\sum_{k=0}^p \frac{\partial e_k}{\partial \theta_j} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_i} \right]^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^p e_k \frac{\partial e_k}{\partial \theta_i} \right\} \quad (1.156)$$

On notera désormais :

$$\Psi_k = \left(\frac{d}{d\theta} e_k \right)^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_k}{\partial \theta_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial e_k}{\partial \theta_{m+n+l+1}} \end{pmatrix} \quad J'_k = \sum_{q=1}^k \Psi_q e_q \quad J''_k = \sum_{k=1}^k \Psi_q^t \Psi_q \quad (1.157)$$

ce qui nous permet alors d'écrire, compte tenu des relations 1.127, et 1.129 les égalités suivantes :

$$J'_k = \sum_{i=0}^k \Psi_i e_i = J'_{k-1} + \Psi_k e_k \quad (1.158)$$

$$J''_k = J''_{k-1} + \Psi_k \Psi_k^t \quad (1.159)$$

On obtient alors l'algorithme récursif pour le maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + \alpha_k L_k e_k \\ L_k &= \frac{P_{k-1} \Psi_k}{1 + \Psi_k^t P_{k-1} \Psi_k} \\ P_k &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \Psi_k \Psi_k^t P_{k-1}}{1 + \Psi_k^t P_{k-1} \Psi_k}\end{aligned}\quad (1.160)$$

Le calcul de e_k se fera en utilisant de manière récursive l'équation 1.155 à l'aide des paramètres estimés. L'obtention de Ψ_k s'effectuera de manière analogue, mais en utilisant la dérivée par rapport à θ de l'équation 1.155.

Filtre de Kalman Il s'agit d'une méthode très répandue dans le domaine du traitement du signal, et qui utilise les propriétés statistiques des variables d'état afin de pouvoir les estimer. Cette technique très puissante, introduite par Kalman, permet d'identifier les variables d'états, les paramètres du problème, ou même les deux simultanément. Il est intéressant de remarquer qu'il existe une "version" non-linéaire, appelée filtre de Kalman étendu, qui permet de prendre en compte des équations d'état non-linéaire. Nous montrerons aussi que le filtre de Kalman est un filtre à variance minimum optimal, c'est à dire que tout autre filtre a une variance d'erreur d'estimation toujours supérieure ou égale à celle obtenue par le filtre de Kalman. L'algorithme qui sera développé, est purement de type "on-line" et ne possède pas son équivalent en "off-line". Les équations d'état du système seront mises sous la forme discrète :

$$x(k+1) = \psi(k+1, k)x(k) + G(k)u(k) \quad (1.161)$$

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (1.162)$$

où $\phi(k+1, k)$: matrice de transition entre l'état k et $k+1$
 $x(k)$: vecteur d'état à l'instant k
 $u(k)$: vecteur d'excitation à l'instant k
 $y(k)$: vecteur de la réponse à l'instant k
 $v(k)$: vecteur bruit de mesure à l'instant k
 $G(k)$ et $H(k)$: matrice de dimensions appropriées

Certaines hypothèses de décorrélation entre l'excitation $u(k)$ et le bruit $v(k)$ doivent être faites. Cependant, ces dernières peuvent être relaxées, en supposant que $u(k)$ est généré par un filtre linéaire excité par un bruit blanc gaussien dont les équations seraient introduites dans le système d'état [54]. Les hypothèses de décorrélation sont :

$$E(u(k)) = 0 \quad (1.163)$$

$$E(v(k)) = 0 \quad (1.164)$$

$$E(u(k)v^t(k)) = 0 \quad (1.165)$$

$$E(u(k)u^t(k)) = Q(k)\delta(k, l) \quad \text{et} \quad E(x(0)u^t(k)) = 0 \quad (1.166)$$

$$E(v(k)v^t(k)) = R(k)\delta(k, l) \quad \text{et} \quad E(x(0)v^t(k)) = 0 \quad (1.167)$$

L'estimation du vecteur d'état sera effectuée en déterminant l'espérance mathématique de $x(k)$ connaissant les réponses $y(i)$ $i = 1, \dots, n$ soit :

$$\hat{x}(k/n) = E(x(k)/y(1), \dots, y(n)) \quad (1.168)$$

On montre alors aisément grâce à 1.161 que :

$$\hat{x}(k+1/n) = \psi(k+1, k)\hat{x}(k/n) + G(k)E(u(k)/y(1) \cdots y(n)) \quad (1.169)$$

sachant que $u(k)$ est indépendant de $(y(1) \cdots y(n))$, et que l'excitation est à moyenne nulle, on a donc $E(u(k)/y(1) \cdots y(n)) = 0$ ce qui implique :

$$\hat{x}(k+1/n) = \psi(k+1, k)\hat{x}(k/n) \quad (1.170)$$

Nous allons chercher à obtenir une estimation $\hat{x}(k)$ dont l'erreur soit à minimum de variance. On écrira donc :

$$P(k/k) = E((x(k) - \hat{x}(k/k))(x(k) - \hat{x}(k/k))^t) \quad \text{doit être minimum} \quad (1.171)$$

Afin de déterminer $P(k/k)$, on remarquera tout d'abord que :

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k/k) = \psi(k, k-1)(x(k) - \hat{x}(k-1/k-1)) + G(k-1)u(k-1) \quad (1.172)$$

Ce qui permet d'écrire après simplification :

$$P(k/k-1) = \psi(k, k-1)P(k-1/k-1)\psi^t(k, k-1) + G(k-1)Q(k-1)G^t(k-1) \quad (1.173)$$

Nous devons à ce stade exprimer $P(k/k)$ en fonction de $P(k/k-1)$, afin d'établir une relation de récurrence. Si l'on suppose maintenant que le filtre de Kalman doit être de la forme :

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + K(k)(y(k) - H(k)\hat{x}(k/k-1)) \quad (1.174)$$

avec $K(k)$ le gain du filtre de Kalman. On démontre alors que la covariance $P(k/k)$ peut s'écrire par rapport à $P(k/k-1)$:

$$P(k/k) = (I - KH)P(k/k-1)(I - KH)^t + K(k)R(k)K^t(k) \quad (1.175)$$

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer le gain $K(k)$ par minimisation de la variance, ce qui revient à calculer le minimum de J , c'est à dire :

$$J = \text{trace}(P(k/k)) = E(\tilde{x}^t(k/k)\tilde{x}(k/k)) \quad (1.176)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K(k)} = 0 \quad (1.177)$$

ce qui fournit :

$$K(k) = P((k/k-1)H^t(k)(H(k)P(k/k-1)H^t(k) + R(k))^{-1} \quad (1.178)$$

$$P(k/k) = P(k/k-1) - P(k/k-1)H^t(k)H(k)P(k/k-1)H^t(k)$$

$$+R^{-1}(k)H(k)P(k/k-1) \quad (1.179)$$

Dans le cas continu, cette dernière équation représente la forme discrète d'une équation différentielle de Ricatti. On notera que le calcul de $P(k/k-1)$ est fourni par l'équation 1.173.

La mise en oeuvre du filtre de Kalman se fait donc en 4 étapes :

- étape 1- calcul de $P(k/k-1)$ grâce à l'équation 1.173
- étape 2- calcul de $K(k)$ grâce à l'équation 1.178
- étape 3- calcul de $\hat{x}(k)$ grâce à l'équation 1.174
- étape 4- calcul de $P(k/k)$ grâce à l'équation 1.179

puis retour à l'étape 1 avec $k = k + 1$.

Le choix des valeurs initiales $\hat{x}(0)$ et $P(0/0)$ est assez délicat. En effet, un choix erroné de $\hat{x}(0)$ n'est pas catastrophique, car l'algorithme corrige au fur et à mesure l'estimation de $\hat{x}(k)$. Par contre, le traitement des mesures n'améliore pas la covariance de l'erreur. Celle-ci sera donc estimée en traduisant notre "ignorance" sur l'erreur : $P(0/0) = \alpha I$ où α est grand. Nous venons de voir qu'il est possible d'estimer x , mais on peut tout aussi bien estimer les paramètres θ d'un modèle en modifiant judicieusement la forme du système d'état, par exemple :

$$\theta(k+1) = \theta(k) \quad (1.180)$$

$$y(k) = H(k)\theta(k) + v(k) \quad (1.181)$$

On remarquera que le bruit $v(k)$ devient le processus excitateur et que :

$$\hat{x}(k) \rightarrow \theta(k) \quad (1.182)$$

$$\psi(k=1, k) \rightarrow I \quad (1.183)$$

$$G(k) \rightarrow 0 \quad (1.184)$$

$$H(k) \rightarrow H(k) \quad (1.185)$$

$$u(k) \rightarrow 0 \quad (1.186)$$

$$y(k) \rightarrow y(k) \quad (1.187)$$

Une estimation simultanée de $x(k)$ et θ est envisageable en posant le système d'état suivant :

$$Z(k+1) = f(Z(k)) + \begin{pmatrix} G(k) \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \quad (1.188)$$

$$y(k) = h(Z(k)) + v(k) \quad (1.189)$$

Il est important de noter, que dans ce cas, les équations d'état sont non linéaires ($f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ fonctions non-linéaires de θ et $x(k)$) et nous obligent à modifier l'algorithme afin que l'estimation soit possible. Pour cela, le filtre de Kalman sera modifié en un filtre de Kalman étendu qui permet de résoudre ce type de problème [54] [96].

Approximation stochastique Cette approche de type réursive couvre une classe d'algorithme dont le but est d'obtenir la solution des équations de la forme :

$$f(e(t)) = E_x(Q(x, e(t))) = 0 \quad (1.190)$$

où f est fonction connue, $e(t)$ des variables issues de mesures, et x des variables à déterminer. Nous verrons que cette technique originale peut prendre différentes formes selon les matrices de gain choisies : application à la régression linéaire (il s'agit de l'algorithme bien connu sous le nom de LMS), ou encore méthode par gradient stochastique. Si on définit le problème réursif à identifier comme étant :

$$y(t) = \theta^t \phi(t) + v(t) \quad (1.191)$$

$$\text{avec } x = \theta \quad (1.192)$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} \quad (1.193)$$

alors $Q(x, e(t)) = \phi(t)(y(t) - \phi^t \theta)$. Si l'on cherche à appliquer directement la formule 1.190, il est nécessaire alors de fixer des valeurs arbitraires de x jusqu'à ce que l'égalité soit vérifiée. Une telle démarche demanderait alors de gros calculs et aurait le défaut de ne pas tenir compte de l'évolution de x par rapport à l'équation 1.190. Afin de palier à ce problème Robbin et Monro [42] ont proposé d'utiliser le schéma réursif suivant pour calculer x :

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t-1) + \gamma(t)Q(\hat{x}(t-1), e(t)) \quad (1.194)$$

où $\gamma(t)$ est une fonction arbitraire devant vérifier les conditions suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0 \quad (1.195)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma(t) = \infty \quad (1.196)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^p(t) = 0 \quad \text{pour un } p > 1 \quad (1.197)$$

Souvent un choix classique de $\gamma(t)$ consiste à prendre $\gamma(t) = 1/t$, mais bien d'autres solutions sont possibles dans la mesure où les conditions 1.195, 1.196 et 1.197 sont vérifiées.

Application à la régression linéaire Si nous appliquons la formule 1.194 au cas de l'identification paramétrique de l'équation 1.191, on obtient alors le schéma récursif suivant :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t)\phi(t)(y(t) - \phi^t(t)\hat{\theta}(t-1)) \quad (1.198)$$

Application par le gradient Si l'on revient au problème initial, il s'agit alors de minimiser $V(x)$ par rapport à x . En effet :

$$\begin{aligned} V(x) &= E(H(x, e(t))) \quad \text{est tel que} \quad \frac{-dV(x)}{dx} = f^t(x) \\ &= \frac{1}{2}E((y(t) - \phi^t\theta)^2) \quad \quad \quad = E(Q(x, e(t))) \end{aligned} \quad (1.199)$$

On a donc plus qu'à remplacer dans l'algorithme de Robbin et Monro $E(Q(x, e(t)))$ par $-\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=\hat{x}(t-1)}$, ce qui fournit alors l'algorithme récursif suivant :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \gamma(t) \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^t \Big|_{x=\hat{x}(t-1)} \quad (1.200)$$

Il est intéressant de remarquer que si l'on remplace $\gamma(t)$ par l'inverse de la matrice hessienne associée à $V(x)$ (c'est à dire $(\frac{d^2V(x)}{dx^2})^{-1}$), on retrouve une méthode classique de descente du type méthode de Newton.

1.4.3 Calcul de l'ordre et validation

L'ensemble des méthodes d'identification nécessite toujours la connaissance du nombre de paramètres à identifier, ou encore le nombre de modes à prendre en compte. Il est important de bien choisir ce terme, car trop faible le modèle risque d'être insuffisant pour bien représenter le comportement du système, et trop grand le calcul des paramètres devient difficile du fait que le problème est alors mal conditionné. Ainsi, des critères d'estimation de l'ordre ont été développés afin de faciliter son choix. Par exemple, des méthodes basées sur l'ordre des systèmes à inverser [9] ou encore sur des critères d'information [39] ont été développés. Des sélections à posteriori sur le choix des paramètres sont envisageables par des méthodes statistiques. Une fois le choix d'un ordre correctement établi, il reste à valider le modèle obtenu afin qu'il représente correctement un système mécanique. Les techniques proposées mettent en oeuvre des propriétés particulières de l'analyse modale : critère du MAC, réciprocité,... Il est possible aussi d'utiliser des critères de corrélation qui permettent de juger la conformité du modèle par rapport à la mesure, mais n'apportent aucun renseignement sur la nature du problème, c'est à dire s'il est de type mécanique ou pas.

Ordre des modèles

La méthode qui sera présentée, suppose que l'excitation est suffisamment riche pour que tous les modes du système soient excités. Soit y_k la réponse et u_k l'excitation, on définit alors le vecteur a_k :

$$a_k = \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.201)$$

Ainsi que la matrice de covariance de a_k :

$$Q_k = E(a_k a_k^t) \quad (1.202)$$

En général la moyenne statistique $E(\)$ sera remplacée par une moyenne temporelle en supposant que les hypothèses d'ergodicité et de stationnarité sont vérifiées. Dans le cas où le système est non bruité, Q_k est singulière si k est supérieur à n (n ordre du modèle) et :

$$\text{rang}(Q_k) = k + n \quad (1.203)$$

En présence de bruit, Q_k est toujours non-singulière, mais en traçant le rapport :

$$D_k = \frac{Q_k}{Q_{k+1}} \quad \text{par rapport à } k \quad (1.204)$$

on observe un saut lorsque l'on passe de l'étape $k = n - 1$ à l'étape $k = n$. Ce saut devient de moins en moins marqué lorsque le bruit augmente. Cette méthode peut être améliorée en introduisant le bruit de mesure v_k dans le calcul de Q_k . Soit :

$$z_k = a_k + v_k \quad E(v_k v_k^t) = \sigma^2 R \quad (1.205)$$

ce qui fournit la relation suivante :

$$\hat{Q}_k = E(z_k z_k^t) = Q_k + \sigma^2 R \quad (1.206)$$

et permet un calcul plus juste de Q_k qui tient compte du bruit v_k en écrivant :

$$Q_k = \hat{Q}_k - \sigma^2 R \quad (1.207)$$

Pour déterminer σ^2 , on écrira que pour $k > n$ $\det(Q_k) = 0$ et si l'on peut supposer $R = I$, alors la plus petite des valeurs propres associées au problème $\det(\hat{Q}_k - \sigma^2 I) = 0$

sera prise pour σ^2 . D'autres améliorations sont envisageables. Ainsi l'étude de la matrice Γ_k où :

$$\Gamma_k = E(a_k b_k^t) \quad b_k = \begin{pmatrix} u_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ z_{k-1} \end{pmatrix} \quad (1.208)$$

et z sont les variables instrumentales permet une étude du même type que précédemment [63], mais ici le bruit est pris en compte par l'introduction des variables instrumentales qui ont la propriété d'être "orthogonales" aux bruits (Equation 1.134).

Critères d'information et tests statistiques

On a vu précédemment une technique pour connaître l'ordre du système à priori. D'autres méthodes permettent, une fois l'identification faite, de savoir si tous les termes estimés sont représentatifs. Ainsi, à posteriori, on peut supprimer certains termes, ou même en rajouter au modèle afin de l'améliorer. Ces méthodes sont basées sur des tests qui utilisent les propriétés statistiques associées aux estimateurs. Elles mettent en oeuvre des théories basées sur les tests du χ^2 et de Fisher. D'autres critères sont aussi utilisés pour "mesurer" si l'information contenue dans le signal est bien restituée par le modèle identifié. Ce type de critère principalement développé par Akaike est très utilisé en théorie du signal.

Tests statistiques Pour certains algorithmes "off-line" comme les moindres carrés, le maximum de vraisemblance, on peut démontrer que $\hat{\theta}_i$ (valeur estimée de θ_i) suit une loi normale centrée telle que :

$$(\hat{\theta} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, P) \quad (1.209)$$

Cette propriété très intéressante nous permet d'établir un test de type Neymann-Pearson comportant une hypothèse simple contre une hypothèse multiple. Ce test ayant pour but de connaître la probabilité d'existence d'un paramètre appartenant au modèle :

$$H_0 \quad \hat{\theta}_i - \theta_i = 0 \quad (1.210)$$

$$H_1 \quad \hat{\theta}_i - \theta_i \neq 0 \quad (1.211)$$

On peut alors démontrer [13] que $P^{-1} = E(A_p^t(\sigma^2)^{-1}A_p)$, ou σ^2 est la variance de l'erreur de prédiction et A_p une matrice définie précédemment dans les méthodes "off-line". Comme σ^2 est inconnu, on introduit son estimateur $\hat{R} = \frac{1}{p-n} \sum_{i=1}^p e_i^2$ qui suit une loi du χ^2 à $(p-n)$ degrés de liberté tel que :

$$\frac{(p-n)\hat{R}}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{p-n}^2 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.212)$$

Le quotient d'une loi normale avec la racine carrée d'une loi du χ^2 formant une distribution de student [8], on pourra alors écrire à l'aide de 1.209 et 1.212 :

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{((A_p^t A_p)_{ii} \hat{R})^{\frac{1}{2}}} \sim t_{p-n} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.213)$$

On utilise plus fréquemment le test, hypothèse nulle $H_0 \hat{\theta}_i = 0$ contre hypothèse non-nulle $H_1 \hat{\theta}_i \neq 0$. Le test statistique utilisé est de préférence basé sur une estimation quadratique des paramètres. Ce qui donne :

$$\frac{\hat{\theta}_i^2}{(A_p^t A_p)_{ii} \hat{R}} \sim F_{1,p-n} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.214)$$

Ce test sera associé à un intervalle de confiance à 95% qui fournit une région critique W_0 définie par :

$$F_i \geq F_{test} = 4 \quad \text{si } p - n > 100 \quad (1.215)$$

Si cette relation est vérifiée, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte H_1 (risque de se tromper en choisissant H_1 est de 5%, risque de première espèce). Cette méthode permet de supprimer ou de garder certains termes modélisés en les testant avec une hypothèse nulle. On montrera ultérieurement qu'il est possible grâce à une technique de corrélation partielle de décider de l'apport d'un nouveau terme dans le modèle. Cette méthode sera abordée dans le chapitre identification des schémas NARMAX qui utilisera une méthode de sélection statistique permettant l'ajout et le retrait des termes du modèle.

Critère d'information Il s'agit ici de mesurer l'erreur commise entre le modèle estimé et le modèle réel. Le maximum de vraisemblance \mathcal{L} étant une méthode efficace (au sens statistique), elle est donc sensible aux variations de paramètres autour de leurs valeurs exactes. Cette remarque suggère l'utilisation d'un critère I (critère de Kulback) [67] défini par:

$$I(g, f(\cdot/\theta)) = S(g, g) - S(g, f(\cdot/\theta)) \quad (1.216)$$

$$S(g, f(\cdot/\theta)) = \int_{\Omega} g(x) \log(f(x/\theta)) dx \quad (1.217)$$

où $g(x)$: densité de probabilité de la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $f(x_i/\theta)$: densité de probabilité de la variable aléatoire x_i

qui mesure l'écart moyen entre la fonction $\log(f(x/\theta))$ et $\log(g(x))$. Si on considère θ_0 comme l'ensemble des paramètres qui vérifie :

$$g(x) = f(x/\theta_0) \quad (1.218)$$

alors en supposant que la variable $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ est proche de θ_0 , Akaike a démontré que :

$$I(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta) = S(f(x/\theta_0), f(x/\theta_0)) - S(f(x/\theta_0), f(x/\theta)) = \frac{1}{2} \|\Delta\theta\|_{J^2} \quad (1.219)$$

où $\|\Delta\theta\|_{J^2} = \Delta\theta^t J \Delta\theta$ et J est la matrice d'information de Fisher. A l'aide de cette relation et des propriétés des estimateurs $\hat{\theta} \in \Theta$ définies sur un sous espace de paramètre Θ (de dimension k) [68], il est possible d'établir le critère suivant :

$$AIC = -2\log(\text{maximum de vraisemblance}) + 2k \quad (1.220)$$

qui est minimum lorsque le nombre de paramètres est optimum. En réalité, on s'aperçoit que plus le nombre de paramètres augmente, plus le modèle s'améliore, mais de manière plus lente à partir d'un certain seuil. L'un des problèmes de cette technique est de trouver le bon ensemble de paramètres qui contiendra le sous ensemble des paramètres optimum. D'autres critères ont été mis au point, ayant toujours pour but de connaître l'ordre optimum à utiliser, par exemple : Akaike a introduit le critère FPE (Final Prediction Error), ou encore Billings le critère C [73] qui est une généralisation du critère AIC .

Validation des modèles

Un grand nombre de travaux a été fait afin de mettre au point des méthodes de comparaison entre les modes identifiés et les modes théoriques (obtenus par éléments finis par exemple) [22]. Cette comparaison ne s'arrête pas uniquement à une confrontation théorie-expérience, mais concerne toute comparaison entre deux modes obtenus par des techniques différentes [1]. Grâce à certaines propriétés de l'analyse modale (déjà utilisées dans la méthode polyréférence), on sait que :

$$\frac{r_{ij,k}}{r_{il,k}} = MSF_{jlk} \quad \text{est indépendant de } i \quad (1.221)$$

Une estimation par moindres carrés sur i de MSF_{jlk} est possible en écrivant :

$$MSF_{jlk} = \frac{R_{jk}^{*t} R_{lk}}{R_{jk}^{*t} R_{jk}} \quad (1.222)$$

où R_{jk} est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice R_k des résidus du mode k . En général, le critère utilisé est celui du MAC qui est obtenu par normalisation par rapport au vecteur R_{lk} :

$$MAC_{jlk} = \frac{(R_{jk}^{*t} R_{lk})^2}{R_{jk}^{*t} R_{jk} R_{lk}^{*t} R_{lk}} \quad (1.223)$$

Le *MAC* permet une mesure de corrélation entre les deux vecteurs R_{jk} et R_{lk} pour un même mode k . On notera que la valeur du *MAC* est toujours comprise entre 0 et 1, 1 représentant une relation linéaire entre les deux vecteurs complexes et 0 une indépendance. D'un point de vue général, le concept du *MAC* peut être appliqué à deux vecteurs arbitraires : par exemple, pour confronter les résultats d'une identification et d'un calcul. Dans ce cas précis le *MAC* prend la forme :

$$MAC = \frac{(\psi_{theo}^{*t} \psi_{ident})^2}{\psi_{theo}^{*t} \psi_{theo} \psi_{ident}^{*t} \psi_{ident}} \quad (1.224)$$

Il est possible aussi de comparer avec ce critère deux identifications modales obtenues différemment.

Chapitre 2

Phénomènes et détections non-linéaires

2.1 Introduction

L'approximation linéaire du comportement des structures est souvent mise en défaut par la présence de non-linéarités. Il est donc nécessaire de pouvoir les détecter et les quantifier. En fait, la grande diversité des effets non-linéaires est telle que peu de méthodes parviennent à être applicables dans tous les cas. C'est pour cette raison qu'un grand nombre de méthodes d'identification a été développé. En général, c'est la forme supposée de la non-linéarité qui impose le choix d'une technique d'identification. Une non-linéarité régulière (raideur de Duffing, amortissement de Van der pol, ...) ne se traitera pas avec les mêmes outils qu'une non-linéarité possédant des singularités (frotteur de Coulomb, ...). On comprend alors qu'il est nécessaire de bien connaître, sur des exemples types, ce que peut provoquer une non-linéarité, et ainsi pouvoir décider de la stratégie à employer. Nous étudierons dans une première étape, quelques phénomènes non-linéaires classiques, comme les résonances internes, les sous et sur harmoniques afin de connaître les comportements caractéristiques liés à la présence d'une non-linéarité. Puis, dans une dernière étape, nous aborderons les outils de la détection non-linéaire qui permettent de savoir si le comportement observé est dû à une non-linéarité ou pas. L'ensemble de ces méthodes de détections repose sur des propriétés particulières des systèmes linéaires : principe de superposition, propriété d'isochronisme, principe de causalité, etc ... Deux niveaux de détections sont envisageables : un premier, qui correspond principalement en une analyse des distorsions des diagrammes fréquentiels et de Nyquist, puis un deuxième associé à des techniques d'analyses basées sur les propriétés citées précédemment.

2.2 Phénomènes non-linéaires

Les sources de non-linéarités sont très nombreuses, elles peuvent être dues aux matériaux (composite), à des jeux, des raideurs ou des amortisseurs locaux (amortisseurs à câble), ou à des effets géométriques (grands déplacements). La liste des non-linéarités ne peut pas être exhaustive, et reste pour le mécanicien un phénomène important à modéliser et à comprendre, car il peut donner naissance à des comportements particuliers (sous-harmonique, auto-excitation, ...). Nous aborderons dans ce paragraphe, sur un exemple simple, quelques effets non-linéaires typiques qui se retrouvent de manière assez générale sur l'ensemble des non-linéarités. L'oscillateur de Duffing amorti forcé, nous servira d'exemple pour illustrer des processus de synchronisation sur-harmonique, sous-harmonique, ultra-sous-harmonique, en résonance primaire, et en combinaison liée à plusieurs excitations. L'équation que nous utiliserons sera définie par :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -2\mu\epsilon\dot{u} - \epsilon\alpha u^3 + F(t) \quad (2.1)$$

- où μ : constante positive
 α : constante positive (ressort durcissant)
 ϵ : paramètre petit

Le phénomène d'oscillation auto-entretenu sera abordé sur l'exemple suivant :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \epsilon(1 - \frac{1}{3}\dot{u}^2)\dot{u} + F(t) \quad (2.2)$$

On notera déjà que le signe de l'amortissement change en fonction du niveau de vitesse. Dans un cas multidimensionnel, des phénomènes nouveaux viennent s'ajouter à ceux vus précédemment, comme les résonances internes et les modes en combinaison liés à une seule excitation. L'exemple choisi sera cette fois :

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = -2\mu_1\epsilon\dot{u}_1 + \alpha_1 u_1 u_2 \quad (2.3)$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = -2\mu_2\epsilon\dot{u}_2 + \alpha_2 u_1^2 \quad (2.4)$$

La résolution de ces problèmes se fera à l'aide de la méthode d'échelles multiples (multiple scales) [6].

2.2.1 Résonance primaire

Il s'agit d'étudier les distorsions non-linéaires obtenues au voisinage de la pulsation de résonance ω_0 de l'équation 2.1. Nous supposons donc que la fréquence d'excitation est

égale à : $\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$. La théorie linéaire prévoit pour un système non amorti, des oscillations d'amplitude infinie quand $\sigma = 0$. En fait, l'amortissement et la non-linéarité ont pour effets de limiter ces amplitudes. Il est donc naturel de faire intervenir la force d'excitation avec un ordre en ϵ égal à celui de l'amortissement et de l'effet non-linéaire [6]. Pour un système faiblement amorti, ceci se traduit par de grandes amplitudes d'oscillations pour un niveau d'excitation faible. La solution du comportement de l'équation 2.1 au voisinage de ω_0 sera obtenue en effectuant un développement à l'ordre 1 en ϵ de u , conformément à la technique d'échelles multiples. Soit :

$$u(t, \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.5)$$

avec $F(t) = K \cos(\Omega t) = k\epsilon \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ et $T_n = \epsilon^n t$. Si l'on remplace l'expression 2.5 dans l'équation 2.1, on obtient en regroupant les coefficients de même ordre en ϵ le système suivant :

$$D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \alpha u_0^3 + k \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.7)$$

La solution générale de l'équation 2.6 fournit :

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + A^*(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.8)$$

Cette solution est alors remplacée dans l'équation 2.7 qui donne :

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -(2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 A^*) e^{i\omega_0 T_0} \\ & - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{k}{2} e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + pc \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ et pc la partie conjuguée du terme qui le précède.

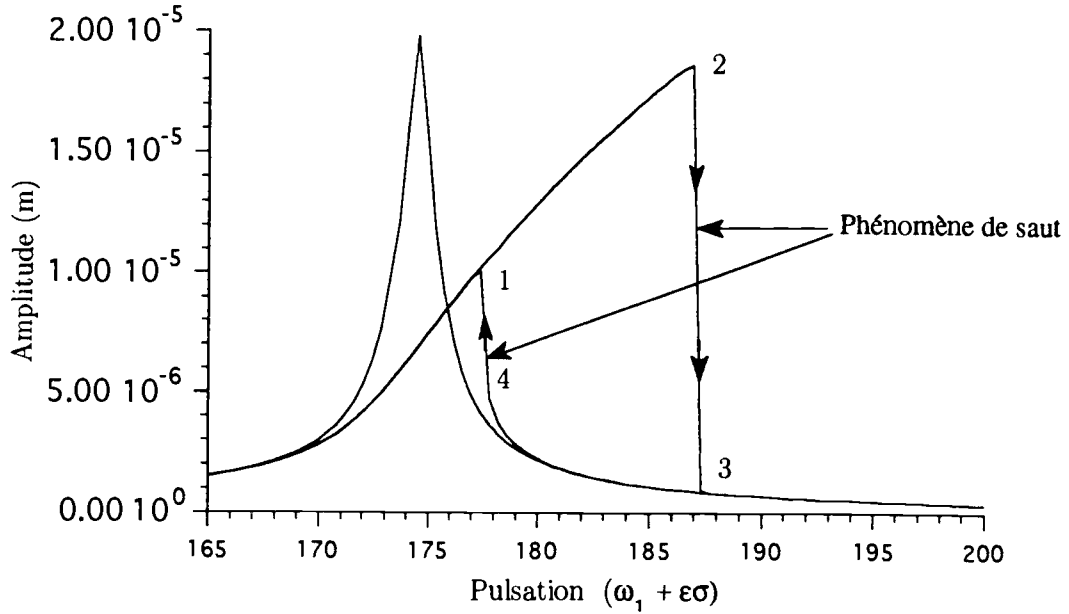
Une notion importante dans l'analyse non-linéaire est la présence de terme séculier dans la solution de l'équation 2.9. Ces termes s'expriment en général sous la forme $t^m \cos(\omega_0 t + \beta)$. Ils ont pour caractéristiques d'être non périodiques, et doivent être supprimés de l'expression u_1 . Ceci est possible en écrivant la condition d'annulation des termes séculiers soit :

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha A^2 A^* - \frac{1}{2} k e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.10)$$

qui revient en fait à supprimer les termes en $e^{\pm i\omega_0 T_0}$ de l'expression 2.9. En effectuant le changement de variable $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$ et $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient alors le système :

$$a' = -\mu a + \frac{k}{2\omega_0} \sin(\gamma) \quad (2.11)$$

$$a\gamma' = \sigma a - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^3 + \frac{k}{2\omega_0} \cos(\gamma) \quad (2.12)$$

Figure 2.1: Phénomène de saut à la résonance ω_1 .

Le comportement stationnaire est obtenu lorsque $a' = \gamma' = 0$. Ces points singuliers peuvent faire l'objet d'une étude de stabilité, afin de savoir si l'effet d'une petite perturbation sur le comportement stationnaire, croît ou décroît. Ce qui fournit :

$$\mu a = \frac{k}{2\omega_0} \sin(\gamma) \quad (2.13)$$

$$\sigma a - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^3 = -\frac{k}{2\omega_0} \cos(\gamma) \quad (2.14)$$

2.13 et 2.14 permettent d'obtenir l'expression de a par rapport aux paramètres de l'équation 2.1 et σ :

$$(\mu^2 + (\sigma - \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2)^2) a^2 = \frac{k^2}{4\omega_0^2} \quad (2.15)$$

La solution u de l'équation 2.1 au voisinage de ω_0 est donnée par :

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) + o(\epsilon) \quad (2.16)$$

où a et γ sont déterminés par les équations 2.13, 2.14, et $o(\epsilon)$ représente l'ordre 1 en ϵ d'approximation par l'échelle multiple. On notera que l'amplitude du pic en fréquence est donnée par $a_{max} = \frac{k}{2\omega_0\mu}$ et sa position est fournie par la parabole d'équation $\sigma = \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2$. Un autre résultat intéressant est le phénomène de saut observé lors d'un balayage sinus croissant puis décroissant (voir figure 2.1). Ce phénomène non-linéaire particulier est dû à l'existence de plusieurs points singuliers stables dans la zone (1-3). Ils sont atteints

indépendamment selon les valeurs prises par les conditions initiales des équations 2.11 et 2.12. Cette dépendance du comportement par rapport aux conditions initiales est caractéristique des systèmes non-linéaires. On observe donc lors d'un balayage sinus croissant, que le système converge vers un des points singuliers correspondant à la branche supérieure ; par contre, lors d'un balayage décroissant, la convergence s'effectue sur le deuxième point singulier correspondant lui à la branche inférieure. De plus, une étude de la stabilité montrerait que l'état stationnaire ainsi atteint est toujours stable, sauf dans la région (4-2). En effet, si on pose $a = a_0 + a_1$ et $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ avec a_0 et γ_0 vérifiant les équations 2.13 et 2.14, alors le système linéarisé fonction de a_1 et γ_1 (méthode des perturbations) possède des valeurs propres positives qui rendent instables la solution dans la région (4-2). Dans ce paragraphe, on a pu noter que les effets non-linéaires peuvent être importants au voisinage de la résonance, en se traduisant par une distorsion du spectre, la présence d'instabilité et une sensibilité aux conditions initiales.

2.2.2 Sur harmonique

L'existence de sur harmonique est tout à fait caractéristique des phénomènes non-linéaires et a donné lieu à une abondante littérature. Il s'agit en fait, de l'apparition dans la réponse d'un harmonique multiple de la fréquence d'excitation Ω . En effet, on démontre que pour $3\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma$, $K = k$ et avec le même développement que précédemment en u 2.5, l'équation d'élimination des termes séculiers s'exprime sous la forme :

$$2i\omega_0(A' + \mu A) + 6\alpha\Lambda^2 A + 3\alpha A^2 A^* + \alpha\Lambda^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.17)$$

avec $\Lambda = \frac{1}{2}K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}$. Le même type de changement de variable que précédemment et le calcul de l'état stationnaire fournissent :

$$-\mu a = \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (2.18)$$

$$\left(\sigma - 3\frac{\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)a - \frac{3\alpha}{8\omega_0}a^3 = \frac{\alpha\Lambda^3}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (2.19)$$

On démontre facilement grâce à 2.18 et 2.19 que :

$$\left(\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha}{8\omega_0}a^2\right)^2\right)a^2 = \frac{\alpha^2\Lambda^6}{\omega_0^2} \quad (2.20)$$

La solution de 2.1 est donnée par :

$$u = a \cos(3\Omega t - \gamma) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + o(\epsilon) \quad (2.21)$$

Un étude approfondie du système d'équations (2.18, 2.19) montrerait que le sur harmonique, comme dans le cas de la résonance primaire, peut présenter un phénomène de saut.

2.2.3 Sous harmonique

L'existence de sous harmonique se démontre de manière analogue pour les sur harmoniques. En effet, en posant $\Omega = 3\omega_0 + \epsilon\sigma$ et $K = k$ on obtient le système suivant pour a et γ :

$$-\mu a = \frac{3\alpha\Lambda}{4\omega_0} a^2 \sin(\gamma) \quad (2.22)$$

$$\left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)a - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^3 = \frac{9\alpha\Lambda}{4\omega_0} a^2 \cos(\gamma) \quad (2.23)$$

où la réponse u s'exprime cette fois sous la forme :

$$u = a \cos\left(\frac{1}{3}(\Omega t - \gamma)\right) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + o(\epsilon) \quad (2.24)$$

Par contre, l'expression de a en fonction des paramètres de l'équation 2.1 et σ s'écrit :

$$(9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^2\right)^2) a^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2} a^4 \quad (2.25)$$

Une solution triviale pour l'équation 2.25 est $a = 0$. Les autres solutions sont obtenues en résolvant l'équation bi-carrée :

$$9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{9\alpha}{8\omega_0} a^2\right)^2 = \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16\omega_0^2} a^2 \quad (2.26)$$

pour $p > 0$ et $p^2 \geq q$ la solution est :

$$a^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (2.27)$$

avec $p = \frac{8\omega_0\sigma}{9\alpha} - 6\Lambda^2$ et $q = \frac{64\omega_0^2}{81\alpha^2} (9\mu^2 + \left(\sigma - \frac{9\alpha\Lambda^2}{\omega_0}\right)^2)$.

Dans les autres cas, seule la solution $a = 0$ existe. Ainsi, on obtient une condition sur l'apparition du sous harmonique qui n'existait pas pour la résonance primaire, ou le sur harmonique. Une étude du système d'équations (2.22, 2.23) montrerait qu'il n'y a qu'un seul point singulier stable susceptible de faire apparaître le sous-harmonique (l'autre point stable correspond à $a = 0$). Ceci a pour effet de supprimer le phénomène de saut observé par exemple sur un sur-harmonique.

2.2.4 Résonance interne

Dans l'étude des systèmes à n degrés de liberté, intervient l'ensemble des phénomènes cités précédemment, mais aussi des comportements particuliers comme la résonance interne. Ce type de phénomène apparaît, lorsqu'une ou plusieurs fréquences propres sont multiples l'une de l'autre. Dans le cas du système d'équations (2.3, 2.4), nous étudierons

le comportement du système quand $\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\delta$. Le développement de u_1 et u_2 est fourni par :

$$u_1 = \epsilon u_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{12}(T_0, T_1) + \dots \quad (2.28)$$

$$u_2 = \epsilon u_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 u_{22}(T_0, T_1) + \dots \quad (2.29)$$

Le phénomène non-linéaire et l'amortissement interviennent alors avec un ordre en ϵ égal. En remplaçant 2.28 et 2.29 dans 2.2 et 2.4, puis en regroupant les termes en ϵ et ϵ^2 on obtient le système :

$$D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} = 0 \quad (2.30)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} = 0 \quad (2.31)$$

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2D_0(D_1 u_{11} + \mu_1 u_{11}) + \alpha_1 u_{11} u_{21} \quad (2.32)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2D_0(D_1 u_{21} + \mu_2 u_{21}) + \alpha_2 u_{11}^2 \quad (2.33)$$

2.30 et 2.31 fournissent la solution suivante :

$$u_1 = A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + A_1^*(T_1)e^{-i\omega_1 T_0} \quad (2.34)$$

$$u_2 = A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + A_2^*(T_1)e^{-i\omega_2 T_0} \quad (2.35)$$

que l'on remplace dans 2.32 et 2.33 :

$$D_0^2 u_{12} + \omega_1^2 u_{12} = -2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1)e^{i\omega_1 T_0} + \alpha_1(A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2)T_0} + A_1^* A_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)T_0}) + pc \quad (2.36)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_2^2 u_{22} = -2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2)e^{i\omega_2 T_0} + \alpha_2(A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1^* A_1) + pc \quad (2.37)$$

où pc est la partie conjuguée du terme du second membre. Lorsque $\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\delta$, la condition d'annulation des termes séculiers est obtenue quand :

$$-2i\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) + \alpha_1 A_1^* A_2 e^{i\delta T_1} = 0 \quad (2.38)$$

$$-2i\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) + \alpha_2 A_1^2 e^{-i\delta T_1} = 0 \quad (2.39)$$

En effectuant le changement de variables $A_m = \frac{1}{2}a_m e^{i\theta_m}$ et $\gamma = \theta_2 - 2\theta_1 + \delta T_1$, puis en ne retenant que la solution stationnaire ($a_m' = \gamma' = 0$) on obtient :

$$-\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\gamma) = 0 \quad (2.40)$$

$$-\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\gamma) = 0 \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{2\omega_1} a_2^2 - \frac{\alpha_2}{4\omega_2} a_1^2\right) \cos(\gamma) + \delta a_2 = 0 \quad (2.42)$$

Ce qui donne en éliminant γ à l'aide 2.40 et 2.41 :

$$a_1^2 + \frac{\mu_2 \omega_2 \alpha_1}{\mu_1 \omega_1 \alpha_2} a_2^2 = 0 \quad (2.43)$$

si α_1 et α_2 sont de signe différent alors a_1 et a_2 admettent une solution non nulle. Dans ce cas, la solution libre existe et est semblable au comportement d'un système auto-entretenu. En effet, α_1 et α_2 étant de signe opposé, l'une des forces internes agit comme un apport d'énergie. On notera qu'il y a dans le cas de la résonance interne, un échange d'énergie entre les modes 2.43, qui dans le cas forcé [52] peut provoquer un transfert d'énergie du mode ω_1 arrivé à saturation au profit de $\omega_2 = 2\omega_1$.

2.2.5 Résonance en combinaison

Il s'agit ici d'étudier l'effet d'une excitation multiharmonique sur un système non-linéaire. Nous prendrons le cas d'une excitation du type :

$$F(t) = K_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + K_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2) \quad (2.44)$$

Le cas abordé correspond au phénomène non-résonant, c'est à dire $\Omega_n \neq \omega_0$, $K_1 = k_1$ et $K_2 = k_2$. Comme précédemment, on développera u sous la forme 2.5, et on appliquera la méthode d'échelles multiples. Ce qui nous permet d'obtenir une équation du type 2.7, assez compliquée, où plusieurs cas doivent être envisagés afin d'éliminer les termes séculiers. Soit :

$$\omega_0 \approx 3\Omega_n \quad \text{sur-harmonique} \quad (2.45)$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{3}\Omega_n \quad \text{sous-harmonique} \quad (2.46)$$

$$\omega_0 \approx |\pm 2\Omega_m \pm \Omega_n| \quad \text{résonance en combinaison} \quad (2.47)$$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\Omega_m \pm \Omega_n) \quad \text{résonance en combinaison} \quad (2.48)$$

Il est alors possible d'obtenir un grand nombre de phénomènes comme l'existence simultanée d'un sous-harmonique et d'un sur harmonique si $\omega_0 \approx \frac{1}{3}\Omega_1$ et $\omega_0 \approx 3\Omega_2$, ou encore d'une résonance en combinaison, et d'un sur-harmonique ($\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2)$ et $\omega_0 \approx 3\Omega_1$). Cependant, la réponse stationnaire ne sera pas périodique, sauf si Ω_1 et Ω_2 sont commensurables, c'est à dire s'il existe 2 entiers m_1 et m_2 positif ou négatif tel que $m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 = 0$. Lorsque $\Omega_2 = m\Omega_1$ et $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\Omega_2 \pm \Omega_1)$, alors $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(m \pm 1)\Omega_1$ et si m est paire on a alors apparition d'un ultra-sous-harmonique.

2.2.6 Auto-oscillation

Le phénomène d'auto-oscillation est dû à un apport d'énergie associée aux forces internes non-linéaires. En effet, dans le cas de l'équation 2.2, on peut déjà remarquer que si le terme $(1 - \frac{1}{3}\dot{u}^2)$ est positif, il y a apport d'énergie, alors que s'il est négatif, il y a dissipation d'énergie. Ce type de comportement se retrouve dans la dynamique des ailes d'avion en régime subsonique, et angle d'incidence élevé, où on observe un amortissement de signe variable selon les amplitudes vibratoires de l'aile. L'analyse de l'équation 2.2 se fera dans le cas non-résonant, c'est à dire $\Omega \neq \omega_0$ et $K = k$. L'annulation des termes séculiers est alors obtenue en écrivant :

$$-2A' + (1 - 2\Omega^2\Lambda^2)A - \omega_0^2 A^2 A^* = 0 \quad (2.49)$$

En effectuant le changement de base $A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$, et en ne retenant que le régime stationnaire, on obtient alors :

$$\beta = \text{constante} \quad (2.50)$$

$$a^2 = \frac{4\eta}{\omega_0^2 + (\frac{4\eta}{a_0^2} - \omega_0^2)e^{-\eta T_1}} \quad (2.51)$$

où $\eta = 1 - \frac{1}{2}\Omega^2 K^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-2}$ et a_0 l'amplitude initiale. La solution de l'équation 2.2 est alors fournie par :

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos(\Omega t) + o(\epsilon) \quad (2.52)$$

On remarquera que si $\eta > 0$ (c'est à dire $K < \sqrt{2}\Omega^{-1}|\omega_0^2 - \Omega^2|$) et $T_1 \rightarrow \infty$, alors $a \rightarrow 2\omega_0^{-1}\sqrt{\eta}$ le système se compose d'une partie forcée, et d'une partie oscillante non-amortie. Par contre, si $\eta < 0$ et $T_1 \rightarrow \infty$, alors $a \rightarrow 0$, et seule persiste la solution forcée. Sur la figure 2.2, on peut voir un phénomène du même type, où la structure est une poutre en traction-compression décrite dans le chapitre 6 qui comporte une non-linéarité du type $\alpha(\delta - \dot{u}^2)\dot{u}$ ($\alpha = 2 \cdot 10^5$ et $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$), et est excitée par une impulsion. On constate qu'au bout d'un certain temps la solution amortie disparaît, et ne reste que la partie oscillante auto-entretenu.

2.3 Détections non-linéaires

La détection des non-linéarités est une étape importante dans l'analyse non-linéaire. Elle permet de déceler le caractère non-linéaire d'une structure et souvent de donner une idée approximative sur la nature des non-linéarités. Cette détection s'effectue en utilisant

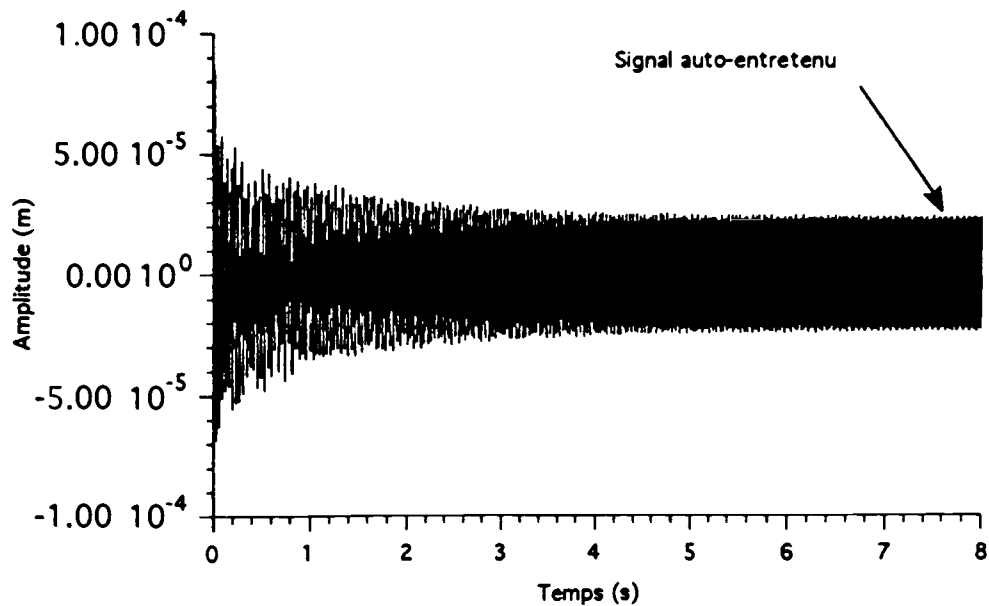


Figure 2.2: Phénomène d'auto-oscillation pour une non-linéarité du type $k(\alpha - \dot{u}^2)\dot{u}$.

l'écart qu'il existe entre le comportement de la structure s'il était linéaire et celui non-linéaire. La mesure de cette différence se fait au travers de propriétés vérifiées par les systèmes linéaires. Ces propriétés sont par exemple : le principe d'isochronisme, de superposition, de réciprocité [62]. Elles peuvent servir dans une analyse expérimentale directe où l'expérimentateur pourra constater si tous ces principes sont respectés avant de supposer la structure parfaitement linéaire. D'autres propriétés basées sur la causalité, l'analyse spectrale des noyaux de Volterra permet une approche plus fine de la détection non-linéaire en fournissant des informations précieuses quand à la forme de la non-linéarité observée.

2.3.1 Méthodes directes

Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert est devenue un outil classique de la détection. En fait, il s'agit plus exactement d'une méthode qui fait appel à la notion de causalité des systèmes dynamiques linéaires. Elle permet d'établir des relations entre la partie imaginaire et la partie réelle de la fonction de transfert qui caractérise le principe de causalité. Ce principe peut souvent être mis en défaut par divers effets : bruits de mesure, erreurs de calcul (de la transformée de Fourier par exemple), ou encore les non-linéarités. Nous verrons que les effets non-linéaires introduisent une perte de causalité de la réponse impulsionnelle, et ainsi

le calcul des relations de Hilbert permettra de juger de la présence de non-linéarité. Cette remarque est sujette à caution, car pour la même structure, certaines excitations peuvent fournir des réponses impulsionnelles causales (excitation impulsionnelle) et d'autres non-causales (excitation aléatoire). Un certain nombre d'auteurs ont mis à profit ces caractéristiques pour mettre au point des méthodes de mesures de distorsion, entre la fonction de transfert mesurée, et la fonction de transfert re-causalisée à l'aide de la transformée de Hilbert. Ces méthodes sont une aide à l'estimation de la nature des non-linéarités présentes dans la structure. La causalité est une caractéristique essentielle des systèmes physiques à variables de temps. Elle suppose que l'effet ne peut pas précéder la cause qui le produit. La définition d'un système causal [26] est donnée par :

Définition: Un système est dit "causal" si $R_1(t)$ et $R_2(t)$ étant les réponses respectives du système aux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$, la condition $S_1(t) = S_2(t)$ pour $t < \tau$ entraîne $R_1(t) = R_2(t)$ pour $t < \tau$.

Si le système est linéaire, on retrouve par soustraction, la condition de causalité bien classique :

$$S(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < \tau \quad \implies \quad R(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < \tau \quad (2.53)$$

Cette relation entraîne que tout système décrit par un opérateur de convolution est causal, si sa réponse impulsionnelle est nulle pour des valeurs négatives de t . C'est cette propriété qui va nous permettre d'établir les relations d'Hilbert. Si $h(t)$ est une réponse impulsionnelle causale, il est alors possible d'écrire que :

$$h(t) = \frac{h(t) + h(t)\text{signe}(t)}{2} \quad (2.54)$$

en prenant la transformée de Fourier de l'expression 2.54, on obtient :

$$h(\omega) = \frac{h(\omega) - j\mathcal{F}(h(t)\text{signe}(t))}{2} \quad (2.55)$$

Le produit simple en temps devient un produit de convolution dans l'espace des fréquences, ce qui donne :

$$h(\omega) = \frac{h(\omega) - h(\omega) * \frac{-j}{\pi\omega}}{2} \quad (2.56)$$

On définit alors la transformée de Hilbert TH comme étant :

$$TH(f)(x) = \frac{VP}{\pi} \int_R \frac{f(u)}{u-x} du = f(x) * \frac{-1}{\pi x} \quad (2.57)$$

où VP est la valeur principale de Cauchy. On obtient en séparant partie réelle et partie imaginaire, les relations de Hilbert.

$$h^{Im}(\omega) = TH(h^{Re}(\omega)) \quad (2.58)$$

$$h^{Re}(\omega) = -TH(h^{Im}(\omega)) \quad (2.59)$$

Il est possible maintenant [26] de donner une condition nécessaire pour qu'un système linéaire soit causal :

Définition: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre linéaire soit causal est que la partie imaginaire de sa fonction de transfert soit la transformée de Hilbert de la partie réelle.

Un certain nombre d'effets dynamiques peut être la cause de la perte de causalité de la réponse impulsionnelle. Une erreur sur l'amplitude à la fréquence ω_0 contribue à rendre non causale la réponse impulsionnelle. En effet, si

$$h_p(\omega) = h(\omega) + A\delta(\omega - \omega_0) \quad (2.60)$$

on obtient alors par la transformée de Fourier inverse :

$$h_p(t) = h(t) + Ae^{j2\pi\omega_0 t} \quad (2.61)$$

$h_p(t)$ est non causale car le terme $Ae^{j2\pi\omega_0 t}$ n'est pas nul pour $t < 0$. De même, pour un oscillateur à un degré de liberté possédant un amortissement de type hystérétique, on peut montrer [64] que la réponse impulsionnelle est non causale. L'ensemble de ces remarques a pour but de montrer que la perte de causalité peut avoir différentes sources qui ne sont pas forcément liées à des effets non-linéaires. La transformée de Hilbert est très utilisée pour la détection [2] et la linéarisation des phénomènes non-linéaires [37]. Dans un grand nombre de cas (voir chapitre 5), le comportement non-linéaire peut être représenté par une série de Volterra :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\int_R \cdots \int_R}_{i \text{ fois}} g_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \prod_{k=1}^i f(t - \tau_k) d\tau_k \quad (2.62)$$

La réponse d'un système défini par la série de Volterra sera dite causale dans la mesure où chaque noyau $g_n(t_1, \dots, t_n)$ est nul pour $t_p < 0$ avec $p \in (1, \dots, n)$. Il est possible d'écrire une fonction de transfert non-linéaire entre $y(\omega)$ et $f(\omega)$ [3] en posant :

$$\frac{y(\omega)}{f(\omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f(\omega)} \underbrace{\int_R \cdots \int_R}_{i-1 \text{ fois}} g_i(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{i-1}) f(\omega - \omega_1) f(\omega_1 - \omega_2) \cdots f(\omega_{i-1}) \prod_{k=1}^{i-1} d\omega_k \quad (2.63)$$

ce qui donne à l'aide de la fonction de transfert inverse la réponse impulsionnelle non-linéaire $h_{nl}(t)$:

$$h_{nl}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\int_R \cdots \int_R}_{i \text{ fois}} g_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i) \frac{\prod_{k=1}^i e^{j2\pi\omega_k t} f(\omega_k) d\omega_k}{f(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_i)} \quad (2.64)$$

On notera déjà que, dans le cas d'une excitation impulsionnelle $f(t) = \delta(t)$, la réponse est toujours causale et égale à :

$$h_{nl}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t, \dots, t) \quad (2.65)$$

Cette remarque rappelle que, pour certaines excitations comme l'impulsion, le principe de causalité sera presque toujours vérifié sur des structures faiblement non-linéaire, alors que pour une excitation comme $f(t) = \delta(t) + a\delta(t - t_o)$ avec $a < 1$ et $t_o \neq 0$ on peut montrer, en retenant que les deux premiers termes de la série, que pour $-pt_o < t < 0$ $h(t)$ vaut :

$$h_{nl}(t) = g_1(t) + ag_2(t, t) + \left(\frac{1}{a} - 1\right) \sum_{m=p}^{\infty} \left(-\frac{1}{a}\right)^m g_2(t + (m+1)t_o, t + (m+1)t_o) \\ + \sum_{m=p}^{\infty} \left(-\frac{1}{a}\right)^m (g_2(t + mt_o, t + (m+1)t_o) + g_2(t + (m+1)t_o, t + mt_o)) \quad (2.66)$$

Dans ce cas, $h_{nl}(t)$ est différent de zéro, ce qui implique pour cette excitation à double impulsion une perte de causalité induite par le noyau d'ordre 2 $g_2(\)$ qui caractérise la présence de non-linéarité. Tomlinson [37] préconise une utilisation de la technique du sinus balayé ou de l'excitation aléatoire pour acquérir $h(\omega)$ puis, par transformée de Fourier inverse $h(t)$ afin de pouvoir juger si le principe de causalité est vérifié. Afin, de quantifier le lien entre la perte de causalité et les non-linéarités [2], il est intéressant de mesurer l'écart entre la fonction de transfert mesurée et la fonction de transfert causative obtenue grâce aux relations de Hilbert. En effet, si on introduit l'opérateur \mathcal{H}_c qui rend causal $h(t)$ 2.56 :

$$\mathcal{H}_c(h)(\omega) = \frac{h(\omega) + jTH(h)(\omega)}{2} \quad (2.67)$$

on peut définir maintenant $D(\omega)$ l'erreur entre $h(\omega)$ et $\mathcal{H}_c(h)(\omega)$ comme étant un critère de mesure de la causalité.

$$D(\omega) = h(\omega) - \mathcal{H}_c(h) \quad (2.68)$$

$$si \quad D(\omega) = 0 \quad \text{causal}$$

$$D(\omega) \neq 0 \quad \text{non causal}$$

Pour obtenir une caractérisation des phénomènes non-linéaires, Haoui utilise la technique des moments statistiques et cherche dans des cas précis, et pour une excitation donnée, la valeur de ces moments pour un jeu, une rigidité quadratique, un frottement sec ... Il est évident que ces grandeurs ne peuvent être considérées comme un moyen de détermination exacte de la nature des non-linéarités, mais plutôt comme une aide à l'interprétation des effets non-linéaires. Ces moments statistiques sont obtenus en écrivant :

$$m^n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^n |D(\omega)| d\omega \quad (2.69)$$

- où m^0 : aire sous la courbe
 $\frac{m^1}{m^0}$: fréquence du centre de masse
 σ_d^2 : $\frac{1}{m^0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\omega - \frac{m^1}{m^0})^2 |D(\omega)| d\omega$ écart type
 S_k : $\frac{1}{m^0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(\omega - \frac{m^1}{m^0})^3}{\sigma} |D(\omega)| d\omega$ coefficient d'asymétrie de la distribution autour de sa moyenne $\frac{m^1}{m^0}$
 K_u : $\frac{1}{m^0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(\omega - \frac{m^1}{m^0})^4}{\sigma} |D(\omega)| d\omega - 3$ coefficient d'aplatissement de la distribution autour de sa moyenne $\frac{m^1}{m^0}$

Cette technique de caractérisation s'avère très délicate, car elle dépend fortement de l'excitation utilisée et deux non-linéarités différentes peuvent fournir les mêmes premiers moments statistiques. En conclusion, on peut dire que l'utilisation de la transformé de Hilbert présente deux intérêts principaux: le premier, celui de fournir grâce à $\mathcal{H}_c(\cdot)$ une fonction de transfert causale qui permet une meilleure identification linéaire équivalente, et le deuxième, celui de détecter et d'analyser les effets non-linéaires. Le résultat principal issu des relations de Hilbert 2.58 et 2.59 est fourni par :

- La réponse impulsionnelle est non-causale \implies Présence de non-linéarités, erreurs de calculs ou mesures
 La réponse impulsionnelle est causale \implies On ne peut pas conclure

Analyse des bi-spectres

La théorie des séries de Volterra que nous développerons dans le chapitre 5, peut être utilisée comme un outil de détection et d'interprétation des phénomènes non-linéaires. Un des avantages de cette formulation réside dans le fait qu'elle est utilisable aussi bien

dans un cadre analytique qu'expérimental. Ainsi, les résultats issus de l'expérience pourront être interprétés à l'aide de l'éclairage fourni par les calculs théoriques. L'analyse spectrale des noyaux de Volterra s'applique aussi bien sur les noyaux d'ordre 2, que ceux d'ordre plus élevé (le noyau 1 représente la partie linéaire). Nous nous bornerons ici à l'étude des noyaux d'ordre 2, qui correspondent au premier terme non-linéaire de la série de Volterra. Ce noyau présente l'avantage de fournir une représentation graphique tri-dimensionnelle $(\omega_1, \omega_2, H_2(\omega_1, \omega_2))$ contenant toute l'information du noyau. L'analyse de noyau d'ordre supérieur aurait nécessité de fixer certaines variables afin de rendre possible une représentation graphique, ce qui complique notablement leur interprétation. Afin d'illustrer les possibilités d'analyse des noyaux de Volterra d'ordre 2, nous étudierons la poutre en traction-compression du chapitre 6 comportant une non-linéarité locale du type αu^2 . Un calcul théorique démontrerait que la forme analytique du noyau est obtenue en écrivant :

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -\alpha H(\omega_1 + \omega_2)H(\omega_1)H(\omega_2) \quad (2.70)$$

Le noyau $H_2(\omega_1, \omega_2)$ est symétrique (symétrisation du noyau par permutation), seule une étude sur les domaines $(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0)$ et $(\omega_1 < 0, \omega_2 > 0)$ est donc nécessaire. On notera afin de faciliter l'interprétation du noyau que si l'excitation $F(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t}$ (excitation comprenant 2 harmoniques) alors la réponse du système se traduit par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_R h(\tau)(e^{i\omega_1(t-\tau)} + e^{i\omega_2(t-\tau)})d\tau + \\ &\int_R \int_R h_2(\tau_1, \tau_2)(e^{i\omega_1(t-\tau_1)} + e^{i\omega_2(t-\tau_1)})(e^{i\omega_1(t-\tau_2)} + e^{i\omega_2(t-\tau_2)})d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.71) \\ y(t) &= H(\omega_1)e^{i\omega_1 t} + H(\omega_2)e^{i\omega_2 t} + H_2(\omega_1, \omega_1)e^{i2\omega_1 t} + H_2(\omega_2, \omega_2)e^{i2\omega_2 t} \\ &+ 2H_2(\omega_1, \omega_2)e^{i(\omega_1+\omega_2)t} \quad (2.72) \end{aligned}$$

On peut donc remarquer que l'effet de $H_2(\omega_1, \omega_2)$ est généré par un signal du type $e^{i(\omega_g)t}$ avec $\omega_g = \omega_1 + \omega_2$. La forme du noyau 2.70 permet de supposer que les effets de H_2 seront surtout prépondérants le long des droites d'équations :

$$\omega_1 = \pm\omega_{\alpha i} \quad i = (1, 2, 3) \quad (2.73)$$

$$\omega_2 = \pm\omega_{\alpha i} \quad i = (1, 2, 3) \quad (2.74)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \pm\omega_{\alpha i} \quad i = (1, 2, 3) \quad (2.75)$$

où $\omega_{\alpha i}$: i^{eme} pulsation propre de la structure $i = (1, 2, 3)$

et plus particulièrement à l'intersection de celles-ci. Les courbes 2.3 2.4 2.5 et 2.6

représentent le module du noyau d'ordre 2, on peut alors interpréter ce noyau de la manière suivante :

Résonance primaire ($\omega_1 = \pm\omega_{oi}$, $\omega_2 = 0$) ou ($\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \pm\omega_{oi}$)

Sur ces lignes horizontales et verticales, on retrouve les phénomènes de résonance classiques avec une réponse associée au noyau égal à la pulsation $\omega_g = \pm\omega_{oi}$.

Résonance secondaire pour $\omega_1 = \omega_2$

Sur cette diagonale, on observe des résonances pour $\omega_1 = \omega_2 = \pm\omega_{oi}$ et $\omega_1 = \omega_2 = \pm\frac{\omega_{oi}}{2}$. Dans tous les cas, il y a apparition d'une pulsation double par rapport à l'excitation ($\omega_g = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$) qui sera dans le premier cas égale à $\pm 2\omega_{oi}$ et dans le deuxième $\pm\omega_{oi}$.

Résonance en combinaison pour $\omega_1 \neq \omega_2$

On retrouve les résonances en combinaison sur les droites d'équation $\omega_1 + \omega_2 = \pm\omega_{oi}$ et plus particulièrement quand l'une des pulsations ω_1 ou ω_2 est égale à l'une des fréquences de résonances. Par exemple, ($\omega_1 = \omega_{o1}$, $\omega_2 = \omega_{o2} - \omega_{o1}$) qui génère une pulsation $\omega_g = \omega_{o2}$ ou encore ($\omega_1 = -2\omega_{o1}$, $\omega_2 = \omega_{o1}$) qui génère une pulsation $\omega_g = -\omega_{o1}$

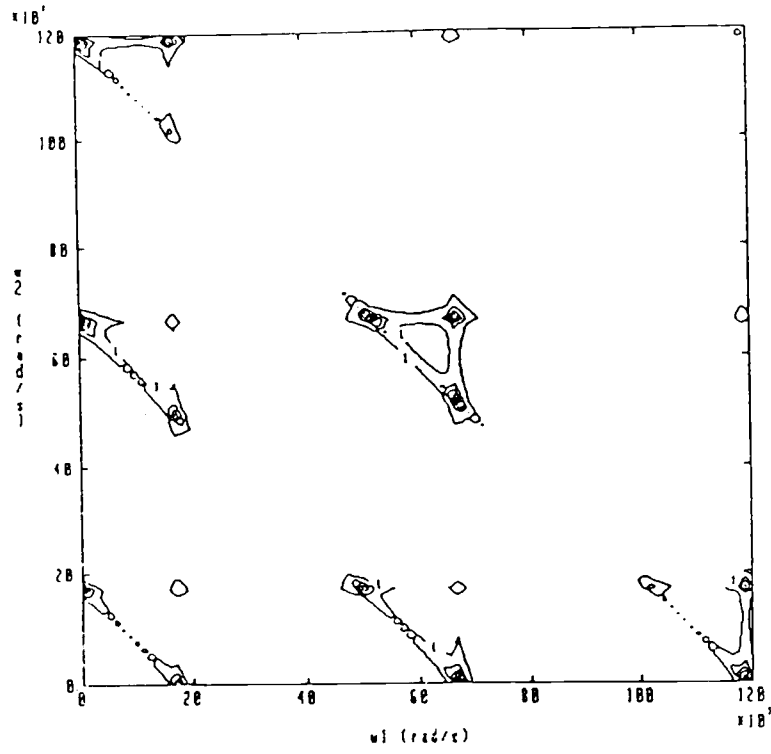


Figure 2.3: courbe iso pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$

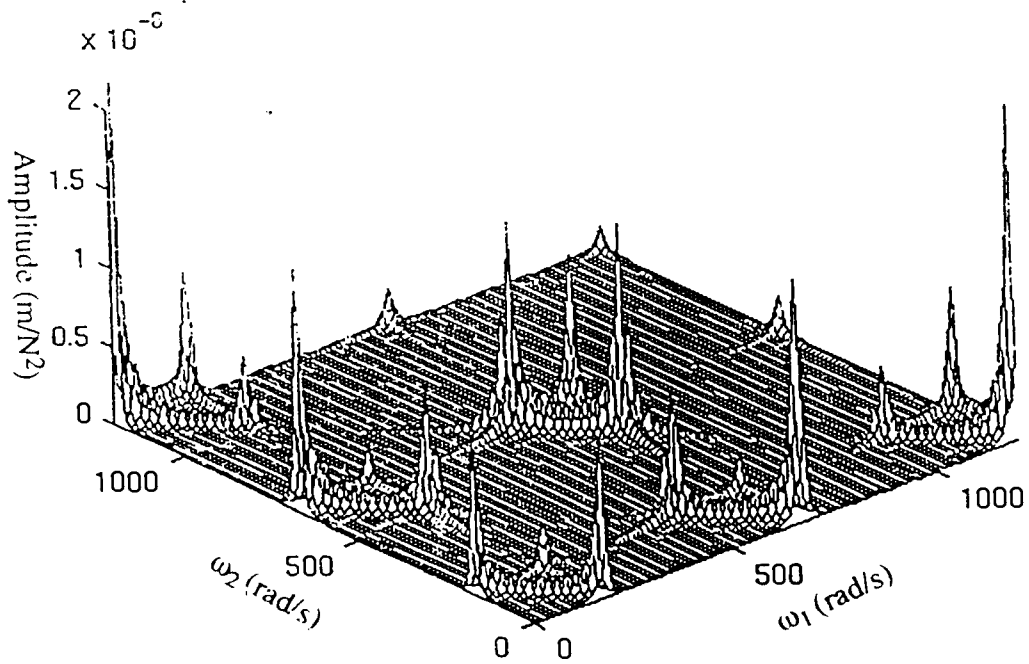
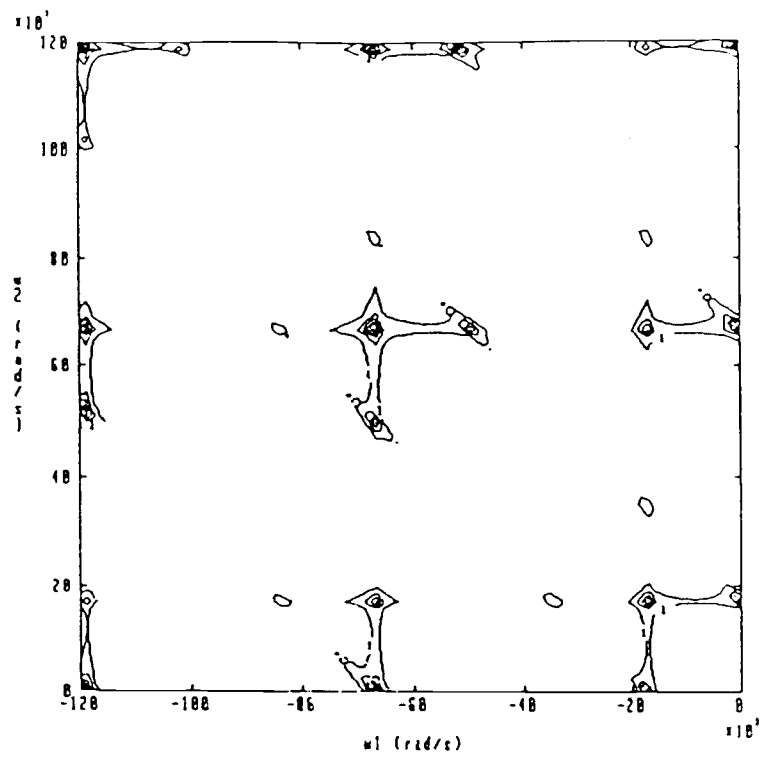
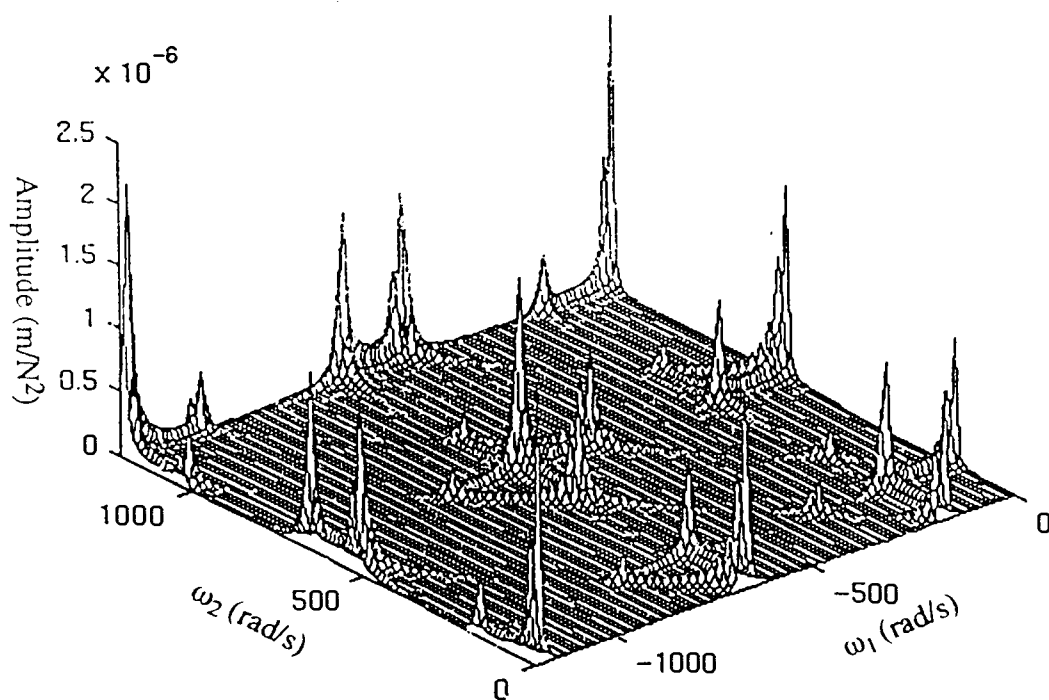


Figure 2.4: bi-spectre pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$

Figure 2.5: courbe iso pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$ Figure 2.6: bi-spectre pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$

2.3.2 Méthodes indirectes

Nous avons vu précédemment des outils d'analyse théorique et de détections non-linéaires. Il existe des méthodes plus simples qui permettent de constater directement sur la forme des spectres, des diagrammes de Nyquist ou des fonctions de cohérence si la structure est non-linéaire. Ces techniques utilisent les résultats théoriques pour faire une pré-analyse du comportement. Cette démarche s'effectue à l'aide d'essais simples (excitations à plusieurs niveaux, excitations superposées) qui ont pour but de vérifier si le système respecte les principes d'isochronisme, de superposition, de réciprocité que les systèmes non-linéaires violent en général. De telles méthodes doivent être utilisées en pré-analyse afin de savoir si une analyse non-linéaire plus poussée doit être effectuée ou non.

Superposition, réciprocité

Les systèmes linéaires possèdent des propriétés particulières qui permettent de les caractériser. Les principes d'isochronisme, de superposition, de réciprocité sont parmi les plus classiques. Le principe de réciprocité fait appel au fait que si deux ensembles de force F_1 et F_2 sont appliqués séparément sur la même structure et produisent les champs de déplacement U_1 et U_2 , alors le travail de F_1 sur U_2 doit être égal à celui de F_2 sur U_1 . En non-linéaire, cette égalité n'est généralement pas vérifiée. Ce type d'essai n'est pas très facile à réaliser, car il demande après la première mesure de se placer pour la deuxième dans une configuration parfaitement symétrique. Le principe de superposition présente moins de difficulté de mise en oeuvre. Il s'agit de vérifier la relation suivante :

$$u(t) = G(f(t)) = G(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) \quad (2.76)$$

$$= a_1 G(f_1(t)) + a_2 G(f_2(t)) \quad (2.77)$$

Il sera en général pratique d'utiliser la représentation spectrale pour vérifier que le spectre obtenu pour $a_1 f_1$ est bien égal à celui issu de f_1 multiplié par a_1 et, que la somme des spectres obtenus à l'aide de $a_1 f_1$ et $a_2 f_2$ est bien égale à celui correspondant à $a_1 f_1 + a_2 f_2$. Ces principes de superposition et de réciprocité devront être vérifiés pour toutes les réponses et tous les points d'excitation, ce qui rend leur emploi souvent assez long.

Analyses fréquentielles

L'analyse dans le domaine fréquentiel est très bien adaptée pour mettre en évidence de manière rapide des effets non-linéaires. L'un des premiers effets qui est facilement constat-

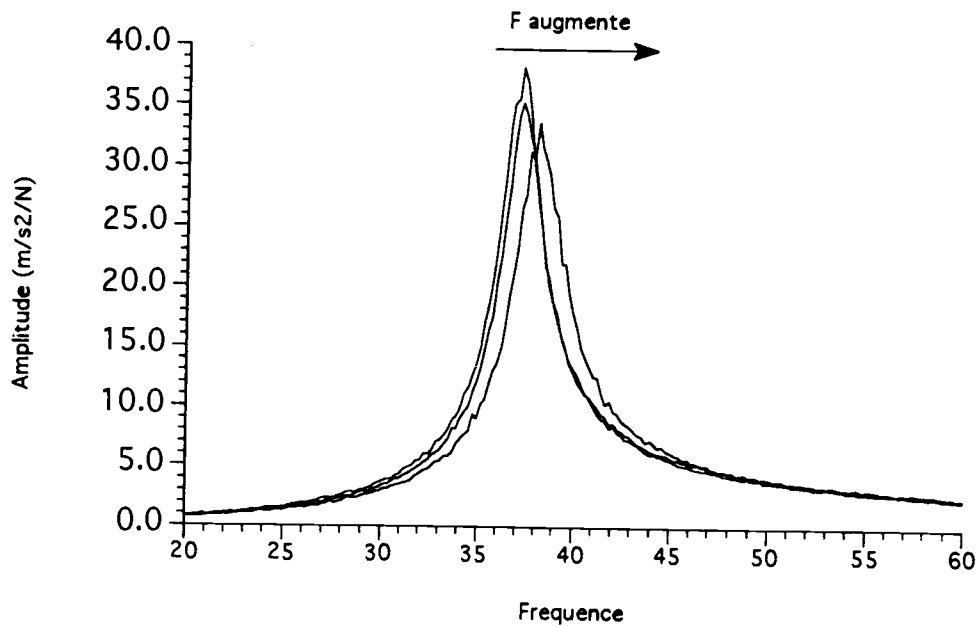


Figure 2.7: Dépendance de la fréquence propre avec le niveau d'excitation.

able sur un spectre non-linéaire est la dépendance de la fréquence propre avec le niveau d'excitation (violation du principe d'isochronisme), et ce, quelque soit le type d'excitation utilisé. Afin d'illustrer ce propos, on a effectué des essais expérimentaux sur la poutre non-linéaire (chapitre 7) avec une excitation aléatoire à 3 niveaux de densité spectrale différents. On constate une augmentation de la fréquence avec le niveau lié à un raidissement de la non-linéarité avec l'amplitude, ce qui correspond bien à une non-linéarité de Duffing αu^3 où $\alpha > 0$. De même, lors d'une étude des phénomènes de résonance primaire, on a constaté que la position du pic en fréquence répondait à l'équation parabolique $\sigma = \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2$ ce qui montre bien la dépendance de la fréquence de résonance par rapport à l'excitation. De manière plus générale, les non-linéarités introduisent un lien entre le spectre non-linéaire de la structure et l'excitation. La série de Volterra mise sous forme d'une fonction de transfert non-linéaire 2.63 montre bien ce lien. Il est donc utile de vérifier que des essais à différents niveaux produisent bien le même spectre, si l'on veut supposer que le système puisse être linéaire.

Nous avons vu précédemment le phénomène non-linéaire de saut. Il engendre une distorsion importante du spectre permettant ainsi de détecter la présence d'une non-linéarité. On a pu noter aussi qu'un balayage sinus croissant et décroissant ne fournissait pas le même spectre.

Le diagramme de Nyquist est un autre outil très utilisé dans l'analyse fréquentielle. Ainsi Natke [43] propose de faire des essais à plusieurs niveaux et de relier les points de mêmes fréquences dans le plan complexe. Dans le cas linéaire, ces courbes sont des droites, mais pas dans le cas non-linéaire. En fait, on constate que le diagramme de Nyquist tout comme les spectres se distordent lors de la présence de non-linéarité. Par exemple, il peut se produire un écrasement , un allongement ou encore une description partielle du cercle [22].

Chapitre 3

Modèle NARMAX

3.1 Introduction

Le modèle NARMAX (Non linear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs) est une représentation "entrée-sortie" non-linéaire discrète très puissante. Son utilisation dans un cadre d'identification non-linéaire a été mise au point par Billings, [75] principalement en automatique et plus récemment dans des domaines divers, comme la biologie [40], la thermique [11] et aussi en mécanique. Ce type de modélisation est capable de rendre compte du comportement d'une structure pouvant aussi bien se modéliser par les séries de Volterra, que par un modèle bilinéaire, ou encore par une représentation de Sontag. Ce modèle unifie la plupart des classes de systèmes non-linéaires et possède de gros avantages sur les représentations fonctionnelles comme les séries de Volterra. Le modèle NARMAX peut être appliqué sur des systèmes non-linéaires multi-dimensionnels, ce qui correspond à des situations mécaniques concrètes. La souplesse de cette technique permet d'aborder aussi bien des problèmes non-linéaires à seuil [78] que des problèmes non-linéaires réguliers. De récents travaux [46] [18] ont permis de mettre au point une "version" orthogonale du NARMAX, augmentant ainsi ses qualités de convergence. Nous verrons qu'il est possible d'utiliser cette méthode pour générer les noyaux de Volterra, afin de pouvoir faire une analyse par les bi-spectres (ou de noyaux d'ordre plus élevé) pour mieux comprendre le comportement du système identifié. Nos développements porteront sur la représentation NARMAX-polynomiale qui permet une identification très générale, dans la mesure où le système "entrée-sortie" vérifie les conditions d'applications du théorème de Stone-Weirstrass. Ce modèle ainsi légitimé est considéré comme la représentation la plus compacte, et la plus générale d'un comportement non-linéaire régulier. Afin de montrer l'intérêt d'un tel modèle, nous reprendrons successivement l'ensemble des représentations non-linéaires "entrée-sortie" classiques et nous mettrons en avant les liens qu'ils ont avec

le modèle NARMAX. Il est évident qu'une telle liste ne peut être exhaustive, car beaucoup de modèles non-linéaires temporels sont envisageables (modèle Sm, modèle en cascade, ..). Une partie de ces représentations sera abordée dans le cadre de l'étude de certaines classes de systèmes non-linéaires (chapitre 5). L'application dans le domaine de la mécanique est assez récente, et seuls des essais simples (problème mono-dimensionnel) ont été effectués. Nous développerons ici une utilisation du NARMAX pour des structures mécaniques multi-dimensionnelles et non-linéaires. Une application en base modale sera faite afin d'utiliser au mieux les capacités de découplage des modes. De même, nous montrerons que, grâce à la théorie de la forme normale mise sous forme discrète, il est possible de simplifier l'équation récurrente non-linéaire, et d'interpréter le contenu du modèle NARMAX au travers de son équation d'état non-linéaire associé.

3.2 Les représentations récurrentes non-linéaires

3.2.1 Représentation d'un système non linéaire discret

Précédemment, nous avons pu voir que les schémas récurrents linéaires possédaient une formulation dans l'espace d'état (forme observable, forme commandable, ...). Il en va de même pour les problèmes non-linéaires. Un système non linéaire invariant au cours du temps peut se mettre sous la forme :

$$x(k+1) = g(x(k), u(k)) \quad x_0 = x(0) \quad (3.1)$$

$$y(k) = h(x(k), u(k)) \quad (3.2)$$

où $x(k)$: vecteur d'état à l'étape k
 x_0 : condition initiale
 $u(k)$: vecteur entrée
 $y(k)$: vecteur sortie
 g : fonction de transition
 h : fonction de sortie

Soit U et Y les ensembles d'entrée et sortie que l'on supposera être des espaces de Banach réels. On notera $U^k = (u(1), \dots, u(k))$ et U^+ l'ensemble des $u(k)$ tel que $k > 0$ ainsi que $f_{x_0/k}$ l'application de U^k dans Y . Cette formulation est bien adaptée pour comparer les résultats des schémas discrets, avec ceux obtenus en continu. Nous montrerons que certaines méthodes récurrentes non-linéaires ne peuvent pas représenter correctement toute l'information contenue dans un processus continu. Par contre, le modèle NARMAX est applicable à tous les problèmes non-linéaires réguliers invariant au cours du temps. Il peut approcher avec autant de précision désirée, la solution continue associée.

3.2.2 NARMAX-polynomial

C'est une représentation tout à fait générale, qui unifie l'ensemble des représentations existantes. Son écriture "entrée-sortie" se met sous la forme :

$$y(k) = F(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-d-n_u+1)) \quad (3.3)$$

où F : est une fonction non-linéaire
 n_y : nombre de pas en temps sur y
 n_u : nombre de pas en temps sur u
 d : délai en temps sur la réponse

L'écriture 3.3 correspond à un modèle qui n'inclut pas la dynamique du bruit dans la réponse (modèle NARMA). L'extension de ce modèle au schéma NARMAX sera obtenue en ajoutant dans la fonction F , la variable $e(k)$ représentant le bruit de mesure. Les propriétés, que nous allons montrer grâce au modèle NARMA, sont aisément transposables au NARMAX. On peut remarquer que la formule 3.3 peut s'écrire encore :

$$y(k) = F(F(y(k-2), \dots, y(k-1-n_y), u(k-1-d), \dots, u(k-d-1-n_u+1)), \\ y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-d), \dots, u(k-d-n_u+1)) \quad (3.4)$$

Ces deux écritures représentent le même système. On définit une classe d'équivalence pour la représentation des systèmes "entrée-sortie" que l'on note \mathcal{F} . On définira alors le modèle NARMAX d'un système comme : la représentation minimum en n_u et n_y appartenant à \mathcal{F} . Dans la plupart des cas, la forme de F étant inconnue, on choisira une forme polynomiale (NARMAX-polynomiale) qui assure, grâce au théorème de Stone-Weirstrass, une grande généralité. En effet, si on définit $Z = Y^{n_y} * U^{n_u}$ comme étant un espace de Banach et si $C^o(Z)$ l'espace de Banach des fonctions continues de Z dans Y alors, on a les propriétés suivantes :

Théorème 1: Si Z est compact alors l'ensemble des fonctions polynomiales de $Z \rightarrow Y$ est dense dans $C^o(Z)$.

Remarque : Si Y et U sont des sous ensembles compacts d'espaces de Banach, alors le théorème est aussi vérifié.

La preuve est basée sur les conditions d'application du théorème de Stone-Weirstrass [16].

Théorème 2 (Stone-Weirstrass): Soit E un espace de Banach compact. Si S est une sous-algèbre de l'espace de Banach $C^o(E)$ des fonctions continues de $E \rightarrow R$ ayant des points séparés et contenant les fonctions constantes, alors S est dense dans $C^o(E)$.

La première condition se vérifie aisément en montrant que les polynômes forment une sous algèbre de $C^0(Z)$. La propriété de séparation se vérifie en choisissant deux points $(x, y) \in Z$ tel que $x \neq y$, et en montrant qu'il existe un g appartenant à la sous algèbre qui vérifie $g(x) \neq g(y)$. Le choix de g sera un polynôme de degré 1 de type $g(x) = ax$ (où $a \neq 0$) ce qui assurera la propriété de séparation. La dernière condition est trivialement vérifiée du fait que la sous algèbre formée par les polynômes contient la fonction constante.

L'ensemble de ces propriétés assure au modèle NARMAX-polynomiale un cadre d'application très vaste. Le fait que la représentation NARMAX-polynomiale soit une forme particulière du modèle NARMAX, montre à quel point celui-ci a un domaine de validité importante.

3.2.3 NARMAX-orthogonal

La fonction F peut prendre d'autres formes que la forme polynomiale. En effet, F peut s'exprimer à l'aide de fonctions orthogonales, ce qui revient à écrire :

$$y(t) = \sum_{m=0}^M g_m w_m(t) + e(t) \quad (3.5)$$

$$\sum_{t=1}^N w_j(t) w_{k+1}(t) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (3.6)$$

Si les équations 3.5 et 3.6 sont vérifiées, alors l'expression de F est dite orthogonale. Pour arriver à connaître les w_m , on utilisera la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. L'espace à orthogonaliser sera fourni par l'ensemble des monômes obtenu dans un modèle NARMAX-polynomiale. Ces monômes seront notés :

$$p_0(t) = 1 \quad (3.7)$$

$$p_1(t) = y(t-1) \quad (3.8)$$

$$p_m(t) = y(t-n_{y_1}) \cdots y(t-n_{y_k}) u(t-d-n_{u_1}+1) \cdots u(t-d-n_{u_j}+1) \\ \times e(t-n_{e_1}) e(t-n_{e_q}) \quad (3.9)$$

$$\text{pour } m = 1, 2, \dots, M$$

$$k \geq 0, j \geq 0, q \geq 0 \quad (3.10)$$

$$1 \leq n_{y_1} \leq n_y \cdots 1 \leq n_{y_k} \leq n_y \quad (3.11)$$

$$0 \leq n_{u_1} \leq n_u \cdots 0 \leq n_{u_j} \leq n_u \quad (3.12)$$

$$1 \leq n_{e_1} \leq n_e \cdots 1 \leq n_{e_q} \leq n_e \quad (3.13)$$

La méthode de Gram-Schmidt consiste à chercher les coefficients $\alpha_{0,m}, \dots, \alpha_{m-1,m}$ tels que :

$$w_m(t) = p_m(t) - \sum_{r=0}^{m-1} \alpha_{rm} w_r(t) \quad m = 1, \dots, M \quad (3.14)$$

soit orthogonale à l'ensemble des (w_0, \dots, w_{m-1}) . La condition d'orthogonalité 3.6 fournit alors :

$$\alpha_{rm} = \frac{\sum_{t=1}^N p_m(t) w_r(t)}{\sum_{t=1}^N w_r^2(t)} \quad 0 \leq r \leq m-1 \quad (3.15)$$

Cette nouvelle forme du NARMAX a pour avantage de faciliter la détermination des coefficients g_m . Leurs estimations se font de manière indépendante grâce à la relation :

$$g_m = \frac{\sum_{t=1}^N y(t) w_m(t)}{\sum_{t=1}^N w_m^2(t)} \quad (3.16)$$

L'apport d'un terme w_{m+1} dans l'équation 3.5 ne nécessite pas le re-calcul des coefficients g_i $i = 0, \dots, m$. La forme orthogonale du NARMAX peut s'exprimer de manière multidimensionnelle, et ainsi être applicable aux cas mécaniques. L'introduction d'une variable de bruit $e(k)$, se fait après avoir calculé tous les w_m ne contenant pas de terme $e(k)$. Puis, le calcul de $e(k)$ s'obtiendra en calculant l'écart entre la réalité et le modèle identifié. L'erreur ainsi calculée, permettra de déterminer les w_m contenant des termes $e(k)$. On notera qu'il est possible de passer de la forme orthogonale du NARMAX à sa forme polynomiale grâce aux équations :

$$\theta_m = \sum_{i=m}^M g_i v_i \quad (3.17)$$

$$v_m = 0 \quad (3.18)$$

$$v_i = - \sum_{r=m}^{i-1} \alpha_{r,i} v_r \quad m < i \leq M \quad (3.19)$$

où θ_n est un paramètre du modèle NARMAX-polynomial associé au terme $p_n(t)$.

3.2.4 NARMAX avec seuils

Nous avons démontré que le modèle NARMAX était applicable uniquement sur des problèmes non-linéaires réguliers. En fait, il peut être étendu aux systèmes non-linéaires à seuil. Dans ce cas, le schéma NARMAX se transforme en TNARMAX (Threshold NARMAX) [78] qui s'exprime sous la forme :

$$y(t) = F^{(i)}(y(t-1), \dots, y(t-n_y), u(t-1), \dots, e(t-1), \dots, e(t-n_e))$$

$$+e(t) \quad \text{si } x_i \in R^{(i)} \quad i = 1, \dots, p \quad (3.20)$$

où

$$x_i = (y(i-1), \dots, y(i-n_y), u(i-1), \dots, u(i-n_u)) \quad (3.21)$$

$R^{(i)}$ détermine une région de l'espace euclidien de dimension $(n_y + n_u)$. $F^{(i)}$ désigne une fonction non-linéaire de ces variables associée au domaine $R^{(i)}$. Un des problèmes principaux de cette méthode consiste à connaître les domaines $R^{(i)}$. Deux types de situations sont possibles :

-1- Les relevés expérimentaux ont été effectués pour chacun des $R^{(i)}$. On applique alors l'algorithme d'identification sur chacun des domaines.

-2- Les résultats expérimentaux englobent tous les domaines. Dans ce cas, il peut s'avérer très difficile de reconstruire les domaines $R^{(i)}$. En général, cela sera possible si les domaines sont simples et dépendent de peu de paramètres.

L'exemple suivant :

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n^{(1)}} p_j^{(1)} + \theta_j^{(1)} + e(t) \quad \text{si } y(t-d) \leq T \quad (3.22)$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n^{(2)}} p_j^{(2)} + \theta_j^{(2)} + e(t) \quad \text{si } y(t-d) > T \quad (3.23)$$

est un schéma TNARMAX avec deux domaines qui sont définis par les paramètres T et d . Si ces paramètres sont connus, il est facile alors de déterminer les domaines $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$. Par contre, s'ils doivent être identifiés, il faudra rechercher les valeurs optimales qui maximisent par exemple le critère AIC ().

3.2.5 Modèles représentables par un NARMAX

Précédemment, nous avons vu, grâce au théorème de Stone-Weirstrass, que le NARMAX a un domaine d'application très vaste. Dès lors, il n'est pas étonnant qu'un certain nombre de schémas récurifs non-linéaires classiques sont des cas particuliers de ce type modèle. En effet, nous verrons que les séries de Volterra, les modèles bilinéaires, affines et rationnels sont des représentations particulières du NARMAX.

Les séries de Volterra discrètes

Si $f_{x_o/k}$ est fonction analytique réelle, on peut alors exprimer $y(k)$ comme une série de Volterra :

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} h_{x_o/ki}(u(1), \dots, u(k)) \quad (3.24)$$

où $h_{x_o/ki}$ est un polynôme homogène de degré i en $u(1), \dots, u(k)$ ce qui s'écrit encore :

$$y(k) = \sum_{i_1=1}^{\infty} h_{i_1} u(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} h_{i_1, i_2} u(k-i_1) u(k-i_2) + \dots \quad (3.25)$$

où $h_{i_1 \dots i_n}$ représente le noyaux de Volterra d'ordre n

Une telle représentation est une formulation explicite de la réponse du système, c'est principalement pour cette raison qu'il est nécessaire de calculer un grand nombre de noyaux pour que la représentation soit fidèle. C'est cette quantité excessive de calculs qui pénalise énormément l'exploitation des séries de Volterra, qui ont par ailleurs un grand champ d'exploitation. On pourra remarquer que l'équation 3.25 est un cas particulier du modèle NARMAX où seul intervient la variable u dans la fonction F .

Modèle bilinéaire discret

Il s'agit d'une représentation vérifiant l'équation:

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=0}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_u} b_i u(k-i) + \sum_{i=0}^{n_y} \sum_{j=0}^{n_y} c_{ij} y(k-i) u(k-j) \quad (3.26)$$

Un tel modèle dans l'espace d'état peut s'écrire:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + u(k)Cy(k) \quad x_o = x(0) \quad (3.27)$$

$$y(k) = Dx(k) \quad (3.28)$$

On peut alors écrire:

$$x(k) = (D^t D)^{-1} D^t y(k) \quad (3.29)$$

$$y(k+1) = DA(D^t D)^{-1} D^t y(k) + DBu(k) + u(k)DC(D^t D)^{-1} D^t y(k) \quad (3.30)$$

Les systèmes bilinéaires ont un très large éventail d'application. En effet, on peut montrer que l'ensemble des systèmes bilinéaires continus est dense dans $C^o(R)$. Mais il est à noter que la forme discrète du problème bilinéaire continu n'est pas égale à l'équation 3.26 mais plutôt à :

$$y(k+1) = D \exp((A + u(k)C)h) (D^t D)^{-1} D^t y(k) + D \left(\int_0^h \exp((A + u(k)C)(h-\tau)) B d\tau \right) u(k) \quad (3.31)$$

où $h = t_{k+1} - t_k$, k remplace t_k et $u(t) = u(t_k)$ pour $t_k \leq t < t_{k+1}$

Ce qui est une représentation NARMAX ou F inclurait des fonctions exponentielles. On remarquera par ailleurs, que l'équation 3.26 est une forme particulière du NARMAX-polynomial.

Modèle affine et modèle rationnel: Représentation de Sontag

Sontag [75] a montré qu'une fonction réponse f polynomiale est réalisable (c'est à dire si le vecteur d'état est de dimension finie) si, et seulement si, elle satisfait l'équation aux différences rationnelles :

$$a(y(k), \dots, y(k-r), u(k), \dots, u(k-r))y(k+1) = b(y(k), \dots, y(k-r), u(k), \dots, u(k-r)) \quad (3.32)$$

où $a()$ et $b()$ sont des polynômes de degrés finis.

De même, si f est réalisable et bornée (c'est à dire si la puissance maximum de chaque variable de f est inférieure à un entier indépendant de k) alors on démontre que:

$$\sum_{i=1}^r a_i(u(k-1), \dots, u(k-r))y(k-i) + a_{r+1}(u(k-1), \dots, u(k-r)) = 0 \quad (3.33)$$

où les $a_i()$ sont des polynômes de degrés finis. Le modèle rationnel ainsi simplifié s'appelle le modèle affine.

La représentation de Sontag est très générale, dans la mesure où f prend une forme polynomiale. Cette restriction est en général souvent vérifiée, car si le système est faiblement écarté de sa position d'équilibre, il peut toujours être approché par un polynôme. A l'aide d'un tel modèle, les éléments non bilinéaires issus de la discrétisation de la représentation bilinéaire à savoir :

$$\exp((A + u(k)C)h) \quad \text{et} \quad \int_0^h \exp((A + u(k)C)(h - \tau))Bd\tau \quad (3.34)$$

pourront être approchés par un modèle de Sontag avec autant de précision que l'on veut. Ici encore, la structure du modèle de Sontag est un cas particulier du modèle NARMAX ou F est défini par une somme de fraction rationnelle.

3.2.6 Quelques remarques sur le NARMAX-polynomial

Le modèle NARMAX-polynomial possède beaucoup d'atouts, mais aussi un inconvénient majeur lié au nombre de monômes générés. Un schéma de ce type amène un nombre de monômes égale à n où :

$$n = M + 1 \quad (3.35)$$

$$M = \sum_{i=1}^l n_i \quad (3.36)$$

$$n_i = n_{i-1}(n_y + n_u + n_e + i - 1)/i \quad n_0 = 1 \quad (3.37)$$

avec l l'ordre maximum en puissance de F . Pour un système mécanique à un degré de liberté possédant une non-linéarité cubique soit :

$$y(t) = h * (u(t) + \beta y^3(t)) \quad (3.38)$$

où h est la réponse impulsionnelle. Il sera nécessaire de prendre $n_y = 2$, $n_u = 1$, $n_e = 0$ et $l = 3$. On obtient alors $n = 25$ ce qui est bien plus grand que le nombre de terme nécessaire qui est de 5 (obtenu par la transformée en Z de 3.38). Dès que le problème est multidimensionnel, le nombre de terme devient très grand. Par exemple, si le système mécanique est défini par trois modes avec trois degrés de liberté indépendants :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1(x_1 - x_2)^3 \\ \beta_1(x_2 - x_3)^3 \\ \beta_1(x_3)^3 \end{pmatrix} \right) \quad (3.39)$$

Il faut choisir $n_y = 3 * 3 * 2 = 18$, $n_u = 3 * 2$, $n_e = 0$ et $l = 3$. On obtient alors $n = 3 * 2925 = 8775$. Il apparaît donc absolument nécessaire de mettre au point une méthode de sélection des termes utiles à la modélisation. Malgré cela, nous verrons qu'il est presque indispensable de limiter judicieusement le développement du nombre des monômes, pour que cette méthode soit applicable.

Le modèle NARMAX peut paraître difficile à interpréter à cause du grand nombre de terme qu'il génère. En fait, l'utilisation de la méthode de détection par corrélation (paragraphe 3.3.3) permet une analyse du rôle des monômes dans le comportement, mais il est possible aussi, d'aborder l'analyse d'un NARMAX par le biais d'une analyse spectrale des noyaux de Volterra. La détermination du noyau linéaire $H_1(f)$ se fera en utilisant les relations suivantes :

$$u(k) = e^{j2\pi f k} \quad (3.40)$$

$$y(k) = H_1(f)e^{j2\pi f k} \quad (3.41)$$

Elles seront reportées dans le schéma NARMAX identifié, et on ne retiendra que les termes $e^{j2\pi f k}$. Les noyaux d'ordre plus élevé seront obtenus de façon analogue, grâce aux relations :

$$u(k) = \sum_{i=1}^p e^{j2\pi f_i k} \quad (3.42)$$

$$y(k) = \sum_{q=1}^p \left(\sum_{i_1=1}^q \cdots \sum_{i_q=1}^q \right) H_q(f_{i_1}, \dots, f_{i_q}) e^{j2\pi(f_1 + \dots + f_q)k} \quad (3.43)$$

3.3. ALGORITHMES D'IDENTIFICATION, DE SÉLECTION ET DE VALIDATION 89

en ne retenant cette fois uniquement les termes $e^{j2\pi(f_1+\dots+f_q)k}$ qui fourniront le noyau d'ordre p . Cette méthode déjà présentée dans l'analyse des bi-spectres (chapitre 2) est tout à fait transposable au cas du schéma NARMAX. Par exemple, si le NARMAX est défini par :

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + cy^2(k-1) \quad (3.44)$$

le premier noyau s'obtient en reportant les relations 3.40 et 3.41 dans l'équation 3.44 qui donne :

$$H_1(f)e^{j2\pi fk} = aH_1(f)e^{j2\pi f(k-1)} + be^{j2\pi f(k-1)} + c(H_1(f)e^{j2\pi f(k-1)})^2 \quad (3.45)$$

en égalisant les coefficients $e^{j2\pi fk}$ on obtient :

$$H_1(f) = \frac{be^{j2\pi fk}}{1 - ae^{j2\pi fk}} \quad (3.46)$$

Le noyau d'ordre 2 est calculé à l'aide des relations 3.42 et 3.43, que l'on reporte dans 3.44 :

$$y(k) = D(f_1, f_2)e^{j2\pi k} \quad (3.47)$$

$$= H_1(f_1)e^{j2\pi f_1 k} + H_1(f_2)e^{j2\pi f_2 k} + 2!H_2(f_1, f_2)e^{j2\pi(f_1+f_2)k} \\ + H_2(f_1, f_1)e^{2j2\pi f_1 k} + H_2(f_2, f_2)e^{2j2\pi f_2 k} \quad (3.48)$$

$$D(f_1, f_2)e^{j2\pi k} = aD(f_1, f_2)e^{j2\pi(k-1)} + b(e^{j2\pi f_1 k} + e^{j2\pi f_2 k}) + c(D(f_1, f_2))^2 e^{2j2\pi(k-1)} \quad (3.49)$$

En égalant uniquement les termes $e^{j2\pi(f_1+f_2)k}$ on a :

$$H_2(f_1, f_2) = \frac{cH_1(f_1)H_1(f_2)e^{-j2\pi(f_1+f_2)k}}{1 - ae^{-j2\pi(f_1+f_2)k}} \quad (3.50)$$

On remarque que plus il y a de termes dans le NARMAX, plus il devient difficile de calculer manuellement les noyaux de Volterra associés. Seul un logiciel de calcul formel permettra d'acquérir les noyaux pour des cas complexes.

3.3 Algorithmes d'identification, de sélection et de validation

3.3.1 Identification des termes du NARMAX

Le modèle NARMAX a l'avantage de dépendre linéairement des paramètres à identifier. Il est possible alors, d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance définie dans le

chapitre 1. Dans un cadre multi-dimensionnel quelques modifications doivent être apportées. Si nous notons, $e(t)$ le vecteur d'erreur prédictive, alors les résultats principaux concernant la procédure d'identification par le maximum de vraisemblance deviennent :

$$J_2(\theta) = \log(\det(Q(\theta))) \quad (3.51)$$

$$Q(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e^t(t) \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \theta_i} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N e^t(t) Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e(t)}{\partial \theta_i} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \frac{\partial e^t(t)}{\partial \theta_j} Q(\theta)^{-1} \frac{\partial e(t)}{\partial \theta_i} \quad (3.54)$$

Ces résultats permettent de réaliser un algorithme d'identification non-linéaire qui utilise nécessairement une première estimation des paramètres linéaires du modèle. Cette estimation pourra être fournie par une méthode de moindres carrés (chapitre 1). A l'aide de ces valeurs, nous pourrons initialiser l'algorithme de descente défini par la relation 1.130. Le diagramme 3.1 résume les différentes étapes de l'algorithme d'identification. L'optimisation du pas de descente se fera par une méthode du nombre d'or [59] qui recherche la valeur de α minimisant J_2 . D'autres techniques peuvent être envisagées comme : dicotomie, interpolation de J_2 par rapport à α puis recherche du minimum, ... La méthode du maximum de vraisemblance possède des propriétés statistiques asymptotiques remarquables, lui assurant une bonne convergence. En l'occurrence, l'estimation des paramètres est sans biais, consistante et tend vers une loi normale quand N augmente. Cette dernière propriété sera utilisée pour bâtir des tests statistiques (Ftest, Ttest, chapitre 1), pour mesurer l'utilité de chaque terme dans le modèle. Il est possible aussi de démontrer que la matrice de covariance de l'erreur prédictive atteint asymptotiquement la borne de Cramer-Rao (l'estimateur est dit efficace). Contrairement à l'algorithme orthogonal (Diagramme 3.2), la détermination des coefficients θ se fait de manière itérative, et l'ajout d'un terme oblige à recommencer toute la procédure. Par contre, les propriétés statistiques propres à la méthode du maximum de vraisemblance ne sont pas utilisables. Ainsi, une technique différente de sélection des termes, devra être introduite pour réduire le NARMAX-orthogonal. Un problème reste commun aux deux méthodes qui est l'estimation de n_y , n_u , n_e et l (pour le cas NARMAX-polynomiale). En général, on fixe (n_y, n_u, n_e) en fonction des résultats obtenus en linéaire (ou légèrement plus grand); par exemple, s'il y a 3 modes : $n_y = n_u = 6$, n_e quand à lui dépend du bruit observé. La variable l est fixée arbitrairement selon que le comportement est plutôt paire $l = 2$ ou impaire $l = 3$. Dans la plupart des cas, la valeur de l n'excedera pas 3, sinon la quantité de termes générés par

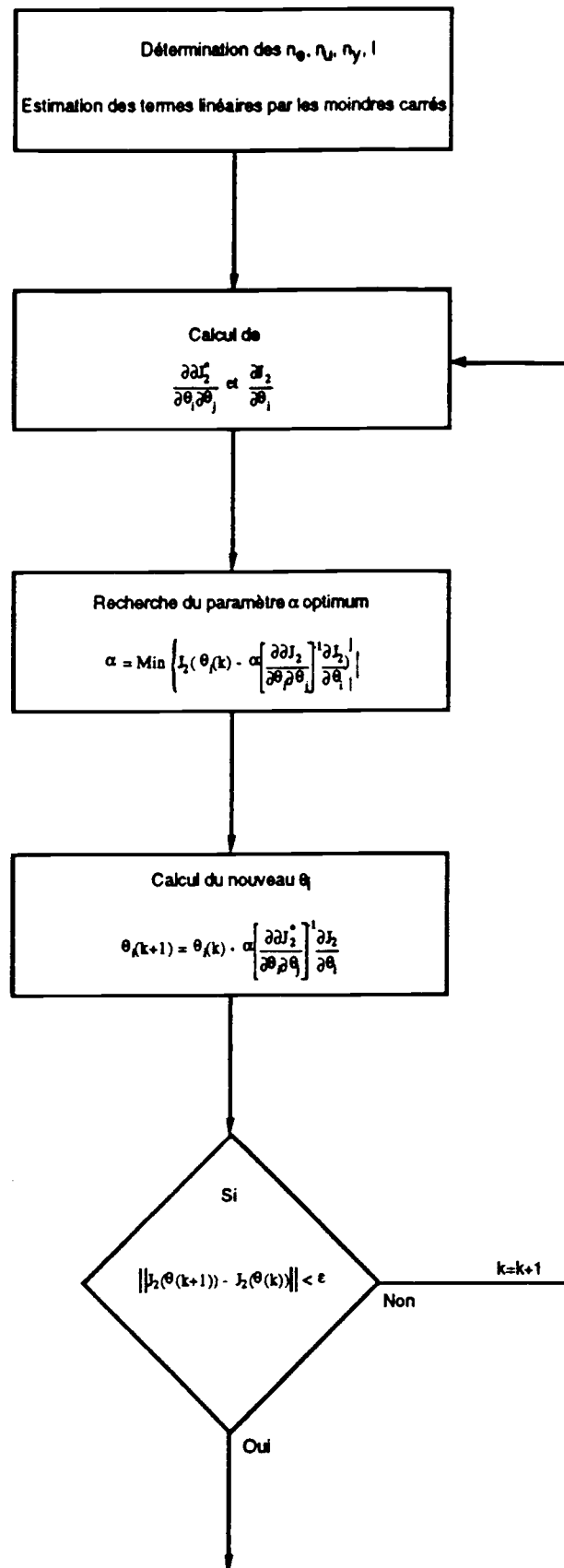


Figure 3.1: Organigramme de l'algorithme NARMAX-polynomial.

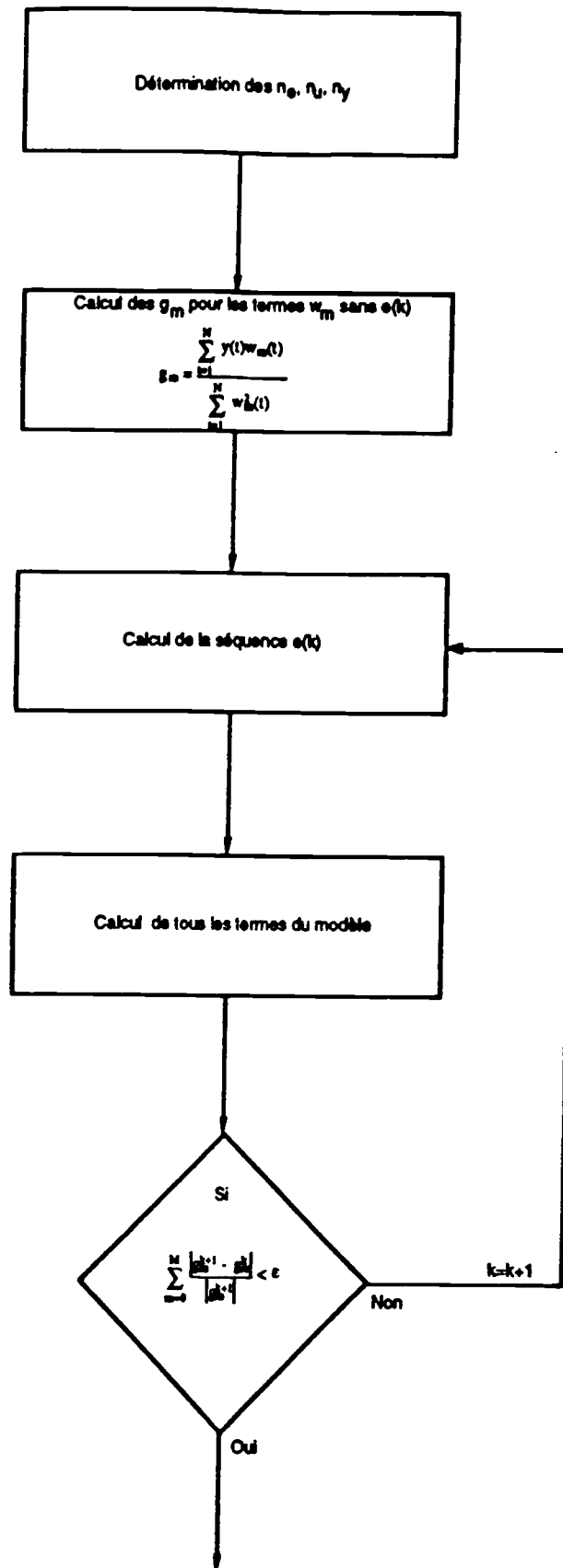


Figure 3.2: Organigramme de l'algorithme NARMAX-orthogonal.

le NARMAX devient astronomique. Heureusement, le test des corrélations (paragraphe 3.3.3), nous permet à la fin de l'identification de savoir quels types de monômes ont été oubliés, et ainsi de pouvoir corriger les valeurs (n_y, n_u, n_e, l) en vue d'une meilleure identification.

3.3.2 Sélection des termes du NARMAX

La sélection des termes est une étape indispensable dans la détermination d'un modèle NARMAX. Nous avons vu précédemment que le nombre de paramètres d'un modèle pouvait devenir très rapidement élevé, et plus particulièrement quand le problème est multidimensionnel. Pour sélectionner les termes du NARMAX, plusieurs stratégies sont possibles. Une technique de sélection "avant" où les coefficients sont ajoutés au fur et à mesure. On les introduit des plus efficaces aux moins efficaces jusqu'à ce que les coefficients restants soient jugés insignifiants grâce à un test statistique. Une telle démarche n'assure pas que les termes ajoutés au début restent significatifs à la fin. A l'opposé, une sélection "arrière" est possible, elle s'effectue à l'aide d'une première estimation de tous les coefficients suivi d'une suppression des termes jugés insignifiants. Cette procédure présente l'inconvénient de nécessiter une estimation de tous les paramètres linéaires et non-linéaires, ce qui n'est pas toujours réalisable. La méthode que nous retiendrons est basée sur une sélection initiale ou l'on introduira les termes les plus significatifs, mais pas de manière définitive. Cette technique pourra être adaptée à la méthode d'inversion de Gauss qui permet de déterminer les coefficients de proche en proche par substitution. Cette algorithmes de traitement des termes appartenant au modèle, sera insuffisante dans les problèmes multidimensionnels. Il faudra donc accélérer cette méthode à l'aide d'une pré-sélection des termes.

Méthode de sélection

La technique de sélection retenue est fondée sur le calcul des corrélations partielles qui est obtenu en mesurant : la corrélation entre les termes non-identifiés, et l'erreur commise entre l'expérience et le modèle partiellement identifié. A chaque étape, une estimation des termes présents dans le modèle est effectuée afin de savoir s'ils restent tous significatifs, et un test supplémentaire permet de connaître le terme suivant à introduire. Cette méthode sera développée sur le modèle NARMAX-polynomial suivant :

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \theta_i p_i(t) + e(t) \quad (3.55)$$

où les $p_i(t)$ ont été définis précédemment. En appliquant la technique des moindres carrés, il est possible d'avoir une estimation des paramètres θ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \vdots \\ \theta_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{y1} \\ \vdots \\ r_{yn} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

où

$$r_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^M (p_i(t) - \bar{p}_i)(p_j(t) - \bar{p}_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (3.57)$$

$$r_{yi} = \frac{\sum_{t=1}^M (p_i(t) - \bar{p}_i)(p_y(t) - \bar{p}_y)}{\sigma_i \sigma_y} \quad (3.58)$$

$$\sigma_i = \left(\sum_{t=1}^M (p_i(t) - \bar{p}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.59)$$

$$\sigma_y = \left(\sum_{t=1}^M (p_y(t) - \bar{p}_y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

$$\theta_i = \frac{\sigma_y}{\sigma_i} \theta_i^* \quad (3.61)$$

La sélection des termes s'opère de la manière suivante : on recherche le terme r_{yi} le plus élevé de tous les r_{yk} $k = 1, \dots, N$, ce terme est alors inclu dans le modèle qui devient :

$$y(t) = \theta_i p_i(t) + e(t) \quad (3.62)$$

Le terme suivant que l'on introduira devra être tel que la corrélation du monôme $p_j(t)$ avec $e(t)$ soit le plus élevé par rapport à l'ensemble des $p_k(t)$ $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ restants. Cette corrélation partielle sera notée $r_{yj:i}$ (i signifie que l'on soustrait à $y(t)$ le comportement du monôme i). L'apport des termes se fera donc petit à petit grâce au calcul des corrélations partielles. Pour faciliter le calcul des corrélations, nous utiliserons la relation de récurrence (Smillie 1966 [47]) donnée par :

$$r_{yk:i,j \dots k-1} = \frac{r_{yk:i,j \dots k-2} - r_{yk-1:i,j \dots k-2} r_{kk-1:i,j \dots k-1}}{\left((1 - r_{yk-1:i,j \dots k-2}^2)(1 - r_{kk-1:i,j \dots k-1}^2) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.63)$$

Cette démarche serait une simple technique de sélection "avant", si l'on introduisait pas une mesure de l'efficacité sur les termes déjà dans le modèle. L'estimation des paramètres suit asymptotiquement une loi normale, ce qui permet d'introduire le Ftest (chapite 1) suivant :

$$\frac{\hat{\theta}_i^2}{\hat{R}(A_p^t A_p)_{ii}} \rightsquigarrow F_{di}(1, N - n^*) \quad i = 1, \dots, n^* \quad (3.64)$$

Le test sera pris à un seuil égal à 95% ce qui donne une limite d'acceptation égale à $F_i \geq 4$. On cherchera alors le plus petit des F_i $i = 1, \dots, n^*$ et on supprimera le terme correspondant si $F_i < 4$. Pour amener un nouveau terme, plutôt que de comparer les corrélations partielles, on préfèra établir un Ftest qui mesure le niveau de corrélation avec la réponse :

$$\frac{r_{yk.ij\dots k-1}^2(N - n^*)}{1 - r_{yk.ij\dots k-1}^2} \rightsquigarrow F_{ak}(1, N - n^*) \quad k = 1 + n^*, \dots, n - n^* \quad (3.65)$$

ce test sera pris avec le même seuil que le précédent. La procédure décrite ci-dessus sera répétée jusqu'à ce qu'il ait plus de terme, ni à ajouter, ni à supprimer. Sous cette forme, la méthode de sélection peut paraître lourde, car elle nécessite le calcul des matrices de covariance et des corrélations partielles à chaque étape d'ajout, ou de retrait d'un terme. En fait [84], il est possible d'adapter la méthode d'inversion de Gauss de la matrice A pour obtenir la procédure de sélection. En choisissant comme première variable de substitution la plus corrélée, on obtient alors une estimation de ce paramètre qui est indépendante des autres termes. Le second terme, le plus corrélé, sera la deuxième variable à substituer dans l'inversion de Gauss, fournissant ainsi les deux premiers paramètres les plus corrélés. La substitution s'effectue donc, par ordre d'importance des termes, tout en conservant la possibilité d'un retour en arrière dans l'élimination. La matrice A servira de matrice de départ dans laquelle seuls les paramètres linéaires auront été introduits. Pour diminuer les problèmes de stockage numérique, la substitution se fera dans A et le second membre de 3.56. A la $k^{\text{ème}}$ étape de substitution, le terme à introduire le plus corrélé m sera obtenu en écrivant les relations :

$$r_{ij}(k) = \frac{r_{mm}(k-1)r_{ij}(k-1) - r_{im}(k-1)r_{mj}(k-1)}{r_{mm}(k-1)} \quad (i \neq m, j \neq m) \quad (3.66)$$

$$r_{ij}(k) = \frac{-r_{im}(k-1)}{r_{mm}(k-1)} \quad (i \neq m, j = m) \quad (3.67)$$

$$r_{ij}(k) = \frac{r_{mj}(k-1)}{r_{mm}(k-1)} \quad (i = m, j \neq m) \quad (3.68)$$

$$r_{ij}(k) = \frac{1}{r_{mm}(k-1)} \quad (i = m, j = m) \quad (3.69)$$

$$r_{yi}(k) = \frac{r_{mm}(k-1)r_{yi}(k-1) - r_{im}(k-1)r_{ym}(k-1)}{r_{mm}(k-1)} \quad (i \neq m) \quad (3.70)$$

$$r_{yi}(k) = \frac{r_{ym}(k-1)}{r_{mm}(k-1)} \quad (i = m) \quad (3.71)$$

A chaque étape de la substitution, on calculera :

$$F_{di} = \frac{(N - n^*)r_{yi}^2(k)}{r_{ii}(k)r_{yy}(k)} \quad i = 1, \dots, n^* \quad (3.72)$$

qui correspond au test 3.64, grâce aux relations d'équivalence :

$$R = \frac{r_{yy}(k)}{(N - n^*)} \quad (A_p^t A_p)_{ii} = r_{ii}(k) \quad \theta_i^* = r_{yi}(k) \quad (3.73)$$

Pour ajouter un terme, on utilisera le test 3.65 qui se transforme en :

$$F_{aj} = \frac{(N - n^*)V_j}{r_{yy}(k) - V_j} \quad j = 1 + n^*, \dots, n - n^* \quad (3.74)$$

où $V_j = \frac{r_{jy}^2(k)}{r_{jj}(k)}$.

On remarquera qu'il faut nécessairement conserver une trace de l'ordre dans lequel se fait la substitution, si l'on désire pouvoir enlever un terme qui a été introduit plusieurs étapes auparavant. En général, ce cas est rare, et les termes à supprimer sont souvent ceux de l'étape précédente. Cette sélection effectuée, nous utiliserons l'algorithme de descente (diagramme 3.1) et nous testerons à la fin les résultats pour confirmer le choix des termes.

Cette procédure très pratique donne de bons résultats, mais devient lourde dès que le problème fait appel à plusieurs centaines de termes. Nous effectuerons donc une pré-sélection en se basant sur l'écriture du système suivant :

$$M\ddot{X} + K\dot{X} + C\dot{X} + F^{nl}(X, \dot{X}, F) = F(t) \quad (3.75)$$

ce qui peut s'écrire à l'aide du produit de convolution :

$$X = H * (F(t) - F^{nl}(X(t), \dot{X}(t), F(t))) \quad (3.76)$$

En appliquant la transformée en Z sur 3.76, on obtient :

$$X(k) = \sum_{i=0}^{n_u} b_i F(k-i) - \sum_{i=1}^{n_y} a_i X(k-i) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n_u} b_i F^{nl}(X((k-i)), \dot{X}((k-i)), F((k-i)))}_{G^{nl}} \quad (3.77)$$

Nous supposons que la fonction non-linéaire vérifie le théorème de Stone-Weirstrass ce qui donne :

$$G^{nl} = \sum_{i=0}^{n_u} c_i \left(\sum_{p_1, p_2, p_3} X(k-i)^{p_1} \left(\frac{X(k-i) - X(k-i-1)}{DT} \right)^{p_2} F^{p_3}(k-i) \right) \quad (3.78)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_u} d_i \left(\sum_{p_1, p_2, p_3} X^{p_1}(k-i) X^{p_2}(k-i-1) F^{p_3}(k-i) \right) \quad (3.79)$$

En fait, nous choisirons de restreindre le développement des termes à ceux de la forme $X^{p_1}(k-l_1)X^{p_2}(k-l_1-s)F^{p_3}(k-l_2)$. Ce choix revient à supprimer tous les termes $X^{p_1}(k-n_1)X^{p_2}(k-n_2)$ où $|n_1 - n_2| > s$. Dans la plupart des cas, on prendra $s = 1$ afin que la limitation soit maximale. La conservation de termes de récursion sur F a pour but

de retrouver éventuellement des composantes de la série de Volterra discrète. Enfin, pour finir de limiter le nombre de termes, nous supposons que les erreurs de prédiction $e_i(k)$ $i = 1, \dots, n$ sont indépendantes deux à deux. Il sera alors possible de résoudre le problème en plusieurs sous-problèmes mono-dimensionnels.

3.3.3 Méthode de validation

Cette technique a deux buts : le premier qui consiste à savoir si le système étudié est de type linéaire ou pas, et le deuxième qui détermine si le modèle utilisé est complet, ou s'il est nécessaire d'apporter de nouveaux termes dans le modèle et lesquels. Ainsi, en supposant que l'erreur $e(t)$ est un bruit blanc gaussien, indépendant de toute combinaison linéaire et non-linéaire de $y(t)$ et $u(t)$, on peut alors établir un ensemble de relations basées sur le calcul des corrélations qui permettent de mesurer cette indépendance, et ainsi de savoir si le modèle utilisé est correct. Le calcul des corrélations en $y(t)$, $u(t)$ et $e(t)$ fournit une information sur les caractéristiques des non-linéarités non modélisées, à savoir si elles sont paires, impaires ou encore des produits croisés entre le bruit et l'excitation. La première étape dans l'analyse des données est de savoir si le système se comporte de manière linéaire ou non-linéaire. On calculera alors, la réponse du système pour une excitation $u(t) + b$ où $E(u(t)) = 0$. Deux essais devront être faits. Un premier obtenu pour $u(t) = 0$ et $b \neq 0$ et un deuxième avec $u(t) \neq 0$ et $b \neq 0$. Le système sera non-linéaire si la relation 3.80 est vérifiée :

$$E(y(t))_{(u=0, b \neq 0)} \neq E(y(t))_{(u \neq 0, b \neq 0)} \quad (3.80)$$

Si l'excitation $u(t) + b$ est telle que son moment d'ordre trois est nul et tous les moments paires existent (par exemple: excitation sinus, gaussienne), alors Billing et Voon 1983 [83] ont montré que le système est linéaire si :

$$\Phi_{y'y^2}(\tau) = E((y(t - \tau) - \bar{y})(y(t) - \bar{y})^2) = 0 \quad (3.81)$$

Dans le cas où $u(t) + b$ ne répond pas aux conditions précédentes, mais par contre fait partie des processus aléatoires séparables [81] le test de linéarité est fourni par :

$$\Phi_{u^2y}(\tau) = E((u(t - \tau))^2(y(t) - \bar{y})) = 0 \quad (3.82)$$

Les tests que nous venons de voir permettent uniquement de savoir si la structure est de type linéaire ou non-linéaire. D'autres tests permettent de savoir si le système étudié est complètement modélisé par le jeu de paramètres utilisés où s'il est nécessaire d'en amener d'autres. Ainsi, Box et Jenkins [36] ont montré que pour un schéma ARMAX les

	k paire l impaire	k paire l paire	k impaire l paire
	$\Phi_{eeuu}(\tau) \neq 0$	$\Phi_{eeuu}(\tau) \neq 0$	$\Phi_{eeuu}(\tau) \neq 0$
$u^k(t)e^l(t)$	$\Phi_{eeuu}(\tau) = 0$	$\Phi_{eeuu}(\tau) \neq 0$	$\Phi_{eeuu}(\tau) = 0$
	$\Phi_{eu}(\tau) = 0$	$\Phi_{eu}(\tau) = 0$	$\Phi_{eeu}(\tau) \neq 0$

Tableau 3.1: Tableau récapitulatif des propriétés des corrélations

paramètres linéaires non modélisés peuvent être mis en valeur à l'aide des relations :

$$\Phi_{ee}(\tau) = \delta(\tau) \quad (3.83)$$

$$\Phi_{ue}(\tau) = 0 \quad (3.84)$$

Les équations 3.83 et 3.84 assurent que le bruit est gaussien, et qu'il est indépendant des $u(t)$. Dans le cas non-linéaire, les paramètres non-modélisés seront testés à l'aide de relations supplémentaires tenant compte du fait que l'erreur $e(t)$ doit être indépendante de toute combinaison linéaire et non-linéaire des variables d'entrées et de sorties. Nous supposons désormais que $u(t)$ et $e(t)$ sont indépendants et que la forme générale de la réponse peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = G^u(u) + G^{ue}(u, e) + G^e(e) \quad (3.85)$$

On notera que $G^u(u)$ peut être associé à une représentation de Volterra, ainsi que $G^{ue}(u, e)$ et $G^e(e)$. Ceci nous assure un champ d'application très important aux tests qui seront développés sur les systèmes non-linéaires. Un choix judicieux de corrélations (Billing et Chen 1988) permet de savoir si le système est correctement modélisé et de déterminer la nature des non-linéarités oubliées dans la modélisation :

$$\Phi_{ee}(\tau) = \frac{E(e(t)e(t-\tau))}{E(e(t)^2)} = \delta(\tau) \quad (3.86)$$

$$\Phi_{eeuu}(\tau) = \frac{E((u^2(t) - \bar{u}^2)e(t-\tau))}{\sqrt{E((u^2(t) - \bar{u}^2)^2)E(e^2(t))}} = 0 \quad (3.87)$$

$$\Phi_{eu}(\tau) = \frac{E(u(t)e(t-\tau))}{\sqrt{E(u^2(t))E(e^2(t))}} = 0 \quad (3.88)$$

$$\Phi_{eeuu}(\tau) = \frac{E((u^2(t) - \bar{u}^2)e^2(t-\tau))}{\sqrt{E((u^2(t) - \bar{u}^2)^2)E(e^4(t))}} = 0 \quad (3.89)$$

$$\Phi_{eeu}(\tau) = \frac{E(e(t)e(t-\tau-1)(u(t-\tau-1)))}{\sqrt{E(u^2(t)e^2(t))E(e^2(t))}} = 0 \quad (3.90)$$

Les propriétés de ces corrélations (voir tableau 3.1) sont exactes dans la mesure où les moments impairs de $u(t)$ sont nuls. L'avantage de ces corrélations est qu'elles pourront rendre compte de tous les types de monômes non modélisés (u^k , e^k ou $u^k e^l$)

3.3. ALGORITHMES D'IDENTIFICATION, DE SÉLECTION ET DE VALIDATION 99

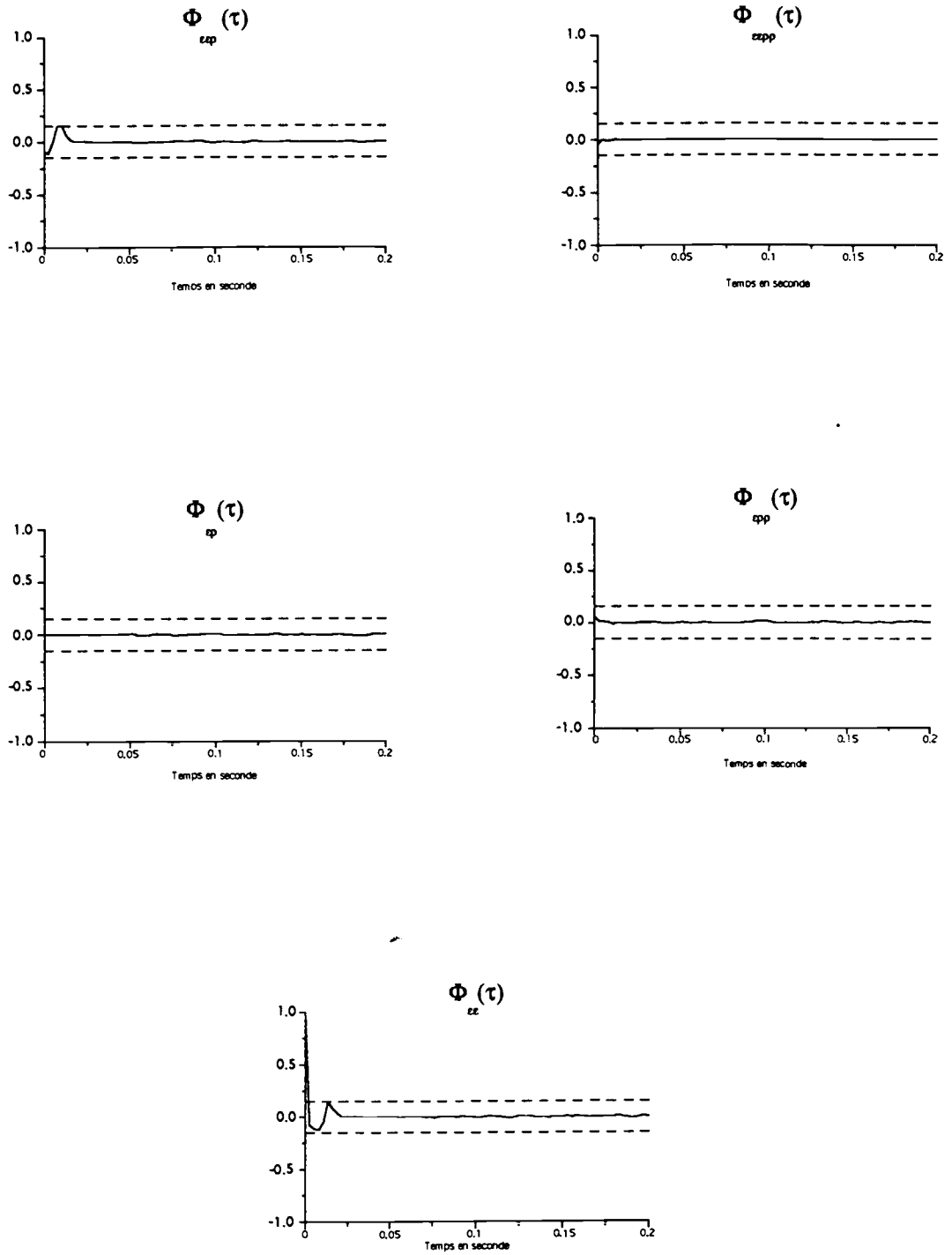


Figure 3.3: Tests sur le modèle linéaire.

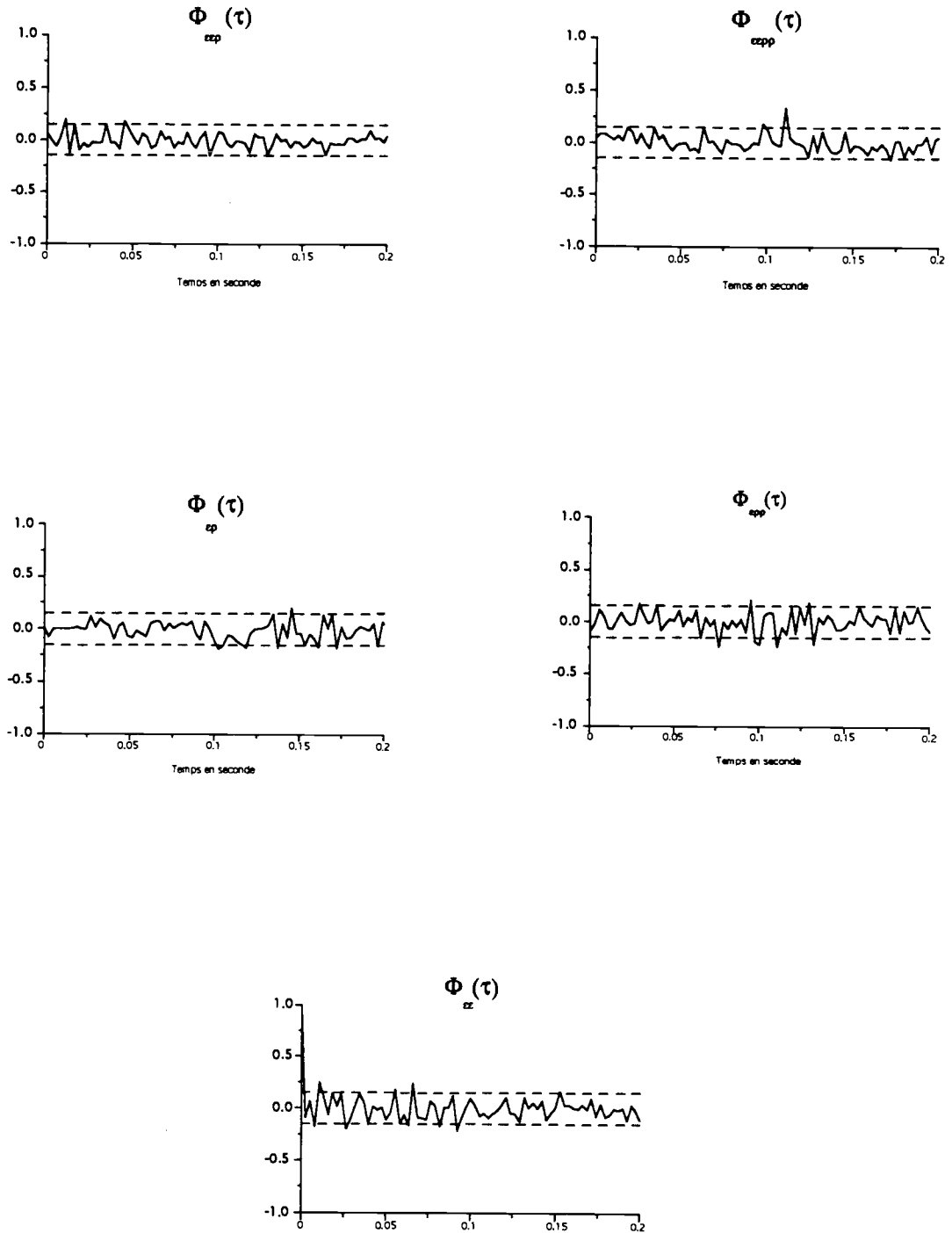


Figure 3.4: Tests sur le modèle non-linéaire.

lors de la mise en oeuvre d'un schéma NARMAX polynomiale. Un essai numérique a été effectué sur une poutre en traction-compression possédant une raideur locale non-linéaire dont les caractéristiques sont fournies dans le chapitre 6. Nous avons calculé l'ensemble de ces corrélations dans un cas linéaire où le modèle identifié a été obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance. Les résultats (figure 3.3) vérifient toutes les relations 3.86 3.87 3.88 3.89 3.90, ce qui signifie que le modèle est complet avec un critère de confiance sur chaque corrélation de 95% ce qui fournit un niveau de déviation standard égale à $1.96/\sqrt{N}$ où N est le nombre de point de mesure (ici $N = 200$) [36]. L'essai non-linéaire sera effectué avec une raideur de Duffing et la réponse sera identifiée par un schéma ARMAX toujours à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. On remarquera sur les courbes 3.4 que l'intervalle de confiance est franchi plusieurs fois, ce qui nous conduit à conclure qu'il manque des monômes dans le modèle, et conformément au tableau 3.1 qu'il s'agit probablement d'un monôme du type $u(t)^k e(t)^l$ où k est paire et l impaire car $\Phi_{eeuu}(\tau) \neq 0$, $\Phi_{euu}(\tau) \neq 0$ et on a presque $\Phi_{eu}(\tau) = 0$. Ces conclusions vérifient le fait que le modèle ne prend pas en compte la raideur de duffing qui correspond à une non-linéarité cubique (impaire).

3.3.4 Application à la base modale

Bien souvent, la position des non-linéarités est inconnue, ce qui signifie que les degrés de liberté sur lesquels s'appliquent les non-linéarités sont aussi inconnus. Par exemple, si l'on considère le problème bi-dimensionnel suivant :

$$u_1 = (h * p)_{11} * F_1 + h_{11} * u_1^2 \quad (3.91)$$

$$u_2 = (h * p)_{21} * F_1 + h_{21} * u_1^2 \quad (3.92)$$

Le traitement de la première équation 3.91 ne pose pas de problème, car le degré de liberté étudié u_1 correspond à celui de la non-linéarité. Dans la deuxième équation 3.92, le problème est différent car u_2 n'est pas le degré de liberté utilisé par la non-linéarité. En fait, il est possible de ramener l'équation 3.91 à un problème ne concernant que le degré de liberté u_2 . Soit :

$$u_1 = G_{11} * F_1 + G_{12} * u_2 \quad (3.93)$$

$$G_{11} = h_{12}^{-1} * (h_{12} * (h * p)_{11} - h_{11} * (h * p)_{21}) \quad (3.94)$$

$$G_{12} = h_{12}^{-1} * h_{11} \quad (3.95)$$

On montre alors aisément que l'équation 3.93 peut encore s'écrire :

$$u_2 = (h * p)_{21} * F_1 + h_{21} * (G_{11} * F_1 + G_{12} * u_2)^2 \quad (3.96)$$

En utilisant la transformée en Z, on démontre que l'équation 3.96 se transforme en :

$$u_2(k) = \sum_{i=1}^{n_y} a_i * u_2(k-i) + \sum_{i=0}^{n_u} b_i * F_1(k-i) + \sum_{i=0}^{n_u} c_i * (G_{11} * F_1 + G_{12} * u_2)^2(k-i) \quad (3.97)$$

le terme non-linéaire $(G_{11} * F_1 + G_{12} * u_2)^2(k-i)$ sera obtenu à l'aide d'un schéma récursif de type AR c'est à dire :

$$(G_{11} * F_1 + G_{12} * u_2)^2(k-i) = \left(\sum_{p=0}^{k-i} (G_{11}(p)F(k-i-p) + G_{12}(p)u_2(k-i-p)) \right)^2 \quad (3.98)$$

On remarquera que, dans cette dernière équation 3.98, le nombre de termes augmente lorsque k augmente. Cette formulation ne permet donc pas d'avoir un schéma récursif compact. Les problèmes qui viennent d'être exposés sont principalement liés à l'impossibilité de localiser la non-linéarité. Cette dernière remarque motive l'utilisation des coordonnées généralisées comme variables de description. En effet, en se plaçant en base modale, on perd la notion de localisation des non-linéarités. Cependant, quelques désavantages sont à noter. Premièrement, il faut acquérir la base modale linéaire du système, ce qui nécessite la mise en oeuvre d'un essai bas niveau ou d'une méthode de linéarisation. Deuxièmement, il est nécessaire d'effectuer une troncature modale représentative du signal mesuré. Enfin troisièmement, les non-linéarités géométriques génèrent plus de termes en base modale qu'en base réelle. En effet, si la non-linéarité est du type u_1^2 , en base modale, on aura $\left(\sum_{j=1}^m \Psi_{1j} q_j \right)^2$ (où q_j sont les coordonnées généralisées et Ψ_{ij} la base modale) ce qui veut dire pour $m = 3$ (3 modes), on multiplie par 6 le nombre de termes non-linéaires. En général, il est préférable d'utiliser cette formulation, car l'application d'un NARMAX à chaque coordonnée généralisée permet d'être indépendante du problème de localisation, et de supposer que seule la variable étudiée est prépondérante. De plus, chaque NARMAX étudié aura toujours des ordres de récursions faibles, car ils correspondent à un comportement uni-modal $n_u = n_y = 2$. Par contre, en conservant dans le modèle des coordonnées généralisées linéaires différentes de celles étudiées, il est possible en fin de calcul de corriger éventuellement la matrice des vecteurs propres afin d'obtenir un meilleur découplage des modes. En effet, si l'on a en début de calcul :

$$X(k) = \Psi_{init} q(k) \quad (3.99)$$

où $X(k)$: vecteur des coordonnées réelles à l'instant k
 Ψ_{init} : base modale initiale
 $q(k)$: vecteur des coordonnées généralisées à l'instant k

A la fin de l'identification on a :

$$\begin{pmatrix} q(k) \\ q(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(k-1) \\ q(k-2) \end{pmatrix} + \text{termes non - linéaires} \quad (3.100)$$

En calculant la matrice des vecteurs propres associée à ϕ_1 ou ϕ_2 , on obtient une matrice Ψ_c qui permet de corriger Ψ_{init} . Soit :

$$\begin{cases} \Psi_c^{-1} \phi_1 \Psi_c = \text{matrice diagonale} \\ \Psi_c^{-1} \phi_2 \Psi_c = \text{matrice diagonale} \end{cases} \implies \Psi_{final} = \Psi_{init} \Psi_c \quad (3.101)$$

3.3.5 Utilisation de la forme normale dans un modèle NARMAX

L'idée de la transformation normale est issue des travaux de Poincaré, et a été reprise par plusieurs auteurs Bjurno, Arnold, etc. Son application dans le domaine de l'analyse des systèmes dynamiques non-linéaires est assez récente [49]. Elle a pour but de simplifier les équations différentielles non-linéaires d'ordre 1. Cette simplification est obtenue à l'aide d'un changement de variables non-linéaires qui permet de supprimer les termes non-linéaires de l'équation différentielle. Cette méthode a pour avantage de simplifier l'analyse non-linéaire, d'introduire naturellement les modes non-linéaires [50] et de fournir des résultats analytiques. Sous certaines conditions, il est possible de linéariser complètement l'équation différentielle. Si l'on considère l'équation :

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(X) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.102)$$

où $\phi_i()$: fonction analytique
 X : vecteur (x_1, \dots, x_n)

Poincaré [41] a démontré qu'il existe une transformation $x_i = \zeta_i(Y)$ avec $\zeta_i(0) = 0$ analytique à l'origine qui transforme le système 3.102 en :

$$\frac{dy_i}{dt} = \Lambda_i y_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.103)$$

Ce résultat nécessite certaines conditions :

-1- Tous les λ_i sont du même côté par rapport à la droite D passant par l'origine et coupant le plan complexe en 2.

-2- Soit $(p_1, \dots, p_n) = P \in Z^n$, on doit avoir la condition de non-résonance pour $\sum_{k=1}^n p_k > 1$ avec $p_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$ qui est :

$$(P, \Lambda) - \lambda_i = \sum_{k=1}^n p_k \lambda_k - \lambda_i \neq 0 \quad (3.104)$$

Il est immédiat de constater que la dernière condition ne sera pas vérifiée pour des systèmes non-amortis. Par contre, Brjuno [4] a démontré qu'en effectuant un changement

de variable linéaire qui ramène la matrice $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ à une forme de Jordan, il existe alors une transformation inversible $x_i = \zeta_i(Y)$ telle que :

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Y^Q \quad i = 1, \dots, n \quad Y^Q = y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n} \quad (3.105)$$

$$N_i \in [Q \in Z^n / Q = (q_1, \dots, q_n), q_i \geq -1 \quad q_k \geq 0 \text{ si } k \neq i, \quad \sum_{k=1}^n q_k \geq 0] \quad (3.106)$$

$$g_{iQ} = 0 \quad \text{pour tous} \quad (Q, \Lambda) = \sum_{k=1}^n q_k \lambda_k \neq 0 \quad (3.107)$$

Les travaux de Jezequel et Lamarque [14] ont montré qu'il est possible d'établir une méthode récurrente permettant de déterminer les coefficients g_{iQ} en commençant par ceux dont le degré est le plus faible jusqu'au plus élevé. Cette démarche permet de limiter l'ordre de la transformation jusqu'à l'obtention d'une convergence correcte. Nous appliquerons cette théorie sur des systèmes discrets non-linéaires définis dans l'espace d'état. En effet, la représentation d'état discret correspond à un système d'équations différentielles du premier ordre discretisé. Nous choisirons la représentation observable, et nous montrerons qu'il est possible sur des schémas récursifs simples d'exprimer la transformation normale associée. Outre l'analyse du schéma, le but recherché est de réduire le modèle récursif au maximum au profit de la transformation afin de rendre son utilisation plus facile et plus rapide.

Application à un cas monodimensionnel

Nous donnerons ici un exemple d'application de la transformation normale au cas d'un schéma NARMAX simple pouvant caractériser le comportement dynamique d'un système mono-dimensionnel possédant un ressort de Duffing. Le schéma récursif que nous étudierons sera un peu plus général, afin de montrer que la forme normale est applicable à tous types de schéma NARMAX. La mise en oeuvre dans un cas multi-dimensionnel avec un grand nombre de termes ne présente pas de difficultés majeures, si ce n'est l'extrême lourdeur du calcul. Il est en fait nécessaire d'utiliser des logiciels de calcul formel afin de pouvoir effectuer ce calcul. Nous étudierons donc le schéma récursif non-linéaire suivant :

$$y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + b_0 F(t) + b_1 F(t-1) + b_2 F(t-2) + c_1 y^3(t-1) + c_2 y^3(t-2) \quad (3.108)$$

Dans le cas d'une structure mécanique amortie possédant un ressort de Duffing (figure 3.5), on démontre à l'aide de la transformée en Z que :

$$a_1 = 2 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \Delta t) e^{-\xi \omega_0 \Delta t} \quad (3.109)$$

$$a_2 = -e^{-2\xi\omega_0\Delta t} \quad (3.110)$$

$$b_0 = 0 \quad (3.111)$$

$$b_1 = \frac{\Delta t}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\Delta t) e^{-\xi\omega_0\Delta t} \quad (3.112)$$

$$b_2 = 0 \quad (3.113)$$

$$c_1 = \frac{k_{nl}\Delta t}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\Delta t) e^{-\xi\omega_0\Delta t} \quad (3.114)$$

$$c_2 = 0 \quad (3.115)$$

- où m : masse du système
 ω_0 : fréquence de résonance
 ξ : taux d'amortissement
 k_{nl} : coefficient non-linéaire $F^{nl}(y) = k_{nl}y^3$
 Δt : pas d'échantillonnage

La représentation du NARMAX 3.108 dans l'espace d'état sous forme observable est définie par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t-1} + \begin{pmatrix} b_2 + a_2b_0 \\ b_1 + a_1b_0 \end{pmatrix} F(t-1) \\ + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} (x_2(t-1) + b_0F(t-1))^3 \quad (3.116)$$

$$y(t) = x_2(t) + b_0F(t) \quad (3.117)$$

Conformément à la technique du calcul de la forme normale, nous commencerons par effectuer un changement de variable linéaire afin de mettre sous forme de Jordan la matrice A . On démontre facilement que A possède 2 valeurs propres conjuguées λ_1 et λ_2 ainsi que 2 vecteurs propres conjugués P_1 et P_2 soit :

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \frac{a_1 - j\sqrt{-4a_2 - a_1^2}}{2} \quad (3.118)$$

$$P_1 = P_2^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.119)$$

on obtient donc le changement de variables linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_1 & \lambda_2 - a_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

qui nous permet de définir un nouveau système à étudier :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}_{t-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} b_2 + a_2b_0 + (a_1 - \lambda_2)(b_1 + a_1b_0) \\ -b_2 - a_2b_0 - (a_1 - \lambda_1)(b_1 + a_1b_0) \end{pmatrix} F_{t-1} \\ + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} c_2 + (a_1 - \lambda_2)c_1 \\ -c_2 - (a_1 - \lambda_1)c_1 \end{pmatrix} ((u+v)_{t-1} + b_0F_{t-1})^3 \quad (3.121)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_1 & \lambda_2 - a_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t \quad \text{et} \quad y = x_2 + b_0F(t) = u + v + b_0F(t) \quad (3.122)$$

Les solutions u et v étant 2 à 2 conjuguées, nous étudierons une seule équation du système 3.121. Soit le changement de variables non-linéaires :

$$u = \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3 + q_1 \quad (3.123)$$

$$v = \beta_1 q_2^3 + \beta_2 q_2^2 q_1 + \beta_3 q_2 q_1^2 + \beta_4 q_1^3 + q_2 \quad (3.124)$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta_1, \dots, \beta_4) \in \mathcal{C}^8$.

En remplaçant 3.123 et 3.124 dans la première équation du système 3.121 on obtient :

$$\begin{aligned} (q_1 + \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3)_t &= \lambda_1 (q_1 + \alpha_1 q_1^3 + \alpha_2 q_1^2 q_2 + \alpha_3 q_1 q_2^2 + \alpha_4 q_2^3)_{t-1} \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (b_2 + a_2 b_0 + (a_1 - \lambda_2)(b_1 + a_1 b_0)) F_{t-1} \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1) (u + v + b_0 F)_{t-1}^3 \end{aligned} \quad (3.125)$$

Nous supposons tout d'abord que $F_t = 0$ et que les termes non-linéaires dont le cran de récursion est t , peuvent s'exprimer grâce à 3.121 en fonction des termes en $t - 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} (q_1)_t &= (\lambda_1 q_1 + (\alpha_1 \lambda_1 - \alpha_1 \lambda_1^3 + \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}) q_1^3 \\ &+ (\alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 \lambda_1^2 \lambda_2 + 3 \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}) q_1^2 q_2 \\ &+ (\alpha_3 \lambda_1 - \alpha_3 \lambda_1 \lambda_2^2 + 3 \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}) q_1 q_2^2 \\ &+ (\alpha_4 \lambda_1 - \alpha_4 \lambda_2^3 + 3 \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}) q_2^3)_{t-1} + o(4) \end{aligned} \quad (3.126)$$

l'élimination des termes non-linéaires se fera si :

$$\alpha_1 = \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\lambda_1 (\lambda_1^2 - 1)} \quad (3.127)$$

$$\alpha_2 = 3 \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\lambda_1 (\lambda_1 \lambda_2 - 1)} \quad (3.128)$$

$$\alpha_3 = 3 \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\lambda_1 (\lambda_2^2 - 1)} \quad (3.129)$$

$$\alpha_4 = \frac{c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{\lambda_2^3 - \lambda_1} \quad (3.130)$$

On remarquera que dans le cas non-amorti $\xi = 0$, on a :

$$\alpha_1 = -\frac{\Delta t}{m \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \sin(\omega_0 \Delta t)} e^{j \omega_0 \Delta t} \quad (3.131)$$

$$\alpha_2 = \text{pas de solution car } \lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (3.132)$$

$$\alpha_3 = \frac{3 \Delta t}{4 m \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \sin(\omega_0 \Delta t)} e^{-j \omega_0 \Delta t} \quad (3.133)$$

$$\alpha_4 = \frac{\Delta t}{4 m \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \sin(2 \omega_0 \Delta t)} e^{-2 j \omega_0 \Delta t} \quad (3.134)$$

3.3. ALGORITHMES D'IDENTIFICATION, DE SÉLECTION ET DE VALIDATION 107

dans ce cas précis, on ne peut pas simplifier complètement le schéma récursif. Si $F_t \neq 0$ il reste alors un ensemble de termes qui dépend de F_{t-1} , q_1 et q_2 défini par :

$$T(F_{t-1}, (q_1, q_2)_{t-1}) = \gamma_1 F_{t-1}^3 + \gamma_2 q_1^2 F_{t-1} + \gamma_3 q_2^2 F_{t-1} + \gamma_4 q_1 q_2 F_{t-1} + \gamma_5 q_1 F_{t-1}^2 + \gamma_6 q_2 F_{t-1}^2 \quad (3.135)$$

où

$$\gamma_1 = -\alpha_1 g_1^3 - \alpha_2 g_1^2 g_2 - \alpha_3 g_1 g_2^2 - \alpha_4 g_2^3 + \frac{b_0^3}{\lambda_1 - \lambda_2} (c_2 + (a_1 - \lambda_2) c_1) \quad (3.136)$$

$$\gamma_2 = -3\alpha_1 \lambda_1^2 g_1 - \alpha_2 \lambda_1^2 g_2 \quad (3.137)$$

$$\gamma_3 = -\alpha_3 \lambda_2^2 g_1 - 3\alpha_4 \lambda_2^2 g_2 \quad (3.138)$$

$$\gamma_4 = -2\alpha_2 \lambda_1 \lambda_2 g_1 - 2\alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 g_2 \quad (3.139)$$

$$\gamma_5 = -3\alpha_1 \lambda_1 g_1^2 - 2\alpha_2 \lambda_1 g_1 g_2 - \alpha_3 \lambda_1 g_2^2 \quad (3.140)$$

$$\gamma_6 = -\alpha_2 \lambda_2 g_1^2 - 2\alpha_3 \lambda_2 g_1 g_2 - 3\alpha_4 \lambda_2 g_2^2 \quad (3.141)$$

avec

$$g_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (b_2 + a_2 b_0 + (a_1 - \lambda_2)(b_1 + a_1 b_0)) \quad (3.142)$$

$$g_2 = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} (b_2 + a_2 b_0 + (a_1 - \lambda_1)(b_1 + a_1 b_0)) \quad (3.143)$$

L'introduction de la force génère un grand nombre de termes qui ne peuvent être simplifiés, sauf dans le cas d'excitation harmonique. En effet, ce type d'excitation $F(t) = f \cos(\omega t)$, peut s'exprimer à l'aide de la transformée en Z sous une forme récursive :

$$F_1(t) = e^{i\omega \Delta t} F_1(t-1) \quad F_1(0) = f \quad (3.144)$$

$$F_2(t) = e^{-i\omega \Delta t} F_2(t-1) \quad F_2(0) = f \quad (3.145)$$

Ces équations sont alors incluses dans le système d'état. Dans ce nouveau système d'état l'excitation est considérée comme une variable d'état et pourra être intégrée dans l'écriture de la transformation normale. Il est alors possible de simplifier l'équation initiale d'évolution de manière très substantielle contrairement au cas aléatoire.

Exemple d'analyse d'un schéma récursif non-linéaire

La mise sous forme normale de l'équation 3.108, nous permet d'effectuer une analyse non-linéaire de ce schéma. En effet, si on s'intéresse au cas d'un système non-amorti à conditions initiales non nulles avec $F(t) = 0$, alors les équations normales s'écrivent :

$$q_1(t) = e^{-i\omega_0 \Delta t} q_1(t-1) - \frac{3i k_{nl} \Delta t}{2 m \omega_0} q_1^2(t-1) q_2(t-1) \quad (3.146)$$

$$q_2(t) = e^{i\omega_0 \Delta t} q_2(t-1) + \frac{3i k_{nl} \Delta t}{2 m \omega_0} q_2^2(t-1) q_1(t-1) \quad (3.147)$$

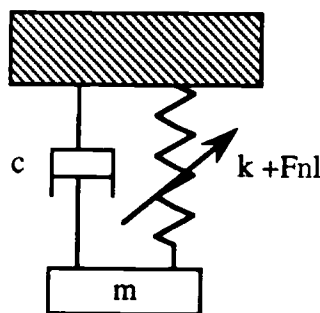


Figure 3.5: Système masse ressort comportant une non-linéarité F^{nl} .

En supposant les conditions initiales égales à $q_1(0) = u_0$, $q_2(0) = u_0^*$ et la solution stationnaire $q_1(t) = u_0 e^{-i\omega_0 t}$ et $q_2(t) = u_0^* e^{i\omega_0 t}$, on démontre alors que :

$$\omega = -\omega_0 + \frac{3}{2} \frac{k_{nl}}{m\omega_0} |u_0|^2 \quad (3.148)$$

Cette équation classique (blackbone curve) de variation de la pulsation avec les conditions initiales a pu être obtenue facilement en interprétant l'équation normale du schéma NARMAX 3.108. D'autres propriétés peuvent être démontrées grâce à la simplification apportée par la forme normale. De même, dans le cas forcé (pour $F(t)$ harmonique) l'équation normale permet de retrouver les phénomènes de saut associés à ce type de problème.

3.4 Essais numériques

Nous montrerons sur des essais numériques, les possibilités de la technique NARMAX-polynomiale. Pour cela, nous étudierons tout d'abord un système mono-dimensionnel possédant une non-linéarité quadratique, puis cubique. Sur ces deux essais, nous mettrons en valeur la qualité de l'identification en utilisant les tests statistiques de validation ainsi que la possibilité de calculer les bispectres qui leur sont associés. Enfin, un dernier essai sera effectué sur un cas multi-dimensionnel correspondant à la poutre en traction-compression décrite dans le chapitre 6.

3.4.1 Essais mono-dimensionnels

Les essais mono-dimensionnels que nous étudierons, correspondent à un système mécanique (figure 3.5) dont le jeu de paramètres (k , m , c et F^{nl}) est donné par :

$$k = 1 \quad (3.149)$$

$$m = 1 \quad (3.150)$$

$$c = 0.002 \quad (3.151)$$

$$F^{nl}(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & \alpha = 0.015 \\ \alpha x^3 & \alpha = 0.001 \end{cases} \quad (3.152)$$

Les essais seront effectués avec une excitation de type bruit blanc gaussien à moyenne nulle, et écart type $\sigma = 1$. Un premier test linéaire sera réalisé ($\alpha = 0$) qui nous permettra d'avoir une estimation des coefficients linéaires du NARMAX et de vérifier que dans le cas ($\alpha \neq 0$), le modèle linéaire ne vérifie pas les critères statistiques de validation (figure 3.6 et 3.12).

Non linéarité quadratique $F^{nl}(x) = \alpha x^2$

Identification et validation Deux calculs seront faits avec des pas en temps différents $\Delta t = 0.1$ et $\Delta t = 0.5$, afin de connaître l'influence du pas sur l'identification des termes. Dans les deux essais, on supposera $(n_u = n_f = 2, n_e = 0)_{lin}$, $(n_u = 3, n_f = 0, n_e = 0)_{nl}$ et l'ordre égal à 3. En prenant 2000 points de mesures, on obtient pour $\Delta t = 0.5$ 10 termes (équation 3.154) (5 linéaires et 5 non-linéaires), alors que pour $\Delta t = 0.1$, on a 6 termes (5 linéaires et 1 non-linéaire). Dans le cas $\Delta t = 0.1$, on est conforme à l'écriture d'un problème en contre-réaction non-linéaire auquel, on aurait appliqué une transformée en Z. Quand Δt est plus grand, le modèle nécessite plus de termes pour compenser le manque de précision avec lequel est décrit le phénomène. Les courbes de validation 3.7 et 3.8 pour les deux essais sont bonnes, hormis pour les tests $\Phi_{\epsilon\epsilon\rho\rho}$ et $\Phi_{\epsilon\rho\rho}$, ce qui pousserait à supposer (équation 3.155) que le modèle nécessite des termes du type $u^k(t)e^l(t)$. Nous verrons, dans le cas suivant, l'influence de l'introduction de ces termes dans le modèle sur les tests de validation. Une simulation de la réponse à l'aide du modèle identifié (figure 3.11) donne une très bonne précision par rapport à la réponse obtenue grâce à un Runge-Kutta d'ordre 4 (la zone temporelle choisie correspond à un écart important entre le comportement linéaire et non-linéaire).

Résultats linéaires pour $\Delta t = 0.5$:

$$\begin{aligned} y(t) = & 1.750y(t-1) - 0.995y(t-2) + 4.110 \cdot 10^{-2}f(t) + 0.162f(t-1) \\ & + 4.100 \cdot 10^{-2}f(t-2) \end{aligned} \quad (3.153)$$

Résultats non-linéaires pour $\Delta t = 0.5$:

$$\begin{aligned} y(t) = & 1.750y(t-1) - 0.995y(t-2) + 4.112 \cdot 10^{-2}f(t) + 0.162f(t-1) \\ & + 4.096 \cdot 10^{-2}f(t-2) - 3.687 \cdot 10^{-3}y^2(t-1) + 3.477 \cdot 10^{-4}y^2(t-2) \\ & - 3.225 \cdot 10^{-4}y^2(t-3) + 3.602 \cdot 10^{-6}y^3(t-1) - 3.519 \cdot 10^{-6}y^3(t-2) \end{aligned} \quad (3.154)$$

Résultats non-linéaires pour $\Delta t = 0.1$:

$$\begin{aligned} y(t) = & 1.989y(t-1) - 0.998y(t-2) + 1.66610^{-3}f(t) + 6.655 \cdot 10^{-3}f(t-1) \\ & + 1.665 \cdot 10^{-3}f(t-2) - 1.496 \cdot 10^{-4}y^2(t-1) \end{aligned} \quad (3.155)$$

Analyse bispectrale Comme il a été expliqué précédemment, il est toujours possible de déterminer le bispectre associé au modèle NARMAX qui a été identifié. A l'aide de la technique du calcul décrite dans le paragraphe (3.2.6), on démontre que le modèle NARMAX (équation 3.155) a pour bispectre :

$$H_2(f_1, f_2) = \frac{c_1 H_1(f_1) H_1(f_2)}{e^{j2\pi(f_1+f_2)} - (a_1 + a_2 e^{-j2\pi(f_1+f_2)})} \quad (3.156)$$

$$H_1(f) = \frac{b_0 e^{j2\pi f} + b_1 + b_2 e^{-j2\pi f}}{e^{j2\pi f} - (a_1 + a_2 e^{-j2\pi f})} \quad (3.157)$$

On obtient alors les nappes 3.19, 3.21 et les courbes iso-côtes 3.18, 3.20. Il est possible d'interpréter le schéma obtenu en relevant sur les diagrammes 3.19 et 3.21, la présence d'harmoniques en combinaison, de sous-harmoniques etc (cf chapitre 2).

Non linéarité cubique $F^{nl}(x) = \alpha x^3$

Identification et validation Deux calculs seront faits avec $n_e = 0$ et $n_e = 2$. Dans les deux cas $\Delta t = 0.1$, $(n_u = n_f = 2)_{lin}$, $(n_u = 3, n_f = 0)_{nlin}$ et l'ordre est égal à 3. On prendra toujours 2000 points de mesure. Pour l'essai $n_e = 0$, nous avons obtenu 6 termes (5 linéaires et 1 non-linéaire) (équation 3.160). Par contre, on a toujours un test de validation incorrect pour $\Phi_{\epsilon\epsilon\rho\rho}$ et $\Phi_{\epsilon\rho\rho}$ (figure 3.13), malgré une excellente simulation entre la réponse identifiée et celle calculée par un Runge-Kutta. Un deuxième essai a été réalisé avec $n_e = 2$. Le modèle comporte maintenant un terme supplémentaire au cas précédent qui correspond à un effet non-linéaire de l'erreur prédictive ($f(t)e^2(t-1)$) (équation 3.161). Ce dernier modèle fournit un test de validation (figure 3.9) de meilleure qualité sur $\Phi_{\epsilon\epsilon}$ qui est plus proche de $\delta(k)$ sans pour autant améliorer réellement $\Phi_{\epsilon\epsilon\rho\rho}$ et $\Phi_{\epsilon\rho\rho}$.

Résultats linéaires pour $\Delta t = 0.5$:

$$\begin{aligned} y(t) = & 1.750y(t-1) - 0.995y(t-2) + 4.110 \cdot 10^{-2}f(t) + 0.162f(t-1) \\ & + 4.100 \cdot 10^{-2}f(t-2) \end{aligned} \quad (3.158)$$

Résultats non-linéaires pour $\Delta t = 0.5$:

$$y(t) = 1.750y(t-1) - 0.995y(t-2) + 4.099 \cdot 10^{-2}f(t) + 0.161f(t-1)$$

$$\begin{aligned}
&+4.087 \cdot 10^{-2} f(t-2) - 2.358 \cdot 10^{-4} y^3(t-1) + 2.014 \cdot 10^{-5} y^3(t-2) \\
&-3.825 \cdot 10^{-5} y^3(t-3) + 2.331 \cdot 10^{-5} y^3(t-4)
\end{aligned} \tag{3.159}$$

Résultats non-linéaires pour $\Delta t = 0.1$:

$$\begin{aligned}
y(t) = & 1.989y(t-1) - 0.999y(t-2) + 1.665 \cdot 10^{-3} f(t) + 6.656 \cdot 10^{-3} f(t-1) \\
& +1.664 \cdot 10^{-3} f(t-2) - 9.957 \cdot 10^{-6} y^3(t-1)
\end{aligned} \tag{3.160}$$

Résultats non-linéaires pour $\Delta t = 0.1$ plus un terme d'erreur prédictive :

$$\begin{aligned}
y(t) = & 1.989y(t-1) - 0.999y(t-2) + 1.665 \cdot 10^{-3} f(t) + 6.656 \cdot 10^{-3} f(t-1) \\
& +1.664 \cdot 10^{-3} f(t-2) - 9.936 \cdot 10^{-6} y^3(t-1) + 6811.5 f(t) e^2(t-1)
\end{aligned} \tag{3.161}$$

Analyse trispectrale Nous avons étudié principalement les bispectres, mais en fait dans certain cas ceux-ci peuvent être identiquement nuls (pas d'effet quadratique). Dès lors, il est nécessaire d'analyser des spectres d'ordre plus élevé comme le trispectre $H_3(f_1, f_2, f_3)$ qui correspond à la transformée de Fourier multi-dimensionnelle du noyau de Volterra d'ordre 3. Le schéma récursif issu de l'équation 3.160 ne fournit pas de bispectre, il est alors nécessaire d'extraire H_3 à l'aide de la même technique que précédemment.

$$H_3(f_1, f_2, f_3) = \frac{c_1 H_1(f_1) H_1(f_2) H_1(f_3)}{e^{j2\pi(f_1+f_2+f_3)} - (a_1 + a_2 e^{-j2\pi(f_1+f_2+f_3)})} \tag{3.162}$$

$$H_2(f_1, f_2) = 0 \tag{3.163}$$

$$H_1(f) = \frac{b_0 e^{j2\pi f} + b_1 + b_2 e^{-j2\pi f}}{e^{j2\pi f} - (a_1 + a_2 e^{-j2\pi f})} \tag{3.164}$$

L'analyse des harmoniques non-linéaires se fera cette fois en fixant certaines fréquences f_i ou encore une droite $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = cste$, afin de se ramener à un problème tri-dimensionnel plus facile à interpréter [12].

3.4.2 Essai multi-dimensionnel

L'essai multi-dimensionnel se fera sur la poutre en traction-compression du chapitre 6. Afin de pouvoir faire ce test, nous identifierons la matrice des vecteurs propres du système qui permettra d'exprimer les coordonnées généralisées en fonction des variables mesurées.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.165}$$

Les hypothèses utilisées pour les schémas NARMAX sont :

- $(n_u = n_f = 2, n_e = 0)_{lin}$
- $(n_u = n_f = 2, n_e = 0)_{nlin}$
- puissance d'ordre 3
- erreurs prédictives découplées
- chaque schéma NARMAX sera identifié indépendamment
- $s=0$

La simulation numérique est obtenue avec :

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.002 && (\text{pas en temps}) \\ \sigma &= 15 && (\text{écart type de la force}) \\ N &= 2000 && (\text{nombre de points de mesure}) \\ F^{nl} &= kx + \alpha x^3 && (\alpha = 0.4 \cdot 10^{16} \text{ et } k = 0.7 \cdot 10^7) \end{aligned}$$

Le choix de ces hypothèses d'identification génère 65 termes (15 termes linéaires et 50 termes non-linéaires). Le modèle identifié quant à lui possède 44 termes (9 linéaires et 35 non-linéaires). En supposant que le schéma récursif est celui d'un système en contre-réaction, on devrait avoir 14 termes. Le fait d'avoir beaucoup plus de termes provient de la valeur de Δt qui est égale à $0.19/f_3$, alors que dans le cas mono-dimensionnel (où le nombre de terme était conforme au modèle en contre-réaction) il était de $0.016/f_1$. Le nombre de termes obtenus pour toutes les coordonnées généralisées est égal et de même type (équations 3.167, 3.169 et 3.171).

Deux essais sur la variable mesurée x_3 (extrémité libre de la poutre) ont été réalisés avec $((n_u = n_f = 6)_{lin}, (n_u = 6, n_f = 0)_{nlin})$ et $((n_u = n_f = 12)_{lin}, (n_u = 12, n_f = 0)_{nlin})$ avec un ordre égale à 3. Le choix de l'ordre du premier essai correspond à un système mécanique possédant 3 modes, celui du deuxième a été choisi afin d'améliorer l'identification. Le premier test donne une mauvaise qualité de lissage, par contre le deuxième est assez bon (figure 3.10). Il est utile de remarquer que ce dernier essai utilisait 49 termes dont 25 ont été retenus (19 linéaires et 6 non-linéaires). La grande quantité de paramètres linéaires identifiés a pour but de compenser la mauvaise prise en compte des effets non-linéaires, ce qui modifie fortement les caractéristiques linéaires. Cet essai montre l'intérêt de choisir plutôt une description modale (q_i) des variables q qu'une description réelle (x_i).

La simulation des schémas NARMAX identifiés avec les coordonnées généralisées donne de bons résultats (figure 3.15, 3.16 et 3.17).

Résultats linéaires pour q_1 :

$$\begin{aligned} q_1(t) &= 1.948q_1(t-1) - 0.997q_1(t-2) + 5.028 \cdot 10^{-2}q_2(t-1) - 2.592 \cdot 10^{-3}q_2(t-2) \\ &\quad + 4.566 \cdot 10^{-2}q_3(t-1) - 2.819 \cdot 10^{-3}q_3(t-2) + 2.090 \cdot 10^{-9}f(t) \end{aligned}$$

$$+8.178 \cdot 10^{-9} f(t-1) + 2.070 \cdot 10^{-9} f(t-2) \quad (3.166)$$

Résultats non-linéaires pour q_1 :

$$\begin{aligned}
q_1(t) = & 1.946q_1(t-1) - 0.996q_1(t-2) + 5.139 \cdot 10^{-2}q_2(t-1) - 3.470 \cdot 10^{-3}q_2(t-2) \\
& +4.654 \cdot 10^{-3}q_3(t-1) - 4.013 \cdot 10^{-3}q_3(t-2) + 2.082 \cdot 10^{-9}f(t) \\
& +8.110 \cdot 10^{-9}f(t-1) + 2.058 \cdot 10^{-9}f(t-2) - 4.102 \cdot 10^7q_1^3(t-1) \\
& -3.826 \cdot 10^6q_1^3(t-2) + 1.340 \cdot 10^8q_1^2(t-1)q_2(t-1) - 1.317 \cdot 10^7q_1^2(t-2)q_2(t-1) \\
& -1.767 \cdot 10^7q_1^2(t-1)q_2(t-2) + 3.023 \cdot 10^7q_1^2(t-2)q_2(t-2) \\
& -1.164 \cdot 10^8q_1(t-1)q_2^2(t-1) + 6.596 \cdot 10^6q_1(t-1)q_2^2(t-2) \\
& -2.285 \cdot 10^7q_1(t-2)q_2^2(t-2) + 3.749 \cdot 10^7q_2^3(t-1) + 6.740 \cdot 10^6q_2^3(t-2) \\
& +1.212 \cdot 10^8q_1^2(t-1)q_3(t-1) - 5.378 \cdot 10^6q_1^2(t-2)q_3(t-1) \\
& -1.737 \cdot 10^7q_1^2(t-1)q_3(t-2) + 3.179 \cdot 10^7q_1^2(t-2)q_3(t-2) \\
& -2.719 \cdot 10^8q_1(t-1)q_2(t-1)q_3(t-1) + 3.763 \cdot 10^7q_1(t-2)q_2(t-1)q_3(t-1) \\
& +5.031 \cdot 10^7q_1(t-1)q_2(t-2)q_3(t-1) - 4.293 \cdot 10^7q_1(t-2)q_2(t-2)q_3(t-1) \\
& +7.530 \cdot 10^7q_1(t-1)q_2(t-1)q_3(t-2) - 5.121 \cdot 10^7q_1(t-2)q_2(t-1)q_3(t-2) \\
& -6.269 \cdot 10^7q_1(t-1)q_2(t-2)q_3(t-2) + 1.113 \cdot 10^8q_2^2(t-1)q_3(t-1) \\
& -5.887 \cdot 10^6q_2^2(t-2)q_3(t-1) + 2.962 \cdot 10^7q_2^2(t-2)q_3(t-2) \\
& -9.432 \cdot 10^7q_1(t-1)q_3^2(t-1) - 1.024 \cdot 10^7q_1(t-2)q_3^2(t-1) \\
& -8.139 \cdot 10^6q_1(t-1)q_3^2(t-2) - 2.441 \cdot 10^7q_1(t-2)q_3^2(t-2) \\
& +9.458 \cdot 10^7q_2(t-1)q_3^2(t-2) + 1.051 \cdot 10^7q_2(t-1)q_3^2(t-2) \\
& +8.800 \cdot 10^6q_2^2(t-1)q_3^2(t-2) + 2.438 \cdot 10^7q_2(t-1)q_3^2(t-2) \\
& +3.140 \cdot 10^7q_3^3(t-1) + 1.686 \cdot 10^7q_3^3(t-2) \quad (3.167)
\end{aligned}$$

Résultats linéaires pour q_2 :

$$\begin{aligned}
q_2(t) = & 0.149q_1(t-1) - 4.879 \cdot 10^{-3}q_1(t-2) + 1.554q_2(t-1) - 0.994q_2(t-2) \\
& -0.132q_3(t-1) + 5.432 \cdot 10^{-3}q_3(t-2) - 6.183 \cdot 10^{-9}f(t) \\
& -2.384 \cdot 10^{-8}f(t-1) - 6.144 \cdot 10^{-9}f(t-2) \quad (3.168)
\end{aligned}$$

Résultats non-linéaires pour q_2 :

$$\begin{aligned}
q_2(t) = & 0.154q_1(t-1) - 8.178 \cdot 10^{-3}q_1(t-2) + 1.551q_2(t-1) - 0.992q_2(t-2) \\
& -0.134q_3(t-1) + 8.975 \cdot 10^{-3}q_3(t-2) - 6.159 \cdot 10^{-9}f(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2.363 \cdot 10^{-8} f(t-1) - 6.109 \cdot 10^{-9} f(t-2) + 1.198 \cdot 10^8 q_1^3(t-1) \\
& + 1.146 \cdot 10^7 q_1^3(t-2) - 3.919 \cdot 10^8 q_1^2(t-1) q_2(t-1) + 3.903 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_2(t-1) \\
& + 5.238 \cdot 10^7 q_1^2(t-1) q_2(t-2) - 8.996 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_2(t-2) \\
& + 3.399 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2^2(t-1) - 1.950 \cdot 10^7 q_1(t-1) q_2^2(t-2) \\
& + 6.808 \cdot 10^7 q_1(t-2) q_2^2(t-2) - 1.093 \cdot 10^8 q_2^3(t-1) - 2.011 \cdot 10^7 q_2^3(t-2) \\
& - 3.541 \cdot 10^8 q_1^2(t-1) q_3(t-1) + 1.584 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_3(t-1) \\
& + 5.145 \cdot 10^7 q_1^2(t-1) q_3(t-2) - 9.457 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_3(t-2) \\
& + 7.955 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2(t-1) q_3(t-1) - 1.116 \cdot 10^8 q_1(t-2) q_2(t-1) q_3(t-1) \\
& - 1.493 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2(t-2) q_3(t-1) + 1.275 \cdot 10^8 q_1(t-2) q_2(t-2) q_3(t-1) \\
& - 2.236 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2(t-1) q_3(t-2) + 1.523 \cdot 10^8 q_1(t-2) q_2(t-1) q_3(t-2) \\
& + 1.865 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2(t-2) q_3(t-2) - 3.247 \cdot 10^8 q_2^2(t-1) q_3(t-1) \\
& + 1.736 \cdot 10^7 q_2^2(t-2) q_3(t-1) - 8.817 \cdot 10^8 q_2^2(t-2) q_3(t-2) \\
& + 2.741 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_3^2(t-1) + 3.047 \cdot 10^7 q_1(t-2) q_3^2(t-1) \\
& + 2.433 \cdot 10^7 q_1(t-1) q_3^2(t-2) + 7.262 \cdot 10^7 q_1(t-2) q_3^2(t-2) \\
& - 2.750 \cdot 10^8 q_2(t-1) q_3^2(t-2) - 3.123 \cdot 10^7 q_2(t-1) q_3^2(t-2) \\
& - 2.628 \cdot 10^7 q_2^2(t-1) q_3^2(t-2) - 7.253 \cdot 10^7 q_2(t-1) q_3^2(t-2) \\
& - 9.133 \cdot 10^7 q_3^3(t-1) - 5.013 \cdot 10^7 q_3^3(t-2)
\end{aligned} \tag{3.169}$$

Résultats linéaires pour q_3 :

$$\begin{aligned}
q_3(t) &= 0.136 q_1(t-1) - 2.279 \cdot 10^{-3} q_1(t-2) - 0.132 q_2(t-1) + 2.240 \cdot 10^{-3} q_2(t-2) \\
& + 0.769 q_3(t-1) - 0.997 q_3(t-2) - 5.910 \cdot 10^{-9} f(t) \\
& - 2.170 \cdot 10^{-8} f(t-1) - 5.892 \cdot 10^{-9} f(t-2)
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Résultats non-linéaires pour q_3 :

$$\begin{aligned}
q_3(t) &= 0.140 q_1(t-1) - 5.468 \cdot 10^{-3} q_1(t-2) - 0.135 q_2(t-1) + 4.763 \cdot 10^{-3} q_2(t-2) \\
& + 0.766 q_3(t-1) - 0.993 q_3(t-2) - 5.886 \cdot 10^{-9} f(t) \\
& - 2.151 \cdot 10^{-8} f(t-1) - 5.858 \cdot 10^{-9} f(t-2) + 1.099 \cdot 10^8 q_1^3(t-1) \\
& + 1.118 \cdot 10^7 q_1^3(t-2) - 3.611 \cdot 10^8 q_1^2(t-1) q_2(t-1) + 3.773 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_2(t-1) \\
& + 5.061 \cdot 10^7 q_1^2(t-1) q_2(t-2) - 8.727 \cdot 10^7 q_1^2(t-2) q_2(t-2) \\
& + 3.108 \cdot 10^8 q_1(t-1) q_2^2(t-1) - 1.879 \cdot 10^7 q_1(t-1) q_2^2(t-2) \\
& + 6.608 \cdot 10^7 q_1(t-2) q_2^2(t-2) - 9.982 \cdot 10^7 q_2^3(t-1) - 1.955 \cdot 10^7 q_2^3(t-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3.244 \cdot 10^8 q_1^2(t-1)q_3(t-1) + 1.523 \cdot 10^7 q_1^2(t-2)q_3(t-1) \\
& + 4.966 \cdot 10^7 q_1^2(t-1)q_3(t-2) - 9.166 \cdot 10^7 q_1^2(t-2)q_3(t-2) \\
& + 7.332 \cdot 10^8 q_1(t-1)q_2(t-1)q_3(t-1) - 1.077 \cdot 10^8 q_1(t-2)q_2(t-1)q_3(t-1) \\
& - 1.441 \cdot 10^8 q_1(t-1)q_2(t-2)q_3(t-1) + 1.232 \cdot 10^8 q_1(t-2)q_2(t-2)q_3(t-1) \\
& - 2.163 \cdot 10^8 q_1(t-1)q_2(t-1)q_3(t-2) + 1.475 \cdot 10^8 q_1(t-2)q_2(t-1)q_3(t-2) \\
& + 1.808 \cdot 10^8 q_1(t-1)q_2(t-2)q_3(t-2) - 2.962 \cdot 10^8 q_2^2(t-1)q_3(t-1) \\
& + 1.667 \cdot 10^7 q_2^2(t-2)q_3(t-1) - 8.541 \cdot 10^7 q_2^2(t-2)q_3(t-2) \\
& + 2.473 \cdot 10^8 q_1(t-1)q_3^2(t-1) + 2.947 \cdot 10^7 q_1(t-2)q_3^2(t-1) \\
& + 2.371 \cdot 10^7 q_1(t-1)q_3^2(t-2) + 7.025 \cdot 10^7 q_1(t-2)q_3^2(t-2) \\
& - 2.482 \cdot 10^8 q_2(t-1)q_3^2(t-2) - 3.018 \cdot 10^7 q_2(t-1)q_3^2(t-2) \\
& - 2.557 \cdot 10^7 q_2^2(t-1)q_3^2(t-2) - 7.013 \cdot 10^7 q_2(t-1)q_3^2(t-2) \\
& - 8.254 \cdot 10^7 q_3^3(t-1) - 4.845 \cdot 10^7 q_3^3(t-2)
\end{aligned} \tag{3.171}$$

3.5 Essai expérimental

L'expérience effectuée utilise la poutre en flexion avec une lame décrite dans le chapitre 7. La configuration des acquisitions est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Delta t &= 1.953 \cdot 10^{-3} \text{ s} = \frac{0.19}{f_2} \quad (\text{pas en temps}) \\
N &= 2048 \quad (\text{nombre de points de mesure})
\end{aligned}$$

Ce système mécanique est excité avec un bruit blanc gaussien à moyenne nulle. Deux capteurs accélérométriques fournissent l'accélération en deux points différents de la structure (un au niveau de la non-linéarité, et la deuxième à 29 cm de celui-ci) et un capteur de force donne le niveau de force injecté. Nous utiliserons le logiciel d'acquisition LMS pour relever les mesures et les transférer dans un fichier lisible par notre programme d'identification. Deux séries de mesures ont été réalisées, la première à faible niveau, et la deuxième à fort niveau. Le premier essai permettra d'extraire les caractéristiques modales linéaires de la poutre, ce qui donne :

$$f_1 = 37.70 \text{ Hz} \quad \xi_1 = 1.86 \cdot 10^{-2} \tag{3.172}$$

$$f_2 = 98.32 \text{ Hz} \quad \xi_2 = 1.43 \cdot 10^{-2} \tag{3.173}$$

et

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.573 & -2.047 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.174}$$

Le test à fort niveau sera utilisé pour l'identification des schémas NARMAX. Une simulation du modèle linéaire (équation 3.175 et 3.176) avec la force élevée a montré, à l'aide des tests statistiques de validation, que la structure avait un comportement non-linéaire (figure 3.22 $\Phi_{\epsilon\epsilon}(k) \neq \delta(k)$). Nous avons alors utilisé notre algorithme d'identification pour modéliser ce système non-linéaire. Dans un premier temps, nous avons appliqué l'algorithme sur les deux coordonnées généralisées avec les données suivantes :

- sur (q_1, q_2) ($n_u = n_f = 2, n_e = 0$)*lin*
- sur (q_1, q_2) ($n_u = 2, n_f = 0, n_e = 0$)*nl**lin*
- puissance d'ordre 3
- erreurs prédictives découplées
- chaque schéma NARMAX sera identifié indépendamment
- $s = 1$

Comme dans le cas de la poutre en traction-compression étudiée précédemment, les schémas NARMAX obtenus sont couplés. La qualité de l'identification de chaque NARMAX n'étant pas très bonne, leurs couplages a pour résultat d'augmenter cette erreur. En fait, il aurait probablement fallu identifier les deux schémas simultanément, ce qui aurait pour défaut de multiplier par deux (dans notre cas) le nombre de termes dans l'algorithme de minimisation. Nous avons donc choisi d'identifier chaque NARMAX en fonction d'une seule coordonnée généralisée. Cette dernière hypothèse reste assez correcte si on suppose un couplage faible entre les modes. Cette fois, la configuration d'identification est :

- ($n_u = n_f = 4, n_e = 0$)*lin*
- ($n_u = 4, n_f = 0, n_e = 0$)*nl**lin*
- puissance d'ordre 3
- erreurs prédictives découplées
- chaque schéma NARMAX sera identifié indépendamment
- $s = 1$

ce qui fournit 29 termes. Le NARMAX associé à la coordonnée généralisée q_1 comporte 12 termes (9 linéaires et 3 non-linéaires, équation 3.177), et celui obtenu avec q_2 est composé de 14 termes (8 linéaires et 6 non-linéaires, équation 3.178). Un test de validation sur q_1 (figure 3.23) a montré une nette amélioration du modèle. De même, les courbes de simulation (figures 3.26 et 3.27) ont fourni de bons résultats.

Résultats linéaires pour q_1 :

$$q_1(t) = 1.759q_1(t-1) - 0.967q_1(t-2) - 2.838f(t) + 5.586f(t-1) - 2.659f(t-2) \quad (3.175)$$

Résultats linéaires pour q_2 :

$$q_2(t) = 0.712q_2(t-1) - 0.993q_2(t-2) - 0.691f(t) + 1.423f(t-1) - 0.695f(t-2) \quad (3.176)$$

Résultats non-linéaires pour q_1 :

$$\begin{aligned}
q_1(t) = & 1.211q_1(t-1) - 0.672q_1(t-2) + 0.480q_1(t-3) - 0.539q_1(t-4) - 2.549f(t) \\
& + 3.693f(t-1) - 1.468f(t-2) + 1.664f(t-3) - 1.235f(t-4) \\
& - 1.996 \cdot 10^{-6}q_1^3(t-1) + 7.643 \cdot 10^{-6}q_1^3(t-2) - 8.231 \cdot 10^{-5}q_1(t-1)q_1(t-2) \\
& - 1.162 \cdot 10^{-5}q_1^2(t-2)q_1(t-3) + 5.324 \cdot 10^{-6}q_1^2(t-4)q_1(t-5) \\
& - 6.135 \cdot 10^{-6}q_1(t-1)q_1^2(t-2) + 5.071 \cdot 10^{-6}q_1(t-2)q_1^2(t-3) \\
& - 1.453 \cdot 10^{-6}q_1(t-3)q_1^2(t-4) - 6.219 \cdot 10^{-6}q_1(t-4)q_1^2(t-5) \quad (3.177)
\end{aligned}$$

Résultats non-linéaires pour q_2 :

$$\begin{aligned}
q_2(t) = & 0.325q_1(t-1) - 1.248q_1(t-2) - 0.475q_1(t-4) - 0.579f(t) + 1.181f(t-1) \\
& - 0.419f(t-2) + 0.438f(t-3) - 0.395f(t-4) - 1.027 \cdot 10^{-4}q_1^2(t-4) \\
& - 5.228 \cdot 10^{-6}q_1^3(t-1) + 2.583 \cdot 10^{-6}q_1^3(t-2) - 3.085 \cdot 10^{-6}q_1^3(t-3) \\
& + 1.464 \cdot 10^{-4}q_1(t-2)q_1(t-3) + 7.151 \cdot 10^{-6}q_1^2(t-1)q_1(t-2) \\
& + 6.584 \cdot 10^{-6}q_1^2(t-4)q_1(t-5) - 2.680 \cdot 10^{-6}q_1(t-1)q_1^2(t-2) \quad (3.178)
\end{aligned}$$

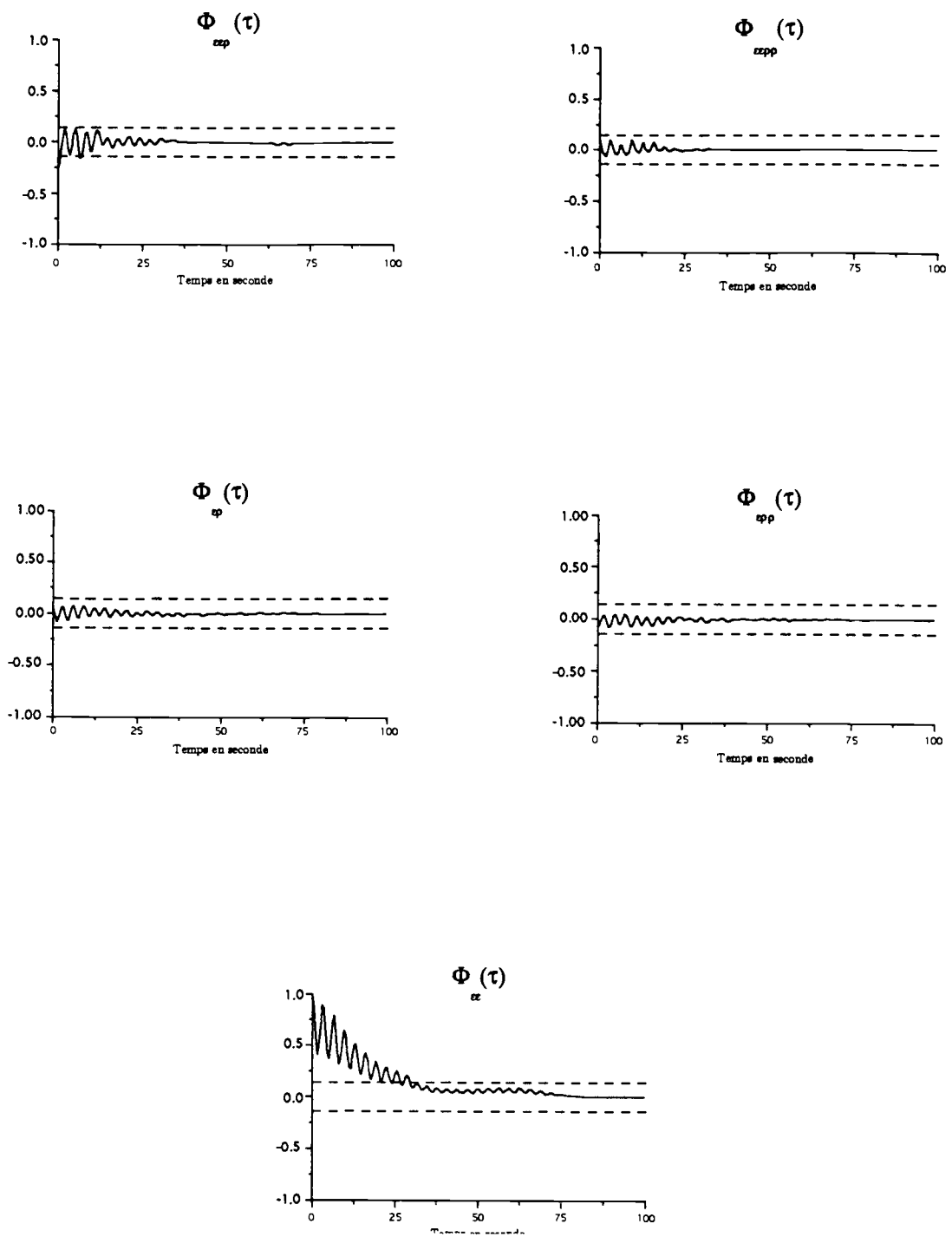
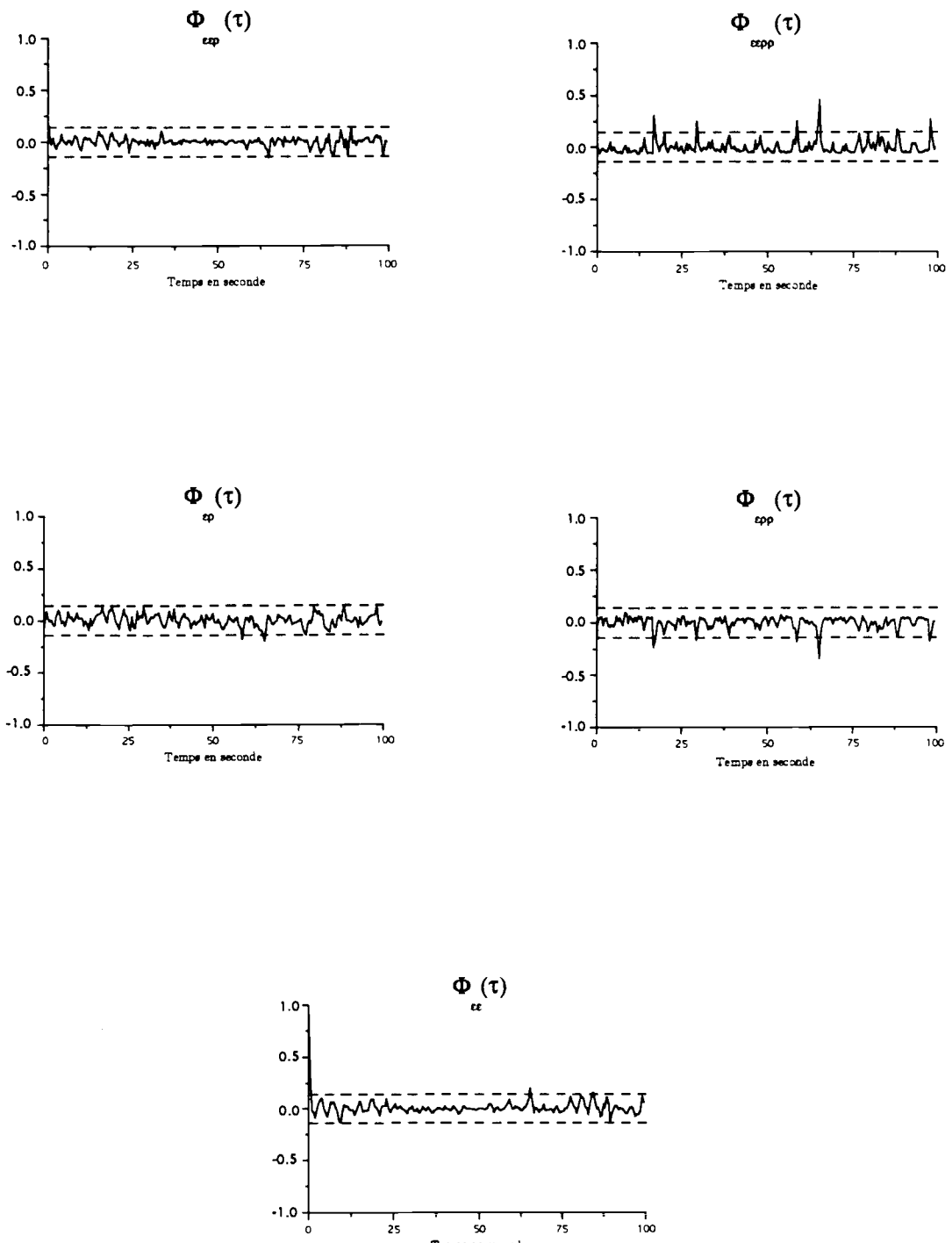


Figure 3.6: Tests sur le modèle sans terme non-linéaire.

Figure 3.7: Tests sur le modèle avec des termes linéaires et $DT = 0.5$.

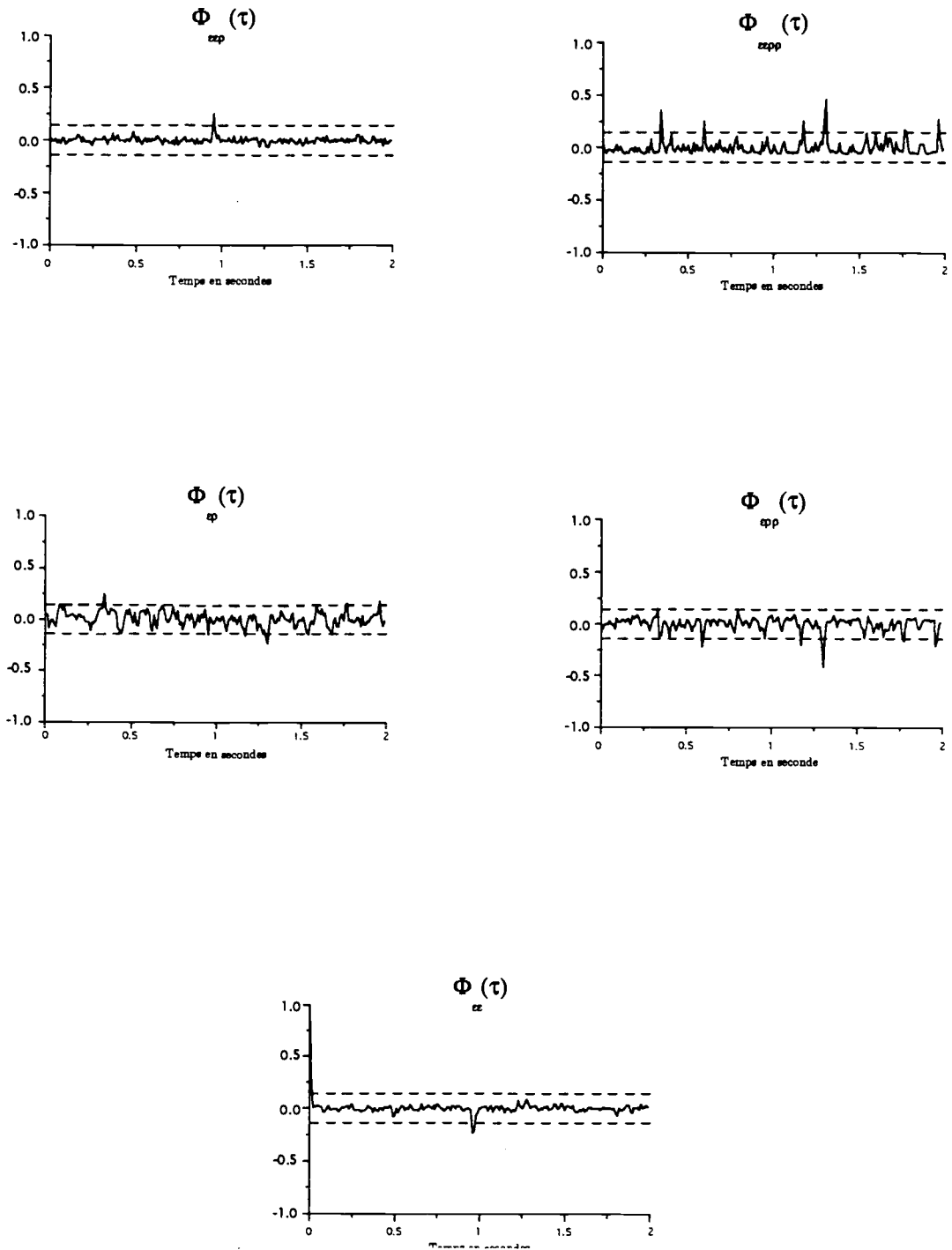


Figure 3.8: Tests sur le modèle avec des termes linéaires et $DT = 0.1$.

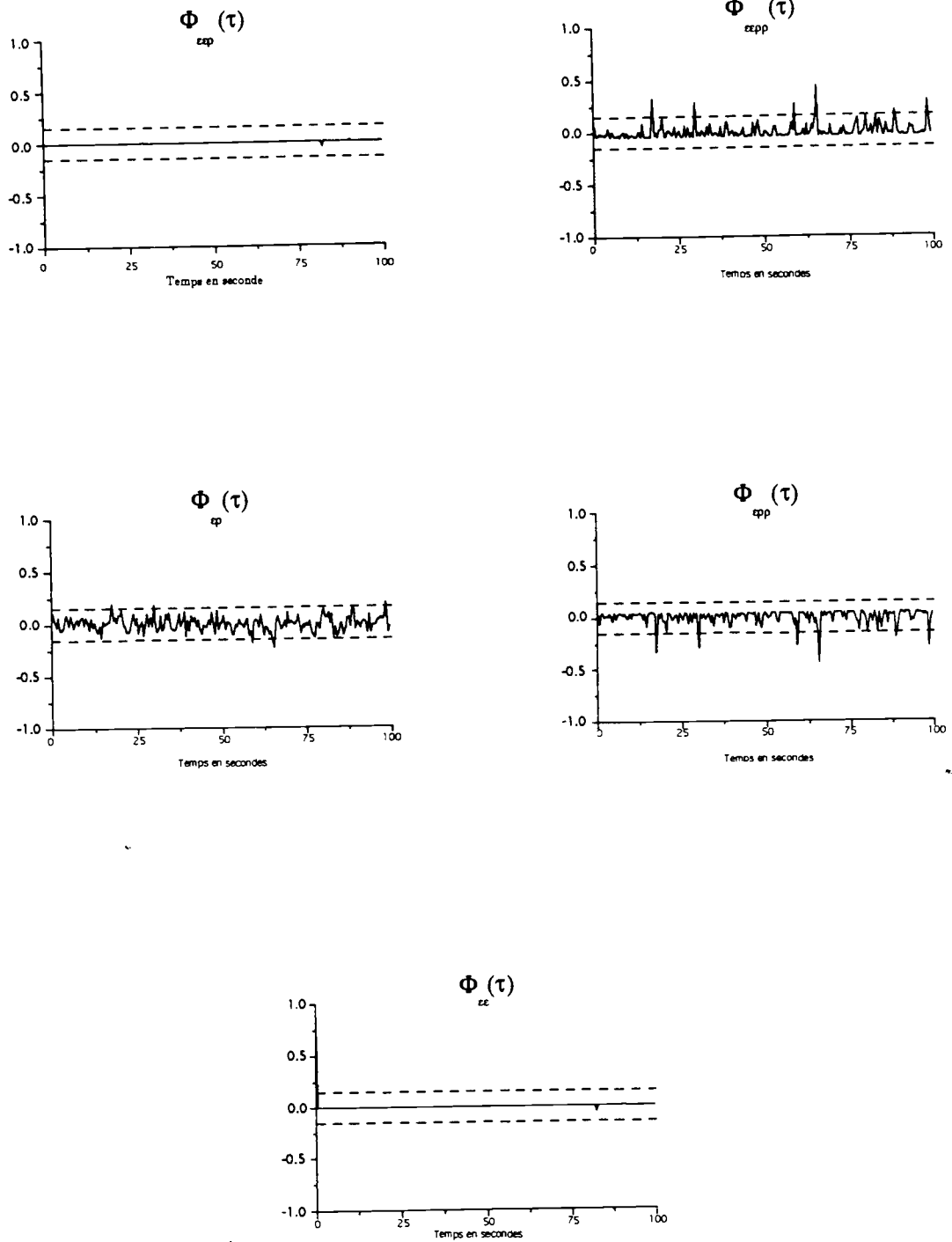


Figure 3.9: Tests sur le modèle avec des termes non-linéaires comprenant l'erreur prédictive.

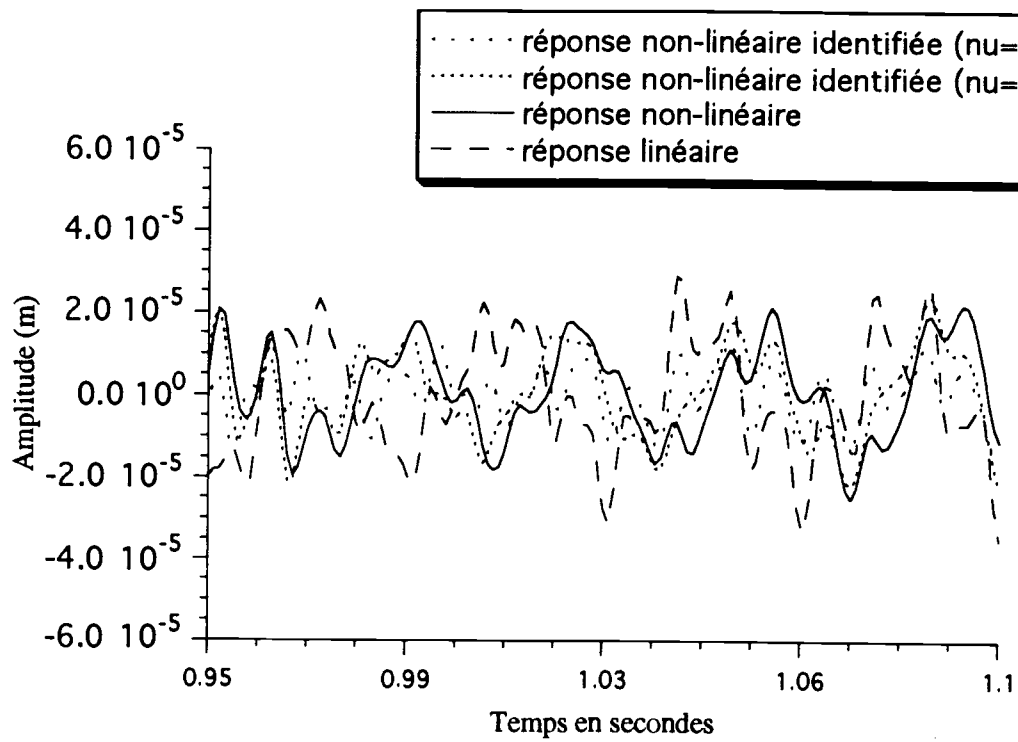


Figure 3.10: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse prise en bout.

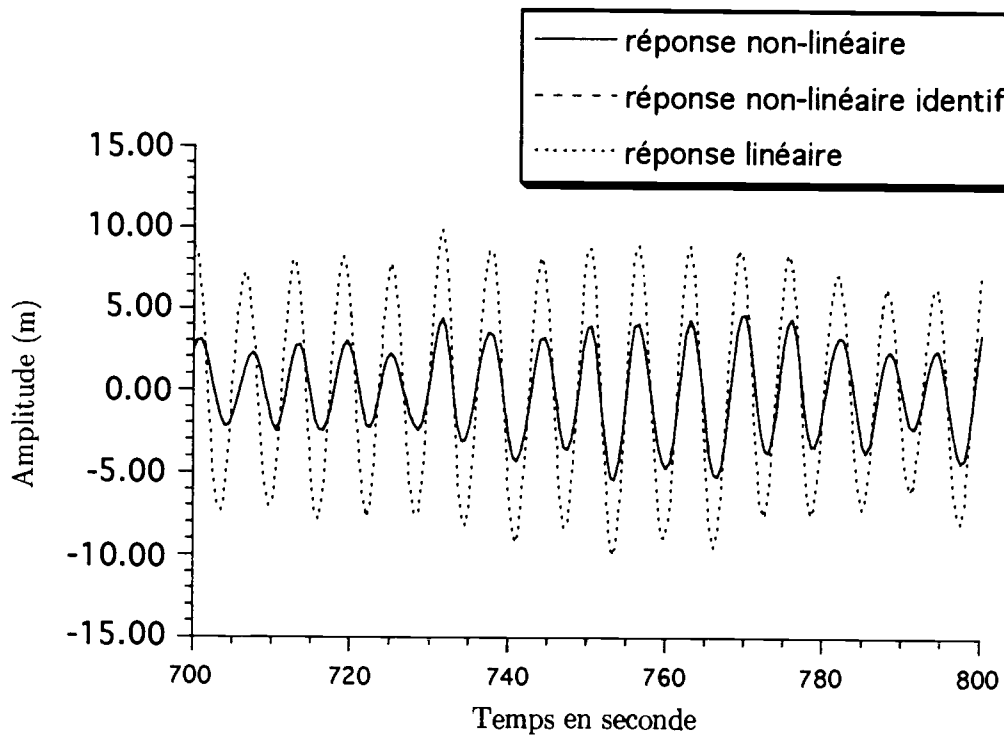


Figure 3.11: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse.

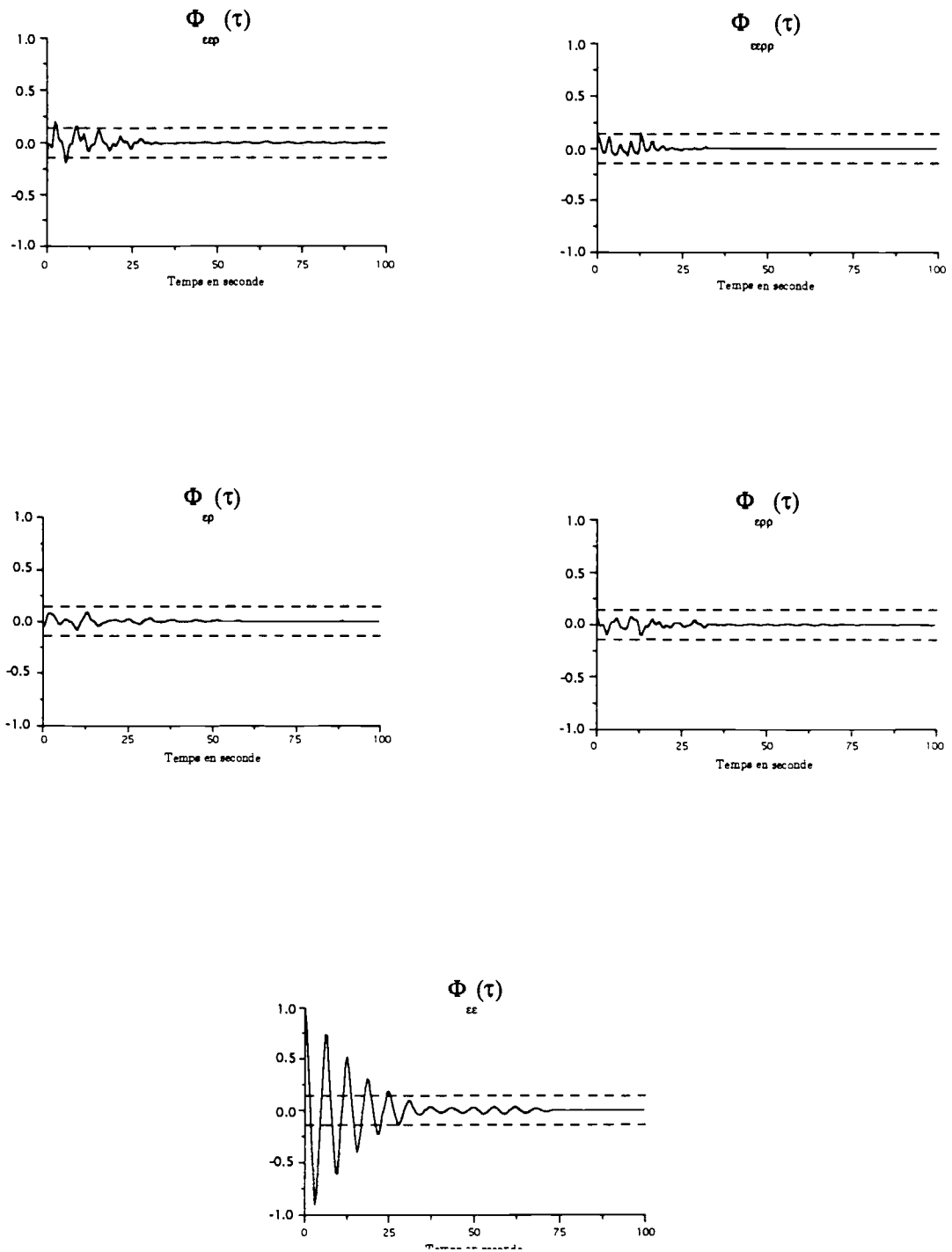


Figure 3.12: Tests sur le modèle sans terme non-linéaire.

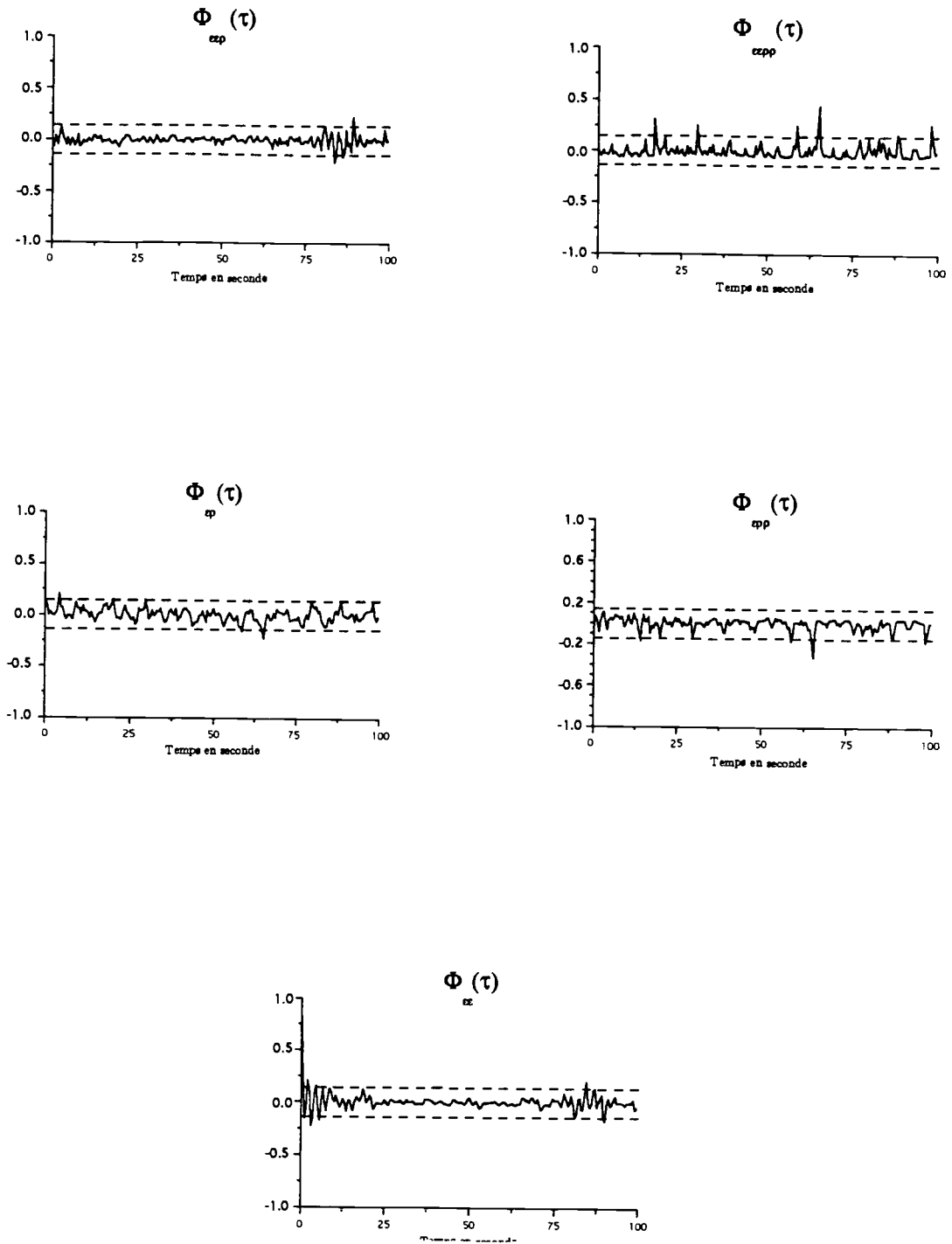


Figure 3.13: Tests sur le modèle avec des termes linéaires.

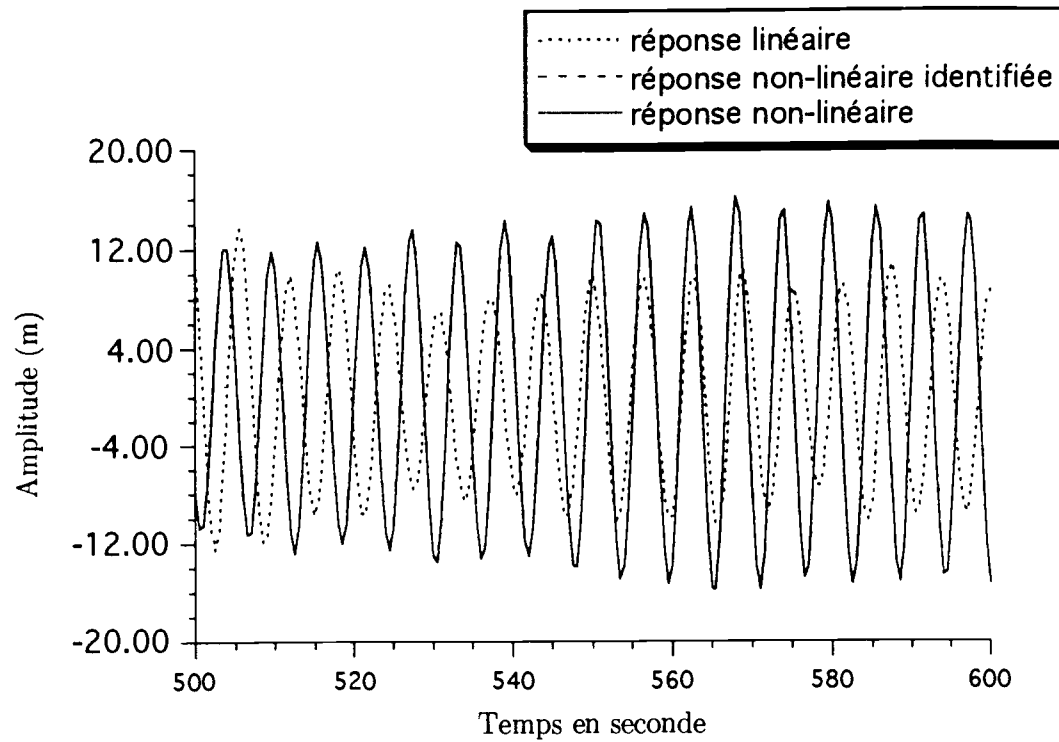
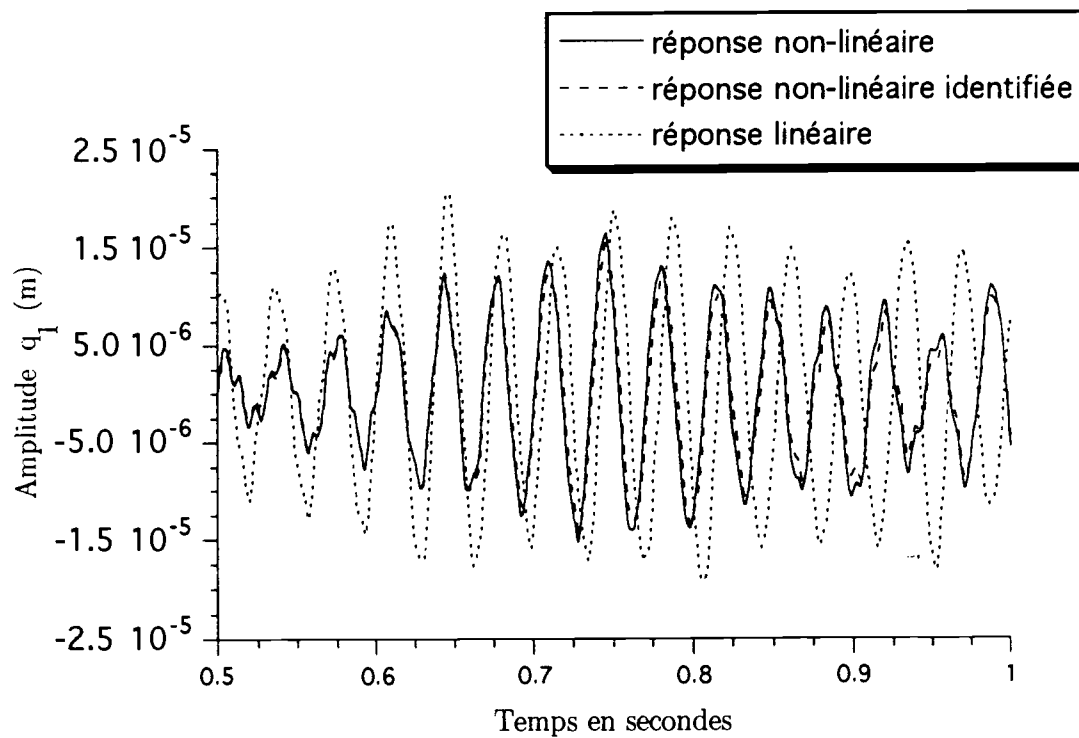


Figure 3.14: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse.

Figure 3.15: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_1 .

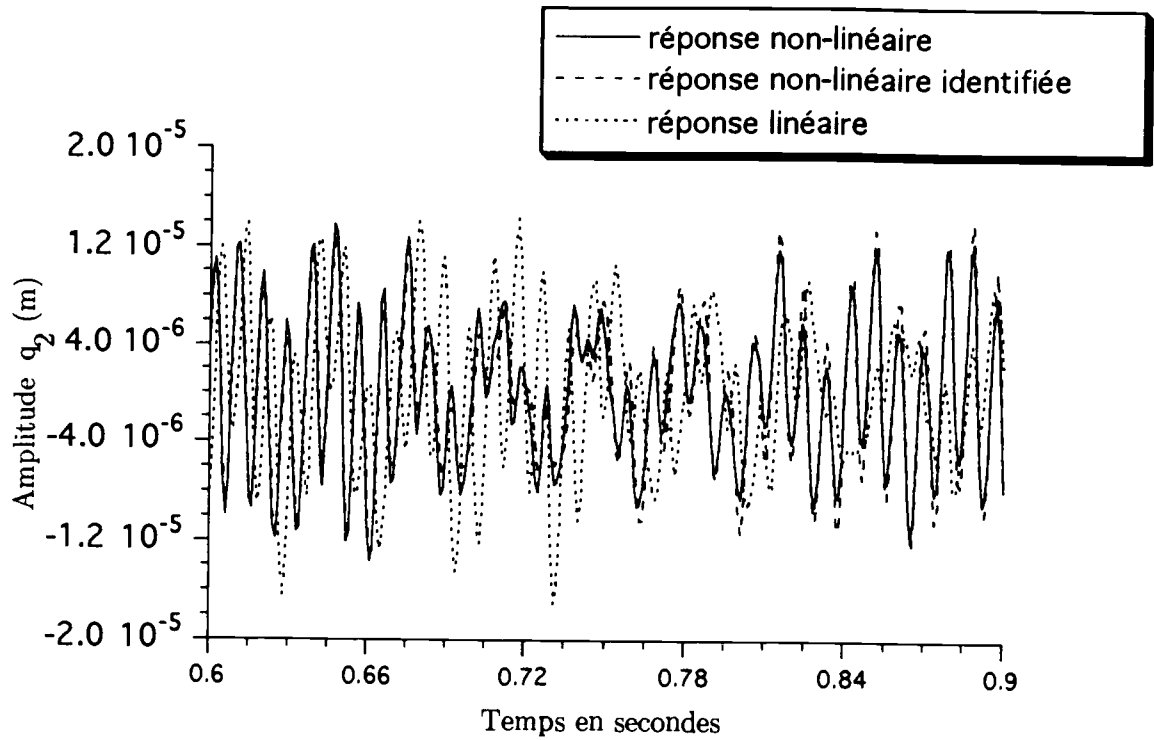


Figure 3.16: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_2 .

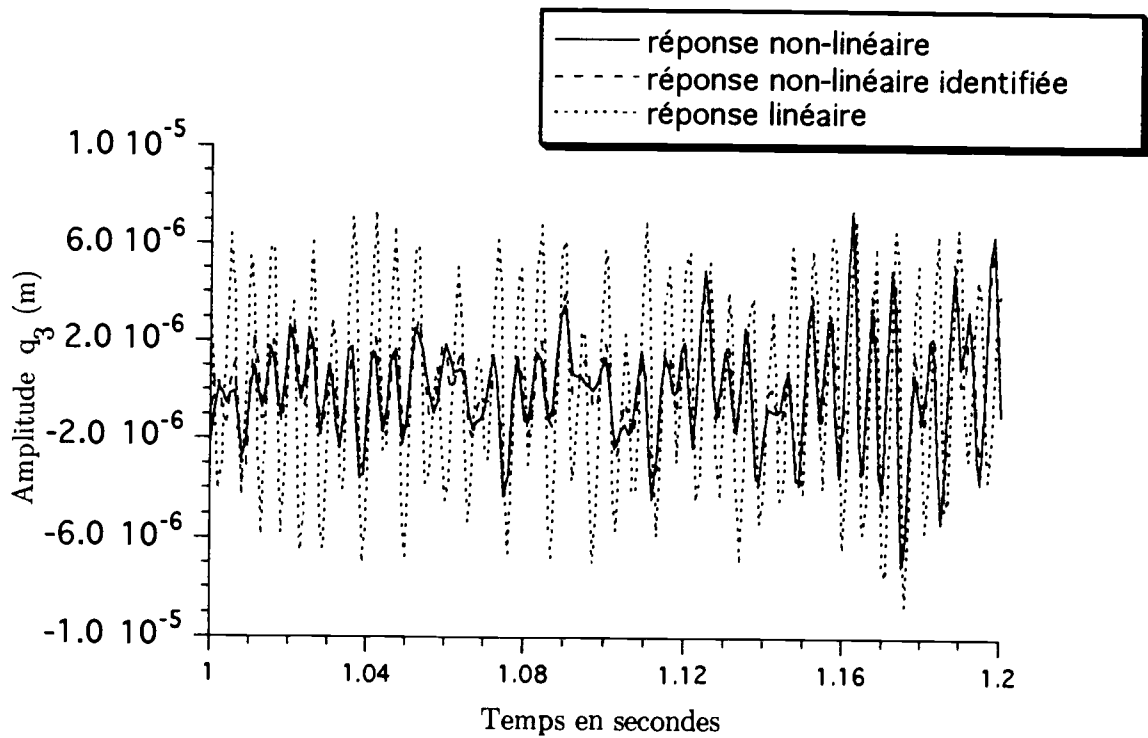


Figure 3.17: Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_3 .

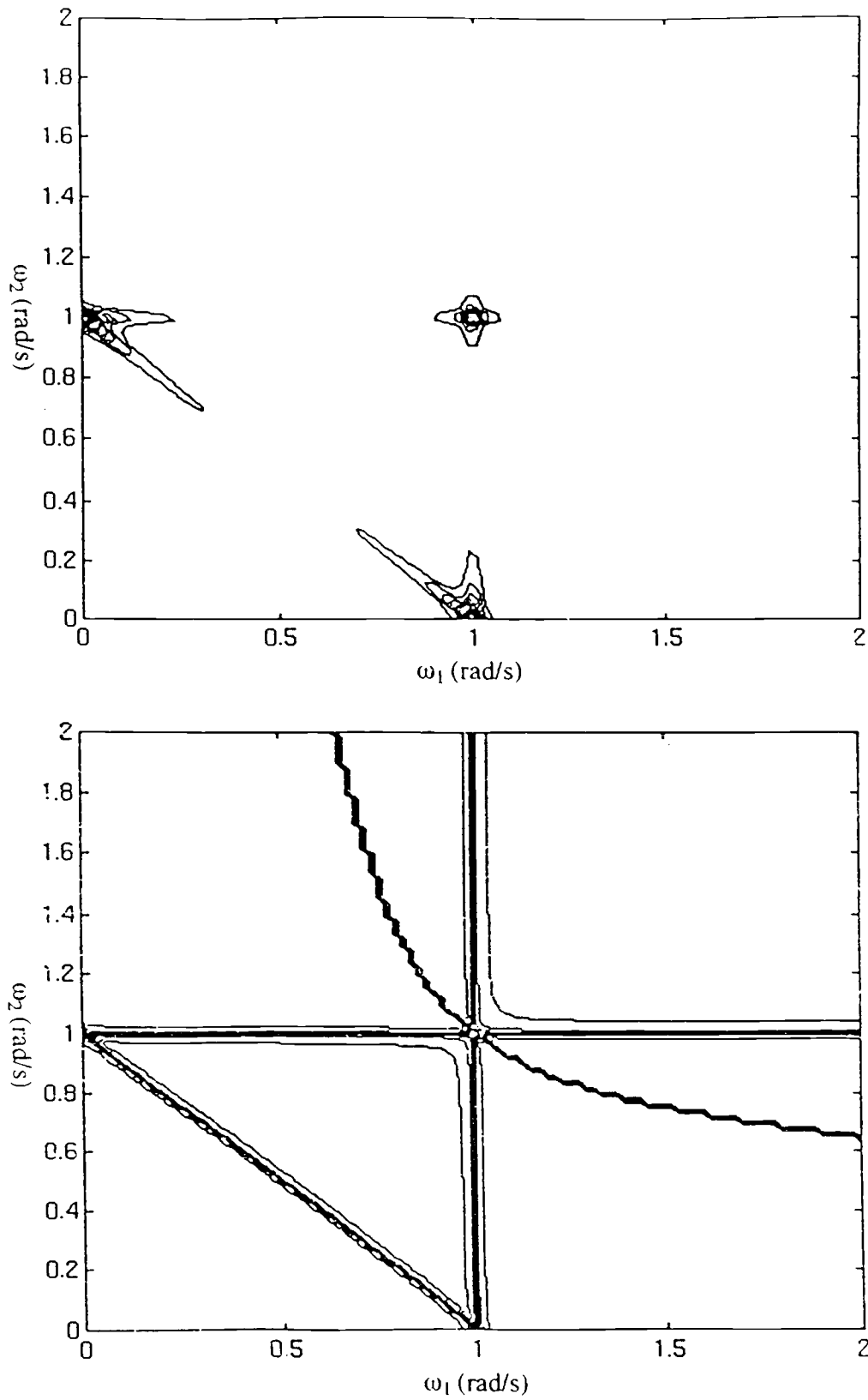


Figure 3.18: courbes iso (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié

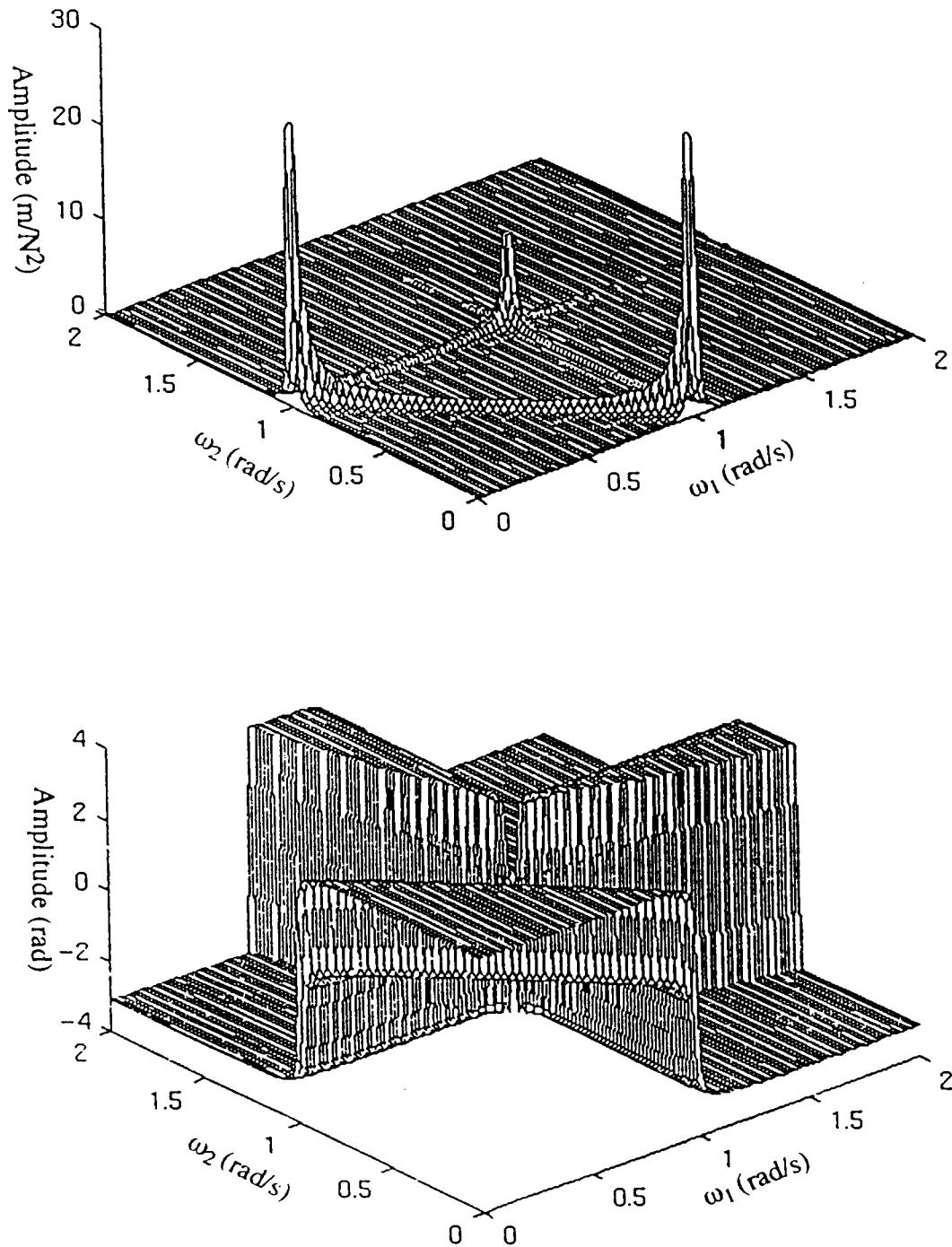


Figure 3.19: bi-spectres (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié

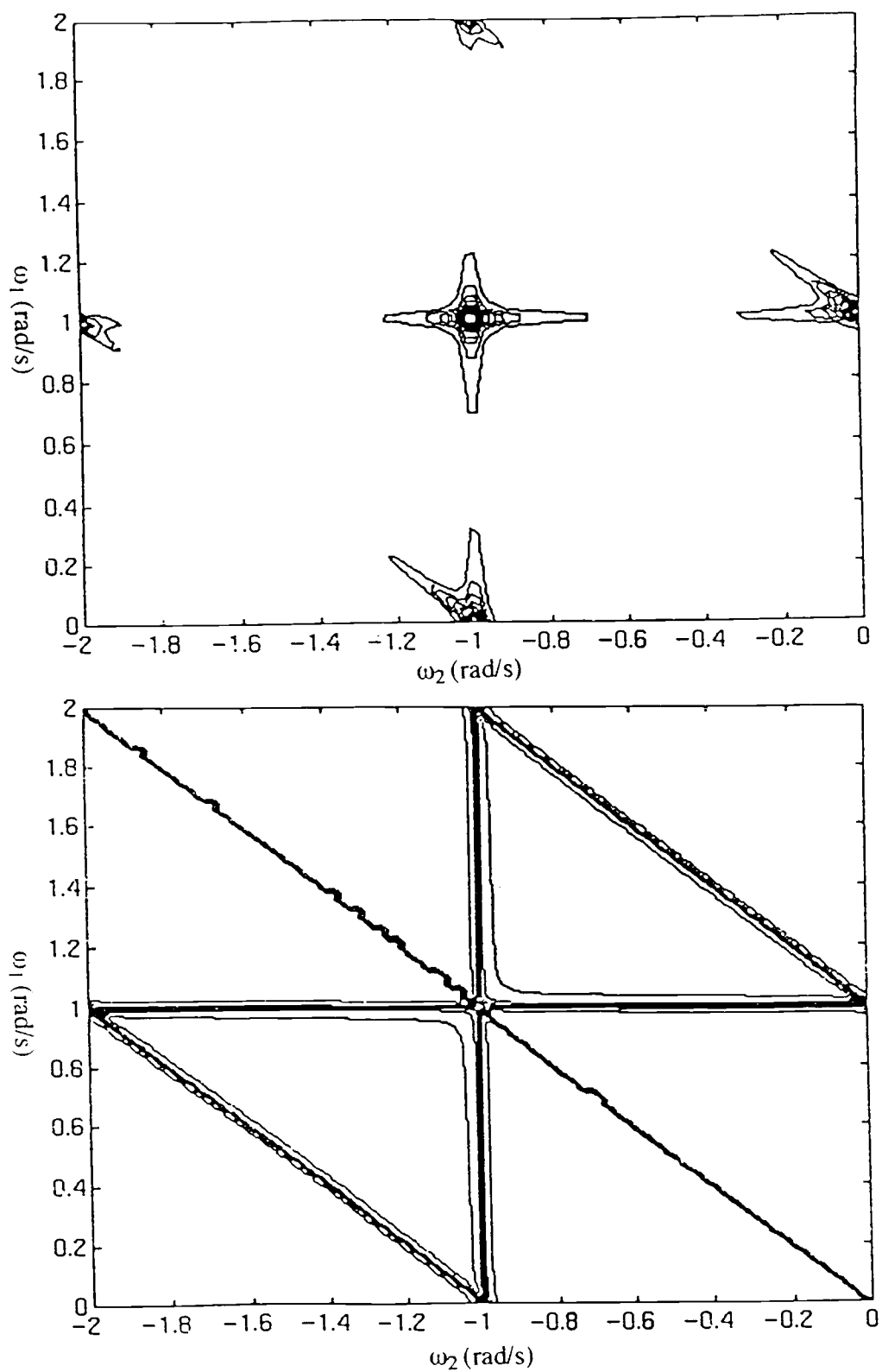


Figure 3.20: courbes iso (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié

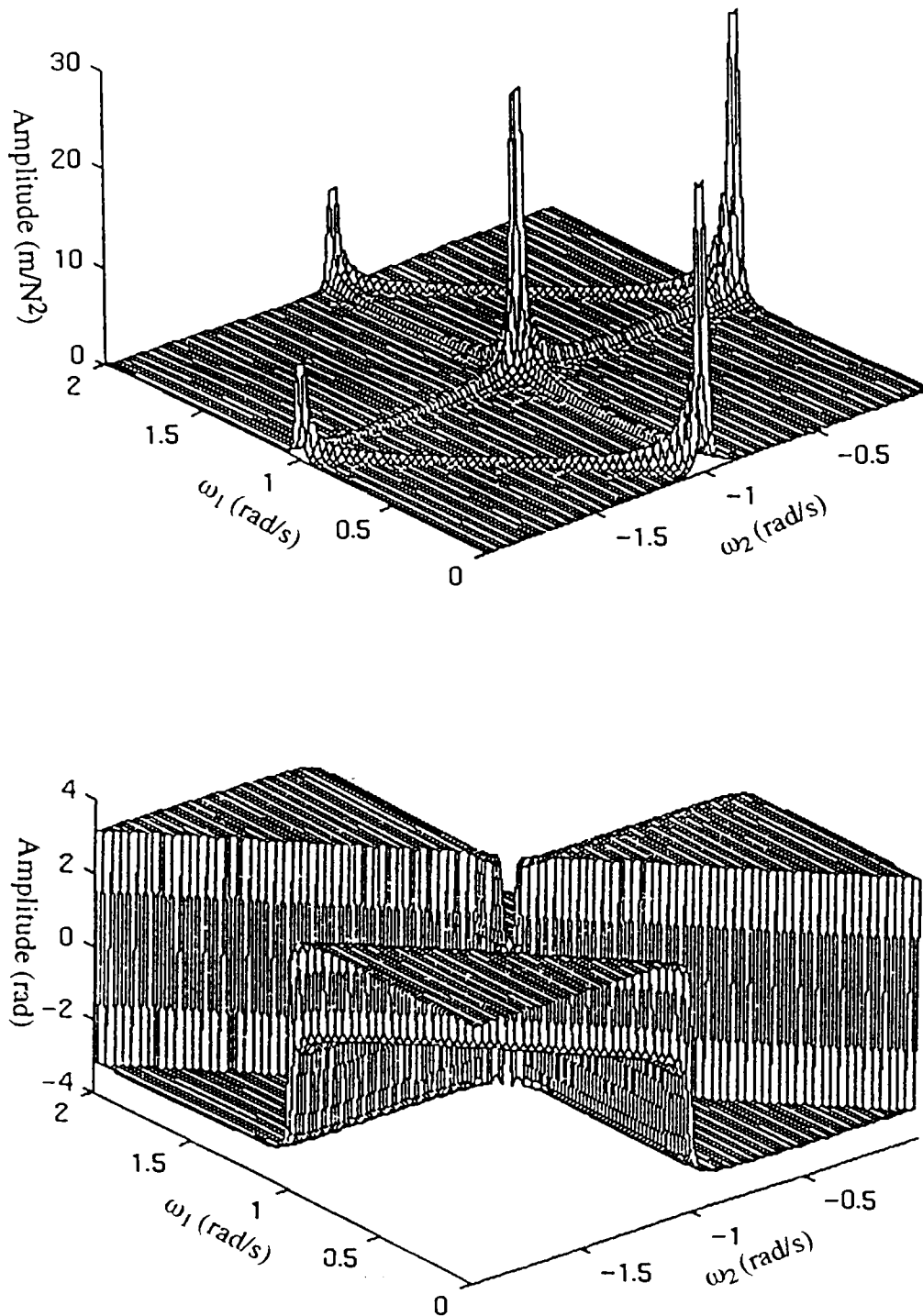


Figure 3.21: bi-spectres (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié

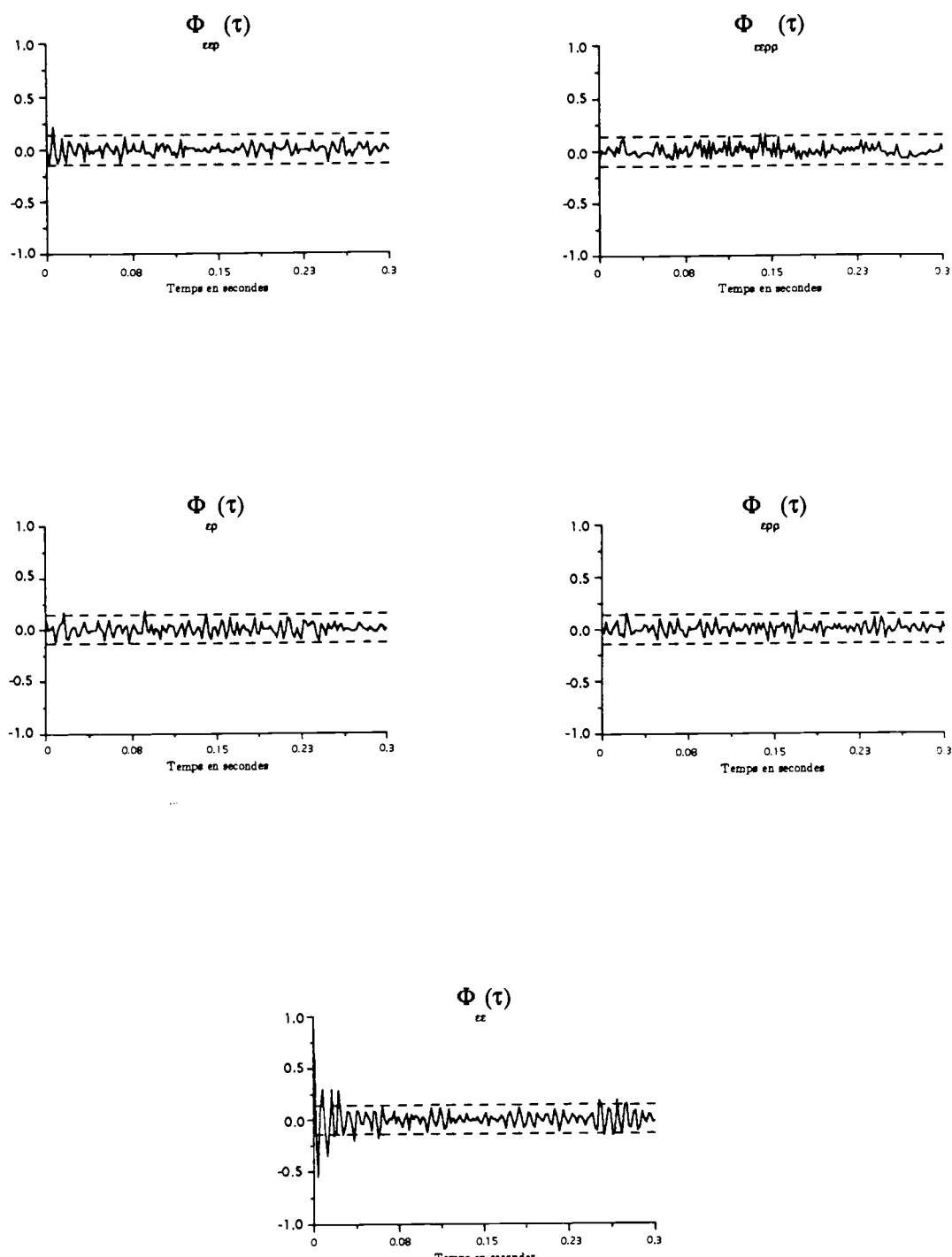


Figure 3.22: Tests sur le modèle avec des termes linéaires (poutre expérimentale mode q_1).

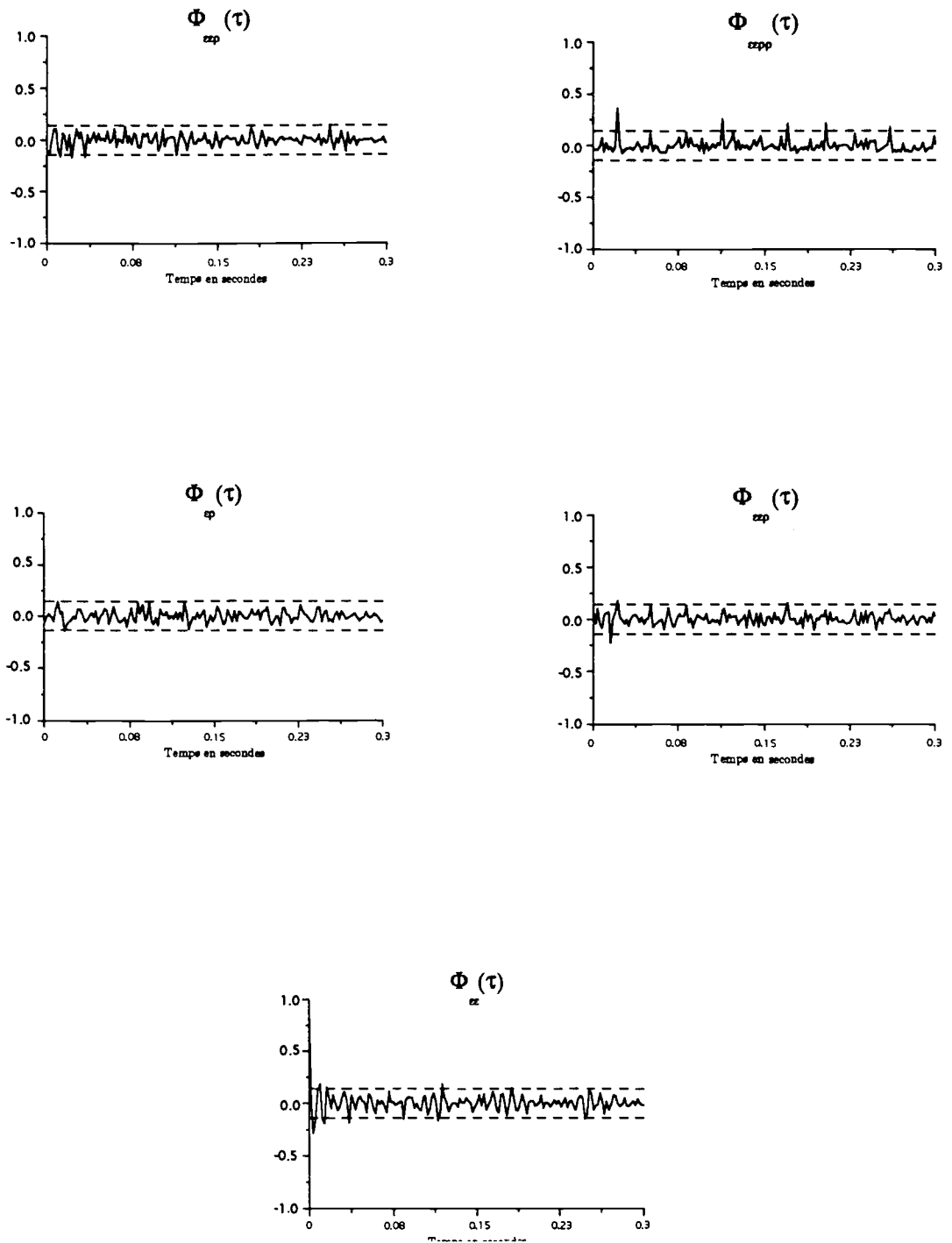
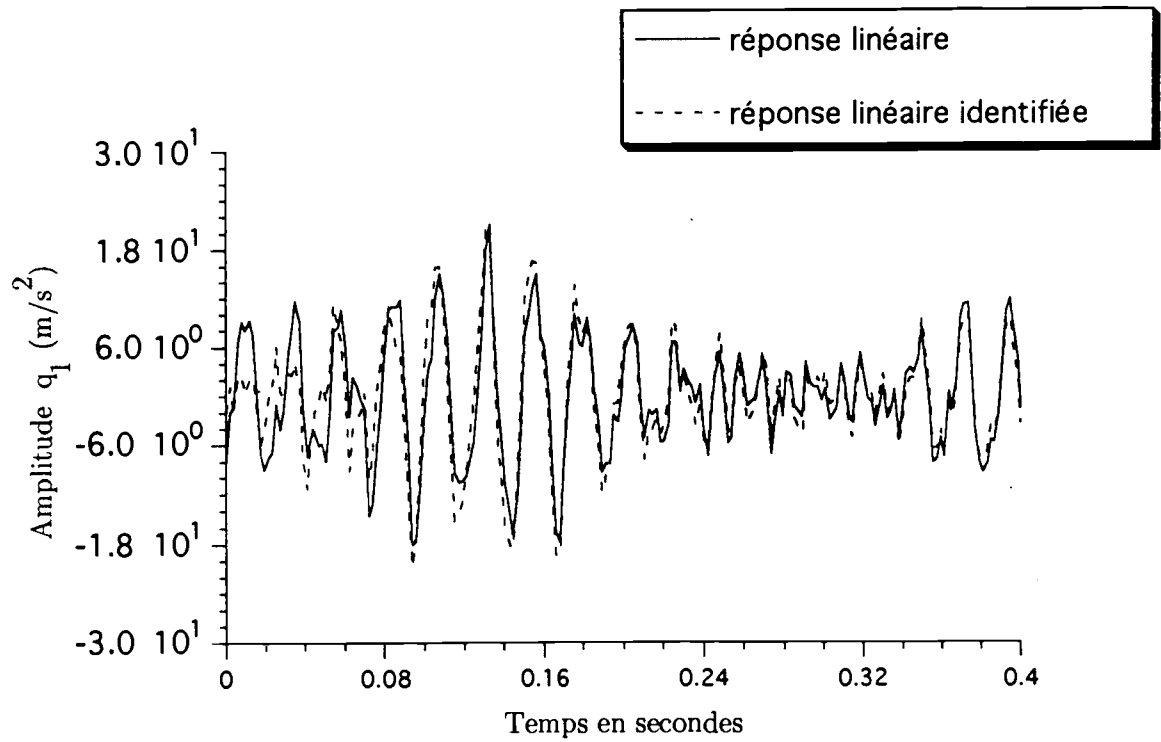
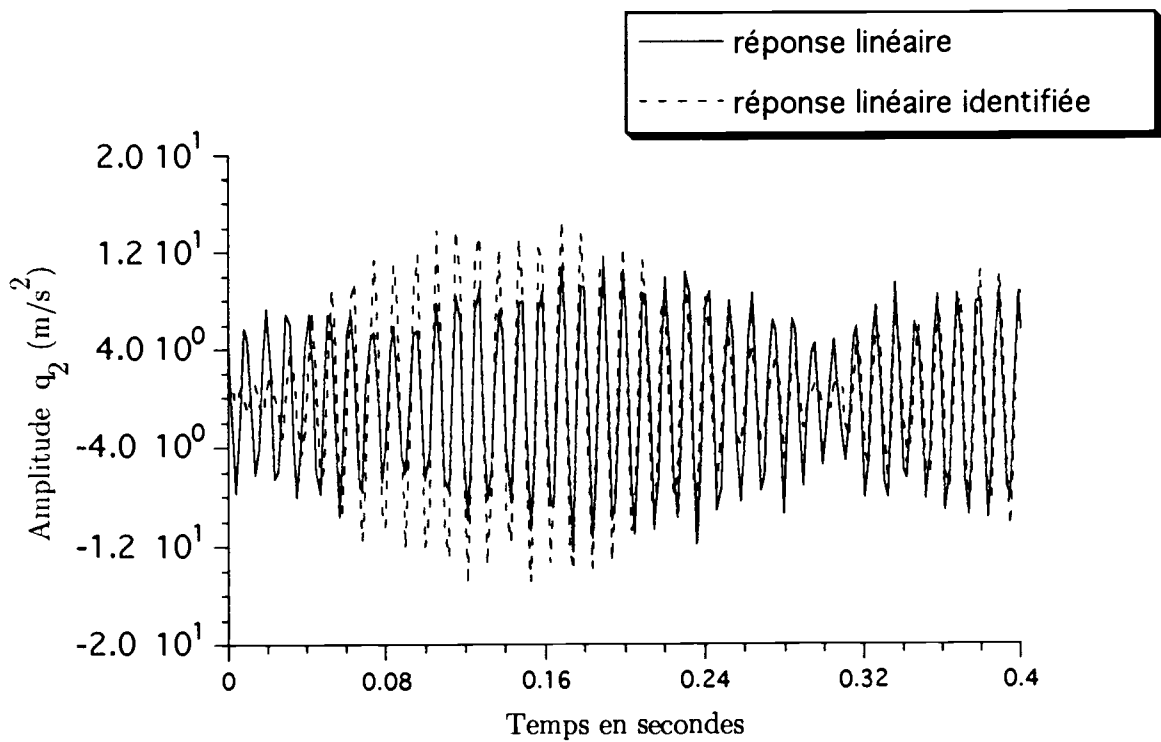


Figure 3.23: Tests sur le modèle avec des termes linéaires (poutre expérimentale mode q_1).

Figure 3.24: Comparaison pour le mode q_1 entre la réponse linéaire et identifiée.Figure 3.25: Comparaison pour le mode q_2 entre la réponse linéaire et identifiée.

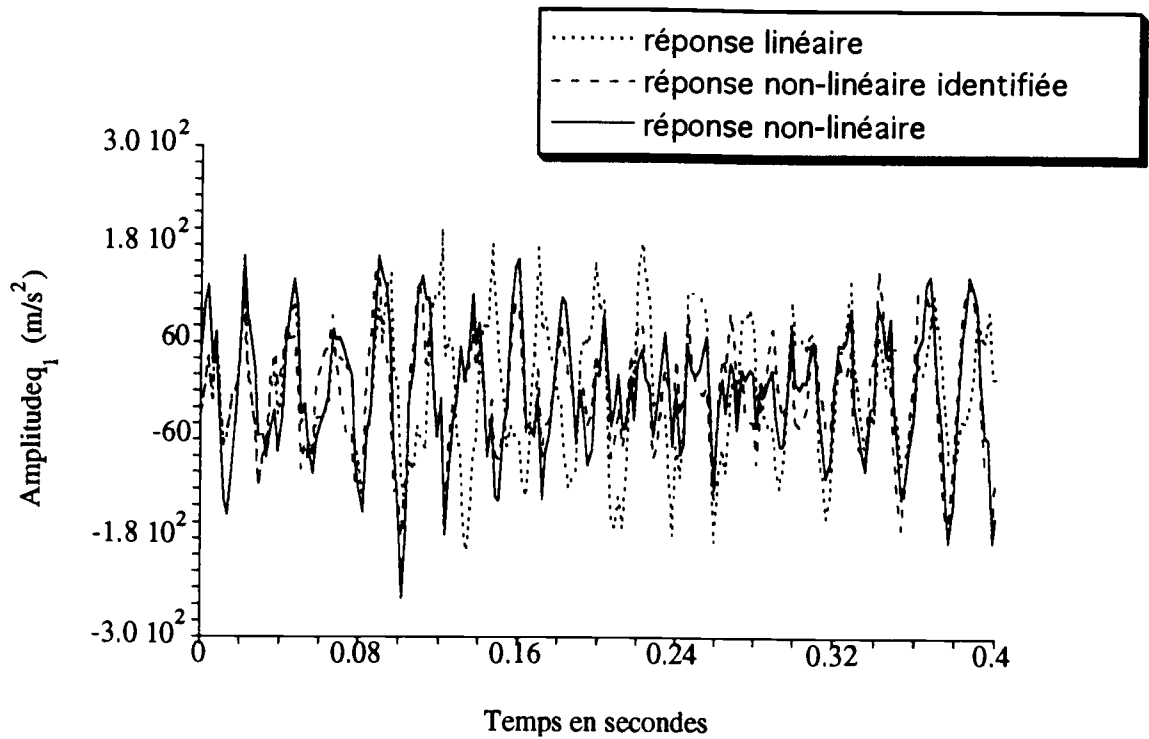


Figure 3.26: Comparaison pour le mode q_1 entre la réponse identifiée, linéaire et non-linéaire.

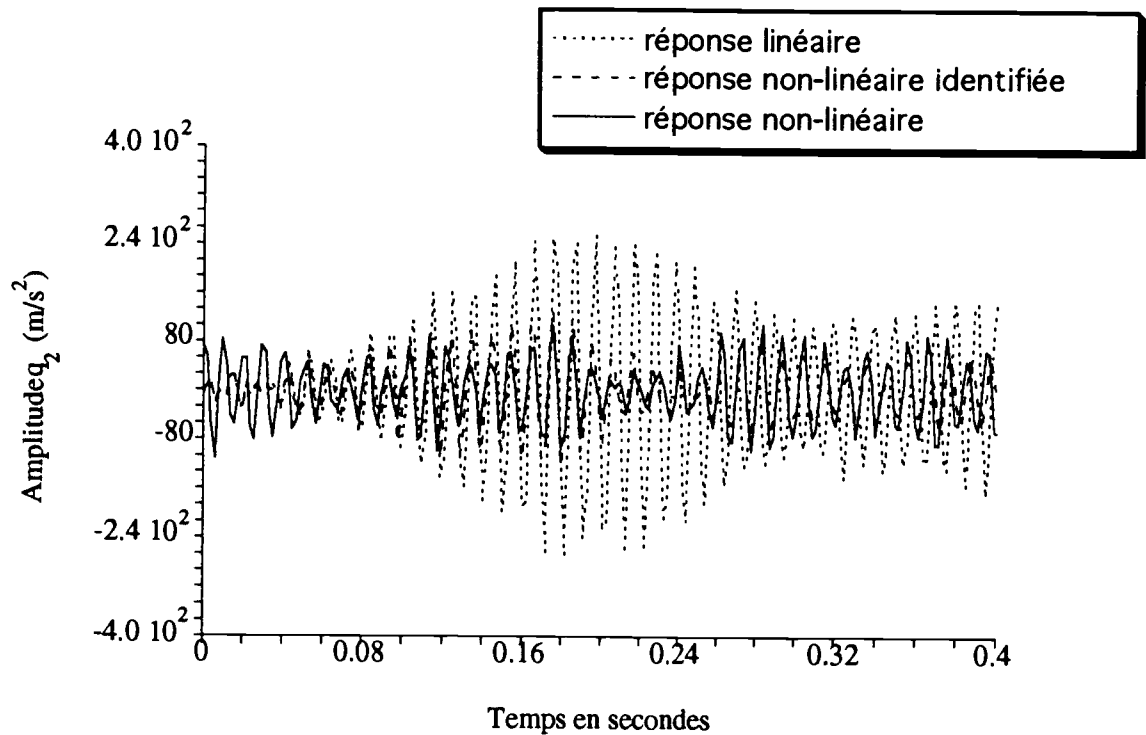


Figure 3.27: Comparaison pour le mode q_2 entre la réponse identifiée, linéaire et non-linéaire.

Chapitre 4

Méthodes non paramétriques

4.1 Introduction

La méthode non-paramétrique développée par Masri et al [93] est basée sur l'interpolation des forces internes non-linéaires. Il s'agit en fait de déterminer à l'aide d'un lissage, la force obtenue en calculant la différence entre l'excitation et les effets d'inerties. Cette technique, mono-dimensionnelle, a été étendue au cas multi-dimensionnel grâce aux travaux de Masri [57] [58]. L'intérêt d'une telle méthode, hormis le fait de pouvoir être utilisé comme une boîte noire, est de fournir des représentations tri-dimensionnelles (déplacement, vitesse) des forces internes permettant ainsi, une analyse de la nature des non-linéarités. La méthode non-paramétrique présente aussi tous les avantages des techniques orthogonales, car la force interne est calculée à l'aide d'un développement sur des fonctions orthogonales (ici des polynômes de Tchebychev) qui lui confèrent une bonne convergence. Ainsi, il est possible d'identifier le comportement de non-linéarités violentes comme des glissements ou des jeux [20]. Il est possible aussi d'appliquer une technique analogue avec des polynômes non-orthogonaux [97]. Dans ce dernier cas, l'identification de non-linéarités très complexes devient délicate, car il est alors nécessaire d'avoir beaucoup de fonctions ce qui rend ce type de calcul difficile. L'un des inconvénients majeurs de cette technique réside dans la répartition et l'utilisation des points expérimentaux. En effet, il est nécessaire d'avoir un remplissage uniforme du plan des phases pour que l'interpolation soit possible. Nous présenterons ici une méthode qui permet l'utilisation des résultats expérimentaux dans des zones à faibles densités de points. Cette démarche d'extrapolation de l'information développée par Argoul et Jezequel [65] a été améliorée en ajoutant une technique de prolongement analytique et d'optimisation. Deux applications de cette méthode ont été faites : l'une numérique, sur un oscillateur de Van der Pol, qui a permis de montrer tout l'intérêt de la technique et l'amélioration apportée par la nouvelle méthode d'extrapolation,

et l'autre sur un amortisseur à câble qui présente de fortes caractéristiques non-linéaires en raideur et en amortissement.

4.2 Méthode de Caughey et Masri

Cette méthode est basée sur un développement de la non-linéarité sur les polynômes de Tchebychev. Elle permet l'identification et la détection des non-linéarités. Cette technique est applicable aux problèmes multi-dimensionnels et à des non-linéarités quelconques à l'exception des phénomènes à mémoire. L'utilisation dans un cadre multi-dimensionnel nécessitera de travailler avec les coordonnées généralisées, afin de découpler le plus possible les équations de la dynamique. Il est donc impératif de connaître la base modale, que l'on obtiendra à l'aide d'un essai à faible niveau. Cet essai permettra aussi de calculer les masses généralisées indispensables au calcul de la différence entre l'excitation et l'effet d'inertie.

4.2.1 Base théorique

Nous supposons que le système dynamique étudié peut se mettre sous la forme suivant:

$$F(X, \dot{X}) = P(t) - M\ddot{X} \quad (4.1)$$

où $F(X, \dot{X})$: représente les forces internes à identifier
 $P(t)$: vecteur force d'excitation
 M : matrice de masse
 X : vecteur déplacement

Le passage en base modale permet d'écrire :

$$h(U, \dot{U}) = f(t) - \ddot{U} \quad (4.2)$$

où $h = \Psi^t F$
 $f = \Psi^t P$
 $X = \Psi U$
 $\Psi =$ base modale normalisée par rapport à M

L'utilisation d'une écriture en base modale est surtout utile lorsque la méthode est employée dans un cadre multidimensionnel, car elle assure une meilleure perte de connectivité entre les variables du problème (ici les coordonnées généralisées).

4.2.2 Cas mono-dimensionnel

Cette méthode d'identification mono-dimensionnelle suppose que $h(U, \dot{U})$ admet une représentation par les polynômes de Tchebychev. On développera alors, h de la manière

s suivante :

$$h(U, \dot{U}) = \tilde{h}(s, \dot{s}) = \sum_{k=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N_b} C_{kl} T_k(s) T_l(\dot{s}) \quad (4.3)$$

Où T_k représente le polynôme de Tchebychev d'ordre k et s est la variable normalisée par rapport à U .

$$s = \frac{2U - U_{max} - U_{min}}{U_{max} - U_{min}} \quad \text{et} \quad \dot{s} = \frac{2\dot{U} - \dot{U}_{max} - \dot{U}_{min}}{\dot{U}_{max} - \dot{U}_{min}} \quad (4.4)$$

Le calcul des C_{kl} se fait en exploitant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Tchebychev soit :

$$C_{kl} = \frac{4}{(\delta_{0l} + 1)(\delta_{0k} + 1)\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{h}(s, \dot{s}) T_k(s) T_l(\dot{s}) \omega(s) \omega(\dot{s}) ds d\dot{s} \quad (4.5)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \quad \text{pour } s \in [-1, 1] \quad (4.6)$$

Le calcul des intégrales de l'équation 4.5 sera effectué en utilisant une méthode de quadrature de Gauss-Tchebychev où les points de Tchebychev auront pour coordonnées P_{ij} ($i = 1, \dots, M_a$ et $j = 1, \dots, M_b$) :

$$P_{ij} = (s_i, \dot{s}_j) \quad (4.7)$$

$$s_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2M_a}\pi\right) \quad (4.8)$$

$$\dot{s}_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2M_b}\pi\right) \quad (4.9)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$C_{kl} = \frac{4}{(\delta_{0l} + 1)(\delta_{0k} + 1)M_a M_b} \sum_{i=1}^{M_a} \sum_{j=1}^{M_b} \tilde{h}(P_{ij}) \cos\left(k\frac{2i-1}{2M_a}\pi\right) \cos\left(l\frac{2j-1}{2M_b}\pi\right) \quad (4.10)$$

L'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss-Tchebychev présente l'avantage de rendre exacte la relation 4.10 lorsque, h est un polynôme de degré $(2M_a - 1 - k)$ pour la variable s_i et de degré $(2M_b - 1 - l)$ pour la variable \dot{s}_j . On peut constater que le calcul de l'équation 4.10 nécessite l'acquisition des $\tilde{h}(P_{ij})$ où les P_{ij} sont des points de calculs à priori différents des points expérimentaux. Leurs calculs nécessiteront donc une technique d'interpolation utilisant les résultats issus de l'expérience.

Cas multi-dimensionnel

Le calcul de h dans un cadre multi-dimensionnel se fera de manière itérative. Ainsi, on commencera par interpoler h par rapport aux variables (u_i, \dot{u}_j) , comme dans la méthode mono-dimensionnelle, ce qui donnera une première estimation de h que l'on notera h_1 . Puis on interpolera le résidu $h(U, \dot{U}) - \sum \sum h_1(u_i, \dot{u}_j)$ par rapport aux variables (u_i, u_j)

que l'on notera à son tour h_2 , pour finir une interpolation de $h(U, \dot{U}) - \sum \sum h_1(u_i, \dot{u}_j) - \sum \sum h_2(u_i, u_j)$ sera fait par rapport aux variables (\dot{u}_i, \dot{u}_j) , qui sera notée h_3 . Cette opération se répétera jusqu'à ce que les n premières coordonnées généralisées vérifient :

$$\| h(U, \dot{U}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (h_1(u_i, \dot{u}_j) + h_2(u_i, u_j) + h_3(\dot{u}_i, \dot{u}_j)) \| < \epsilon \quad (4.11)$$

Où ϵ représente la précision désirée sur l'interpolation de h et $\| \|$ une norme définie sur les points expérimentaux. Il est à noter que certaines non linéarités comme $u_i u_j u_k$ (pour $i \neq j \neq k$) ne pourront pas être interpolées par notre modèle. Ce type de non linéarité sera supposé alors faible, ce qui est en général le cas. On pourra remarquer ici l'importance du choix de la base modale, qui diminue la connectivité des variables généralisées entre elles. Ceci permet de rapprocher notre étude aux cas de plusieurs problèmes monodimensionnels, validant ainsi l'hypothèse selon laquelle certains termes non-linéaires sont faibles. De même, on pourra noter que l'ordre dans lequel se fait les interpolations successives peut influencer sur la qualité de l'identification de $h(U, \dot{U})$. Il reste maintenant à replacer cette méthode dans un contexte expérimental, et à établir les interpolations et extrapolations nécessaires à une utilisation optimale des données.

4.2.3 Interpolation des P_{ij}

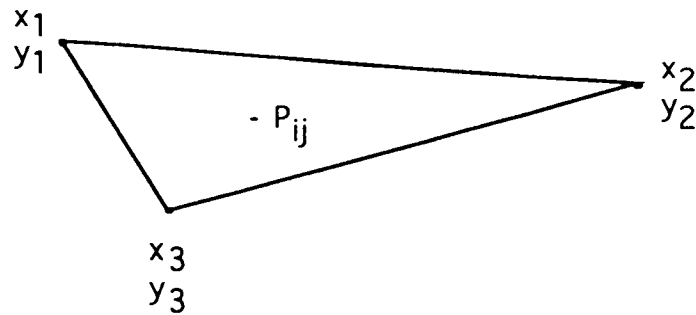
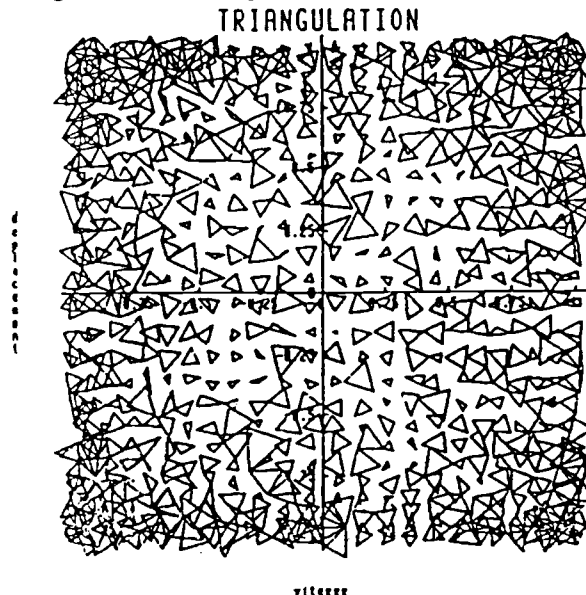
La procédure d'interpolation a pour but de déterminer $h(P_{ij})$ à l'aide des points expérimentaux. On choisira donc un domaine $\Omega_1 \subset [U_{min}, U_{max}] \times [\dot{U}_{min}, \dot{U}_{max}]$ tel que chaque P_{ij} puisse être compris dans un triangle dont les sommets sont des points expérimentaux et dont la taille est minimum (figure 4.1). Puis l'on déterminera par interpolation linéaire la valeur de $h(P_{ij})$ en écrivant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h(P_1) \\ h(P_2) \\ h(P_3) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

où $(P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3)$ sont les coordonnées des trois sommets du triangle. Ce qui permet d'écrire :

$$h(P_{ij}) = a s_i + b s_j + c \quad (4.13)$$

La triangulation de tous les P_{ij} une fois réalisée (figure 4.2), il est possible d'estimer h sur le domaine Ω_1 (notée h/Ω_1) grâce aux équations 4.10 et 4.3. D'autres types d'interpolation sont envisageables, ainsi Tomlinson et Worden [45] proposent une technique sophistiquée basée sur un arrangement en mosaïques de Dirichlet associé à une triangulation de Delaunay du domaine interpolable Ω_1 . Ces méthodes d'interpolation

Figure 4.1: Triangulation pour le calcul des P_{ij} .Figure 4.2: Triangulation du domaine Ω_1 pour l'amortisseur

n'exploitent pas tous les points expérimentaux. Il est donc nécessaire d'envisager un calcul de h/Ω_2 où $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset [U_{min}, U_{max}] \times [\dot{U}_{min}, \dot{U}_{max}]$, qui ne sera possible que par une procédure d'extrapolation. Cette procédure ayant pour but de palier au manque de certains points expérimentaux qui empêchent la triangulation de tous les P_{ij} .

4.2.4 Extrapolation des P_{ij}

Si on veut exploiter l'information contenue dans tous les points expérimentaux, il faut être capable de calculer h/Ω . Pour cela, on utilisera une procédure d'extrapolation de h/Ω_{i+1} à l'aide des résultats obtenus sur h/Ω_i (où $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_i \subset \Omega_{i+1} \subset \dots \subset \Omega$) pour remplacer les éventuels points $h(P_{ij})$ qui n'ont pu être interpolés par des points expérimentaux. Ces valeurs de h correspondent à des points où il n'est pas possible de trouver un triangle recouvrant P_{ij} . On proposera ici trois techniques d'extrapolation : la première basée sur un prolongement à pas constants (méthode d'Argoul et Jezequel [65]), la deuxième utilisant un prolongement analytique, et enfin la dernière qui sera une formulation mixte

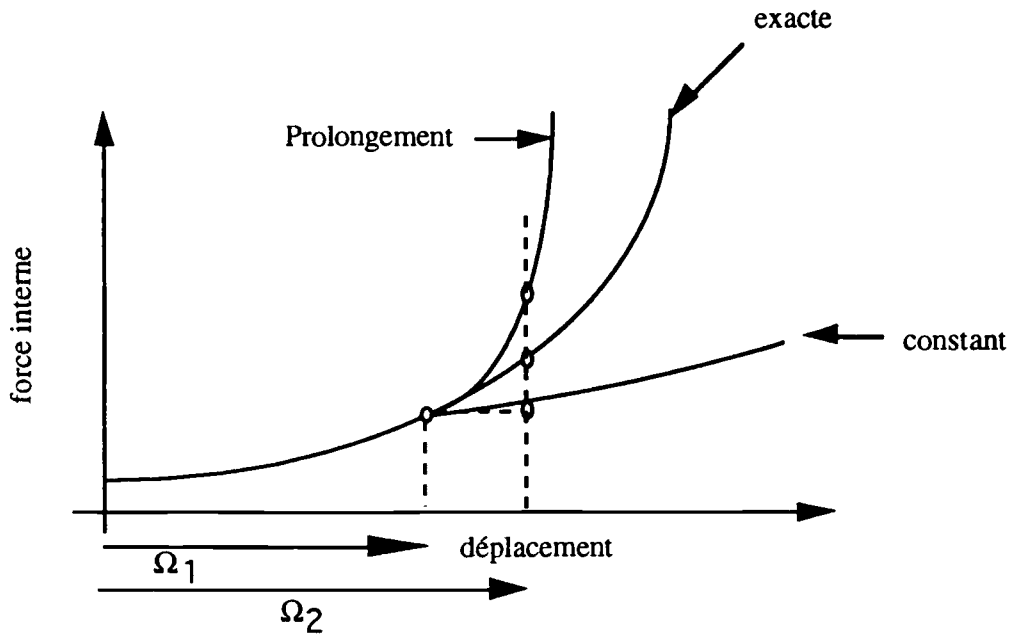


Figure 4.3: Prolongement constant et analytique.

des deux méthodes précédentes.

Méthode à pas constant

Cette technique a pour but de remplacer les $h/\Omega_{k+1}(P_{ij})$ inconnus par $h/\Omega_k(P_{ij})$. Une telle démarche donne de bons résultats dans la mesure où la quantité de points à extrapoler n'est pas trop grande. Par contre, elle n'exploite pas la tendance naturelle de la courbe sur les bords du domaine.

Méthode par prolongement analytique

Ici, on veut se servir de la fonction de $h/\Omega_k(P_{ij})$ pour la prolonger dans Ω_{k+1} aux points P_{ij} inconnus. Une telle procédure n'est pas possible directement car les polynômes de Tchebychev ne sont pas définis en dehors de $[-1, 1]$. On procédera donc à une réécriture des polynômes de Tchebychev dans la base polynomiale qu'on prolongera en dehors de $[-1, 1]$. On écrira donc que :

$$T_n(x) = x^n - C_2^n x^{n-2}(1-x^2) + C_4^n x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots \quad (4.14)$$

L'extrapolation se fera en disant qu'au point $P_{ij} \in \Omega_{k+1}$ on a :

$$h/\Omega_{k+1}(P_{ij}) = \hat{h}/\Omega_k(P_{ij}) \quad (4.15)$$

où $\hat{h}/\Omega_k(P_{ij})$ est l'expression de $h/\Omega_k(P_{ij})$ dans la base polynomiale dont le domaine de définition sera supposé supérieur à $[-1, 1]^2$. Dans cette méthode, on conserve la tendance la courbe lors de l'extrapolation. Mais des phénomènes de divergence risquent d'apparaître si l'extrapolation doit se faire sur des points très éloignés des points interpolés.

Méthode mixte

Cette méthode a pour but de combiner les avantages des deux précédentes (figure 4.3). En effet, la méthode de prolongement analytique étant plus proche de la solution, mais présentant des risques de divergences (h_a), elle sera stabilisée par la méthode de prolongement à pas constants (h_b). On formulera le problème mixte sous la forme :

$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{h(P_k) - \alpha \hat{h}_a/\Omega_{i+1}(P_k) - \beta \hat{h}_b/\Omega_{i+1}(P_k)}{h(P_k)} \right| \quad (4.16)$$

On notera :

$$E_{1k} = \frac{\hat{h}_a/\Omega_{i+1}}{h(P_k)} \quad \text{et} \quad E_{2k} = \frac{\hat{h}_b/\Omega_{i+1}}{h(P_k)} \quad (4.17)$$

Le minimum de $J(\alpha, \beta)$ assure le meilleur compromis entre les deux formulations. L'algorithme de minimisation s'écrira alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \alpha} & \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 J}{\partial \beta \partial \beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial J / \partial \alpha \\ \partial J / \partial \beta \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\partial J / \partial \alpha = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{1k} \text{signe}(1 - \alpha E_{1k} - \beta E_{2k}) \quad (4.19)$$

$$\partial J / \partial \beta = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{2k} \text{signe}(1 - \alpha E_{1k} - \beta E_{2k}) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \alpha} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E_{1k}^2 / |1 - \alpha E_{1k} - \beta E_{2k}| \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta \partial \alpha} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E_{1k} E_{2k} / |1 - \alpha E_{1k} - \beta E_{2k}| \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta \partial \beta} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N E_{2k}^2 / |1 - \alpha E_{1k} - \beta E_{2k}| \quad (4.23)$$

Une autre forme de la fonctionnelle J à minimiser est envisageable, ainsi on aurait pu prendre l'écart quadratique ce qui reviendrait à une procédure de moindres carrés. Il reste maintenant à appliquer cette méthode sur exemple, afin de valider les développements faits précédemment. On notera que cette minimisation fait appel à tous les points expérimentaux N , ce qui est possible en utilisant la relation 4.14 qui permet d'étendre le domaine de validité de h_a et h_b . Un calcul de l'erreur commise entre les données

expérimentales et celles issues du lissage sera réalisé. Afin que ce calcul soit possible sur tous les sous-domaines, on utilisera l'expression des polynômes de Tchebychev sous la forme 4.14. L'erreur E/Ω_i sur le domaine Ω_i sera obtenue en écrivant :

$$E/\Omega_i = 100 \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} | h(\dot{u}_k, u_k) - \hat{h}/\Omega_i(\dot{u}_k, u_k) | \quad (4.24)$$

De même, afin de connaître la participation Q_{ij} de chaque monôme contenu dans la force interne identifiée $h(\dot{U}, U)$, on calculera :

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} | a_{ij} \dot{u}_k^i u_k^j | \quad (4.25)$$

où a_{ij} sont les coefficients du monômes $u_k^i \dot{u}_k^j$ déterminés grâce aux relations 4.3 et 4.14. Ce calcul permettra de sélectionner les valeurs de N_a et N_b de façon minimale, dans le but d'avoir une expression de $h(U, \dot{U})$ la plus simple possible.

4.3 Applications

Deux types d'essais ont été réalisés à l'aide de cette méthode. Le premier est un test numérique sur un oscillateur de Van der Pol, qui nous a permis de mettre en valeur l'intérêt de la nouvelle méthode d'extrapolation et ses limites. Le deuxième test porte quand à lui, sur un cas réel où la structure est définie par un amortisseur fortement non-linéaire en déplacement et en vitesse. Les détails de mise en oeuvre de cette expérience sont décrits dans le chapitre (7).

4.3.1 Oscillateur de Van der Pol

Nous allons appliquer notre méthode d'identification au cas de l'oscillateur de Van der Pol. On rappellera l'équation :

$$h(U, \dot{U}) = -\gamma(1 - U^2)\dot{U} + \omega^2 U = p(t) - m\ddot{U} \quad (4.26)$$

Dans le cadre de notre application, on prendra :

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.4 \text{ Ns/m} \\ \omega &= 100 \text{ rad/s} \\ m &= 1 \text{ kg} \\ p(t) &= 13 \sin\left(\left(\frac{1}{15\pi}t + 0.5\right)t\right) \end{aligned}$$

La simulation se fera sur 1000 points pour un échantillonnage de 0.1 s. Il est nécessaire de faire varier la fréquence d'excitation afin de remplir correctement le plan des phases (figure 4.4). La force interne obtenue sur tout le domaine d'essai est donnée par la

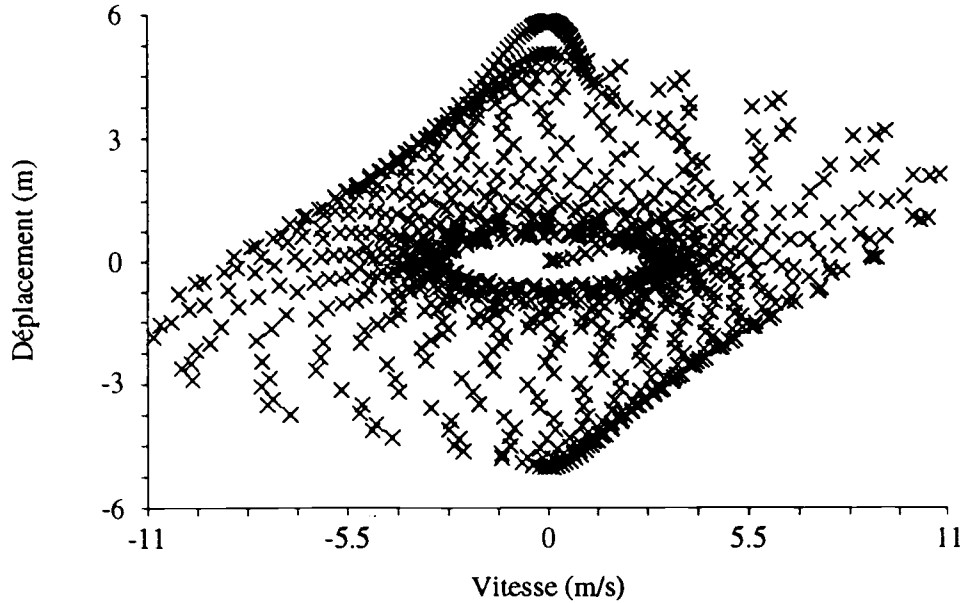


Figure 4.4: Plan des phases pour l'oscillateur de Van der Pol.

figure 4.5. Plusieurs essais d'identification ont été faits en faisant varier soit l'ordre des polynômes de Tchebychev, soit encore le nombre de points de quadrature. Le domaine initial Ω_1 permettant une interpolation complète des $h(P_{ij})$ est donné par : $\Omega_1 = [-3.0, 3.0] \times [-3.0, 3.0]$. Le calcul des autres sous-domaines, jusqu'au domaine complet $\Omega = [-5.02, 5.83] \times [-10.71, 10.87]$, sera obtenu en calculant :

$$\Omega_i = \left[-3.0 - 2.02 \frac{i-1}{n-1}, 3.0 + 2.83 \frac{i-1}{n-1} \right] \times \left[-3.0 - 7.71 \frac{i-1}{n-1}, 3.0 + 7.87 \frac{i-1}{n-1} \right] \quad (4.27)$$

avec $i \in (2, \dots, n)$. Pour notre test, nous choisirons $n = 10$.

Effets de l'ordre des polynômes de Tchebychev

Pour l'oscillateur de Van der Pol, il est facile de montrer que seuls les polynômes d'ordre 2 sont utiles à sa modélisation. Afin de ne jamais avoir trop de polynômes nécessaires à la modélisation, on choisira tout d'abord un nombre arbitraire suffisamment grand, et on essaiera de le réduire au minimum. Pour arriver à ce résultat, on tracera à chaque étape la participation en énergie de chaque monôme associé à l'approximation, puis on supprimera les polynômes dont la participation est négligeable. Sur notre exemple, on débutera l'approximation en choisissant des polynômes de Tchebychev jusqu'à l'ordre 4 en vitesse et en déplacement (ordre minimum = 1 en vitesse et 2 en déplacement), et on

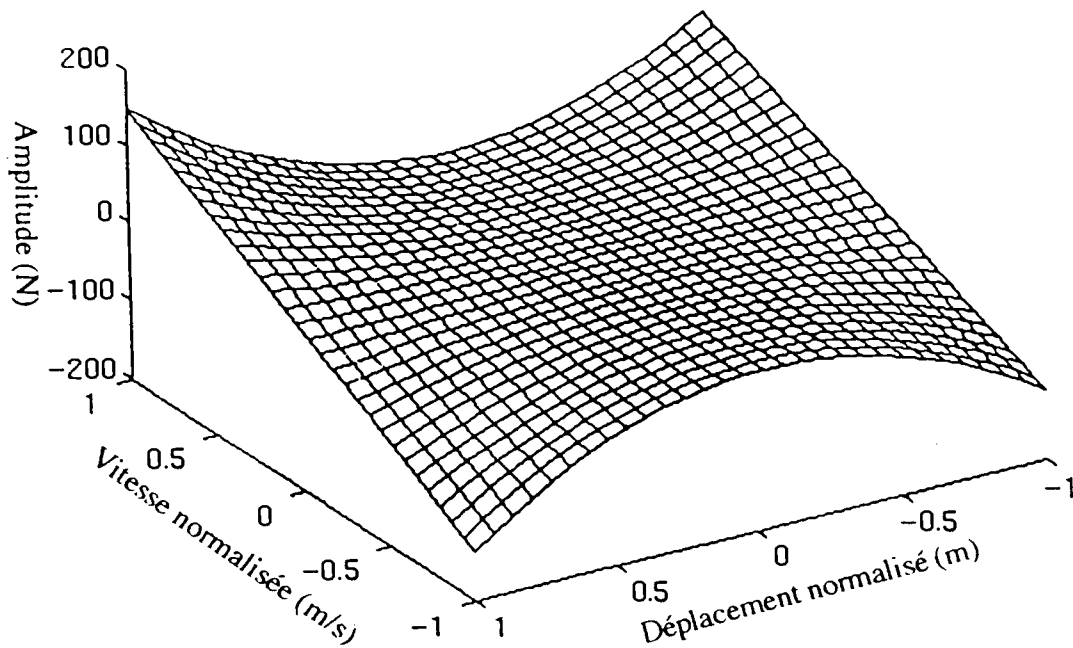


Figure 4.5: Force interne pour l'équation : $h(U, \dot{U}) = -\gamma(1 - U^2)\dot{U} + \omega^2 U = p(t) - m\ddot{U}$

fixera le nombre de points de quadrature égale à : $M_a = M_b = 10$. On constate alors, sur la figure 4.15 qu'on peut diminuer l'ordre en vitesse jusqu'à 1, celui en déplacement est maintenu à 4. Une nouvelle approximation est effectuée qui permet de diminuer l'ordre en déplacement jusqu'à 2. Cette dernière estimation de la force interne nous donne une meilleure approximation des monômes non-linéaires du modèle.

Effets du choix de la technique d'extrapolation

Le choix de la méthode d'extrapolation à pas constants, ou par prolongement analytique dépend de la qualité du lissage précédent et de l'ordre de l'interpolation. En effet, si l'ordre est élevé, la méthode par prolongement analytique peut présenter des phénomènes de divergence quand l'interpolation précédente n'est pas très bonne, et fait appel à des monômes d'ordre élevé. Par contre, la méthode à pas constant est très bien adaptée pour ce genre de situation, mais n'exploite pas l'information contenue dans le lissage précédent. On comprend alors que la méthode mixte sera dans tous les cas la plus adaptée (Tableaux 4.4, 4.8 et 4.12).

Commentaires des résultats

L'augmentation de l'ordre fait diverger la technique de prolongement analytique (Tableau 4.12), car elle met en jeu des monômes d'ordre élevé qui prennent de plus en plus d'importance quand les extrapolations deviennent grandes. A l'inverse, la méthode à pas constants est plus adaptée, car les erreurs faites en supposant l'amplitude constante sont "rattrapées" par le fait que l'ordre élevé rend l'extrapolation plus "souple". On notera que si l'ordre diminue, tout ce qui vient d'être dit est inversé, et la méthode de prolongement devient meilleure que la méthode à pas constants (Tableau 4.4). Le paramètre clé qu'est le choix de l'ordre d'approximation, peut, s'il est trop grand ou trop petit (celui-ci restant toujours plus grand que l'ordre minimum de la non-linéarité) faire diverger l'une ou l'autre des deux méthodes. C'est ici qu'intervient le choix d'une formulation mixte, seule capable de tirer profit des avantages de chaque méthode. On peut constater à l'aide des résultats (Tableaux 4.4, 4.8 et 4.12) que c'est la formulation mixte qui donne la meilleure approximation (en moyenne 2 à 3 fois plus précise). L'augmentation des points de quadrature, ainsi que du nombre de sous domaines font augmenter en général la précision de chacune des techniques d'extrapolation. On constate que l'écart minimum n'est pas toujours atteint en phase finale, ceci provient de l'accumulation des erreurs faites sur les derniers domaines qui sont fortement extrapolés. On pourra donc choisir à sa guise l'interpolation la meilleure obtenue au cours des extrapolations successives. Afin de revenir à une forme polynomiale de la non-linéarité, on redécompose l'approximation de Tchebychev dans la base polynomiale. On peut constater, (Tableaux 4.4, 4.8 et 4.12) que la précision entre les monômes vrais et identifiés est en partie liée à l'écart obtenu sur l'interpolation. En effet, si celle-ci diminue, on se rapproche plus des valeurs vraies. Cette constatation n'est pas tout à fait exacte, car dans certains cas les monômes d'ordre élevé augmentent l'écart entre la solution approchée et exacte, tout en ayant une assez bonne approximation des monômes non-linéaires de la structure (on rencontre cela surtout dans la méthode à pas constants). A titre indicatif, les figures 4.13 et 4.14 montrent les performances obtenues par chacune des techniques d'extrapolation pour la section $\dot{U} = 2.5m/s$.

4.3.2 Essai expérimental

On se propose ici d'étudier une non linéarité "industrielle" définie par un amortisseur à câble de type socitec (voir photo 7.2 chapitre (7)). La mise en oeuvre de cette expérience est détaillée chapitre (7). Ce type d'amortisseur est très utilisé pour ses caractéristiques d'amortissement et sa capacité à fonctionner dans des milieux hostiles. En effet, sa compo-

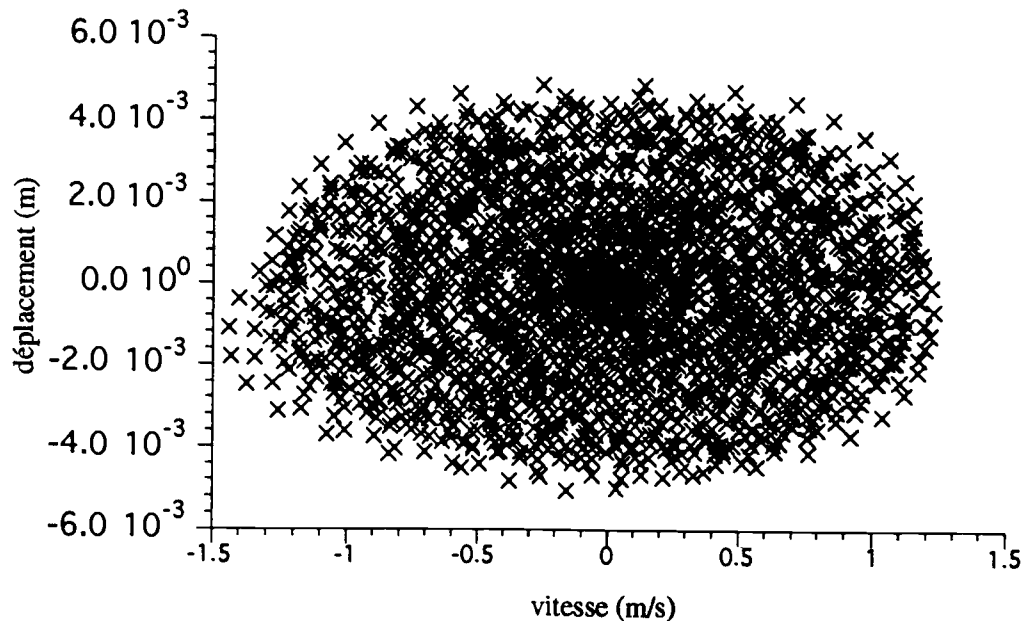


Figure 4.6: Plan des phases pour l'amortisseur.

sition entièrement en inox le rend apte à supporter la corrosion, les températures élevées, et est d'une durée de vie importante. Il trouve donc naturellement des secteurs d'application très variés comme la marine (utilisé pour des raisons de fiabilité), l'isolation des machines (pour ces capacités d'amortissement). La géométrie (câbles disposés hélicoïdalement) et sa nature (formé de câbles) lui confèrent des caractéristiques mécaniques fortement non-linéaires. Une analyse physique laisse supposer la présence de deux types de non-linéarité : l'une en amortissement (réalisée par le frottement sec des brins dans les câbles) et l'autre en raideur (liée à la géométrie de l'amortisseur). L'amortissement est réalisé par le frottement sec des brins entre eux : cela laisse supposer qu'une fois l'ensemble des seuils de frottement dépassés, l'amortissement maximum est atteint. On peut donc s'attendre à observer une augmentation du coefficient d'amortissement avec le niveau de sollicitation. Cet accroissement est à priori non symétrique du fait de la géométrie de l'amortisseur. Le comportement en raideur de l'amortisseur dépend du sens et de la direction des sollicitations. En effet, une excitation parfaitement verticale ne sollicite pas l'amortisseur de la même manière en traction et en compression. On observe un durcissement en traction (à partir d'un certain seuil), alors qu'en compression ce sera plutôt le contraire. Le phénomène observé pourra être différent en changeant la direction de l'excitation.

L'expérience sera réalisée en plaçant une masse sur l'amortisseur. Cet essai a pour but

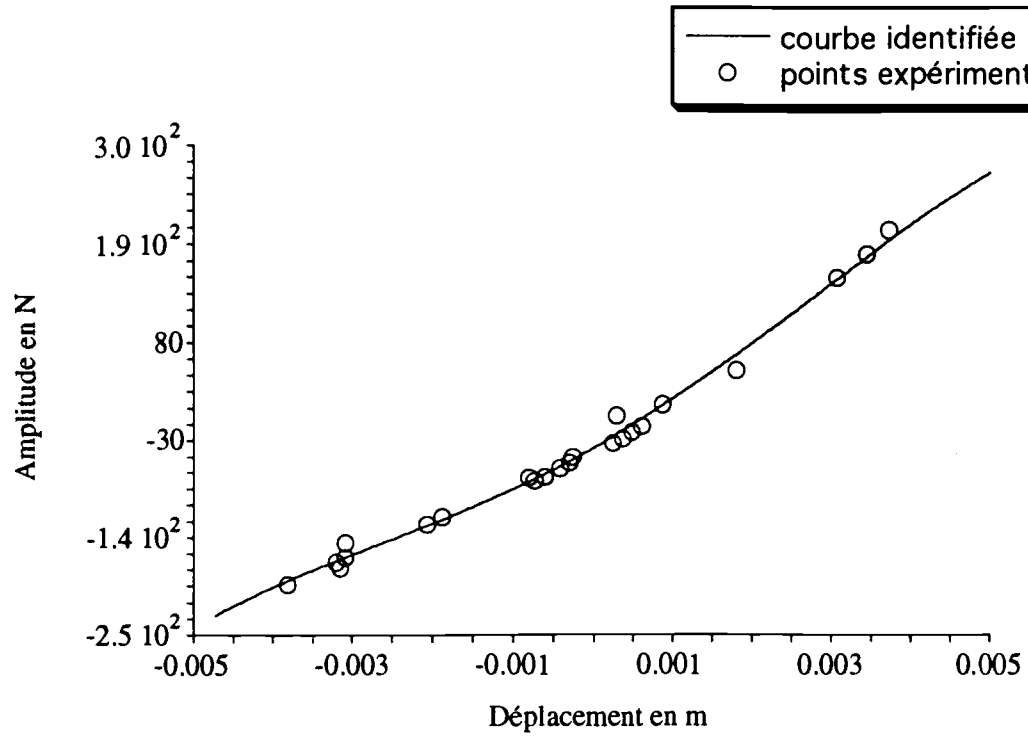
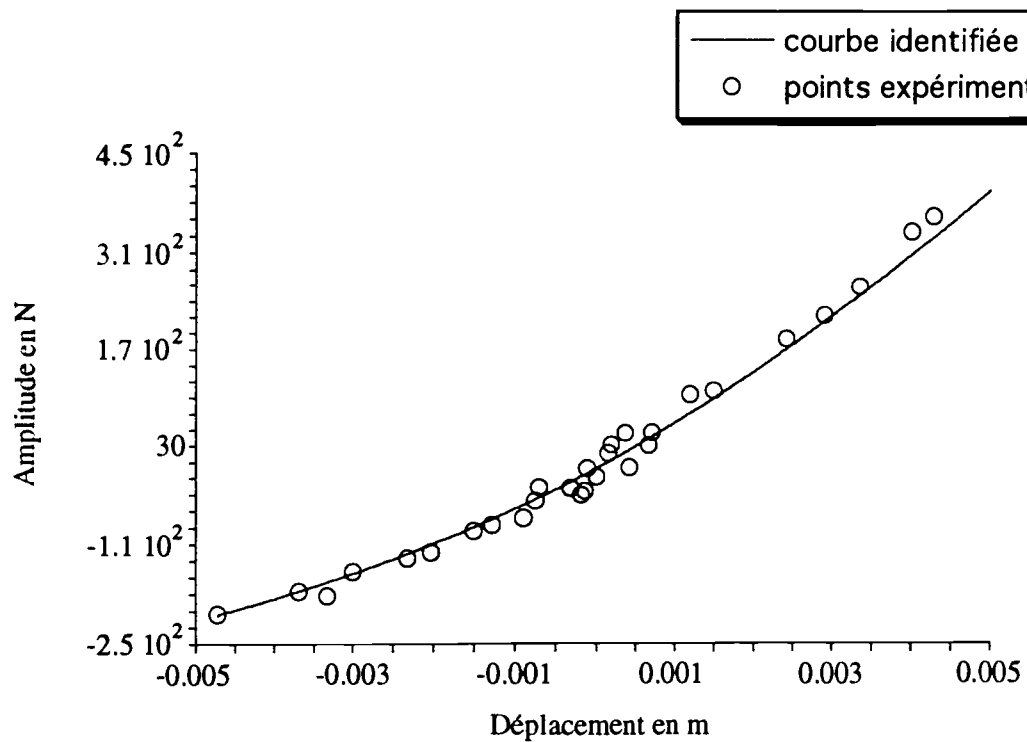
d'identifier l'amortisseur comme un simple ressort non linéaire. Ce test nous permettra d'avoir une vision assez précise du comportement non linéaire de l'amortisseur.

Cette expérience sera réalisée en plaçant un accéléromètre sur la masse afin d'obtenir l'accélération, le déplacement et la vitesse étant obtenus par intégration numérique. Un capteur de force sera utilisé afin de connaître la force injectée dans le ressort. L'ensemble des signaux sera récupéré en utilisant le logiciel LMS. On utilisera une excitation aléatoire à bande étroite, afin de couvrir au maximum le plan des phases. La bande étroite sera comprise entre 20 Hz et 200Hz afin de toujours "suivre" le premier mode et donc d'avoir ainsi une amplitude élevée qui nous permettra de mettre en valeur les effets non linéaires. Plusieurs blocks (5) de mesures seront relevés comportant chacun 8192 points. Parmi tous ces points de mesures nous en sélectionnerons certains de telle manière que la densité de points dans le plan des phases soit assez uniforme. En fait, ce calcul revient à supprimer énormément de points dans la zone proche de $(\dot{u} = 0, u = 0)$ et d'en conserver le plus possible dans les zones où (u, \dot{u}) sont grands et introduisent des effets fortement non-linéaires. La figure 4.6 montre le recouvrement du plan des phases par les points expérimentaux les valeurs étant réparties en déplacement de 4.5 mm à -4.5 mm et en vitesse de -1.2 m/s à 1.5 m/s. La procédure d'identification se déroulera comme précédemment, c'est à dire en commençant par un domaine où tous les points de quadrature sont interpolables. Ce domaine est donné pour un déplacement compris entre 3.5mm et -3.5 mm et une vitesse entre 0.6 m/s et -0.8 m/s. On prendra 6 domaines intermédiaires, une technique d'extrapolation entre les domaines de type mixte, $M_a = M_b = 28$ et $N_a = N_b = 5$.

Commentaires des résultats

Sur le premier domaine, les résultats montrent (figure 4.17) un plan qui met en valeur la partie linéaire, mais on peut déjà observer un resserrement des lignes iso-cotes quand le déplacement augmente. Ce phénomène caractérise parfaitement la dissymétrie de l'amortisseur où, lorsque le déplacement croît, la raideur augmente ; par contre, celle-ci s'effondre quand le déplacement décroît. Les courbes 4.7, 4.8 et 4.9 obtenues en effectuant une coupe à vitesse fixée dans la nappe 4.18 montrent une très bonne qualité du lissage, et on constate nettement une augmentation de la raideur avec le déplacement. La courbe donnée par le constructeur 4.19 correspond à celle que nous avons obtenue pour $v = 0\text{ m/s}$. Les courbes 4.10, 4.11 et 4.12 issues de coupes à déplacement fixe, montrent une moins bonne cohérence entre l'expérience et le lissage. Ceci est dû au fait que les points expérimentaux sont assez dispersés et donc difficile à interpoler. Il semble quand

même que le coefficient d'amortissement augmente légèrement quand la vitesse est positive (i.e. quand la masse remonte) et diminue quand la vitesse est négative. Ceci est dû à un amortissement plus grand lorsque les brins des câbles se resserrent entre eux. On constatera en général que l'amortissement reste très difficile à modéliser, et n'est pas une fonction simple du déplacement et de la vitesse, et dépend certainement d'autres variables. Il est fort probable que le système ne peut pas être considéré comme un système masse-ressort du point de vue de son amortissement car il est dû à un ensemble d'effets de frottement.

Figure 4.7: Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0.5 \text{ m/s}$.Figure 4.8: Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0 \text{ m/s}$.

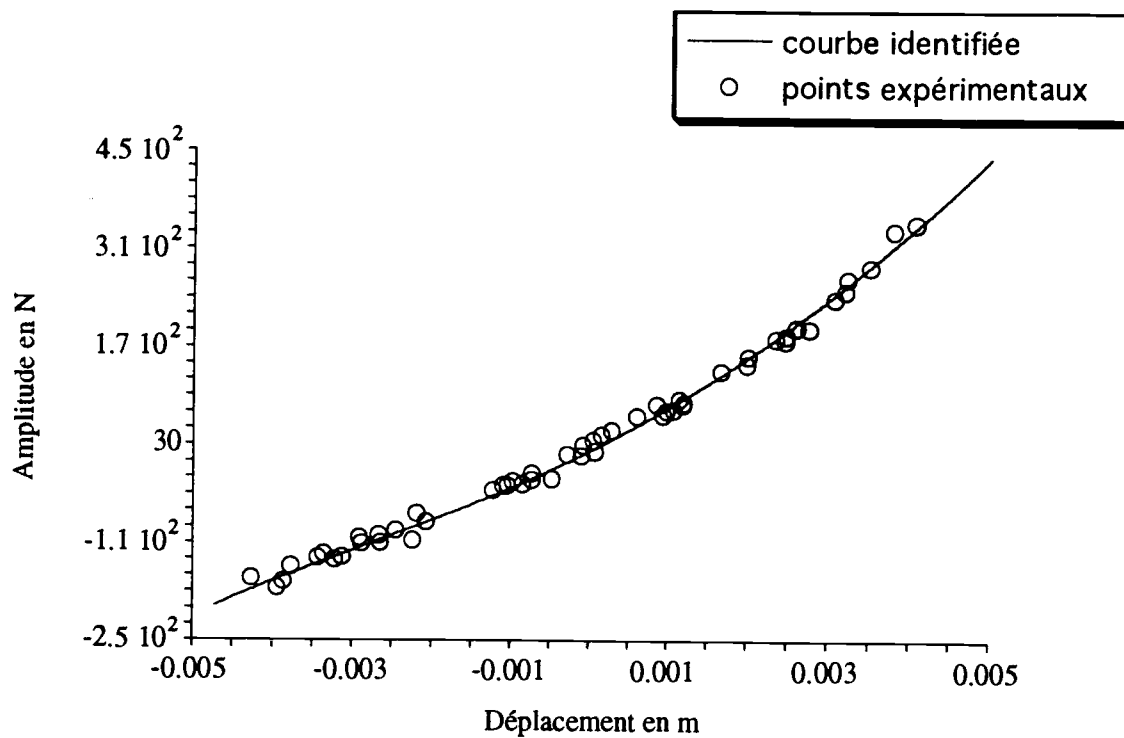


Figure 4.9: Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0.5 \text{ m/s}$.

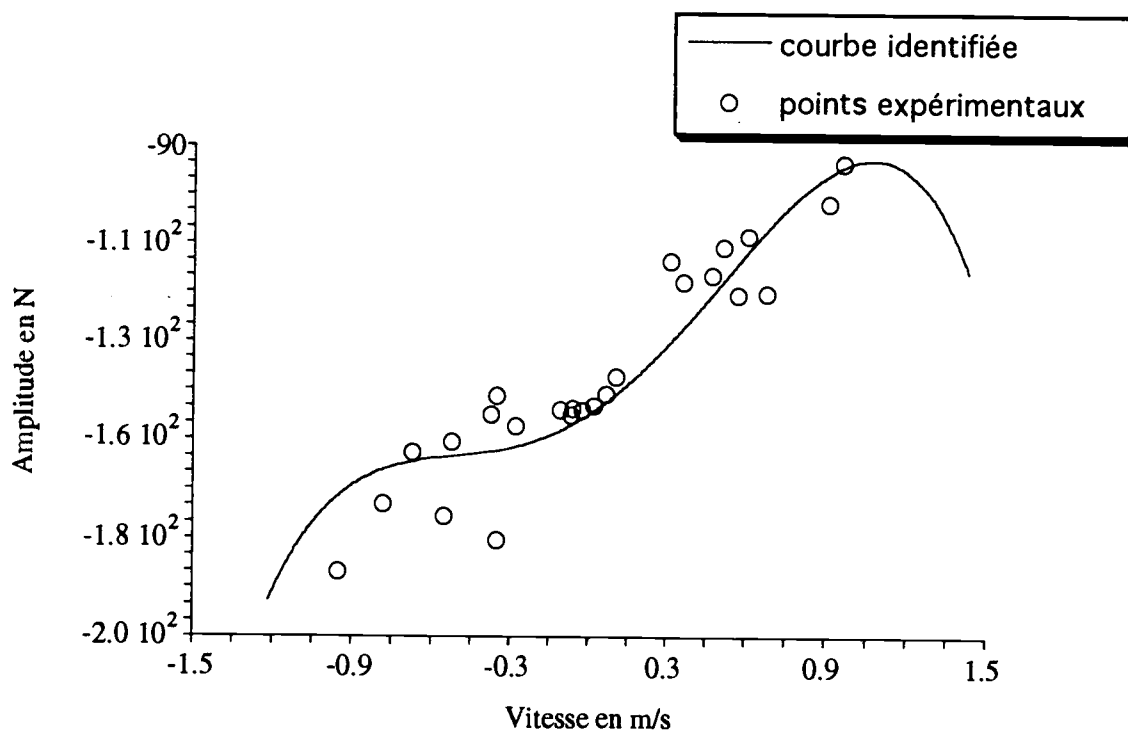
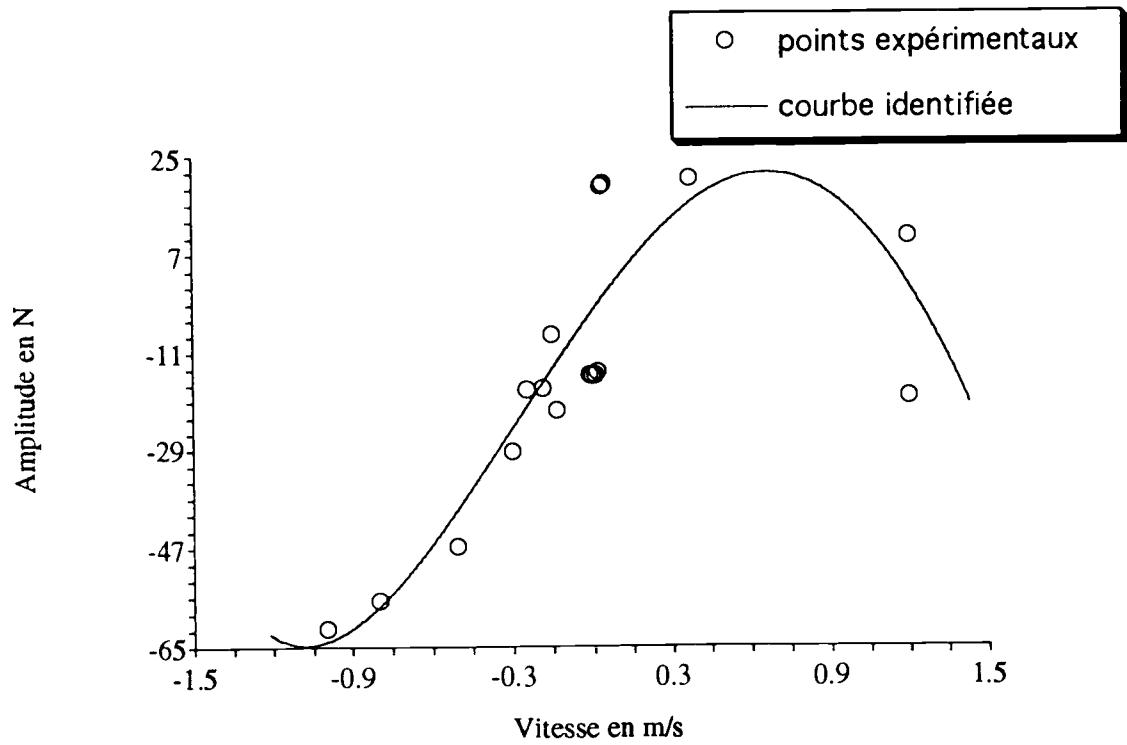
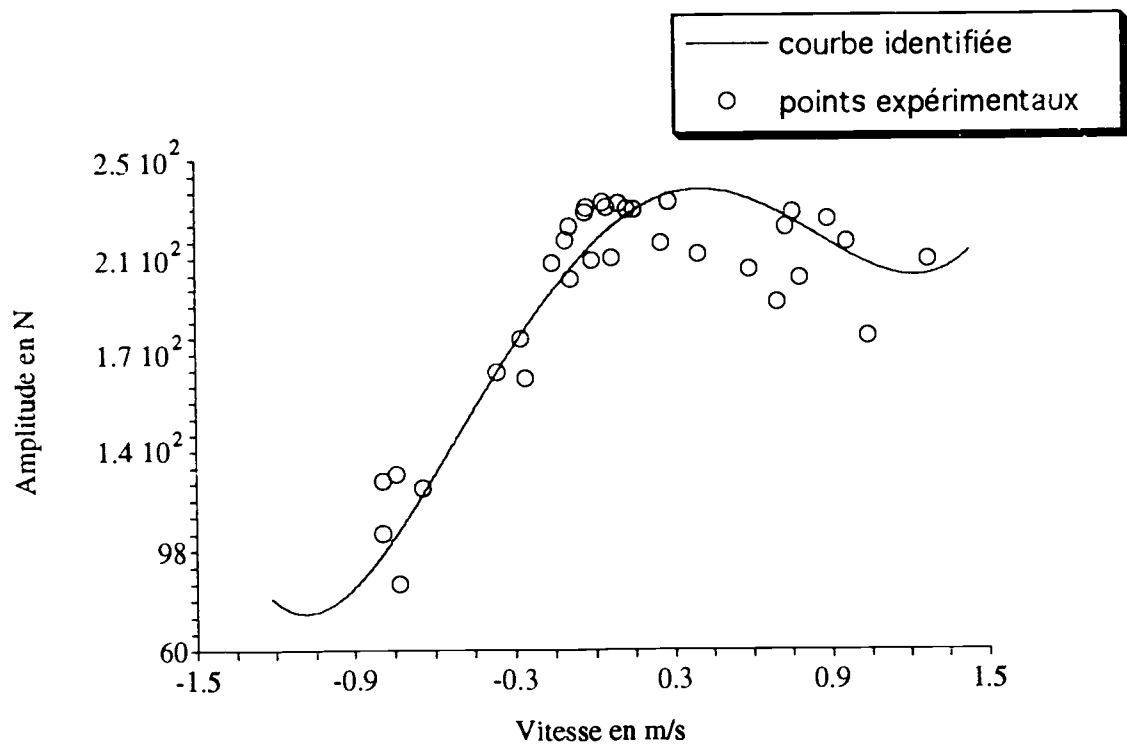


Figure 4.10: Coupe selon la droite à déplacement constant $d = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Figure 4.11: Coupe selon la droite à déplacement constant $d = 0$ m.Figure 4.12: Coupe selon la droite à déplacement constant $d = -0.3 \cdot 10^{-3}$ m.

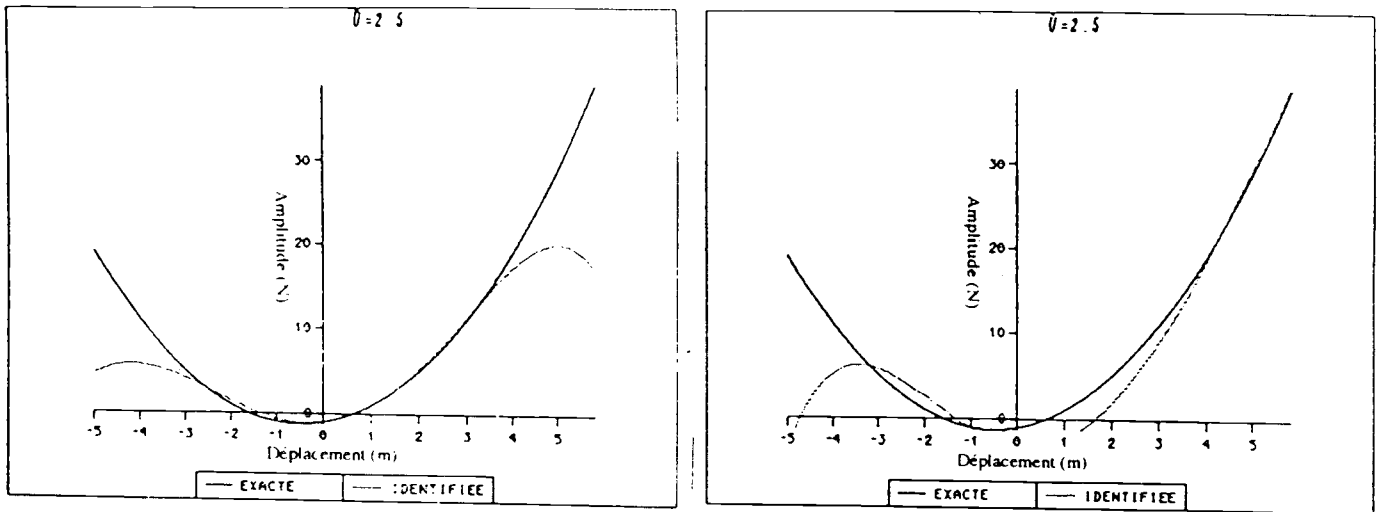


Figure 4.13: Coupe selon $\dot{u} = 2.5m/s$ pour le cas à pas constant et par prolongement

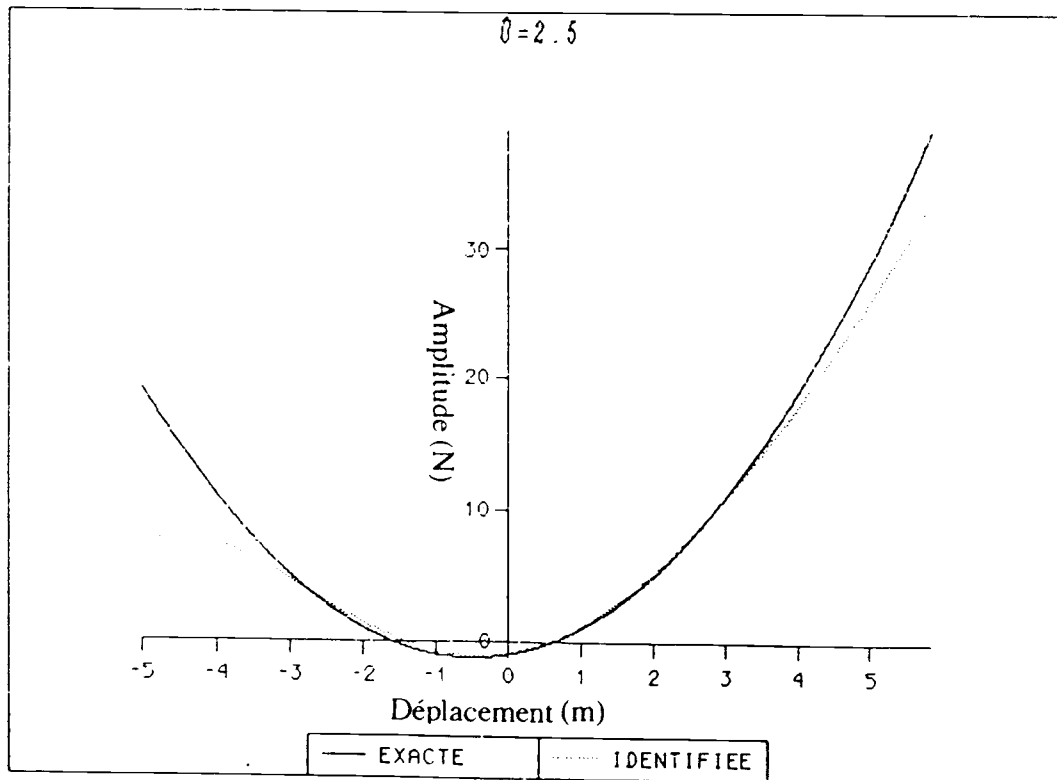


Figure 4.14: Coupe selon $\dot{u} = 2.5m/s$ par la méthode mixte

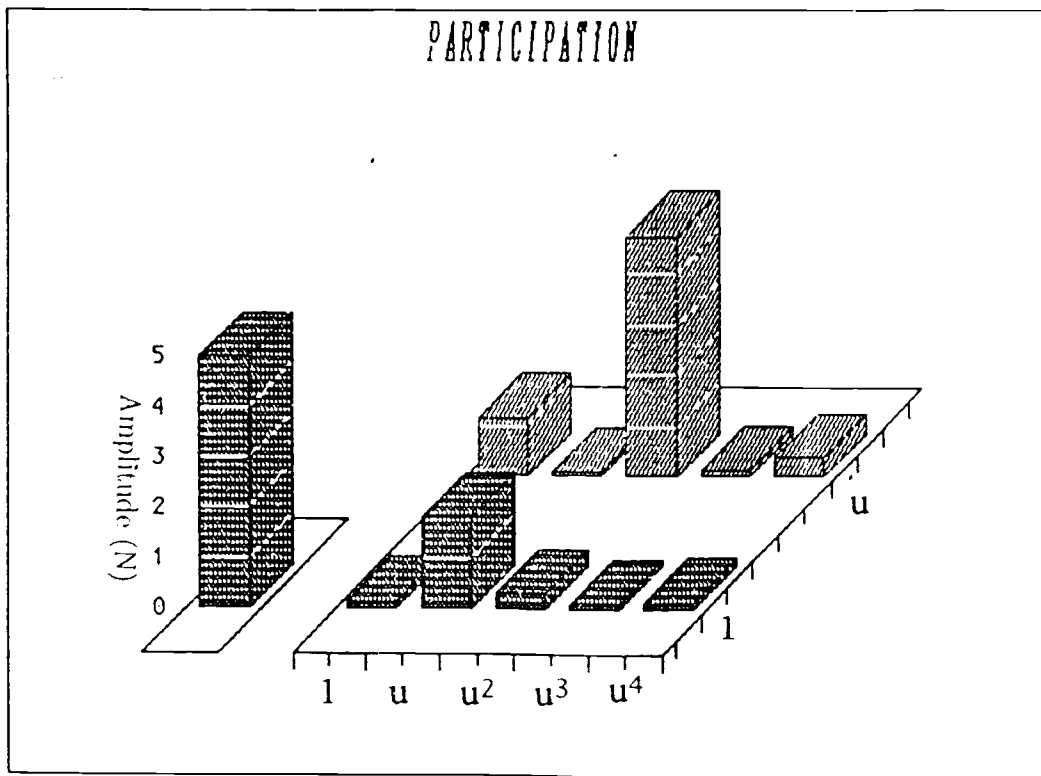
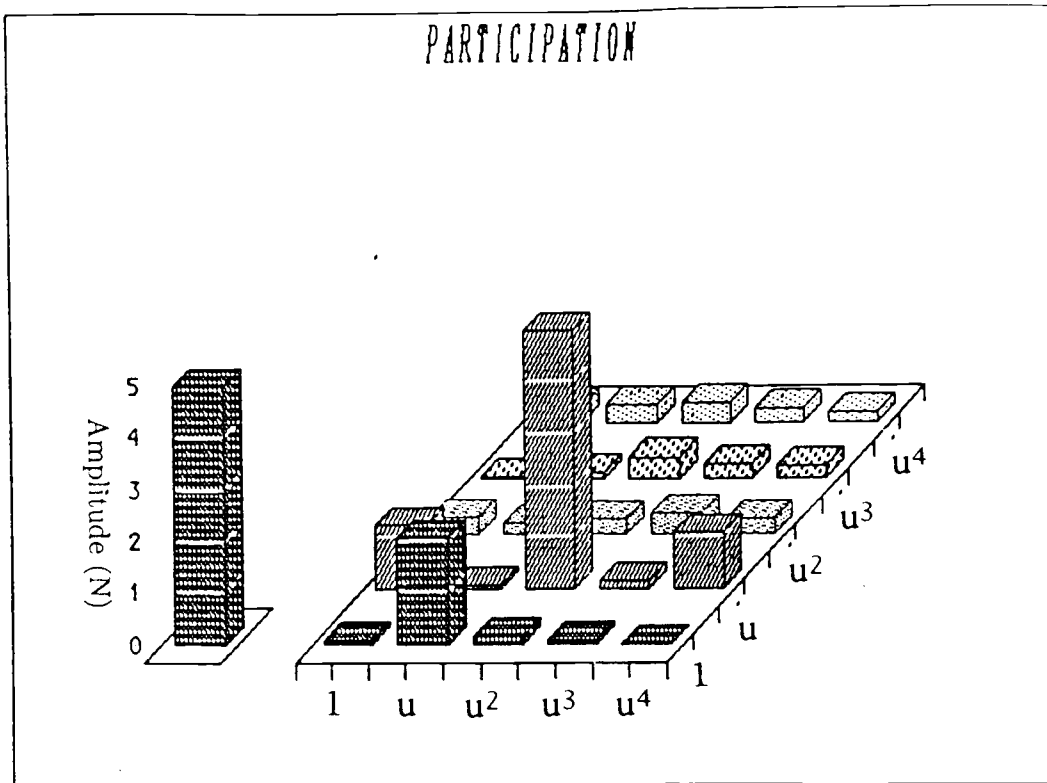


Figure 4.15: Participation des monômes dans les cas $(N_a = 5, N_b = 5)$, $(N_a = 5, N_b = 2)$

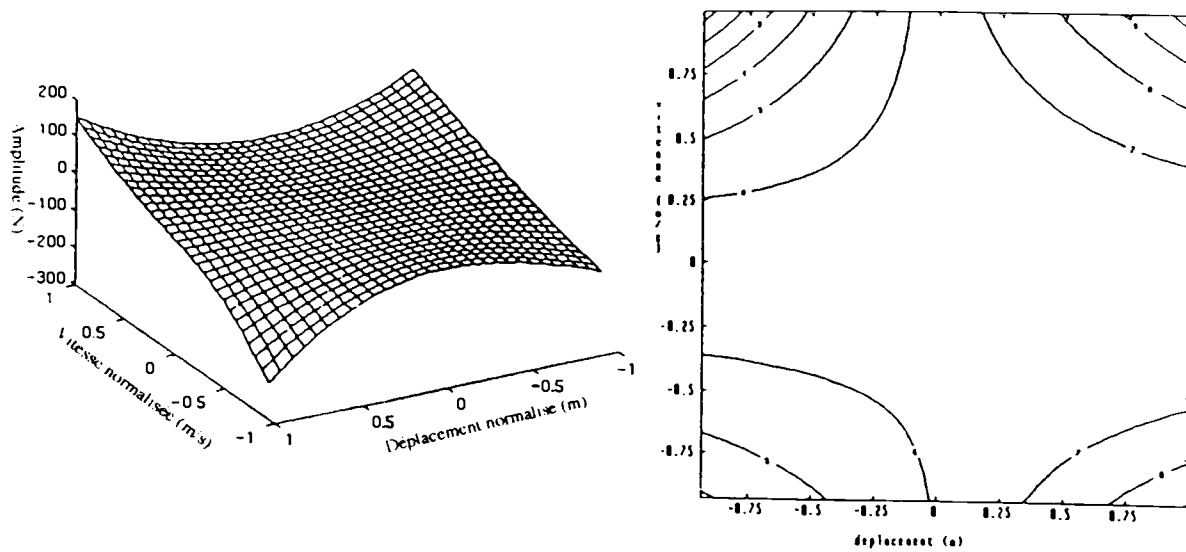


Figure 4.16: Force interne identifiée sur le dernier domaine (nappe et iso-cotes)

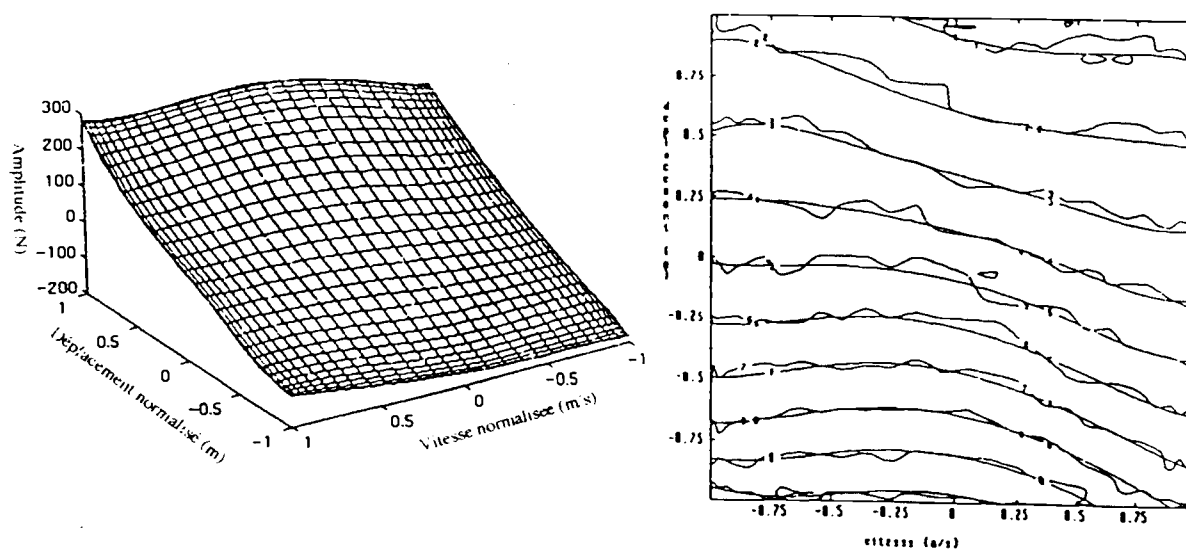


Figure 4.17: Force interne identifiée sur le premier domaine (nappe et iso-cotes)

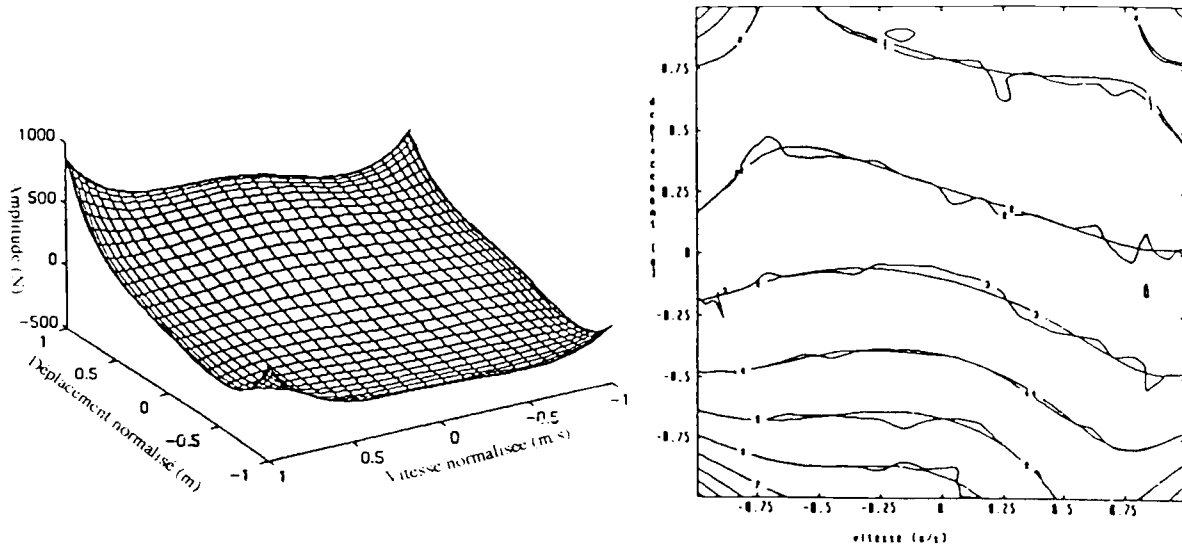


Figure 4.18: Force interne identifiée sur le dernier domaine (nappe et iso-cotes)

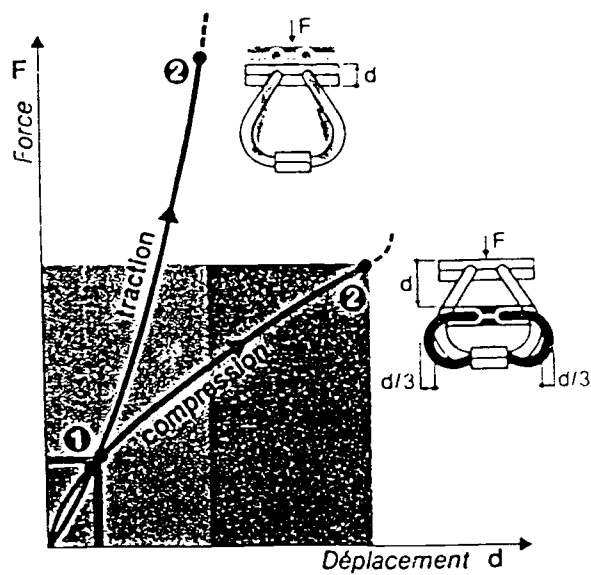


Figure 4.19: Caractéristiques de l'amortisseur fournis par le constructeur

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3
1	-0.153	-0.332	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$-1.3 \cdot 10^{-3}$
x	0.745	$-4.7 \cdot 10^{-2}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$-9.5 \cdot 10^{-4}$
x^2	$2.0 \cdot 10^{-2}$	0.376	$-3.2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-4}$
x^3	$-1.8 \cdot 10^{-3}$	$-4.3 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.1: Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3
1	0.314	0.716	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$-3.3 \cdot 10^{-3}$
x	1.437	0.118	$3.0 \cdot 10^{-2}$	$-4.6 \cdot 10^{-4}$
x^2	$-7.8 \cdot 10^{-2}$	0.149	$-3.0 \cdot 10^{-4}$	$-7.0 \cdot 10^{-4}$
x^3	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$-5.2 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4.2: Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3
1	$-7.2 \cdot 10^{-2}$	-0.390	$8.2 \cdot 10^{-3}$	$-1.1 \cdot 10^{-3}$
x	0.890	$-1.9 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$-7.7 \cdot 10^{-4}$
x^2	$-1.5 \cdot 10^{-2}$	0.387	$-2.7 \cdot 10^{-4}$	$7.4 \cdot 10^{-4}$
x^3	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$-5.1 \cdot 10^{-3}$	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.3: Coefficients obtenus par la méthode mixte.

	prolongement	constant	mixte
1	86	86	86
2	26	77	21
3	27	80	25
4	51	94	35
5	46	148	22
6	67	188	49
7	58	268	26
8	36	354	34
9	41	462	29
10	59	584	24

Tableau 4.4: Ecart sur les sous domaines.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4
1	$-5.3 \cdot 10^{-2}$	-0.156	$-4.3 \cdot 10^{-3}$	$-7.2 \cdot 10^{-3}$	$-3.8 \cdot 10^{-5}$
x	1.075	0.102	$-1.1 \cdot 10^{-3}$	$-3.9 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$
x^2	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0.363	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
x^3	$-8.3 \cdot 10^{-3}$	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$-1.8 \cdot 10^{-4}$
x^4	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	$-1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$-2.7 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4.5: Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4
1	-0.256	-0.300	$-4.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$
x	0.748	$-5.9 \cdot 10^{-2}$	$8.4 \cdot 10^{-2}$	$-2.5 \cdot 10^{-5}$	$-4.8 \cdot 10^{-4}$
x^2	$6.3 \cdot 10^{-2}$	0.431	$4.9 \cdot 10^{-2}$	$-2.0 \cdot 10^{-3}$	$-4.6 \cdot 10^{-5}$
x^3	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$-1.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$
x^4	$-3.5 \cdot 10^{-3}$	$-9.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.6 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$

Tableau 4.6: Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4
1	-0.261	-0.350	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$-2.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$
x	1.084	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$-1.1 \cdot 10^{-2}$	$-2.2 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$
x^2	$9.2 \cdot 10^{-2}$	0.340	$-3.0 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$-8.7 \cdot 10^{-5}$
x^3	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$-1.6 \cdot 10^{-2}$	$-8.1 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$-7.9 \cdot 10^{-6}$
x^4	$-4.3 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$-6.4 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-7}$

Tableau 4.7: Coefficients obtenus par la méthode mixte.

	prolongement	constant	mixte
1	115	115	115
2	39	136	39
3	38	46	31
4	36	46	26
5	41	79	22
6	45	68	33
7	60	94	30
8	86	139	56
9	105	153	35
10	100	189	37

Tableau 4.8: Ecart sur les sous domaines.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4	\dot{x}^5	\dot{x}^6
1	-1.262	-1.591	-0.133	0.103	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$-2.5 \cdot 10^{-3}$	$-6.8 \cdot 10^{-4}$
x	-2.455	0.114	0.470	$-6.0 \cdot 10^{-2}$	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
x^2	1.939	2.410	-0.423	-0.242	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
x^3	0.473	-0.413	$2.2 \cdot 10^{-2}$	0.143	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$-9.7 \cdot 10^{-3}$	$-3.5 \cdot 10^{-4}$
x^4	-0.232	-0.149	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$	$-2.4 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
x^5	$-1.0 \cdot 10^{-2}$	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$-6.1 \cdot 10^{-2}$	$-1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$
x^6	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$-7.9 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$-6.5 \cdot 10^{-5}$	$-2.9 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.9: Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4	\dot{x}^5	\dot{x}^6
1	0.127	-0.539	$-5.8 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$-2.2 \cdot 10^{-5}$	$-7.1 \cdot 10^{-6}$
x	0.935	0.184	$-4.6 \cdot 10^{-2}$	$-3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$-7.7 \cdot 10^{-6}$
x^2	$-5.4 \cdot 10^{-2}$	0.542	$4.0 \cdot 10^{-2}$	$-3.5 \cdot 10^{-3}$	$-8.1 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$
x^3	$-2.1 \cdot 10^{-2}$	$-3.2 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$-3.3 \cdot 10^{-4}$	$-1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
x^4	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$-1.4 \cdot 10^{-2}$	$-4.6 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$8.9 \cdot 10^{-5}$	$-2.9 \cdot 10^{-7}$	$-4.5 \cdot 10^{-7}$
x^5	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$-6.7 \cdot 10^{-4}$	$-1.1 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-9}$	$-4.4 \cdot 10^{-8}$
x^6	$-2.2 \cdot 10^{-4}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	$8.2 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$

Tableau 4.10: Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4	\dot{x}^5	\dot{x}^6
1	0.111	0.453	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$-3.7 \cdot 10^{-3}$	$-3.2 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$
x	0.997	-0.125	$-8.8 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$-6.4 \cdot 10^{-5}$	$-6.5 \cdot 10^{-6}$
x^2	$-8.2 \cdot 10^{-2}$	-0.514	$-1.4 \cdot 10^{-2}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$-2.3 \cdot 10^{-5}$	$-3.2 \cdot 10^{-6}$
x^3	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$-8.5 \cdot 10^{-4}$	$-1.8 \cdot 10^{-3}$	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$
x^4	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$-2.1 \cdot 10^{-5}$	$-1.5 \cdot 10^{-6}$	$7.8 \cdot 10^{-8}$
x^5	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	$-9.3 \cdot 10^{-5}$	$8.4 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$-1.1 \cdot 10^{-6}$	$-1.0 \cdot 10^{-7}$
x^6	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$-5.7 \cdot 10^{-5}$	$-2.5 \cdot 10^{-5}$	$-7.8 \cdot 10^{-6}$	$-1.0 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-8}$

Tableau 4.11: Coefficients obtenus par la méthode mixte.

	prolongement	constant	mixte
1	5190	5190	5190
2	1888	779	419
3	1370	117	185
4	1707	107	124
5	1575	40	44
6	1245	51	43
7	1230	75	60
8	1615	72	32
9	1449	95	28
10	1122	101	31

Tableau 4.12: Ecart sur les sous domaines.

	1	\dot{x}	\dot{x}^2	\dot{x}^3	\dot{x}^4
1	3.412	$6.6 \cdot 10^1$	$2.7 \cdot 10^1$	$-2.7 \cdot 10^1$	-5.786
x	$6.1 \cdot 10^4$	$-7.1 \cdot 10^3$	$-3.6 \cdot 10^4$	$4.8 \cdot 10^3$	$1.9 \cdot 10^4$
x^2	$-4.3 \cdot 10^6$	$-3.2 \cdot 10^5$	$-1.1 \cdot 10^6$	$2.3 \cdot 10^6$	$3.6 \cdot 10^6$
x^3	$-8.6 \cdot 10^6$	$-3.7 \cdot 10^8$	$9.6 \cdot 10^8$	$1.0 \cdot 10^8$	$-7.3 \cdot 10^8$
x^4	$2.6 \cdot 10^{10}$	$8.5 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^{11}$	$-1.3 \cdot 10^{11}$	$-4.5 \cdot 10^{11}$

Tableau 4.13: Coefficients obtenus par la méthode mixte sur l'amortisseur.

	mixte
1	242
2	193
3	117
4	83
5	84
6	88
7	87

Tableau 4.14: Ecart sur les sous domaines obtenus sur l'amortisseur.

Chapitre 5

Les séries fonctionnelles de Volterra et Wiener

5.1 Introduction

Les séries fonctionnelles ont été introduites à l'origine par Volterra en 1880 et utilisées comme méthode d'analyse des systèmes non-linéaires dans le cadre de la communication [25]. Leurs applications permettent une représentation entrée-sortie d'un système faiblement non-linéaire. Elles fournissent un modèle explicite où la réponse est une fonction analytique de l'entrée. On comprend alors tout l'intérêt d'un tel modèle qui permet de donner une relation directe entre la cause et l'effet. Les séries de Volterra sont l'extension fonctionnelle du développement en série de Taylor. Elles présentent d'ailleurs les mêmes exigences de convergence et de régularité quant à leurs mises en oeuvre. L'application de ce formalisme aux cas des systèmes dynamiques non-linéaires nécessitera donc un certain nombre d'hypothèses. Nous étudierons les différentes conditions d'application, d'unicité et de convergence de la théorie de Volterra. Il existe en effet quelques résultats qui légitiment l'utilisation de cette méthode de représentation. Nous présenterons les propriétés générales de causalité et stabilité associées à cette méthode, ainsi que certaines, plus particulières, qui dépendent de la nature de l'excitation (aléatoire ou déterministe). Hormis son intérêt pour l'analyse, ce formalisme permet de réaliser l'identification de structures non-linéaires. La démarche utilisée exploite les propriétés de ces séries pour différents cas d'excitation. La quantité de noyaux nécessaires à une modélisation correcte est souvent élevée ce qui a poussé de nombreux chercheurs à exploiter les séries de Volterra dans des configurations particulières. En effet, si le système peut être représenté par un schéma structurel en cascade, en parallèle ou en contre-réaction, des résultats très intéressants sont alors utilisables. Pour certaines de ces configurations, il est possible de trouver des analogies mécaniques (voir chapitre 6). La représentation de Volterra présente certaines difficultés liées à sa con-

vergence et aux calculs des noyaux. Afin de palier à cette difficulté, Wiener a développé la notion d'opérateur de Volterra en terme de fonctions orthogonales, par rapport à une excitation donnée. L'avantage d'un tel formalisme est lié aux propriétés d'orthogonalité qui lui confèrent une plus grande facilité d'application et d'utilisation. Tout comme pour le cas des séries de Volterra, nous montrerons qu'il est possible d'utiliser cette méthode pour identifier des systèmes mécaniques non-linéaires.

5.2 Propriétés mathématiques

La modélisation par les séries de Volterra n'est utilisable que sous certaines conditions. En général, l'hypothèse de base suppose que le système étudié est faiblement non-linéaire et régulier. Dans la plupart des cas, cette condition est insuffisante, il faut aussi vérifier certaines conditions d'existence, d'unicité et de convergence. Nous verrons qu'il n'y a pas de résultat général permettant d'affirmer qu'il existe toujours une série de Volterra. Par contre, pour des cas précis comme les systèmes bilinéaires, certains théorèmes assurent l'existence et l'unicité du développement en série de Volterra.

5.2.1 Existence, Unicité et Convergence

Existence et Unicité

L'existence et l'unicité sont deux conditions essentielles pour utiliser la représentation de Volterra. On notera qu'il y a déjà une ambiguïté quant à l'écriture des noyaux de Volterra. En effet, des séries de Volterra avec des noyaux différents peuvent représenter le même système. Par exemple, en considérant le système défini par l'équation de convolution :

$$x(t) = (h_a * u(t))(h_b * u(t)) \quad (5.1)$$

où $x(t)$: réponse du système
 $u(t)$: excitation
 h_a et h_b : 2 fonctions de transfert différentes

On démontre aisément que le noyau d'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{R}} h_a(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \int_{\mathcal{R}} h_b(\tau_2) u(t - \tau_2) d\tau_2 \\ &= \int_{\mathcal{R}^2} h_a(\tau_1) h_b(\tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= h_a(\tau_1) h_b(\tau_2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Comme $h_a \neq h_b$ alors $h_2(\tau_1, \tau_2) \neq h_2(\tau_2, \tau_1)$. Le noyau 2 est donc non-symétrique. Or on peut montrer que :

$$x(t) = \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau_2, \tau_1) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.3)$$

c'est à dire que $h_2(\tau_2, \tau_1)$ est aussi un noyau correct pour représenter le système. En conclusion, il y a 2 noyaux différents susceptibles de modéliser notre système. Afin de rendre unique les noyaux pour chaque problème, on les symétrisera en écrivant :

$$h_k^{sym}(t, s_1, \dots, s_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\text{toutes les} \\ \text{permutations} \\ \text{des } (s_1, \dots, s_k)}} h_k(t, s_1, \dots, s_k) \quad (5.4)$$

Cette ambiguïté levée, il reste à savoir sous quelles conditions sont obtenues l'existence et l'unicité des séries de Volterra. On rappellera qu'il est souvent possible de déterminer une série de Volterra pour un système non-linéaire sans pour autant savoir si elle est unique et représente correctement le système étudié. On peut démontrer qu'un système bilinéaire possède une série de Volterra unique et qu'il est possible d'en déterminer analytiquement les noyaux. Brockett [72], quant à lui, a pu montré qu'un système défini par l'équation d'état :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^l u_i g(x) \quad x(0) = x^0 \quad (5.5)$$

$$y = h(x) \quad (5.6)$$

où $x(t)$: la variable d'état
 $y(t)$: la réponse du système
 $u_i(t)$: i^{eme} composante du vecteur d'excitation
 f, g et h : 2 fonctions analytiques

possédait une représentation en série de Volterra unique. La définition exacte de cette propriété est donnée par :

Définition : Il existe un représentation de Volterra sur l'intervalle borné $[0, T]$, s'il existe un ensemble de noyaux h_m $0 \leq m < \infty$ satisfaisant les conditions :

-1- h_0 est défini sur l'intervalle $[0, T]$ et les h_m sur : $[0, T]^m$

-2- Chaque h_m est continu sur son domaine de définition

et il existe un $\delta > 0$ tel que $\| u \|_1 < \delta$, alors la série existe est unique et converge en norme topologique sur $C^0([0, T], \mathcal{R})$ pour tout $\| u \|_1 < \delta$.

Ce résultat permet de justifier l'application de ce formalisme pour un grand nombre de structures non-linéaires. Leskia C. et Krener A.J. [15] ont étendu ce résultat aux cas des systèmes multi-dimensionnels, et ont montré sur un exemple que le système d'état défini par :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x(0) = x^0 \quad (5.7)$$

$$y = h(x) \quad (5.8)$$

n'admettait pas toujours une représentation en série de Volterra. Par contre, si f est de classe C^{k+1} et $|u| < \epsilon$ (où $\epsilon > 0$ et petit), alors il existe une série de Taylor qui permet d'écrire :

$$\dot{x} = f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^k u_i f_i(x) + R(x, u) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{où } u_n &= u^n \\ f_n(x) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x,0)}{\partial u^n} \\ |R(x, u)| &< M |u|^{k+1} \end{aligned}$$

On se retrouve donc dans le cas 5.5 sous forme multi-dimensionnelle, dont l'existence et l'unicité de la représentation en série de Volterra ont été démontré précédemment. Il est à noter que la condition $|u| < \epsilon$ est très contraignante d'un point de vue pratique.

Convergence

Nous venons de voir qu'il existait des théorèmes d'existence et d'unicité pour certains types de problèmes non-linéaires. Ces deux conditions ne sont pas toujours vérifiables, mais il est souvent possible de déterminer si la série converge ou non. Ainsi, H. Ku et A. Wolf [98] ont montré qu'il existait des critères de convergences généraux dans les cas où l'excitation est déterministe ou bien aléatoire. Pour démontrer ces critères, il est nécessaire de supposer que le système est invariant au cours du temps, c'est à dire que la série de Volterra peut être mise sous forme :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.10)$$

Cas déterministe Pour ce type d'excitation, la condition de convergence est donnée, comme pour le cas bilinéaire, par $\|u(t)\| < \delta \forall t$ ce qui permet d'écrire :

$$x(t) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta^n \quad (5.11)$$

$$\text{où } a_n = \int_{\mathcal{R}^n} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Ce résultat est facile à démontrer en utilisant les inégalités de Minkowsky et de Schwarz. Les règles de convergence des séries (règle de Hadamard) nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème : Pour une excitation bornée, le rayon de convergence de la série de Volterra est donné par : $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$

Ce théorème nous permet de connaître les conditions de convergence dans le cas déterministe.

Cas aléatoire Si le signal aléatoire est stationnaire à tous ses moments statistiques bornés, et que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad (5.12)$$

on montre alors que la série converge au moins au sens de la moyenne et de sa variance.

Ce qui permet d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|x - \sum_{k=1}^n w_k|) = 0 \quad (5.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(x - \sum_{k=1}^n w_k)^2 = 0 \quad (5.14)$$

Pour utiliser les deux critères de convergence qui viennent d'être établis, il est nécessaire de connaître les caractéristiques du système afin de pouvoir calculer $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$ ou $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Ces critères sont donc difficilement applicables dans le cas de l'identification où, en général, les paramètres définissant la structure sont inconnus.

Le problème de la convergence reste un des points faibles du formalisme de Volterra, c'est en grande partie pour cette raison que Wiener a développé une "version" orthogonale des séries fonctionnelles qui permet de s'affranchir de ce type de difficulté.

5.2.2 Causalité, Stabilité et Homogénéité

Une fois établies l'existence, l'unicité et la convergence de la série de Volterra, cette dernière vérifie alors des propriétés particulières dont certaines pourront être utilisées dans le cadre de l'identification.

Causalité

La causalité est un principe essentiel qui caractérise tous les systèmes réels. L'application de ce principe aux séries de Volterra [3] introduit les conditions suivantes sur les noyaux :

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \quad (5.15)$$

$$\forall \tau_1 < 0 \text{ ou } \dots, \text{ ou } \forall \tau_n < 0 \quad (5.16)$$

Stabilité

La stabilité du système étudié, tout comme la causalité, impose des conditions sur les noyaux. Le critère que nous utiliserons est tel, que la réponse doit être bornée pour une entrée bornée (critère BIBO (Bounded-Input Bounded-Output)) ce qui impose :

$$\int_{\mathcal{R}^n} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n < \infty \quad (5.17)$$

Homogénéité

La propriété d'homogénéité est telle que si $u(t) = \lambda f(t)$ alors la réponse est donnée par :

$$x(t) = \lambda^n \int_{\mathcal{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.18)$$

Pour un même système, mais une excitation d'amplitude différente, on constate alors que seul le niveau de contribution des éléments de la série change.

Cette propriété est très intéressante, car elle permet, à l'aide de plusieurs essais, de connaître la contribution de chaque élément de la série dans la réponse globale. Elle sera donc très utile dès que l'on voudra identifier les noyaux d'un point de vue expérimental.

5.3 Identification des séries de Volterra

L'identification des séries de Volterra passe nécessairement par l'acquisition de ces noyaux h_i . Cette opération pose un certain nombre de problèmes. En effet, pour obtenir les noyaux de Volterra, il faut tout d'abord extraire chaque élément de la série de la réponse globale, puis isoler les noyaux de l'opérateur intégral, et enfin connaître jusqu'à quel ordre doit être fait le développement. Nous nous placerons ici dans le cas où l'ordre de troncature est suffisamment élevé pour que ces effets soient supposés négligeables. Nous aborderons différentes méthodes d'identification ; certaines associées à un type d'excitation et d'autres plus générales. La plupart de ces techniques occasionnant un coût de calcul élevé, des méthodes approximatives ont été mises au point afin de faciliter l'acquisition des noyaux en effectuant une identification partielle de la série de Volterra (en général les 3 premiers noyaux).

5.3.1 Cas de l'excitation impulsionnelle

En utilisant un train d'impulsion, on peut identifier directement les noyaux de Volterra. En effet, en jouant sur les délais et les amplitudes de chaque impulsion, il est possible

de remonter au comportement de chaque noyau [91] [38]. Nous montrerons tout d'abord comment acquérir les 2 premiers noyaux à l'aide d'une excitation du type :

$$u(t) = a\delta(t - t_1) + b\delta(t - t_2) \quad (5.19)$$

Tout d'abord, il est nécessaire d'effectuer n essais impulsionnels simples (c'est à dire $a \neq 0$, $b = 0$ et $t_1 = 0$) avec des amplitudes 2 à 2 indépendantes ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t, \dots, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

où $x^k(t)$: réponse du système pour l'excitation k
 a_k : amplitude de l'excitation k

Les résultats obtenus à l'aide du système 5.20 donnent les comportements des n premiers noyaux pour $\tau_1 = \dots = \tau_n = t$. Maintenant à l'aide de l'excitation 5.19, on calcule la réponse globale $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\mathcal{R}} h_1(\tau_1)(a\delta(t - t_1 - \tau_1) + b\delta(t - t_2 - \tau_1))d\tau_1 \\ &+ \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau_1, \tau_2)(a\delta(t - t_1 - \tau_1) + b\delta(t - t_2 - \tau_1))(a\delta(t - t_1 - \tau_2) + \\ &b\delta(t - t_2 - \tau_2))d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ \int_{\mathcal{R}^3} h_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3)(a\delta(t - t_1 - \tau_1) + b\delta(t - t_2 - \tau_1))(a\delta(t - t_1 - \tau_2) + \\ &b\delta(t - t_2 - \tau_2))(a\delta(t - t_1 - \tau_3) + b\delta(t - t_2 - \tau_3))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (5.21)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(t) &= ah_1(t - t_1) + bh_1(t - t_2) + a^2h_2(t - t_1, t - t_1) + b^2h_2(t - t_2, t - t_2) \\ &+ 2abh_2(t - t_1, t - t_2) + a^3h_3(t - t_1, t - t_1, t - t_1) + b^3h_3(t - t_2, t - t_2, t - t_2) \\ &+ 3a^2bh_3(t - t_1, t - t_1, t - t_2) + 3ab^2h_3(t - t_1, t - t_2, t - t_2) + \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

En supposant la contribution de h_3 faible, alors en faisant varier t_1 et t_2 , on peut obtenir h_2 sur tout son domaine (on se servira des résultats précédents 5.20 pour connaître $h_2(t - t_i, t - t_i)$ et $h_1(t - t_i)$ avec ($i = 1, 2$)) grâce à l'équation :

$$\begin{aligned} h_2(t - t_1, t - t_2) &= \frac{1}{2ab}(x(t) - ah_1(t - t_1) - bh_1(t - t_2) \\ &- a^2h_2(t - t_1, t - t_1) - b^2h_2(t - t_2, t - t_2)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

La mise en oeuvre expérimentale de cette technique a été réalisée par T. Couychai et T. Vinh [91] en utilisant un percuteur électromagnétique qui permet de régler le temps entre 2 chocs et leurs niveaux. Les résultats issus d'un tel essai doivent nécessairement supposer que le noyau d'ordre 3 a une contribution faible pour que l'approximation 5.23 soit valide. Afin de pallier à ce problème, il est possible de mettre au point une méthode équivalente à celle qui vient d'être proposée permettant l'identification des h_1 , h_2 et h_3 . Pour cela, il est nécessaire de réaliser 3 essais avec l'excitation 5.19, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} h_2(t-t_1, t-t_2) \\ h_3(t-t_1, t-t_1, t-t_2) \\ h_3(t-t_1, t-t_2, t-t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1b_1 & 3a_1^2b_1 & 3a_1b_1^2 \\ 2a_2b_2 & 3a_2^2b_2 & 3a_2b_2^2 \\ 2a_3b_3 & 3a_3^2b_3 & 3a_3b_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^1(t) \\ z^2(t) \\ z^3(t) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

où

$$\begin{aligned} z^k(t) = & x^k(t) - a_k h_1(t-t_1) - b_k h_1(t-t_2) - a_k^2 h_2(t-t_1, t-t_1) - b_k^2 h_2(t-t_2, t-t_2) \\ & - a_k^3 h_3(t-t_1, t-t_1, t-t_1) - b_k^3 h_3(t-t_2, t-t_2, t-t_2) \quad k = (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Il est intéressant de noter que ce calcul améliore déjà l'estimation du noyau d'ordre 2 en repoussant les effets de troncature au niveau du noyau d'ordre 4.

Les résultats du système 5.24 nous permettent maintenant de déterminer le noyau h_3 sur tout son domaine grâce à la réponse obtenue par une excitation du type :

$$u(t) = a\delta(t-t_1) + b\delta(t-t_2) + c\delta(t-t_3) \quad (5.26)$$

et l'équation :

$$\begin{aligned} h_3(t-t_1, t-t_2, t-t_3) = & \frac{1}{6abc} (x(t) - ah_1(t-t_1) - bh_1(t-t_2) - ch_1(t-t_3) \\ & - a^2 h_2(t-t_1, t-t_1) - b^2 h_2(t-t_2, t-t_2) \\ & - c^2 h_2(t-t_3, t-t_3) - 2abh_2(t-t_1, t-t_2) \\ & - 2ach_2(t-t_1, t-t_3) - 2bch_2(t-t_2, t-t_3) \\ & - a^3 h_3(t-t_1, t-t_1, t-t_1) - b^3 h_3(t-t_2, t-t_2, t-t_2) \\ & - c^3 h_3(t-t_3, t-t_3, t-t_3) - 3a^2 bh_3(t-t_1, t-t_1, t-t_2) \\ & - 3a^2 ch_3(t-t_1, t-t_1, t-t_3) - 3b^2 ah_3(t-t_2, t-t_2, t-t_1) \\ & - 3b^2 ch_3(t-t_2, t-t_2, t-t_3) - 3c^2 ah_3(t-t_3, t-t_3, t-t_1) \\ & - 3c^2 bh_3(t-t_3, t-t_3, t-t_2)) \end{aligned} \quad (5.27)$$

On constate que le calcul de h_3 devient très vite lourd, cette méthode est donc difficilement applicable au delà de l'ordre 3. De plus, elle nécessite l'utilisation d'excitations impulsionnelles qui soient de très bonne qualité afin que les différents découplages obtenus en résolvant 5.20 et 5.24 puissent être corrects.

5.3.2 Cas de l'excitation aléatoire

Ici nous aborderons le cas particulier de l'excitation gaussienne à moyenne nulle. Plusieurs approches sont possibles ; la principale consiste à calculer les inter-corrélations entre l'excitation et la réponse. L'utilisation de ces résultats s'effectue soit à l'aide de plusieurs essais permettant d'isoler chaque noyau de la réponse globale (technique directe), soit en utilisant le lien qu'il existe entre les noyaux de Wiener et ceux de Volterra (technique indirecte). Cette dernière méthode reste, à l'heure actuelle, la plus utilisée d'un point de vue expérimental, car sa mise en oeuvre ne présente pas de difficulté majeure.

Technique directe

Les propriétés statistiques de l'excitation gaussienne à moyenne nulle et variance A , nous permettent d'écrire :

$$\overline{w_n(t)u(t-\sigma_1)\cdots u(t-\sigma_n)} = n!A^n h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (5.28)$$

Pour effectuer le calcul des corrélations, il est nécessaire de supposer que les signaux mesurés sont stationnaires et ergodiques. Dès lors, le problème majeur reste l'extraction du terme 5.28 de la corrélation :

$$\overline{x(t)u(t-\sigma_1)\cdots u(t-\sigma_n)} \quad (5.29)$$

Cette opération est possible en effectuant m essais indépendants qui permettront d'écrire :

Avec $2m > 2p$

$$\begin{pmatrix} \overline{w_2(t) \prod_{i=1}^{2p} u(t-\sigma_i)} \\ \vdots \\ 2p! h_{2p}(\sigma_1, \dots, \sigma_{2p}) \\ \vdots \\ \overline{w_{2m}(t) \prod_{i=1}^{2p} u(t-\sigma_i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{p+1} & \dots & A_1^{p+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m^{p+1} & \dots & A_m^{p+m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{x^2(t) \prod_{i=1}^{2p} u(t-\sigma_i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{x^{2m}(t) \prod_{i=1}^{2p} u(t-\sigma_i)} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

Les noyaux impairs se déterminent de manière analogue. Ces calculs étant extrêmement longs, on se limitera en général à l'acquisition des 3 premiers noyaux exclusivement.

Technique indirecte

Dans le cas du bruit blanc gaussien, il existe un lien entre les noyaux de Volterra et ceux de Wiener. Cette propriété nous permettra, après avoir calculer les noyaux de Wiener,

d'identifier plus facilement ceux de Volterra. On rappellera tout d'abord les propriétés principales des noyaux de Wiener [3] k_n . Soit :

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} \frac{1}{n!A^n} \overline{x(t)H_n(u(t))} & \text{pour } \sigma_i \geq 0 \ i \in (1, \dots, n) \\ 0 & \text{des que } \sigma_i < 0 \ i \in (1, \dots, n) \end{cases} \quad (5.31)$$

où H_n : polynôme d'Hermite d'ordre n

Lorsque les σ_i sont positifs et tous différents deux à deux la relation 5.31 se simplifie sous la forme :

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n!A^n} \overline{x(t)u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n)} \quad (5.32)$$

Afin d'établir la relation qui lie les h_i et les k_i , on supposera dans un premier temps que la réponse du système peut être modélisée à l'aide des 3 premiers noyaux de Volterra, c'est à dire :

$$x(t) = \int_{\mathcal{R}} h_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau_1, \tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_{\mathcal{R}^3} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \quad (5.33)$$

ce qui donne pour les 3 premières inter-corrélations :

$$\overline{x(t)u(t-\sigma_1)} = Ah_1(\sigma_1) + 3A^2 \int_{\mathcal{R}} h_3(\sigma_1, \tau_2, \tau_2)d\tau_2 \quad (5.34)$$

$$\overline{x(t)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)} = 2!A^2h_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad (5.35)$$

$$\overline{x(t)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)u(t-\sigma_3)} = 3!A^3h_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \quad (5.36)$$

A l'aide des relations 5.34 à 5.36, on montre aisément que :

$$h_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (5.37)$$

$$h_2(\sigma_1, \sigma_2) = k_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad (5.38)$$

$$h_1(\sigma_1) = k_1(\sigma_1) - 3A \int_{\mathcal{R}} h_3(\sigma_1, \tau_2, \tau_2)d\tau_2 \quad (5.39)$$

Si A est suffisamment faible, le calcul des 3 premiers noyaux de Volterra se fera de manière identique à ceux de Wiener. Cette remarque permet donc de calculer grâce aux corrélations 5.34 à 5.36 de manière facile les noyaux h_1 , h_2 et h_3 .

5.3.3 Cas quelconques

Il s'agit d'établir une méthode applicable pour n'importe quel type d'excitation. Il faut nécessairement que la force possède un spectre suffisamment étendu pour que tout le contenu spectral du système puisse être pris en compte.

5.3.4 Par moindres carrés

Pour effectuer cette identification, on utilisera la méthode des moindres carrés en ayant pris soin au préalable de discrétiser les opérateurs intégraux de la série de Volterra ce qui permet d'écrire :

$$y(k) = \sum_{p=1}^s \left(\sum_{i_1=0}^m \cdots \sum_{i_p=0}^m \right) h_p(i_1, \dots, i_p) (\Delta t)^p u(k-i_1) \cdots u(k-i_p) \quad (5.40)$$

où $y(k)$: est égale à $y(k\Delta t)$
 s : ordre de troncture de la série
 m : ordre de troncture des intégrales
 Δt : pas d'échantillonnage

L'équation 5.40 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$y(k) = \underbrace{(\Delta t u(k), \dots, \Delta t u(k-m), \Delta t^2 u(k)u(k), \dots)}_{f^t(k)} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(0) \\ \vdots \\ h_1(m) \\ h_2(0,0) \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}} + e(k) \quad (5.41)$$

\mathcal{H} sera donc obtenu en minimisant J :

$$J = \sum_{k=0}^m e^2(k) \quad (5.42)$$

où

$$\begin{pmatrix} e(0) \\ \vdots \\ e(m) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(m) \end{pmatrix}}_{\mathcal{Y}} - \underbrace{\begin{pmatrix} f^t(0) \\ \vdots \\ f^t(m) \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} \mathcal{H} \quad (5.43)$$

Ce qui donne pour l'estimation du vecteur \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}^t \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}^t \mathcal{Y} \quad (5.44)$$

La dimension de la matrice $\mathcal{F}^t \mathcal{F}$ étant très grande, son inversion peut poser des problèmes et fournir des résultats erronés. Cette méthode, bien que générale, ne pourra être applicable que sur une faible quantité de noyaux.

5.3.5 Méthode orthogonale

Cette méthode développée par Schetzen [3] utilise une décomposition orthogonale de la réponse $x(t)$ et des noyaux h_i . Les propriétés des fonctions orthogonales nous permettront d'identifier facilement les coefficients caractérisant chaque noyau. Nous présenterons un développement sur les polynômes de Laguerre, mais il aurait été envisageable d'utiliser

une autre base orthogonale de représentation (par exemple Tchebychev). En considérant que la réponse du système peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N w_n(t) = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m \mathcal{L}_m(t) \right)_n \quad (5.45)$$

où $\mathcal{L}_m(t)$: est le polynôme de Laguerre d'ordre m

alors, on peut calculer les coefficients associés à chaque noyau par la relation :

$$A_m = \int_0^T w_m(t) \mathcal{L}_m(t) dt \quad (5.46)$$

Afin de pouvoir tirer profit des propriétés des polynômes orthogonaux, nous décomposerons aussi les noyaux h_n sur une base de Laguerre, ce qui donne :

$$h_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{m_i=1}^{\infty} (C_{m_1 \dots m_n} \mathcal{L}_{m_1}(\sigma_1) \cdots \mathcal{L}_{m_n}(\sigma_n))_n \quad (5.47)$$

En utilisant les relations 5.45 et 5.47, on peut alors écrire :

$$w_n(t) = \int_{\mathcal{R}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{m_i=1}^{\infty} C_{m_1 \dots m_n} \mathcal{L}_{m_1}(\tau_1) \cdots \mathcal{L}_{m_n}(\tau_n) u(t - \tau_1) \cdots u(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (5.48)$$

La propriété 5.46 nous donne :

$$A_k = I_{k, m_1 \dots m_n} C_{m_1 \dots m_n} \quad (5.49)$$

$$\text{où } I_{k, m_1 \dots m_n} = \int_0^T \int_{\mathcal{R}^n} \sum_{i=1}^n \sum_{m_i=1}^{\infty} \left(\prod_{p=1}^n \mathcal{L}_{m_p}(\tau_p) u(t - \tau_p) \right) \mathcal{L}_k(t) d\tau_1 \cdots d\tau_n dt$$

Cette relation peut être mise sous forme algébrique :

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{0,1 \dots 1} & \cdots & I_{0,p \dots p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{r,1 \dots 1} & \cdots & I_{r,p \dots p} \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} C_{1 \dots 1} \\ \vdots \\ C_{p \dots p} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

T. Chouychai [90] a montré que la dimension de la matrice T est égale à :

$$d = \frac{p}{n} \prod_{i=1}^{n-1} (p + i) \quad (5.51)$$

où p = nombre de polynômes de Laguerre utilisés pour chaque variable
 n = ordre du noyau utilisé

Pour $r = d$, la matrice T est carrée et peut être inversée pour obtenir les $C_{m_1 \dots m_n}$ avec $(m_1, \dots, m_n) \in (1, \dots, p)$. Cette méthode assez lourde présente cependant un gros avantage résidant dans le fait que les coefficients identifiés ne seront pas modifiés si p augmente. On notera tout de même [90] que pour un choix de $p = 10$, le calcul de h_2 sera obtenu en inversant une matrice 55×55 ; cet exemple donne déjà une idée de la taille limite des problèmes qui pourront être abordés.

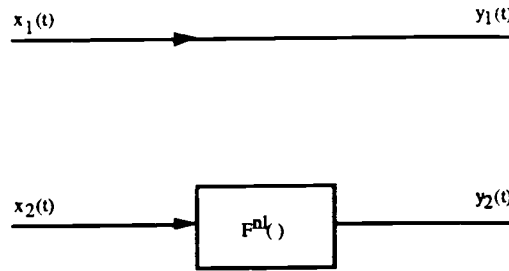


Figure 5.1: Système non-linéaire caractérisé par une fonction non-linéaire $F^{nl}(\cdot)$.

5.4 Réalisation particulière de Volterra

L'identification complète d'une série de Volterra présentant quelques difficultés, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à des cas particuliers pouvant faire l'objet de traitements spécifiques plus performants. Ces modèles sont en général composés de deux types d'éléments : un dynamique caractérisé par des fonctions de transfert, et un autre statique modélisé par une fonction non-linéaire. Nous montrerons, pour chacun des modèles abordés, comment identifier les différents éléments en jeu, afin d'en obtenir une modélisation complète.

5.4.1 Système en cascade

Processus séparable

Soient $a(t)$ et $b(t)$ deux processus aléatoires stationnaires et $p(a, b, \tau)$ la densité de probabilité conjointe, on peut alors calculer :

$$g(b; \tau) = \int_{\mathcal{R}} ap(a, b; \tau) da \quad (5.52)$$

ce qui permet de définir $a(t)$ comme un processus séparable par rapport à $b(t)$ si :

$$g(b; \tau) = g_1(b)g_2(\tau) \quad (5.53)$$

L'importance des processus séparables pour l'identification non-linéaire des structures devient visible en étudiant les propriétés du système (figure 5.1) caractérisé par la fonction non-linéaire F^{nl} :

$$F^{nl}(x(t)) = \sum_{i=1}^n a_i x^i(t) \quad (5.54)$$

En effet, si x_1 est séparable par rapport à x_2 on a :

$$\overline{x_1(t)y_2(t+\sigma)} = C_F \overline{x_1(t)x_2(t+\sigma)} \quad (5.55)$$

où C_F est une constante. Dans le cas $x_1 = x_2 = x$ qui sont séparables on a alors :

$$\overline{x_1(t)y_2(t+\sigma)} = C_{F_x} \overline{x(t)x(t+\sigma)} \quad (5.56)$$

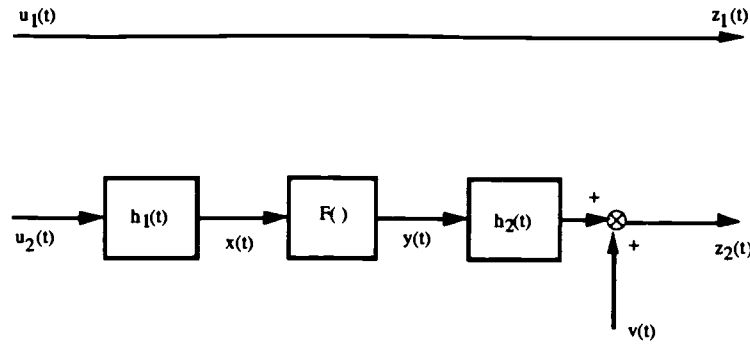


Figure 5.2: Système non-linéaire en cascade.

où

$$C_{F_x} = \frac{1}{x^2(t)} \int x F^{nl}(x) p(x) dx \quad (5.57)$$

Il est aussi possible de démontrer que $x^2(t)$ est séparable par rapport à x ce qui fournit :

$$\overline{x_1^2(t) y_2(t + \sigma)} = C_{F_x} \overline{x^2(t) x^2(t + \sigma)} \quad (5.58)$$

où

$$C_{F_x} = \frac{1}{x^4(t)} \int x^2 F^{nl}(x) p(x) dx \quad (5.59)$$

D'autres propriétés sur les processus séparables existent, mais déjà grâce aux relations 5.56 et 5.58, nous pourrons les utiliser pour l'identification non-linéaire des systèmes en cascade (figure 5.2).

Identification

Nous allons montrer comment, grâce aux propriétés de séparation des processus aléatoires, il est possible d'identifier les composantes linéaires et non-linéaires d'un modèle de Wiener-Hammerstein (figure 5.2). La réponse d'un tel modèle peut s'exprimer sous la forme :

$$z_2(t) = \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau) Q(t - \tau, \tau_1, u_2, h_1) u_2(t - \tau - \tau_1) d\tau d\tau_1 + v(t) \quad (5.60)$$

où $v(t)$: bruit de mesure
 $Q(\cdot)$: fonction analytique développable en série de Volterra

En supposant qu'il y a séparation du processus $u_1(t)$ par rapport à $x(t)$ on démontre facilement [81] les relations suivantes :

$$\overline{z_1(t) z_2(t + \sigma)} = \frac{C_F \int_{\mathcal{R}^2} h_2(\tau_1) h_1(\tau_2) \overline{u_1(t) u_2(t + \sigma - \tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2}{\overline{+u_1(t) v(t + \sigma)}} \quad (5.61)$$

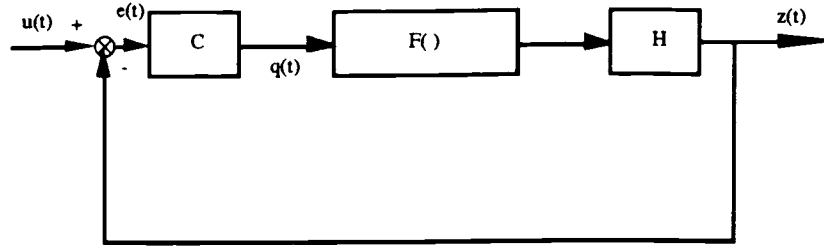


Figure 5.3: Système non-linéaire avec contre réaction unitaire.

$$\frac{\overline{u_1^2(t)z_2(t+\sigma)}}{+u_1^2(t)v(t+\sigma)} = C_{FF} \int_{\mathcal{R}^3} h_2(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3) \prod_{i=2}^3 u_2(t-\tau_i)u_2(t+\sigma) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (5.62)$$

Les résultats 5.61 et 5.62 sont applicables à n'importe quel type d'excitation séparable. Elles sont donc toujours valides dans le cas d'excitation gaussienne (processus séparable). Dans ce cas précis où $u_1(t) = u(t)$, $u_2(t) = u(t) + b$ avec $u(t)$ un bruit blanc gaussien à moyenne nulle, les relations 5.61 et 5.62 se transforment en :

$$\overline{u(t)z_2(t+\sigma)} = C_F \int_{\mathcal{R}} h_2(\tau_1)h_1(\sigma-\tau_1) d\tau_1 + \overline{u(t)v(t+\sigma)} \quad (5.63)$$

$$\overline{u^2(t)z_2(t+\sigma)} = C_{FF} \int_{\mathcal{R}} h_2(\tau_1)h_1^2(\sigma-\tau_1) d\tau_1 + \overline{u_1^2(t)v(t+\sigma)} \quad (5.64)$$

avec

$$C_F = a_1 + 2a_2b \int_{\mathcal{R}} h_1(\tau_1) d\tau_1 + \dots \quad (5.65)$$

$$C_{FF} = 2a_2 + 6a_2b \int_{\mathcal{R}} h_1(\tau_1) d\tau_1 + \dots \quad (5.66)$$

Les relations 5.63 et 5.64 vont permettre d'identifier par une méthode de moindres carrés [80] les réponses impulsionnelles $\mu_1 h_1(t)$, et $\mu_2 h_2(t)$, où μ_1 et μ_2 sont des constantes. L'identification des paramètres non-linéaires a_i se fera en minimisant l'erreur entre le modèle et la théorie (chapitre 6). L'avantage de cette technique est qu'elle ne passe pas directement par une représentation en séries de Volterra, ce qui lui permet d'avoir un domaine d'application très vaste qui inclut des non-linéarités violentes telles que des saturations ou des zones mortes.

5.4.2 Contre réaction unitaire

Nous allons considérer le système représenté par le schéma 5.3. Ce type de représentation peut se modéliser à l'aide d'une équation de convolution :

$$z(t) = \tilde{H} * F^{nl}(C * (u - z)) \quad (5.67)$$

La partie linéaire de F^{nl} peut être introduite dans la fonction de transfert \bar{H} en la remplaçant par $H = [I + a_1 \bar{H} * C]^{-1} * \bar{H}$ ce qui donne :

$$z(t) = H * \left(\sum_{i \geq 2} a_i [C * (u - z)]^i + a_1 C * u \right) \quad (5.68)$$

Les noyaux de Volterra seront déterminés grâce à la propriété d'homogénéité qui impose :

$$w_1(t) = H * (a_1 C * u) \quad (5.69)$$

$$w_2(t) = H * (a_2 C * (u - w_1)^2) \quad (5.70)$$

$$w_3(t) = H * (2a_2 (C * w_1)(C * w_2) + a_3 C * (u - w_1)^3) \quad (5.71)$$

ce qui donne :

$$h_1(t) = a_1 H * C \quad (5.72)$$

$$h_2(t) = a_2 \int_{\mathcal{R}} H(\tau) [C * (I - h_1)](\tau_1 - \tau) [C * (I - h_1)](\tau_2 - \tau) d\tau \quad (5.73)$$

L'identification de 5.68 passe par l'estimation des fonctions de transfert H et C , puis l'acquisition des a_i . Pour déterminer H et C , on utilisera la technique des corrélations qui permet d'écrire :

$$\overline{w_1(t)u(t - \sigma)} = h_1(\sigma) = a_1 H * C \quad (5.74)$$

pour une excitation gaussienne à moyenne nulle et variance unitaire. La corrélation sur le noyau 2 fournit, quant à lui :

$$\overline{w_2'(t)u^2(t - \sigma)} = 2a_2 \int_{\mathcal{R}} H(\tau) [C * (I - h_1)]^2(\sigma - \tau) d\tau \quad (5.75)$$

$$\text{où } w_k'(t) = w_k(t) - \overline{w_k(t)}$$

L'estimation des corrélations 5.74 et 5.75 sera effectuée à l'aide de plusieurs essais à des niveaux de densité spectrale différents. (chapitre 6). L'identification de H et C sera obtenue, comme pour le cas en cascade, par une méthode de moindres carrés. Une démarche identique sera faite pour identifier les paramètres non-linéaires a_i .

5.4.3 Système multiplicatif

Ce type de système est caractéristique d'une réalisation de Volterra où les noyaux sont factorisables (produit de fonctions de transfert). Comme dans le cas précédent, ces noyaux peuvent être identifiés par des essais à différents niveaux, nous présenterons ici, une autre

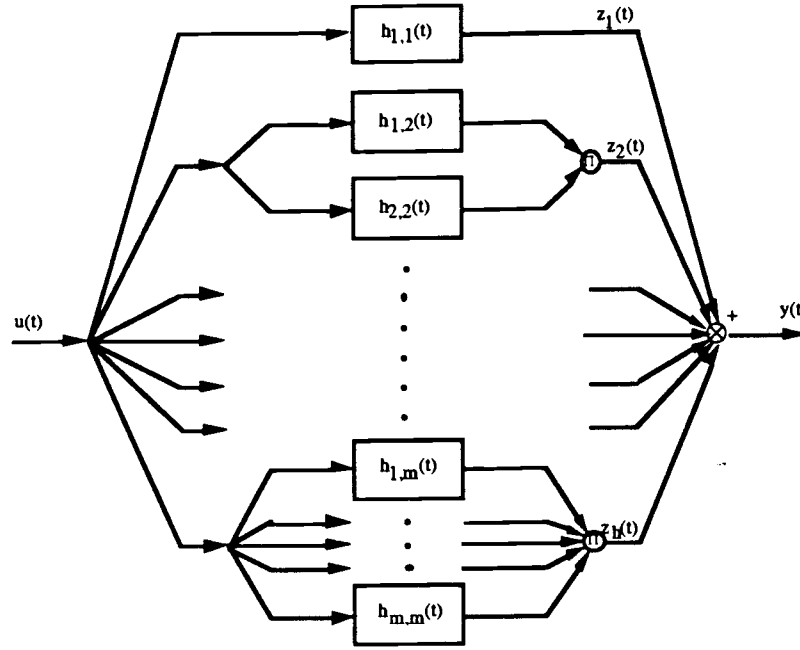


Figure 5.4: Système non-linéaire factorisable.

méthode utilisant un excitation composée de plusieurs signaux gaussiens f_i indépendants, soit :

$$u(t) = \sum_{j=1}^m f_j(t) \quad (5.76)$$

La réponse du système est alors définie par la série (figure 5.4) :

$$y(t) = \sum_{j=1}^m z_j(t) = \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{R}^j} \prod_{i=1}^m h_{i,j}(\tau_i) \left(\sum_{k=1}^m f_k(t - \tau_i) \right) d\tau_i \quad (5.77)$$

Si chaque f_i sont indépendants 2 à 2 et $\overline{f_i(t)f_i(t+\sigma)} = \beta_i \delta(\sigma)$, on démontre alors que

$$\Phi_{f_1 \dots f_m z'_m}(\sigma_1, \sigma, \dots, \sigma) = \overline{y'(t) f_1(t - \sigma_1) \prod_{p=2}^m f_p(t - \sigma)} \quad (5.78)$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{R}^j} \prod_{i=1}^m h_{i,j}(\tau_i) \left(\sum_{k=1}^m f_k(t - \tau_i) \right) f_1(t - \sigma_1) d\tau_i \prod_{p=2}^m f_p(t - \sigma) \quad (5.79)$$

Cette corrélation 5.79 permet d'isoler instantanément le noyau d'ordre m . On notera aussi que sa dimension ne varie pas en fonction de l'ordre du noyau. Les propriétés des f_i définis précédemment nous permettent de simplifier l'expression 5.79 en :

$$\Phi_{f_1 \dots f_m z'_m}(\sigma_1, \sigma, \dots, \sigma) = (m-1)! \left(\prod_{n=1}^m \beta_n \right) \sum_{i=1}^m (h_{i,m}(\sigma_1) \prod_{j=1, i \neq j}^m h_{j,m}(\sigma)) \quad (5.80)$$

Afin de simplifier les calculs, on posera :

$$\Psi_m(\delta_i, \delta_j) = \frac{\Phi_{f_1 \dots f_m z'_m}(\delta_i, \delta_j, \dots, \delta_j)}{(m-1)! \left(\prod_{n=1}^m \beta_n \right)} \quad (5.81)$$

avec $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$.

L'identification de chaque fonction de transfert de $h_{i,m}$ $i = 1, \dots, m$ définis pour le noyau factorisable d'ordre m sera effectué par une méthode de minimisation non-linéaire.

Le critère J à minimiser sera alors défini par :

$$J(h) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Psi_m(\delta_i, \delta_j) - \hat{\Psi}_m(\delta_i, \delta_j))^2 \quad (5.82)$$

$$\text{où } h = \begin{pmatrix} h_{1,m}(\delta_1) \\ \vdots \\ h_{1,m}(\delta_N) \\ h_{2,m}(\delta_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{m,m}(\delta_N) \end{pmatrix}.$$

Une fois obtenue l'estimation des $h_{k,m}$ ($k = 1, \dots, m$) aux points particuliers δ_i ($i = 1, \dots, N$) alors on peut écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Psi_m(t, \delta_1) \\ \vdots \\ \Psi_m(t, \delta_N) \end{pmatrix}}_{F_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \prod_{i=2}^m \hat{h}_{i,m}(\delta_1) & \cdots & \prod_{i=1, i \neq m}^m \hat{h}_{i,m}(\delta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \prod_{i=2}^m \hat{h}_{i,m}(\delta_N) & \cdots & \prod_{i=1, i \neq m}^m \hat{h}_{i,m}(\delta_N) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{h}_{1,m}(t) \\ \vdots \\ \hat{h}_{m,m}(t) \end{pmatrix}}_{h_t} \quad (5.83)$$

ce qui permet de connaître $h_{i,m}$ sur tout l'intervalle où est définie la corrélation $\Psi_m(t, \delta_i)$ à l'aide de la méthode des moindres carrés qui fournit :

$$h_t = (A^t A)^{-1} A^t F_t \quad m > N \quad (5.84)$$

$$h_t = A^{-1} F_t \quad m = N \quad (5.85)$$

L'estimation du noyau d'ordre $m-1$ est obtenue de la même manière, mais cette fois en calculant la corrélation $\Psi_{m-1}(\delta_i, \delta_j)$. L'opération sera répétée jusqu'à $m=1$. Cette méthode peut s'avérer très lourde si l'on veut prendre en compte un grand nombre de noyaux.

5.4.4 Modèle Sm

Le modèle Sm (figure 5.5) consiste en un ensemble d'éléments non-linéaires en parallèle sommé en sortie. Cette classe de systèmes a été très étudiée par Baumgartner S.L. et

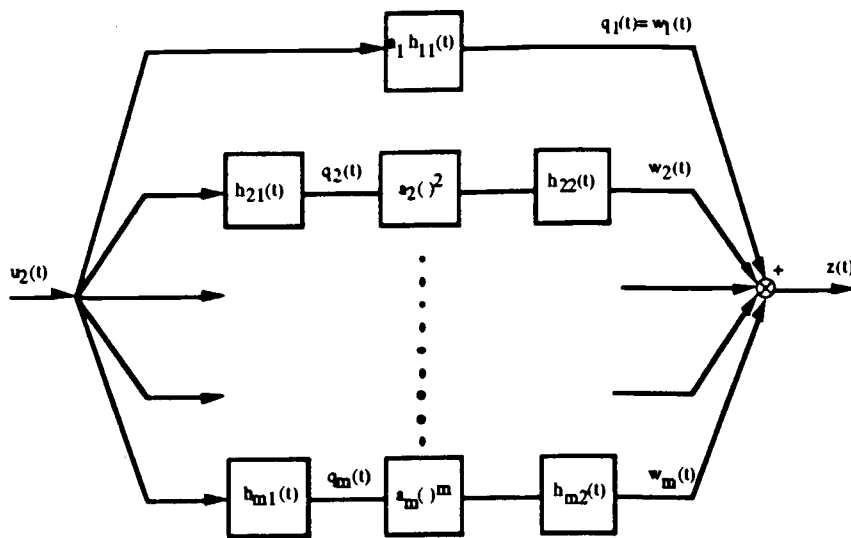


Figure 5.5: Système non-linéaire Sm.

Rugh W.S. [89] et a donné lieu à plusieurs "versions" temporelles et fréquentielles pour son analyse. Nous présenterons ici rapidement les résultats obtenus en temporels, la mise en oeuvre fréquentielle étant plus lourde et abondamment documentée [23] [89] et [74]. L'identification des différentes fonctions de transfert h_{i1} et h_{i2} seront effectuées en calculant les corrélations :

$$\overline{w'_k(t)u(t+\sigma)} = C \int_{\mathcal{R}} h_{k1}(\tau_1)h_{k2}(\sigma - \tau_1)d\tau_1 \quad (5.86)$$

$$\overline{w'_k(t)u^2(t+\sigma)} = D \int_{\mathcal{R}} h_{k2}(\tau_1)h_{k1}^2(\sigma - \tau_1)d\tau_1 \quad (5.87)$$

Ces relations étant obtenues par n essais aléatoires indépendants. L'estimation des paramètres a_i sera réalisée à l'aide d'une méthode de moindres carrés.

5.5 La représentation de Wiener

La représentation de Wiener est l'équivalent orthogonal des séries de Volterra. Par contre, elle présente des caractéristiques de convergence bien meilleure [3]. A partir d'un ensemble de fonctionnelles G_n orthogonales au sens statistique, il est possible de déterminer selon l'excitation $u(t)$, les caractéristiques des noyaux k_n qui lui sont associées :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(k_n; u(t)) \quad (5.88)$$

En effet, dans le cas où $u(t)$ est un bruit blanc gaussien, on obtiendra un certain type de fonctionnelles qui sera différent si l'excitation est non-gaussienne. Nous aborderons donc les différentes mises en oeuvre de la série de Wiener selon la nature de l'excitation et les techniques d'identification qui en découlent.

5.5.1 Cas du bruit blanc gaussien stationnaire

Mise en oeuvre

Nous supposons dans ce paragraphe que l'excitation $u(t)$ est gaussienne et stationnaire. Dans ce cas, l'orthogonalisation de la série de Wiener se fera par le procédé de Gram-Schmidt. Les propriétés "statistiques" d'orthogonalité par rapport au bruit blanc stationnaire sont définies par :

$$E(G_m(h_m; u(t))G_n(k_n; u(t))) = 0 \quad \forall m \neq n \quad (5.89)$$

$$E(G_n(h_n; u(t))G_n(k_n; u(t))) = n!A^n \int_{\mathcal{R}^n} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)k_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad (5.90)$$

Les premiers noyaux sont obtenus en écrivant :

$$G_0(k_0; u(t)) = k_0 \quad (5.91)$$

puis que $G_1(k_1; u(t)) = \int_{\mathcal{R}} k_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 + G_0(p_0; u(t))$ est orthogonale à G_0 ce qui donne grâce à la relation 5.89 :

$$p_0 = 0 \quad G_1(k_1; u(t)) = \int_{\mathcal{R}} k_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 \quad (5.92)$$

et $G_2(k_2; u(t)) = \int_{\mathcal{R}^2} k_2(\tau_1, \tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + G_1(p_1; u(t)) + G_0(p_0; u(t))$ doit être orthogonal à G_1 et G_0 ce qui impose :

$$p_0 = -A \int_{\mathcal{R}} k_2(\tau, \tau) d\tau \quad \text{et} \quad p_1(t) = 0$$

$$G_2(k_2; u(t)) = \int_{\mathcal{R}^2} k_2(\tau_1, \tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 - A \int_{\mathcal{R}} k_2(\tau, \tau) d\tau \quad (5.93)$$

Les autres fonctionnelles G_p pourront être calculées de la même manière. En fait, on peut démontrer qu'il existe une expression générale fournissant ces noyaux :

$$G_p(k_p; u(t)) = \int_{\mathcal{R}^p} k_p(\tau_1, \dots, \tau_p)H(u(t); t-\tau_1, \dots, t-\tau_p)d\tau_1 \cdots d\tau_p \quad (5.94)$$

où $H(u(t); \tau_1, \dots, \tau_p)$ est le polynôme d'Hermite associé au bruit blanc $u(t)$ introduit par Barrett dont les expressions sont données par :

$$H_0(u(t); t) = 1 \quad (5.95)$$

$$H_1(u(t); \tau_1) = e(\tau_1) \quad (5.96)$$

$$H_2(u(t); \tau_1, \tau_2) = e(\tau_1)e(\tau_2) - A\delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (5.97)$$

$$H_3(u(t); \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \prod_{i=1}^3 e(\tau_i) - A(e(\tau_1)\delta(\tau_2 - \tau_3) + e(\tau_2)\delta(\tau_3 - \tau_1) + e(\tau_3)\delta(\tau_1 - \tau_2)) \quad (5.98)$$

et A la variance du bruit blanc.

Cette modélisation peut être utilisée pour caractériser des séries de Volterra en termes de G fonctionnelles 5.99 ce qui permet d'établir un lien entre les noyaux de Volterra et de Wiener défini par :

$$k_{p-2m}(\sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) = \frac{(-1)^m p! A^m}{(p-2m)! m! 2^m} \int_{\mathcal{R}^m} h_p(\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_m, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-2m}) \prod_{j=1}^m d\tau_j \quad (5.99)$$

Identification

L'identification des noyaux k_n se fait par une technique de corrélation. On démontre sur les 3 premiers noyaux que :

$$k_0 = \overline{x(t)} \quad (5.100)$$

$$k_1(\sigma_1) = \frac{1}{A} \overline{x(t)u(t-\sigma_1)} \quad \text{si } \sigma_1 \geq 0 \quad (5.101)$$

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2A^2} \overline{x(t)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)} \quad \text{si } \sigma_1 \geq 0 \text{ et } \sigma_2 \geq 0 \quad (5.102)$$

On peut remarquer que l'estimation de k_2 s'écrit encore :

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2A^2} \overline{(x(t) - G_0(k_0; u(t)) - G_1(k_1; u(t)))u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)} \quad (5.103)$$

ou bien :

$$k_2(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \frac{1}{2A^2} \overline{x(t)H_2(u(t))} & \text{pour } \sigma_i \geq 0 \ i \in [1, \dots, 2] \\ 0 & \text{des que } \sigma_i < 0 \ i \in [1, \dots, 2] \end{cases} \quad (5.104)$$

Cette dernière relation se généralise pour tous les autres noyaux en posant :

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} \frac{1}{n!A^n} \overline{x(t)H_n(u(t))} & \text{pour } \sigma_i \geq 0 \ i \in (1, \dots, n) \\ 0 & \text{des que } \sigma_i < 0 \ i \in (1, \dots, n) \end{cases} \quad (5.105)$$

Une remarque importante est à noter : si tous les $\sigma_i \ i \in [1, n]$ sont différents 2 à 2, alors l'écriture 5.105 se simplifie pour donner :

$$k_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n!A^n} \overline{x(t)u(t-\sigma_1) \cdots u(t-\sigma_n)} \quad (5.106)$$

La relation 5.106 fournit une équivalence entre les inter-corrélations et les noyaux de Wiener. L'identification des noyaux k_i ne nécessitera pas, comme pour les noyaux de Volterra, la mise en oeuvre de plusieurs essais à des niveaux différents. Cependant, les noyaux de Wiener ne sont pas homogènes par rapport à u ce qui supprime certaines facilités de calculs liés à cette propriété.

5.5.2 Cas d'un bruit non blanc stationnaire

Mise en oeuvre

Souvent l'excitation n'est pas parfaitement "blanche", il est donc nécessaire d'introduire un filtre afin de redonner artificiellement une structure de bruit blanc à l'excitation. Nous supposons ici que ce filtre $\phi(t)$ est linéaire et possède tous ses zéros et pôles dans le demi-plan gauche, afin que $\phi(t)$ soit inversible et son inverse $\gamma(t)$ soit stable. On pose alors :

$$v(t) = \phi(t) * u(t) \quad (5.107)$$

où $v(t)$ est une excitation non-blanche et $u(t)$ un bruit blanc gaussien unitaire. Le calcul de ϕ se fera en mesurant l'autocorrélation de v ce qui donne:

$$\overline{v(t)v(t+\sigma)} = (\phi(t) * \phi(t))(\sigma) \quad (5.108)$$

Grâce aux propriétés de $\phi(t)$ on obtient facilement la relation :

$$u(t) = \gamma(t) * v(t) \quad (5.109)$$

Maintenant en reportant la relation 5.109 dans les équations 5.91, 5.92 et 5.93 on démontre que les fonctionnelles L_n associées à cette réalisation de Wiener sont données par :

$$L_0(k_0; v(t)) = k_0 \quad (5.110)$$

$$L_1(k_1; v(t)) = \int_{\mathcal{R}^2} k_1(\sigma_1) \gamma(\tau_1 - \sigma_1) v(t - \tau_1) d\sigma_1 d\tau_1 \quad (5.111)$$

$$L_2(k_2; v(t)) = \int_{\mathcal{R}^4} k_2(\sigma_1, \sigma_2) \gamma(\tau_1 - \sigma_1) \gamma(\tau_2 - \sigma_2) v(t - \tau_1) v(t - \tau_2) d\sigma_1 d\sigma_2 d\tau_1 d\tau_2 \\ - \int_{\mathcal{R}} k_2(\sigma_1, \sigma_1) d\sigma_1 \quad (5.112)$$

La réponse du système non-linéaire soumis à une excitation non-blanche stationnaire est obtenue en écrivant :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} L_n(k_n; v(t)) \quad (5.113)$$

L'identification des noyaux k_n s'effectuera de la même manière que pour le cas de l'excitation par bruit blanc gaussien stationnaire à l'aide de la relation 5.105. Cette méthode n'est pas toujours applicable, car souvent le transfert entre $v(t)$ et $u(t)$ n'est pas linéaire. Par exemple, si un excitateur est piloté (au niveau du courant bobine) par un bruit blanc gaussien, le capteur de force situé entre le pot vibrant et la structure mesure une grandeur caractéristique à la fois de la commande électrique et du système mécanique et sera donc non-linéaire si la structure est non-linéaire.

5.5.3 Cas du bruit blanc gaussien non-stationnaire

Mise en oeuvre

L'instationnarité du processus d'excitation introduit une difficulté supplémentaire dans la technique d'identification. En effet, toutes les corrélations et les moyennes qui ont été effectuées jusqu'à présent supposent l'ergodicité et la stationnarité des signaux mesurés. Les travaux de Marmarelis [95] ont étendu l'utilisation des noyaux de Wiener aux cas instationnaires. Pour cela, il suppose que le signal d'excitation $u(t)$ est un bruit blanc gaussien modulé par une fonction $A(t)$:

$$u(t) = A(t)w(t) \quad (5.114)$$

où $w(t)$ est un bruit blanc gaussien unitaire et $A(t)$ une fonction analytique appelée enveloppe de l'entrée. Marmarelis a démontré que l'on pouvait introduire des Q_n fonctionnelles analogues aux G_n fonctionnelles (même propriété d'orthogonalité) incluant l'effet instationnaire de l'excitation soit :

$$Q_0(q_0; u(t)) = q_0 \quad (5.115)$$

$$Q_1(q_1; u(t)) = \int_{\mathcal{R}} q_1(t, \tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (5.116)$$

$$Q_2(q_2; u(t)) = \int_{\mathcal{R}^2} q_2(t, \tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \int_{\mathcal{R}} q_2(t, \tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (5.117)$$

Identification

Pour identifier les noyaux q_n on utilise la même technique que pour les noyaux k_n , mais cette fois la moyenne statistique ne peut être remplacée par la moyenne temporelle. Une hypothèse supplémentaire doit être faite; elle suppose que l'enveloppe $A(t)$ ne s'annule pas, et est bornée sur l'intervalle temporel étudié. L'identification est donc obtenue en écrivant :

$$q_n(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n! \prod_{i=1}^n A^2(t - \tau_i)} E[w_n(t) \prod_{j=1}^n u(t - \tau_j)] \quad \text{pour } \sigma_i \geq 0 \ i \in [1, n] \quad (5.118)$$

où $w_n(t) = x(t) - \sum_{m=0}^{n-1} Q_m(q_m; u(t))$.

La moyenne $E(\)$ nécessiterait, pour être réalisée, d'effectuer un grand nombre d'essais indépendants. Cette technique n'étant pas réalisable d'un point de vue pratique, Marmarelis a introduit l'opérateur de moyen $r_{n,m}$ sur l'intervalle temporel $[-R, R]$ comme

étant :

$$r_{n,m} = T_r(Q_n(\tau)Q_m(\tau)) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R Q_n(\tau)Q_m(\tau)d\tau \quad (5.119)$$

Pour analyser l'erreur commise en utilisant ce type de moyen, Marmarelis a calculé la variance et la moyenne de $r_{n,m}$ ce qui donne :

$$E(r_{n,m}) = 0 \quad \forall n \neq m \quad (5.120)$$

$$Var(r_{n,m}) = 0 \frac{1}{4R^2} \int_{-R}^R \int_{-R}^R E(Q_n(\tau_1)Q_m(\tau_1)Q_n(\tau_2)Q_m(\tau_2))d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.121)$$

Il est alors possible de montrer que les valeurs significatives de l'intégrale ci-dessus dans le plan (τ_1, τ_2) sont situées dans des régions restreintes déterminées par la mémoire μ des noyaux q_n , et qu'elles sont indépendantes de l'intervalle d'intégration. A partir de ce résultat, on démontre que la variance décroît de manière inversement proportionnelle à R dès que R est très supérieur à μ . Ce résultat va nous permettre de remplacer la moyenne $E(\)$ par l'opérateur T_R pour $R \rightarrow \infty$. On peut écrire :

$$T_\infty(q_n(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n)) = T_\infty\left(\frac{1}{n! \prod_{i=1}^n A^2(t - \tau_i)} E[w_n(t) \prod_{j=1}^n u(t - \tau_j)]\right) \quad \text{pour } \sigma_i \geq 0 \ i \in [1, n] \quad (5.122)$$

Connaissant $A(t)$, l'estimation des noyaux q_n se fera grâce à la formule ci-dessus. Marmarelis propose aussi d'effectuer un développement orthogonal des noyaux q_n et $A(t)$ afin de les identifier. On écrit alors que :

$$q_n(t, \sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) b_i(t) \quad (5.123)$$

$$A^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i(t) \quad (5.124)$$

où $(b_i(t))$ est une base orthonormale.

L'estimation des c_i^n sera obtenue grâce aux propriétés d'orthogonalité qui permettent d'écrire :

$$c_i^n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{i!} T_\infty(w_n(t) \prod_{j=1}^n z(t - \sigma_j) b_i(t)) \quad \text{avec} \quad z(t) = \frac{u(t)}{A^2(t)} \quad (5.125)$$

Pour appliquer la formule 5.125 il est nécessaire de connaître $A(t)$ (ou a_i). L'identification des a_i de l'équation 5.124 sera obtenue en calculant :

$$\hat{a}_i = \frac{1}{R} \int_0^R u^2(t) b_i(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^R A^2(t) w^2(t) b_i(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^R \sum_{p=1}^{\infty} a_p b_p(t) w^2(t) b_i(t) dt \quad (5.126)$$

La moyenne statistique permet d'écrire :

$$E(\hat{a}_i) = \frac{1}{R} \int_0^R \sum_{p=1}^{\infty} a_p b_p(t) E(w^2(t)) b_i(t) dt = a_i E(w^2(t)) \quad (5.127)$$

L'estimation \hat{a}_i de a_m est consistante car la limite de la variance de \hat{a}_i tend vers zéro quand R tend vers l'infini ce qu'on démontre grâce à la relation :

$$\text{Var}(\hat{a}_i) = \frac{2}{R^2} E(w^2(t)) \int_0^R A^4(t) b_i(t) dt \quad (5.128)$$

Comme $w(t)$ est bruit blanc gaussien unitaire alors $E(w^2(t)) = 1$ ce qui permet d'obtenir les a_i en écrivant simplement que :

$$\hat{a}_i = \frac{1}{R} \int_0^R u^2(t) b_i(t) dt \quad (5.129)$$

Chapitre 6

Identification d'une non-linéarité localisée

6.1 Introduction

Nous avons vu précédemment que les séries de Volterra pouvaient être appliquées à un grand nombre de problèmes, mais qu'elles présentaient l'inconvénient de nécessiter de nombreux calculs. Ce problème a donc obligé la plupart des chercheurs à utiliser ce formalisme pour des systèmes particuliers. Ainsi, nous avons pu voir qu'il a été appliqué à des systèmes en cascade, des systèmes Sm, des systèmes multiplicatifs, et aussi des systèmes en contre-réaction non-linéaire. Ce dernier type de problème présente un grand intérêt car il correspond au même phénomène que l'effet d'une non-linéarité localisée sur une structure linéaire. Il semble donc très intéressant d'appliquer ce type de modèle dans un cadre mécanique et multi-dimensionnel. Les travaux réalisés par Billings et Fakouri [82] ont montré qu'on pouvait acquérir séparément les fonctions de transferts linéaires et les coefficients non linéaires du problème. En fait, cette méthode d'identification est rendue possible si la non-linéarité dépend uniquement des variables de déplacements et de vitesses mesurées au niveau de la liaison entre la non-linéarité et la structure. Les applications faites par Billings et Fakouri [81] [82][80] concernent principalement des problèmes d'automatique où les fonctions de transferts sont simples (ordre faible). Nous nous proposons ici d'étendre cette méthode aux systèmes mécaniques mono et multi-dimensionnels pouvant se représenter à l'aide du diagramme structurel 6.1. Puis, nous nous intéresserons au cas d'une non-linéarité locale servant à coupler deux structures linéaires. Dans ce dernier cas, il est possible d'extraire les caractéristiques linéaires et non-linéaires dans la mesure où la non-linéarité est une fonction de la différence de déplacement et de vitesse des deux points de liaisons a et b (figure 6.3). Un tel système mécanique peut se mettre aussi sous la forme d'un diagramme structurel 6.2.

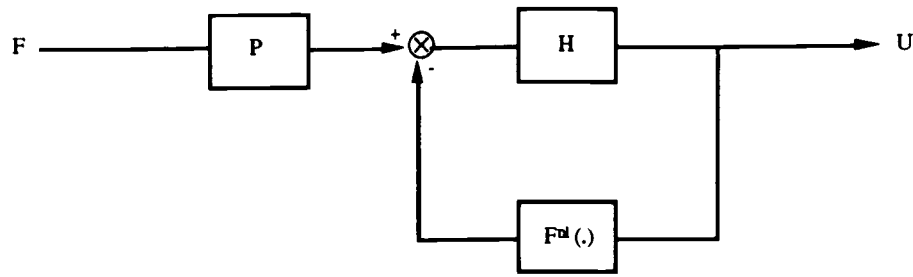


Figure 6.1: Système en contre réaction non-linéaire.

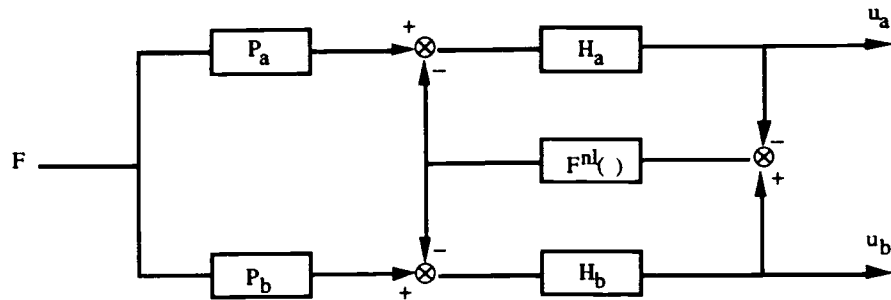


Figure 6.2: Systèmes en contre réaction non-linéaire.

6.2 Formulation du problème

La théorie sur les systèmes en contre réaction non-linéaire suppose que la structure est invariante au cours du temps et possède une non linéarité faible et régulière. L'ensemble de ces hypothèses, nous permet d'utiliser la modélisation par les séries de Volterra. Afin que les calculs qui seront développés soient simples et applicables dans un contexte multi-dimensionnel, nous introduirons la matrice du produit tensoriel de Kronecker déjà utilisée par A.Diaz et A.Desroches [40] dans la modélisation des équations au différences non-linéaires. Cela nous permet d'écrire :

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \quad \text{ou} \quad W_i = \int_{\mathbb{R}^n} G_i(s_1, \dots, s_i) F(t - s_1) \otimes \dots \otimes F(t - s_i) ds_1 \dots ds_i \quad (6.1)$$

où U : vecteur des déplacements et des vitesses
 F : vecteur des forces d'excitation
 $G_i(s_1, \dots, s_i)$: matrice du noyau de Volterra d'ordre i
 \otimes : produit tensoriel de Kronecker

La restriction au cas des systèmes possédant une non-linéarité localisée permet de calculer analytiquement la forme des noyaux de Volterra, ce qui se serait avéré difficile dans un cas général. Nous supposons donc que le système mécanique étudié correspond à la figure 6.3 ce qui permet alors d'écrire :

$$U^a = (\tilde{H} * P)^a * F - \tilde{H}^a * F^{nl}(U^b - U^a) \quad (6.2)$$

$$U^b = (\bar{H} * P)^b * F - \bar{H}^b * F^{nl}(U^b - U^a) \quad (6.3)$$

- où U^a : vecteur des déplacements et des vitesses au point a
 U^b : vecteur des déplacements et des vitesses au point b
 F^{nl} : vecteur des forces non-linéaires exercées sur les deux structures
 F : vecteur des forces d'excitation

Il est à noter que l'ensemble des non linéarités qui pourra être pris en compte dans cette méthode devra vérifier le théorème de Weierstrass [16], afin d'être sûr que l'approximation polynomiale de F^{nl} soit valide. Ce qui permet alors d'écrire :

$$F^{nl}(U) = \sum_{k=1}^m A_k [U \otimes \dots \otimes U] \quad (6.4)$$

où A_k est la matrice des coefficients polynomiaux associée aux termes non linéaires d'ordre k .

en supposant que U peut s'exprimer à l'aide des séries de Volterra, on obtient alors :

$$W_1 = \bar{H} * P * F - \bar{H} * (A_1 W_1^{ab}) \quad (6.5)$$

$$W_2 = \bar{H} * (A_1 W_2^{ab}) - \bar{H} * (A_1 [W_1^{ab} \otimes W_1^{ab}]) \quad (6.6)$$

$$W_3 = \bar{H} * (A_1 W_3^{ab}) - \bar{H} * (A_2 [W_1^{ab} \otimes W_2^{ab} + W_2^{ab} \otimes W_1^{ab}]) \\ - \bar{H} * (A_3 [W_1^{ab} \otimes W_1^{ab} \otimes W_1^{ab}]) \quad (6.7)$$

où $W_i^{ab} = W_i^b - W_i^a$

Afin d'établir une relation de récurrence entre les W_k , on inclura la partie linéaire du joint A_1 dans la fonction de transfert \bar{H} . En notant $H = (1 + A_1 \bar{H})^{-1} * \bar{H}$, et peut démontrer les relations suivantes :

$$W_1 = -H * (A_1 W_1^{ab}) \quad (6.8)$$

$$W_2 = -H * (A_1 [W_1^{ab} \otimes W_1^{ab}]) \quad (6.9)$$

$$W_3 = -H * (A_2 [W_1^{ab} \otimes W_2^{ab} + W_2^{ab} \otimes W_1^{ab}]) - H * (A_3 [W_1^{ab} \otimes W_1^{ab} \otimes W_1^{ab}]) \quad (6.10)$$

L'ensemble de ce système permet de déterminer de façon analytique les noyaux de Volterra de la structure 6.3.

$$G_1(t_1) = (H * P)(t_1) \quad (6.11)$$

$$G_2(t_1, t_2) = - \int_{\mathfrak{R}} H(s_0) A_2 [G_1^{ab}(t_1 - s_0) \otimes G_1^{ab}(t_2 - s_0) ds_0] \quad (6.12)$$

$$G_3(t_1, t_2, t_3) = - \int_{\mathfrak{R}} H(s_0) \{ A_3 [G_1^{ab}(t_1 - s_0) \otimes G_1^{ab}(t_2 - s_0) \otimes G_1^{ab}(t_3 - s_0) \\ + A_2 [G_1^{ab}(t_1 - s_0) \otimes G_2^{ab}(t_2 - s_0, t_3 - s_0) \\ + G_2^{ab}(t_1 - s_0, t_2 - s_0) \otimes G_1^{ab}(t_3 - s_0)] \} ds_0 \quad (6.13)$$

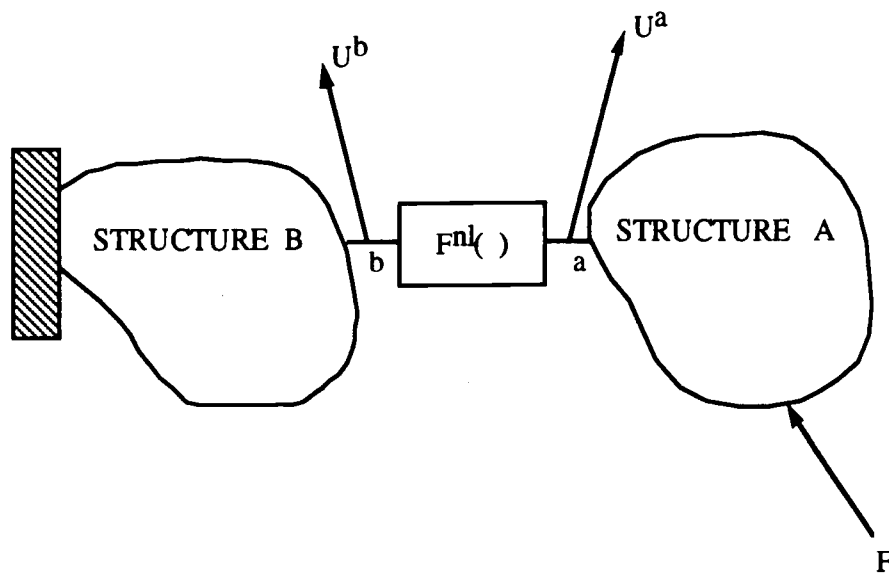


Figure 6.3: Systèmes mécaniques couplés par une non-linéarité

Nous sommes donc arrivés à calculer les noyaux de Volterra de manière analytique pour une structure linéaire couplée à une non-linéarité localisée. On peut noter que les équations 6.10 et 6.13 correspondant au noyau d'ordre trois sont assez compliquées. En fait, nous verrons qu'il est nécessaire de supposer $A_2 = 0$, si nous voulons l'utiliser lors de l'identification des fonctions de transferts. Cette restriction nous obligera à employer uniquement les noyaux d'ordre deux, lorsque la non-linéarité présentera des effets non-linéaires quadratiques. Il reste maintenant à utiliser ces formules dans un cadre expérimental où l'excitation F et la réponse U sont connues.

6.2.1 Cas de l'excitation aléatoire

Le choix du type d'excitation est essentiel si nous voulons parvenir à exploiter l'information contenue dans les noyaux de Volterra. C'est la forme particulière des éléments de la série qui va guider notre choix. Plusieurs solutions sont envisageables, on citera : l'excitation impulsionnelle, ou encore l'excitation aléatoire. Nous utiliserons la dernière technique qui est la plus adaptée à notre type de problème ainsi qu'à son exploitation dans un cadre expérimental. Nous choisirons une excitation de type bruit blanc gaussien à moyenne nulle et à densité spectrale $a_i/2\pi$, nous avons alors les propriétés suivantes :

$$\overline{f_i(t_1)} = 0 \quad (6.14)$$

$$\overline{f_i(t_1)f_i(t_2)} = a_i\delta(t_1 - t_2) \quad (6.15)$$

$$\overline{f_i(t_1)f_i(t_2)f_i(t_3)} = 0 \quad (6.16)$$

$$\overline{f_i(t_1)f_i(t_2)f_i(t_3)f_i(t_4)} = a_i^2(\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) + \delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4))$$

$$+\delta(t_1 - t_4)\delta(t_2 - t_3)) \quad (6.17)$$

L'étude des noyaux se fera en analysant les effets de chaque f_i ($i = 1, \dots, p$) sur U . L'exploitation simultanée des équations 6.8 à 6.10 et 6.14 à 6.17 fournira alors :

$$\overline{W_1(\sigma)f_i(t+\sigma)} = a_i(H * P)_i \quad (6.18)$$

$$\overline{W_2'(\sigma)f_i^2(t+\sigma)} = -2a_i^2 H * \{A_2[(H * P)_i^{ab} \otimes (H * P)_i^{ab}]\} \quad (6.19)$$

$$\overline{W_3(\sigma)f_i(t+\sigma)} = -3a_i^2 H * \{B_i(H * P)_i^{ab}\} \quad \text{si} \quad A_2 = 0 \quad (6.20)$$

où B_i : matrice constante
 $(H * P)_i$: i^{eme} colonne de $H * P$
 W_i' : est égale à $W_i - \overline{W_i}$

L'équation 6.18 permet une identification directe de $(H * P)_i$. Par contre, l'utilisation de 6.19 sera possible uniquement sur les degrés de liberté possédant au moins des monômes d'ordre deux et 6.20 sur tous les autres. Il reste maintenant à exploiter l'ensemble de ces formules afin de fournir une identification complète du système mécanique au travers de l'acquisition de H , $H * P$ et des A_k .

6.3 Identification du système

Nous avons vu précédemment que, par un calcul de corrélation nous pouvions acquérir les fonctions de transferts du système. A cette étape du développement, il reste deux problèmes à résoudre : le premier est d'extraire les résultats 6.18, 6.19 et 6.20 séparément de U et, le deuxième est d'adopter une stratégie pour identifier H et $H * P$. Pour résoudre le premier problème, nous utiliserons une technique déjà employée par Billings et Fakouri [82] qui exploitent plusieurs essais à des niveaux variables. En effet, si U_{ik} est la réponse à une excitation sur le i^{eme} degré de liberté par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle et à densité spectrale $a_k/2\pi$, nous pouvons alors écrire que :

$$\overline{U_{ik}(\sigma)f_i(\sigma+t)} = \sum_{r=1}^q \overline{W_{2r-1}(\sigma)f_i(\sigma+t)} = \sum_{r=1}^q a_k^r \overline{\Omega_{2r-1}(\sigma)N_i(\sigma+t)} \quad (6.21)$$

où q : représente l'ordre de troncature de la série de Volterra
 N_i : processus gaussien à moyenne nulle et densité spectrale $1/2\pi$
 $W_r = \Omega_r$ si $f_i = N_i$

Si q essais sont effectués avec des densités spectrales 2 à 2 indépendantes, nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \overline{\Omega_1 N_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\Omega_q N_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1^q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_q & \cdot & \cdot & \cdot & a_q^q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{U_{i1} f_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{U_{iq} f_i} \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Une procédure analogue sera mise en oeuvre pour l'acquisition des noyaux pairs grâce aux calculs des $\overline{U'_i(\sigma) f_i^2(\sigma + t)}$.

L'identification de $(H * P)_i$ se fera en utilisant chaque élément de $\overline{\Omega_1(\sigma) N_i(t + \sigma)}$ comme étant le résultat d'un processus ARMA (auto regressive moving average) [21] à une excitation impulsionnelle. Par contre, l'identification de H requiert à priori l'utilisation d'une méthode ARMA multi-entrée [19] où le vecteur excitation serait $(H * P)_i \otimes (H * P)_i$ ou $(H * P)_i$. Nous constatons alors que l'identification fournie HC où C est une matrice de constante (C pouvant prendre les valeurs $-2A_2$ ou $-3B_i$). En fait, une telle méthode n'est pas applicable en raison de la grande cohérence existant entre les divers éléments du vecteur excitation. C'est principalement pour cette raison que la déconvolution s'avère difficile. Par contre, le problème disparaît si la non linéarité ne porte que sur un seul degré de liberté. En effet, nous sommes ramenés à un problème de type ARMA mono-excitation où l'effet non-linéaire est fournie par l'unique élément non nul de $2A_2(H * P)_i \otimes (H * P)_i$ ou $3B_i(H * P)_i$. Le calcul de H 'seul' nécessite, l'acquisition de C . Pour cela, on pourra utiliser les propriétés de l'équilibre statique. L'acquisition des fonctions de transfert d'un point de vue pratique requiert l'identification de pseudo-pôles qui seront éliminés à l'aide d'un critère physique (par exemple fréquence en dehors de la largeur de bande du signal aléatoire ou encore participation très faible). Ces critères suffisent à l'identification de $H * P$. Par contre, le calcul de H étant toujours plus délicat, l'élimination des pseudo-pôles se fera à l'aide des résultats obtenus pour $H * P$ étant donné qu'il ont les mêmes pôles.

Afin de compléter la connaissance de notre système mécanique, il est nécessaire d'identifier les coefficients A_k . L'utilisation du produit de Kronecker n'assurant pas l'unicité des coefficients A_k pour une non linéarité donnée, on préfère identifier les coefficients non linéaires associés à chaque monôme. Dès lors, il est possible d'écrire que :

$$F^{nl} = \sum_{k=1}^m A_k [U(t) \otimes \dots \otimes U(t)] = \begin{pmatrix} \theta_{11}^1 u_1^2 + \dots + \theta_{ij..k}^1 u_i u_j \dots u_k + \dots \\ \theta_{11}^q u_1^2 + \dots + \theta_{ij..k}^q u_i u_j \dots u_k + \dots \\ \theta_{11}^n u_1^2 + \dots + \theta_{ij..k}^n u_i u_j \dots u_k + \dots \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Les coefficients non-linéaires $\theta_{ij..k}^q$ seront obtenus en écrivant :

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^s (e_{\sigma}^j)^2}{\partial \theta_{ij..k}^q} = 0 \quad (6.24)$$

$$e_{qr}^j = (U_{qr} - H * P_{qr} * f_r + H_q * F^{nl}(U_b - U_a))^j \quad (6.25)$$

- où $H * P_{qr}$: q^{eme} ligne et r^{eme} colonne de $H * P$
 H_q : q^{eme} ligne de H
 U_{qr} : q^{eme} degré de liberté excité par une force appliquée en r
 e_{qr}^j : erreur entre l'expérience et le modèle à l'instant j
 s : nombre de points utilisés pour le lissage

Il est possible d'utiliser d'autres méthodes de lissage. Ainsi, les non linéarités caractérisées par un grand nombre de monômes pourront être approximées avec succès par un ensemble de segments de droite [66], ou encore par la technique non paramétrique de Caughey et Masri . Ces méthodes ont pour but d'éviter le problème du mauvais conditionnement matriciel associé aux moindres carrés.

6.4 Applications

Afin d'illustrer la méthode proposée dans un contexte mécanique, nous étudierons trois applications différentes. La première porte sur un système mono-dimensionnel défini par une poutre en traction-compression avec une non-linéarité localisée entre la poutre et le bâti. La deuxième porte sur un système multi-dimensionnel représenté par une poutre en flexion munie elle aussi d'une non-linéarité localisée au niveau du bâti. Enfin, la troisième application porte sur deux poutres en flexion reliées par une non-linéarité de couplage. Nous utiliserons plusieurs types de non linéarité, et nous identifierons dans chacun des cas les fonctions de transfert H et $H * P$ ainsi que les coefficients non linéaires. Nous rappellerons que les fonctions de transferts peuvent toujours se mettre sous la forme :

$$H(t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-\zeta_i \omega_i t) \sin(\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} t + \varphi_i) \quad (6.26)$$

- où m : nombre total de mode pris en compte
 ω_i : pulsation du i^{eme} mode (en rad/s)
 ζ_i : taux d'amortissement du i^{eme} mode
 A_i : amplitude modale du i^{eme} mode (en m)
 φ_i : déphasage du i^{eme} mode (en rad)

6.4.1 Cas monodimensionnel

La poutre sera discrétisée en deux éléments finis, ce qui fournit trois modes pour le système linéaire joint-poutre, et nous imposerons sur chacun d'eux le taux d'amortissement. Le fait de choisir trois modes est un choix numérique, afin que le calcul des U nécessaire à

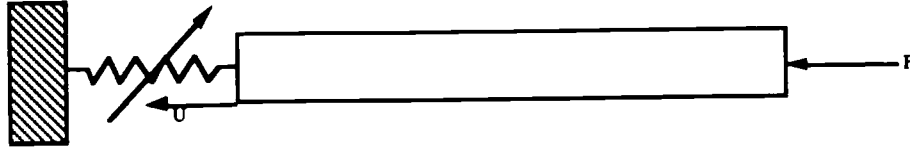


Figure 6.4: Système non-linéaire mono-dimensionnel

une bonne précision sur les corrélations ne soit pas trop longue à obtenir. Un tel problème n'existe pas dans un cadre expérimental.

Caractéristiques de la poutre :

- La poutre est formée de 2 éléments finis obtenus grâce aux matrices élémentaires :

$$K_e = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_e = \frac{\rho SL}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\frac{ES}{L} = 3.94 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ et $\rho SL = 38.42 \text{ Kg}$.

- Raideur linéaire du joint : $k = 0.4 \cdot 10^7 \text{ N/m}$.

Etude de la non-linéarité θU^3

Le calcul théorique fournit :

$$\overline{\Omega_1(\sigma)N(t+\sigma)} = H * P$$

$$\overline{\Omega_3(\sigma)N(t+\sigma)} = -bH * H * P \quad b = 3\theta \int_{\mathfrak{R}} (H * P)^2 dt = cste$$

Configuration de l'essai :

Echantillonnage: $\Delta t = 0.001 \text{ s}$

Temps total du calcul de la moyenne: 150s

Temps total sur lequel sont connues les corrélations: 1s

5 essais à densité spectrale $\beta_i \Delta t / 2\pi$ avec $\beta_i \in (1, 4, 9, 16, 25)$

$\theta = 0.4 \cdot 10^{15} \text{ N/m}^3$

Sur cet essai, le calcul du coefficient b se fera en écrivant que:

$$\frac{\lim_{t \rightarrow \infty} (-bH * V)}{\lim_{t \rightarrow \infty} (H * P * V)} = -b \quad (6.27)$$

où V est l'échelon d'Heaviside. Cette démarche utilise les caractéristiques statiques de la poutre.

L'identification de $H * P$ (tableau 6.1 et figure 6.7) et H (tableau 6.2 et figure 6.8) a été obtenue avec une bonne précision. La valeur de θ , quant à elle, a été estimée (tableau 6.3)

grâce à la méthode des moindres carrés définie précédemment, et aux fonctions de transferts identifiées. Le modèle étant complètement identifié, il pourra être utilisé comme un schéma NARMAX à l'aide de l'équation 6.2.

Etude de la non-linéarité $\theta U \dot{U}$

Le calcul théorique fournit :

$$\begin{aligned}\overline{\Omega_1(\sigma)N(t+\sigma)} &= H * P \\ \overline{\Omega_2'(\sigma)N^2(t+\sigma)} &= -2\theta H * ((H * P)(\dot{H} * P))\end{aligned}$$

Configuration de l'essai:

Echantillonnage: $\Delta t = 0.001s$

Temps total du calcul de la moyenne: 300s

Temps total sur lequel sont connues les corrélations: 1s

5 essais à densité spectrale $\beta_i \Delta t / 2\pi$ avec $\beta_i \in (1, 4, 6.25, 9, 12.25)$

$\theta = 0.7 \cdot 10^8 Ns/m^2$

Sur cet essai, le coefficient multiplicatif -2θ sera obtenu comme précédemment :

$$\frac{\lim_{t \rightarrow \infty} (-2\theta H * V)}{\lim_{t \rightarrow \infty} (H * P * V)} = -2\theta \quad (6.28)$$

L'identification de $H * P$ (tableau 6.4 et figure 6.9) est bonne. Par contre, l'estimation de H (tableau 6.5 et figure 6.10) a été plus difficile (jusqu'à 20 % d'erreurs sur l'amplitude). En effet, le calcul de la corrélation $\overline{\Omega_2'(\sigma)N^2(t+\sigma)}$ est entaché d'erreurs qui sont liées à la soustraction du biais, et au fait que son spectre est deux fois plus grand que pour $\overline{\Omega_1(\sigma)N(t+\sigma)}$. Cependant l'identification du paramètre non-linéaire θ reste correcte (tableau 6.6).

6.4.2 Cas multi-dimensionnel

Pour cet essai, nous utiliserons une poutre de type Euler-Bernoulli discrétisée à l'aide de trois éléments finis. La non-linéarité localisée entre le bâti et la structure agira uniquement sur le degré de liberté en translation.

Caractéristiques de la poutre :

- La poutre est formée de 3 éléments finis obtenus grâce aux matrices élémentaires :

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

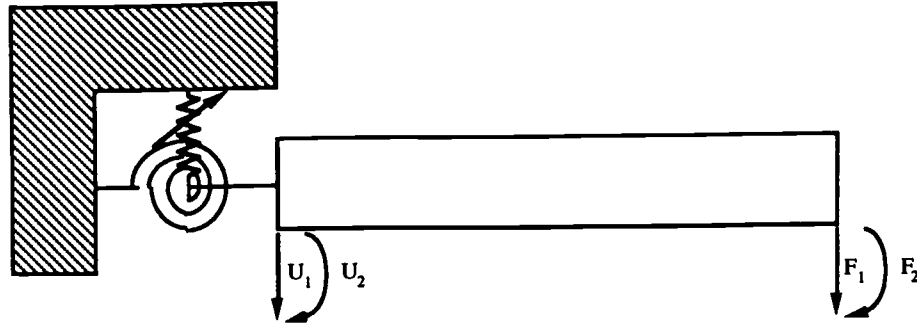


Figure 6.5: Système non-linéaire multi-dimensionnel

$$M_e = \rho S L \begin{pmatrix} \frac{13}{35} + \frac{6I}{5SL^2} & \frac{11L}{210} + \frac{I}{10SL} & \frac{9}{70} - \frac{6I}{5SL^2} & -\frac{13L}{420} + \frac{I}{10SL} \\ \frac{11L}{210} + \frac{I}{10SL} & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15S} & \frac{13L}{420} - \frac{I}{10SL} & -\frac{L^2}{140} - \frac{I}{30S} \\ \frac{9}{70} - \frac{6I}{5SL^2} & \frac{13L}{420} - \frac{I}{10SL} & \frac{13}{35} + \frac{6I}{5SL^2} & -\frac{11L}{210} - \frac{I}{10SL} \\ -\frac{13L}{420} + \frac{I}{10SL} & -\frac{L^2}{140} - \frac{I}{30S} & -\frac{11L}{210} - \frac{I}{10SL} & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15S} \end{pmatrix}$$

avec $\frac{EI}{L^3} = 1.328 \cdot 10^6 \text{ N/m}$, $\rho S L = 39 \text{ Kg}$, $\frac{I}{SL^2} = 3.32 \cdot 10^{-3}$ et $L = 0.5 \text{ m}$.

- Raideur linéaire du joint en translation : $k_1 = 0.2 \cdot 10^8 \text{ N/m}$. - Raideur linéaire du joint en rotation : $k_2 = 0.4 \cdot 10^7 \text{ Nm}$.

Etude d'une non linéarité en θu_1^3

Le calcul théorique fournit :

$$\begin{aligned} \overline{\Omega_1(\sigma) N_1(t + \sigma)} &= \begin{pmatrix} H * P_{11} \\ H * P_{21} \end{pmatrix} \\ \overline{\Omega_1(\sigma) N_2(t + \sigma)} &= \begin{pmatrix} H * P_{12} \\ H * P_{22} \end{pmatrix} \\ \overline{\Omega_3(\sigma) N_1(t + \sigma)} &= \begin{pmatrix} -b H_{11} * H * P_{11} \\ -b H_{21} * H * P_{11} \end{pmatrix} & b = 3\theta \int_{\Re} (H * P_{11}^{ab})^2 dt = cste \\ \overline{\Omega_3(\sigma) N_2(t + \sigma)} &= \begin{pmatrix} -c H_{11} * H * P_{12} \\ -c H_{21} * H * P_{12} \end{pmatrix} & c = 3\theta \int_{\Re} (H * P_{12}^{ab})^2 dt = cste \end{aligned}$$

Configuration de l'essai:

Echantillonnage: $\Delta t = 0.00129 \text{ s}$

Temps total du calcul de la moyenne: 193.5 s

Temps total sur lequel sont connues les corrélations: 1.935 s

5 essais à densité spectrale $\beta_i \Delta t / 2\pi$ avec $\beta_i \in (1, 2.25, 4, 6.25, 9)$

$\theta = 0.4 \cdot 10^{15} \text{ N/m}^3$

Sur cet essai, il n'est pas possible de déterminer correctement les coefficients b et c à l'aide de l'équation 6.27. Ceci est principalement dû à la troncature modale. Afin de

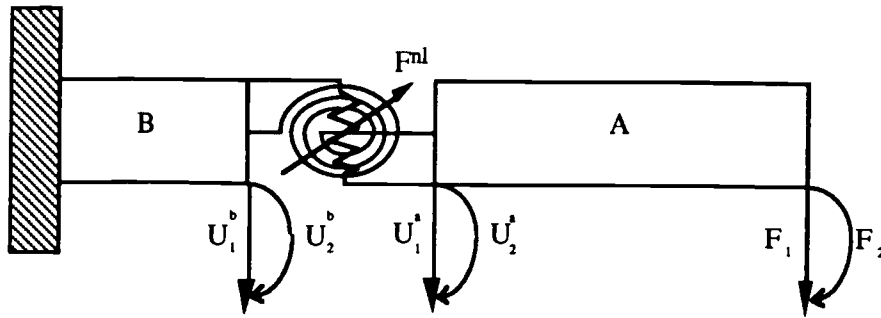


Figure 6.6: Structures couplées par un élément non-linéaire

pouvoir comparer les résultats théoriques et ceux issus de l'identification, nous calculerons b et c de manière analytique, ce qui donne :

$$b = 2.15 \cdot 10^2 N/m$$

$$c = 2.24 \cdot 10^3 N/m$$

Pour H_{11} (tableau 6.12 et figure 6.16), l'identification du premier mode est peu précise; ceci est dû à sa faible participation dans la réponse globale par rapport aux deux autres modes. Par contre, toutes les autres fonctions de transfert ont été bien identifiées (tableaux 6.7 à 6.11 et figures 6.11 à 6.15). L'estimation de θ est elle aussi correcte (tableau 6.13). L'ensemble des paramètres identifiés, fonctions de transfert et coefficient non-linéaire, nous fournit un modèle NARMAX de dimension 2.

Couplage de deux structures linéaires par une non-linéarité θu_2^3

Pour ce test, la modélisation en éléments finis du système sera réalisée en discrétisant la première poutre A à l'aide de trois éléments (de type poutre : Euler-Bernoulli) et la poutre B à l'aide de onze. Comme précédemment, nous garderons uniquement les trois premiers modes pour notre simulation numérique.

Caractéristiques des poutres :

- Les matrices de masse et de raideur utilisées sont les mêmes que dans le cas multidimensionnel en flexion sauf que L pour la poutre A est égal à $0.366m$ et pour la poutre B à $0.027m$.
- Raideur linéaire du joint en translation : $k_1 = 0.2 \cdot 10^4 N/m$. - Raideur linéaire du joint en rotation : $k_2 = 0.3 \cdot 10^6 Nm$.

Le calcul théorique fournit :

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega_1(\sigma)N_1(t+\sigma)} &= \begin{pmatrix} H * P_{11} \\ H * P_{21} \\ H * P_{12} \\ H * P_{22} \end{pmatrix} \\
\overline{\Omega_1(\sigma)N_2(t+\sigma)} &= \begin{pmatrix} H * P_{11} \\ H * P_{21} \\ H * P_{12} \\ H * P_{22} \end{pmatrix} \\
\overline{\Omega_3(\sigma)N_1(t+\sigma)} &= \begin{pmatrix} -bH_{12} * H * P_{21}^{ab} \\ -bH_{22} * H * P_{21}^{ab} \\ -cH_{12} * H * P_{22}^{ab} \\ -cH_{22} * H * P_{22}^{ab} \end{pmatrix} & b = 3\theta \int_{\mathfrak{R}} (H * P_{21}^{ab})^2 dt = cste \\
\overline{\Omega_3(\sigma)N_2(t+\sigma)} &= \begin{pmatrix} -bH_{12} * H * P_{21}^{ab} \\ -bH_{22} * H * P_{21}^{ab} \\ -cH_{12} * H * P_{22}^{ab} \\ -cH_{22} * H * P_{22}^{ab} \end{pmatrix} & c = 3\theta \int_{\mathfrak{R}} (H * P_{22}^{ab})^2 dt = cste
\end{aligned}$$

Configuration de l'essai :

Echantillonnage: $\Delta t = 0.001s$

Temps total du calcul de la moyenne: 150s

Temps total sur lequel sont connues les corrélations: 1.5s

6 essais à densité spectrale $\beta_i \Delta t / 2\pi$ avec $\beta_i \in (1, 4, 9, 16, 20.25, 25)$

$\theta = 0.5 \cdot 10^{16} Nm$

Nous avons obtenu une bonne précision sur l'identification des modes 2 et 3 (tableaux 6.14, 6.15 et figures 6.17, 6.18 (résultats au point *a* en rotation)). L'erreur commise sur le premier mode, provient de sa très faible participation dans la réponse globale. Le calcul de θ se fait comme dans les autres cas et est obtenu avec une bonne précision (tableau 6.16). Cette identification fournit un schéma NARMAX de dimension 4 où les équations en rotation au point *a* et *b* sont couplées.

6.5 Conclusion

Les exemples traités nous ont permis de montrer que la procédure proposée est capable d'extraire les caractéristiques linéaires et non linéaires d'une structure . L'exploitation des trois premiers noyaux de Volterra est apparue suffisante pour extraire le comportement linéaire du système; un lissage approprié nous a permis d'acquérir tous les monômes non linéaires avec une bonne précision. Il est à noter que le problème proposé peut se simplifier notablement, si l'excitation est placée au niveau du joint. En effet, *P* devenant alors égal à l'identité, l'exploitation des noyaux d'ordre supérieur à 1 ne présente plus d'intérêt pour la modélisation du système mécanique. Pour finir, nous pouvons remarquer que l'identification de la structure fournit un modèle NARMAX susceptible d'être employé pour simuler la réponse à n'importe quel type d'excitation. Par contre, il reste difficile d'appliquer cette méthode lorsque la non-linéarité F^{nl} est un vecteur (de dimension supérieur à 1) comportant plus d'une composante non nulle ou qui dépend de plusieurs degrés de liberté. Le principal écueil réside dans la déconvolution des noyaux d'ordre 2 et 3.

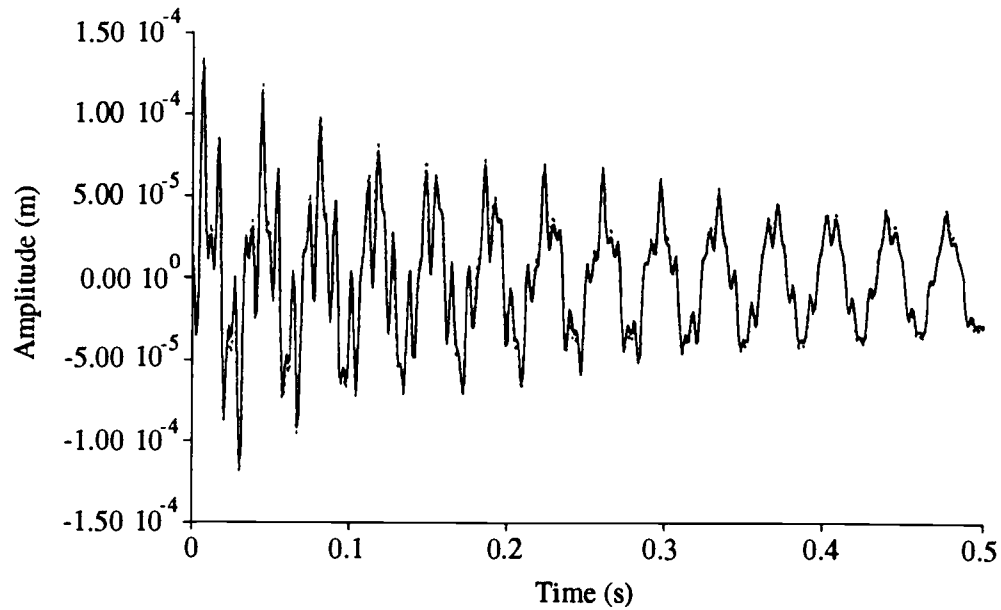


Figure 6.7: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$). —: Réponse théorique : Réponse Identifiée

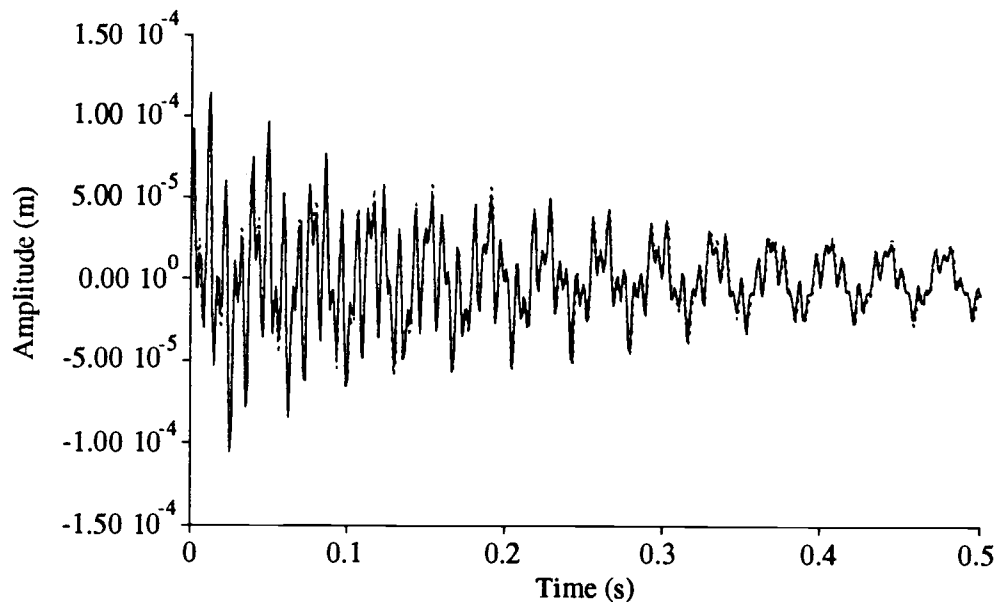


Figure 6.8: Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$). —: Réponse théorique : Réponse Identifiée

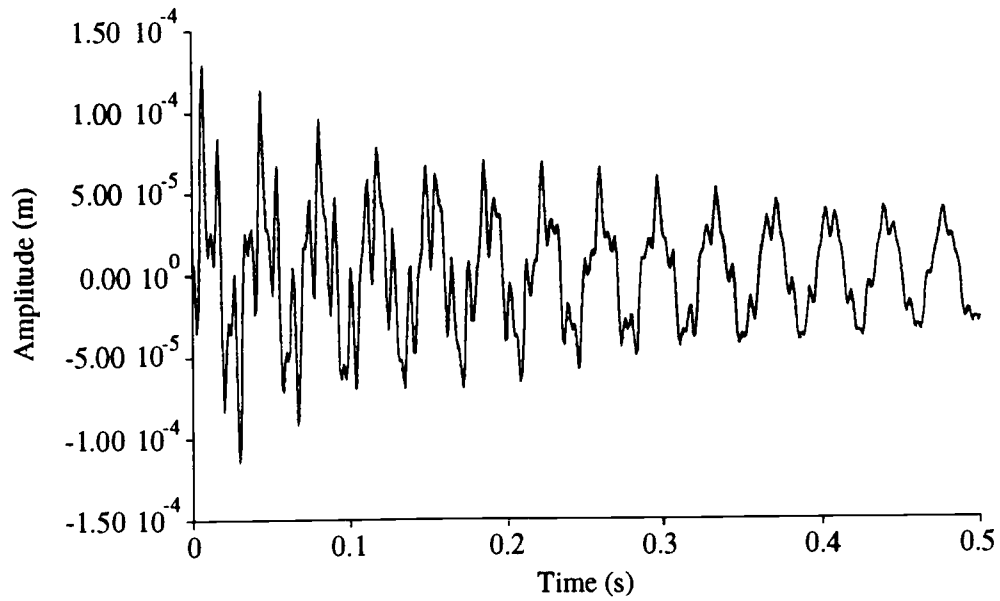


Figure 6.9: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono-dimensionnel ($F^m = U\dot{U}$). —: Réponse théorique : Réponse Identifiée

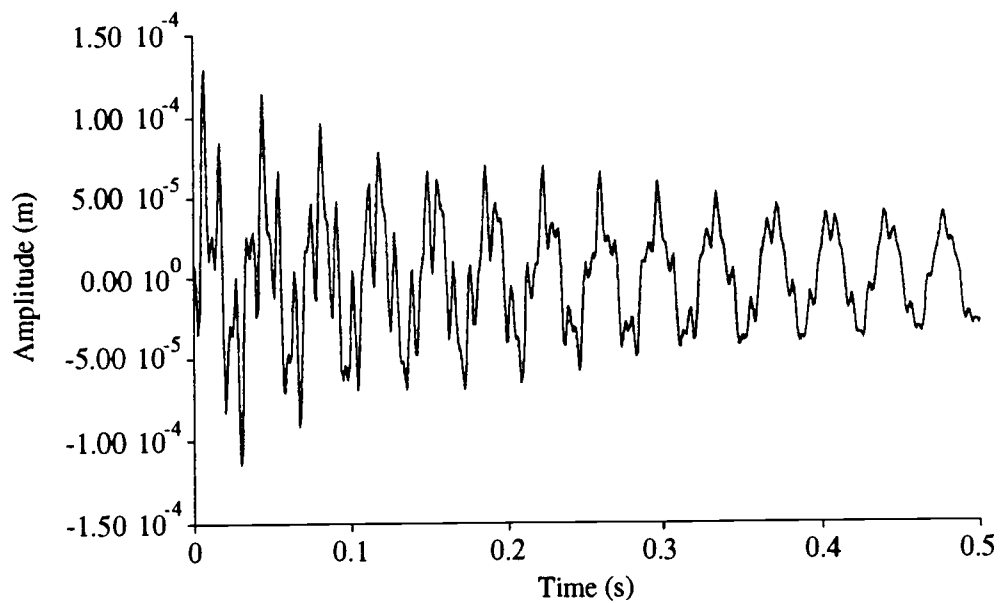


Figure 6.10: Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono-dimensionnel ($F^m = U\dot{U}$). —: Réponse théorique : Réponse Identifiée

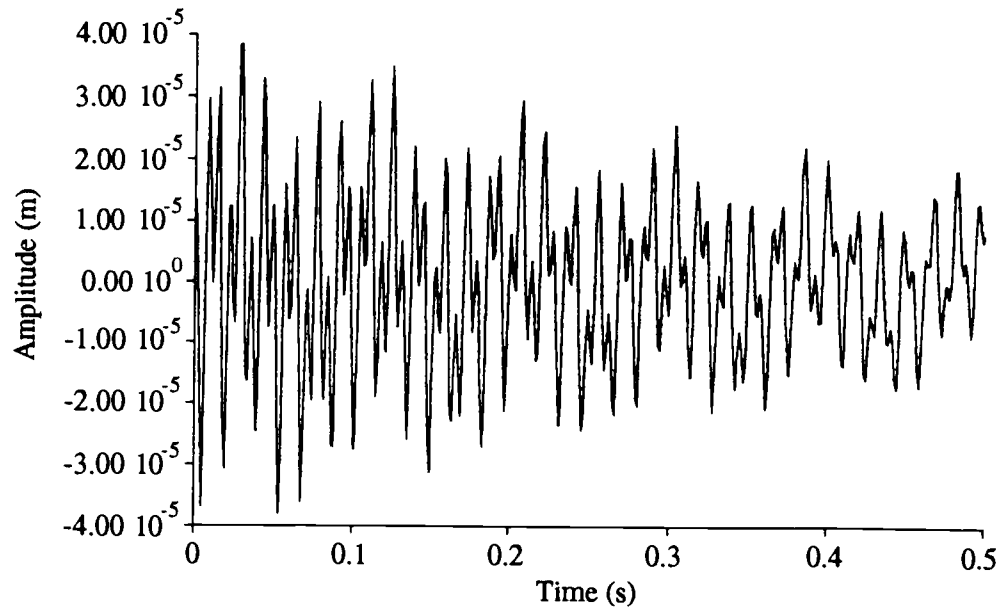


Figure 6.11: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{11}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

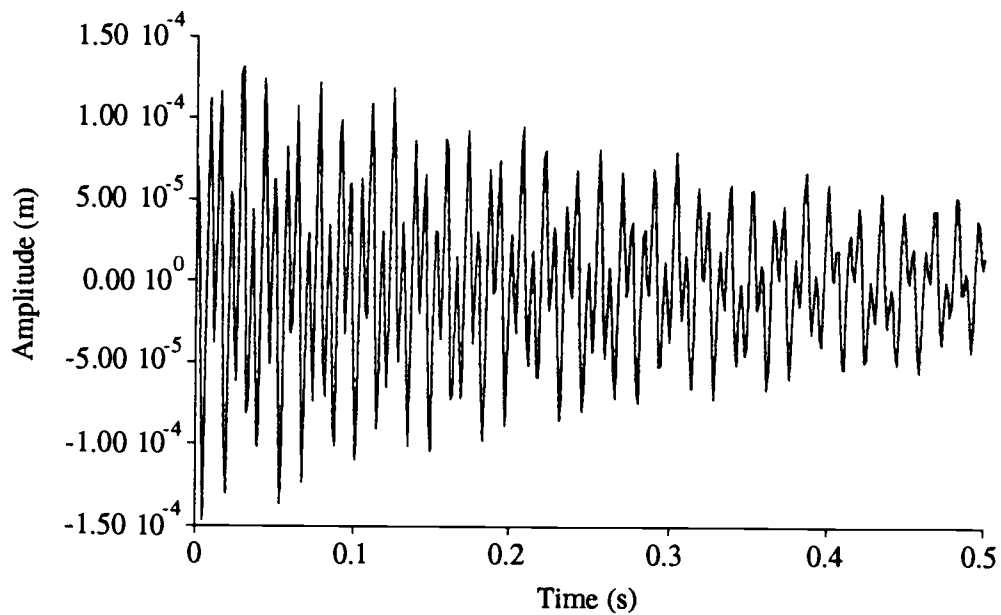


Figure 6.12: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

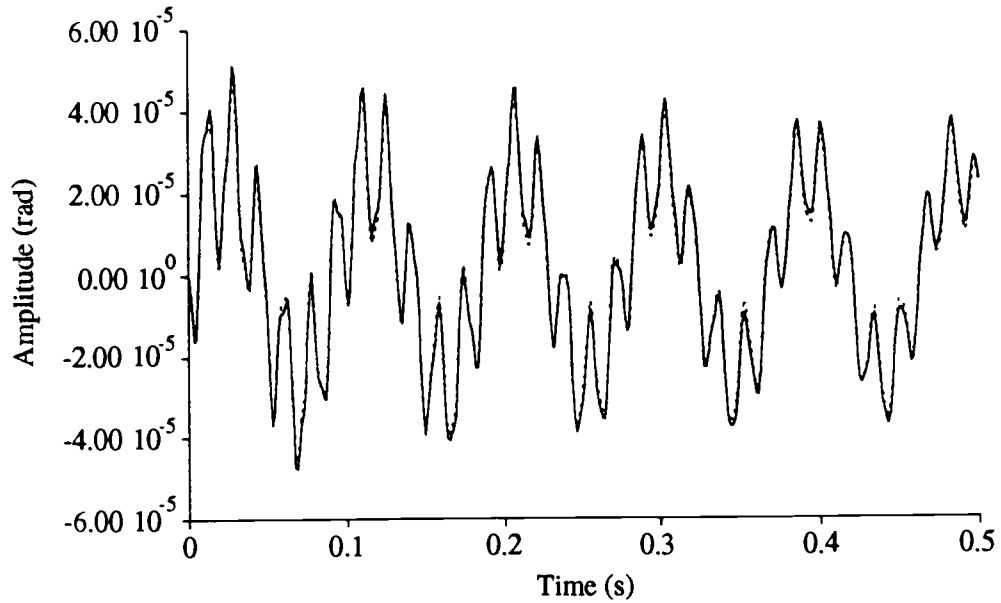


Figure 6.13: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nd} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

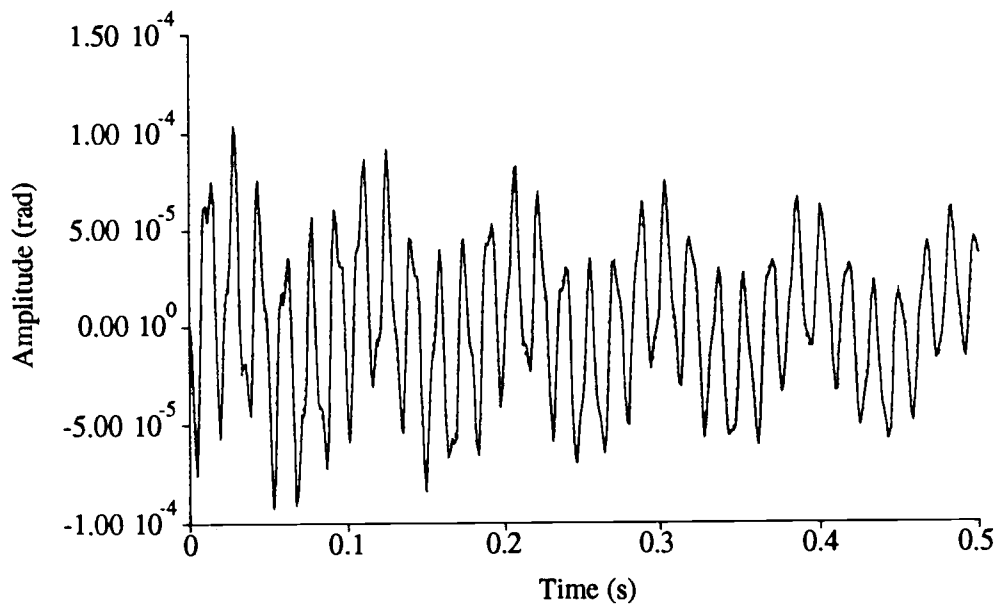


Figure 6.14: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{22}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nd} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

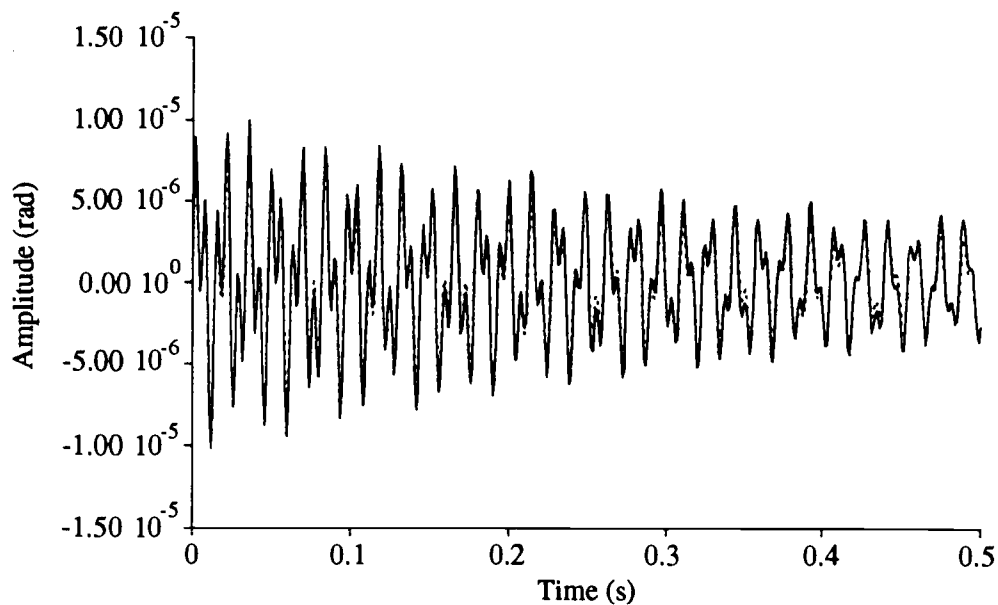


Figure 6.15: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21} dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

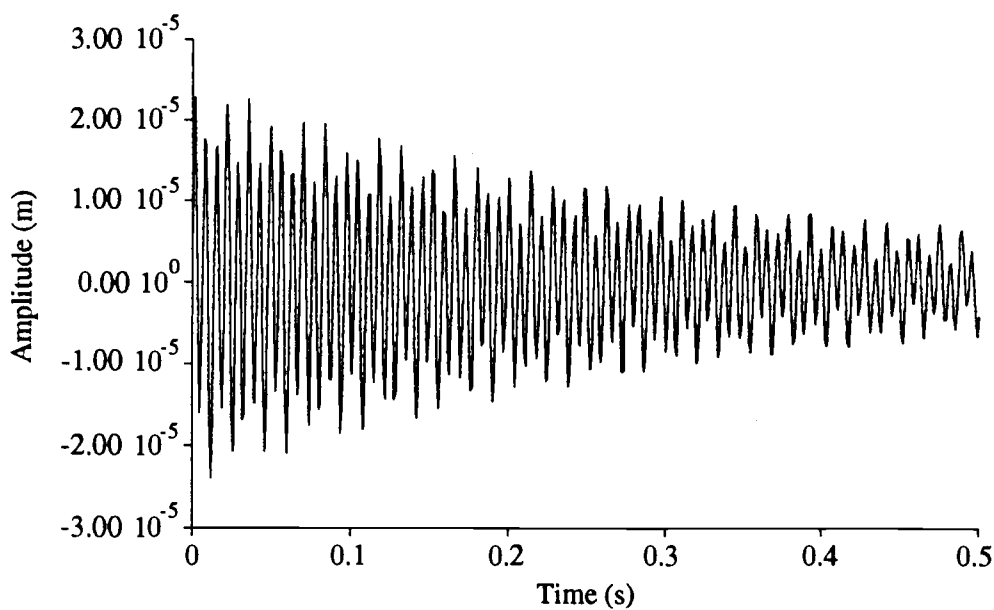


Figure 6.16: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{11} dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

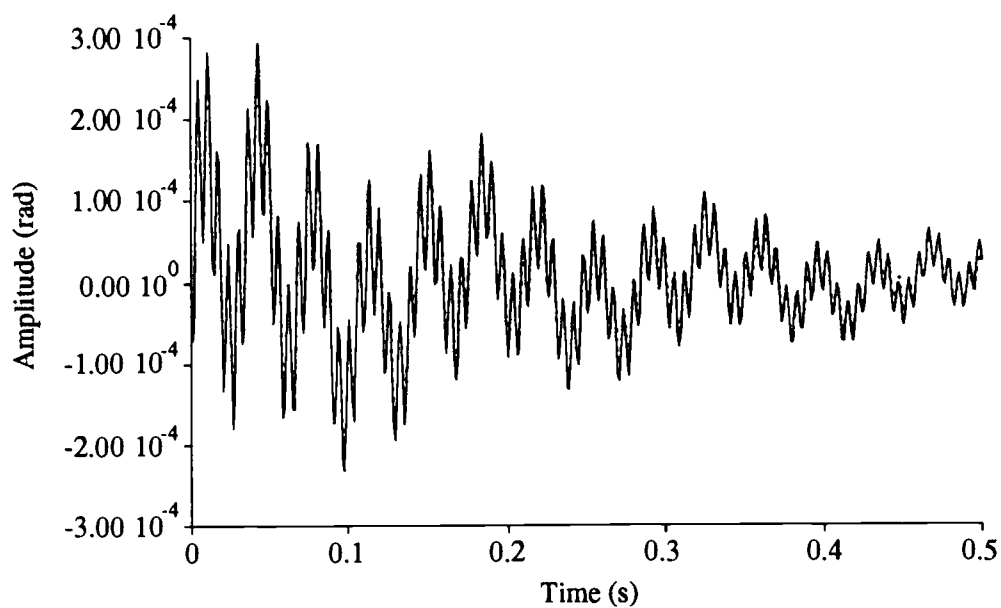


Figure 6.17: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{21}^a$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, U^3 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

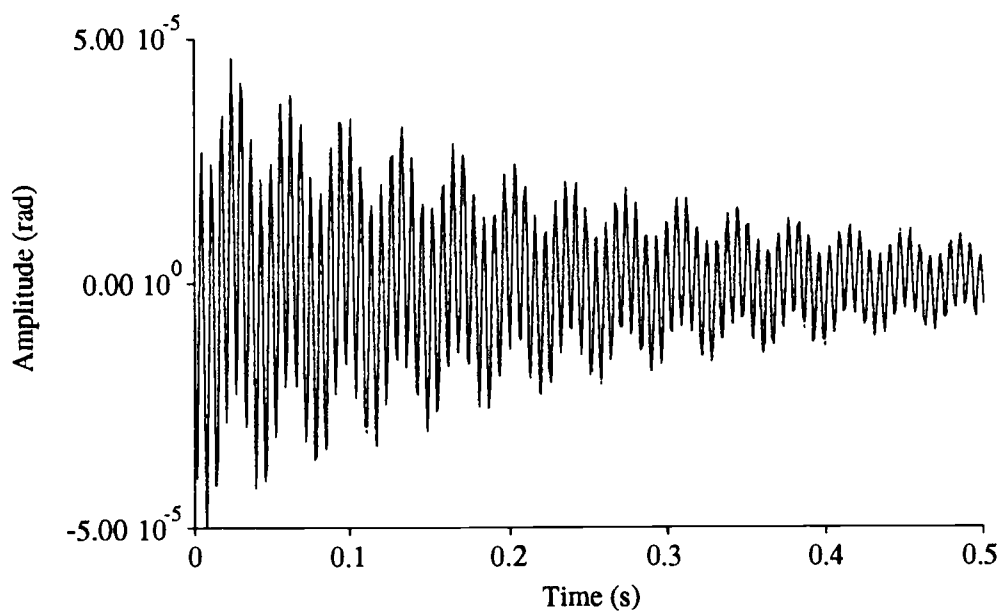


Figure 6.18: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{22}^a dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, U^3 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée

	H*P		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	174.5	174.4	0.05
ζ_1	$0.618 \cdot 10^{-2}$	$0.586 \cdot 10^{-2}$	5.17
A_1	$0.526 \cdot 10^{-4}$	$0.565 \cdot 10^{-4}$	7.41
φ_1	0.	2.619	***
ω_2	670.6	670.7	0.01
ζ_2	$0.702 \cdot 10^{-2}$	$0.748 \cdot 10^{-2}$	6.55
A_2	$0.534 \cdot 10^{-4}$	$0.526 \cdot 10^{-4}$	1.49
φ_2	180.	180.6	0.33
ω_3	1190.4	1190.3	0.01
ζ_3	$0.370 \cdot 10^{-2}$	$0.389 \cdot 10^{-2}$	5.13
A_3	$0.331 \cdot 10^{-4}$	$0.370 \cdot 10^{-4}$	11.7
φ_3	0.	3.370	***

Tableau 6.1: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas monodimensionnel ($F^{nl} = U^3$).

	H		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	174.5	174.0	0.28
ζ_1	$0.618 \cdot 10^{-2}$	$0.614 \cdot 10^{-2}$	0.64
A_1	$0.249 \cdot 10^{-4}$	$0.287 \cdot 10^{-4}$	15.2
φ_1	0.	6.722	***
ω_2	670.6	669.5	0.16
ζ_2	$0.702 \cdot 10^{-2}$	$0.679 \cdot 10^{-2}$	3.27
A_2	$0.534 \cdot 10^{-4}$	$0.538 \cdot 10^{-4}$	0.75
φ_2	0.	357.9	***
ω_3	1190.4	1188.7	0.14
ζ_3	$0.370 \cdot 10^{-2}$	$0.388 \cdot 10^{-2}$	4.86
A_3	$0.458 \cdot 10^{-4}$	$0.433 \cdot 10^{-4}$	5.45
φ_3	0.	13.20	***

Tableau 6.2: Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas monodimensionnel ($F^{nl} = U^3$).

Coefficient non-linéaire			
	Théorique	Identifié	Erreur
θ	$0.4 \cdot 10^{15}$	$0.38 \cdot 10^{15}$	5.00

Tableau 6.3: Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$).

H*P			
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	174.5	174.5	0.01
ζ_1	$0.618 \cdot 10^{-2}$	$0.602 \cdot 10^{-2}$	2.58
A_1	$0.526 \cdot 10^{-4}$	$0.548 \cdot 10^{-4}$	4.18
φ_1	0.	0.669	***
ω_2	670.6	670.7	0.01
ζ_2	$0.702 \cdot 10^{-2}$	$0.701 \cdot 10^{-2}$	0.11
A_2	$0.534 \cdot 10^{-4}$	$0.516 \cdot 10^{-4}$	3.37
φ_2	180.	180.6	0.16
ω_3	1190.4	1190.5	0.01
ζ_3	$0.370 \cdot 10^{-2}$	$0.393 \cdot 10^{-2}$	6.21
A_3	$0.331 \cdot 10^{-4}$	$0.287 \cdot 10^{-4}$	13.2
φ_3	0.	0.462	***

Tableau 6.4: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).

	H		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	174.5	174.8	0.17
ζ_1	$0.618 \cdot 10^{-2}$	$0.452 \cdot 10^{-2}$	26.8
A_1	$0.249 \cdot 10^{-4}$	$0.206 \cdot 10^{-4}$	17.2
φ_1	0.	16.93	***
ω_2	670.6	671.9	0.19
ζ_2	$0.702 \cdot 10^{-2}$	$0.697 \cdot 10^{-2}$	0.71
A_2	$0.534 \cdot 10^{-4}$	$0.498 \cdot 10^{-4}$	6.74
φ_2	0.	7.960	***
ω_3	1190.4	1188.0	0.16
ζ_3	$0.370 \cdot 10^{-2}$	$0.302 \cdot 10^{-2}$	18.3
A_3	$0.458 \cdot 10^{-4}$	$0.475 \cdot 10^{-4}$	3.71
φ_3	0.	1.232	***

Tableau 6.5: Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).

	Coefficient non-linéaire		
	Théorique	Identifié	Erreur
θ	$0.70 \cdot 10^8$	$0.73 \cdot 10^8$	4.62

Tableau 6.6: Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).

	$H * P_{11}$		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	67.93	0.01
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.321 \cdot 10^{-2}$	0.95
A_1	$0.533 \cdot 10^{-5}$	$0.493 \cdot 10^{-5}$	7.50
φ_1	0.	1.079	***
ω_2	387.7	387.6	0.02
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.319 \cdot 10^{-2}$	1.84
A_2	$0.177 \cdot 10^{-4}$	$0.178 \cdot 10^{-4}$	0.56
φ_2	180.	182.9	1.61
ω_3	916.4	916.3	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.326 \cdot 10^{-2}$	0.30
A_3	$0.231 \cdot 10^{-4}$	$0.201 \cdot 10^{-4}$	12.9
φ_3	0.	0.939	***

Tableau 6.7: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{11}$ dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	$H * P_{12}$		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	67.94	0.01
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.347 \cdot 10^{-2}$	6.76
A_1	$0.471 \cdot 10^{-5}$	$0.435 \cdot 10^{-5}$	7.64
φ_1	0.	1.153	***
ω_2	387.7	387.6	0.02
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.326 \cdot 10^{-2}$	0.58
A_2	$0.527 \cdot 10^{-4}$	$0.533 \cdot 10^{-4}$	0.56
φ_2	180.	182.7	0.38
ω_3	916.4	916.3	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.327 \cdot 10^{-2}$	0.61
A_3	$0.102 \cdot 10^{-3}$	$0.892 \cdot 10^{-4}$	12.5
φ_3	0.	0.951	***

Tableau 6.8: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	$H * P_{21}$		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	67.93	0.01
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.325 \cdot 10^{-2}$	0.18
A_1	$0.285 \cdot 10^{-4}$	$0.264 \cdot 10^{-4}$	7.36
φ_1	0.	1.126	***
ω_2	387.7	387.6	0.02
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.319 \cdot 10^{-2}$	1.84
A_2	$0.212 \cdot 10^{-4}$	$0.213 \cdot 10^{-4}$	0.47
φ_2	180.	182.9	1.61
ω_3	916.4	916.3	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.326 \cdot 10^{-2}$	0.30
A_3	$0.623 \cdot 10^{-5}$	$0.541 \cdot 10^{-5}$	13.1
φ_3	0.	1.012	***

Tableau 6.9: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{21}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nd} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	$H * P_{22}$		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	67.94	0.01
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.319 \cdot 10^{-2}$	1.84
A_1	$0.252 \cdot 10^{-4}$	$0.233 \cdot 10^{-4}$	7.53
φ_1	0.	1.018	***
ω_2	387.7	387.6	0.02
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.319 \cdot 10^{-2}$	1.84
A_2	$0.631 \cdot 10^{-4}$	$0.634 \cdot 10^{-4}$	0.47
φ_2	180.	183.0	1.66
ω_3	916.4	916.3	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.326 \cdot 10^{-2}$	0.30
A_3	$0.276 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-4}$	13.0
φ_3	0.	0.955	***

Tableau 6.10: Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{22}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nd} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	H_{21}		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	67.74	0.27
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.127 \cdot 10^{-2}$	60.9
A_1	$0.314 \cdot 10^{-6}$	$0.474 \cdot 10^{-6}$	50.9
φ_1	0.	163.3	***
ω_2	387.7	387.6	0.02
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.327 \cdot 10^{-2}$	0.61
A_2	$0.515 \cdot 10^{-5}$	$0.448 \cdot 10^{-5}$	12.1
φ_2	0.	358.1	***
ω_3	916.4	916.3	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.327 \cdot 10^{-2}$	0.61
A_3	$0.553 \cdot 10^{-5}$	$0.470 \cdot 10^{-5}$	15.0
φ_3	0.	358.6	***

Tableau 6.11: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21} dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	H_{11}		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	67.93	69.80	2.75
ζ_1	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.148 \cdot 10^{-2}$	54.4
A_1	$0.588 \cdot 10^{-7}$	$0.119 \cdot 10^{-6}$	102.
φ_1	0.	156.6	***
ω_2	387.7	387.7	0.01
ζ_2	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.325 \cdot 10^{-2}$	0.01
A_2	$0.430 \cdot 10^{-5}$	$0.383 \cdot 10^{-5}$	10.9
φ_2	0.	1.400	***
ω_3	916.4	916.4	0.01
ζ_3	$0.325 \cdot 10^{-2}$	$0.311 \cdot 10^{-2}$	4.30
A_3	$0.205 \cdot 10^{-4}$	$0.181 \cdot 10^{-4}$	11.7
φ_3	0.	358.6	***

Tableau 6.12: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{11} dans un cas multidimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	Coefficient non-linéaire		
	Théorique	Identifié	Erreur
$\theta / -b$	$-2.40 \cdot 10^9$	$-2.98 \cdot 10^9$	24.1

Tableau 6.13: Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).

	HP_{21}^a		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	42.40	42.40	0.01
ζ_1	$0.825 \cdot 10^{-1}$	$0.850 \cdot 10^{-1}$	3.02
A_1	$0.775 \cdot 10^{-4}$	$0.776 \cdot 10^{-4}$	0.13
φ_1	0.	0.900	***
ω_2	178.0	177.6	0.22
ζ_2	$0.196 \cdot 10^{-1}$	$0.204 \cdot 10^{-1}$	4.12
A_2	$0.150 \cdot 10^{-3}$	$0.142 \cdot 10^{-3}$	5.33
φ_2	0.	1.904	***
ω_3	981.2	981.1	0.01
ζ_3	$0.356 \cdot 10^{-2}$	$0.369 \cdot 10^{-2}$	3.65
A_3	$0.122 \cdot 10^{-3}$	$0.100 \cdot 10^{-3}$	18.0
φ_3	180.	173.9	3.38

Tableau 6.14: Comparaisons des réponses impulsionnelles HP_{21}^a dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).

	H_{22}^a		
	Théorique	Identifié	Erreur
ω_1	42.40	42.25	0.35
ζ_1	$0.825 \cdot 10^{-1}$	$0.634 \cdot 10^{-1}$	23.1
A_1	$0.172 \cdot 10^{-5}$	$0.234 \cdot 10^{-5}$	36.0
φ_1	180.	47.7	73.5
ω_2	178.0	177.6	0.11
ζ_2	$0.196 \cdot 10^{-1}$	$0.198 \cdot 10^{-1}$	0.02
A_2	$0.170 \cdot 10^{-4}$	$0.144 \cdot 10^{-4}$	15.2
φ_2	180.	179.4	0.33
ω_3	981.2	981.3	0.01
ζ_3	$0.356 \cdot 10^{-2}$	$0.334 \cdot 10^{-2}$	6.16
A_3	$0.384 \cdot 10^{-4}$	$0.350 \cdot 10^{-4}$	8.85
φ_3	180.	176.3	2.05

Tableau 6.15: Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21}^a dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).

	Coefficient non-linéaire		
	Théorique	Identifié	Erreur
θ	$5.00 \cdot 10^{14}$	$5.43 \cdot 10^{14}$	8.70

Tableau 6.16: Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).

Chapitre 7

Essais expérimentaux

7.1 Essai sur un amortisseur non-linéaire

Le but de cet essai est de caractériser un amortisseur non-linéaire du point de vue dynamique. Cet amortisseur commercialisé par la société SOCITEC sous la référence AP8-110 est constitué de brins métalliques (photo 7.2) dont les déformations introduisent des effets non-linéaires importants.

Pour effectuer cet essai expérimental, nous avons utilisé le matériel suivant :

1 capteur piézo-électrique d'accélération	:	BK type 4344 (0.304 pC/(ms ⁻²))
1 capteur piézo-électrique de force	:	BK type 8200 (4.01 pC/N)
1 amplificateur de puissance	:	GWV
1 exciteur électromagnétique	:	GWV 50A (Rating 240 N)
1 frontal d'acquisition (Paragon) HP35654A	:	3 voies (1 source (HP35653A) et 2 entrées (HP35652A))

La chaîne d'acquisition ainsi disposée (figure 7.1) est reliée à un ordinateur (HP9000 série 300) qui à l'aide du logiciel LMS permettra de récupérer les données expérimentales fournies par les 2 capteurs piézo-électriques.

La masse posée sur l'amortisseur ($m = 530$ gr) permet d'associer en première approximation le comportement du système masse-amortisseur à un problème mono-dimensionnel non-linéaire. Les caractéristiques de l'amortisseur fournies par le constructeur (figure 4.19) permettent une estimation de la raideur à faible déplacement :

$$k = 43500N/m \quad (7.1)$$

ce qui permet de situer la fréquence de résonance autour de :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 45Hz \quad (7.2)$$

Cette valeur nous permettra de définir la bande d'excitation aléatoire. On choisira une

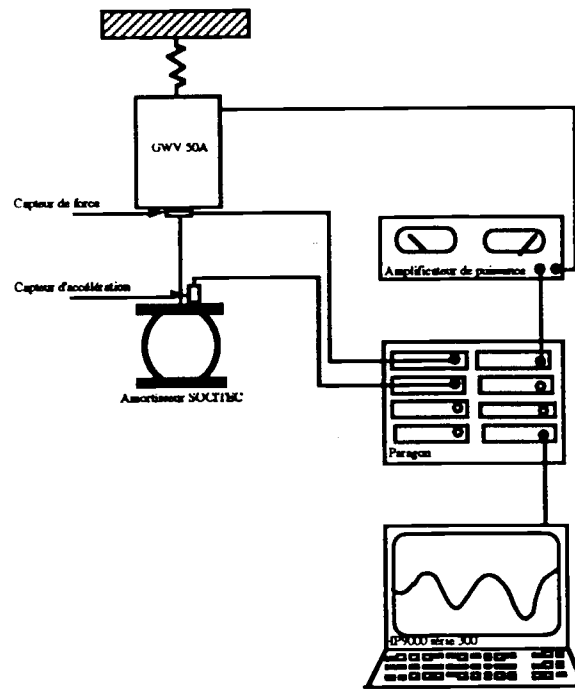
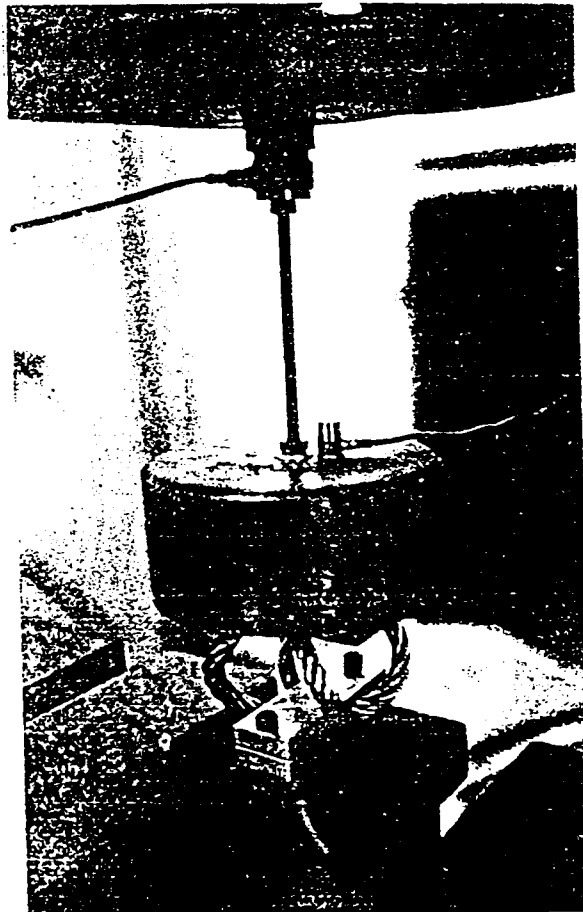


Figure 7.1: Essai pour l'amortisseur à cables.

Figure 7.2: Amortisseur AP8-110 avec une masse $m = 530$ gr

bande suffisamment large pour couvrir la fréquence f et son glissement associé aux effets non-linéaires.

7.2 Essai sur poutre non-linéaire

Cette expérience met en oeuvre 2 sous-systèmes (photo 7.9) : un premier linéaire caractérisé par une poutre et un second non-linéaire constitué d'une lame coincée entre 2 supports rigides (photo 7.8). Un essai statique (figure 7.3) a permis d'identifier la raideur non-linéaire de notre système mécanique au niveau de la jonction lame-poutre. Un lissage par moindres carrés, nous a fourni les 3 premiers monômes nécessaires à une bonne interpolation des points expérimentaux :

$$F^{ml}(x) = 1.7 \cdot 10^{-2}x + 4.8 \cdot 10^{-9}x^3 - 1.3 \cdot 10^{-16}x^5 \quad (7.3)$$

On notera une bonne cohérence entre le lissage et l'expérience, mettant en valeur l'effet non-linéaire. Le dimensionnement de la lame a été réalisé en effectuant un calcul de résistance des matériaux qui consiste à décomposer le déplacement en bout de lame comme la somme de 3 déplacements élémentaires (figure 7.7) :

$$d_1 = R(1 - \cos(\theta)) \simeq \frac{(l - x_c)^2}{2R} \quad (7.4)$$

$$d_2 = \frac{x_c(l - x_c)}{R} \quad (7.5)$$

$$d_3 = \frac{Fx_c^3}{3EI} + \frac{Mx_c^2}{2EI} \quad (7.6)$$

L'expression de ces 3 déplacements prend un sens dès que la lame commence à s'enrouler sur le support. La condition d'enroulement est obtenue en écrivant :

$$EId'' = T(l - x) + M \quad (7.7)$$

$$d'(0) = 0 \quad (7.8)$$

$$d'(l) = 0 \quad (7.9)$$

les équations ci-dessus permettent de calculer $M = -\frac{Tl}{2}$ et donne la condition d'enroulement suivante :

$$T = \frac{2EI}{lR} \quad (7.10)$$

En supposant la lame partiellement enroulée jusqu'au point x_c , la continuité du moment en ce point nous permet d'écrire :

$$\frac{EI}{R} = M + x_c T \quad (7.11)$$

Les section droites restant verticales à l'extrémité et d'angle θ au point x_c on a alors la relation suivante :

$$M + \frac{1}{2}Tx_c = -\left(\frac{l-x_c}{x_c R}\right)EI \quad (7.12)$$

Les équations 7.11 et 7.12 donnent la position du point de contact et le moment M par rapport à T :

$$x_c = \sqrt{\frac{2EI l}{RT}} \quad (7.13)$$

$$M = \frac{EI}{R} - x_c T \quad (7.14)$$

ce qui nous permet d'exprimer le déplacement global d comme étant égal à :

$$d = \frac{l^2}{2R} - \frac{l}{3R} \sqrt{\frac{2EI l}{RT}} \quad \text{des que} \quad T \geq \frac{2EI}{lR} \quad (7.15)$$

ou encore

$$\frac{T}{T_{\text{linéaire}}} = \frac{4}{\left(\frac{d}{d_{\text{linéaire}}} - 3\right)^2} \quad \text{avec} \quad T_{\text{linéaire}} = \frac{2EI}{lR} \quad \text{et} \quad d_{\text{linéaire}} = \frac{l^2}{6R} \quad (7.16)$$

La raideur de la lame est définie en 2 parties une linéaire et l'autre non-linéaire déterminée par l'équation 7.16 (figure 7.4) et présente une asymptote pour $d = \frac{l^2}{2R}$ correspondant à un enroulement total sur le support rigide.

Les caractéristiques de la lame et du support ont été choisies égales à :

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ b &= 3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ e &= 5.0 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ l &= 5.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ R &= 5.0 \cdot 10^{-1} \text{ m} \\ I &= 3.125 \cdot 10^{-13} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

ce qui fournit pour la condition d'enroulement et le déplacement limite :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2EI}{lR} = 4.77 \text{ N pour } d = \frac{l^2}{6R} = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ d_{\text{linéaire}} &= \frac{2EI}{lR} = 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Les caractéristiques de la poutre sont définies par :

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ D &= 1.0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ L &= 6.25 \cdot 10^{-1} \text{ m} \\ I &= 4.9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

la raideur statique de la poutre étant donnée par :

$$k = \frac{12EI}{l^3} = 5057 \text{ N/m} \quad (7.17)$$

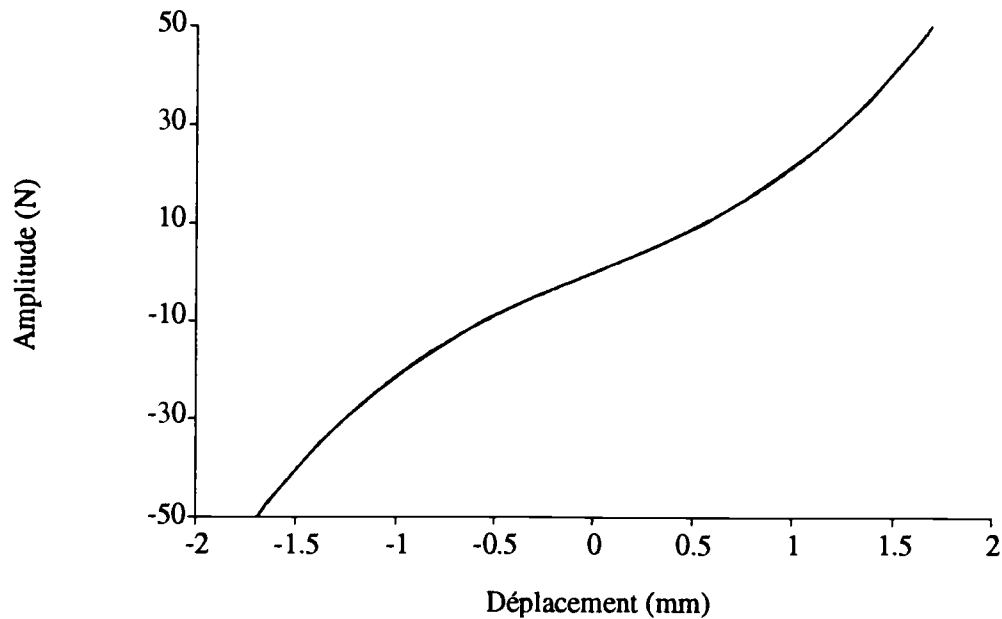


Figure 7.3: Raideur expérimentale du système lame-poutre.

ce qui implique :

$$d = 1.0 \cdot 10^{-3} m \quad \rightarrow \quad T = 5.09 N \quad (7.18)$$

Le matériel utilisé pour former la chaîne d'acquisition (figure 7.6) se compose de :

2 capteurs piézo-électriques d'accélération	: BK type 4344 (0.304 pC/(ms ⁻²) et 0.314 pC/(ms ⁻²))
1 capteur piézo-électrique de force	: BK type 8200 (4.01 pC/N)
1 amplificateur de puissance	: BK type 2707
1 excitateur électromagnétique	: GWV 20C (Rating 155 N)
1 frontal d'acquisition (Paragon) HP35654A	: 4 voies (1 source (HP35653A) et 3 entrées (HP35652A))

Comme dans le cas précédent, les mesures seront stockées sur un ordinateur HP9000 série 300 à l'aide du logiciel LMS. Les deux capteurs d'accélération sont placés : un au niveau de la jonction lame-poutre et l'autre à 33.5cm de l'encastrement. Le système de liaison lame-poutre a été conçu afin d'éviter tout glissement de la lame, ce qui a pour effet de mettre en jeu des phénomènes du second ordre liés à une déformation plane de la lame augmentant ainsi l'effet non-linéaire. Un calcul élément fini à l'aide du logiciel ANSYS a permis de vérifier les calculs de résistance des matériaux et aussi de tenir compte des effets du second ordre et de la pré-contrainte introduite dans la structure (figure 7.5).

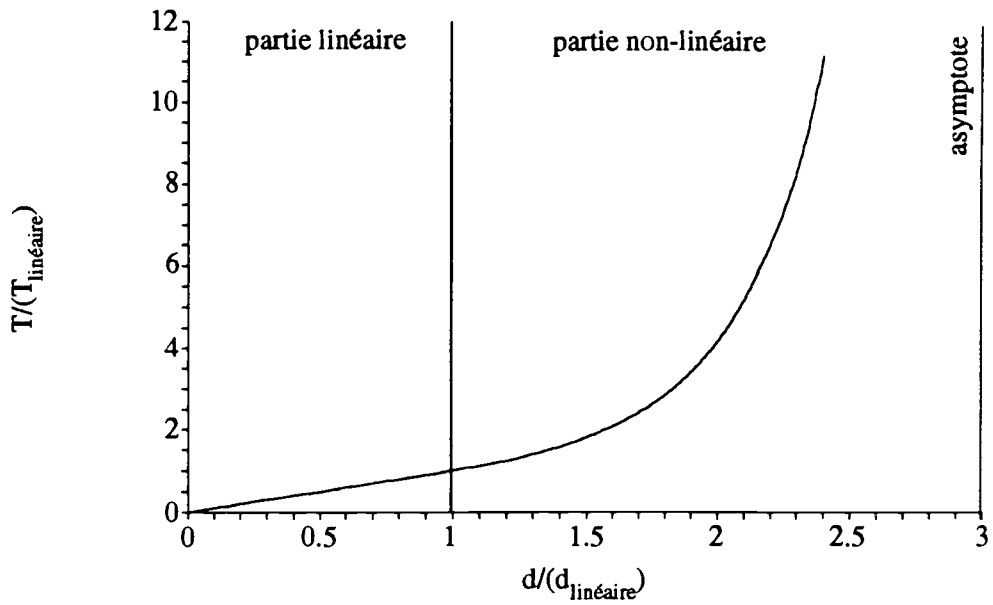


Figure 7.4: Raideur théorique de la lame.

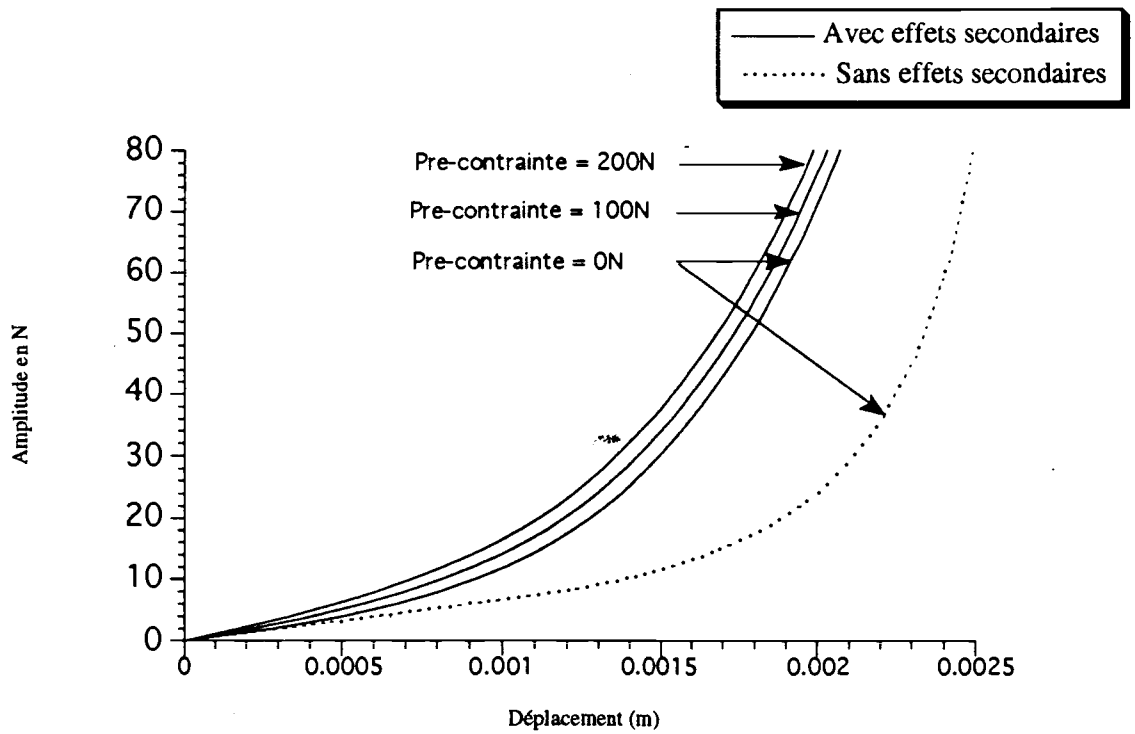


Figure 7.5: Raideur calculée par ANSYS.

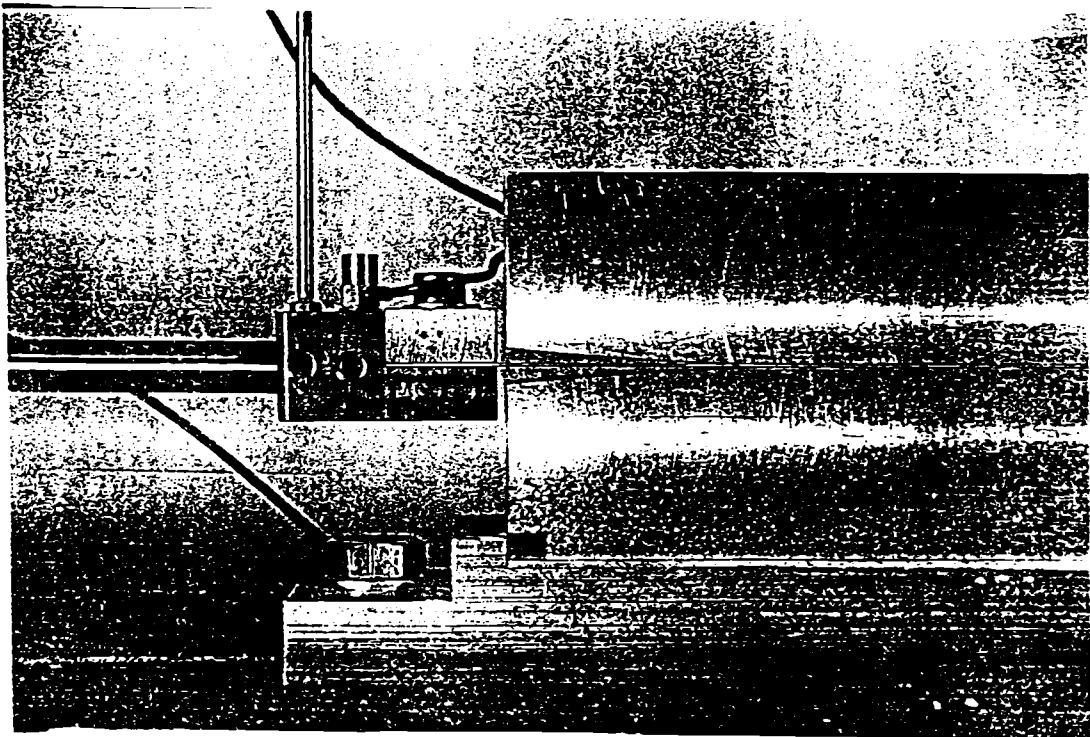


Figure 7.8: *Lame entre deux supports rigides*

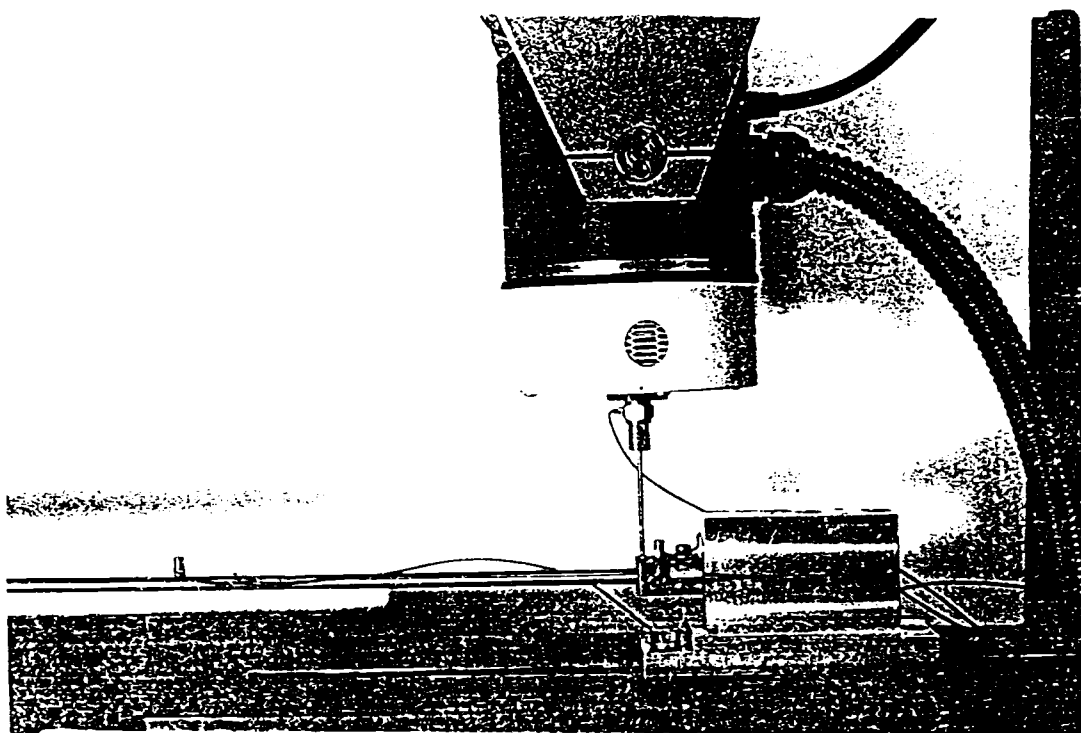


Figure 7.9: Système non-linéaire poutre-lame.

Conclusion

Dans le cadre de cette étude, nous avons abordé les problèmes d'identification linéaire (chapitre 1), les phénomènes non-linéaires et leurs détections (chapitre 2) et enfin la modélisation et l'identification non-linéaire (chapitre 3-4-5-6).

Les techniques d'identification linéaires, nous l'avons vu dans le chapitre 1, sont très nombreuses et utilisées avec succès dans le monde industriel. Cependant, les approches peuvent être différentes selon qu'on utilise des méthodes axées sur la forme de la solution libre ou de manière plus générale sur les filtres linéaires. Dans la plupart des cas, les résultats obtenus grâce à ces techniques sont de bonne qualité, malgré quelques difficultés liées aux structures très dissipatives ou encore à forte densité de modes. L'ensemble de ces méthodes d'identification nécessite la détermination d'un ordre de paramétrage ; cette valeur est essentielle à une bonne identification, mais n'est pas toujours facilement estimable.

Dans le cas des structures non-linéaires, les méthodes d'identification sont plus délicates à appliquer et plus sensibles à la nature des non-linéarités mises en jeu. Nous avons pu voir (chapitre 2) que les phénomènes non-linéaires étaient très nombreux et complexes ; il faut donc des techniques d'identification qui soient capables de rendre compte de tous ces comportements particuliers. Tout comme le cas linéaire, il est nécessaire d'estimer le niveau de non-linéarité intervenant dans la réponse mesurée. La transformée de Hilbert, nous a permis de vérifier le principe de causalité, mais il est possible aussi de tester la réciprocity et le principe de superposition. En général ces méthodes peuvent uniquement "dire" si le système est linéaire ou pas, par contre les propriétés des estimateurs ont permis de déterminer des tests capables de juger l'existence des monômes non-linéaires (F_{test}) et aussi de mesurer l'efficacité d'un jeu de paramètres par rapport à un autre dans la modélisation (critère AIC). Ces techniques d'analyse ont trouvé une application particulièrement utile dans la méthode NARMAX (chapitre 3) et principalement à l'aide de la technique de sélection "stepswize-regression" qui a permis de déterminer les paramètres essentiels à la modélisation.

La méthode d'identification "NARMAX" s'est avérée très performante malgré le fait qu'elle génère un grand nombre de monômes. La pré-sélection arbitraire que nous avons appliqué n'a pas été très pénalisante, vu les bons résultats obtenus. Le passage en base modale a permis de s'affranchir des problèmes de localisation et de fournir une modélisation correcte et pratique. L'application de la forme normale à ce type de problème permet une simplification de l'équation réursive, mais reste encore assez lourde à appliquer et peu exploitable dans le cas aléatoire forcé. L'application multi-dimensionnelle expérimentale a présenté des difficultés car si la minimisation des différents NARMAX n'est pas simultanée leurs couplages risquent de fournir un résultat erroné. Nous avons donc effectué une identification de chaque NARMAX de manière découplée ce qui a fourni un résultat acceptable.

La méthode non-paramétrique développée dans le chapitre 4 a donné de bons résultats au niveau de l'identification de la force interne. Les améliorations apportées grâce à la méthode mixte (optimale entre le prolongement analytique et celui à pas constant) ont fournis une bien meilleure identification des systèmes étudiés. L'application de cette méthode dans un contexte expérimental nous a permis d'identifier de manière très satisfaisante la force interne bien que la prise en compte des effets d'amortissements se soit avérée difficile. En effet, la participation en force de l'amortissement (associée abusivement à $x = \text{constante}$) par rapport à la force interne est faible (de 10% à 20%) en comparaison à celle fournie par la raideur ($\dot{x} = \text{constante}$). Malgré ce problème cette technique donne un résultat tout à fait correct quant à la nature des effets non-linéaires et leurs quantifications.

L'utilisation des séries fonctionnelles de Volterra et Wiener permet une écriture entrée-sortie des systèmes non-linéaires. Ce type de formulation se prête bien à la mise en oeuvre de techniques d'identification. On notera tout de même qu'elle demande en général énormément de calculs. Elle peut être aussi utilisée pour analyser les comportements non-linéaires au travers de l'analyse spectrale des noyaux de Volterra. L'approche des systèmes non-linéaires par les séries fonctionnelles de Volterra et Wiener reste très puissante de par son caractère général.

Le développement en série de Volterra peut trouver des applications très intéressantes sur des systèmes particuliers comme les structures en contre réaction non-linéaire. Ainsi nous avons pu montrer dans le chapitre 6 qu'il était possible d'identifier complètement un système composé de deux sous-structures linéaires reliées par une non-linéarité. Cette méthode originale permet une identification simple des fonctions de transferts et des

paramètres non-linéaires, grâce aux calculs analytiques des trois premiers noyaux multidimensionnels de la série de Volterra associés à ce type de système. Les résultats obtenus ont montré que cette démarche fonctionnait bien lorsque les non-linéarités intervenantes étaient découplées les unes des autres. Cette difficulté pourra certainement trouver une solution par la mise en oeuvre d'algorithme de déconvolution plus adapté.

D'autres méthodes d'identification non-linéaires sont encore à l'heure actuelle en développement. Nous citerons par exemple la méthode des réseaux neuronaux [10] [87] qui permet de modéliser comme une boîte noire le comportement du système étudié et de définir des connexions entre des opérations élémentaires dont la participation sera identifiée. Ce concept de modélisation, très différent des approches classiques, semble être très prometteur et source de toute une nouvelle série algorithmes d'identification.

Bibliographie

- [1] *LMS : Documentation*. LMS, Belgium, 1990.
- [2] Haoui A. *Transformée de Hilbert théorie et applications aux systèmes non-linéaires*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 1984.
- [3] Schetzen A. *The Volterra and Weiner theories of nonlinear systems*. John Wiley, New York, 1980.
- [4] Brjuno A.D. Analytical forms of differential equations, i. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 25:132–198, 1971.
- [5] Brjuno A.D. Analytical forms of differential equations, ii. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 25:199–299, 1972.
- [6] Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. John Wiley, New York, 1973.
- [7] Brown D. L. Allemang R. J. and Deblauwe F. The polyreference time domain technique. In *International Modal Analysis Conference*, 1988.
- [8] Blanc B. *Probabilités et statistiques*. Ecole Centrale de Lyon, Lyon, 1988.
- [9] Budiwanto B. *Identification temporelle des structures linéaires et non-linéaires*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1990.
- [10] Jamaluddin H.B. Billings S.A. and Chen S. Properties of neural networks with applications to modelling non-linear dynamical systems. *Int. J. Control.*, 55:193–224, 1992.
- [11] Tsang K.M. Billings S.A. and Tomlinson G.R. Application of narmax method to non-linear frequency response estimation. In *International Modal Analysis Conference*, 1988.
- [12] Tsang K.M. Billings S.A. and Tomlinson G.R. Spectral analysis for non-linear systems, part iii: Case study examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 4:3–21, 1989.
- [13] Goodwin G. C. and Payne R. L. *Dynamic system identification*. Academic Press, 1977.
- [14] Lamarque C. *Modélisation et identification des systèmes mécaniques non-linéaires*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.

- [15] Lesiak C. and Krener A.J. The existence and uniqueness of volterra series for nonlinear systems. *IEE Transactions on Automatic Control*, 23:1090–1095, 1978.
- [16] Tisseron C. *Topologie Espaces Fonctionnels*. Hermann, 1985.
- [17] Cremona C.F. *Recurssive time domain modal identification techniques*. Thèse de doctorat, University of Wales, 1990.
- [18] Billings S.A. Chen S. and Luo W. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *Int. J. Control*, 50:1873–1896, 1989.
- [19] Eman K.F. Cho D.W. and WU S.M. A new time domaine multiple input modal analysis method. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 109:377–384, 1987.
- [20] Edward F. Crawley and Kevin J. O'Donnell. Force-state mapping identification of nonlinear joints. *AIAA Journal*, 25:1003–1010, 1987.
- [21] Miller D.F. A time domaine approach to z-domain model identification. *Int. J. Control*, 44:1285–1295, 1986.
- [22] Ewins D.J. *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies Press LTD., England, 1984.
- [23] Wysocky E.M. and Rugh W.S. Further results on the identification problem for the class of nonlinear systems sm. *IEE Transactions on Circuits and Systems*, 23:664–670, 1976.
- [24] Wysocky E.M. and Rugh W.S. An approximation approach to the identification of non-linear frequency-response measurements. *Int. J. Control*, 29:113–123, 1979.
- [25] Blanc-Lapierre A. et Picinbono B. *Fonctions aléatoire*. Masson, Paris, 1981.
- [26] Roddier F. *Distributions et transformation de Fourier*. Mc Graw-Hill, Paris, 1985.
- [27] Thouverez F. and Jezequel L. Identification d'une non-linéarité localisée. In *STRUCOME*, 1989.
- [28] Thouverez F. and Jezequel L. Identification d'une structure mécanique possédant un joint non-linéaire. In *9eme Congrès Francais de Mécanique*, 1989.
- [29] Thouverez F. and Jezequel L. Identification of structures with non-linear joints. In *3rd conference on non-linear vibrations, stability and dynamics and mechanisms*, 1990.
- [30] Thouverez F. and Jezequel L. Identification of volterra kernels of mechanical systems with local non-linearities. In *Euromech 280 On identification of non-linear mechanical systems from dynamic tests*, 1991.
- [31] Thouverez F. and Jezequel L. Identification des structures et de leurs comportements non-linéaires. *Identification des structures et de leurs comportements non-linéaires*, 29:113–123, 1992.
- [32] Thouverez F. and Jezequel L. Identification of a localized nonlinearity. In *International Modal Analysis Conference*, 1992.

- [33] Thouverez F. and Jezequel L. A narmax method of non-linear identification on modal base. In *International Modal Analysis Conference*, 1993.
- [34] Parker G.A. and Moore E.L. Practical nonlinear system identification using a modified volterra series approach. *Automatica*, 18:85–91, 1982.
- [35] Goodwin G.C. and Kwai Sang Sin. *Adaptive filtering prediction and control*. Prentice-hall Inc., New Jersey, 1984.
- [36] Box G.E.P. and Jenkins G.M. *Time series analysis-forecasting and control*. Holden Day, San Francisco, 1970.
- [37] Tomlinson G.R. *Session de perfectionnement : dynamique non-linéaire*. Institut supérieur des matériaux et de la construction mécanique, Saint Ouen, 1986.
- [38] Tomlinson G.R. A comparaison of procedures for identifying non-linear systems without a-priori information. In *13th International Seminar on Modal Analysis*, 1988.
- [39] Akaike H. A new look at the statistical model identification. *IEE Transactions on Automatic Control*, 19:719–723, 1974.
- [40] Diaz H. and Desrochers A.A. Modeling of nonlinear discret-time systems from input-output data. *Automatica*, 24:629–640, 1988.
- [41] Poincaré H. *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- [42] Robbins H. and Monro S. A stochastic approximation method. *Ann. Math. Stat.*, 22:400–407, 1951.
- [43] Natke H.G. and al. *Application of system identification in engineering*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [44] Tang J. Transfert functions of non-linear multi-degree of freedom systems. In *International Modal Analysis Conference*, 1987.
- [45] Worden K. and Tomlinson G.R. Developments in force state mapping for nonlinear systems. In *International Modal Analysis Conference*, 1988.
- [46] Liu Y.P. Korenberg M., Billings S.A. and McIlroy P.J. Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *Int. J. Control.*, 48:193–210, 1988.
- [47] Smillie K.W. *An introduction to Regression and Correlation*. Academic Press Inc. LTD., New York, 1966.
- [48] Jezequel L. *Synthèse de l'amortissement par sous-structuration expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1978.
- [49] Jezequel L. *Dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1986.

- [50] Jezequel L. and Lamarque C.H. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149:429–459, 1991.
- [51] Ljung L. and Soderstrom T. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT press, Cambridge, 1982.
- [52] Zavodney L.D. Can the modal analyst afford to be ignorant of nonlinear vibration phenomena ? In *International Modal Analysis Conference*, 1987.
- [53] Chua L.O. and Schilling R.J. An algorithm for modeling the sinusoidal input/steady-state over a set of frequencies and amplitudes. *Journal of The Franklin Institut*, 298:101–124, 1974.
- [54] Najim M. *Modélisation et identification en traitement du signal*. Masson, Paris, 1988.
- [55] Roseau M. *Vibration des Systèmes Mécaniques - Méthodes Analytiques et Applications*. Masson, Paris, 1984.
- [56] Sassi H. Masri S.F. and Caughey T.K. Nonparametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 49:619–628, 1982.
- [57] Saud A.F. Masri S.F., Miller R.K. and Caughey T.K. Identification of nonlinear vibrating structures: Part i - formulation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 54:923–929, 1987.
- [58] Saud A.F. Masri S.F., Miller R.K. and Caughey T.K. Identification of nonlinear vibrating structures: Part ii - applications. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 109:923–929, 1987.
- [59] Bazaraa M.S. and Shetty C.M. *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. John Wiley, New York, 1979.
- [60] Jong M.T. and Shanmugam K.S. Determination of a transfer function from amplitude frequency response data. *Int. J. Control*, 25:941–948, 1977.
- [61] Jones D.I. Nashif A.D. and Henderson J.P. *Vibration damping*. John Wiley, New York, 1985.
- [62] Juang J.N. Natke H.G. and Gawronski W. A brief review on the identification of nonlinear mechanical systems. In *International Modal Analysis Conference*, 1988.
- [63] Sinha N.K. and Kuzsta B. *Modeling and Identification of Dynamic Systems*. Van Nostrand Reinhold Company, New-York, 1983.
- [64] Argoul P. *Identification des structures vibrantes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990.
- [65] Argoul P. and Jezequel L. Improvement of a nonparametric identification procedure used in non linear dynamics. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56:697–703, 1989.
- [66] Atkinson P. and Williams L.I. Correspondence. *Proc. IEE*, 125:1307–1308, 1978.
- [67] Tassi P. *Méthodes statistiques*. Economica, Paris, 1989.

- [68] Huber P.J. The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions. In *5th Berkeley Symposium : Mathematical Statisticals and Probability*, 1967.
- [69] Lawrence P.J. and Tech B. Estimation of the volterra functional series of a nonlinear system using frequency-response data. *Proc.IEE*, 128:206–210, 1981.
- [70] Rodeman R. Hilbert transform implications for modal analysis. In *International Modal Analysis Conference*, 1987.
- [71] Pappa R.S. and Ibrahim S.R. A parametric study of the ibrahim time domaine modal identification technique. *Schock and Vibration Bulletin*, 51:43–72, 1981.
- [72] Brockett R.W. Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- [73] Chen S. and Billings S.A. Prediction-error estimation algorithm for non-linear output affine systems. *Int. J. Control*, 47:309–332, 1988.
- [74] Setio S. *Identification non-linéaire*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [75] Billings S.A. and Leontaritis I.J. Input-output parametric models for non-linear systems. part ii: stochastic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41:329–344, 1985.
- [76] Billings S.A. and Tsang K.M. Spectral analysis for non-linear systems, part i: Parametric non-linear spectral analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3:319–339, 1989.
- [77] Billings S.A. and Tsang K.M. Spectral analysis for non-linear systems, part ii: Interpretation of non-linear frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3:341–359, 1989.
- [78] Billings S.A. and Chen S. Extended model set, global data and threshold model identification of severely non-linear systems. *Int. J. Control.*, 50:1897–1923, 1989.
- [79] Billings S.A. and Chen S. Representations of non-linear systems: the narmax model. *Int. J. Control.*, 49:1013–1032, 1989.
- [80] Billings S.A. and Fakouri S.Y. Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis. *Proc. IEE*, 125:1307–1308, 1978.
- [81] Billings S.A. and Fakouri S.Y. Theory of separable processes with applications to the identification of nonlinear systems. *Proc.IEE*, 125:1951–1958, 1978.
- [82] Billings S.A. and Fakouri S.Y. Identification of sytems containing linear dynamic and static nonlinear elements. *Automatica*, 18:15–26, 1982.
- [83] Billings S.A. and Voon W.S.F. Correlation based model validity tests for non-linear models. *Int. J. Control*, 44:235–244, 1986.
- [84] Billings S.A. and Voon W.S.F. A prediction-error and stepwise-regression estimation algorithm for non-linear systems. *Int. J. Control*, 44:808–825, 1986.

- [85] Zaghlool S.A. Single-station time-domain (sstd) vibration testing technique: theory and application. *Journal of Sound and Vibration*, 72:205–304, 1980.
- [86] Kamakar S.B. Approximation analysis of non-linear systems by laplace transform. *Journal of Sound and Vibration*, 69:597–602, 1980.
- [87] Masri S.F. and Chassiakos A.G. Some issues in the identification of structural systems through the use of neural networks. In *International Workshop on: Safety evaluation based on identification approaches related to time variant and nonlinear structures*, 1992.
- [88] Gifford S.J. and Tomlinson G.R. Recent advances in application of functional series to non-linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, 135:289–317, 1985.
- [89] Baumgartner S.L. and Rugh W.S. Complete identification of a class of nonlinear systems from steady-state frequency response. *IEE Transactions on Circuits and Systems*, 22:753–758, 1975.
- [90] Chouychai T. *Comportement dynamique non-linéaire des structures*. Thèse de doctorat, Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 1986.
- [91] Chouychai T. and Vinh T. Impact testing of non-linear structures. In *International Modal Analysis Conference*, 1988.
- [92] Soderstrom T. Convergence properties of the generalized least squares method. *Automatica*, 10:617–626, 1974.
- [93] Caughey T.K. and Masri S.F. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 46:433–447, 1979.
- [94] Chouychai T. Vinh T. and Liu H. Second order transfer function computation and physical interpretation. In *International Modal Analysis Conference*, 1987.
- [95] Marmarelis V.Z. Identification of nonlinear systems by use of nonstationary white-noise inputs. *Appl. Math. Modelling*, 4:117–124, 1980.
- [96] Jakoby W. and Pandit M. A prediction-error-method for recursive identification of nonlinear systems. *Automatica*, 23:491–496, 1987.
- [97] Yongxin Yang and Ibrahim S.R. A nonparametric identification technique for variety of discrete nonlinear vibrating systems. *ASME Journal of Vibration, Stress, and Reliability in Design*, 107:60–66, 1985.
- [98] Ku Y.H. and Wolf A.A. Volterra-weiner functionals for the analysis of nonlinear systems. *Journal of The Franklin Institute*, 281:9–26, 1966.

Liste des Figures

1.1	Estimation d'un mode par la technique du pic.	21
1.2	Estimation d'un mode par la technique du lissage du cercle.	22
1.3	Diagramme structurel d'un schéma observable.	37
1.4	Diagramme structurel d'un schéma commandable.	38
1.5	Fonction de transfert bruité.	40
2.1	Phénomène de saut à la résonance ω_1	62
2.2	Phénomène d'auto-oscillation pour une non-linéarité du type $k(\alpha - \dot{u}^2)\dot{u}$	68
2.3	courbe iso pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$	75
2.4	bi-spectre pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$	75
2.5	courbe iso pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$	76
2.6	bi-spectre pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$	76
2.7	Dépendance de la fréquence propre avec le niveau d'excitation.	78
3.1	Organigramme de l'algorithme NARMAX-polynomial.	91
3.2	Organigramme de l'algorithme NARMAX-orthogonal.	92
3.3	Tests sur le modèle linéaire.	99
3.4	Tests sur le modèle non-linéaire.	100
3.5	Système masse ressort comportant une non-linéarité F^{nl}	108
3.6	Tests sur le modèle sans terme non-linéaire.	118
3.7	Tests sur le modèle avec des termes linéaires et $DT = 0.5$	119
3.8	Tests sur le modèle avec des termes linéaires et $DT = 0.1$	120
3.9	Tests sur le modèle avec des termes non-linéaires comprenant l'erreur prédictive.	121
3.10	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse prise en bout.	122
3.11	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse.	122
3.12	Tests sur le modèle sans terme non-linéaire.	123
3.13	Tests sur le modèle avec des termes linéaires.	124

3.14	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse.	125
3.15	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_1	125
3.16	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_2	126
3.17	Comparaison entre le modèle identifié et la réponse pour la coordonnée q_3	126
3.18	courbes iso (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié	127
3.19	bi-spectres (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié	128
3.20	courbes iso (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié	129
3.21	bi-spectres (amplitude et phase) pour le domaine $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 > 0$ du modèle identifié	130
3.22	Tests sur le modèle avec des termes linéaires (poutre expérimentale mode q_1).	131
3.23	Tests sur le modèle avec des termes linéaires (poutre expérimentale mode q_1).	132
3.24	Comparaison pour le mode q_1 entre la réponse linéaire et identifiée.	133
3.25	Comparaison pour le mode q_2 entre la réponse linéaire et identifiée.	133
3.26	Comparaison pour le mode q_1 entre la réponse identifiée, linéaire et non-linéaire.	134
3.27	Comparaison pour le mode q_2 entre la réponse identifiée, linéaire et non-linéaire.	134
4.1	Triangulation pour le calcul des P_{ij}	139
4.2	Triangulation du domaine Ω_1 pour l'amortisseur	139
4.3	Prolongement constant et analytique.	140
4.4	Plan des phases pour l'oscillateur de Van der Pol.	143
4.5	Force interne pour l'équation : $h(U, \dot{U}) = -\gamma(1 - U^2)\dot{U} + \omega^2 U = p(t) - m\ddot{U}$	144
4.6	Plan des phases pour l'amortisseur.	146
4.7	Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0.5 \text{ m/s}$	149
4.8	Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0 \text{ m/s}$	149
4.9	Coupe selon la droite à vitesse constante $v = 0.5 \text{ m/s}$	150
4.10	Coupe selon la droite à déplacement constant $d = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	150
4.11	Coupe selon la droite à déplacement constant $d = 0 \text{ m}$	151
4.12	Coupe selon la droite à déplacement constant $d = -0.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	151

4.13	Coupe selon $\dot{u} = 2.5m/s$ pour le cas à pas constant et par prolongement . . .	152
4.14	Coupe selon $\dot{u} = 2.5m/s$ par la méthode mixte	152
4.15	Participation des monômes dans les cas $(N_a = 5, N_b = 5)$, $(N_a = 5, N_b = 2)$	153
4.16	Force interne identifiée sur le dernier domaine (nappe et iso-cotes)	154
4.17	Force interne identifiée sur le premier domaine (nappe et iso-cotes)	154
4.18	Force interne identifiée sur le dernier domaine (nappe et iso-cotes)	155
4.19	Caractéristiques de l'amortisseur fournis par le constructeur	155
5.1	Système non-linéaire caractérisé par une fonction non-linéaire $F^{nl}(\cdot)$	173
5.2	Système non-linéaire en cascade.	174
5.3	Système non-linéaire avec contre réaction unitaire.	175
5.4	Système non-linéaire factorisable.	177
5.5	Système non-linéaire Sm.	179
6.1	Système en contre réaction non-linéaire.	187
6.2	Systèmes en contre réaction non-linéaire.	187
6.3	Systèmes mécaniques couplés par une non-linéarité	189
6.4	Système non-linéaire mono-dimensionnel	193
6.5	Système non-linéaire multi-dimensionnel	195
6.6	Structures couplées par un élément non-linéaire	196
6.7	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono- dimensionnel ($F^{nl} = U^3$). _____: Réponse théorique: Réponse Identifiée	198
6.8	Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono- dimensionnel ($F^{nl} = U^3$). _____: Réponse théorique: Réponse Identifiée	198
6.9	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono- dimensionnel ($F^{nl} = U\dot{U}$). _____: Réponse théorique: Réponse Identifiée	199
6.10	Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono- dimensionnel ($F^{nl} = U\dot{U}$). _____: Réponse théorique: Réponse Identifiée	199
6.11	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{11}$ dans un cas multi- dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). _____: Réponse théorique: Réponse Identifiée	200

6.12 Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	200
6.13 Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	201
6.14 Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{22}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	201
6.15 Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21} dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	202
6.16 Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{11} dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U^3, 0 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	202
6.17 Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{21}^o$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, U^3 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	203
6.18 Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{22}^o dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, U^3 \rangle$). — : Réponse théorique : Réponse Identifiée	203
7.1 Essai pour l'amortisseur à cables.	213
7.2 Amortisseur AP8-110 avec une masse $m = 530$ gr	213
7.3 Raideur expérimentale du système lame-poutre.	216
7.4 Raideur théorique de la lame.	217
7.5 Raideur calculée par ANSYS.	217
7.6 Essai sur poutre non-linéaire.	218
7.7 Schéma de la lame en appuie sur le support.	218
7.8 Lame entre deux supports rigides	219
7.9 Système non-linéaire poutre-lame.	220

Liste des Tableaux

1.1	Terminologie pour les différentes fonctions de transfert.	24
1.2	Existence du cercle dans le plan de Nyquist pour les différentes fonctions de transfert pour un système à 1ddl (V=visqueux et H=hystérétique). . . .	25
3.1	Tableau récapitulatif des propriétés des corrélations	98
4.1	Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.	156
4.2	Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.	156
4.3	Coefficients obtenus par la méthode mixte.	156
4.4	Ecarts sur les sous domaines.	156
4.5	Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.	157
4.6	Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.	157
4.7	Coefficients obtenus par la méthode mixte.	157
4.8	Ecarts sur les sous domaines.	158
4.9	Coefficients obtenus par la méthode de prolongement.	158
4.10	Coefficients obtenus par la méthode à pas constant.	158
4.11	Coefficients obtenus par la méthode mixte.	159
4.12	Ecarts sur les sous domaines.	159
4.13	Coefficients obtenus par la méthode mixte sur l'amortisseur.	159
4.14	Ecarts sur les sous domaines obtenus sur l'amortisseur.	160
6.1	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$).	204
6.2	Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$).	204
6.3	Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = U^3$).	205
6.4	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P$ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).	205

6.5	Comparaisons des réponses impulsionnelles H dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).	206
6.6	Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas mono-dimensionnel ($F^{nl} = \langle U\dot{U}, 0 \rangle$).	206
6.7	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{11}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	207
6.8	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{12}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	207
6.9	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{21}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	208
6.10	Comparaisons des réponses impulsionnelles $H * P_{22}$ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	208
6.11	Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21} dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	209
6.12	Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{11} dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	209
6.13	Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle u_1^3, 0 \rangle$).	210
6.14	Comparaisons des réponses impulsionnelles HP_{21}^c dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).	210
6.15	Comparaisons des réponses impulsionnelles H_{21}^c dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).	211
6.16	Comparaison des coefficients non-linéaires θ dans un cas multi-dimensionnel ($F^{nl} = \langle 0, u_2^3 \rangle$).	211

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr L. JEZEQUEL Professeur - Mécanique des Solides - ECOLE CENTRALE DE LYON,

et les rapports de

Mr GIBERT Professeur - DMT - Centre d'Etudes de Saclay - 91191 GIF-SUR-YVETTE,

Mr VINH Professeur - I.S.M.C.M. - 3, rue Fernand Hainaut - 93407 SAINT OUEN Cedex,

Monsieur THOUVEREZ Fabrice

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention
du titre de DOCTEUR

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 11 décembre 1992

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la
Recherche



F. LEBOEUF

