

N° d'ordre : 93-04

Année 1993

THESE

présentée devant

l'Ecole Centrale de Lyon

pour obtenir

le titre de **DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par M. Franck BOUQUEREL

ECOLE CENTRALE DE LYON
BIBLIOTHEQUE
B.P. 163 - 69131 ECUALLY CEDEX
FRANCE

Etude théorique et expérimentale de l'enroulement d'un film plastique mince : rôle des effets aérodynamiques

soutenue le 9 février 1993 devant la commission d'Examen

Jury MM. P. BOURGIN
 R. GAERTNER
 J. K. GOOD
 G. LORENTZ
 J. M. PIERRARD
 M. POTIER-FERRY
 P. TROMPETTE
 L. VINCENT

THESE

présentée devant

l'Ecole Centrale de Lyon

pour obtenir

le titre de **DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par M. Franck BOUQUEREL

Etude théorique et expérimentale de l'enroulement d'un film plastique mince: rôle des effets aérodynamiques

soutenue le 9 février 1993 devant la commission d'Examen

Jury MM. P. BOURGIN
 R. GAERTNER
 J. K. GOOD
 G. LORENTZ
 J. M. PIERRARD
 M. POTIER-FERRY
 P. TROMPETTE
 L. VINCENT

ECOLE CENTRALE DE LYON

Directeur : J. BORDET
Directeur Adjoint : E. PASCAUD
Directeur des Etudes : J. ROZINOER

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

*(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 juillet 1984,
modifié par l'Arrêté du 21 mars 1988)*

Mathématique-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur
M. MARION (Mlle)	Professeur
J.F. MAITRE	Professeur
J. ROZINOER	Maître de Conférences
G. THOMAS	Professeur
F. MUSY	Maître de Conférences
A. RACHID	Maître de Conférences

Physico-Chimie des Interfaces

P. CLECHET	Professeur
J. JOSEPH	Professeur
J.R. MARTIN	Professeur
L. PORTE	Professeur
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
C. MARTELET	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
Y. ROBACH	Maître de Conférences
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Directeur de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC (Mme)	Directeur de Recherche au CNRS

Matériaux : Mécanique Physique

P. GUIRALDENG	Professeur
D. TREHEUX	Professeur
B. VANNES	Professeur
L. VINCENT	Professeur
J. BLANC-BENON	Professeur - Lyon I
J. BRUGIRARD	Professeur - Lyon I
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. NGUYEN	Maître de Conférences
S. FAYEULLE	Chargé de Recherche au CNRS
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etudes

Electronique

R. BLANCHET	Professeur
M. LE HELLEY	Professeur
Y. HELLOUIN	Maître de Conférences
P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
G. HOLLINGER	Directeur de Recherche au CNRS
M. GENDRY	Chargé de Recherche au CNRS
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
J. TARDY	Chargé de Recherche au CNRS

Electrotechnique

P. AURIOL
A. NICOLAS
G. ROJAT

Professeur
Professeur
Maître de Conférences

Mécanique des Solides

B. CAMBOU
F. SIDOROFF
L. JEZEQUEL
A. DOGUI
C. SURRY

Professeur
Professeur
Professeur
Maître de Conférences
Professeur - E.N.I.S.E.

Technologie des Surfaces

J.M. GEORGES
J. SABOT
J.M. MARTIN
N. ALBEROLA (Mme)
H. MONTES
T. MATHIAS
P. KAPSA
J.L. LOUBET

Professeur
Professeur
Professeur
Maître de Conférences
Maître de Conférences
Directeur de Recherche au CNRS
Chargé de Recherche au CNRS
Chargé de Recherche au CNRS

Mécanique des Fluides

J. MATHIEU
E. ALCARAZ
D. JEANDEL
F. LEBOEUF
J. BATAILLE
B. GAY
J. GENCE
M. LANCE
R. MOREL
C. CAMBON
J.P. BERTOGLIO
J.P. FERRAND
D. HENRY

Professeur
Professeur
Professeur
Professeur
Professeur - Lyon I
Professeur - Lyon I
Professeur - Lyon I
Professeur - Lyon I
Professeur - INSA
Chargé de Recherche au CNRS
Chargé de Recherche au CNRS
Chargé de Recherche au CNRS
Chargé de Recherche au CNRS

Acoustique

G. COMTE-BELLOT (Mlle)
D. JUVE
M. SUNYACH
M. ROGER
P. BLANC-BENON

Professeur
Professeur
Professeur - Lyon I (IUT)
Maître de Conférences
Chargé de Recherche au CNRS

Machines Thermiques

P. BRUN
P. ARQUES
J.C. CHAMPOUSSIN

Professeur
Professeur
Professeur - Lyon I

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier la société RHÔNE-POULENC FILMS qui a entièrement financé cette étude. Ma reconnaissance ira plus particulièrement à Messieurs J. L. DEVILLAS, C. FAGET et P. BOURGIN qui en ont été les initiateurs. Qu'il me soit permis de les remercier pour la confiance qu'ils m'ont manifesté en me permettant d'entreprendre cette étude.

Je tiens également à remercier Messieurs S. SILVEIRA et P. TORQUATO de la filiale brésilienne du groupe RHÔNE-POULENC qui m'ont accueilli au sein de l'usine RHODIA FILMES NORDESTE à Cabo, Brésil dans le cadre d'un Volontariat Service National Entreprise et m'ont ainsi permis de poursuivre cette étude pendant la deuxième année dans un environnement industriel différent.

Je tiens enfin à remercier Messieurs Y. ZIPPELLI, J. F. MENGUAL et G. LORENTZ de la société MAGPHANE INTERNATIONAL / RHÔNE-POULENC FILMS qui m'ont témoigné leur confiance pendant la troisième année de cette étude.

Je tiens surtout à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur P. BOURGIN, aujourd'hui Directeur de l'Ecole d'Application des Hauts Polymères de Strasbourg pour avoir dirigé cette étude, pour la confiance qu'il m'a témoignée dans la conduite de celle-ci, pour les nombreuses discussions et pour les conseils qu'il m'a donnés.

Je tiens également à remercier Monsieur R. GAERTNER, maître de conférences à l'Université CLAUDE BERNARD-LYON I pour avoir suivi cette étude de près et pour avoir bien voulu examiner ce travail en tant que rapporteur.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur M. POTIER-FERRY, directeur du Laboratoire de Mécanique et de Physique des Matériaux de l'Université de METZ pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'être rapporteur.

Je suis également très sensible à l'honneur que me fait Monsieur P. TROMPETTE de l'Institut National Polytechnique de Grenoble en acceptant de présider le jury de la thèse.

Je souhaite également remercier Monsieur L. VINCENT du département Matériaux, Mécanique et Physique de l'Ecole Centrale de Lyon qui a bien voulu participer à ce jury.

Monsieur J. K. GOOD, directeur du Centre de Recherche sur l'Enroulement de l'Université d'Etat de l'Oklahoma à StillWater, m'a fait l'honneur d'accepter de participer au jury. Qu'il me soit permis de le remercier vivement.

Je souhaite enfin remercier Monsieur J.M. PIERRARD, directeur du Centre Technique de la Papeterie de Grenoble pour l'intérêt qu'il a témoigné à ce travail en acceptant de participer au jury.

Mes remerciements s'adressent également aux membres de la Cellule Enroulement de la société RHÔNE-POULENC FILMS, et plus particulièrement Messieurs P. DUPHÉ, J. J. DOMBES et N. MOUCHET ainsi que M. J. EMONOT de la société CISI INGÉNIÉRIE.

Résumé

Les films plastiques minces utilisés dans les secteurs de l'emballage et de l'enduction magnétique sont conditionnés sous forme de rouleau. Pendant ou après la fabrication du rouleau, des *instabilités d'enroulement* (plis, ondulations...) qui se traduisent par des *défauts d'aspect* peuvent apparaître. Il est fondamental de maîtriser les conditions critiques d'apparition de ces instabilités car elles sont susceptibles de déformer irréversiblement le film et donc de compromettre ses utilisations ultérieures.

Afin de préciser ces conditions critiques, nous avons développé un modèle théorique reposant sur une *approche physique de l'enroulement*. Ainsi, par hypothèse, les conditions d'apparition de ces instabilités d'enroulement dépendent des *contraintes résiduelles de l'enroulement*, elles-mêmes fonctions des paramètres du procédé de fabrication du rouleau et des propriétés du film.

De nombreux modèles de calcul des contraintes résiduelles ont été développés à ce jour. Toutefois, ils sont tous restreints au cas des films soit très épais ($\approx 100 \mu\text{m}$) soit enroulés très lentement ($\approx 1 \text{ m.s}^{-1}$) pour lesquels les phénomènes aérodynamiques (mécanismes d'entraînement et d'évacuation d'air) peuvent être négligés. Or, on sait par expérience que dans les conditions industrielles d'enroulement (épaisseur $\approx 10 \mu\text{m}$, largeur $\approx 1 \text{ m}$, vitesse $\approx 10 \text{ m.s}^{-1}$), ces *phénomènes aérodynamiques sont prépondérants*.

Le modèle actuel propose une *extension* des modèles existants reposant sur une *approche globale des phénomènes mis en jeu*. Il a été nécessaire pour cela d'étudier les mécanismes d'entraînement et d'évacuation d'air. Nous avons en particulier mis en évidence l'influence très importante de la *topographie de surface*. De nouvelles grandeurs non prises en compte par les modèles précédents telles que l'épaisseur des couches d'air entraînée, évacuée ou résiduelle sont ainsi précisées.

Les prédictions issues du modèle ont été comparées avec succès à des résultats expérimentaux obtenus dans des conditions d'enroulement et de topographie de surface très variées (procédé, type de film). Des formes caractéristiques des profils des contraintes résiduelles et de l'épaisseur de la couche d'air ont été mises en évidence. Nous avons montré que l'évacuation latérale de l'air induit une chute de la tension résiduelle assez importante. Les variations de la vitesse, de la force d'appui, de la tension ou bien du niveau de rugosité ont des *effets non-linéaires du même ordre de grandeur*. Ce résultat justifie l'approche globale proposée. Enfin, une *très forte influence des écarts à la symétrie* tels que les sous-épaisseurs a également été mise en évidence, en accord avec les observations.

Le modèle permet ainsi de prédire l'état des contraintes résiduelles résultant de l'enroulement du film dans des conditions industrielles. L'utilisation de ce modèle permet d'avoir une *approche moins empirique* de l'enroulement, de mieux comprendre l'influence respective de chaque paramètre et donc, à terme, d'optimiser les conditions générales du procédé industriel.

Abstract

Plastic films, used as a substrate for packaging and magnetic recording tape are wound around a core. During or after winding, *instability phenomena* such as wrinkles may appear. It is important to master the critical conditions which induce these phenomena because of the great industrial and economical importance.

We propose a theoretical model in order to specify these conditions. This model is based on a *physical approach of winding* : critical conditions are supposed to be strongly connected with the *internal stresses*. These stresses depend on winding conditions and foil properties.

Till now, all of the existing model of internal stresses computation where developed for thick film (about 100 μm) and low velocities (about 1 m.s^{-1}). Under such conditions effects induced by *winding velocity*, and some effects induced by *nip force* and *surface topography* are neglected. More generally air entrapment and exhaust are neglected. Experimentations of winding process under industrial conditions (thickness about 10 μm , width about 1 m and velocity about 10 m.s^{-1}) indicate that these parameters are as important as foil tension.

In order to extend the previous models up to the industrial conditions, we propose a more general and realistic model based on a *global approach of phenomena involved*. The effect of the *surface topography* on *air exhaust* and radial properties of the wound foil are taken into account. Under these assumptions, prediction of new parameters such as thicknesses of the entrapped, exhaust or residual air layer become possible.

For a large set of winding conditions and foil properties, good agreement is obtained between the theoretical and experimental results. Typical variation of the air interlayer thickness and stress fields are presented. We observed that effects of winding velocity, nip force, foil tension and foil roughness are all of the *same order of magnitude*, which is consistent with industrial know how. These results justify the global approach of the model.

The model allows the final stress state and the air interlayer thickness to be computed as functions of the winding conditions (velocity, foil tension and nip force) and of the foil properties (bulk mechanical and superficial).

The use of this model leads to a less empirical understanding of the physical phenomena involved in winding process.

Sommaire

Remerciements.....	7
Résumé.....	9
Abstract.....	10
Introduction générale.....	13
Chapitre I : présentation du problème.....	15
A.) Le rouleau de film.....	17
A.1.) L'enroulement.....	17
A.2.) instabilités d'enroulement.....	18
B.) Les propriétés du film.....	19
B.1.) Les propriétés massiques du PET.....	19
B.2.) Les propriétés surfaciques du film.....	19
B.3.) Les propriétés du film enroulé.....	22
Résumé et conclusion.....	24
Chapitre II : le modèle d'enroulement.....	25
A.) Cadre général.....	27
Introduction.....	27
A.1.) Processus incrémental couplé.....	27
A.2.) Les contraintes résiduelles.....	28
A.3.) Historique.....	28
A.4.) Le modèle proposé.....	30
B.) Superposition d'une nouvelle couche de film.....	32
Introduction.....	32
B.1.) "Foil Bearing".....	33
B.2.) Lubrification EHD.....	34
B.3.) Configuration réelle de l'enroulement.....	35
B.4.) Influence de la géométrie.....	37
Résumé et conclusions.....	37
C.) Contraintes résiduelles.....	38
Introduction et notations.....	38
C.1.) Historique.....	39
C.2.) Le modèle proposé.....	40
Résumé et conclusions.....	54
D.) Evolution de l'état du rouleau.....	55
D.1.) Compression radiale du rouleau.....	55
D.2.) Evacuation de l'air entre les couches de film.....	56
D.3.) Diminution de la tension résiduelle.....	58
D.4.) Glissements tangentiels.....	60
Conclusion.....	62
Chapitre III : validation et exploitation du modèle.....	63
Introduction.....	65
A.) Validation du modèle.....	65
Introduction.....	65
A.1.) le prototype d'enroulement.....	65
A.2.) Validation du modèle.....	67
A.3.) Validation sur le prototype d'enroulement.....	68
A.4.) Illustration sur les découpeuses industrielles.....	71

Conclusion.....	73
B.) Exploitation du modèle	74
Introduction	74
B.1.) Analyse de l'état global du rouleau	74
B.2.) Sensibilité aux valeurs nominales	81
B.3.) Sensibilité aux évolutions des paramètres	87
Résumé- conclusions.....	92
Chapitre IV : effets d'écarts à la symétrie.....	93
Introduction.....	95
A.) Répartition latérale de l'appui	95
B.) Flèche du rouleau de film	97
C.) Irrégularités d'épaisseur.....	100
D.) Défaut de planéité.....	102
Conclusion.....	104
Chapitre V : les instabilités d'enroulement.....	105
Introduction et restrictions	107
A.) Le contact film/film.....	108
A.1.) Interface film/film.....	108
A.2.) Possible effet dynamique : glissement.....	109
Conclusion.....	111
B.) Le micro-flambage	112
Introduction	112
B.1.) Le micro-flambage	112
B.2.) Application aux instabilités d'enroulement	125
Conclusion.....	128
Chapitre VI : évolution après l'enroulement.....	129
Introduction.....	131
A.) Etat d'équilibre du rouleau	131
B.) Temps.....	132
C.) Température	133
D.) Humidité relative	136
Conclusion.....	136
Conclusion générale.....	137
Annexes.....	141
I.) Caractérisation de la topographie de surface	143
II.) Loi de HOOKE.....	156
III.) Equation d'équilibre.....	165
IV.) Relations $\varepsilon = \varepsilon(u)$	165
V.) Relation $\sigma_r = \sigma_r([\sigma_\theta]_0)$	166
VI.) Résolution de l'équation différentielle.....	167
VII.) Défauts de planéité.....	171
VIII.) Aspects numériques	173
Nomenclature.....	179
Références bibliographiques	183

Introduction générale

Les films plastiques minces (5 à 75 μm) représentent aujourd'hui un secteur d'activité important couvrant les applications emballage, support pour produits magnétiques, art graphique ou encore isolant pour condensateur. Parmi les nombreux polymères utilisés : Poly(Ethylène), Poly(Propylène), Acétate de Cellulose, Poly(Ethylène Téréphtalate), ce dernier se distingue par d'excellentes propriétés mécaniques. Il est donc de ce fait principalement utilisé pour les applications nécessitant de telles propriétés, essentiellement le support pour enduction magnétique type (S)VHS, Vidéo (Hi)8mm, DAT, ou DCC. Cette application est de plus celle qui exige le *niveau de qualité* le plus élevé.

Le film mince de PET est fabriqué par extrusion au travers d'une filière plate, suivi d'un bi-étirage dans les directions longitudinale et transversale puis d'une stabilisation thermique et enfin de l'enroulement autour d'un mandrin.

L'enroulement d'un film de quelques micromètres d'épaisseur dans des largeurs pouvant atteindre plusieurs mètres à des vitesses de quelques mètres par seconde n'est pas aussi simple qu'il y paraît : des instabilités d'enroulement importantes peuvent apparaître. Or, compte tenu du niveau de qualité requis pour certaines applications, ces instabilités rendent le film inutilisable. La *maîtrise des conditions d'apparition des instabilités* représente donc un *enjeu industriel important*.

On sait par expérience que de nombreux facteurs interviennent dans l'enroulement : les conditions globales (*tension, vitesse, appui*) et le film (*propriétés mécaniques, topographie de surface, écarts à la symétrie*). Pour cette raison, l'enroulement apparaît comme un problème *difficile à appréhender*. Pendant très longtemps, sa maîtrise relevait donc essentiellement de l'*empirisme*.

Nous proposons d'aborder l'enroulement des films minces sous un angle *physique*. Dans le cadre de cette approche, nous chercherons à définir des *critères d'apparition des instabilités d'enroulement* en termes de *contraintes résiduelles*. Le rouleau est obtenu par enroulement de couches de film séparées par des couches d'air et des aspérités en contact. Le calcul des contraintes résiduelles est donc un problème de *mécanique non-linéaire*. La couche d'air entraînée dont l'épaisseur est voisine du micromètre s'échappe au fur et à mesure de la superposition des couches supérieures. L'étude de l'évacuation de l'air piégé relève donc de la *mécanique des fluides* dans des *espaces sub-microniques*. Les conditions d'évacuation de l'air ainsi que l'épaisseur ultime d'équilibre dépendent étroitement de la *topographie de surface*. En outre, l'évacuation de l'air entre les couches de film induit un *comportement mécanique évolutif*. Enfin, au-delà de ces aspects théoriques, il est également nécessaire de prendre en considération toutes les contraintes de l'environnement industriel qui peuvent se traduire par des *dissymétries*.

Après avoir isolé les phénomènes qui gouvernent l'enroulement, nous proposerons un *modèle physique global de l'enroulement* qui sera validé dans quelques configurations types puis exploité.

Présentation du problème

A.) Le rouleau de film

Introduction

Nous nous proposons de présenter ici l'enroulement des films et plus particulièrement les principales grandeurs qui gouvernent cet enroulement.

A.1.) L'enroulement

Nous avons représenté sur la figure I.1 la configuration générale de l'enroulement :

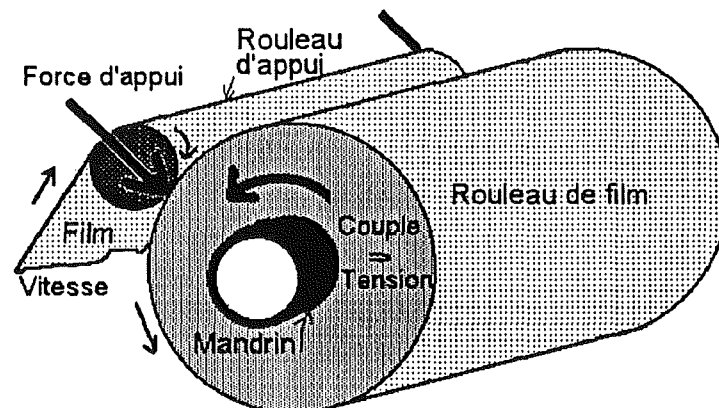


Figure I.1 : schéma global de l'enroulement des films minces

Différentes grandeurs gouvernent cet enroulement. On en distingue globalement deux types :

- celles qui sont liées au **procédé** : vitesse, tension et force d'appui,
- celles qui sont liées à la **technologie** : mandrin, rouleau d'appui.

A.1.a.) Vitesse

L'enroulement du film est effectué avec une vitesse ajustable pendant toute la durée de l'enroulement. La vitesse nominale (qui sera notée ultérieurement V) peut atteindre 10 m.s^{-1} .

Pendant l'enroulement, *une couche limite d'air est entraînée au voisinage du film*. Une partie de celle-ci sera emprisonnée sous la couche suivante de film.

Si l'épaisseur de la couche d'air est trop grande, différents problèmes peuvent apparaître :

- le film n'est pas maintenu et peut glisser latéralement,
- l'échappement ultérieur de l'air déformera le film.

La quantité d'air entraînée entre les différentes couches de film doit donc être **contrôlée**. Deux techniques complémentaires sont utilisées : *force linéique d'appui* et *tension du film*.

A.1.b.) Force d'appui

Afin de limiter la quantité d'air entraînée, une force est exercée par l'intermédiaire de deux verins placés aux deux extrémités d'un **rouleau d'appui** librement entraîné par le film. La force linéique (qui sera notée ultérieurement F_a) est généralement comprise entre 500 et 1000 N.m⁻¹ et est ajustable pendant toute la durée de l'enroulement (figure I.1). Le rouleau d'appui sera caractérisé par son rayon (R_{ra}) et les propriétés mécaniques de son revêtement (E_{ra} et ν_{ra}).

A.1.c.) Tension

Afin de positionner correctement le film sur le rouleau, celui-ci est tendu. La tension ou précontrainte tangentielle (qui sera notée $[\sigma_\theta]_0$) est appliquée sous la forme d'un couple sur l'axe du rouleau de film. Elle est comprise entre 4 et 12 MPa et ajustable pendant l'enroulement.

A.1.d.) Mandrin

L'enroulement est effectué sur un mandrin, généralement à usage unique, donc réalisé dans un matériau bon marché (carton). Pour certaines applications spécifiques, il existe des mandrins en résine/fibre de verre, résine phénolique, aluminium ou acier.

Il se présente sous la forme d'un cylindre creux de diamètre intérieur de 153 mm ou 254 mm et d'épaisseur variant entre 10 et 15 mm. Son rayon extérieur sera ultérieurement noté R_m . Son module d'YOUNG sera ultérieurement noté E_m et son coefficient de POISSON ν_m .

A.2.) instabilités d'enroulement

Pendant l'enroulement des films, il est assez fréquent que des instabilités d'enroulement apparaissent. Certaines de ces instabilités d'enroulement sont directement associées à des **défaillances matérielles** (moteurs, verins...) ou bien à des **anomalies temporaires** du procédé de fabrication (propriétés du film). La maîtrise de leurs conditions d'apparition sort du cadre de cette étude.

En revanche, il existe deux instabilités dont les conditions d'apparition **dépendent directement des paramètres de l'enroulement** : un bon ajustement de ces paramètres permet de contrôler les conditions d'apparition.

Il s'agit du **glissement latéral** du film et des **micro-flambages tangentiel et axial**.

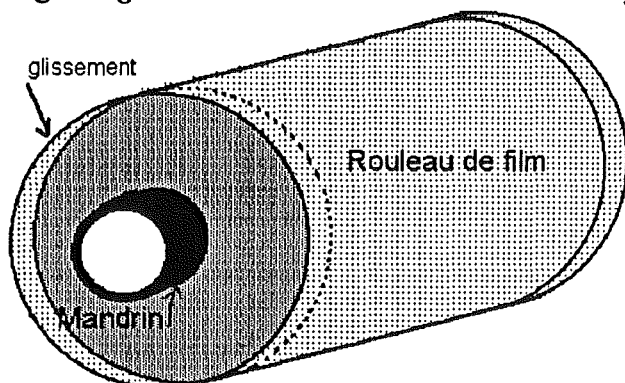


Figure I.2 : défaut de glissement

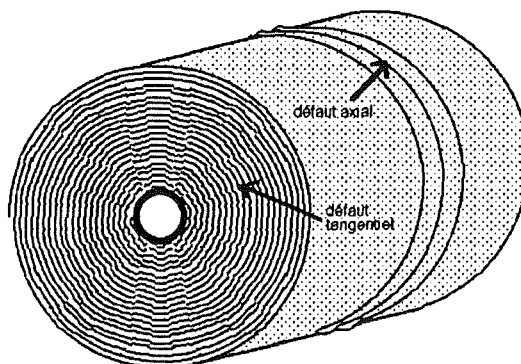


Figure I.3 : défaut de micro-flambage

Nous étudierons essentiellement les conditions d'apparition de ces instabilités.

B.) Les propriétés du film

Introduction

La maîtrise de l'enroulement du film polyester suppose que les principales propriétés du film susceptibles d'affecter les conditions d'apparition des instabilités d'enroulement soient connues. Globalement, nous pouvons distinguer deux sortes de propriétés :

- les *propriétés mécaniques massiques du polyester*,
- la *topographie de surface* du film.

Il apparaît également nécessaire de *caractériser l'état du film enroulé*. Les prochains paragraphes (§B.1., §B.2., §B.3. et §B.4.) seront consacrés à ces trois aspects.

B.1.) Les dimensions

Les dimensions du film plastique mince de PET seront caractérisées par son épaisseur (ultérieurement notée e_f), sa largeur (notée l_f) et sa longueur (notée L_f). Les ordres de grandeurs sont $e_f \approx 5$ à $25 \mu\text{m}$, $l_f \approx 500$ à 2000 mm et $L_f \approx 5000$ à 20000 m .

B.2.) Les propriétés massiques du PET

Le PET est un *polymère semicristallin* dont la cristallinité est induite par étirage dans deux directions privilégiées. De ce fait, les propriétés mécaniques du film de polyester dans son plan sont relativement élevées : les modules d'YOUNG sont compris entre 4,5 et 6,5 GPa contre moins de 2 GPa pour le PET amorphe. Le PET est biétiré et donc anisotrope : nous noterons ultérieurement E_θ et E_z ses modules d'YOUNG dans les directions tangentielle (sens machine) et axial (sens transverse).

Le niveau des contraintes appliquées dans le rouleau est tel qu'on peut considérer que le *PET reste dans le domaine élastique* et qu'il peut être caractérisé par ses seuls modules d'YOUNG et coefficients de POISSON. Les coefficients de POISSON du PET ($\nu_{\theta r}$, $\nu_{\theta z}$ et ν_{zr}) sont compris entre 0,26 et 0,30.

La densité du PET varie entre 1,38 et 1,41 selon le degré de cristallinité. Nous utiliserons essentiellement du PET proche de 1,395 (que nous noterons ultérieurement D_{PET}).

B.3.) Les propriétés surfaciques du film

Introduction

On sait par expérience que l'*état de surface du film* de polyester joue un *rôle prépondérant* sur les conditions de son enroulement. Il apparaît donc nécessaire de pouvoir à la fois *caractériser* et *contrôler* les effets de la topographie de surface des films.

B.3.a.) Les charges minérales

A la différence d'autres procédés de fabrication (usinage...), celui des films polyester (extrusion plus bi-étirage) n'induit pas de rugosité. Or on sait par expérience qu'un film mince parfaitement lisse ne glisse plus sur lui-même, ce qui complique son utilisation industrielle.

On crée artificiellement une topographie de surface en ajoutant au polymère fondu des *charges minérales*. L'affleurement de celles-ci au voisinage de la surface crée des *rugosités*. Le niveau global de rugosité est contrôlé par l'intermédiaire de la forme, du diamètre et du nombre de ces charges minérales.

Une des premières conséquences de l'existence de cette rugosité est que les couches de film sont séparées par une zone comportant des rugosités et de l'air. Nous noterons son épaisseur e_a .

Ajoutons qu'elles vont induire un *comportement mécanique du rouleau dans la direction radiale complexe* (caractérisé par le module d'YOUNG E_r). Nous reviendrons plus tard sur cet aspect.

B.3.b.) La caractérisation

Typiquement, la topographie de surface d'un matériau est caractérisée à partir d'une cartographie en deux ou trois dimensions de la surface. Des paramètres globaux tels que R_a , R_z , R_{max} , γ ou β sont introduits pour représenter cette surface.

Dans notre cas, il est nécessaire de prendre en compte trois particularités :

→ les films de polyester ont une *topographie de surface non classique*.

Les rugosités sont associées à la présence de charges : la surface peut donc être assimilée à un *plan parfait comportant quelques bosses localisées* :



Figure 1.4 : surface d'un matériau classique (métal)

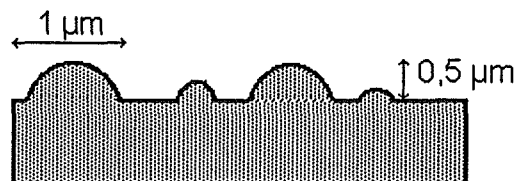


Figure 1.5 : surface d'un film de polyester

→ nous nous intéressons à des *effets macroscopiques de la topographie de surface* qui ne sont pas seulement fonction du seul profil de rugosité. D'autres effets apparaissent : *évacuation* d'air, *propriétés mécaniques* des rugosités.

→ la nature de l'espace entre les couches de film n'est pas caractérisée par le seul profil hors contact de la topographie de surface du film : nous avons *deux couches de film écrasées l'une*

contre l'autre. D'autres aspects apparaissent : *fléchissement* du film entre les aspérités, *écrasement* de ces aspérités, effet des forces à courtes distances...

Les paramètres classiques tels que R_a , R_z , R_{max} , γ ou β n'ont donc *pas de sens physique* et présentent *peu de sensibilité* à l'égard des problèmes spécifiques des films de polyester : les *paramètres classiques ne sont pas représentatifs*.

Nous utiliserons ponctuellement les paramètres R_z et SR_z pour situer les ordres de grandeur. Ils sont définis comme étant la moyenne de la hauteur des cinq plus grands pics observés sur un profil en deux (R_z) ou trois (SR_z) dimensions. Les valeurs de SR_z sont toujours supérieures à celles de R_z (environ 5 fois). SR_z nous semble plus représentatif de la hauteur réelle de ces plus grands pics.

Il a donc été nécessaire de *développer des tests spécifiques* afin de caractériser les *effets de la topographie de surface* sur l'enroulement. Fondamentalement, on distingue deux principaux effets de la topographie de surface dans l'enroulement des films minces :

→ l'épaisseur moyenne de la couche d'air résiduelle entre deux spires de film dépend de la topographie de surface et de la pression.

C'est la notion d'*épaisseur d'équilibre* caractérisée par le test du *gap d'air* (fonction $f_{\text{équil}}$).

→ pour une épaisseur initiale donnée de la couche d'air, il y a évolution lente vers cet état d'équilibre. Cette phase transitoire dépend de la topographie de surface. Elle est caractérisée par le test d'*échappement d'air* (fonction f_{trans}).

→ Test du gap d'air : $e_a = f_{\text{équil}}(P, \text{rugosité})$

Dans ce test, on superpose deux couches de film l'une sur l'autre. La pression est appliquée en créant une différence de potentiel entre les deux faces externes.

Après obtention de l'équilibre, l'épaisseur de la couche d'air d'équilibre est mesurée à l'aide d'un dispositif optique utilisant les propriétés d'interférence de la lumière.

Nous avons montré (voir annexe I.A.) que la courbe $e_a = f_{\text{équil}}(P, \text{rugosité})$ présente une forme caractéristique et de ce fait, peut être représentée par deux coefficients : h_0 et P_0 :

$$(1.1) \quad e_a(P) = f_{\text{équil}}(P, \text{rugosité}) = h_0 e^{-\sqrt{\frac{P}{P_0}}}$$

Malheureusement, le dispositif de mesure de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air est limité aux faibles valeurs. Ce test ne peut donc être utilisé que pour les *films les plus lisses*. Il s'agit essentiellement des films destinés aux applications d'enduction magnétique *vidéo*.

→ Test d'échappement d'air : $\frac{\partial}{\partial t} e_a = f_{\text{trans}}(e_a, \text{géométrie, pression, rugosité})$

Dans ce test, on fixe une couche de film sur un support, emprisonnant ainsi une certaine quantité d'air sous le film. On force ensuite l'évacuation de l'air ainsi piégé.

Dans le même temps, on mesure le temps d'évolution entre les deux états, c'est-à-dire entre la valeur initiale et la valeur finale de l'épaisseur de la couche d'air.

Nous avons proposé (voir annexe I.B.) une modélisation de ce test permettant d'exprimer la valeur de la fonction f_{trans} en fonction de la géométrie du dispositif, la viscosité de l'air, le gradient de pression du test et le temps d'échappement d'air.

→ Autres tests de caractérisation

Il existe deux autres tests de caractérisation. Nous avons présenté (voir annexe I.C.) une étude assez détaillée visant à établir une corrélation entre les résultats de l'un d'eux avec ceux du test du gap d'air, afin de dépasser les limitations de ce dernier.

B.4.) Les propriétés du film enroulé

La maîtrise de l'enroulement des films minces suppose que l'on soit en mesure de caractériser l'état du film enroulé plus finement que par l'existence ou la non-existence d'instabilités d'enroulement.

Plusieurs moyens sont à notre disposition :

B.4.a.) La densité apparente

Nous avons dit que le rouleau de film est globalement constitué d'un empilement de couches de PET séparées par des couches d'air et de rugosités. Les propriétés de la couche de PET (épaisseur, densité...) étant connues et constantes (matériau incompressible), la mesure de la densité globale du rouleau permet de déduire l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle interspires composée d'air et de rugosités :

$$(1.2) \quad e_a = e_f \left[\frac{D_{PET}}{D_a} - 1 \right]$$

Avec :

D_a = densité apparente du rouleau de film D_{PET} = densité du PET ($\approx 1,395$) *incompressible*
 e_f = épaisseur de la couche de film (m) e_a = épaisseur de la couche résiduelle interspires (m)

Il est important de préciser que cette mesure est possible et pertinente pour deux raisons :

- d'une part e_a est à peu près du même ordre de grandeur que e_f (0,5 μm contre 10 μm). Il en va tout autrement dans le cas des films épais (100 μm).
- d'autre part, le *PET est un matériau incompressible*. Dans le cas des matériaux compressibles (papier), la densité apparente traduit l'état de compression du matériau et non pas la présence d'une couche interspires composée d'air et de rugosités !

B.4.b.) La dureté

Un dispositif permet de mesurer la dureté des couches externes du rouleau. Il est possible de relier cette dureté à la valeur du module d'YOUNG de ces couches.

Nous n'avons pas mis en œuvre cette technique parce que nous pensons qu'elle caractérise plus des *variations axiales* qu'une valeur moyenne et parce qu'elle est limitée aux *couches externes*.

B.4.c.) Les contraintes résiduelles

Il est difficile d'accéder à l'état des contraintes résiduelles. Concrètement, on utilise quelques techniques qui, sous certaines restrictions, permettent de quantifier cet état :

→ La pression radiale entre les couches de film

La pression radiale entre les couches de film peut être mesurée de la manière suivante :

- 1. on interrompt l'enroulement après une longueur donnée,
- 2. on insère au bord du rouleau une bandelette,
- 3. on relance l'enroulement jusqu'à la fin,
- 4. on mesure la force nécessaire pour extraire cette bandelette.

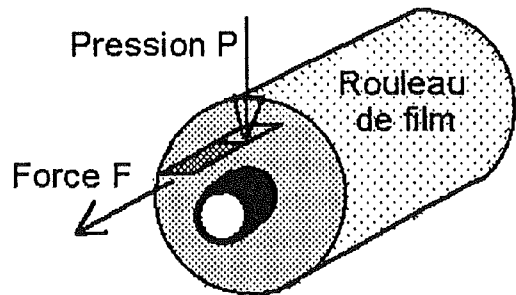


Figure I.6 : mesure de la pression radiale

La pression radiale est alors donnée par la formule :

$$(1.3) \quad P = \mu_s \frac{F}{S}$$

Avec :

μ_s = coefficient de frottement statique

F = force d'extraction de la bandelette (N)

S = section dans le rouleau (m²)

P = pression radiale (Pa)

Les principales limitations de cette technique sont d'une part la nécessité d'interrompre l'enroulement, donc de modifier les conditions de cet enroulement et d'autre part la présence de la bandelette qui déforme le rouleau (son épaisseur est souvent très supérieure à celle du film).

Elles ont pour effet d'augmenter la valeur de la pression : on connaît donc ainsi un majorant de celle-ci. Nous n'avons pas mis en œuvre cette technique.

D'autres techniques utilisant des capteurs piézoélectriques ont été développées. Elles présentent bien le même type de limitation (épaisseur $\approx 75 \mu\text{m}$), mais peuvent toutefois être prometteuses.

→ La pression radiale sur le mandrin

La pression radiale des premières couches de film peut être déduite de deux manières :

- la mesure de la déformation radiale et des propriétés mécaniques du mandrin,
- l'utilisation d'un mandrin instrumenté.

Nous préférons la première technique parce qu'elle permet d'utiliser les mandrins classiques.

Toutefois, la précision de la mesure se heurte à la connaissance des propriétés mécaniques du mandrin (qui a généralement une structure anisotrope complexe).

→ La tension résiduelle

Nous verrons plus tard que la précontrainte imposée au film au moment de sa superposition (notée $[\sigma_\theta]_0$) décroît au fur et à mesure de la superposition des couches supérieures.

Sa valeur résiduelle peut être mesurée de la manière suivante :

- 1. on découpe toutes les couches supérieures afin de dégager la couche considérée,
- 2. on découpe dans le sens de la largeur cette couche : les deux bords s'écartent,

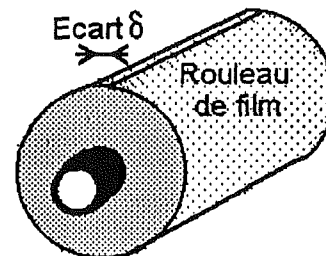


Figure I.7 : mesure de la tension résiduelle

l'écart entre les deux couches de film est directement relié à la tension résiduelle réelle :

$$(1.4) \quad [\sigma_\theta]_0 = E_\theta \frac{\delta}{2\pi r}$$

Avec :

E_θ = module longitudinal du film (Pa)

δ = écart entre les deux bords (m)

r = rayon du rouleau de film (m)

$[\sigma_\theta]_0$ = tension résiduelle (Pa)

Cette technique se révèle assez peu précise car δ est faible (≈ 1 mm) et donc difficilement mesurable. Nous avons toutefois choisi de l'utiliser afin de valider des ordres de grandeurs.

Résumé et conclusion

Le film est un produit *mince, peu rugueux* et enroulé *rapidement* dans des *grandes largeurs*. Il présente donc une très grande aptitude à la formation d'instabilité d'enroulement. Or, ces instabilités sont susceptibles de compromettre l'utilisation ultérieure du film.

Plusieurs paramètres gouvernent les conditions globales de l'enroulement et donc les conditions d'apparition des instabilités :

- le procédé : *Vitesse* (V), *Tension* ($[\sigma_\theta]_0$ initial) et *Force linéique d'appui* (F_a),
- le film : *dimensions* (e_f , l_f et L_f), *propriétés mécaniques* (E_r , E_θ , E_z , $\nu_{\theta r}$, ν_{zr} et $\nu_{\theta z}$) et *propriétés surfaciques* (fonctions $f_{\text{équil}}$ et f_{trans}),
- la technologie : *Mandrin* (R_m , E_m et ν_m), *Rouleau d'appui* (R_{ra} , E_{ra} et ν_{ra}).

Les paramètres de caractérisation de l'état final du rouleau sont les suivants :

- la *couche d'air* (e_a ou D_a),
- l' *état des contraintes résiduelles* ($\sigma_r(R_m)$, évolution de $[\sigma_\theta]_0$ au cours du temps).

Le modèle d'enroulement

A.) Cadre général

Ce premier paragraphe est particulièrement important parce qu'il va définir le cadre général de la modélisation ainsi que la structure globale du modèle.

Introduction

Nous proposons d'étudier les conditions d'apparition des défauts d'aspect du film enroulé à partir d'une *approche purement physique des phénomènes mis en jeu*. Dans le cadre de cette approche, nous interprétons les défauts d'aspect en termes de *phénomènes d'instabilité des contraintes résiduelles* dans le rouleau.

Les deux étapes fondamentales de l'étude vont donc concerner :

- d'une part le calcul des *contraintes résiduelles* résultant du procédé de fabrication,
- d'autre part l'estimation de l'*état critique précédant l'apparition d'une instabilité (défaut d'aspect)*.

A.1.) Processus incrémental couplé

Le rouleau de film est obtenu par *accrétion continue* de couches de film. Deux éléments très importants caractérisent les conditions de chaque accrétion :

→ *chaque nouvelle superposition dépend de l'état du rouleau.*

Une couche d'air est piégée sous chaque nouvelle couche de film. L'épaisseur de celle-ci dépend de l'état du rouleau à cet instant.

→ *le rouleau est affecté par la superposition.*

Cette nouvelle superposition modifie les dimensions du rouleau (diamètre...), l'état des contraintes résiduelles (en exerçant une légère compression) ainsi que l'épaisseur des couches d'air (échappement partiel).

En d'autres termes, l'état du rouleau à un instant donné dépend *à la fois* des paramètres externes (précontrainte imposée $[\sigma_\theta]_0$, vitesse V , force linéique d'appui F_a) et de l'état du rouleau à l'instant précédent. L'enroulement du film apparaît donc tout d'abord comme un *processus couplé* en ce sens que les conditions de chaque nouvelle itération sont couplées avec l'état du rouleau à cet instant.

De plus, l'état global du rouleau est le résultat de l'accumulation des différentes couches qui constituent le rouleau. Il s'agit donc également d'un processus *incrémental*.

A.2.) Les contraintes résiduelles

On sait *par expérience* que, dans les conditions industrielles de fabrication des rouleaux (film d'épaisseur $e_f \approx 10 \mu\text{m}$ enroulé à des vitesses V de quelques m.s^{-1}), les risques d'apparition des instabilités d'enroulement sont liés aux trois effets suivants :

A.2.a.) Phénomènes aérodynamiques : la vitesse et l'appui

Une *couche d'air est entraînée* sous chaque nouvelle couche de film. Une partie de celle-ci *s'évacue* lentement par les bords du rouleau au fur et à mesure de l'enroulement.

L'enroulement des films est donc le résultat de mécanismes d'*entraînement* puis d'*évacuation d'air*. Ajoutons que l'évacuation de l'air est phénomène irréversible.

A.2.b.) La topographie de surface

Le calcul de l'état des contraintes suppose la connaissance de la *loi de comportement du rouleau*. Or, celui-ci est constitué dans la direction radiale d'une superposition de *couches de film*, de *couches d'air* et de *rugosités* en contact les unes sur les autres. La loi de comportement devra donc intégrer les effets de la *déformation des aspérités*.

L'*évacuation d'air* s'effectue *entre les aspérités*. L'influence de la topographie de surface sera donc importante.

A.2.c.) Les contraintes de l'environnement industriel

Il est nécessaire de prendre en considération les *écarts à la symétrie* des propriétés du film qui peuvent apparaître au cours du procédé de fabrication ou encore l'*influence de paramètres externes* tels que la température et l'hygrométrie.

A.3.) Historique

La *compréhension* des conditions d'apparition des instabilités d'enroulement représente un *enjeu industriel important*. Les grandes entreprises concernées par l'enroulement des feuilles minces d'une manière générale (textile, papier, films plastiques...) ont donc étudié le problème.

On distingue deux approches :

- calcul des contraintes résiduelles

Il s'agit d'un calcul des contraintes résiduelles *élastiques* dues à la seule *tension d'enroulement* à partir d'une loi de comportement simple dont les coefficients sont *ajustables*. Le calcul repose généralement sur une résolution de l'équation différentielle d'équilibre des contraintes résiduelles élastiques : CATLOW et WALLIS [1962], ALTMANN [1966], TRAMPOSH [1965, 1967], HARLAND [1967 et 1974], YAGODA [1980a et 1980b], CONNOLLY et WINARSKI [1984], HAKIEL [1987].

Il peut également être question d'une formulation énergétique : HANISH [1985].

Il existe également d'autres formulations des contraintes résiduelles élastiques, simplistes voire incorrectes, mais reposant sur une loi de comportement qui reflète mieux les effets non-linéaires

de la *topographie de surface*. Cette loi est généralement déduite d'un test de compression d'une pile de couches de film. PFEIFFER [1966, 1979, 1981 et 1987], PENNER [1989] et HAKIEL [1987] ont proposé cette approche.

Plus récemment, GOOD [1991 et 1992] a proposé une extension des modèles actuels en vue de prendre en considération les effets dus au rouleau d'appui dans la configuration embarrée. GOOD obtient des résultats satisfaisants lorsque les effets aérodynamiques sont négligeables ($V \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$) dans le cas du papier ou du polypropylène d'épaisseur $e_f \approx 15 \text{ }\mu\text{m}$.

- influence d'autres grandeurs

Quelques auteurs ont essayé d'analyser les effets en termes de contraintes résiduelles des variations de certains paramètres.

GHOSH, PENG, BANKS-LEE, HAMOUDA et SHIN [1991] ont ainsi cherché à caractériser l'influence de la flèche due au poids du rouleau.

YAGODA [1980a, 1980b, 1980c et 1980d] étudie les effets de l'inertie et de l'humidité relative et CONNOLLY et WINARSKI [1984] ont étudié les effets de la dilatation thermique.

HAKIEL [1992] a étudié les effets d'irrégularités transversales du profil d'épaisseur.

On remarquera tout d'abord qu'il s'agit essentiellement de calculs de *mécanique des solides* dans un cadre *élastique*.

En particulier, les *effets aérodynamiques* (entraînement et évacuation d'air) sont *systématiquement négligés*. Ajoutons que l'évacuation de l'air est un *phénomène non-élastique*, qui aura certainement des conséquences non-élastiques sur le champ des contraintes.

Cette restriction s'explique dans quelques cas : enroulement du papier (poreux), des films plastiques épais ($e_f \approx 100 \text{ }\mu\text{m}$ et vitesse lente) ou bien encore des bandes magnétiques ($e_f \approx 100 \text{ }\mu\text{m}$, mais largeur $l_f \approx 1 \text{ cm}$ et vitesse $V \approx$ quelques cm.s^{-1}).

Or, on sait ainsi par expérience que dans ce domaine de vitesse d'enroulement ($V \approx 5$ à 15 m.s^{-1}), *les paramètres non pris en compte par les modèles précédents* (vitesse V , force linéique d'appui F_a ...) *sont au moins aussi importants que les paramètres pris en compte* (tension $[\sigma_\theta]_0$) en termes de condition critique d'apparition d'instabilités. L'auteur du plus récent progrès dans ce domaine (GOOD [1991 et 1992], polypropylène d'épaisseur $e_f \approx 15 \text{ }\mu\text{m}$) reconnaît que son modèle ne peut s'appliquer au-delà d'une vitesse de $V \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$.

Ainsi, dans le cas précis qui nous intéresse (conditions industrielles : $e_f \approx 10 \text{ }\mu\text{m}$, largeur $l_f \approx 1 \text{ m}$, vitesse $V \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$), aucun des modèles actuels ne peut s'appliquer de manière satisfaisante du fait de l'interaction avec les phénomènes aérodynamiques.

Ajoutons qu'aucune des études précédentes ne propose d'*estimation des conditions d'apparition des instabilités d'enroulement en termes de contraintes résiduelles*. Or, c'est également un aspect fondamental du problème.

En résumé, nous pouvons dire que le domaine d'application qui nous intéresse (faible épaisseur et vitesse élevée) correspond à une *lacune théorique importante*. Dans le même temps, il s'agit d'un *enjeu industriel important* : la seule aptitude d'un film à l'enroulement caractérisant tout simplement sa possible commercialisation.

Plus récemment à RHÔNE-POULENC FILMS, plusieurs études ont été développées :

- calcul des contraintes résiduelles : BOURGIN ET BALHI [1987],
- études du défaut vis : JARRY [1981],
- étude des mécanismes d'évacuation de l'air : BOURGIN ET CORNUT [1988],
- tentative de formulation globale du couplage intégrant les phénomènes aérodynamiques, l'influence de la topographie de surface et le calcul des contraintes : BOURGIN et BALANDREAU [1989]. Toutefois, cette formulation était limitée à quelques couches isolées d'un rouleau.

A.4.) Le modèle proposé

Nous reprendrons l'idée de BOURGIN et BALANDREAU en la *généralisant* à l'ensemble du rouleau et en intégrant de nouveaux éléments : BOURGIN et BOUQUEREL [1990, 1991c, 1992a, 1992b et 1992c].

Nous avons dit que les approches précédentes se limitaient à un calcul de mécanique des solides. Pratiquement en opposition avec ces approches, nous allons considérer que l'enroulement est un *problème couplé de mécanique des solides et de mécanique des fluides* (figure II.1) :

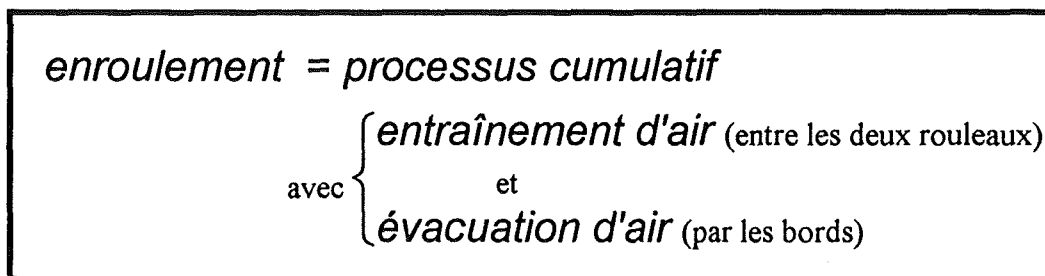


Figure II.1 : principe de l'approche globale du modèle

Le schéma global du modèle d'enroulement des films reprend le principe même de l'accrétion présenté au §A.2. Il se décompose globalement en trois étapes :

- 1. *superposition* d'une nouvelle couche,
- 2. *calcul* des contraintes résiduelles élastiques,
- 3. *évolution* de l'état du rouleau (élastique et non-élastique).

Ces trois parties du modèle seront abordées dans les paragraphes suivants §B.1, §B.2 et §B.3.

Trois autres étapes viennent s'ajouter au calcul précédent.

- 4. effet d'*écarts à la symétrie*,
- 5. critères d'apparition des *instabilités d'enroulement* (défauts d'aspect),
- 6. *évolution* après l'enroulement.

Nous les aborderons aux chapitres suivants (IV et V).

Nous avons construit sur la figure II.2. le synoptique de l'approche globale du modèle d'enroulement :

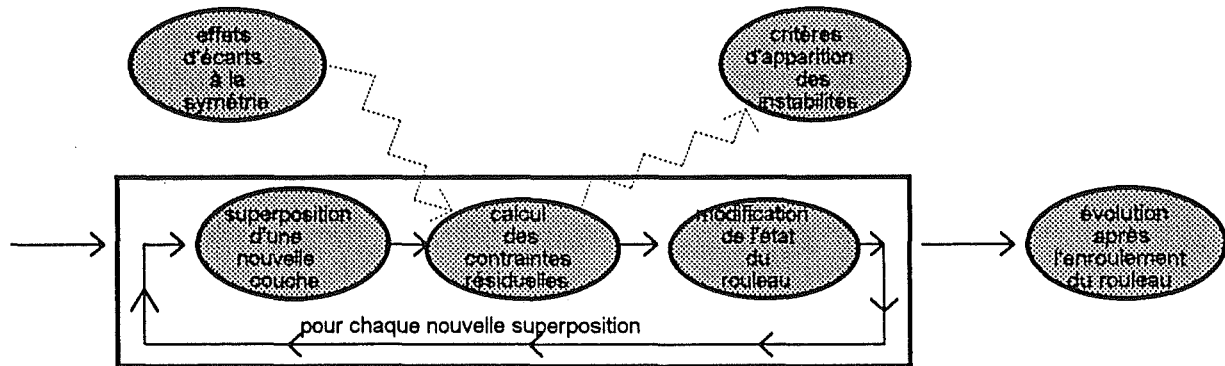


Figure II.2 : principe de l'approche globale du modèle

Afin de mieux illustrer notre démarche cumulative, nous avons reporté sur la figure II.3 l'évolution de l'épaisseur de la couche d'air de chacune des couches de film :

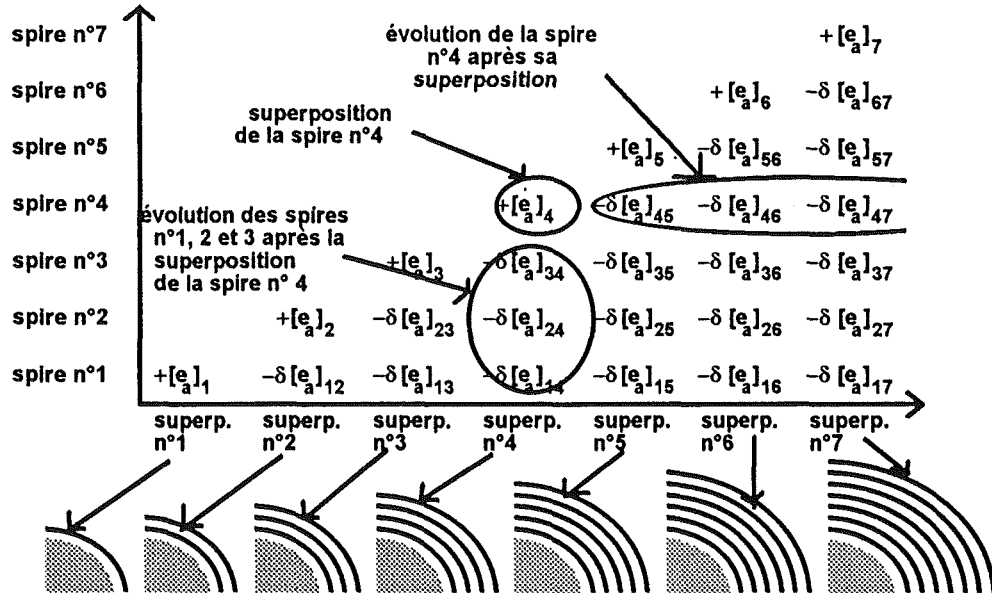


Figure II.3 : principe de l'approche globale du modèle

Considérons par exemple la superposition de la spire n°4. Celle-ci se traduit par :

- d'une part l'entraînement entre les deux rouleaux d'une couche d'air d'épaisseur $+ [e_a]_4$, formant ainsi avec la couche de film d'épaisseur e_f la nouvelle spire,
- d'autre part l'évacuation d'une partie des couches d'air inférieures n°1, 2 et 3 : les épaisseurs correspondantes varient de $-\delta [e_a]_{14}$, $-\delta [e_a]_{24}$ et $-\delta [e_a]_{34}$.

Autrement dit, l'épaisseur de la couche d'air de la spire n°4 évolue de la manière suivante :

- $+ [e_a]_4$, après la superposition n°4,
- $+ [e_a]_4 - \delta [e_a]_{45}$ après la superposition n°5,
- $+ [e_a]_4 - \delta [e_a]_{45} - \delta [e_a]_{46}$ après la superposition n°6,
- $+ [e_a]_4 - \delta [e_a]_{45} - \delta [e_a]_{46} - \delta [e_a]_{47}$ après la superposition n°7.

B.) Superposition d'une nouvelle couche de film

Nous abordons dans ce paragraphe la première des trois parties du modèle :

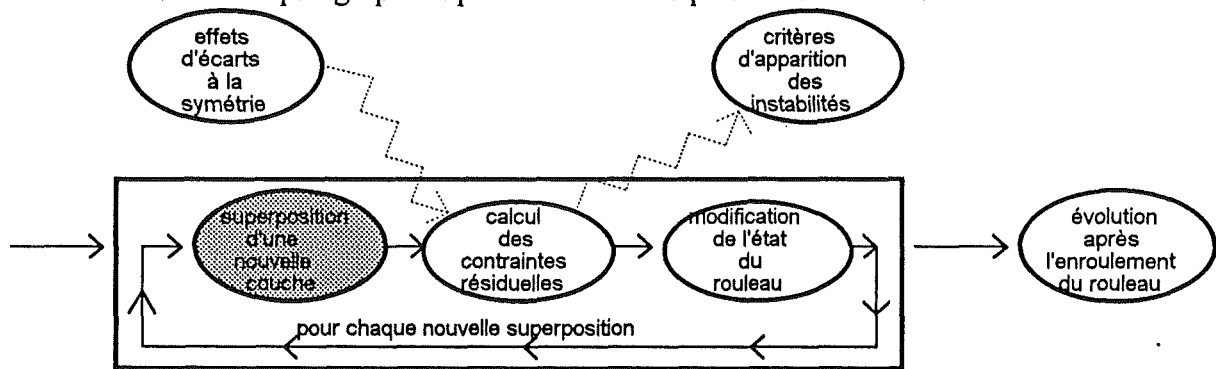


Figure II.4 : superposition d'une nouvelle couche

Introduction

Le déplacement du film entre le rouleau d'appui et le rouleau de film entraîne une couche limite d'air. Une partie de cette couche d'air est piégée sous la couche de film, formant ainsi la nouvelle spire :

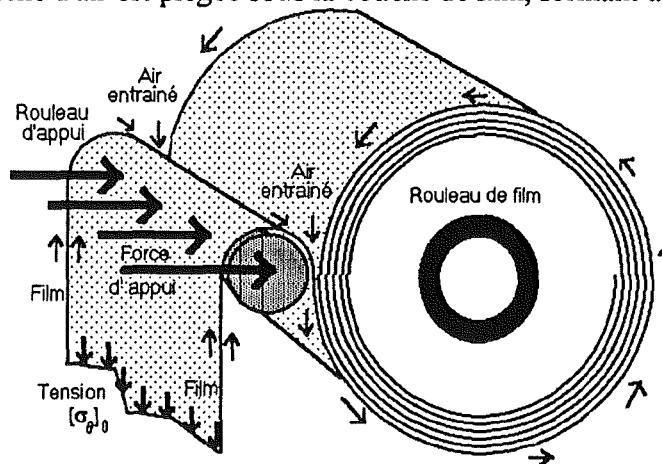


Figure II.5 : entraînement d'air

Le problème de la caractérisation des conditions de la nouvelle superposition se réduit à la connaissance de l'épaisseur de cette couche d'air piégée que nous appellerons e_e ici (c'est le $[e_a]_i$ du paragraphe précédent).

Elle dépend de toutes les grandeurs qui interviennent dans la zone de contact :

- l'appui (force linéique F_a , rayon R_{ra} et propriétés mécaniques E_{ra} et ν_{ra}),

- la vitesse d'enroulement V ,
- la viscosité de l'air μ_{air} ,
- la tension d'enroulement du film $[\sigma_\theta]_0$,
- le rouleau de film à cet instant (rayon R_{rf} et propriétés mécaniques E_{rf} et ν_{rf}).

Les cylindres sont déformés dans la zone de contact par le passage de l'air. La quantité d'air entraînée dépend elle-même de la géométrie de la zone de contact. Il s'agit donc d'un **problème couplé** d'élasticité (mécanique des solides) et d'aéro dynamique (mécanique des fluides).

Aucune étude complète de ce problème n'a fait l'objet d'une publication. De plus, nous ne disposons **pas de résultats expérimentaux propres**.

Nous nous proposons donc de procéder par **analogie** entre notre problème et d'autres problèmes proches : le "**foil bearing**" et la **lubrification élasto-hydro-dynamique**.

B.1.) "Foil Bearing"

Dans ce cas, on s'intéresse à la quantité d'air entraînée entre une couche de film sous tension et un cylindre (généralement une tête de lecture magnétique) :

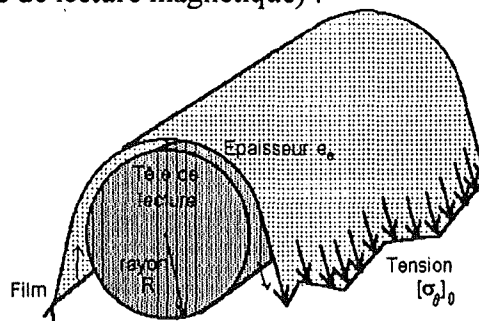


Figure II.6 : entraînement d'air au voisinage d'une tête de lecture

Par rapport à notre problème, la tension du film $[\sigma_\theta]_0$ est prise en compte mais la présence du rouleau d'appui, les propriétés mécaniques du cylindre et surtout la force linéique F_a sont négligées.

Il existe différentes études sur ce sujet. Elles reposent sur l'écriture de l'égalité de la pression entre la zone amont (couche limite) et la zone aval (film sur cylindre). BLOK et VAN ROSSUM [1953] ont obtenu l'expression suivante pour l'épaisseur de la couche d'air :

$$(2.1) \quad H = 2,233 * X^{+0,67} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H = \frac{e_e}{R_{\text{rf}}} \\ X = \frac{\mu_{\text{air}} V}{e_f [\sigma_\theta]_0} \end{cases}$$

Avec :

- | | |
|--|--|
| e_e = épaisseur de la couche d'air entraînée (m) | R_{rf} = rayon du cylindre (m) |
| μ_{air} = viscosité de l'air (Pa.s) | V = vitesse de défilement du film (m.s ⁻¹) |
| e_f = épaisseur de la couche de film (m) | $[\sigma_\theta]_0$ = tension du film (Pa) |

Application numérique (valeurs correspondant aux conditions de l'enroulement) :

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| $e_f = 12 \mu\text{m}$ | $R_{\text{rf}} = 150 \text{ mm}$ |
|------------------------|----------------------------------|

$$\mu_{\text{air}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s} \quad V = 6,7 \text{ m.s}^{-1} \quad [\sigma_{\theta}]_0 = 10 \text{ MPa}$$

Nous trouvons $e_e = 29 \mu\text{m}$

B.2.) Lubrification EHD

Dans ce cas, on s'intéresse à la quantité de lubrifiant entraînée entre deux cylindres en rotation. Cette fois, la présence du film (et donc sa tension $[\sigma_{\theta}]_0$) est négligée :

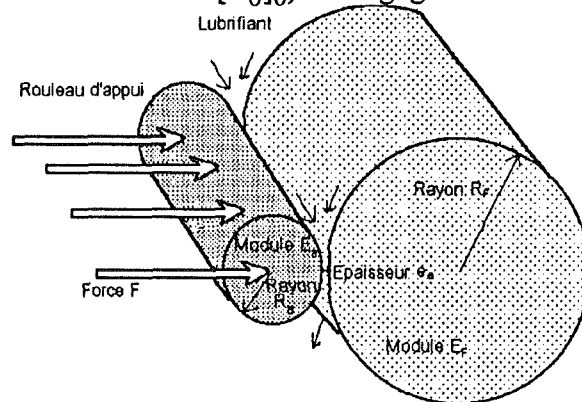


Figure II.7 : entraînement de lubrifiant entre deux cylindres

Cette résolution est effectuée dans un cadre élasto hydro dynamique c'est à dire qu'elle repose sur la prise en compte du couplage entre la déformation élastique des deux cylindres et l'entraînement du lubrifiant. Comme il s'agit d'un problème couplé, il n'y a pas de solution analytique et seule une interpolation numérique est envisageable.

HAMROCK et DOWSON [1981] ont résolu numériquement ce problème couplé dans le cas de dents d'engrenage et de billes de roulement. Ils ont interpolé les solutions obtenues dans des configurations différentes (vitesse, force...) et ont obtenu la formule approchée suivante :

$$(2.2) \quad H = 7,43 * U^{+0,65} * W^{-0,21} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H = \frac{e_e}{R_{eq}}, U = \frac{\mu_{air} V}{R_{eq} E_{eq}} \text{ et } W = \frac{F_a}{R_{eq} E_{eq}} \\ \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{ra}} + \frac{1}{R_{rf}} \text{ et } \frac{2}{E_{eq}} = \frac{1-\nu_{ra}^2}{E_{ra}} + \frac{1-\nu_{rf}^2}{E_{rf}} \end{cases}$$

Avec :

e_e = épaisseur de la couche d'air entraînée (m)	R_{eq} = rayon équivalent de HERTZ (m)
R_{ra} = rayon du rouleau d'appui (m)	R_{rf} = rayon du rouleau de film (m)
μ_{air} = viscosité de l'air (Pa.s)	V = vitesse de défilement du film (m.s ⁻¹)
E_{eq} = module équivalent de HERTZ (Pa)	E_{ra} = module du rouleau d'appui (Pa)
ν_{ra} = coefficient de POISSON du rouleau d'appui	E_{rf} = module du rouleau de film (Pa)
ν_{rf} = coefficient de POISSON du rouleau de film	F_a = force linéique d'appui (N.m ⁻¹)

Application numérique (valeurs correspondant aux conditions de l'enroulement) :

$$\begin{aligned} R_{eq} &= 60 \text{ mm} (R_{ra} = 100 \text{ mm et } R_{rf} = 150 \text{ mm}) & \mu_{air} &= 16 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s} \\ E_{eq} &= 0,31 \text{ MPa} (E_{ra} = 0,16 \text{ MPa et } E_{rf} = 5 \text{ MPa}) & V &= 6,7 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

$$F_a = 1000 \text{ N.m}^{-1}$$

Nous trouvons $e_e = 3,8 \text{ } \mu\text{m}$

Cette formulation, obtenue dans un cadre très précis (fluide très visqueux, modules élastiques élevés...) peut être *transposée* au domaine qui nous intéresse parce que les coefficients sans dimension H , U et W sont du *même ordre de grandeur* : le fluide est très peu visqueux mais les modules élastiques sont faibles... : $H \approx 10^{-6}$, $U \approx 10^{-9}$ et $W \approx 10^{-3}$.

La seule restriction pourrait concerner la compressibilité du lubrifiant qui est négligée. Mais, dans ce domaine de vitesse ($V \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$), les effets de la compressibilité de l'air restent largement négligeables.

Le module d'YOUNG équivalent E_{eq} du rouleau de film qui apparaît ici est le *module radial des dernières couches*. Son expression est précisée en annexe II.

B.3.) Configuration réelle de l'enroulement

Nous avons proposé deux formulations, l'une mettant l'accent sur les effets dus à la tension $[\sigma_\theta]_0$ et la vitesse V , l'autre mettant l'accent sur les effets dus à la force linéique d'appui F_a et la vitesse V .

Afin de choisir la formulation la plus proche des conditions réelles de l'enroulement, nous allons estimer l'ordre de grandeur des pressions de contact dues à la force linéique d'appui F_a et à la tension du film $[\sigma_\theta]_0$:

<i>Appui</i>	<i>Tension</i>
$P_{\text{appui}} = \frac{F_a}{2a}$	$P_{\text{tension}} = \frac{e_f}{R_{rf}} [\sigma_\theta]_0$
avec :	avec :
F_a = force d'appui (1000 N.m ⁻¹)	$[\sigma_\theta]_0$ = tension d'enroulement (10 MPa)
a = demi-largeur de la zone de contact (1,5 mm)	e_f = épaisseur de film (12 μm)
	R_{rf} = rayon du rouleau de film (150 mm)
Soit $P_{\text{appui}} = 300 \text{ kPa}$	Soit $P_{\text{tension}} = 0,8 \text{ kPa}$

Ce calcul rapide indique que la composante de la pression radiale due à la force d'appui est beaucoup plus grande que celle due à la tension du film. De plus, dans les mêmes conditions (rayon, vitesse...) la formule de BLOK et VAN ROSSUM conduit à des couches d'air entraînées dont l'ordre de grandeur de l'épaisseur nous semble *trop élevé*. Cela signifie que l'*épaisseur de la couche d'air entraînée e_e est principalement définie par la force linéique d'appui F_a* . La tension $[\sigma_\theta]_0$ a toutefois un effet indirect sur la quantité d'air entraînée : plus $[\sigma_\theta]_0$ est élevée, plus l'air s'évacue rapidement, plus le module est élevé donc plus e_e est faible.

Par conséquent, la formule obtenue par *HAMROCK et DOWSON traduit mieux la réalité* que celle de BLOK et VAN ROSSUM. C'est donc celle que nous utiliserons.

Remarques :

-1. La **topographie de surface** n'intervient pas dans ces deux formulations. Il est en effet probable qu'elle n'affecte pas beaucoup l'épaisseur de la couche limite d'air entraînée par le film. En revanche, il ne faut pas oublier que la topographie de surface (fonction $f_{\text{équil}}$ sous la pression correspondante) représente un **minimum de l'épaisseur calculée** e_e .

D. P. JONES [1992] a ainsi observé qu'en deçà d'un certain niveau de vitesse, l'épaisseur entraînée de la couche d'air e_e est constante et sa valeur ne dépend plus que de la topographie de surface.

-2. Récemment, GOOD [1991 et 1992] a proposé une formulation des effets dus au rouleau d'appui sous la forme d'une nouvelle condition aux limites, additive par rapport aux effets de la tension. Cette formulation conduit à des résultats satisfaisants lorsque les effets aérodynamiques sont négligeables ($V \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$). Toutefois, le problème reste entier dans le domaine qui nous intéresse ($V \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$) où les effets aérodynamiques deviennent prépondérants.

Plus généralement, GOOD a essayé d'incorporer les effets dus au rouleau d'appui dans le problème de mécanique des solides (calcul des contraintes résiduelles).

Nous pensons que, s'il est effectivement possible qu'une telle interaction existe, **les effets dus au rouleau d'appui gouvernent surtout le problème de mécanique des fluides** (entraînement d'air).

Ajoutons que nous savons par expérience que les effets dus au rouleau d'appui ne sont pas seulement additifs par rapport aux effets de la tension : le rouleau d'appui a une fonction propre pendant l'enroulement qui justifie sa présence.

-3. L'influence de la largeur n'est pas prise en considération. Les effets de bord sont négligés. Leur existence dans la configuration réelle implique une surestimation de l'épaisseur de la couche entraînée (l'échappement par les bords est négligé). Toutes les grandeurs sont donc rapportées par unité de largeur du rouleau.

-4. Les deux formules introduisent des dépendances de la vitesse du film et de la viscosité de l'air du même ordre de grandeur : puissance +0,65 et +0,67.

-5. L'épaisseur de la couche d'air entraînée selon HAMROCK et DOWSON [1981] est fonction du rayon équivalent à la puissance +0,56. Cela signifie que celle-ci augmente régulièrement pendant l'enroulement : +26% (pour $R_{ra} = 100 \text{ mm}$, $R_{rf} = 90 \rightarrow 282 \text{ mm}$)

-6. En se basant sur de nombreuses simulations avec le modèle, nous avons observé que la formule de HAMROCK et DOWSON surestime systématiquement la valeur de l'épaisseur de la couche d'air entraînée. Nous avons donc introduit un coefficient correcteur multiplicatif. Ce coefficient peut trouver une explication dans la méconnaissance du module du revêtement E_{ra} ou dans les effets du passage du film ou bien encore dans l'évacuation latérale (remarque n°4).

-7. L'épaisseur de la couche résiduelle d'air s'écrit sous la forme :

$$(2.3) \quad e_a = e_e - \Delta e_e$$

Avec :

e_e = épaisseur de la couche d'air entraînée Δe_e = épaisseur de la couche d'air évacuée

Globalement, nous considérons que l'influence respective de la tension et de l'appui peut se décomposer en disant que e_e dépend plutôt de la force linéique d'appui alors que Δe_e dépend plutôt de la tension. Cela se traduit par la séparation des variables suivantes :

$$e_a(V, F_a, [\sigma_\theta]_0) = e_e(V, F_a) - \Delta e_e([\sigma_\theta]_0)$$

B.4.) Influence de la géométrie

Il existe deux géométries principales de passage du film :

→ *position dite "embarrée"* : le film s'enroule autour du rouleau d'appui. La zone d'entrée de l'air est donc représentée par *deux cylindres*. Tout l'air qui passe entre ces deux cylindres est entraîné sous la spire en formation. Nous modéliserons cette configuration par deux cylindres dont les rayons sont ceux du rouleau de film et du rouleau d'appui.

→ *position dite "tangente"* : le film arrive directement entre le rouleau d'appui et le rouleau film qu'il tangente. L'entraînement d'air peut être représenté en utilisant la formule précédente en considérant que le contact a lieu entre *un plan* (film = cylindre de rayon infini) et *un cylindre* (le rouleau de film). Le rayon équivalent est égal à celui du rouleau de film, donc supérieur au rayon équivalent de la configuration embarrée, d'où une plus grande valeur de e_e .

Résumé et conclusions

Le problème de la caractérisation de la superposition d'une nouvelle couche de film se réduit à la connaissance de *l'épaisseur moyenne de la couche entraînée*, notée e_e . Le calcul complet de la quantité d'air entraînée entre deux couches de film pendant l'enroulement n'a pas fait l'objet de publication. Toutefois, deux configurations similaires sont présentées : l'une néglige la présence du rouleau d'appui (force linéique d'appui F_a) et l'autre néglige la présence du film (tension $[\sigma_\theta]_0$). La seconde configuration conduit à des *ordres de grandeurs satisfaisants* et sera donc de ce fait utilisée. Elle revient à dissocier les effets de la force linéique d'appui F_a et de la tension $[\sigma_\theta]_0$ c'est à dire à considérer que la première affecte principalement la quantité d'air entraînée et que la seconde affecte principalement la quantité d'air évacuée.

Cette formulation sera corrigée à faible vitesse afin de tenir compte de la *topographie de surface* qui traduit l'existence d'un minimum possible de la valeur de l'épaisseur de la couche d'air ($f_{\text{équil}}$).

Finalement, nous avons $e_e = f[\text{vitesse } (V), \text{ rugosité } (h_0, P_0 \text{ de } f_{\text{équil}}), \text{ appui } (F_a, R_{ra}, E_{ra}, v_{ra}), \text{ air } (\mu_{\text{air}}), \text{ rouleau de film } (R_{rf}, E_{rf}, v_{rf})]$

C.) Contraintes résiduelles

Nous abordons dans ce paragraphe la deuxième des trois parties du modèle :

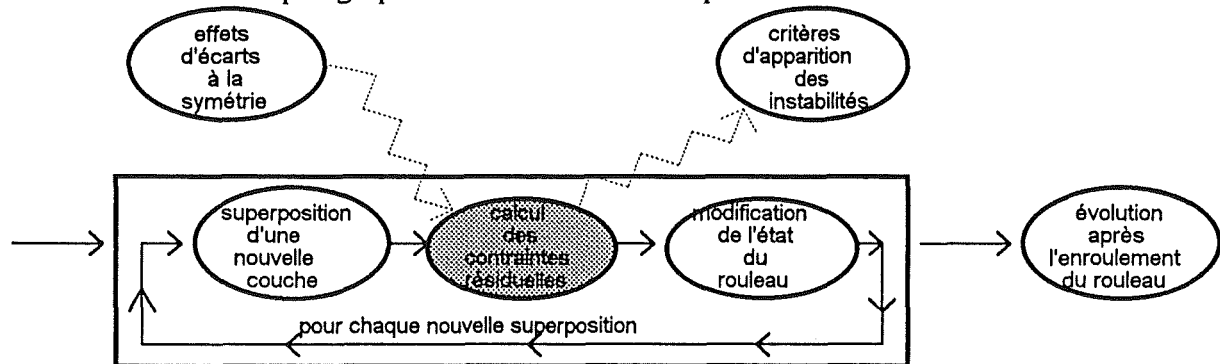


Figure II.8 : calcul des contraintes résiduelles

Introduction et notations

Le rouleau présente une géométrie cylindrique (symétrie par rapport à la direction axiale). Nous nous placerons donc naturellement dans un repère cylindrique et adopterons les notations suivantes :

- r : variable radiale (unité : m),
- θ : variable tangentielle (unité : radian),
- z : variable axiale (unité : m),
- t : variable temporelle (unité : s).

Le tenseur de la déformation est caractérisé par les trois déformations ϵ_r , ϵ_θ et ϵ_z et les trois déformations en cisaillement $\epsilon_{r\theta}$, $\epsilon_{\theta z}$ et ϵ_{rz} . Le tenseur de la contrainte est caractérisé par les trois contraintes σ_r , σ_θ et σ_z et les trois contraintes de cisaillement $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ et τ_{rz} :

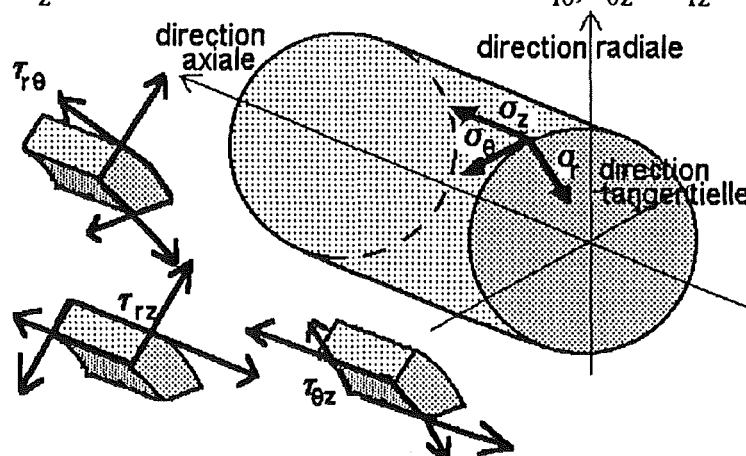


Figure II.9 : contraintes et déformations tridimensionnelles

IMPORTANT : la tension d'enroulement de la couche de film *au moment de sa superposition* est associée à un *état de précontrainte tangentielle*, pour cette raison nous la noterons $[\sigma_\theta]_0(r,r)$.

Nous verrons ultérieurement qu'il y a *relaxation de cette précontrainte au fur et à mesure de l'enroulement* : $[\sigma_\theta]_0$ dépend donc à la fois de r et de R_{rf} :

$$[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf}) \quad (\text{où } r \text{ est le rayon correspondant et } R_{rf} \text{ le rayon extérieur du rouleau}).$$

Pour cette raison, nous l'appelons également *tension résiduelle*.

convention :

- une valeur *négative* de σ_r , σ_θ ou σ_z sera associée à un état de *compression*,
- une valeur *positive* de σ_r , σ_θ ou σ_z sera associée à un état de *tension*.
- nous introduisons parfois la notion de *pression* P , positive par convention. Elle est reliée à la contrainte radiale σ_r par la relation : $P = -\sigma_r$

C.1.) Historique

Dans la grande majorité des problèmes d'élasticité, les contraintes sont calculées pour des *corps déjà constitués soumis à une sollicitation extérieure*. L'état des déformations en l'absence de sollicitation extérieure (configuration d'équilibre) est alors parfaitement connu. Dans notre cas, l'étude porte sur l'état des *contraintes résiduelles résultant de sa constitution*. On ne s'intéresse pas à l'effet d'une sollicitation extérieure. Il s'agit donc d'un *problème de mécanique des solides non classique*.

L'étude des contraintes résiduelles engendrées dans les corps obtenus par accréation a fait l'objet de nombreuses études à la demande des principales industries concernées par la compréhension de ces problèmes : textile, papier, film plastique. On trouve également d'autres champs d'application telles que dans la fabrication des tubes ou bien en astronomie.

Les premières approches semblent dues à HIRAI [1959a et 1959b] (filaments) et à CATLOW et WALLS [1962] (textile). Toutefois, la première présentation théorique satisfaisante de l'accréation est due à BROWN et GOODMAN [1963] (accréation gravitationnelle des planètes). Selon eux, le seul moyen de connaître l'état de ces contraintes résiduelles est de *reprendre l'idée même de l'accréation* en additionnant les effets de la superposition de chacune des couches qui constituent le rouleau.

HARLAND [1967 et 1974] a appliqué cette technique de calcul des contraintes résiduelles aux rouleaux de film en introduisant la notion de *précontrainte tangentielle*. Toutefois, il a supposé que les spires ont un comportement mécanique *isotrope*, ce qui n'est pas le cas des films plastiques. Pour cette raison, les résultats ne peuvent être appliqués ici.

ALTMANN [1966], TRAMPOSH [1965] et YAGODA [1980a, 1980b, 1980c et 1980d] ont repris l'étude de BROWN et GOODMAN [1963] en y introduisant l'orthotropie du rouleau. Toutefois, celle-ci n'est que partiellement prise en considération : plusieurs modules d'YOUNG sont introduits mais un seul coefficient de POISSON est envisagé. Cela conduit à des *tenseurs non symétriques*, en désaccord avec les principes de base de mécanique des milieux continus.

Chapitre II : le modèle d'enroulement

Ils expliquent alors le caractère non symétrique du tenseur par l'existence de glissement locaux.

CONNOLLY et WINARSKII [1984] ont repris toute la formulation d'ALTMANN [1966] avec un tenseur symétrique (justifié par une étude expérimentale !).

Nous pouvons également signaler d'autres études :

- PFEIFFER [1966, 1979, 1981 et 1987] et PENNER [1989] (papier). La résolution des contraintes résiduelles est grossière mais l'auteur essaie de prendre en considération la loi de comportement complexe du film enroulé.

- GOOD, PFEIFFER et GIACOMETTO [1992] (papier ou polypropylène). Il s'agit d'une tentative de prise en compte de certains effets du rouleau d'appui à basse vitesse ($V \approx 1 \text{ m.s}^{-1}$) lorsque les phénomènes aérodynamiques sont négligeables.

- HAKIEL [1987] (film polyester). Il a repris la loi de comportement de PFEIFFER [1966] mais avec une démarche de calcul des contraintes résiduelles plus rigoureuse (type ALTMANN [1966]). HAKIEL l'a complété en 1992 par une caractérisation des effets d'irrégularités d'épaisseur.

- VOYIADJIS, KIOUTSIS et HARTLEY [1985, 1987] (tubes). En marge de ces problèmes d'enroulement, il s'agit d'un calcul des contraintes résiduelles dans des tubes multicouches (accrétion de matériaux de propriétés différentes).

- HANISH [1985]. Il reprend l'approche de CONNOLLY et WINARSKI [1984] mais à partir d'une *formulation énergétique*. Cette formulation ne semble pas présenter d'avantages importants sur une formulation différentielle. De plus les autres auteurs ont privilégié la formulation différentielle. Nous nous placerons donc logiquement dans ce cadre.

C.2.) Le modèle proposé

Nous nous proposons de reprendre et de compléter le modèle de calcul des contraintes résiduelles développé par CONNOLLY et WINARSKI [1984] et HAKIEL [1987] car c'est celui qui offre le moins d'hypothèses restrictives. La loi de comportement sera choisie symétrique.

Ce paragraphe C.2. est l'un des plus long de ce document. Il sera ainsi décomposé :

- §C.2.a.) présentation du *principe* du calcul des contraintes dans les corps obtenus par accrétion,
- §C.2.b.) principales *hypothèses* du modèle,
- §C.2.c.) *loi de comportement* du rouleau de film,
- §C.2.d.) prise en compte de la *non-linéarité*,
- §C.2.e.) formulation des *équations différentielles*,
- §C.2.f.) *effets dus à une couche* de film,
- §C.2.g.) *intégration* pour toutes les couches,
- §C.2.h.) cas du *cisaillement*.

C.2.a.) Principe du calcul des contraintes résiduelles

Nous avons déjà dit que l'état des contraintes résiduelles dépend des conditions globales de la superposition. Pour une spire donnée, de rayon r , on distingue deux influences :

→ *celle des spires enroulées avant* ($R_m < s < r$)

L'ensemble des spires enroulées avant la spire considérée peut être assimilé à un **solide homogène élastique** ayant des dimensions et des propriétés mécaniques données. Ce solide définit alors une simple condition aux limites pour la spire considérée. Remarquons toutefois que, du fait de l'échappement partiel de l'air, les dimensions et les propriétés mécaniques de ce solide seront susceptibles d'*évoluer* au fur et à mesure de l'enroulement.

→ *celle des spires enroulées après* ($r < s < R_{rf}$)

Chaque nouvelle superposition de spire induit sur le rouleau une légère compression radiale élastique qui va se traduire par un état de surcontraintes élastiques. Chaque superposition d'une spire de rayon $s > r$ aura donc pour effet de modifier l'état des contraintes dans la spire de rayon r .

L'état global des contraintes dans une spire résulte de la **somme des contraintes élastiques dues à chacune des spires supérieures** ($r < s < R_{rf}$). Le calcul se décompose en deux étapes :

-1. calcul des effets d'une spire de rayon s sur une spire de rayon r

Considérons deux spires, de rayons respectifs r et $s > r$. La spire de rayon s d'épaisseur δs et de tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ modifie l'état des contraintes de toutes les spires inférieures, dont celle de rayon r , d'une quantité infinitésimale : $[\delta\sigma_r]_s$, $[\delta\sigma_\theta]_s$, et $[\delta\sigma_z]_s$:

La spire située à la distance s dont nous étudions les effets n'est pas nécessairement la spire extérieure et peut parfaitement être située à l'intérieur même du rouleau.

-2. intégration pour toutes les spires de rayon $r < s < R_{rf}$

Il s'agit de la sommation des surcontraintes induites par les spires supérieures :

$$(2.4) \quad \sigma_{r, \theta \text{ ou } z}(r) = \int_{s=r}^{s=R_{rf}} [\delta\sigma_{r, \theta \text{ ou } z}]_s(r)$$

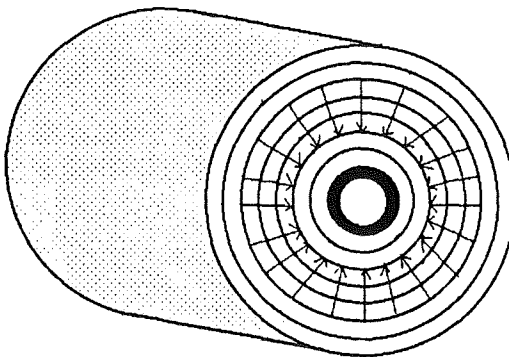


Figure II.10 : effets d'une spire sur l'autre

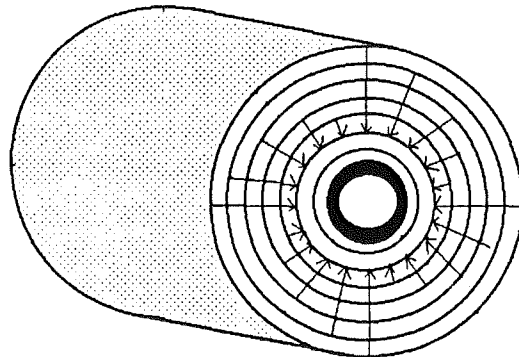


Figure II.11 : intégration pour toutes les spires

C.3.b.) Hypothèses de la résolution**Flexion du film**

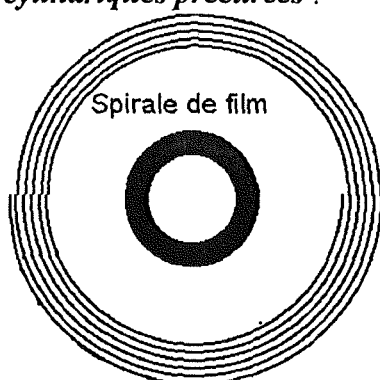
Le rayon de courbure minimum du film (environ 90 mm) est très supérieur à l'épaisseur de la couche de film ($e_f \approx 5$ à $25 \mu m$). La résistance du film à la flexion sera négligée dans toute l'étude.

Couches cylindriques préétirées

L'enroulement réel du film se fait en spirale : une unique bande est enroulée comme un ressort : le rouleau ne présente donc pas de symétrie axiale. En d'autres termes, les effets tangentiels selon les deux vecteurs unitaires \vec{u}_θ et $-\vec{u}_\theta$ ne sont pas équivalents et il existe une **direction tangentielle préférentielle**. Cette dissymétrie axiale va compliquer sensiblement le calcul des contraintes résiduelles. Or,

- le rouleau est constitué de nombreuses de couches. L'épaisseur d'une couche de film (5 à 25 μm) est négligeable devant les dimensions du solide (environ 300 mm),
- il n'y a pas de glissement tangentiel du film sur lui-même pour les couches profondes,
- les variations de la tension d'enroulement sont lentes ($\approx 20\%$ sur l'ensemble du rouleau).

Nous proposons de **représenter cet enroulement en spirale par une addition successive de couches cylindriques préétirées** :



Figures II.12 : spirale

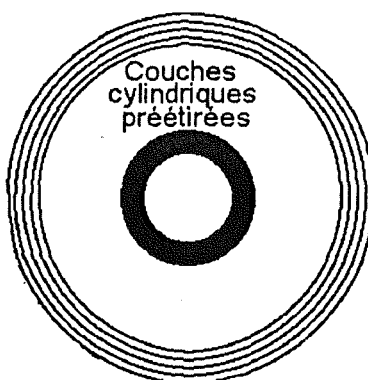
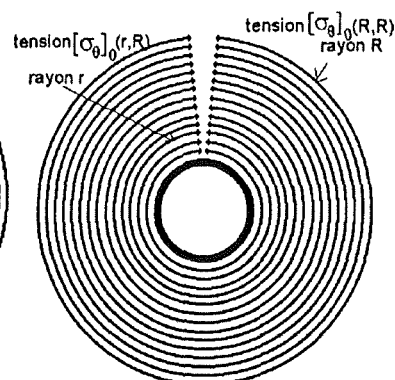


Figure II.13 et II.14 : couches cylindriques préétirées



Les autres modèles admettent cette représentation de la spirale par une succession discrète de couches cylindriques. Or, comme nous venons de le signaler, **elle introduit une symétrie axiale qui n'existait pas initialement**. A ce titre, les glissements tangentiels ne peuvent plus être considérés directement et il sera donc nécessaire de les étudier séparément.

Glissements tangentiels

La tension d'enroulement est exercée sous la forme d'un **couple** appliqué au centre du rouleau qui se transmet de la première vers la dernière couche de film. Il peut entraîner un **glissement tangentiel** des spires les unes contre les autres associé à un resserrement du rouleau.

La caractérisation de ce glissement se heurte à l'introduction de la symétrie tangentielle dans le paragraphe précédent. On peut toutefois distinguer les deux cas limites suivants :

- **si l'épaisseur de la couche d'air est supérieure à cette valeur critique** : les deux couches de film ne sont pas ou peu en contact : elles glisseront tangentiellement librement.
- **si l'épaisseur de la couche d'air est inférieure à cette valeur critique** : le contact entre les deux couches de film empêche tout glissement.

Une telle valeur critique est extrêmement difficile à caractériser. Elle semble toutefois être dépendre de la topographie de surface (fonction $f_{\text{équil}}$), du coefficient de frottement, de la pression radiale et de la tension tangentielle. Nous supposons cette **épaisseur critique égale à SR_z** .

Variables continues

L'épaisseur d'une spire (5 à 25 μm) étant négligeable devant les dimensions du solide (300 mm de rayon), toute l'étude sera effectuée avec des variables continues. Nous calculerons les surcontraintes infinitésimales $[\delta\sigma]_s$ induites par la superposition d'une couche d'épaisseur infinitésimale δs .

TRAMPOSH [1963] utilisait des variables discrètes (F(i) avec $1 < i < N$ où N est le nombre total de spire). Le problème se réduit alors à des inversions de matrices (dimension N), plus difficiles à formuler et à résoudre que l'approche choisie.

Effets tangentiels

Dans le cadre des hypothèses précédentes, les contraintes ne présentent pas de dépendance axiale.

Nous ne chercherons pas à caractériser en détail l'évolution tangentielle des propriétés au voisinage du rouleau d'appui. L'influence de celui-ci sera caractérisée de manière globale en s'intéressant aux effets moyens pendant une rotation du rouleau. Par conséquent, aucune variable ne présente de dépendance tangentielle :

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} [] = 0$$

Effets axiaux

Dans notre cas, le calcul des contraintes résiduelles n'est qu'une partie du problème global. De plus, cette résolution doit être effectuée à l'issue de la superposition de chacune des spires, donc le plus rapidement possible. Or, une prise en compte complète des effets axiaux supposerait la résolution d'équations différentielles à 2 dimensions. Par suite, afin de ne pas trop compliquer les calculs, nous envisagerons une invariance axiale pour toutes les fonctions :

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial z} [] = 0$$

Compte tenu de ces deux dernières approximations, *l'ensemble des fonctions introduites dans le problème ne dépendra plus que de la seule variable radiale r*. Les équations différentielles seront résolues selon une *génératrice* du rouleau de film.

Dans le cadre de cette hypothèse axiale, nous sommes obligés de fixer des variables axiales. En mécanique des solides, deux possibilités permettent de ramener l'étude d'un problème tridimensionnel à celle d'un problème bidimensionnel :

→ contraintes planes

Dans ce cas, le champ des contraintes est plan et défini par :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

Cette hypothèse correspond à l'étude d'une tranche située au *bord* du rouleau et libre en déplacement axial et ne subissant aucune contrainte axiale d'origine extérieure (figure II.15).

→ **déformations planes**

Dans ce cas, le champ des déformations est plan et défini par :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{rz} = 0 \\ \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases}$$

Cette hypothèse correspond à l'étude d'une tranche située au **milieu** du rouleau et totalement bloquée en déplacement axial par la présence des tranches voisines :

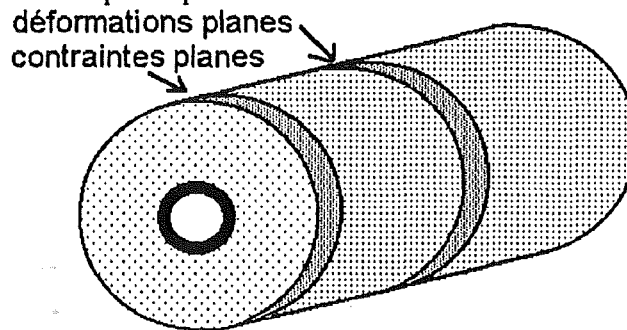


Figure II.15 : hypothèse des contraintes planes et des déformations planes

CONNOLLY, WINARSKI et HAKIEL se limitent au cas des contraintes planes. Nous utiliserons les deux.

Cisaillement

Dans le cadre de l'approximation précédente concernant les effets axiaux, les composantes du cisaillement radial/axial τ_{rz} et tangentiel/axial $\tau_{\theta z}$ sont négligées.

Pour étudier plus finement l'évolution des contraintes (bord/centre) dans le sens de la largeur, nous devons envisager une variation axiale de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ car elle est susceptible d'induire un cisaillement. Une telle étude a été abordée par J. P. BALHI et P. BOURGIN [1987] Elle complique considérablement le problème et oblige à introduire de nouvelles approximations. En revanche, même dans le cadre de cette hypothèse restrictive, nous pouvons étudier les effets du cisaillement radial/tangentiel $\tau_{r\theta}$.

Effets inertiels

La rotation du rouleau de film autour de son axe engendre des forces radiales volumiques, appelées forces centrifuges. Ces forces tendent à écarter les spires les unes des autres :

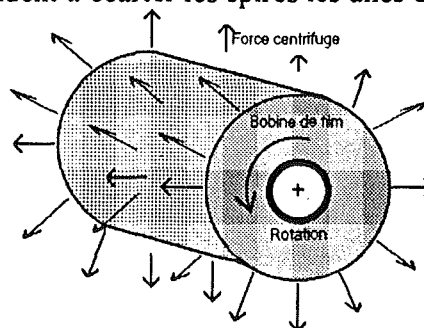


Figure II.16 : force centrifuge

La prise en compte de ces effets se traduit par l'introduction dans l'équation différentielle d'équilibre radial (2.12) du terme $\rho \omega^2 r$. Comparons l'ordre de grandeur de ce terme avec celui de σ_r / r .

Application numérique :

$$\rho \approx 1350 \text{ kg.m}^{-3} \quad \omega \approx 5 \text{ rad.s}^{-1} \quad r \approx 200 \text{ mm} \quad \sigma_r \approx 0,1 \text{ à } 1 \text{ MPa}$$

Soit $\rho \omega^2 r \approx 30 \text{ k N.m}^{-3}$ et $\sigma_r / r \approx 0,5 \text{ à } 5 \text{ M N.m}^{-3}$. Il est donc justifié de négliger les effets centrifuges. Cela signifie que le calcul des contraintes pourra être effectué dans un cadre *statique*.

Remarque :

Le moment cinétique du rouleau de film $J \omega$ a des variations très importantes pendant les phases transitoires de l'enroulement (accélération et décélération) qui doivent être compensées par les moteurs. Cette compensation n'ayant pas lieu, il en découle des variations de la tension apparente $[\sigma_\theta]_0(s,s)$. Ces problèmes ont été récemment analysés : CHAMIXAES [1989], BOUQUEREL [1992a]. La véritable origine de ces variations réside dans une *inadéquation de la régulation de l'enrouleuse*. Elle ne peut donc être caractérisée dans le modèle et interviendra indirectement par l'intermédiaire des variations de la tension d'enroulement.

Mandrin

Nous supposons que le mandrin est un cylindre parfaitement concentrique avec un comportement mécanique élastique.

C.2.c.) Loi de comportement du film enroulé

Le calcul des contraintes résiduelles suppose la connaissance de la loi de comportement du rouleau de film. Nous proposons de déterminer cette loi.

C.2.c.1) Homogénéisation

Nous désignerons ultérieurement par *spire* le système composé des trois éléments suivants :

- une couche de film d'épaisseur $e_f / 2$,
- les rugosités et la couche d'air présentes entre les couches de film,
- une couche de film d'épaisseur $e_f / 2$.

La dissociation des lois de comportement de chacun de ces éléments présente un certain nombre de difficultés expérimentales et théoriques. De plus, l'épaisseur de la spire (de 5 à 25 μm) est négligeable devant les dimensions du rouleau (300 mm). Nous allons donc nous intéresser au seul comportement global : *la spire sera assimilée à un solide homogène orthotrope* :

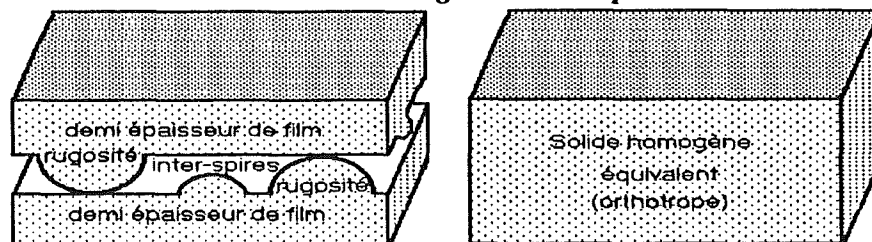


Figure II.17 : homogénéisation

Il est bien évident qu'une telle homogénéisation reste *strictement limitée au calcul des contraintes résiduelles*. L'étude ultérieure de l'évacuation de l'air qui est un problème de mécanique des fluides ne fera pas l'objet de cette homogénéisation.

Dans tous les chapitres liés au calcul des contraintes résiduelles, nous appellerons indifféremment par le terme de *spire* le *composite* film / rugosité+air / film ou le *solide homogène équivalent*.

C.2.c.2.) Choix de la loi

La loi de comportement exprime la relation entre l'état de déformation ε et l'état de contrainte σ du système. Elle intègre donc le comportement de chaque composante de la spire. En particulier, la déformation plastique des rugosités et la compressibilité de l'air induisent une réponse *non-linéaire*. La résolution du problème dans un cadre non-linéaire soulève plusieurs difficultés :

→ *formulation de la loi de comportement*

Elle doit être connue et présenter si possible une formulation analytique simple et inversible : $\sigma = h^{-1}(\varepsilon)$ ou $\varepsilon = h(\sigma)$ afin de faciliter les résolutions ultérieures qui seront formulées soit en termes de contraintes soit en termes de déformations.

→ *les équations différentielles d'équilibre*

Nous écrivons cette équation en termes de déplacement $U(r)$. Elle dépend alors de la loi de comportement. Si elle n'est pas extrêmement simple, les équations ne sont alors plus à variables séparées, ce qui exclut la plupart des techniques d'intégration connues. J. P. BALHI [1987] a étudié numériquement quelques lois non-linéaires parmi les plus simples (bilinéaire, puissance...). Il a abouti systématiquement à des équations différentielles d'équilibre à variables non séparées.

→ *les techniques de calcul*

Le calcul des contraintes résiduelles repose sur une sommation des effets des différentes spires. Une étude dans un cadre non-linéaire nous obligerait donc à reprendre entièrement l'approche.

Nous assimilerons le comportement de la spire à celui d'un matériau élastique, linéaire, suivant la loi de HOOKE.

Les coefficients de la loi de HOOKE seront choisis de manière à approximer au mieux le comportement réel de la spire. Nous utiliserons donc le terme de "*coefficient équivalent*".

C.3.c.3.) La loi de HOOKE

La matrice de HOOKE contient dans le cas général 21 coefficients indépendants. Elle se réduit ici, du fait de l'orthotropie à seulement 9 coefficients indépendants (ou bien 12 avec 3 relations de dépendance exprimant la symétrie du tenseur). Bien que de nombreux auteurs (ALTMANN [1966], GOOD [1992]...) mettent en doute le caractère symétrique de la loi de comportement, nous supposerons que celle-ci est *symétrique* (voir les remarques en annexe II)

Ces coefficients dépendent de la réponse globale de la spire. Nous avons exprimé en annexe II. chacun de ces coefficients en fonction des propriétés massiques et surfaciques du film.

Dans ce cas particulier, la loi de HOOKE se réduit à l'expression :

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{zr}}{E_z} \\ -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} \\ -\frac{\nu_{zr}}{E_z} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Avec :

e_f, e_a = épaisseurs moyennes des couches de film et d'air

$E_\theta, E_z, \nu_{zr}, \nu_{\theta z}$ et $\nu_{\theta r}$ = définis par les propriétés massiques du film

$$(2.10) \quad \frac{1}{E_r} = \frac{1}{e_f} \frac{\partial}{\partial \sigma_r} [f_{\text{équil}}(\sigma_r, h_0, P_0)] = \frac{e_a}{2 e_f \sqrt{\sigma_r P_0}}$$

avec P_0 = paramètre de $f_{\text{équil}}$ (voir annexe I.A.)

C.3.d.) Non-linéarité de la réponse

L'un des coefficients de la matrice précédente (E_r) dépend de la topographie de surface, de l'épaisseur moyenne de la couche d'air et de la contrainte radiale (voir la fonction $f_{\text{équil}}$ définie à l'annexe I.A.). Nous avons reporté dans le tableau II.1, différentes valeurs de ce coefficient pour deux films de même épaisseur $e_f = 14,5 \mu\text{m}$ destinés aux applications d'enduction vidéo :

- VIDÉO 1 : fonction $f_{\text{équil}}$: $P_0 = 0,427 \text{ MPa}$ et $h_0 = 0,495 \mu\text{m}$
- VIDÉO 2 : fonction $f_{\text{équil}}$: $P_0 = 0,367 \text{ MPa}$ et $h_0 = 0,476 \mu\text{m}$

Tableau II.1

Densité apparent D_a	Epaisseur de la couche d'air e_a (μm)	VIDÉO 1		VIDÉO 2	
		référence E_r (MPa)	σ_r (MPa)	référence E_r (MPa)	σ_r (MPa)
1,36	0,37	9	-0,03	7	-0,02
1,37	0,26	29	-0,17	24	-0,13
1,38	0,16	90	-0,56	75	-0,44

E_r est donc très sensible à l'épaisseur de la couche d'air. En d'autres termes, la **contrainte n'est pas liée linéairement à la déformation**. Par d'autres moyens, D. PFEIFFER [1981] et Z. HAKIEL [1987] ont mis en évidence des non-linéarités du même ordre (annexe II.B.2).

Nous avons dit au §C.2.c.2. que cette non-linéarité ne peut être traitée globalement. Il est toutefois possible de la prendre en compte en faisant des itérations sur E_r :

- 1. $[E_r]_i = [E_r]_i ([e_a]_{i-1}, [\sigma_r]_{i-1}, \dots)$
- 2. $[\sigma_r]_i = [\sigma_r]_i ([E_r]_i, \dots)$
- 3. $[e_a]_i = [e_a]_i ([E_r]_i)$
- 4. puis de nouveau -1. et -2. jusqu'à convergence de l'ensemble.

Le problème se résume alors à la résolution de l'équation :

$$(2.11) \quad \varepsilon = h[\varepsilon] \sigma$$

où h est une matrice de HOOKE.

Remarque :

Nous négligeons les comportements viscoélastique et viscoplastique du film, c'est à dire la **non-linéarité du comportement rhéologique du polyester**.

On peut justifier cette approximation : BOUQUEREL, BOURGIN et PEREZ [1992].

C.2.e.) Formulation des équations différentielles

Les équations d'équilibre sont détaillées à l'annexe III. Dans le cadre des approximations précédentes, elles se réduisent à :

$$(2.12) \quad \begin{cases} \text{équilibre tangentiel : } \frac{d}{dr} \tau_{r\theta}(r) + 2 \frac{\tau_{r\theta}(r)}{r} = 0 \\ \text{équilibre radial : } \frac{d}{dr} \sigma_r(r) + \frac{\sigma_r(r) - \sigma_\theta(r)}{r} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une dérivée droite par rapport à r car les dérivées partielles par rapport à θ , z et t sont nulles.

C.2.e.1.) Equilibre tangentiel

La résolution de l'équation différentielle ne pose pas de difficultés particulières (§C.2.h. de ce chapitre) car elle ne fait apparaître qu'une seule fonction. Elle sera donc résolue directement dans sa formulation (2.12).

C.3.e.2.) Equilibre radial

Cette équation différentielle fait apparaître deux fonctions liées entres elles. Par conséquent, elle ne peut pas être résolue directement.

Dans le cadre des hypothèses axiales envisagées, le déplacement tangentiel est nul et le déplacement axial est nul ou fonction des deux autres déplacements. Il est donc intéressant de **reformuler cette équation différentielle en termes de déplacements**. Celle-ci ne fera plus alors apparaître qu'une seule fonction, le déplacement radial et sera alors facile à résoudre.

Pour cela, nous procédons comme suit :

→ $\sigma = h^{-1}(\varepsilon)$ L'inversion de la matrice de HOOKE permet d'exprimer les contraintes σ_r , σ_θ et σ_z en fonction des déformations ε_r , ε_θ et ε_z et des propriétés mécaniques du matériau (annexe III). Nous obtenons ainsi une nouvelle équation différentielle d'équilibre faisant apparaître les déformations ε_r et ε_θ et leurs dérivées $\frac{d}{dr} \varepsilon_r$ et $\frac{d}{dr} \varepsilon_\theta$.

→ $\varepsilon = \varepsilon(u)$ Les déformations sont liées aux déplacements par les équations détaillées en annexe III. Elles se réduisent ici à :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \varepsilon_r(r) = \frac{d}{dr} u(r) \\ \varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r} \end{cases}$$

où $u(r)$ est le déplacement radial.

En reportant les relations $\sigma = h^{-1}(\varepsilon)$ puis $\varepsilon = \varepsilon(u)$ dans l'équation initiale d'équilibre radial, nous obtenons la nouvelle formulation :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \text{contraintes planes : } r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + r \frac{d}{dr} u(r) - \frac{E_\theta}{E_r} u(r) = 0 \\ \text{déformations planes : } r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + r \frac{d}{dr} u(r) - \frac{1 - \nu_{zr}^2 \frac{E_r}{E_z}}{1 - \nu_{\theta z}^2 \frac{E_z}{E_\theta}} \frac{E_\theta}{E_r} u(r) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'équations différentielles d'EULER du second ordre de la forme :

$$(2.15) \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + r \frac{d}{dr} u(r) - \lambda^2 u(r) = 0 \quad (\lambda^2 \text{ dépend de l'hypothèse axiale choisie})$$

La résolution de ce type d'équation est un problème classique.

Remarques :

-1. A partir de combinaisons linéaires sur ε_z , ε_θ , σ_z et σ_θ , HAKIEL [1987] parvient ainsi à une équation du deuxième degré en σ_r . Les conditions aux limites sont alors plus difficiles à formuler. Les deux démarches sont équivalentes.

-2. Dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, les propriétés mécaniques axiales (module E_z , coefficients $\nu_{\theta z}$ et ν_{zr}) n'interviennent pas. Cela signifie que l'état des contraintes et des déformations au bord du rouleau est indépendant de ces propriétés.

-3. Le coefficient λ^2 dépend du module E_r , lui même fonction de la variable radiale. Les *équations différentielles ne sont pas à coefficients constants*.

C.2.f.) Effets dus à une couche de film

Nous allons dans ce paragraphe calculer le champ des contraintes induit par la présence d'une couche. L'épaisseur de cette couche est infinitésimale : δs . Pour cette raison, les contraintes, déformations et déplacements seront également infinitésimaux : $[\delta\sigma]_s$, $[\delta\varepsilon]_s$, $[\delta u]_s$.

L'équation différentielle réécrite avec ces nouvelles notations devient :

$$(2.16) \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} [\delta u]_s(r) + r \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r) - \lambda^2 [\delta u]_s(r) = 0$$

Comme nous l'avons déjà dit, les effets dus à une couche de film sont obtenus en résolvant cette équation pour le solide compris entre le mandrin et la spire située en s :

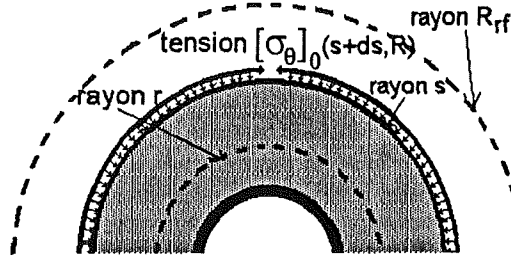


Figure II.18 : dimensions du solide utilisé dans le calcul de $[\delta\sigma]_s$

C.2.f.1.) conditions aux limites

Dans notre cas, les conditions aux limites interviennent à deux niveaux : la couche située près du mandrin et la couche soumise à une tension.

→ condition à la limite près du mandrin

Elle est en contact avec le mandrin qui se déforme élastiquement sous l'action de la contrainte radiale de compression. Il existe alors une relation simple entre $[\delta\sigma_r]_s$ et $[\delta\mathcal{U}]_s$ en ce point :

$$(2.17) \quad [\delta\sigma_r]_s(R_m) = E_c \frac{[\delta\mathcal{U}]_s(R_m)}{R_m}$$

Cette formulation introduit le paramètre E_c qui correspond au module d'YOUNG équivalent du mandrin si celui-ci était un cylindre plein. Ce module est fonction des dimensions et propriétés mécaniques du mandrin et de l'hypothèse axiale. Voir l'annexe VI.B.

L'utilisation des systèmes d'équations $\sigma = h^{-1}(\epsilon)$ et $\epsilon = \epsilon(\mathcal{U})$ permet de relier la contrainte radiale $\delta\sigma_r$ au déplacement radial $[\delta\mathcal{U}]_s(r)$:

$$(2.18) \quad [\delta\sigma_r]_s = \alpha \frac{[\delta\mathcal{U}]_s(r)}{r} + \beta \frac{d}{dr} [\delta\mathcal{U}]_s(r)$$

où α et β sont deux paramètres dépendant des propriétés mécaniques du rouleau et de l'hypothèse axiale choisie (identification des annexes II.A.2. et II.A.3. avec (A.35) de l'annexe VI.).

En combinant les deux relations précédentes, nous obtenons la première condition aux limites sous la forme d'une relation de proportionnalité entre le déplacement et sa dérivée au point $r = R_m$:

$$(2.19) \quad \frac{d}{dr} [\delta\mathcal{U}]_s(R_m) = \frac{E_c - \alpha}{\beta} \frac{[\delta\mathcal{U}]_s(R_m)}{R_m}$$

→ condition à la limite concernant la couche soumise à une tension d'enroulement

La tension $[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ de la spire de rayon s et d'épaisseur δs induit une compression radiale $[\delta\sigma_r]_s$ en $r = s$ sur la spire inférieure, calculée en annexe IV :

$$(2.20) \quad [\delta\sigma_r]_s(s) = - [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s}$$

$[\delta\sigma_r]_s$ est liée à $[\delta\mathcal{U}]_s$ par la relation (2.18). Cette condition aux limites peut être réexprimée en fonction du seul déplacement au point s $[\delta\mathcal{U}]_s$:

$$(2.21) \quad \alpha * \frac{[\delta u]_s(s)}{s} + \beta * \frac{d}{dr} [\delta u]_s(s) = - [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) * \frac{\delta s}{s}$$

C.2.f.2.) résolution de l'équation différentielle

Nous avons remarqué précédemment que l'un des coefficients (λ^2) de l'équation différentielle n'est pas uniforme. Or, si nous le supposons malgré tout uniforme, l'équation différentielle admet une solution analytique, ce qui facilite beaucoup le calcul numérique. Une valeur uniforme de λ^2 dans le rouleau correspond à une valeur de E_r uniforme dans le rouleau.

Nous aborderons donc les deux types de résolution : E_r uniforme et non uniforme dans le rouleau :

1. - E_r uniforme

ALTMANN [1966] et CONNOLLY et WINARSKI [1984] se placent dans ce cadre puisqu'ils n'ont pas la possibilité de caractériser les variations de E_r qui apparaît de plus comme une valeur ajustable.

Dans notre cas, la valeur moyenne peut être obtenue par une pondération volumique :

$$(2.22) \quad (E_r)_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi(R_{rf}^2 - R_m^2)} \int_{R_m}^{R_{rf}} 2\pi r E_r(r) dr$$

L'équation différentielle (2.15) admet une solution analytique. On peut facilement démontrer qu'elle se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions $r \rightarrow r^{-\lambda}$ et $r \rightarrow r^{+\lambda}$. Pour simplifier, nous écrirons cette combinaison linéaire sous la forme :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \frac{[\delta u]_s(r)}{r} = A(R_m, s) [r^{+\lambda-1} + B(R_m) r^{-\lambda-1}] [\sigma_\theta]_0 * \frac{\delta s}{s} = f_a(r, s) [\sigma_\theta]_0 * \frac{\delta s}{s} \\ \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r) = A(R_m, s) \lambda [r^{+\lambda-1} - B(R_m) r^{-\lambda-1}] [\sigma_\theta]_0 * \frac{\delta s}{s} = g_a(r, s) [\sigma_\theta]_0 * \frac{\delta s}{s} \end{cases}$$

avec :

$A(R_m, s)$ et $B(R_m)$ = constantes appropriées (relation (A.38) de l'annexe VI.A.).

2. - E_r non uniforme

HAKIEL [1987] se place dans ce cadre (E_r est proportionnel à P).

L'équation différentielle est alors linéaire, du second ordre mais à coefficients non constants :

$$(2.24) \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} [\delta u]_s(r) + r \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r) - \lambda^2(r) * [\delta u]_s(r) = 0$$

Les conditions aux limites restent bien sûr les mêmes.

Une telle équation différentielle n'admet plus de solution analytique ($\lambda^2(r)$ n'a même pas de formulation analytique). Elle reste néanmoins parfaitement intégrable en utilisant par exemple la technique de RUNGE-KUTTA à l'ordre 4. Elle conduit alors à la fonction solution $[\delta u]_s$ de la forme :

$$(2.25) \quad \begin{cases} \frac{[\delta \mathcal{U}]_s(r)}{r} = f_n(r,s) [\sigma_\theta]_0 \frac{\delta s}{s} \\ \frac{d}{dr} [\delta \mathcal{U}]_s(r) = g_n(r,s) [\sigma_\theta]_0 \frac{\delta s}{s} \end{cases}$$

Sous certaines conditions, les résolutions successives de ces équations conduisent à des solutions divergentes : les zones de plus forts modules correspondent aux zones de plus forte pression donc d'évacuation plus rapide de l'air, ce qui a pour effet d'augmenter de nouveau les modules...). Il est difficile de trouver l'origine de cette divergence : hypothèses du modèle, aspect numérique Il faut toutefois probablement mettre en cause la formulation actuelle de la dépendance entre le module et la pression radiale puisque la divergence disparaît en cas de suppression de la non-linéarité ($E_r = \text{cte}$).

C.2.g.) Intégration pour toutes les couches

Les solutions précédentes expriment, sous forme analytique ou numérique le déplacement $[\delta \mathcal{U}]_s(r)$ induit au point r par la superposition en s d'une spire d'épaisseur δs et de tension interne $[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$.

En sommant, au point r , tous les déplacements $[\delta \mathcal{U}]_s(r)$ induits par les spires de rayon s compris entre r et R_{rf} , nous obtenons le champ global du déplacement :

$$(2.26) \quad \begin{cases} \frac{u(r)}{r} = \int_{s=r}^{s=R_{rf}} \frac{[\delta \mathcal{U}]_s(r)}{r} = \int_{s=r}^{s=R_{rf}} f_{a \text{ ou } n} [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \\ \frac{d}{dr} u(r) = \int_{s=r}^{s=R_{rf}} \frac{d}{dr} [\delta \mathcal{U}]_s(r) = \int_{s=r}^{s=R_{rf}} g_{a \text{ ou } n} [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \end{cases}$$

Dans un second temps, les contraintes σ_r et σ_z s'obtiennent à l'aide des relations de HOOKE.

Il faut bien sûr rajouter l'état de précontrainte initial : $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ (*tension résiduelle ou précontrainte tangentielle*) et $\sigma_z = 0$.

Dans l'hypothèse du module radial constant, les solutions analytiques ont la forme suivante :

$$(2.27) \quad \begin{cases} \sigma_r(r) = [(\alpha + \beta \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\alpha - \beta \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \\ \sigma_\theta(r) = [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) + [(\eta + \alpha \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\eta - \alpha \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \\ \sigma_z(r) = [(\phi + \psi \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\phi - \psi \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \end{cases}$$

Avec :

α, β, \dots = paramètres dont les significations sont rappelées en annexe II.A. et VI.A.

$l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}))$ = intégrale définie en annexe VI.1.

A ce stade, nous avons à chaque itération, les champs de la déformation, du déplacement et de la contrainte pour chaque couche de film du rouleau.

Remarques :

-1. Nous avons introduit deux variables tangentielles : σ_θ et $[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$. Elles ont des *significations différentes*.

Nous avons $\sigma_\theta = \sigma_e + [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ où σ_e est la composante due à la compression élastique radiale induite par les spires supérieures :

superposition de la couche de rayon r_0

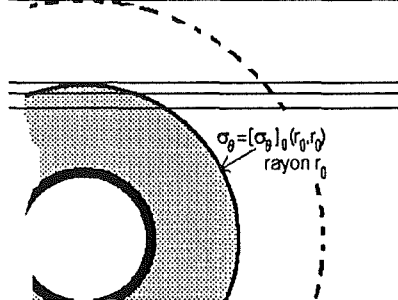


Figure II.19 : état du rouleau pour $R_{rf}=r_0$

superposition de la couche de rayon R

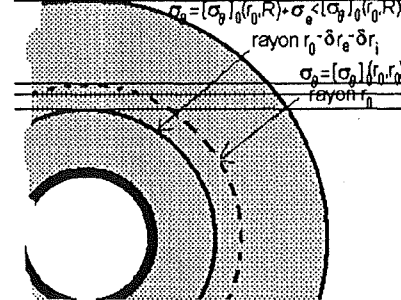


Figure II.20 : état du rouleau pour $R_{rf}=R$

-2. On peut montrer que, dans l'hypothèse du module radial uniforme et compte tenu de l'ordre de grandeur de α , β ..., nous avons dans toute la zone centrale du rouleau :

$$(2.28) \quad \sigma_z(r) = \frac{E_\theta}{(E_r)_{\text{moyen}}} \sigma_r(r)$$

C.2.h.) Cisaillement

L'équation différentielle d'équilibre tangentiel est du premier ordre en $\tau_{r\theta}$. Sa résolution suppose la connaissance de la valeur de la contrainte de cisaillement en un point du rouleau de film.

La tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0$ est exercée sur la couche de film située à la distance R_{rf} de l'axe par l'intermédiaire d'un couple. Celui-ci va induire dans la première couche du rouleau de rayon R_m une tension de cisaillement $\tau_{r\theta}$:

$$(2.29) \quad \tau_{r\theta}(R_{rf}) = \frac{e_f}{2 \pi R_{rf}} [\sigma_\theta]_0(R_{rf}, R_{rf})$$

L'intégration de l'équation différentielle d'équilibre tangentiel (2.12) associé à la prise en compte de cette condition aux limites conduit à :

$$(2.30) \quad \tau_{r\theta}(r) = \frac{e_f * R_{rf}}{2 \pi r^2} [\sigma_\theta]_0(R_{rf}, R_{rf})$$

Le cisaillement n'existe qu'en présence du couple. C'est donc bien la tension de la dernière spire qu'il convient d'écrire. Remarquons de plus que l'hypothèse des couches concentriques qui néglige par définition la notion de cisaillement n'est pas nécessaire ici. Les hypothèses de calcul sont donc beaucoup plus restrictives pour $(\sigma_r, \sigma_\theta \text{ et } \sigma_z)$ que pour $\tau_{r\theta}$.

Résumé et conclusions

Sous certaines hypothèses restrictives, nous avons calculé dans ce paragraphe le champ des *contraintes, déformations et déplacement élastiques* associés à la compression élastique des spires supérieures au sein du rouleau à un instant donné.

Ils dépendent globalement :

- des *conditions de l'enroulement* (précontrainte résiduelle) : $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$,
- des *propriétés mécaniques du film* enroulé : $E_r, E_\theta, E_z, \nu_{\theta r}, \nu_{zr}$ et $\nu_{\theta z}$,
(rappelons que E_r dépend de e_a, σ_r , par l'intermédiaire de $f_{\text{équil}}$)
- des propriétés mécaniques et des dimensions du *mandrin* : E_c et R_m .

Les paramètres de sortie calculées par le modèle sont :

- les contraintes élastiques : σ_r, σ_θ et σ_z ,
- la contrainte de cisaillement élastique : $\tau_{r\theta}$,
- les déformations élastiques : $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ et ε_z ,
- le déplacement radial élastique \mathcal{U} .

D.) Evolution de l'état du rouleau

Nous abordons dans ce paragraphe la dernière des trois parties du modèle :

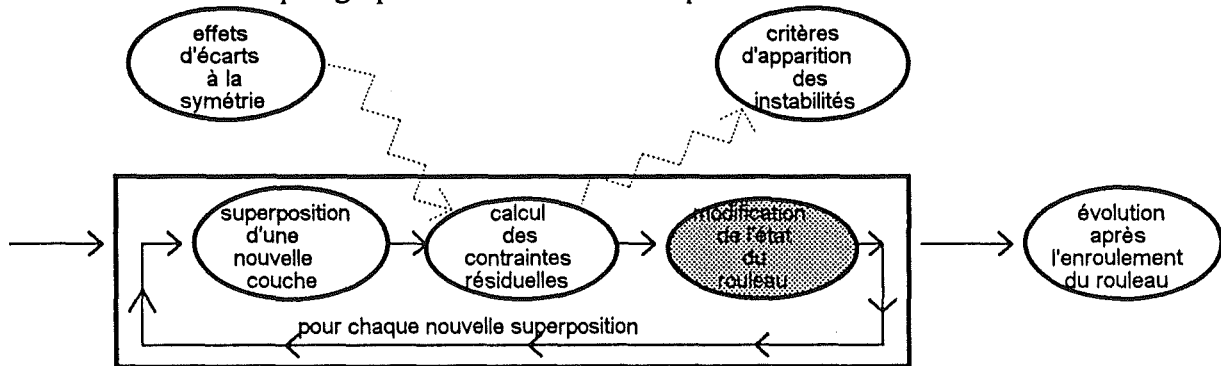


Figure II.21 : modification de l'état du rouleau

C'est à dire que nous nous proposons d'étudier l'évolution de l'état du rouleau entre deux superpositions successives d'une couche de film.

Globalement, nous pouvons distinguer deux types d'évolutions :

→ **évolutions réversibles** : la *compression élastique des spires* est un exemple d'évolution réversible de l'état du rouleau entre deux superpositions. Elle a en fait été étudiée dans le paragraphe précédent.

→ **évolutions irréversibles** : l'*échappement partiel de l'air*, sa conséquence en termes de *diminution de la tension résiduelle* ou bien le *glissement tangentiel* des couches de film les unes sur les autres sont des exemples d'évolution irréversible du rouleau entre deux superpositions.

D.1.) Compression radiale du rouleau

La superposition de chaque nouvelle spire d'épaisseur δs induit une modification élastique de l'état du rouleau caractérisée par :

- une surcontrainte élastique $[\delta\sigma]_s$,
- une surdéformation élastique $[\delta\varepsilon]_s$,
- un déplacement radial élastique $[\delta u]_s$.

Du fait de l'écart important entre les modules en compression de la couche de film et de la couche interspires, cette compression affecte essentiellement l'épaisseur de la couche interspires :

$$(2.31) \quad [\delta e_a(r)]_{\text{rév}} = (e_f + e_a) * \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r)$$

Avec :

$[\delta u]_s(r)$ = déplacement radial induit par la superposition de la spire en s ($R_m < r < R_{rf}$)

C'est une déformation *élastique* : elle disparaît si la spire qui vient d'être superposée est ôtée.

D.2.) Evacuation de l'air entre les couches de film

Sous l'effet de la contrainte radiale de compression régnant dans le rouleau, une partie de la couche d'air initialement entraînée s'évacue par les bords du rouleau :

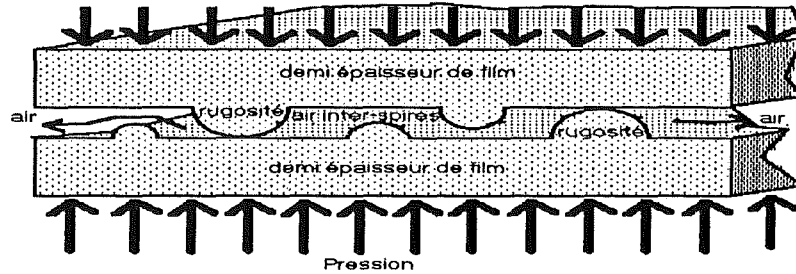


Figure II.22 : évacuation d'air

Nous avons étudié ce phénomène d'évacuation d'air à l'annexe I.B. Nous avons alors établi une formulation de cette variation de l'épaisseur de la couche d'air sur la base de l'analyse des résultats d'un test spécifique de caractérisation (§D.2.b.2. du chapitre I et annexe I.B.).

$$\frac{\partial}{\partial t} e_a = f_{trans}(\text{géométrie, pression, rugosité})$$

Plus précisément, la fonction f_{trans} dépend des grandeurs suivantes :

- l'épaisseur initiale de la couche d'air : e_a ,
- les propriétés visqueuses de l'air : μ_{air} ,
- la géométrie d'évacuation : $l_{évac}$, l_f ,
- l'aptitude du film à évacuer l'air : t_{ea} (caractérisation globale de la topographie de surface),
- la contrainte radiale de compression : σ_r .

L'analyse de l'annexe I.C. nous a conduit à l'estimation suivante de la fonction f_{trans} (ou à la variation $[\delta e_a]_{irr\acute{e}v}$ de l'épaisseur de la couche d'air d'air interspires pendant le temps δt suivante) :

$$(2.32) \quad [\delta e_a]_{irr\acute{e}v} = [e_a(t+\delta t) - e_a(t)] = [f_{trans}] \delta t = \frac{[e_a - e_{ea} + e_{eq}(e_{ea})]^2 e_a}{12 \mu_{air} l_{évac} l_f} * [(\delta t) (-\sigma_r)]$$

Dans cette analyse, l'influence de la largeur du rouleau est caractérisée par le seul volume d'air.

On distingue globalement deux sollicitations différentes :

- la contrainte radiale élastique de compression due au *serrage des spires supérieures*,
- la contrainte radiale élastique de compression due au *rouleau d'appui*.

Nous nous proposons de préciser pour chacune de ces deux composantes les valeurs de la contrainte radiale de compression (σ_r) et de la durée (δt).

-1. effet du serrage dû aux spires supérieures

L'intervalle de temps correspond à la durée séparant deux superpositions de couches de film :

$$\delta t_{ss} = \frac{2 \pi R_{rf}}{V}$$

Avec :

R_{rf} = rayon du rouleau de film (m) V = vitesse de défilement du film (m.s⁻¹)

La contrainte radiale de compression due au serrage des spires supérieures est directement donnée par la contrainte radiale calculée au chapitre précédent, soit : $P_{ss} = -\sigma_r$

-2. effet du rouleau d'appui

Le problème est ici sensiblement différent car nous nous intéressons aux effets en profondeur d'un phénomène localisé sur une petite surface du rouleau de film.

Dans l'hypothèse d'un contact classique de HERTZ entre le rouleau de film et le rouleau d'appui, la demi-largeur de la zone de contact et la contrainte moyenne radiale de compression sont données par les relations :

$$a = \sqrt{\frac{2 F R_{eq}}{\pi E_{eq}}} \quad \text{et} \quad P_c = \frac{F_a}{2 a}$$

avec :

F_a = Force linéique d'appui appliquée en surface (N.m⁻¹)

R_{eq} = rayon équivalent, défini par (2.2) (m) E_{eq} = module d'YOUNG, défini par (2.2) (Pa)

THOMAS et HOERSCH [1930] estiment que la contrainte moyenne radiale de compression sous la zone de contact décroît dans la profondeur selon une loi du type :

$$P_{ra}(r) = \frac{P_c}{1 + \left[\frac{R_{rf} - r}{a} \right]^2}$$

La durée du passage sous le rouleau d'appui est définie par :

$$\delta t_{ra} = \frac{2 a}{V}$$

Pendant une rotation complète du rouleau, l'épaisseur de la couche d'air interspires diminue d'une quantité $[(\delta e_a)]_{irrév}$ définie par la relation (2.32) (fonction f_{trans}) avec les effets cumulés d'une part de P_{ss} et δt_{ss} et d'autre part de P_{ra} et δt_{ra} :

$$(2.33) \quad \begin{aligned} [(\delta e_a)]_{irrév} &= [(\delta e_a)_{ss}]_{irrév} + [(\delta e_a)_{ra}]_{irrév} \\ &= \frac{[e_a - e_{ea} + e_{eq}(e_{ea})]^2 e_a}{12 \mu_{air} l_{évac} l_f} * \left[\frac{2 \pi r}{V} [-\sigma_r(r)] + \frac{2 a}{V} P_c(r) \right] \end{aligned}$$

Cette diminution de l'épaisseur de la couche d'air est évidemment un **phénomène irréversible**. Il s'agit donc d'une déformation **plastique** du rouleau. Elle est sur ce plan très différente de la compression radiale élastique présentée au paragraphe précédent.

L'air s'évacue jusqu'à obtention de l'épaisseur ultime définie par la fonction $f_{\text{équil}}$ (annexe I.A) :

$$[e_a]_{\text{limite}} = f_{\text{équil}} [\sigma_r(r), \text{rugosité}] = h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r(r)}{P_0}}}$$

Remarque :

δe_a est inversement proportionnel à la largeur du rouleau l_f . Cela signifie que l'air s'échappera plus difficilement (plus lentement) dans un rouleau large que dans un rouleau étroit.

D.3.) Diminution de la tension résiduelle

Considérons une spire de module tangentiel E_θ , de rayon à l'équilibre r_0 . L'application d'une contrainte tangentielle σ_θ se traduit par une déformation élastique de celle-ci :

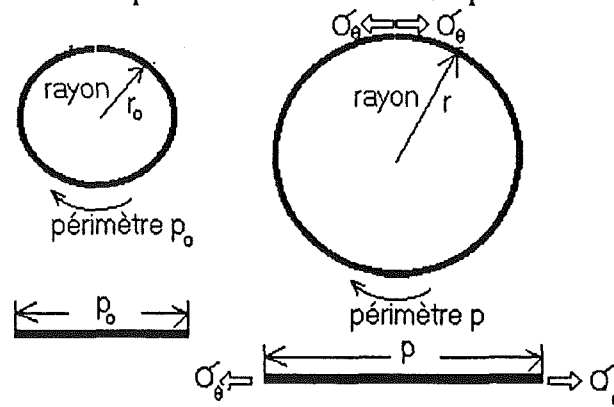


Figure II.23 : relation rayon-périmètre / contrainte

La déformation élastique radiale est définie par la loi de HOOKE :

$$(2.34) \quad \delta r = r - r_0 = r_0 \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}$$

Avec :

$$\delta r < 0 \Rightarrow \sigma_\theta < 0 \text{ (spire en compression)} \quad \delta r > 0 \Rightarrow \sigma_\theta > 0 \text{ (spire en tension)}$$

Cette relation traduit une équivalence directe entre le rayon et la contrainte tangentielle de chaque spire.

Au moment de sa superposition, une précontrainte tangentielle ($[\sigma_\theta]_0(r,r)$) est exercée sur la spire. Celle-ci a donc, à cet instant un rayon supérieur à son rayon d'équilibre. Au fur et à mesure de la superposition des autres spires, deux phénomènes modifient l'état (rayon, contrainte) de cette spire :

→ La compression élastique des spires

Son calcul fait l'objet du §C. Elle peut être caractérisée soit par le déplacement radial $u(r)$, soit par l'état de contrainte élastique : $\sigma_r(r)$, $\sigma_e(r) = \sigma_\theta(r) - [\sigma_\theta]_0(r, R_{ff})$ et $\sigma_z(r)$. Il s'agit d'une déformation élastique : ces quatre grandeurs redeviennent nulles si les spires sont ôtées.

→ L'échappement de l'air des spires inférieures

Chaque couche d'air évacuée à chaque rotation la quantité d'air $[\delta e_a(r)]_{\text{irr}}.$ Cela se traduit donc, pour la spire considérée de rayon r par un déplacement radial défini par :

$$(2.35) \quad v(r) = \int_{s=R_m}^{s=r} [\delta e_a(s)]_{\text{irr}} ds$$

Si les spires supérieures sont ôtées, l'air ne rentre pas dans le rouleau : $v(r)$ est un déplacement irréversible. Ce dernier déplacement, *irréversible*, doit donc se traduire par une variation également irréversible de la contrainte tangentielle $\sigma_\theta = \sigma_e + [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ définie par :

$$\delta \sigma_\theta = E_\theta \frac{v(r)}{r}$$

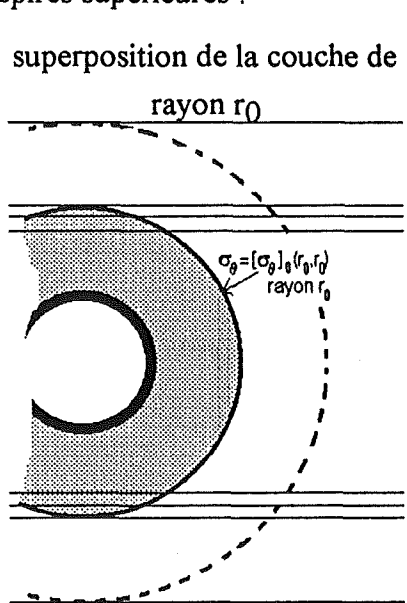
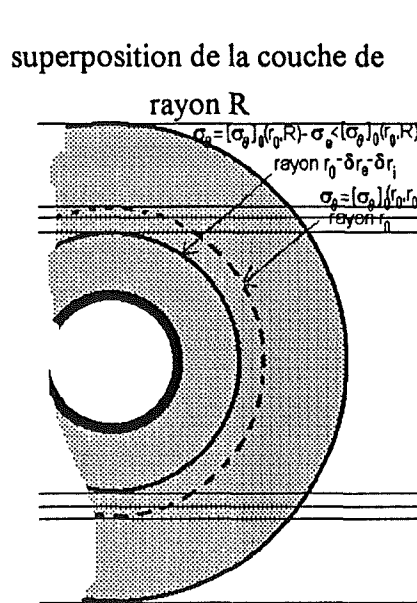
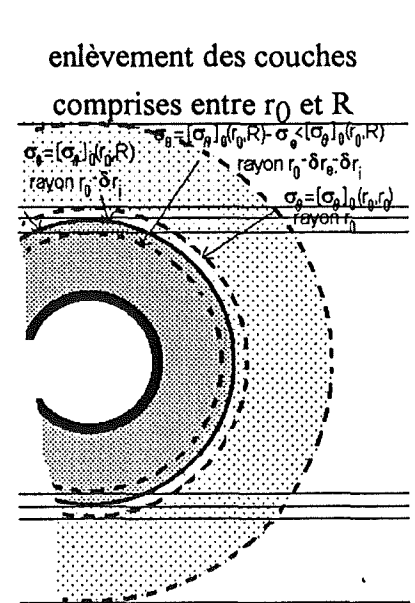
D'après ce qui précède, nous avons simultanément après chaque superposition :

- d'une part une *déformation élastique* des couches $\sigma_e = \sigma_\theta - [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$
- d'autre part une *diminution irréversible* de $\delta \sigma_\theta$.

Compte tenu de la forme $\sigma_\theta = \sigma_e + [\sigma_\theta]_0$, c'est en réalité la *tension résiduelle* ou *précontrainte tangentielle* $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ qui diminuera de la quantité $\delta \sigma_\theta$:

$$(2.36) \quad \begin{cases} \delta [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf}) = [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf} + \delta R_{rf}) - [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf}) \\ = E_\theta \frac{v(r)}{r} = \frac{E_\theta}{r} \int_{s=R_m}^{s=r} [\delta e_a(s)]_{\text{irr}} ds \end{cases}$$

Cela signifie que la *précontrainte tangentielle* ou *tension d'enroulement du film diminue lentement au fur et à mesure de l'enroulement*. C'est pour cette raison que nous lui préférons le terme de *tension résiduelle*. Il est facile d'obtenir une confirmation expérimentale de ce résultat en s'intéressant à l'évolution de l'état d'une spire au fur et à mesure de son enroulement puis en otant les spires supérieures :

Figure II.24 : $R_{rf} = r_0$ Figure II.25 : $R_{rf} = R$ Figure II.26 : découpe jusqu'à $R_{rf} = r_0$

Intéressons-nous à une spire de rayon r_0 et de tension $[\sigma_\theta]_0(r_0, r_0)$ au moment de sa superposition. A la fin de l'enroulement, son rayon et sa contrainte tangentielle sont respectivement devenus $r_0 - \delta r_e - \delta r_i < r_0$ et $[\sigma_\theta]_0(r_0, R) + \sigma_e < [\sigma_\theta]_0(r_0, R)$.

Otons maintenant toutes spires supérieures. son rayon et sa contrainte tangentielle sont respectivement devenus $r_0 - \delta r_i > r_0 - \delta r_e - \delta r_i$ et $[\sigma_\theta]_0(r_0, R) > [\sigma_\theta]_0(r_0, R) + \sigma_e$ avec :

- δr_e est la variation élastique du rayon due à la compression des spires supérieures. C'est aussi le déplacement u calculé dans le paragraphe C.

- δr_i est la variation irréversible du rayon due à l'évacuation de l'air sous les spires inférieures, calculé dans le paragraphe D.

C'est un *élément nouveau* par rapport aux modèles de ALTMANN [1966], CONNOLLY et WINARSKI [1984], HAKIEL [1987] ou GOOD [1991 et 1992] qui supposent que la *tension résiduelle reste égale à la tension d'enroulement*. Remarquons toutefois que les effets de l'échappement sont plus facilement négligeables si la vitesse d'enroulement est faible.

D.4.) Glissements tangentiels

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le glissement tangentiel ne peut être pris en considération avec les hypothèses qui conduisent au calcul de σ_r , σ_θ et σ_z .

Or, il apparaît d'après les calculs du §B. que l'épaisseur de la couche d'air entraînée (e_e) est susceptible de dépasser la hauteur des plus grandes rugosités (SR_z). Dans le même temps, le principe d'application de la tension d'enroulement induit un cisaillement $\tau_{r\theta}$ relativement important (§C.2.h.). On comprend aisément que, dans ces conditions, le film puisse glisser tangentiellement.

Nous avons mis en évidence l'existence de tels glissements au cours de l'enroulement rapide ($6,5 \text{ m.s}^{-1}$) de films relativement larges (2 m) :

- 1. l'opération est interrompue après 5 000 m de découpage,
- 2. les dernières spires sont marquées d'un trait perpendiculaire à celles-ci,
- 3. l'opération est relancée et poursuivie normalement jusqu'à la fin.

Nous avons ainsi observé un glissement pour une épaisseur d'environ 1 mm de film (ce qui représente 70 spires). Nous pouvons ajouter qu'une telle mesure est sensiblement faussée par le fait que le rouleau est arrêté avant d'être marqué : les dernières spires ont donc été enroulées avec une vitesse plus faible. Les résultats obtenus par cette méthode sousestiment donc le glissement réel.

Récemment, GOOD [1992] a développé un dispositif plus performant permettant de suivre pendant l'enroulement le glissement en marquant (jet d'encre) les couches à chaque rotation du rouleau. Il a ainsi pu mettre en évidence des glissements encore plus importants.

La prise en compte dans le modèle d'enroulement de ce glissement soulève un certain nombre de difficultés que nous avons déjà abordées au §C.3.b. Actuellement, nous introduisons deux épaisseurs critiques e_{\max} et e_{\min} définies par :

- si $e_{\max} \leq e_a$: la spire glisse tangentiellement.

La diminution de l'épaisseur de la couche d'air n'est pas associée à une diminution de la tension résiduelle. Il s'agira des spires les plus proches de l'extérieur.

- si $e_a \leq e_{\min}$: la spire ne glisse pas tangentiellement.

Cela se traduit par une corrélation directe entre la diminution de l'épaisseur de la couche d'air interspires et de la tension résiduelle (voir le paragraphe précédent).

- si $e_{\min} \leq e_a \leq e_{\max}$

C'est le cas intermédiaire que nous interpolons linéairement entre les deux cas limites $e_a = e_{\min}$ et $e_a = e_{\max}$.

En résumé, nous aurons, selon la valeur de l'épaisseur de la couche d'air e_a , les trois hypothèses suivantes :

$$(2.37) \quad \begin{cases} e_a \leq e_{\min} \Rightarrow \delta[\sigma_\theta]_0 = E_\theta \frac{v(r)}{r} \\ e_{\min} \leq e_a \leq e_{\max} \Rightarrow \delta[\sigma_\theta]_0 = E_\theta \frac{v(r)}{r} * \frac{e_a - e_{\max}}{e_{\min} - e_{\max}} \\ e_{\max} \leq e_a \Rightarrow \delta[\sigma_\theta]_0 = 0 \end{cases}$$

Les deux épaisseurs critiques e_{\min} et e_{\max} sont difficiles à définir. Elles dépendent probablement de la topographie de surface et de la contrainte radiale de compression.

Nous prendrons arbitrairement $e_{\min} = f_{\text{équil}} [\sigma_r(R_{\text{rf}}), \text{rugosité}]$ et $e_{\max} = SR_z$.

Conclusion

A chaque nouvelle superposition, l'état du rouleau de film évolue de la manière suivante :

- **compression radiale** des spires (réversible) : \mathcal{U} ,
- **évacuation d'air** interspires (irréversible) : δe_a ,
- **diminution de la tension résiduelle** du film (irréversible) : $[\sigma_\theta]_0(r, R_{\text{rf}})$,
- **glissement tangentiel** (irréversible).

Conclusion

Il existe dans la littérature de nombreuses formulations du champ des contraintes résiduelles dans les rouleaux de film. Toutefois, ces formulations négligent toutes les *effets aérodynamiques* et *certaines effets de la topographie de surface*. Seuls les effets de la tension d'enroulement sont pris en considération sous l'hypothèse restrictive que celle-ci est constante.

Or, on sait par expérience que ces grandeurs sont aussi importantes que la tension d'enroulement en termes d'instabilités d'enroulement et donc de contraintes résiduelles.

Nous avons proposé dans ce chapitre un *modèle physique global de l'enroulement*. Ce modèle prend en considération les effets des principales grandeurs qui interviennent au premier ordre dans l'enroulement :

- la *vitesse* : V ,
- l'*appui* : F_a , R_{ra} , E_{ra} et v_{ra} ,
- la *tension imposée au moment de l'enroulement* : $[\sigma_\theta]_0(r,r)$,
- le *mandrin* : R_m , E_m et v_m ,
- le *film* : ses *dimensions* : e_f , l_f et L_f
sa *topographie de surface* : $f_{\text{équil}}$ pour l'état d'équilibre
et f_{trans} pour l'état transitoire,
ses *propriétés mécaniques* : E_r (lié à $f_{\text{équil}}$), E_θ , E_z , $v_{\theta r}$, v_{zr} et $v_{\theta z}$,

Les grandeurs estimées sont :

- les *contraintes élastiques* : σ_r , σ_θ et σ_z ,
- la *contrainte de cisaillement élastique* : $\tau_{r\theta}$,
- les *déformations élastiques* : ε_r , ε_θ et ε_z ,
- le *déplacement radial élastique* u ,

mais également de nouvelles grandeurs liées aux effets aérodynamiques nouvellement pris en considération :

- l'évolution de la *tension résiduelle* : $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$,
- l'épaisseur des couches d'air *entraînée* e_e et *résiduelle* e_a .

Validation et Exploitation du modèle

Introduction

L'objectif de cette étude est de comprendre les mécanismes physiques qui gouvernent l'enroulement des films plastiques minces. Le premier paragraphe de ce chapitre sera consacré à la comparaison de résultats expérimentaux avec les prédictions du modèle. Le second paragraphe de ce chapitre sera consacré à quelques exemples d'utilisation de celui-ci.

A.) Validation du modèle

Introduction

Nous utiliserons des résultats expérimentaux provenant de deux sources :

- un prototype construit à Saint Maurice de Beynost,
- les découpeuses des lignes industrielles de Saint Maurice de Beynost et de Cabo (Brésil).

Les résultats obtenus sur le prototype ont fourni les éléments de notre validation. Les résultats obtenus sur les lignes industrielles ont permis de confirmer les tendances observées.

A.1.) le prototype d'enroulement

Le cahier des charges proposé était le suivant (MOUCHET [1989]) :

- ne pas être trop éloigné des machines industrielles afin de faciliter la mise en œuvre des transpositions,
- mieux maîtriser des paramètres du procédé à partir d'une meilleure instrumentation,
- être polyvalent en autorisant tous les développements futurs,
- avoir un plus large domaine d'utilisation que les machines industrielles afin d'autoriser un plus grand nombre d'essais.

A.1.b.) Schéma

Nous avons reporté sur la figure III.1 le schéma de fonctionnement global du prototype :

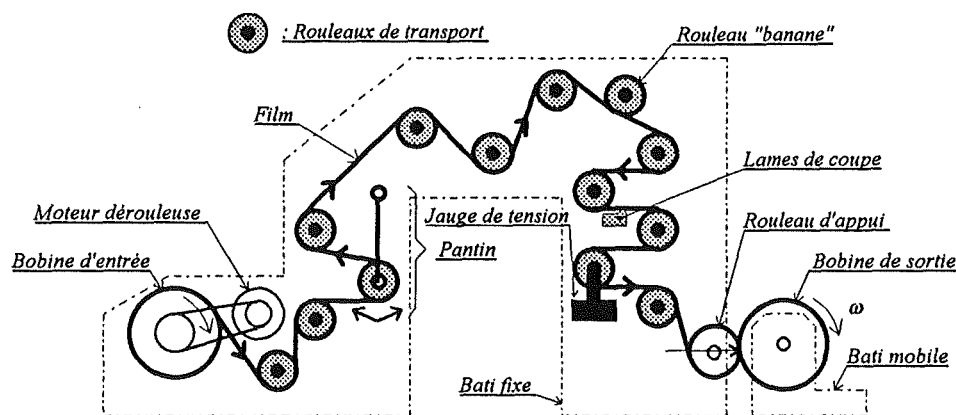


Figure III.1 : schéma du prototype d'enroulement

La partie mécanique du prototype se décompose globalement en trois groupes :

- groupe de déroulage

il est composé d'un moteur entraînant un banc de déroulage, de deux rouleaux de transport et d'un rouleau "pantin" destiné à assurer la régulation en vitesse du groupe de déroulage :

Pour une vitesse de découpage donnée, du fait de la diminution de diamètre du rouleau, la vitesse angulaire de rotation du moteur de déroulage varie. La régulation de celle-ci se fait à partir de la mesure de la position du pantin : s'il dévie vers la droite, c'est que la vitesse angulaire est trop grande et inversement. La tension interne du film dans le groupe de déroulage est réglable par l'intermédiaire d'un moment en rotation du pantin.

- groupe de transport

il est composé d'une série de rouleaux entraînés par un moteur ou par le seul passage du film. La principale fonction du groupe de transport est d'éviter les effets de report de la partie déroulage sur la partie enroulement ou inversement. L'un d'eux est monté sur une jauge de contrainte permettant de mesurer la force de rappel du film, donc sa tension interne.

- groupe d'enroulement

il est composé d'un moteur entraînant un banc d'enroulement et d'un rouleau d'appui.

La tension interne du film est régulée par l'intermédiaire du couple du moteur.

L'intérêt du contrôle de la tension et de la présence du rouleau d'appui a été présenté dans le chapitre I.

Un *automate* assure parallèlement la régulation de toutes les grandeurs pendant l'enroulement (DUPHE et DOMBES [1991]). Un pupitre de commande et un ordinateur permettent à l'opérateur de contrôler les conditions globales de l'enroulement.

A.1.c.) Limitations du dispositif expérimental

Nous avons déjà présenté certaines limitations du dispositif expérimental.

La principale limitation concerne la *boucle ouverte de régulation de la tension* d'enroulement. L'automate déduit l'intensité du moteur de la consigne de tension de l'opérateur, de la vitesse angulaire du rouleau et d'une représentation plus ou moins fiable des pertes mécaniques. Or, il

semble que ces pertes mécaniques et leurs variations avec la vitesse angulaire et la masse du rouleau ne sont pas parfaitement connues. CHAMIXAES [1989] et BOUQUEREL [1991a et 1992a] ont en particulier montré que les variations brutales de l'accélération du film se traduisent par des variations de la tension réelle pouvant atteindre 30%. Il peut en résulter un écart important entre la consigne et la valeur réelle de la tension.

A.2.) Validation du modèle

Introduction

Nous avons vu dans le chapitre I que les paramètres caractérisant la qualité d'enroulement d'un film plastique sont malheureusement peu nombreux : la densité apparente, la déformation du mandrin, la tension résiduelle et l'aspect visuel du rouleau.

A.2.a.) Paramètres de validation

Epaisseur de la couche résiduelle d'air

La mesure du diamètre extérieur et de la masse du rouleau permet de connaître la *densité apparente* de celui-ci. Le rouleau est globalement constitué de film mince polyester *quasi-incompressible* de densité parfaitement connue (D_{PET}) et d'air de densité négligeable devant celle du polyester. Il est donc possible de déduire de la densité apparente D_a la valeur de l'*épaisseur de la couche résiduelle d'air* e_a . Expérimentalement, on observe les variations suivantes de D_a ou de e_a (si $e_f = 12 \mu m$)

→ films rugueux, destinés aux applications *emballage* : $1,27 < D_a < 1,32$ ou $1,2 \mu m < e_a < 0,7 \mu m$

→ films lisses, destinés aux applications *magnétique* : $1,31 < D_a < 1,38$ ou $0,8 \mu m < e_a < 0,1 \mu m$

e_a dépend de D_{PET} qui présente des fluctuations (2% selon le taux de cristallinité). Nous ne prenons pas en compte ces écarts parce qu'ils sont faibles et constants pour une référence donnée.

Tension résiduelle

Nous avons proposé au §B.3.c.3 du chapitre I une technique rudimentaire de mesure de la tension résiduelle du film $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$. Cette technique est assez peu précise (à 20% près) et soulève en outre de nombreuses difficultés de mise en œuvre (découpe du rouleau). Nous l'utiliserons toutefois dans un cas particulier afin de vérifier que l'ordre de grandeur de la diminution de la tension résiduelle prédite par le modèle est satisfaisant.

Déformation du mandrin

Nous avons indiqué dans le même paragraphe que la mesure de la déformation du diamètre intérieur du mandrin permet de connaître la compression radiale des couches de film proches de celui-ci.

Ici encore, cette technique se heurte à des difficultés de mise en œuvre (position du capteur...) et à des imprécisions (propriétés mécaniques du mandrin...). Nous l'utiliserons toutefois ponctuellement pour vérifier des ordres de grandeur.

Conclusion

L'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air est très sensible aux conditions globales de l'enroulement. De plus, le principal apport du modèle par rapport aux modèles classiques d'enroulement concerne la *prise en compte des effets liés à la présence de cette couche d'air*.

Il est donc souhaitable de procéder à la validation principale du modèle sur la base de la mesure de l'épaisseur moyenne de cette couche résiduelle d'air. Les autres outils seront également utilisés.

A.3.) Validation sur le prototype d'enroulement

Nous présenterons ici les résultats obtenus sur des films présentant un niveau de rugosité faible (application vidéo) afin de pouvoir utiliser les tests de caractérisation à notre disposition.

A.3.a.) Film de référence VIDÉO 1

Les principales caractéristiques de ce film sont :

- dimensions : $e_f = 11,5 \mu\text{m}$, $l_f = 600 \text{ mm}$ et $L_f = 10000 \text{ m}$
- propriétés mécaniques : $E_z = 4,5 \text{ GPa}$, $E_\theta = 5,0 \text{ GPa}$ et $\nu_{z\theta} = 0,28$
- temps moyen d'échappement d'air (fonction f_{trans}) $t_{ea} = 79 \text{ s}$
- coefficients de la fonction $f_{\text{équil}}$: $h_0 = 0,495 \mu\text{m}$ et $P_0 = 0,427 \text{ MPa}$

Les conditions d'enroulement sont :

- vitesse $V =$ constante pendant l'enroulement ($\pm 0,005 \text{ m.s}^{-2}$ au début et à la fin),
- tension de consigne $[\sigma_\theta]_0(r,r) =$ constante pendant tout l'enroulement,
- force linéique d'appui $F_a =$ constante pendant tout l'enroulement.

La tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ fait l'objet d'une mesure directe. La modélisation reposera sur cette mesure et non sur la valeur de la consigne. En pratique, si la consigne est constante et égale à 10 MPa, on observe que la tension réelle $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ a la forme suivante :

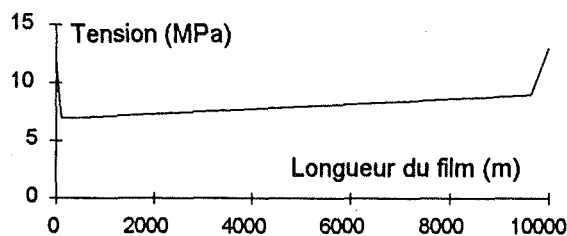


Figure III.2 : évolution de la tension réelle

On remarque que le niveau moyen de la tension réelle (7 à 9 MPa) est inférieur à la consigne (10 MPa). Nous utiliserons bien sûr la valeur réelle mesurée et non pas la consigne.

Les autres paramètres technologiques sont :

- rouleau d'appui : $R_{ra} = 100 \text{ mm}$, $E_{ra} = 0,16 \text{ MPa}$ et $\nu_{ra} = 0,50$
- mandrin : $R_m = 84 \text{ mm}$ (intérieur $R_{mi} = 76 \text{ mm}$), $E_m = 2,5 \text{ GPa}$ et $\nu_m = 0,30$

De nombreuses conditions ont été explorées (BOUQUEREL [1992b]) : condition nominale, diminution de la force linéique d'appui, diminution de la tension et augmentation de la vitesse.

Chaque mesure correspond à la moyenne de **3 à 6 essais** distincts. La **dispersion est relativement faible** car tous les essais ont été rigoureusement conduits dans les mêmes conditions.

D'autre part, nous avons choisi d'écrire les valeurs avec **3 décimales**. La dernière est donc probablement imprécise, mais nous préférons la laisser pour mieux apprécier les écarts.

Tableau III.1 : densité apparente sur le film VIDÉO 1

Appui F_a (N.m ⁻¹)	Tension $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ (MPa)	Vitesse V (m.s ⁻¹)	Expérience (prototype)		Simulation (modèle)	
			D_a	e_a (μm)	D_a	e_a (μm)
1100	13,2	6,0	1,369	0,218	1,367	0,236
700	13,2	6,0	1,362	0,279	1,365	0,253
1100	9,0	6,0	1,357	0,322	1,359	0,305
1100	13,2	7,7	1,356	0,331	1,362	0,279

On retiendra de ce tableau un **bon accord global** entre les résultats expérimentaux et les prédictions du modèle concernant l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air. Le plus grand écart entre les deux correspond au cas de l'augmentation de vitesse ($\Delta e_a = 20\%$)

Tension résiduelle

Nous avons mesuré la **tension résiduelle** $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ du film pour deux tensions d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ de 13,2 MPa et 9,0 MPa en un point voisin de $l = 8000$ m (pour un rouleau de 10000 m) :

Tableau III.2 : tension résiduelle sur le film VIDÉO 1

$[\sigma_\theta]_0(r,r)$ initial (MPa)	$[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ mesurée (MPa)	$[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ calculée (MPa)
13,2	6,7	4,8
9,0	4,2	4,0

Ces deux prédictions nous semblent en bon accord avec les résultats expérimentaux. On remarquera surtout que le fait de trouver une tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ plus faible que la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ démontre **l'existence de l'échappement de l'air**.

Il semble également que le modèle surestime sensiblement l'échappement de l'air puisque la tension résiduelle calculée est systématiquement inférieure à la tension résiduelle mesurée. On observera également que le pourcentage de variation de la tension $\{[\sigma_\theta]_0(r,r) - [\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})\} / [\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ reste sensiblement le même dans les deux cas : -35%.

Déformation du mandrin

Nous avons mesuré sur des mandrins en carton le diamètre interne moyen avant et après l'enroulement. Il y a une dispersion assez importante que l'on peut attribuer à la dispersion due aux propriétés mandrin en lui-même et aux erreurs de mesure.

En moyennant 5 mesures, nous avons obtenu les résultats suivants :

Tableau III.3 : variation du diamètre du mandrin

rayon intérieur moyen :	$R_{mI} = 152,4$ mm
variation moyenne de ce rayon :	$\Delta R_{mI} = 0,40$ mm

En supposant que le mandrin est un cylindre creux isotrope tel que :

$$E_m = 2,5 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0,30, \quad R_{mI} = 152,4 \text{ mm (intérieur)} \text{ et } R_m = 168 \text{ mm (extérieur)}$$

Nous obtenons (voir relation (2.16) du chapitre II et (6.14) de l'annexe VI):

$$(\sigma_r)_{\text{mesuré}} = E_c \frac{\Delta R_{mI}}{R_{mI}} \quad \text{avec } E_c = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \nu_m) + (1 + \nu_m) \zeta^2} E_m \text{ et } \zeta = \frac{R_{mI}}{R_m} \text{ (soit } E_c = 250 \text{ MPa)}$$

soit $(\sigma_r)_{\text{mesuré}} = 0,6 \text{ MPa}$

Le modèle conduit à $(\sigma_r)_{\text{calculé}} = 0,45 \text{ MPa}$ (même valeur de E_c).

Compte tenu des différentes incertitudes et dispersions sur E_m , ν_m , \emptyset et $\Delta\emptyset$ sans oublier la modélisation isotrope, on remarquera surtout que *l'ordre de grandeur est satisfaisant*.

Selon le fabricant du mandrin (GERHARDT [1990, 1992a et 1992b]), E_c est plutôt proche de 500 MPa. Cela conduirait alors à des valeurs différentes de $(\sigma_r)_{\text{mesuré}}$ mais également de $(\sigma_r)_{\text{calculé}}$.

A.3.b.) Film de référence VIDÉO 2

Les principales caractéristiques de ce film sont :

- dimensions : $e_f = 11,5 \text{ }\mu\text{m}$, $l_f = 660 \text{ mm}$ ou 1240 mm et $L_f = 8500 \text{ m}$ ou 7200 m
- propriétés mécaniques : $E_z = 5,1 \text{ GPa}$, $E_\theta = 4,2 \text{ GPa}$ et $\nu_{z\theta} = 0,28$
- temps moyen d'échappement d'air (fonction f_{trans}) $t_{ea} = 59 \text{ s}$
- coefficients de la fonction $f_{\text{équil}}$: $h_0 = 0,476 \text{ }\mu\text{m}$ et $P_0 = 0,367 \text{ MPa}$

Les conditions d'enroulement et les autres paramètres technologiques sont ceux du film VIDÉO 1.

Le principal intérêt de cette série d'essais est de considérer deux largeurs très différentes : 660 et 1240 mm, donc deux conditions d'échappement d'air très différentes. De très nombreuses conditions expérimentales ont été explorées (BOUQUEREL [1992c]). Nous ne retiendrons pour chaque largeur que les trois principales configurations :

- $l_f = 0,660 \text{ m}$: - condition nominale / diminution de la tension / diminution de la tension / diminution de la vitesse,
- $l_f = 1,240 \text{ m}$: -condition nominale / diminution de la vitesse / diminution de la vitesse / diminution de la force linéique d'appui.

Nous avons reporté dans le tableau III.4 les résultats. Comme précédemment, il s'agit de valeurs moyennes données avec 3 décimales :

Tableau III.4 : densité apparente sur le film VIDÉO 2

Largeur l_f (m)	Appui F_a (N.m ⁻¹)	Tension $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ (MPa)	Vitesse V (m.s ⁻¹)	Expérience (prototype)		Simulation (modèle)	
				D_a	e_a (μm)	D_a	e_a (μm)
0,660	1100	12,0	6,8	1,380	0,159	1,378	0,205
0,660	1100	8,5	6,8	1,370	0,266	1,370	0,268
0,660	1100	8,5	9,3	1,362	0,354	1,364	0,333
1,240	1000	10,0	4,2	1,376	0,202	1,375	0,216
1,240	1000	10,0	7,5	1,356	0,420	1,365	0,318
1,240	1600	10,0	7,5	1,375	0,212	1,367	0,295

On retiendra de ce tableau un très bon accord pour les rouleaux de largeur 660 mm et un bon accord pour les rouleaux de largeur 1240 mm.

En d'autres termes, la modélisation de l'échappement de l'air proposée à l'annexe I.B. et reposant sur la fonction f_{trans} est satisfaisante. L'influence de la largeur du rouleau apparaît essentiellement au travers du volume d'air piégé, ce qui permet d'*extrapoler les conditions du test aux conditions réelles*.

A.4.) Illustration sur les découpeuses industrielles

Introduction

L'utilisation des résultats expérimentaux issus des découpeuses des lignes industrielles présente un certain nombre de *limitations* :

- les mesures de densité apparente ne sont pas effectuées systématiquement mais seulement pendant les périodes d'essais : les *résultats exploitables sont peu nombreux*.
- une découpeuse est constituée de plusieurs unités ayant chacune des caractéristiques propres. Il est difficile de dissocier les résultats issus de chaque unité car leurs spécificités sont mal connues. L'utilisation des résultats globaux présentera donc une *variabilité importante*.
- comme il n'existe pas de mesure directe de la tension réelle d'enroulement, nous ne disposons que de la valeur de la consigne. Or nous avons une *mauvaise connaissance de la relation existant entre la consigne de tension d'enroulement et sa valeur réelle*.

Il faut toutefois envisager ces résultats comme des *illustrations de l'utilisation du modèle*. En particulier, nous ne ferons pas reposer la validation du modèle sur ces résultats industriels.

Nous continuerons à écrire les valeurs moyennes avec 3 décimales.

A.4.a.) film VIDÉO 3

Nous avons choisi une campagne d'essais conduite à tension d'enroulement constante et faisant varier la vitesse et la force linéique d'appui.

- dimensions : $e_f = 15,6 \mu\text{m}$, $l_f = 660 \text{ mm}$ et $L_f = 8000 \text{ m}$
- propriétés mécaniques : $E_z = 5,1 \text{ GPa}$, $E_\theta = 4,5 \text{ GPa}$ et $\nu_{z\theta} = 0,28$
- temps moyen d'échappement d'air (fonction f_{trans}) $t_{ea} = 54 \text{ s}$
- coefficients de la fonction $f_{\text{équil}}$: $h_0 = 0,619 \mu\text{m}$ et $P_0 = 0,272 \text{ MPa}$

Les conditions de l'enroulement et les autres paramètres technologiques sont ceux du prototype d'enroulement.

Le tableau III.5 résume les résultats :

Tableau III.5 : densité apparente sur le film VIDÉO 3

Appui F_a (N.m ⁻¹)	Vitesse V (m.s ⁻¹)	Expérience		Modèle $[\sigma_\theta]_0(r,r)=8,5\text{MPa}$		Modèle $[\sigma_\theta]_0(r,r)=7\text{MPa}$	
		D_a	e_a (μm)	D_a	e_a (μm)	D_a	e_a (μm)
1070	9,2	1,350	0,520	1,362	0,378	1,357	0,437
1070	6,7	1,364	0,355	1,369	0,296	1,364	0,355
1300	6,7	1,367	0,320	1,370	0,285	1,365	0,343
700	6,7	1,355	0,461	1,366	0,331	1,362	0,378

En supposant $[\sigma_\theta]_0(r,r) = 8,2 \text{ MPa}$, on observe que l'épaisseur moyenne des couches résiduelles d'air est systématiquement sous-estimée. En revanche, $[\sigma_\theta]_0(r,r) = 7,0 \text{ MPa}$ (soit un écart de -20%) on obtient des résultats beaucoup plus proches de la réalité. Cette valeur de l'écart est en bon accord avec les observations du §A.3.a.

On remarquera également un assez bon ajustement entre l'expérience et la modélisation. Il semble toutefois que la sensibilité aux paramètres du procédé est globalement plus faible dans le cas du modèle que dans la réalité.

A.4.b.) Film EMBAL1

Cette ligne de production de Rhodia Filmes Nordeste (Cabo, Brésil) est spécialisée dans les films polyester destinés aux applications emballage(BOUQUEREL et SEVERO [1991b et 1991c]).

Ces films sont plus rugueux que ceux destinés à l'enduction magnétique et ne peuvent pas de ce fait être soumis au test du "gap d'air" (donc pas de mesure de $f_{\text{équil}}$). Différentes approches ont été développées afin de pallier cette limitation (voir Annexe I.C.). Toutefois, elles n'ont pas encore totalement abouti. Afin d'illustrer l'utilisation du modèle avec ces films, nous avons procédé à des ajustements numériques à la limite d'une démarche scientifique.

Il s'agit d'un film de référence EMBAL 1 d'épaisseur 12 μm. La longueur du film enroulé est de 18000 m. Les paramètres de caractérisation de l'état de surface sont $h_0 = 1,5 \text{ μm}$ et $P_0 = 0,6 \text{ MPa}$ (estimation de la fonction $f_{\text{équil}}$) et $t_{ea} = 15 \text{ s}$ (mesuré) pour la fonction f_{trans} .

Le tableau III.6 résume les résultats obtenus avec quatre séries de conditions différentes :

Tableau III.6 : densité apparente sur le EMBAL 1

Largeur l_f (m)	Appui F_a (N.m ⁻¹)	Tension $[\sigma_\theta]_0(r,r) \text{ MPa}$	Vitesse V (m.s ⁻¹)	Expérience		Modèle	
				D_a	e_a (μm)	D_a	e_a (μm)
2,1	850	6,5	7,5	1,28	1,08	1,303	0,85
2,1	700	10,5	6,7	1,32	0,68	1,316	0,72
0,53	600	5,0	6,7	1,29	0,98	1,296	0,92
0,66	700	6,5	6,7	1,31	0,78	1,303	0,85

Les résultats sont en bon accord entre eux. Cela confirme que l'effet de la largeur a été pris en compte de manière satisfaisante.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce premier paragraphe des résultats expérimentaux issus du prototype d'enroulement et des découpeuses des lignes industrielles.

La validation du modèle avec ces résultats se heurte à de *nombreuses difficultés* directement liées au manque de moyens de caractérisation du film enroulé. Nous avons privilégié l'*épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air* pour plusieurs raisons :

- *facilité* de la mesure,
- *sensibilité aux conditions du procédé et aux propriétés pertinentes du film*,
- conséquence directe de la *prise en compte des effets aérodynamiques dans le modèle*.

Les validations ont porté sur les résultats du *prototype d'enroulement*, ceux issus des machines industrielles n'étant présents qu'à titre illustratif.

Les prédictions du modèle sont en *bon accord* avec les résultats expérimentaux obtenus sur le prototype dans un large domaine de variation des dimensions du rouleau, des propriétés mécaniques du film et des conditions d'enroulement. Le bon accord obtenu pour des rouleaux de largeurs différentes indique également que la modélisation de l'échappement de l'air et les conditions d'extrapolation sont satisfaisantes.

Nous avons observé que les effets de la force linéique d'appui prédits par le modèle sont plus faibles qu'en réalité. GOOD [1992] pense que la force linéique d'appui induit une surtension. Ce phénomène n'ayant pas été pris en compte, il pourrait expliquer les écarts.

L'état des contraintes internes a pu être validé *qualitativement* sur la base de la *tension résiduelle* et de la *contrainte radiale sur le mandrin*. Toutefois, l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air est une grandeur qui dépend au premier ordre des conditions globales de l'enroulement.

L'épaisseur moyenne de la couche résiduelle dépend directement de l'état des contraintes résiduelles. Nous admettons donc que *l'état des contraintes résiduelles prédit par le modèle est validé*.

On remarquera également que ces résultats expérimentaux indiquent que la vitesse, la force linéique d'appui, la tension résiduelle et le niveau de rugosité du film ont des *effets du même ordre de grandeur* sur l'épaisseur moyenne et que la tension réelle est effectivement inférieure à la tension nominale d'enroulement.

B.) Exploitation du modèle

Introduction

Nous nous proposons dans ce second paragraphe de simuler avec le modèle diverses configurations et d'analyser l'ensemble des résultats obtenus. Nous distinguerons les étapes suivantes :

- *analyse des profils* d'épaisseur de la couche résiduelle d'air e_a et d'état des contraintes résiduelles σ_r , σ_θ , $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ et σ_z : §B.1
- *étude de la sensibilité relative aux différents paramètres* du procédé et du film : §B.2.
- *étude de l'influence de l'évolution des paramètres du procédé pendant l'enroulement* : croissance ou décroissance de la force linéique d'appui F_a , de la tension $[\sigma_\theta]_0(r, r)$: §B.3.

B.1) Analyse de l'état global du rouleau

Introduction

Avant d'aborder de manière détaillée une analyse comparative de l'influence des différents paramètres, nous nous proposons d'étudier les profils suivants :

- épaisseur résiduelle d'air e_a ,
- tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$,
- contraintes σ_r , σ_θ et σ_z ,
- contrainte de cisaillement radial/tangentiel $\tau_{r\theta}$.

Nous nous intéresserons à l'état global qui résulte de la superposition de la dernière couche de film.

B.1.a.) Conditions testées

Il s'agit du film polyester destiné à l'application d'enduction magnétique précédemment étudié : VIDÉO 1. Les conditions de l'enroulement sont :

- vitesse $V = 6 \text{ m.s}^{-1}$ avec accélération $= 0,005 \text{ m.s}^{-2}$ pendant la phase initiale et la phase terminale,
- tension réelle $[\sigma_\theta]_0(r, r) = 10 \text{ MPa}$, constante pendant l'enroulement,
- force linéique d'appui $F_a = 1000 \text{ N.m}^{-1}$, constante pendant tout l'enroulement.

Dans ces conditions d'enroulement, la densité apparente D_a prédite par le modèle est de 1,365, ce qui conduit à une épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air e_a de 0,251 μm .

Nous continuerons à donner des résultats avec 3 décimales afin de mieux quantifier les écarts.

B.1.b.) Profil de l'épaisseur de la couche d'air

Nous avons reporté sur la figure III.3 le profil de l'épaisseur des couches d'air piégée, résiduelle et d'équilibre. La variable utilisée en abscisse est la longueur courante du film ou le rayon du rouleau.

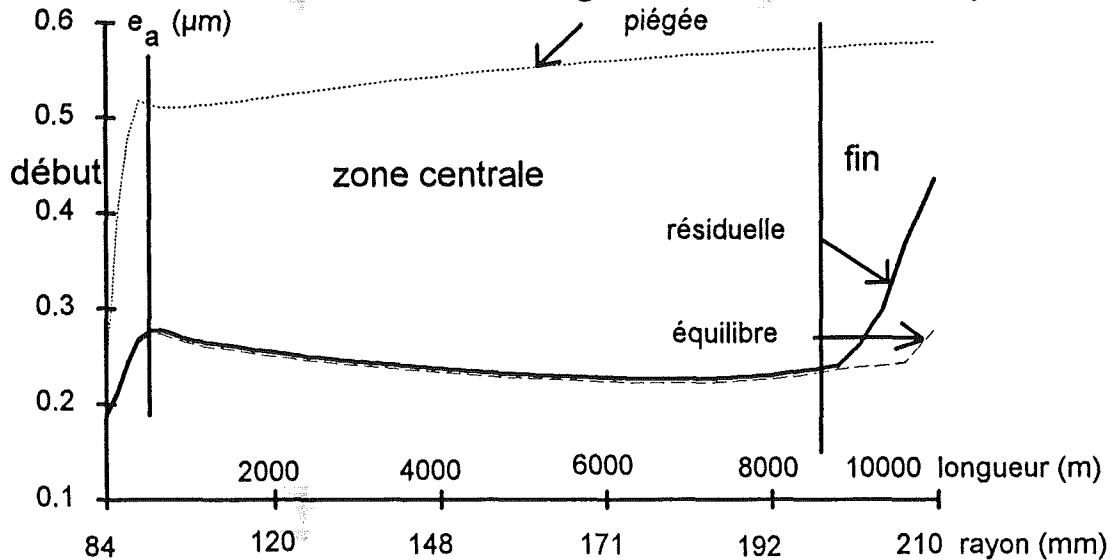


Figure III.3 : profil de l'épaisseur des couches piégée, résiduelle et d'équilibre

Nous pouvons globalement distinguer trois zones distinctes dans ces profils :

→ *près du mandrin* (0 → 600 m)

l'épaisseur des couches piégée et résiduelle augmente assez rapidement : $0,20 \rightarrow 0,52 \mu\text{m}$ et $0,20 \rightarrow 0,28 \mu\text{m}$. Cela traduit la très rapide augmentation de l'épaisseur de la couche d'air entraînée associée à la phase d'accélération au démarrage.

→ *la zone principale* (600 → 8000 m)

l'épaisseur de la couche piégée augmente sensiblement : $0,50 \rightarrow 0,55 \mu\text{m}$.

l'épaisseur de la couche résiduelle est constante ou décroît sensiblement : $0,28 \rightarrow 0,24 \mu\text{m}$.

Il s'agit d'une zone globale d'équilibre où l'air ne s'échappe plus. La valeur moyenne est essentiellement gouvernée par la valeur de la contrainte radiale de compression σ_r et par la topographie de surface (fonction $f_{\text{équil}}$).

→ *la zone extérieure* (8000 → 10000 m)

l'épaisseur de la couche résiduelle augmente assez rapidement : $0,24 \rightarrow 0,45 \mu\text{m}$. Deux phénomènes dont les effets sont opposés gouvernent l'évolution de l'épaisseur de la couche résiduelle dans cette zone :

- la diminution de la vitesse V implique une réduction de l'épaisseur de la couche entraînée e_e
- la décroissance rapide de la contrainte radiale σ_r (voir ci-après) implique une réduction de l'épaisseur de la couche d'air évacuée : Δe_e

La différence des deux augmente, ce qui traduit la prépondérance du second effet sur le premier.

Il s'agit d'une zone instable dans un état hors équilibre car l'air entraîné ne s'est pas encore évacué.

La "pente" de cette zone $\partial e_a / \partial l$ est d'autant plus élevée que l'air s'échappe rapidement : elle caractérise donc directement l'aptitude du film à échapper l'air (fonction f_{trans}).

Afin de mieux illustrer cette zone transitoire, nous avons reporté sur la figure suivante l'évolution de l'épaisseur de la couche d'air située à $l = 5000\text{m}$ (ou $r = 165\text{ mm}$) :

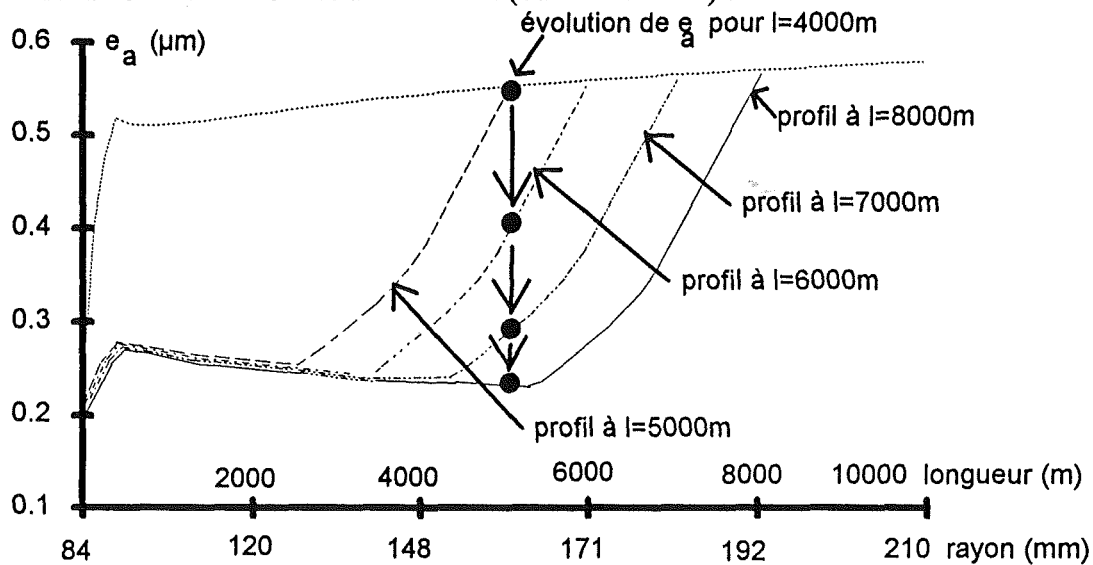


Figure III.4 : évolution de l'épaisseur de la couche d'air située à 5000 m

L'épaisseur de la couche d'air est de $0,50\text{ }\mu\text{m}$ au moment de sa superposition ($l = 5000\text{ m}$ et $r = 165\text{ mm}$). Elle décroît ensuite assez rapidement pour atteindre sa valeur d'équilibre lorsque $l = 8000\text{ m}$ ou $r = 200\text{ mm}$. Elle reste ensuite à peu près stable.

Nous pouvons donc distinguer deux parties dans le rouleau : le cœur et la croûte extérieure :

- le cœur correspond à une zone stable : l'air ne s'échappe plus,
- la croûte extérieure correspond à une zone instable où l'air s'échappe encore :

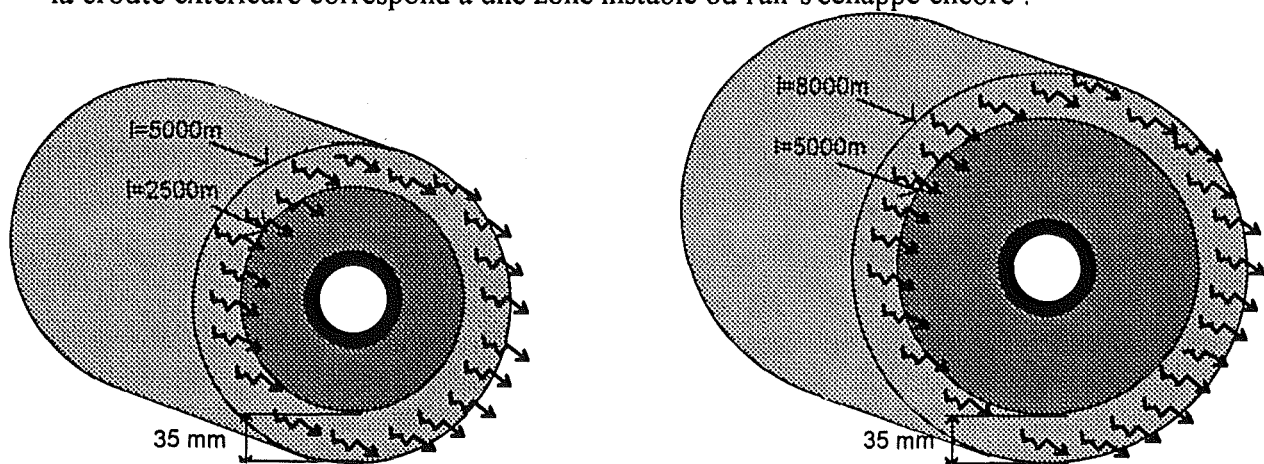


Figure III.5 : séparation du rouleau en cœur et en croûte extérieure

L'épaisseur de cette croûte, constante pendant l'enroulement a été ici estimée à 35 mm . Elle dépend des conditions globales de l'enroulement et de l'aptitude du film à échapper l'air (fonction f_{trans}).

B.1.c.) Profil des contraintes résiduelles

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier le profil général de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{\text{rf}})$ et des quatre contraintes (σ_r , σ_θ , σ_z et $\tau_{r\theta}$) dans le rouleau. Elles sont calculées dans l'hypothèse des déformations planes et du module radial E_r uniforme.

Profil de la tension résiduelle

Nous avons reporté sur la figure III.6 l'évolution de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0$ dans le rouleau :

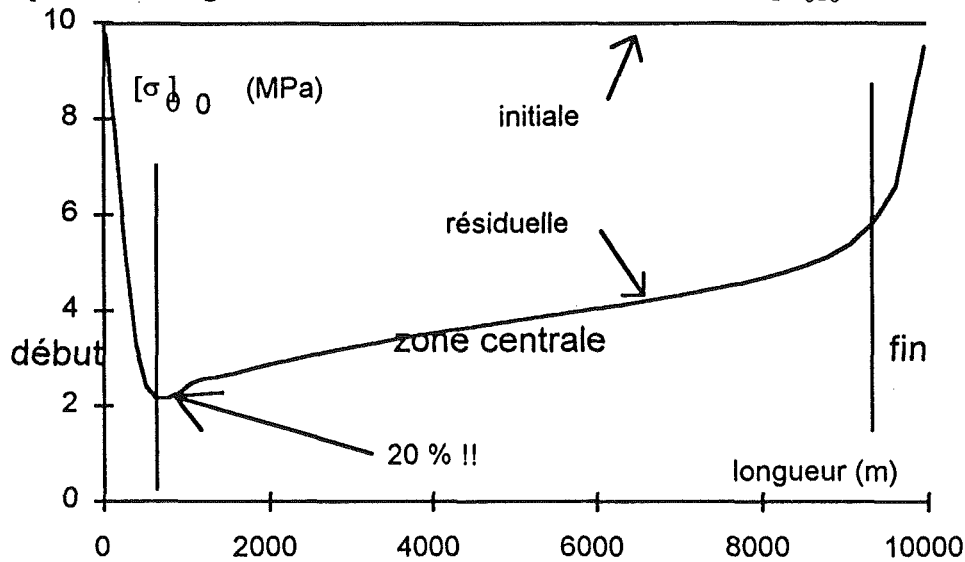


Figure III.6 : profil des tensions initiale $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ et résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$

Rappelons que la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ est supposée constante et égale à 10 MPa. L'écart entre cette valeur initiale et la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ est associé à l'échappement partiel de l'air sous les spires inférieures. Nous pouvons de nouveau globalement distinguer trois zones distinctes dans le profil de la tension résiduelle :

→ près du mandrin :

$[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ est relativement élevée puis décroît rapidement : $10 \rightarrow 2,0$ MPa.

La valeur initiale est exactement égale à la tension d'enroulement car il ne peut y avoir d'échappement d'air sous cette première couche de film. Ensuite, l'augmentation du nombre de spires inférieures se traduit par une augmentation de l'échappement de l'air, donc une diminution de la tension résiduelle.

On remarquera que la valeur minimale de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ est faible par rapport à la valeur nominale (seulement 20%), ce qui traduit l'importance de l'échappement de l'air.

→ dans la zone principale :

$[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ augmente sensiblement : $2,0 \rightarrow 5,0$ MPa. Elle reste toutefois globalement faible par rapport à la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$: 20 à 50% de celle-ci.

Nous pouvons remarquer que la courbe de tension résiduelle est relativement dissymétrique : le minimum de la tension est très près du mandrin : vers 1000 m.

La tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ dépend directement de l'échappement de l'air. Or, deux phénomènes ont pour effet d'augmenter cet échappement :

- l'augmentation du nombre des spires inférieures,
- l'augmentation de σ_r , donc l'augmentation du nombre de spires supérieures.

Le minimum à 1000 m représente donc le meilleur compromis entre ces deux effets.

→ dans la zone extérieure :

la tension résiduelle augmente rapidement : 5,0 → 10,0 MPa.

La valeur finale de la tension résiduelle est exactement égale à la tension d'enroulement car il n'y pas de compression radiale sur la dernière couche de film.

Profil de la contrainte radiale

Nous avons reporté sur la figure III.7 l'évolution de la contrainte radiale σ_r dans le rouleau :

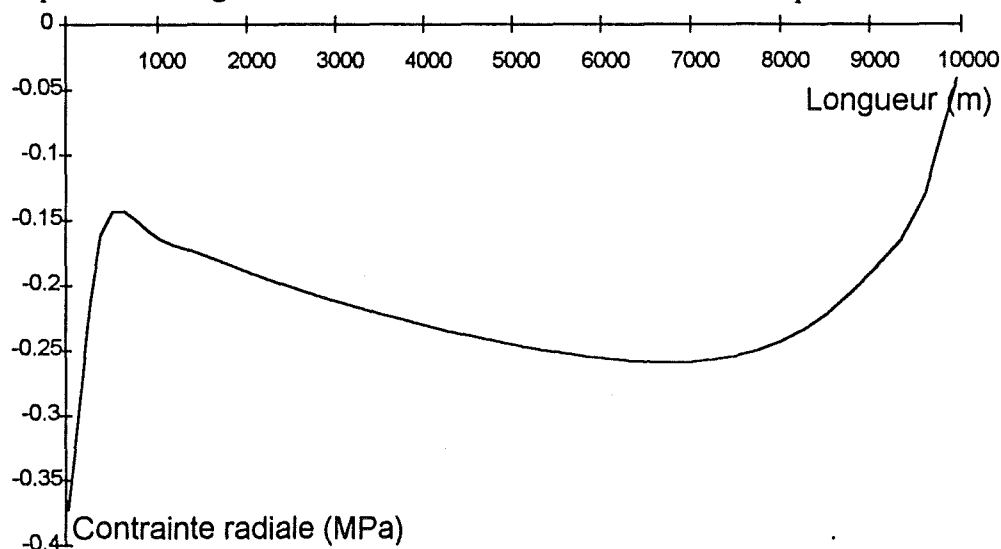


Figure III.7 : Profil de la contrainte radiale σ_r

Celle-ci est toujours négative : le film est en **compression radiale**. Nous pouvons de nouveau globalement distinguer dans ce profil les trois zones mises en évidence précédemment.

→ près du mandrin :

σ_r décroît rapidement en valeur absolue : -0,40 → -0,15 MPa. La valeur initiale est principalement gouvernée par les propriétés mécaniques du mandrin et par la tension d'enroulement des premières couches.

La contrainte radiale sur le mandrin n'est donc pas représentative des conditions globales de l'enroulement.

La mesure de σ_r près du mandrin par quelque moyen que ce soit ne représente donc pas un test réellement pertinent.

→ dans la zone principale :

σ_r croît assez sensiblement en valeur absolue : -0,15 → 0,22 MPa. Cette légère croissance doit être rapprochée de la légère croissance de la tension résiduelle dans cette zone.

On notera essentiellement l'ordre de grandeur de la contrainte radiale σ_r : 1,5 à 2,5 fois la pression atmosphérique.

→ dans la zone extérieure :

σ_r décroît rapidement jusqu'à zéro. Pour les dernières couches, la contrainte de compression est pratiquement proportionnelle au nombre de couches supérieures.

Profil de la contrainte tangentielle

Nous avons reporté sur la figure III.8 l'évolution de la contrainte tangentielle σ_θ dans le rouleau :

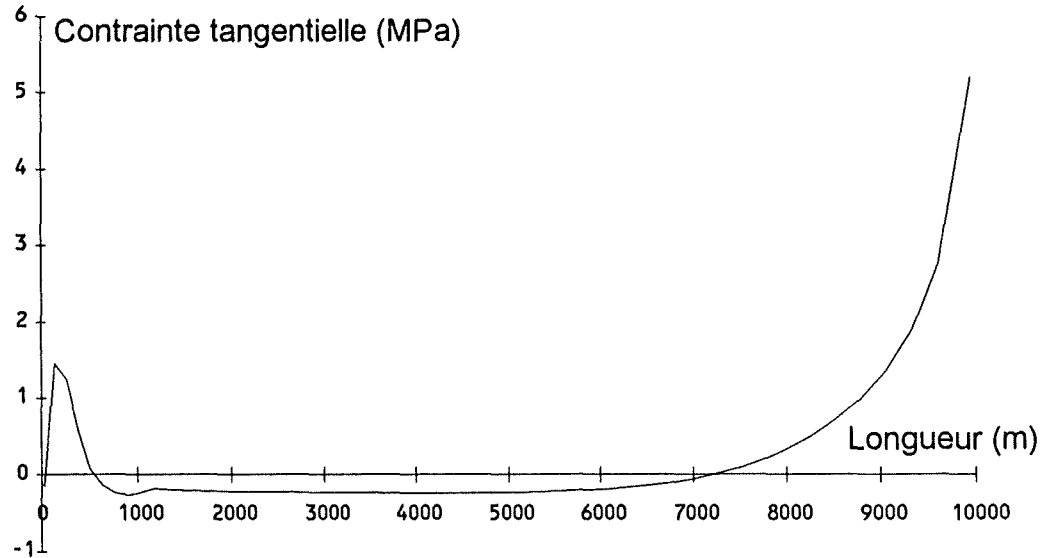


Figure III.8 : profil de la contrainte tangentielle σ_θ

σ_θ peut être négative ou positive : le film peut donc être dans un état de *compression ou de tension tangentielle*.

Nous pouvons de nouveau globalement distinguer trois zones distinctes dans le profil :

→ *près du mandrin* :

σ_θ est positive (*tension*) avec un maximum voisin de 1,5 MPa. Il s'agit de nouveau d'un effet de report des propriétés mécaniques du mandrin.

→ *dans la zone principale* :

σ_θ est négative (*compression*) et à peu près constante : -0,24 MPa.

Il est surtout intéressant de remarquer que l'*application d'un état de tension relativement important* ($[\sigma_\theta]_0(r,r) = +10$ MPa) se traduit finalement, au cœur du rouleau par un *état de compression sensible* ($\sigma_\theta = -0,2$ MPa).

→ *dans la zone extérieure* :

σ_θ redevient positive (*tension*) et croît rapidement : -0,24 → +5,5 MPa.

Rappelons que la contrainte tangentielle du film est la somme de la tension résiduelle et de la contrainte élastique de compression. Or, cette dernière est nulle pour les spires extérieures : la valeur finale de σ_θ est donc directement reliée à la valeur de la tension d'enroulement du film.

Profil de la contrainte axiale

Nous avons reporté sur la figure III.9 l'évolution de la contrainte axiale dans le rouleau.

Celle-ci est bien sûr établie dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes (elle est nulle dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes). σ_z apparaît alors comme une combinaison linéaire des contraintes σ_r et $\sigma_\theta - [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ (uniquement les composantes élastiques).

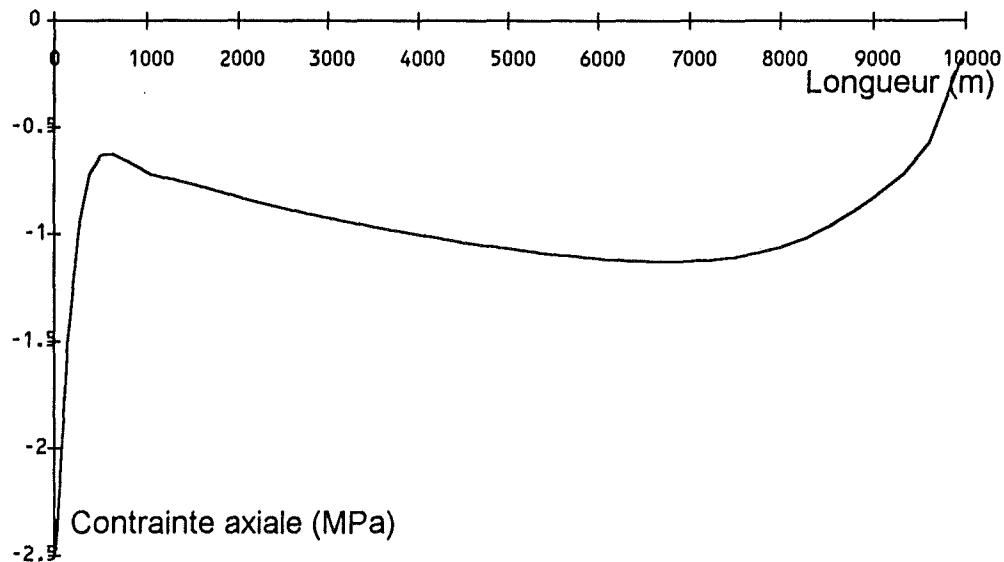


Figure III.9: profil de la contrainte axiale σ_z

Celle-ci est toujours négative : le film est donc toujours en **compression axiale**.

Comme pour les autres contraintes, nous pouvons distinguer les mêmes zones :

→ **près du mandrin :**

σ_z est très élevée puis décroît rapidement en valeur absolue : $-2,70 \rightarrow -0,70$ MPa. La valeur initiale est de nouveau principalement gouvernée par les propriétés mécaniques du mandrin.

→ **dans la zone principale :**

σ_z est constante ou croît assez sensiblement en valeur absolue : $-0,70 \rightarrow -1,20$ MPa.

→ **dans la zone extérieure :**

σ_z décroît rapidement en valeur absolue jusqu'à zéro. La contrainte axiale de la dernière couche est normalement nulle puisque celle-ci est libre en déplacement.

Profil de la contrainte de cisaillement radiale/tangentielle

Nous avons reporté sur la figure III.10 l'évolution $\tau_{r\theta}$ au moment où la longueur de film enroulé est de 3000 puis 6000 m. Rappelons en effet que celle-ci est proportionnelle au couple d'enroulement : elle est donc nulle après l'enroulement dans tout le rouleau.

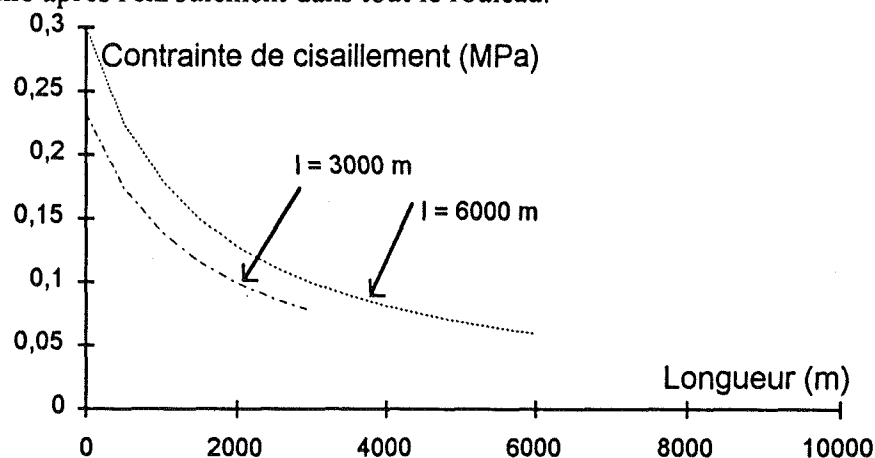


Figure III.10: profil de la contrainte de cisaillement radiale/tangentielle $\tau_{r\theta}$

Elle présente une forme géométrique simple : puissance -2 du rayon du rouleau (§A.2.i. du chapitre I). En un point donné, elle augmente au fur et à mesure de l'enroulement. En revanche, sa valeur au niveau de la dernière couche de film enroulée décroît au fur et à mesure de l'enroulement.

B.2.) Sensibilité aux valeurs nominales

Introduction

Dans le §B.1, nous avons discuté de la *forme globale* des différents profils. Nous nous proposons de comparer les *effets absolus* de chacune des quatre principales grandeurs suivantes :

- le niveau du palier de vitesse V ,
- le niveau de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$,
- le niveau de la force linéique d'appui F_a ,
- le niveau moyen de la hauteur des rugosités h_0 (paramètre de la fonction $f_{\text{équil}}$).

B.2.a.) Conditions testées

Nous avons choisi de reprendre le film et les conditions globales de l'enroulement du paragraphe précédent (film VIDÉO 1). A partir de ce jeu de paramètres, nous avons construit quatre nouvelles conditions définies par un écart sensible autour de chaque valeur nominale :

Tableau III.7 : conditions de la simulation

Condition	Vitesse V (m.s ⁻¹)	Tension $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ (MPa)	Force linéique d'appui F_a (N.m ⁻¹)	Rugosité h_0 (μm)
Nominale	6,0	10,0	1000,0	0,500
Augmentation de la vitesse V	7,2 (+20%)	10,0	1000,0	0,500
Diminution de tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$	6,0	8,0 (-20%)	1000,0	0,500
Diminution de la force linéique d'appui F_a	6,0	10,0	800,0 (-20%)	0,500
Augmentation de rugosité h_0	6,0	10,0	1000,0	0,600 (+20%)

B.2.b.) Résultats au milieu du rouleau

Nous avons reporté sur le tableau III.8 les valeurs de la densité apparente D_a du rouleau et celle de l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air e_a .

Nous y avons également reporté la valeur de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air et celles des contraintes résiduelles pour la couche de film située à 4000 m, représentative du milieu du rouleau.

Nous continuons à écrire les valeurs numériques avec 3 décimales. La dernière est bien sûr difficilement représentative, mais elle permet de mieux apprécier les écarts qui sont parfois assez faibles.

Tableau III.8 : Résultats moyens et à 4000 m

Condition	valeurs moyennes		résultats à 4000 m				
	D_a	e_a (μm)	e_a (μm)	$[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ (MPa)	σ_r (MPa)	σ_θ (MPa)	σ_z (MPa)
Nominale	1,365	0,249	0,234	3,551	-0,236	-0,243	-1,166
Augmentation de la vitesse V	1,364	0,262 (+11%)	0,262 (+12%)	2,779 (-22%)	-0,172 (-27%)	-0,206 (-15%)	0,913 (-22%)
Diminution de la tension $[\sigma_\theta]_0(r, r)$	1,361	0,286 (+15%)	0,276 (+16%)	2,453 (-31%)	-0,145 (-38%)	-0,1520 (-37%)	-0,793 (-32%)
Diminution de la force linéique d'appui F_a	1,366	0,241 (+3%)	0,241 (+3%)	3,365 (+5%)	-0,221 (-7%)	-0,231 (-5%)	-1,104 (-5%)
Augmentation de la rugosité h_0	1,363	0,273 (+15%)	0,273 (+16%)	4,062 (+14%)	-0,257 (+9%)	-0,232 (-2%)	1,314 (+13%)

Nous nous proposons maintenant de discuter ces valeurs et de comparer les différentes courbes d'épaisseur résiduelle de la couche d'air et de contraintes résiduelles.

B.2.c.) Epaisseur de la couche résiduelle d'air

D'après le tableau III.7, les variations $\Delta V = +20\%$, $\Delta[\sigma_\theta]_0(r, r) = -20\%$ et $\Delta h_0 = +20\%$ induisent une augmentation moyenne de 10 à 15% de l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle.

En revanche, $\Delta F_a = -20\%$ se traduit par une augmentation moins sensible de l'épaisseur moyenne (+3%). Rappelons que nous avons observé (§A.) que l'épaisseur prédite présentait de plus faibles variations que l'épaisseur réelle en fonction de F_a : cette plus faible variation (3%) peut donc être attribuée au *manque de sensibilité du modèle actuel à la force linéique d'appui*.

L'augmentation de l'épaisseur résiduelle est un résultat tout à fait cohérent :

- si la vitesse V augmente, l'épaisseur de la couche d'air entraînée e_e augmente, donc l'épaisseur de la couche d'air résiduelle e_a augmente,
- si la tension $[\sigma_\theta]_0(r, r)$ diminue, l'épaisseur de la couche d'air évacuée Δe_e diminue, donc l'épaisseur de la couche d'air résiduelle e_a augmente,
- si la force linéique d'appui F_a diminue, l'épaisseur de la couche d'air entraînée e_e augmente, donc l'épaisseur de la couche d'air résiduelle e_a augmente,
- si le niveau de rugosité h_0 augmente, l'épaisseur de la couche d'air d'équilibre (fonction $f_{\text{équil}}$) sera plus élevée, donc l'épaisseur de la couche d'air résiduelle e_a sera plus élevée.

Nous obtenons le même sens de variation de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air e_a pour :

- une **augmentation** de vitesse V,
- une **diminution** de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r, r)$,
- une **diminution** de la force linéique d'appui F_a ,
- une **augmentation** du niveau de rugosité h_0 .

La figure III.11 explicite les différents profils de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air e_a :

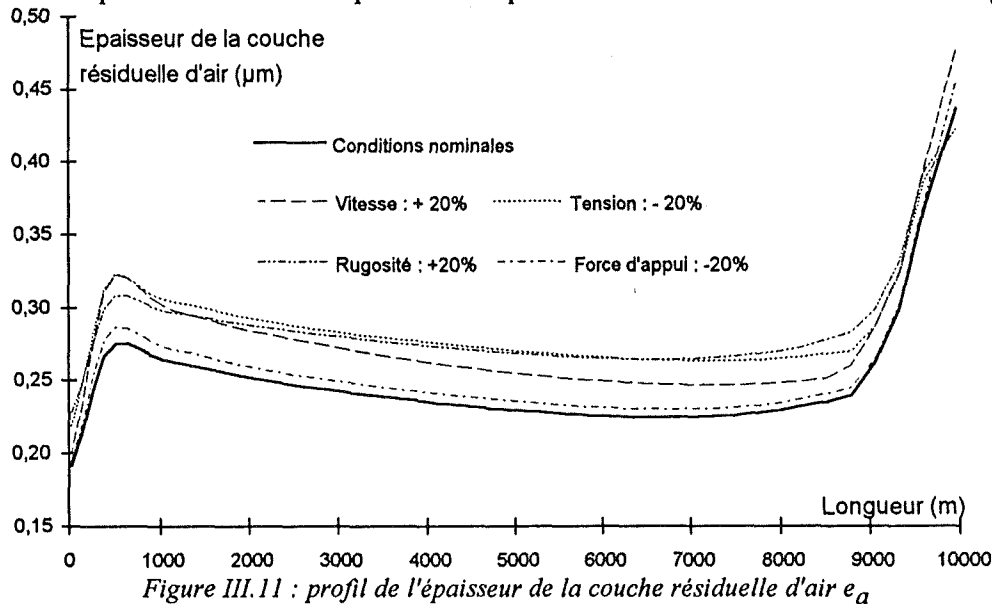


Figure III.11 : profil de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air e_a

L'évolution des différents profils est globalement équivalente. Nous retrouvons les mêmes conclusions générales que celles obtenues précédemment pour la couche située au point 4000 m. Seules l'augmentation de la vitesse et la diminution de l'appui se traduisent par une plus faible épaisseur de la couche d'air des dernières couches.

B.2.d.) Etat des contraintes résiduelles

Tension résiduelle

D'après le tableau III.7, la variation $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$ se traduit par la plus forte baisse de la tension résiduelle : -31%. Elle est supérieure à 20% : la **tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ diminue plus rapidement que la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$: il y a un effet non linéaire.**

La variation $\Delta V = +20\%$ se traduit également par une diminution importante de la tension résiduelle (-22%) que l'on peut attribuer au fait qu'une plus grande quantité d'air entraînée induit une plus grande quantité d'air évacuée, donc une plus grande diminution de la tension.

La diminution de la force linéique d'appui $\Delta F_a = -20\%$ se traduit par une très légère augmentation de la tension résiduelle : +5%. On attribuera cette plus faible augmentation aux mêmes éléments que précédemment. La diminution de la force linéique d'appui a deux effets principaux sur les épaisseurs des couches d'air entraînée et évacuée :

→ elle induit une **augmentation de la quantité d'air entraînée**. Cela doit faciliter l'évacuation ultérieure de l'air sous l'action conjuguée de la contrainte radiale de compression et de la force linéique d'appui. La tension résiduelle $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$ doit donc diminuer.

→ elle induit une **diminution de la quantité d'air évacuée** due à la force linéique d'appui, ce qui a pour effet d'augmenter la tension résiduelle $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,R_{rf})$.

L'augmentation de la tension résiduelle indique que le second effet est prépondérant sur le premier.

L'augmentation du niveau moyen des rugosités de $\Delta h_0 = +20\%$ se traduit par une augmentation de la tension résiduelle. Cela s'interprète comme pour l'épaisseur de la couche résiduelle d'air par une baisse de la quantité d'air évacuée due à une valeur de l'épaisseur d'équilibre de la couche d'air plus élevée.

Il est important de remarquer que cette fois toutes les variations étudiées n'agissent pas dans le même sens : *il n'y a pas d'équivalence qualitative entre une diminution de la tension et une diminution de la force linéique d'appui* par exemple.

Nous obtenons le même sens de variations de la tension résiduelle pour :

- une **augmentation** de vitesse V ,
- une **diminution** de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$,
- une **diminution** de la force linéique d'appui F_a ,
- une **augmentation** du niveau de rugosité h_0 .

Nous avons reporté sur la figure III.12 les différents profils de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$:

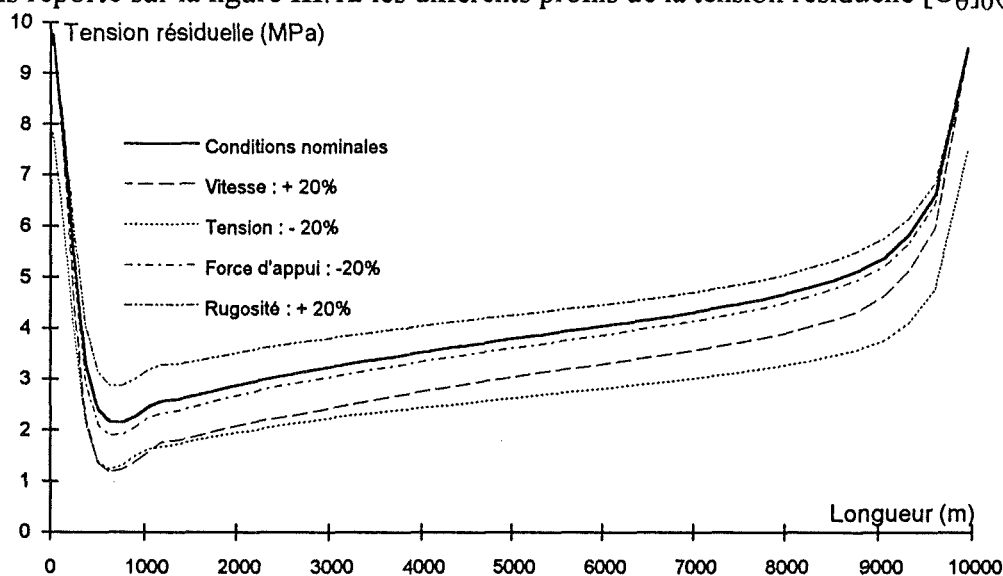


Figure III.12 : profil de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$

Nous retrouvons globalement les mêmes conclusions que pour la couche située au point 4000 m.

On remarquera en particulier que la tension résiduelle présente une **plus grande uniformité** dans la zone centrale lorsque la tension est plus faible ou bien lorsque la rugosité est plus importante.

Les niveaux initial et final de la tension résiduelle restent les mêmes sauf pour $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$. Ils ne dépendent donc que de la tension d'enroulement.

Contrainte radiale

D'après le tableau III.7, les variations $\Delta V = +20\%$ et $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$ se traduisent par une diminution très importante de la contrainte radiale de compression (-27 et -38%) : il y a un **effet non-linéaire**. On peut attribuer cette forte baisse de la contrainte radiale à la forte baisse de la tension résiduelle observée au paragraphe précédent.

On remarquera que celle-ci n'est pas linéaire ($\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -22\% \rightarrow \Delta\sigma_r = -27\%$ et $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -31\% \rightarrow \Delta\sigma_r = -38\%$) : la baisse de σ_r est plus importante que la baisse de tension résiduelle ! Une baisse de la tension d'enroulement de 20% a des effets en termes de contrainte radiale deux fois plus important : -37%. Nous retrouvons les mêmes effets non linéaires.

La variation $\Delta F_a = -20\%$ se traduit par une diminution plus faible de la contrainte radiale σ_r : -7%. On pourrait s'attendre à une augmentation de la contrainte radiale puisque la tension résiduelle est plus élevée. En réalité, le fait que l'épaisseur de la couche résiduelle soit plus grande est prépondérant.

En revanche, la variation $\Delta h_0 = +20\%$ se traduit par une augmentation sensible de la contrainte radiale σ_r : +9%. Ce résultat doit être relié à l'augmentation de la tension résiduelle.

On remarquera une nouvelle fois la **non-équivalence** même qualitative entre les variations étudiées. Nous obtenons le même sens de variation de la contrainte radiale pour :

- une **augmentation** de vitesse V ,
- une **diminution** de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$,
- une **diminution** de la force linéique d'appui F_a ,
- une **augmentation** du niveau de rugosité h_0 .

Nous avons reporté sur la figure III.13 les différents profils de la contrainte radiale de compression :

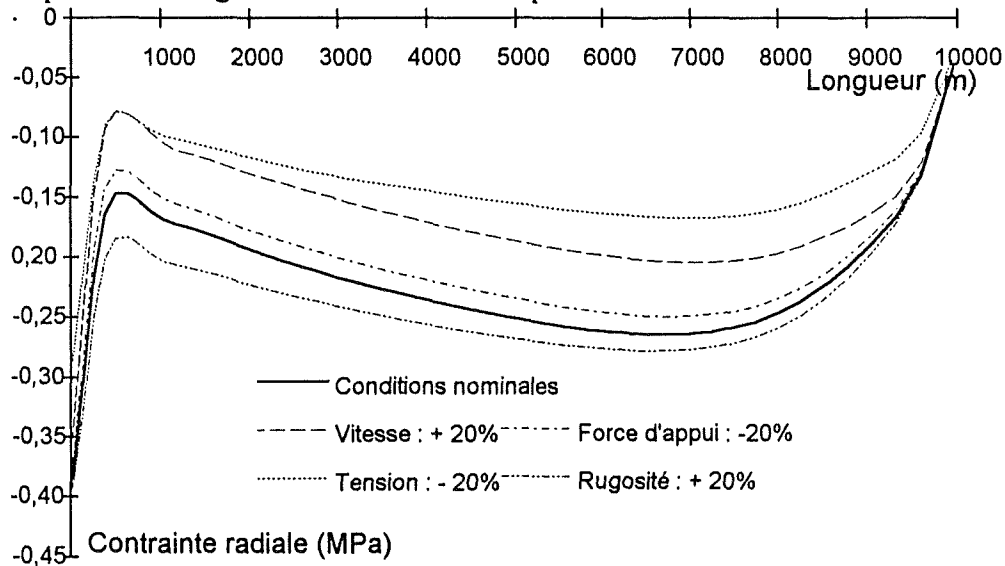


Figure III.13 : profil de la contrainte radiale σ_r

σ_r présente des variations plus faibles dans la zone centrale lorsque la force linéique d'appui ou la tension est plus faible. Le niveau sur le mandrin reste identique sauf pour $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$: il ne varie qu'avec $[\sigma_\theta]_0(r,r)$.

Contrainte tangentielle

D'après le tableau III.7, les trois variations $\Delta V = +20\%$, $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$ et $\Delta F_a = -20\%$ se traduisent par une diminution (en valeur absolue) de la contrainte tangentielle.

Cette diminution est très importante dans le cas de la diminution de tension (-37%) et relativement importante dans le cas de l'augmentation de la vitesse (-15%).

Elle reste faible dans le dernier cas (-5%), probablement toujours pour les mêmes raisons. Ces variations doivent être globalement rapprochées de variations déjà observées sur la contrainte radiale σ_r .

$\Delta h_0 = +20\%$ se traduit également par une baisse sensible de la contrainte tangentielle.

Nous avons les mêmes sens de variation que pour σ_r , c'est à dire une équivalence entre :

- une **augmentation** de vitesse V ,
- une **diminution** de la tension $[\sigma_\theta]_0(r,r)$,
- une **diminution** de la force linéique d'appui F_a ,
- une **augmentation** du niveau de rugosité h_0 .

Nous avons reporté sur la figure III.14 les différents profils de la contrainte tangentielle σ_θ :

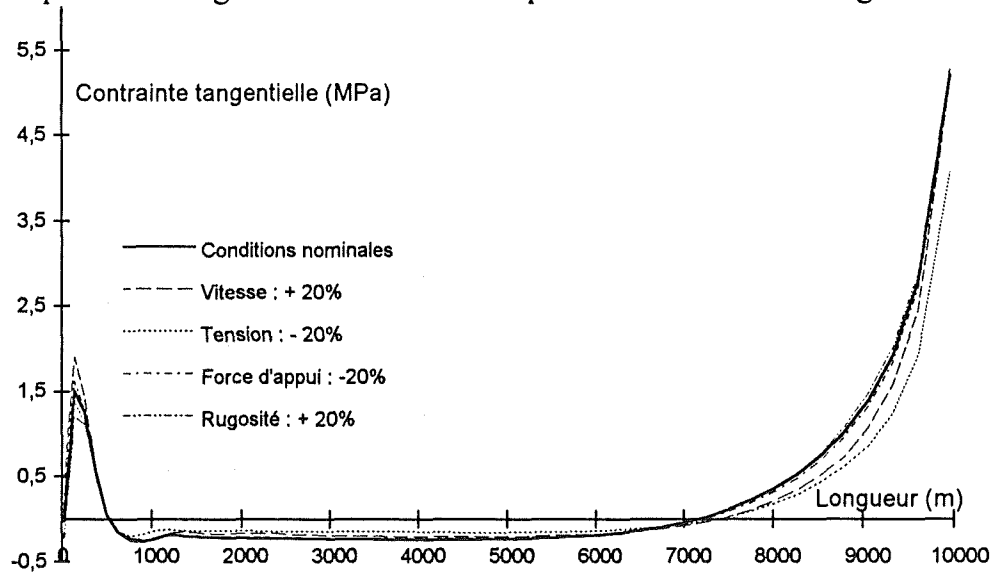


Figure III.14 : profil de la contrainte tangentielle

Les profils sont semblables sauf pour $\Delta V = +20\%$ et $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$ où nous avons une courbe plus incurvée à la fin avec un niveau de contrainte légèrement plus faible.

Le niveau plus faible de la contrainte tangentielle pour $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$ à la fin doit être relié au plus faible niveau terminal de la tension résiduelle dans ce cas.

Contrainte axiale

σ_z est bien sûr également établie dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes et apparaît alors comme une combinaison linéaire des autres contraintes élastiques σ_r et $\sigma_\theta - [\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$

Nous avons reporté sur la figure III.15 les différents profils de cette contrainte axiale σ_z :

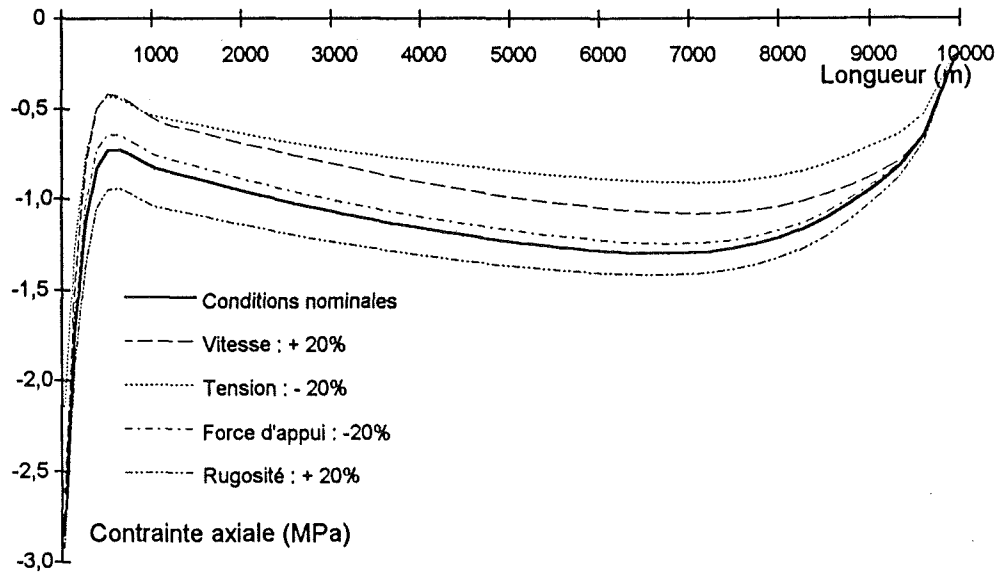


Figure III.15 : profil de la contrainte axiale

Contrainte de cisaillement

Nous avons vu que celle-ci ne dépend que de la tension d'enroulement et est directement proportionnelle à celle-ci. Elle sera donc identique pour $\Delta V = + 20\%$, $\Delta F_a = - 20\%$ et $\Delta h_0 = + 20\%$ et inférieure de 20% dans le cas $\Delta[\sigma_\theta]_0(r,r) = -20\%$.

B.3.) Sensibilité aux évolutions des paramètres

Introduction

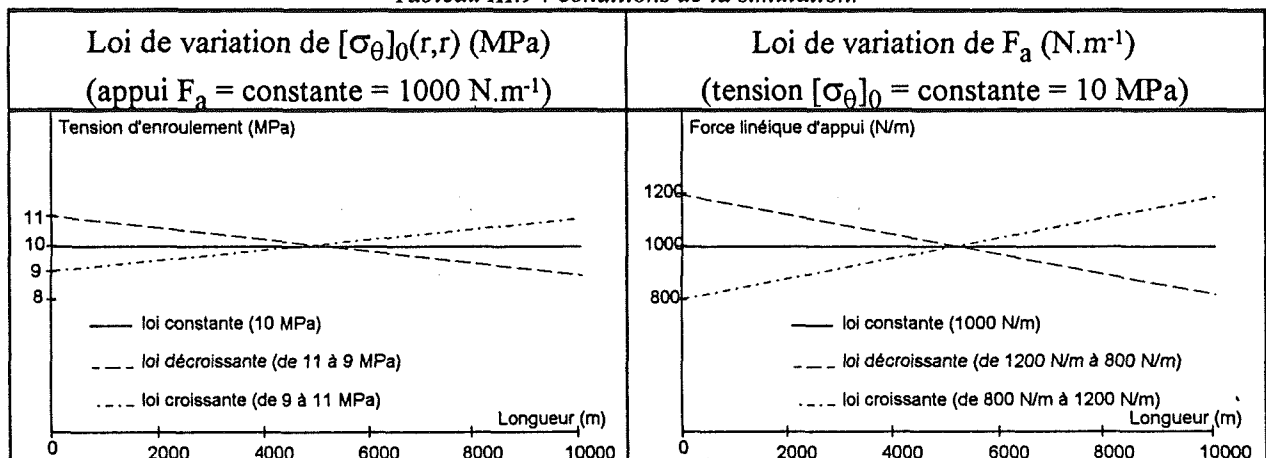
Dans le §B.2, nous avons étudié les effets de variation des valeurs nominales des quatre principales grandeurs qui gouvernent l'enroulement : vitesse, tension, appui et rugosité.

Nous nous proposons d'étudier ici les effets d'évolution pendant l'enroulement de deux grandeurs : la force linéique d'appui F_a et la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$.

B.3.a.) Conditions testées

Nous avons repris les conditions de l'enroulement du §A.3.a. (film VIDÉO 1). A partir de ce standard, nous avons construit les quatre nouvelles conditions suivantes :

Tableau III.9 : conditions de la simulation.



Ces variations de la tension nominale d'enroulement ou de la force linéique d'appui se font **autour de la valeur nominale** : 10 MPa et 1000 N.m⁻¹ afin de ne pas affecter l'état global..

Nous avons vu précédemment que les effets dus à la force linéique d'appui sont généralement plus faibles. Nous avons donc choisi de simuler de plus fortes variations : $\pm 20\%$ contre seulement $\pm 10\%$ pour la tension d'enroulement.

B.3.a.) Résultats au milieu du rouleau

Nous avons reporté sur le tableau III.10 la valeur de la densité apparente du rouleau et celle de l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air.

Nous y avons également reporté la valeur de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air et celles des contraintes résiduelles pour la couche de film située au point 4000 m, supposée être représentative du milieu du rouleau.

Comme précédemment, nous écrivons les différentes valeurs avec 3 décimales, afin de mieux pouvoir apprécier les écarts qui sont parfois assez faibles.

Remarquons que ce point ne correspond pas au point de symétrie pour lequel tension d'enroulement et force linéique d'appui retrouvent leur valeur moyenne.

Tableau III.10 : Résultats moyens et à 4000 m

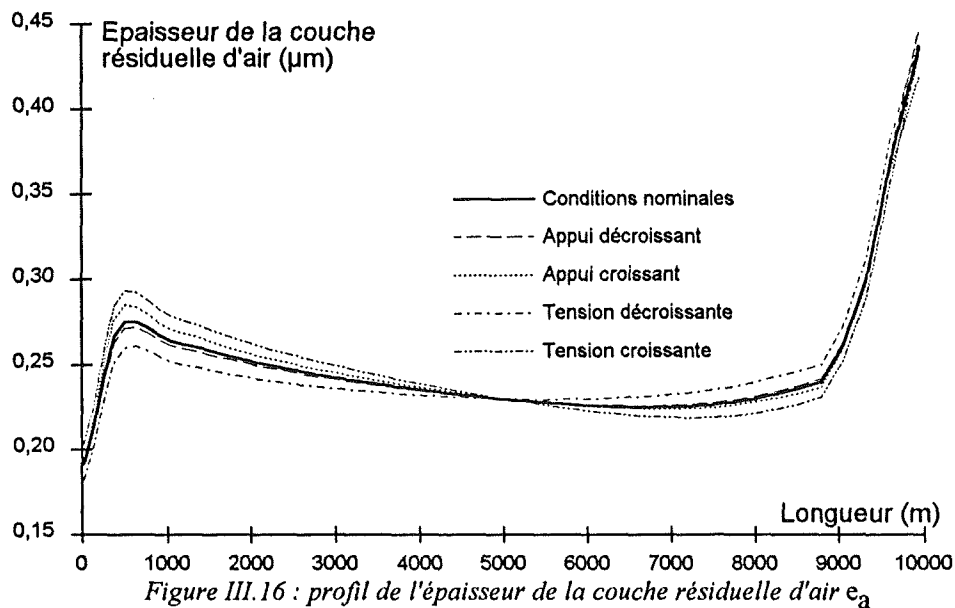
Condition	valeurs moyennes		résultats à 4000 m				
	D _a	e _a (μm)	e _a (μm)	$[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$ (MPa)	σ_r (MPa)	σ_θ (MPa)	σ_z (MPa)
Nominale	1,3654	0,249	0,234	3,551	-0,236	-0,243	-1,166
Force linéique d'appui décroissante	1,3654	0,249	0,233 (-0,5%)	3,619 (+1,9%)	-0,241 (+1,5%)	-0,228 (-5,2%)	-1,181 (+1,3%)
Force linéique d'appui croissante	1,3653	0,250	0,236 (+0,6%)	3,735 (+5,2%)	-0,233 (-1,7%)	-0,255 (+5,7%)	-1,150 (-1,4%)
Tension décroissante	1,3654	0,249	0,232 (-1,2%)	3,748 (+5,5%)	-0,246 (+3,7%)	-0,195 (-19%)	-1,207 (+3,5%)
Tension croissante	1,3653	0,250	0,238 (+1,4%)	3,364 (-5,3%)	-0,228 (-3,8%)	-0,245 (+18%)	1,127 (-3,3%)

Nous nous proposons maintenant de discuter ces valeurs et de comparer les différentes courbes d'épaisseur résiduelle de la couche d'air et de contraintes résiduelles.

B.3.b.) Epaisseur de la couche résiduelle d'air

D'après le tableau III.10, les évolutions étudiées se traduisent par des variations globales très faibles de l'épaisseur de la couche d'air résiduelle e_a.

Nous avons reporté sur la figure III.16 les profils de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air e_a :



On remarque que toutes les courbes se rencontrent au voisinage du point central situé à 5000 m, ce qui est logique compte tenu des lois d'évolution que nous avons choisies.

Une tension d'enroulement croissante ou bien une force linéique d'appui croissante se traduisent par un profil plus déséquilibré de e_a avec plus d'air près du mandrin et moins d'air près des couches extérieures.

Bien que l'évolution de la force linéique d'appui ait été choisie plus importante que celle de la tension d'enroulement ($\pm 20\%$ contre $\pm 10\%$), l'intensité de ses effets reste plus faible.

On notera essentiellement que la *décroissance de la tension d'enroulement* et dans une moindre mesure de la force linéique d'appui se traduisent par un *profil plus uniforme* dans la partie centrale.

B.3.c.) Etat des contraintes résiduelles

Tension résiduelle

D'après le tableau III.10, les variations de la tension résiduelle sont plus importantes : $\pm 5\%$.

On attribuera cet écart au fait que le point situé à 4000 m n'est pas centré : il correspond à des tensions d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ différentes :

→ $[\sigma_\theta]_0(r = 4000\text{m}, r = 4000\text{m}) = 10,2 \text{ MPa}$ pour la loi décroissante

→ $[\sigma_\theta]_0(r = 4000\text{m}, r = 4000\text{m}) = 9,8 \text{ MPa}$ pour la loi croissante.

Nous avons reporté sur la figure III.17 les différents profils de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$:

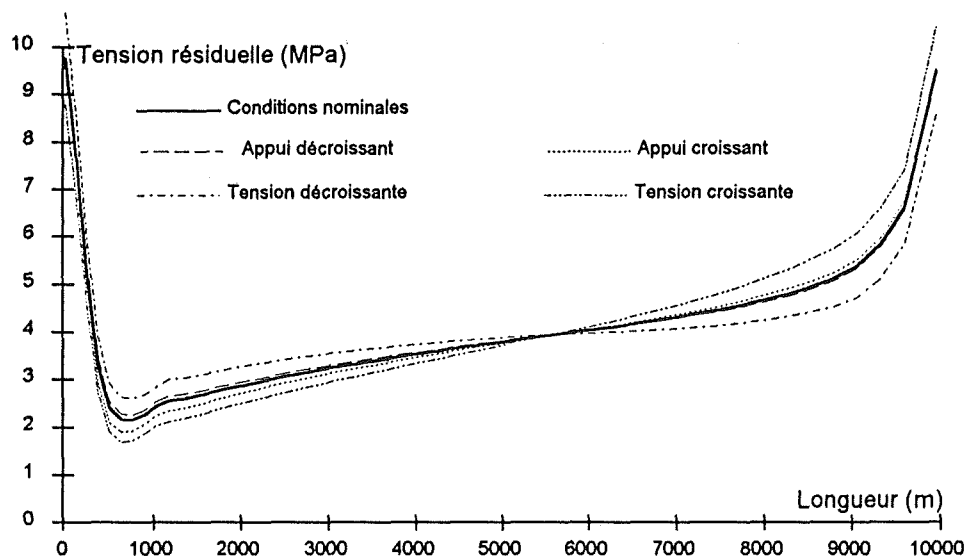


Figure III.17 : profil de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{ff})$

Nous retrouvons globalement le même point de rencontre, mais sensiblement décalé : vers 5500 m. Au maximum (vers 8500 m), l'écart atteint $\pm 11\%$ pour la décroissance ou croissance de la tension d'enroulement et $\pm 2,2\%$ pour la décroissance ou croissance de la force linéique d'appui. On retrouve de nouveau des différences plus importantes pour les évolutions de la tension d'enroulement que pour les évolutions de la force linéique d'appui.

Une tension d'enroulement croissante implique une plus forte croissance de la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{ff})$ dans la zone centrale. Ce résultat est cohérent.

La **décroissance de la tension d'enroulement** et dans une moindre mesure de la force linéique d'appui se traduisent par un **profil plus uniforme** dans la partie centrale du rouleau.

Contrainte radiale

D'après le tableau III.10, les évolutions étudiées se traduisent par des écarts voisins de 5% au point situé à 4000 m. Nous avons reporté sur la figure III.18 les différents profils de la σ_r :

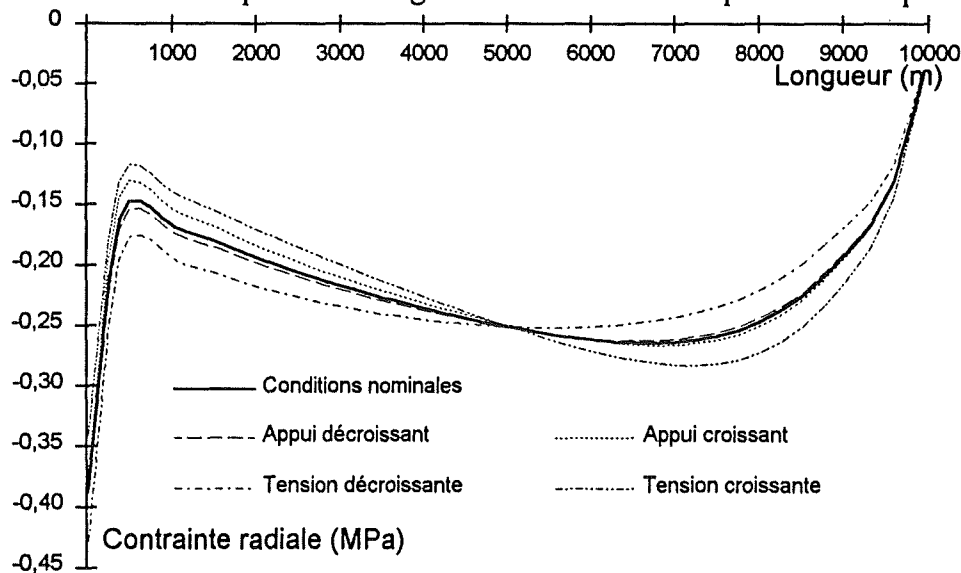


Figure III.18 : profil de la contrainte radiale

Toutes les observations précédentes restent valables. Au maximum (8500m), cet écart atteint $\pm 11,6\%$ pour la tension d'enroulement et $\pm 1,7\%$ pour la force linéique d'appui. Comme précédemment, la *décroissance de la tension d'enroulement* et dans une moindre mesure de la force linéique d'appui se traduisent par un *profil plus uniforme* dans la partie centrale du rouleau.

Contrainte tangentielle

D'après le tableau III.10, une décroissance de la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$ et de la force linéique d'appui F_a se traduisent par une diminution de la valeur de la contrainte tangentielle σ_θ : -5,2 et -18%.

Nous avons reporté sur la figure III.19 les différents profils de la contrainte tangentielle σ_θ :

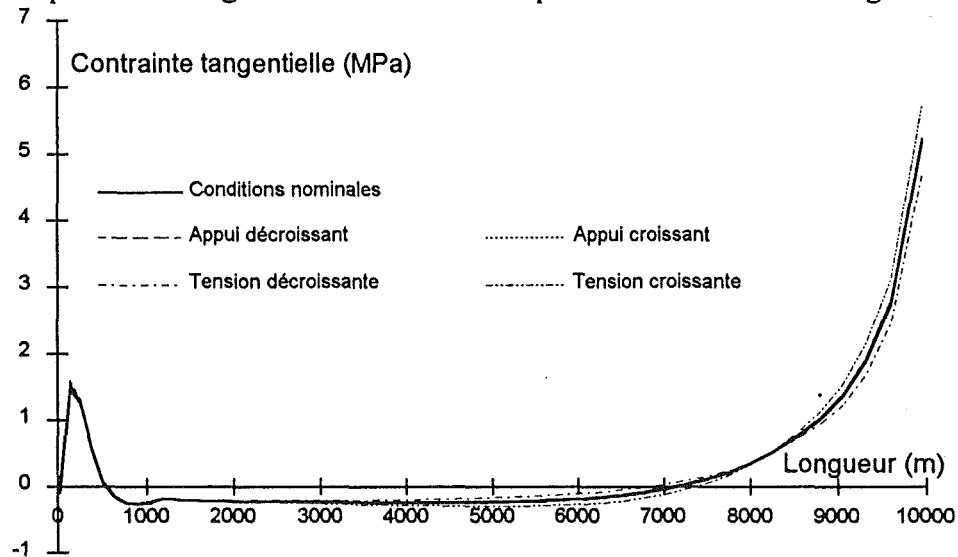


Figure III.19 : profil de la contrainte tangentielle

Cette fois, on ne note pas de point de rencontre dans la zone centrale, mais plutôt vers 8500 m.

Contrainte axiale

Dans l'hypothèse des déformations planes, σ_z n'est qu'une combinaison linéaire de σ_r et de σ_θ , avec une plus forte dépendance avec σ_r . Nous retrouvons donc toutes les conclusions observées sur σ_r .

Comme dans le cas de σ_r , les courbes se rencontrent vers 5000 m.

Nous avons reporté sur la figure III.20 les différents profils de la contrainte axiale σ_z :

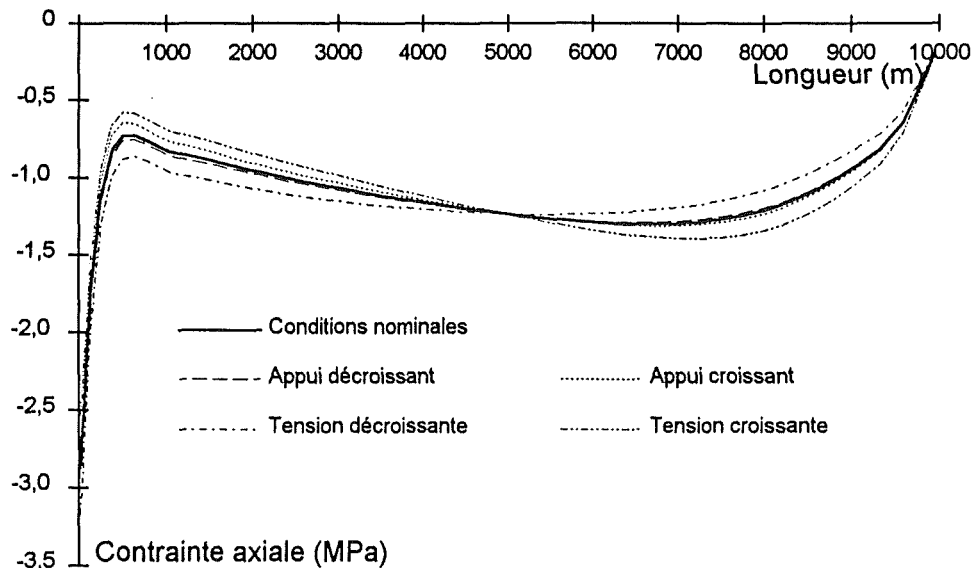


Figure III.20 : profil de la contrainte axiale

Résumé- conclusions

Nous avons étudié dans le §B.2. la sensibilité de l'état global du rouleau aux principales valeurs nominales du procédé et du film. Nous avons montré que les quatre principales grandeurs qui gouvernent l'enroulement des films : *vitesse, tension, appui et rugosité ont des effets du même ordre de grandeur*. Ce résultat est en accord avec les observations expérimentales. Seul l'appui présente des effets moins sensibles, mais ce résultat peut être attribué aux hypothèses du modèle. Il n'est donc pas concevable de négliger certains effets, comme l'ont fait tant d'auteurs pour les effets aérodynamiques ou la topographie de surface. Ce résultat représente une *justification supplémentaire de la démarche du modèle global d'enroulement* qui a été construit.

Nous avons également établi une *non-équivalence*, même qualitative des effets de chaque paramètre : une augmentation de tension n'a pas les mêmes effets globaux qu'une diminution d'appui... Cela montre qu'il faut agir en même temps sur toutes les grandeurs. Nous avons également mis en évidence des *effets non-linéaires* des principales grandeurs. Des variations mêmes faibles des paramètres du procédé peuvent se traduire, en termes d'état de contraintes par des variations beaucoup plus importantes : une baisse de tension de 20% induit une chute de la contrainte radiale de 40% !

Nous avons ensuite étudié dans le §B.3. la sensibilité de l'état global du rouleau aux *variations pendant l'enroulement* de deux grandeurs : la force linéique d'appui F_a et la tension d'enroulement $[\sigma_\theta]_0(r,r)$. Nous avons de nouveau trouvé que les effets de la variation de la force linéique d'appui sont moins importants que ceux de la variation de la tension d'enroulement. Nous avons également montré qu'une *décroissance de la tension d'enroulement* et, dans une moindre mesure *de la force linéique d'appui* se traduisent par des profils d'épaisseur de la couche résiduelle et des *contraintes résiduelles plus équilibrées*.

Effets d'écarts à la symétrie

Introduction

L'enroulement du film a été étudié sous certaines conditions de symétrie. Or, pour différentes raisons liées aux *limitations de l'équipement industriel*, ces conditions ne sont pas vérifiées. On sait de plus, par expérience, que de tels écarts à la symétrie ont une *influence très importante sur l'apparition des instabilités d'enroulement*, donc sur l'état des contraintes résiduelles.

On distingue quatre écarts :

- *répartition latérale* de la force linéique d'appui,
- *flèche* du rouleau de film,
- *irrégularités d'épaisseur* du film,
- *défait de planéité* du film.

Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre les effets de ces écarts à la symétrie sur l'état des contraintes résiduelles :

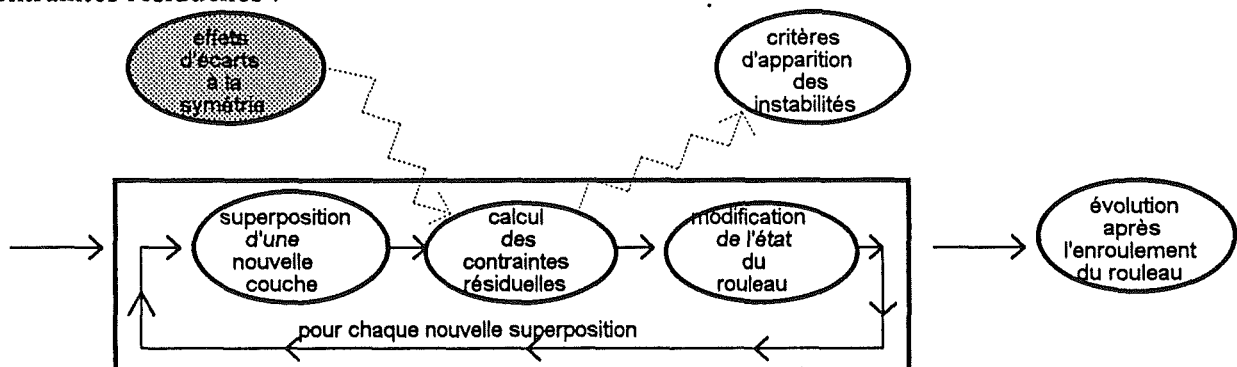


Figure IV.1 : effets d'écarts à la symétrie

A.) Répartition latérale de l'appui

A.1.) Présentation

Sous l'action de son propre poids et de la force d'appui exercée par les deux bras à ses extrémités, le rouleau d'appui se déforme :

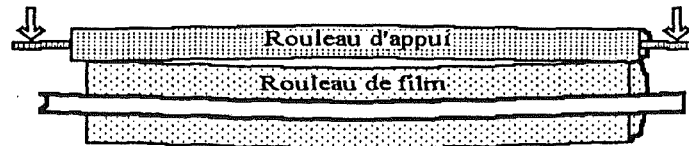


Figure IV.2 : principe d'application de la force d'appui

Le profil $F_a(z)$ de la force linéique d'appui n'est pas uniforme dans la largeur mais légèrement incurvé avec une valeur plus faible (voire nulle) au centre du rouleau de film et plus élevée sur les bords :

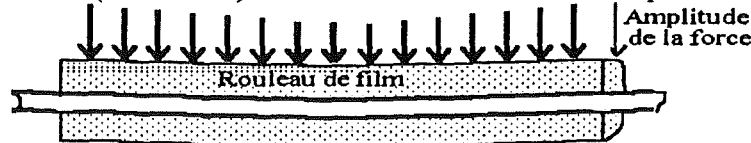


Figure IV.3 : profil de la force linéique d'appui

Il est difficile d'exprimer la flèche du rouleau d'appui ou la variation du profil $F_a(z)$ en fonction de la force globale d'appui et des différents autres paramètres : dimension et structure du rouleau d'appui, interaction avec le rouleau de film ...

Toutefois, il est envisageable de faire une série de mesures afin de quantifier cette distribution du profil en reprenant globalement la procédure présentée au §B. du chapitre I. Le profil de la force linéique d'appui $F_a(z)$ sur le rouleau en fonction de la largeur peut être supposé en première approximation parabolique et dissymétrique :

$$(4.1) \quad F_a(z) = F_g + \frac{z}{l_f} (F_d - F_g) - \frac{z(l_f - z)}{8 l_f^2} (2 F_c - F_d - F_g)$$

Avec :

F_d , F_c et F_g = force linéique à droite, au centre et à gauche ($N.m^{-1}$)

A.2.) Modélisation

Les contraintes résiduelles sont calculées dans une tranche de largeur infiniment faible placée au bord ou au centre du rouleau. Il s'agit d'études *monodimensionnelles* dans la direction radiale. Elles ne peuvent donc pas intégrer les variations axiales de certains paramètres.

Deux approches sont toutefois possibles :

- calcul complet dans les deux conditions extrêmes,
- calcul complet dans un cas avec variations de paramètres.

A.2.a.) calcul complet dans les deux conditions extrêmes

Si la valeur de la force linéique d'appui est comprise entre F_c et F_d , nous pouvons penser que l'état du rouleau est intermédiaire entre celui que nous aurions avec une force linéique uniforme égale à F_c et celui que nous aurions avec une force linéique uniforme égale à F_d :

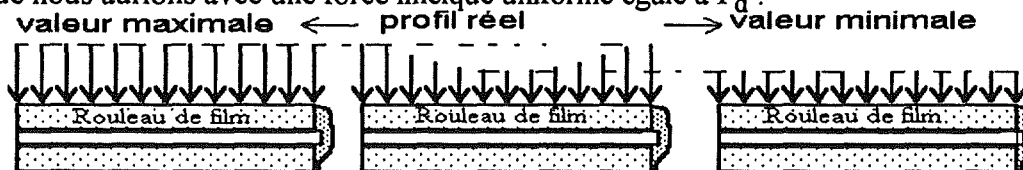


Figure IV.4 : première représentation de la variation axiale de la force linéique d'appui

Ces deux cas extrêmes sont faciles à simuler avec le modèle.

Les deux configurations extrêmes d'étude sont parfaitement *découplées*. Par suite, elles vont conduire à des résultats différents concernant la tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf})$, les glissements tangentiels ou l'évacuation d'air Δe_e . Or, il est bien évident qu'il existe un certain couplage entre les différentes tranches du rouleau. Dans ce premier cas, aucun couplage n'est pris en compte.

A.2.b.) Calcul complet dans un cas avec variation de paramètres

Les propriétés de certains paramètres sont gouvernées par les conditions moyennes de l'enroulement alors que d'autres le sont par des caractéristiques locales.

Si nous nous intéressons aux effets locaux des variations des paramètres, il semble plus judicieux de représenter l'état réel par un *état moyen*. Celui-ci gouvernera l'ensemble de l'évolution du rouleau.

On rajoute alors *un calcul des contraintes locales* reposant sur tous les paramètres moyens sauf un :

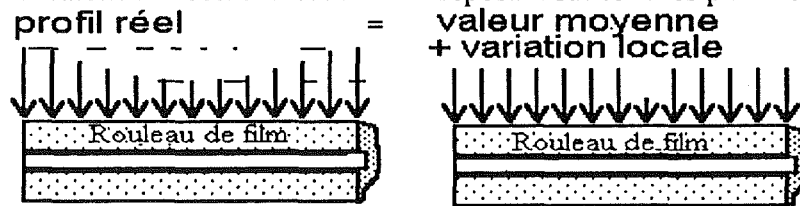


Figure IV.5 : seconde représentation de la variation axiale de la force linéique d'appui

Dans le cas présent de la force linéique d'appui parabolique variant entre F_c et F_b , cela se traduit par :

- un calcul global à chaque itération basé sur la valeur moyenne $(\frac{23}{48}F_g + \frac{2}{48}F_c + \frac{23}{48}F_d)$
- un calcul de l'état des contraintes reprenant tous les paramètres (épaisseur des couches d'air...) issus du calcul précédent mais avec la force linéique d'appui locale réelle.

Cette méthode permet d'apprécier les effets des variations locales de la force linéique d'appui.

Dans ce cas, le couplage axial entre les différentes tranches du rouleau est partiellement pris en compte.

B.) Flèche du rouleau de film

B.1.) Présentation

Le rouleau (mandrin+film) est soumis à différentes forces susceptibles de modifier sa cylindricité :

- son propre poids,
- la pression du rouleau d'appui,
- le poids du rouleau d'appui.

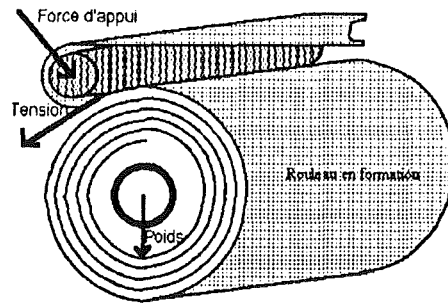


Figure IV.6 : forces affectant la flèche du rouleau

Estimons l'ordre de grandeur des composantes (linéique) pour un mandrin vide et pour un rouleau de 1000 m de film soumis à une force d'appui de 500 à 1000 N.m⁻¹ et à une tension de 5,0 à 10 MPa :

- son propre poids (par unité de longueur) :

$$\text{Poids initial} = 4 \text{ kg.m}^{-1} \times 9,81 \text{ m.s}^{-2} = 39 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{Poids après 1000m} = 39 \text{ N.m}^{-1} + 1000 \text{ m} \times 12 \text{ }\mu\text{m} \times 1395 \text{ kg.m}^{-3} \times 9,81 \text{ m.s}^{-2} = 203 \text{ N.m}^{-1}$$

- la force linéique d'appui (par unité de longueur) :

$$\text{Force} = 50 \text{ à } 100 \text{ kg.m}^{-1} \times 9,81 \text{ m.s}^{-2} = 490 \text{ à } 981 \text{ N.m}^{-1}$$

- la force linéique due à la tension du film (par unité de longueur) :

$$\text{Force} = 5 \text{ à } 10 \text{ MPa} \times 12 \text{ }\mu\text{m} = 60 \text{ à } 120 \text{ N.m}^{-1}$$

L'ordre de grandeur de la force induite par la tension d'enroulement n'est qu'à peine inférieur à celui de la force linéique induite par l'appui. Toutefois, nous négligerons son influence parce que l'effet sur la flèche d'une force appliquée *tangentielllement* sur le bord n'est pas explicitement connu. L'influence du poids sera également négligée car elle n'atteint un ordre de grandeur respectable qu'à partir d'une certaine longueur de film. Le moment d'inertie du rouleau est alors suffisant. Nous ne nous intéresserons donc qu'à l'effet de la force linéique d'appui dans le calcul de la flèche du rouleau.

B.2.) Modélisation

On peut facilement montrer que la flèche au centre d'un rouleau soumis à une charge répartie paraboliquement s'écrit :

$$(4.2) \quad f = \frac{7 F_g + 61 F_c + 7 F_d}{5760} * \frac{L^4}{E J}$$

Avec :

$$J = \text{moment d'inertie du rouleau, défini par } J = \frac{\pi}{4} * (R_{\text{ext}}^4 - R_{\text{int}}^4)$$

Le rouleau est constitué de deux cylindres coaxiaux encastés (le mandrin et les couches de film). Il faut remplacer dans la formule précédente le produit $E J$ par la somme des termes :

$$E J = E_m J_m + E_f J_f$$

Avec :

$$E_m = \text{module du mandrin (supposé isotrope)} \quad E_f = \text{module des couches de film}$$

J_m = moment d'inertie du mandrin (expression de J avec $R_{int}=R_{mI}$ et $R_{ext}=R_m$)

J_f = moment d'inertie des couches de film (expression de J avec $R_{int}=R_m$ et $R_{ext}=R_{rf}$)

R_f = rayon du rouleau défini par :

$$(4.3) \quad R_{rf}^2 = R_m^2 + \frac{L_f(e_f + e_a)}{\pi}$$

L_f = longueur enroulée (m)

En résistance des matériaux, le moment fléchissant est calculé en intégrant sur la section le produit du module de YOUNG par y^2 :

$$M = \int_S \frac{E y^2}{\rho} dS = \int_{S_1} \frac{E_1 y^2}{\rho_1} dS + \int_{S_2} \frac{E_2 y^2}{\rho_2} dS$$

Le moment d'inertie des couches de film, initialement nul (pas de film) augmente au cours de l'enroulement. Il en résulte donc que la flèche globale du rouleau (mandrin+film), égale à celle du mandrin au début de l'enroulement, diminue au cours de l'enroulement.

B.3) Exemple d'utilisation

Considérons un rouleau de largeur l_1 comportant une longueur L_f de film soumis à une charge répartie soit uniformément soit paraboliquement. Calculons la longueur de film nécessaire pour que ce rouleau ait la même flèche qu'un mandrin de largeur plus petite l_2 soumis aux mêmes conditions d'appui par unité de longueur. D'après la formule précédente, cela correspond à l'égalité des deux expressions suivantes :

$$\frac{l_1^4}{E_m J_m + E_f J_f} = \frac{l_2^4}{E_m J_m} \Rightarrow J_f = \frac{E_m}{E_f} \left[\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^4 - 1 \right]$$

Ensuite, à l'aide des relations reliant d'une part le moment J au rayon (10.4) et d'autre part le rayon à la longueur de film, il est possible de calculer la longueur de film L_f nécessaire pour satisfaire l'équation précédente.

Application numérique :

$$\begin{array}{lll} E_m = 1,5 \text{ GPa} & R_m = 90 \text{ mm} & R_{mI} = 76,5 \text{ mm (rayon interne du mandrin)} \\ e_f + e_a = 12,5 \text{ } \mu\text{m} & l_1 = 2000 \text{ mm} & l_2 = 1000 \text{ mm} \end{array}$$

Nous trouvons $J_m = 2,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, $J_f = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, $R_{rf} = 120 \text{ mm}$ et $L_f = 1580 \text{ m}$

B.4.) Utilisation dans le modèle d'enroulement

Nous venons de présenter un calcul montrant l'influence de la flèche au début de l'enroulement.

L'introduction dans le modèle se heurte aux mêmes limitations que celles observées précédemment.

Il sera possible de procéder de la même manière :

- calcul complet dans les deux conditions extrêmes,
- calcul complet dans un cas avec variation de paramètres.

C.) Irrégularités d'épaisseur

C.1.) Présentation

Le film présente des irrégularités d'épaisseur dans le sens longitudinal et dans le sens transversal ou axial dont l'importance relative (2%) apparaît faible mais représente malgré tout un challenge technologique difficile : 2% correspond à un écart de $0,2 \mu\text{m}$ pour un film d'épaisseur $10 \mu\text{m}$ produit dans une *largeur de quelques m* et à une *vitesse de plusieurs m.s^{-1}* !

Les irrégularités longitudinales d'épaisseur ont des périodes variables qui ne correspondent pas exactement à l'échelle du rouleau (périmètre), interdisant un effet cumulatif d'une spire sur l'autre. De telles irrégularités ne sont donc pas néfastes sur l'enroulement. En revanche, dans le sens transversal ou axial, le film peut présenter un profil d'épaisseur stable au cours du temps mais irrégulier :

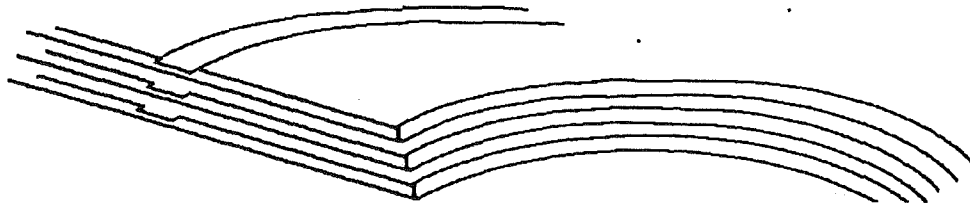


Figure IV.7 : irrégularité axiale d'épaisseur

Il y a donc un *effet cumulatif* : les sous-épaisseurs se superposent les unes sur les autres. Afin de diminuer les effets préjudiciables des variations du profil d'épaisseur, on impose une oscillation latérale au film avant son enroulement ("brouillage"). Toutefois, seuls les effets des irrégularités d'épaisseur très localisées sont réduits. Si la variation d'épaisseur est beaucoup plus étalée, l'oscillation latérale ne permettra pas de neutraliser son effet. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons.

C.2.) Modélisation

La prise en compte dans le modèle de cette irrégularité axiale du profil d'épaisseur se heurte aux mêmes limitations que pour les autres irrégularités axiales :

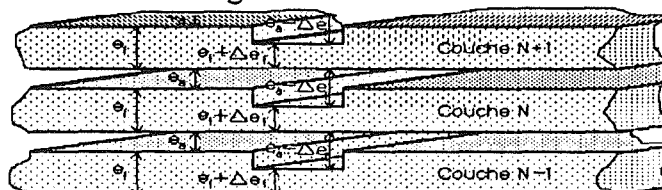


Figure IV.8 : modélisation d'une irrégularité axiale d'épaisseur

Soit une couche de film d'épaisseur $[e_f + \Delta e_f]$ et une couche d'air d'épaisseur $[e_a - \Delta e_f]$ où Δe_f est l'écart local d'épaisseur (négatif en cas de sous-épaisseur).

L'introduction de cette variation axiale dans le modèle se fera en reprenant le même schéma de calcul que celui présenté aux §A.2.a. et §A.2.b. Toutefois, nous privilégierons plutôt la seconde approche :

- calcul global avec les valeurs e_f et e_a gouvernant l'évolution des paramètres moyens (tension, glissement, entraînement et évacuation d'air, contraintes résiduelles moyennes...),
- calcul local avec les valeurs $e_f + \Delta e_f$ et $e_a - \Delta e_f$ (contraintes résiduelles locales).

Ensuite la comparaison des contraintes résiduelles moyennes (σ_r , σ_θ et σ_z)_{norm} et locales (σ_r , σ_θ et σ_z)_{sous-ép} permet d'apprécier l'influence de Δe_f .

L'application numérique suivante permet de bien illustrer la très grande influence sur l'état des contraintes résiduelles d'une irrégularité d'épaisseur. Utilisons la formule du module radial d'YOUNG pour le film de référence VIDÉO 2 :

Tableau IV.1 : variation du module radial et de la pression avec l'épaisseur de la couche d'air

e_a (μm)	E_r (MPa)	P ou $-\sigma_r$ (MPa)
0,21	41	0,49
0,26	25	0,27
0,31	15	0,13

Une variation relative de $\Delta e_f = -0,05 \mu\text{m}$ (0,5% de l'épaisseur nominale de $10 \mu\text{m}$) induit une variation de **-40% ! du module radial** et de **-50% de la contrainte radiale**.

On comprend ainsi la nécessité de maîtriser le procédé de fabrication des films minces de polyester et de les prendre en considération dans le modèle.

Remarques :

-1. Dans toute cette étude, la largeur de la zone de sous-épaisseur n'apparaît pas. Cela est dû au fait que nous ne prenons pas en compte le possible fléchissement du film dans cette zone.

-2. On peut également signaler une étude originale due à Z. HAKIEL et K. COLE [1992].

Les auteurs s'intéressent à l'**effet cumulatif des variations axiales d'épaisseur** en calculant le **profil du rayon du rouleau** $R_{rr}(z)$ en fonction du profil des sous-épaisseurs. HAKIEL et COLE en déduisent ensuite l'**écart des contraintes radiale et tangentielle** entre les différentes zones de sur et sous-épaisseur.

Le profil de la contrainte radiale a été validé en utilisant un mandrin instrumenté.

Il ne s'agit pas réellement d'un calcul des contraintes résiduelles mais plutôt d'une estimation des surcontraintes locales. A ce titre, il s'agit d'un complément intéressant. En revanche, le modèle d'HAKIEL et COLE [1992] apparaît comme un passage obligé si on s'intéresse à la **corrélation entre le profil des duretés ou des modules des couches externes du rouleau et le profil des sous-épaisseurs** du film.

D.) Défaut de planéité

D.1) Présentation

Le film peut présenter un défaut de géométrie particulier : il n'est plus plan mais présente une forme de cuvette. Si le film est découpé dans le sens longitudinal en bandes, nous observons une distribution des longueurs $L(z)$. Ce défaut est donc communément appelé "surlongueur" :

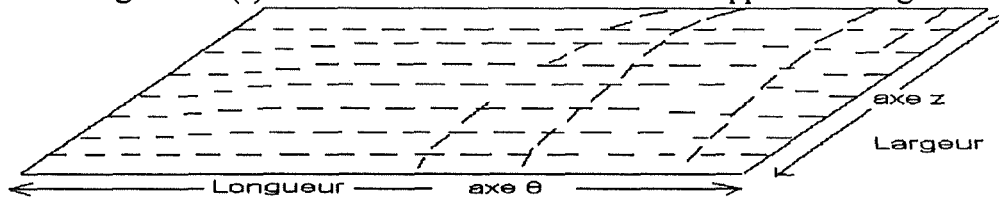


Figure IV.9 : défaut de planéité du film

D.2.) Modélisation

Nous allons assimiler le film à une distribution de bandes de largeur dz et de longueur $L(z)$. Ces bandes ne seront soumises qu'à des forces tangentielles. Cette représentation néglige les effets transversaux, c'est à dire l'interaction entre deux bandes contiguës, ce qui est licite si le gradient dL/dz reste faible (les surlongueurs maximales entre le bord et le centre sont d'environ 0,3%).

Dans le cadre de cette approximation, chaque bande n'est soumise qu'à une contrainte longitudinale, liée à la déformation longitudinale $\varepsilon(z)$ par la loi de HOOKE :

$$(4.4) \quad \varepsilon(z) = \frac{\Delta L(z)}{L(z)} = \frac{[\sigma_\theta]_0(z)}{E_\theta(z)}$$

Avec :

$[\sigma_\theta]_0(z)$ = tension réelle de la bande (Pa) E_θ = module longitudinal de la bande (Pa)

La tension n'est appliquée au film que globalement, ce qui conduit à la relation intégrale :

$$(4.5) \quad <[\sigma_\theta]_0> e_f l_f = \int_{z=0}^{z=l_f} [\sigma_\theta]_0(z) \varepsilon(z) dz$$

Une telle relation ne garantit pas que $[\sigma_\theta]_0(z)$ soit constant dans le sens de la largeur. Considérons deux bandes de longueur à l'équilibre $L(z_1)$ et $L(z_2)$ et soumise à une contrainte moyenne $<[\sigma_\theta]_0>$. On observe que, si ces deux bandes se trouvent en même temps sous tension, les deux longueurs déformées sont égales :

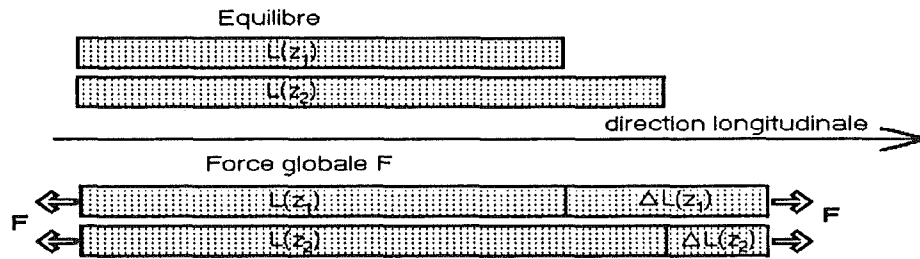


Figure IV.10 : défaut de planéité

Ce qui conduit à la relation complémentaire :

$$(4.6) \quad L(z_1) + \Delta L(z_1) = L(z_2) + \Delta L(z_2)$$

Deux bandes de longueurs différentes sont soumises à des tensions différentes. Il en résulte que les parties de plus faible longueur initiale $L(z)$ -généralement les bords- présenteront un déplacement $\Delta L(z)$ plus grand, une déformation $\epsilon(z)$ plus grande et une tension résiduelle $[\sigma_\theta]_0(z)$ plus grande.

Deux cas sont à distinguer :

→ la contrainte globale $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$ appliquée est très faible

En fait, elle doit être telle que le déplacement élastique $\Delta L(z)$ des bandes de faible longueur $L(z)$ soit inférieur à la surlongueur maximale $L(z_1) - L(z_2)$. Dans ce cas, le film présentera encore des surlongueurs apparentes (mais plus faibles). De plus, seules les régions de faible longueur initiale seront déformées donc sous tension. La valeur limite de la contrainte globale $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$ est fonction du profil $L(z)$ et du module tangentiel du film E_θ . Cela signifie, entre autres que la région centrale du film sera enroulée sans tension alors que les régions latérales seront enroulées avec tension. On comprend très bien que de telles variations se traduisent par l'apparition d'instabilité d'enroulement.

→ la contrainte globale $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$ appliquée est plus grande

Toutes les régions du film sont sous tension et présentent une déformation. Le film ainsi tendu est alors parfaitement plan, c'est à dire que la longueur réelle (déformée) est la même dans toute la largeur du film. En revanche, la tension réelle $[\sigma_\theta]_0(z)$ présente une certaine distribution et n'est pas égale en tout point de la largeur.

A partir de ces considérations, pour un profil donné de surlongueurs, deux questions se posent :

→ quelle est la valeur minimale de la tension globale supprimant les défauts de planéité apparents du film tendu ?

Représentons le profil des surlongueurs de la manière suivante :

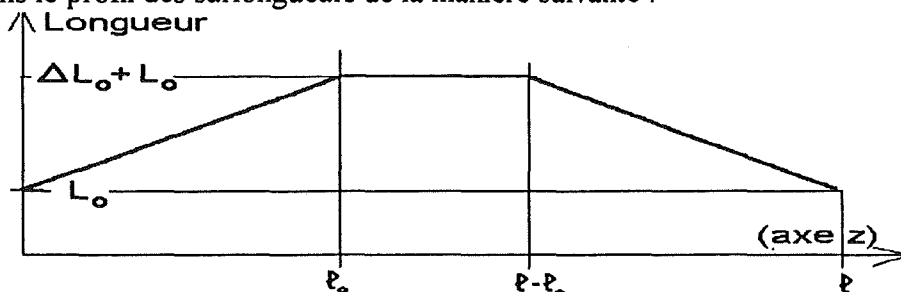


Figure IV.11 : représentation du profil des surlongueurs

Nous avons trouvé la valeur limite de la tension suivante (annexe VII) :

$$(4.7) \quad \{[\sigma_\theta]_0\}_s \approx \frac{l_0}{l} \frac{\Delta L_0}{L_0} E_\theta$$

Application numérique :

$$E_\theta \approx 4,5 \text{ GPa} \quad \frac{\Delta L_0}{L_0} \approx 0,2 \% \quad \frac{l_0}{l} \approx \frac{1}{3}$$

Nous trouvons $\{[\sigma_\theta]_0\}_s = 3,0 \text{ MPa}$. Cet ordre de grandeur de la tension seuil est à peine inférieur à la tension nominale d'enroulement.

→ *quel est l'écart de tension réel entre deux régions différentes ?*

A partir des relations précédentes, nous pouvons quantifier la différence de tension existant entre deux régions de longueurs à l'équilibre $L(z_1)$ et $L(z_2)$. Si les régions ont le même module tangentiel E_θ , cette différence s'écrit :

$$(4.10) \quad [\sigma_\theta]_0(z_1) - [\sigma_\theta]_0(z_2) = \frac{L(z_2) - L(z_1)}{L(z)} E_\theta$$

Application numérique :

$$L(z_2) - L(z_1) = 0,01\% * L(z_1) \quad E_\theta = 4,5 \text{ GPa} \quad [\sigma_\theta]_0(z_1) - [\sigma_\theta]_0(z_2) = 4,5 \text{ MPa}$$

L'écart de tension entre les régions de sous-longueur et de surlongueur est donc de l'ordre de grandeur de la tension nominale de l'enroulement $[\sigma_\theta]_0$.

Nous trouvons **un ordre de grandeur** de la tension **comparable** à la tension d'enroulement du film. Cela illustre bien les conséquences désastreuses sur l'aspect du rouleau d'un défaut de planéité excessif du film. On comprend ainsi toute la nécessité de prendre en considération de tels écarts à la symétrie ainsi que la nécessité de maîtriser le procédé de fabrication des films minces de polyester.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les effets de quatre types d'écarts à la symétrie axiale du film. Quelques calculs d'ordre de grandeur ont montré toute l'importance de ces écarts à la symétrie. La prise en compte de ces variations axiales se heurte au caractère monodimensionnel du modèle. Il est toutefois possible d'estimer ces effets de deux manières :

- la première repose sur un **calcul de sensibilité à la valeur nominale** de ces paramètres,
- la seconde consiste à mener parallèlement **deux calculs** dont l'un gouverne **l'évolution des principales grandeurs globales** du problème et l'autre gouverne **l'évolution d'une grandeur locale**.

Les instabilités d'enroulement

Introduction et restrictions

Nous sommes actuellement en mesure de prévoir l'état des contraintes résiduelles dans le rouleau de film. Il y a maintenant lieu de s'intéresser à l'apparition des *instabilités d'enroulement*, c'est à dire de connaître la réponse du film à la sollicitation que représente son enroulement :

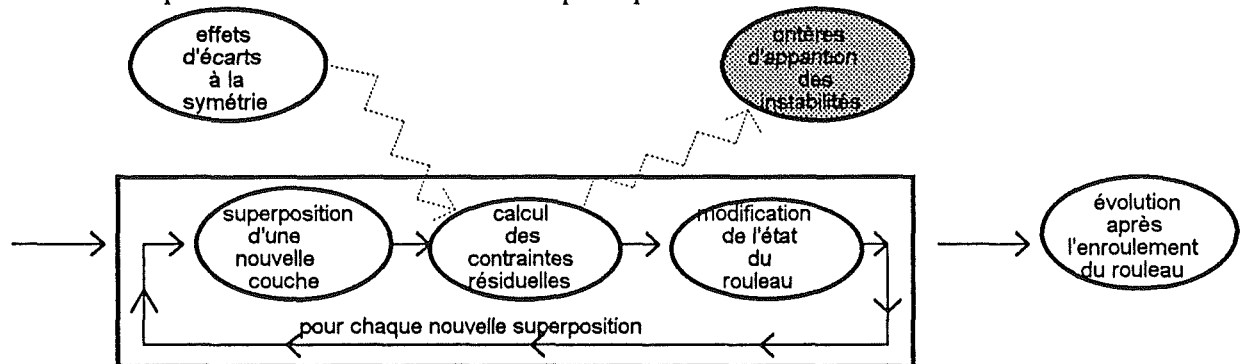


Figure V.1 : critères d'apparition des instabilités d'enroulement

A la différence du modèle de calcul des contraintes résiduelles, les critères d'apparition des instabilités d'enroulement n'ont pas fait l'objet de réelles *confrontations avec l'expérience*.

Pour cette raison, il faut les envisager essentiellement à titre de *réflexion théorique*.

On distingue globalement deux grandes familles d'instabilité d'enroulement :

- *glissement* du film sur lui-même,
- *micro-flambage* du film.

Dans ces deux phénomènes typiques d'instabilité, le *contact film-film* joue un rôle très important. Nous nous proposons donc d'étudier en détail la nature de ce contact dans le premier paragraphe.

A.) Le contact film/film

A.1.) Interface film/film

Les différentes couches de film sont en contact les unes sur les autres dans les conditions suivantes :

- l'épaisseur de la couche d'air entraînée est de l'ordre de grandeur de la hauteur des rugosités,
- la contrainte radiale varie entre quelques centaines et quelques millions de Pascal,
- les couches sont soumises à une contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ ou τ_{rz} .

Il est tout à fait possible qu'il n'y ait pas adhérence parfaite entre les deux couches de film mais *glissement à l'interface*. La compréhension de ce cisaillement interfacial soulève un grand nombre de difficultés théoriques liées entre autres à l'influence des forces moléculaires à courtes distances. Toutefois, nous représenterons le contact film/film par l'intermédiaire de la classique *loi de COULOMB*. Celle-ci est généralement formulée de manière globale en faisant appel aux forces F_n et F_t . Nous lui préférons ici sa formulation locale en termes de contrainte radiale et de cisaillement radial/tangentiel (DUVAUT [1980]) :

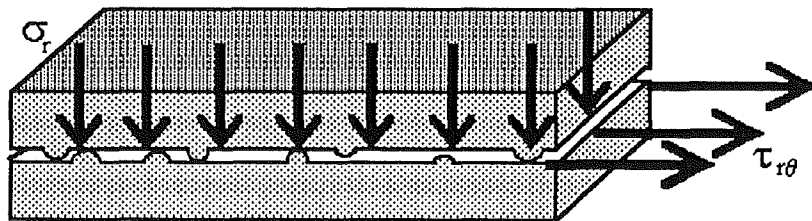


Figure V.1 : contact film-film.

$$(5.1) \quad |\tau_{r\theta}| \leq \mu_s |\sigma_r| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |\tau_{r\theta}| < \mu_s * |\sigma_r| \Rightarrow u_\theta = 0 \\ |\tau_{r\theta}| = \mu_s * |\sigma_r| \Rightarrow \exists \lambda / u_\theta = \lambda * |\sigma_r| \end{cases}$$

Avec :

$\tau_{r\theta}$ = contrainte de cisaillement radial-tangentiel (Pa)

σ_r = contrainte radiale (Pa)

μ_s = coefficient de frottement statique (sans unité)

u_θ = glissement à l'interface

(la formulation est identique pour le cisaillement radial-axial τ_{rz})

Les conditions du glissement (caractérisation de λ) ne nous intéressent pas ici. Le problème se ramène alors à la connaissance de μ_s . Différentes études ont été menées par P. CORSI et D. GERWIG [1986] afin de préciser sa valeur et ses variations éventuelles. A partir de mesures sur une large gamme de topographie de surface et de pression, ils ont obtenu les résultats empiriques suivants :

- influence de la topographie de surface à faible pression

La pression est celle du test de DAVENPORT ($P_D = 4400$ Pa). Le coefficient de frottement est lié linéairement au nombre d'aspérités en contact et à l'aire de contact par une relation du type :

$$\mu_s = 0,40 + N_{pp} * 0,003 = 0,40 + A_c * 0,6$$

Avec :

N_{pp} = nombre de pics porteurs (0 à 500) A_c = pourcentage d'aire de contact (0 à 1,5%)

Dans ces conditions, le coefficient μ_s varie alors entre 0,40 et 0,60.

- influence de la pression (entre 0,004 et 1 MPa)

Le coefficient de frottement décroît assez rapidement :

Tableau V.1 : variation du coefficient de frottement avec la pression

Pression P (MPa)	0,0044	0,028	0,11	0,44	0,99
Coefficient de frottement μ_s	0,032	0,26	0,21	0,11	0,07

Cette décroissance de μ_s s'explique par le fait que la contrainte de cisaillement augmente moins rapidement que la pression totale. CORSI et GERWIG [1986] modélisent cette décroissance par des lois empiriques du type :

$$(5.2) \quad \mu_s = 0,40 + N_{pp} * 0,003 * \left[\frac{N_D}{N_{pp}} \right]^{\frac{1}{3}} * \left[\frac{P}{P_D} \right]^{-\frac{2}{3}}$$

Avec :

P_D = Pression de DAVENPORT N_D = nombre de pics porteurs sous cette pression P_D

Il est possible de donner une base physique à cette formulation et plus particulièrement aux exposants $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ à partir de considérations de théorie élastique des plaques (fléchissement du film entre les aspérités) et de théorie de HERTZ. On retrouve la même valeur que précédemment dans les conditions de DAVENPORT : pression $P = P_D$ et nombre d'aspérités en contact $N = N_D$.

A.2.) Possible effet dynamique : glissement**A.2.a.) Glissement tangentiel**

La tension d'enroulement est appliquée au rouleau sous la forme d'un couple. Ce couple induit un cisaillement radial-tangentiel important :

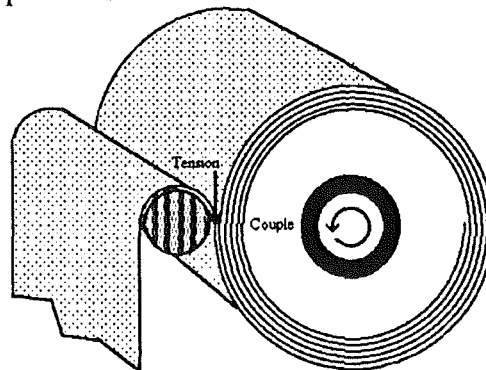


Figure V.3 cisaillement radial/tangentiel

On comprend que dans ces conditions, le film soit susceptible de *glisser tangentiellement*. La principale difficulté de cette étude concerne le fait que :

- l'épaisseur de la couche d'air entraînée est proche de la hauteur des rugosités,
- la contrainte radiale de compression est très faible dans cette zone.

Nous avons déjà abordé l'étude du glissement dans le calcul du champ des contraintes résiduelles (§C. et §D.). Deux cas limites ont été distingués :

- l'épaisseur de la couche d'air est suffisamment grande

Il n'y a pas de rugosités en contact. Ce sont les conditions d'un "aérolanining".

- l'épaisseur de la couche d'air est suffisamment faible

Quelques rugosités sont en contact. Le frottement à l'interface peut être représenté par le modèle précédent. Sous ces hypothèses, il est possible de définir le seuil de glissement avec le critère :

$$\left| \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_r} \right| = \mu_s$$

$\tau_{r\theta}$ et σ_r sont calculés dans le modèle et μ_s peut être déduit des résultats du §A

Remarquons que $\tau_{r\theta}$ et σ_r résultent de deux calculs différents. Il est donc possible que $|\tau_{r\theta}|$ soit plus importante que le produit $\mu_s |\sigma_r|$. Cela traduirait simplement le fait que le glissement n'a pas été pris en compte.

Nous supposons que la valeur limite entre ces deux cas correspond à $e_a = SR_z$ et proposons donc le critère suivant d'apparition du glissement tangentiel :

$$(5.3) \quad \begin{cases} e_a \geq SR_z \Rightarrow \text{glissement tangentiel} \\ e_a < SR_z \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_r} \right| \geq \mu_s \Rightarrow \text{glissement tangentiel} \\ \left| \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_r} \right| < \mu_s \Rightarrow \text{pas de glissement tangentiel} \end{cases} \end{cases}$$

Le glissement tangentiel peut induire plusieurs types d'instabilité d'enroulement :

- si le glissement est généralisé sur toute la largeur du rouleau, aucun défaut ne devrait être induit.
- si le glissement ne peut avoir lieu en certains points du rouleau, le glissement localisé induira des plissements plus ou moins locaux. L'absence de glissement tangentiel en un point pourra être due à la présence d'une aspérité plus haute que les autres ou bien à une poussière.

A.2.b.) Glissement axial

Pour les mêmes raisons que précédemment, le film enroulé est susceptible de glisser axialement. Toutefois, au même titre que les autres variations axiales, le cisaillement radial/axial n'est pas calculé dans le modèle. De toutes façons, pour des raisons de symétrie, le cisaillement axial doit être globalement nul, ce qui exclut théoriquement le risque de glissement global axial. En réalité, il faut chercher l'origine du risque de glissement axial dans les aspects technologiques : pression d'appui, couple d'enroulement déséquilibré ... :

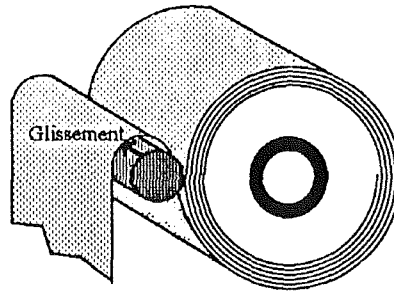


Figure V.4 : glissement axial du film

BALHI [1987] a essayé de calculer le cisaillement τ_{rz} dû à un écart de tension $[\sigma_\theta]_0(z)$ entre les deux bords du rouleau. Il a ainsi repris le modèle de CONNOLLY et WINARSKI [1984] avec les hypothèses complémentaires suivantes :

- 1. introduction de τ_{rz} dans les équations différentielles d'équilibre
- 2. σ_r , σ_θ , σ_z et τ_{rz} ont des dépendances découplées en r et de z : $\sigma_r(r,z) = f_r(r) * g_r(z)$.
- 3. $\varepsilon_z = 0$ (déformations planes)
- 4. $[\sigma_\theta]_0$ présente de plus une dépendance linéaire en z

Sous cet ensemble d'hypothèses restrictives, BALHI [1987] a abouti à une équation différentielle similaire (EULER du deuxième ordre) puis à une formulation des trois contraintes et du cisaillement r - z . Il retrouve bien sûr le cas classique lorsque $[\sigma_\theta]_0$ est uniforme dans la largeur. En fait, nous pensons que l'origine de ce cisaillement est externe et qu'un calcul de τ_{rz} à partir de $[\sigma_\theta]_0(z)$ ne fait que déplacer le problème : il faut alors préciser $[\sigma_\theta]_0(z)$.

Nous pouvons également signaler l'étude de HEINRICH, CONNOLLY et BHUSHAN [1986] qui repose sur une résolution de l'équation différentielle d'équilibre des contraintes en deux dimensions (r,z) grâce à une technique d'éléments finis. Ils se sont intéressés au champ des contraintes (σ_r , σ_θ , σ_z et τ_{rz}) induits par un profil de déformation sinusoïdale imposé à la base du mandrin. Cette étude ne concerne pas directement notre problème. En revanche, il semble clair que plus l'épaisseur de la couche d'air est importante, plus le risque de glissement axial est élevé. C'est en particulier le cas lorsque l'épaisseur de la couche d'air entraînée devient supérieure à la hauteur moyenne des plus grands pics (SR_z). Or, cette épaisseur est en partie gouvernée par la force linéique d'appui F_a . On accorde de ce fait une très grande importance à l'ordre de grandeur de cette force.

Conclusion

L'analyse des conditions critiques qui conduisent à l'apparition du glissement tangentiel ou axial soulève de nombreuses difficultés liées à la *méconnaissance de la nature du contact film/film dans ces conditions limites d'aéro-planning* et à l'interaction avec les conditions technologiques.

Nous avons proposé un critère reposant essentiellement sur la *valeur de l'épaisseur de la couche d'air entraînée* : si celle-ci est plus élevée que le niveau moyen des rugosités, le risque de glissement devient très important. Il nous semble difficile d'aller au-delà de ce critère dans ce cas particulier.

B.) Le micro-flambage

Introduction

Pendant ou après l'enroulement, on observe assez fréquemment l'apparition d'une instabilité d'enroulement qui se traduit par un défaut d'aspect sous la forme d'ondulations périodiques du film dans la direction axiale ou tangentielle :

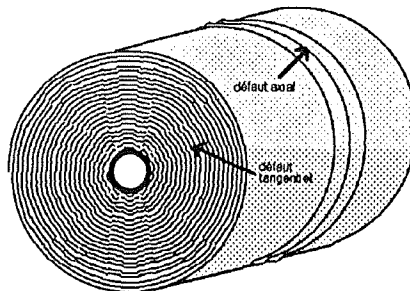


Figure V.5 : défaut classique d'un rouleau de film mince

Ces instabilités d'enroulement s'interprètent en termes de **micro-flambage local** des couches de film.

B.1.) Le micro-flambage

B.1.a.) Spire isolée : modèle d'EULER

Le micro-flambage des matériaux a fait l'objet de nombreuses études. On distingue tout d'abord le premier modèle développé par EULER [1827]. Considérons une plaque isotrope libre en déplacement et soumise à une contrainte de compression dans son plan.

Lorsque la contrainte de compression excède une valeur critique, on observe une déformation de grande amplitude dans la direction perpendiculaire : c'est le **micro-flambage** :

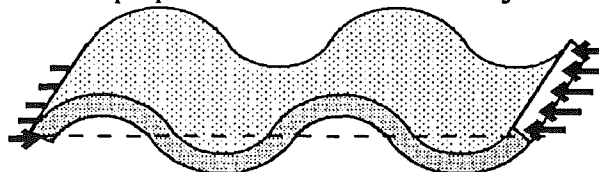


Figure V.6 : micro-flambage

La première formulation théorique de σ_c a été obtenue par EULER [1827] :

$$(5.4) \quad \sigma_{cE} = - \frac{\pi^2}{12} \frac{e_f^2}{l_1^2} E$$

Avec :

e_f = épaisseur de la plaque (m)

l_1 = demi-période (m)

E = module d'YOUNG (Pa)

Application numérique :

$$e_f = 14.5 \mu\text{m}$$

$$l_1 = 5 \text{ mm (demi-période moyenne observée)}$$

$$E = 5,0 \text{ GPa}$$

Nous trouvons $\sigma_{cE} = -34 \text{ kPa}$. Cette valeur est extrêmement faible : c'est la contrainte nécessaire pour comprimer de $5 \mu\text{m}$ une feuille de module $E = 5 \text{ GPa}$ et de longueur $L = 1 \text{ m}$.

Cela signifie qu'une couche de film isolée flambe pratiquement systématiquement.

B.1.b.) empilement de spires : micro-flambage réel

La contrainte d'EULER σ_{cE} correspond au micro-flambage d'une unique plaque totalement libre dans la direction de micro-flambage. Or, celui du film dans le rouleau est beaucoup plus complexe :

- le rouleau présente une structure feuilletée avec des milliers de couches superposées,
- une contrainte radiale est exercée perpendiculairement sur les spires.

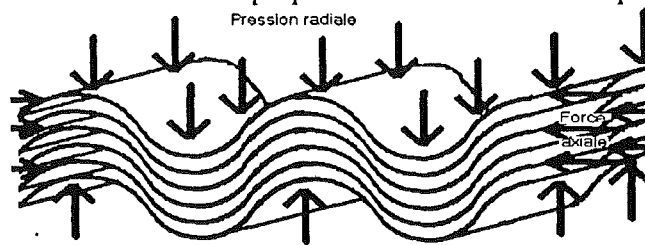


Figure V.7 : micro-flambage d'un paquet de spires

On peut y voir une certaine analogie avec le micro-flambage des feuilles d'un livre soumis à différentes forces de compression perpendiculaire.

Ces particularités ont trois conséquences qui ne sont pas considérées dans le modèle d'EULER :

- il y a des limitations dans la direction de micro-flambage,
- les conditions à l'interface sont complexes : il peut y avoir glissement interfacial,
- la structure composite induit une très forte anisotropie des propriétés mécaniques.

Ajoutons que, pour une raison qui reste à préciser, la demi-période de micro-flambage semble constante : 3 à 7 mm.

La compréhension de ce micro-flambage apparaît donc comme un problème théorique très complexe.

Nous n'avons pas trouvé de publication traitant de manière satisfaisante du micro-flambage d'un rouleau de film polyester. En revanche, nous proposons d'engager une réflexion théorique à partir de deux études reposant sur la prise en considération de chacun des aspects précédents (le glissement interfacial et l'anisotropie) :

- glissement interfacial : micro-flambage d'un empilement de films : JARRY [1981].

La mise en équation est incorrecte mais les idées sont intéressantes et peuvent faire l'objet d'une réflexion théorique.

- anisotropie : micro-flambage d'un composite fibres/matrice : POTIER-FERRY [1992].

Il existe de nombreuses analogies entre le micro-flambage de ces composites et celui du film.

Nous essaierons ensuite de voir dans quelle mesure il est possible de transposer ces approches au cas du micro-flambage des films.

B.1.c.) Caractérisation du glissement interfacial

Cette approche a été développée à RHÔNE-POULENC FILMS : JARRY [1981].

B.1.c.1.) Approche du problème

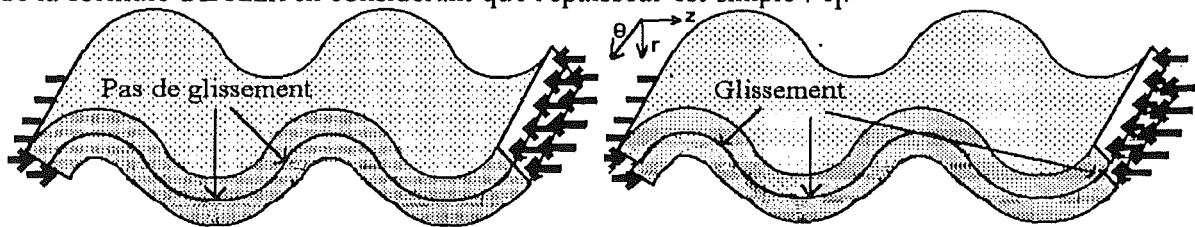
Considérons par exemple le micro-flambage de deux couches de film superposées l'une sur l'autre. Deux cas de figures peuvent se présenter :

→ *il n'y a pas de glissement interfacial*

Les deux couches de film restent solidaires et flambent ensemble. Elles se comportent comme une unique couche d'épaisseur double (figure V.8.a.). La contrainte critique est alors obtenue à partir de la formule d'EULER en considérant que l'épaisseur est double : $2 e_f$.

→ *il y a glissement interfacial*

Les deux couches de film sont dissociées et flambent séparément. Elles se comportent comme deux couches d'épaisseur simple (figure V.8.b.). La contrainte critique est alors obtenue à partir de la formule d'EULER en considérant que l'épaisseur est simple : e_f .



Figures V.8.a et b. : hypothèse du non-glissement ou du glissement interfacial

La contrainte critique σ_{cE} est *proportionnelle au carré de l'épaisseur* de la feuille. Elle est donc quatre fois plus grande dans le premier cas que dans le second cas.

Le calcul de la contrainte critique se réduit ainsi au *calcul du nombre de couches susceptibles de flamber ensemble sans glissement*.

B.1.c.2.) Mise en équation

On suppose que le glissement apparaît dès lors que $(\tau_{rz})_{\max i} = \mu_s \sigma_r$.

La contrainte de cisaillement est reliée à la contrainte axiale par une relation du type :

$$(5.5) \quad (\tau_{rz})_{\max i} = \frac{3 \pi C}{2 l_1} \sigma_z$$

Avec :

C = amplitude de micro-flambage (m) l_1 = demi-période de micro-flambage (m)

Il est difficile de trouver une *justification théorique* de cette formule.

Nous avons par ailleurs les relations suivantes :

$$(5.6) \quad \sigma_z = E_z \varepsilon_z \quad \text{avec} \quad \varepsilon_z = -\pi^2 \frac{C^2}{l_1^2}$$

En combinant toutes ces relations, on obtient les valeurs de C, n puis σ_{cJ} :

$$(5.7) \quad n = \frac{4 l_1^2}{\pi e_f^2} \sqrt[3]{18 \mu_s^2 \frac{\sigma_r^2}{E^2}} \quad \text{et} \quad \sigma_{cJ} = - \sqrt[3]{\frac{2}{3} \mu_s^2 \sigma_r^2 E}$$

B.1.c.3.) Application numérique - Conclusion

Application numérique :

$$\mu_s = 0,50$$

$$\sigma_r = -0,2 \text{ MPa}$$

$$E_z = 5,0 \text{ GPa}$$

Nous trouvons $\sigma_{cJ} = -3 \text{ MPa}$ et $n = 12$ spires (si $l_1 = 5 \text{ mm}$). Cette fois, la contrainte de micro-flambage est relativement élevée et de l'ordre de grandeur de la tension d'enroulement (10 MPa). Par conséquent, l'apparition d'un micro-flambage des spires dépend des cas.

Selon la valeur de la contrainte σ dans la direction considérée, nous avons le schéma suivant :

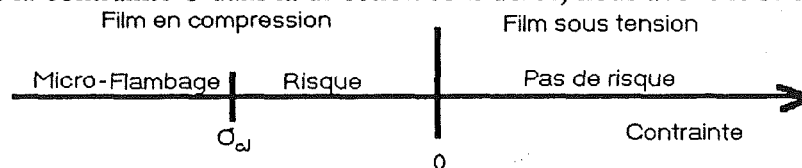


Figure V.9 : risque de micro-flambage

Conclusion :

On propose ici une formulation de la contrainte critique de micro-flambage reposant sur la caractérisation des effets du *glissement*, de la *contrainte radiale* et du *coefficient de frottement*. L'expression de la contrainte critique a été obtenue sous des hypothèses plus ou moins valides : expression de la contrainte de cisaillement, relation contrainte-déformation axiales...

B.1.d.) Micro-flambage des composites fibres/matrice

B.1.d.1.) Introduction

Considérons un matériau composite constitué de fibres (diamètre ≈ 10 à $20 \mu\text{m}$) à propriétés mécaniques élevées (verre, aramide, carbone) réparties dans une matrice polymère (epoxyde).

Les dimensions typiques des éprouvettes sont de 50 mm de longueur sur 1,5 mm d'épaisseur et 8 mm de largeur. Les fibres étant unidirectionnelles dans le sens de la longueur.

Si on soumet de telles éprouvettes à une contrainte de compression pure dans le sens de la longueur, on observe à partir d'une valeur seuil, une chute des propriétés mécaniques de l'éprouvette :

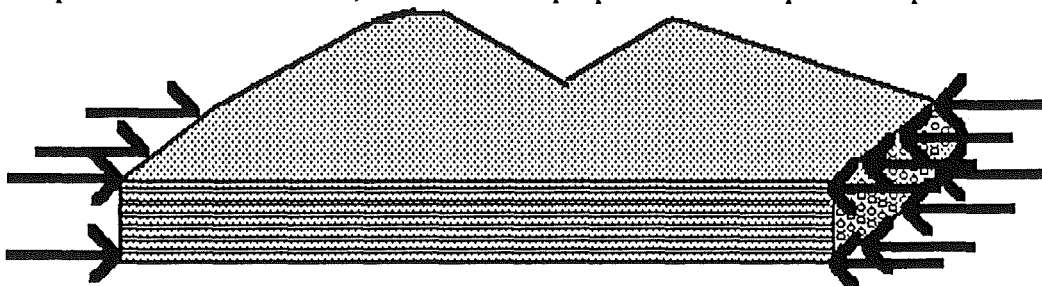


Figure V.10 : composite fibres unidirectionnelles / matrice

L'existence de ce seuil traduit l'existence d'altérations au sein du matériau. On associe généralement ces détériorations à des *micro-flambages des fibres* dans la matrice.

La compréhension des conditions critiques de micro-flambage revêt une *grande importance industrielle*. Pour cette raison, de nombreux auteurs ont essayé de modéliser le micro-flambage des matériaux composites à fibres unidirectionnelles.

B.1.d.2.) Modélisation

Nous introduisons l'approche due à GRANDIDIER, GARDIN, FERRON et POTIER-FERRY [1991a, 1991b et 1992a, 1992b].

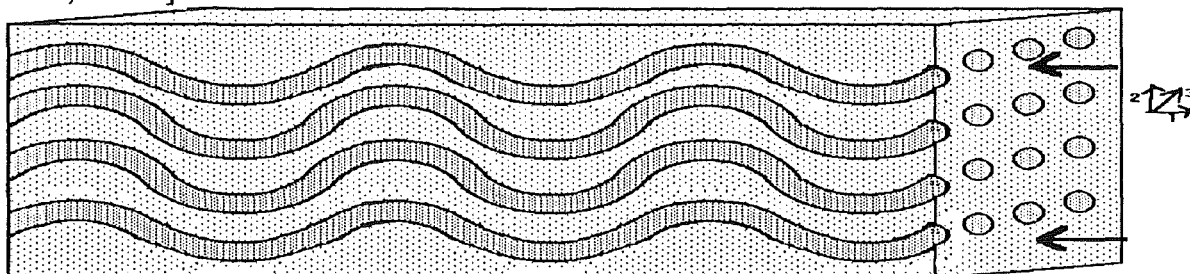


Figure V.11 : micro-flambage d'un composite matrice/fibres unidirectionnelles

Nous ne reprendrons pas ici l'ensemble des calculs développés par GARDIN et POTIER-FERRY [1992b]. Leurs *principales hypothèses, déduites d'observations* sont :

→ le micro-flambage est *bidimensionnel* 1-2 : *les effets dans la direction 3 sont négligés* (la largeur du composite est très supérieure à son épaisseur)

→ le micro-flambage est *intérieur* dans la direction 2 : les fibres situées aux bords ne flambent pas alors que celles qui sont situées au centre ont la plus grande amplitude de micro-flambage. Les auteurs introduisent alors une *dépendance de la flèche en x_2 sous la forme d'un sinus* (celle en x_1 étant traditionnellement écrite sous la forme d'un sinus) :

$$(5.8) \quad v(x_1, x_2) = v_0 \sin\left(\pi \frac{x_1}{l_1}\right) \sin\left(\pi \frac{x_2}{l_2}\right)$$

avec :

l_1 = demi-période de micro-flambage dans la direction 1 (sens des fibres), inconnue

l_2 = épaisseur du composite ($\approx 1,5$ mm)

Il est nécessaire d'y ajouter d'*autres hypothèses qui faciliteront la modélisation* :

→ le rapport de la distance interfibres sur l'épaisseur du composite, notée η , est négligeable devant 1 : $\eta \approx 40 \mu\text{m} / 1,5 \text{ mm}$

→ les lois de comportement de la matrice et de la fibre sont Hookéennes

→ le rapport des rigidités de la matrice sur celles de la fibre est de l'ordre de η^2 . Cette hypothèse est justifiée par GRANDIDIER et POTIER-FERRY [1991a] :

$$E_{\text{fibre carbone}} \approx 200 \text{ à } 300 \text{ GPa} \quad E_{\text{matrice epoxyde}} \approx 3 \text{ à } 4 \text{ GPa}$$

→ les contraintes normales et le déplacement sont *continus* à l'interface fibre/matrice.

→ Ils utilisent la *méthode des échelles multiples* et procèdent à des *développements asymptotiques* des déplacements, contraintes et modules (en η^{-1} , η^0 , η^1 , η^2 et η^3)

Dans ce cadre, GARDIN et POTIER-FERRY [1992b] obtiennent l'équation différentielle en déplacement rapportée aux grandeurs macroscopiques :

$$(5.9) \quad \eta^2 l_2^2 \frac{E_1^F * f^3}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + \left[\frac{G^M}{1-f} - f \sigma^F \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{E_1^M E_2^M}{(1-f) [E_1^M - (\nu^M)^2 E_2^M]} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0$$

Avec :

ν^M = coefficient de POISSON de la matrice E_1^M = module d'YOUNG de la matrice (Pa)

E_1^F = module d'YOUNG de la matrice dans la direction i (Pa)

G^M = module de COULOMB de la matrice (Pa)

f = fraction volumique de fibre v = flèche dans la direction de micro-flambage (m)

σ^F = contrainte appliquée à la fibre (Pa)

Les deux premiers termes de cette équation sont classiques (ROSEN [1964]) : le premier traduit la flexion propre de la fibre et le deuxième traduit le moment dû au cisaillement de la matrice. En revanche, le troisième terme de dérivée transverse est moins classique : il met en évidence *l'influence des effets transverses*.

GARDIN et POTIER-FERRY cherchent alors une solution de la forme qu'ils se sont imposés (expression (5.8) avec deux sinus). En reportant cette expression dans l'équation différentielle, ils obtiennent la formulation de la contrainte critique dans la fibre :

$$(5.10) \quad \sigma_c^F(l_1, l_2) = - \left[\frac{E_1^M E_2^M}{f(1-f) [E_1^M - (\nu^M)^2 E_2^M]} \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{G^M}{f(1-f)} + \frac{E_1^F * f^2}{12} \frac{l_2^2}{l_1^2} \pi^2 \eta^2 \right]$$

σ_c^F dépend de l_1 et de l_2 . Nous avons dit que, par hypothèse, l_2 est égal à l'épaisseur du composite. En revanche, l_1 est la valeur qui conduit à la plus faible contrainte critique :

$$(5.11) \quad \frac{\partial}{\partial l_1} \sigma_c^F(l_1, l_2) = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 \sqrt[4]{\pi^2 \frac{f^3(1-f)}{12} * \frac{E_1^F * [E_1^M - (\nu^M)^2 E_2^M]}{E_1^M E_2^M} \eta^2}$$

Ainsi, l_1 devient fonction des propriétés mécaniques et des dimensions du composite.

En reportant la valeur de l_1 , la contrainte critique globale (matrice + fibre) s'écrit finalement :

$$(5.12) \quad \sigma_{cGPF} = - \left[f + (1-f) \frac{E_1^M}{E_1^F} \right] \left[\frac{G^M}{f(1-f)} + \frac{\pi \eta}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{f}{1-f}} \sqrt{E_1^F \frac{E_1^M E_2^M}{E_1^M - (\nu^M)^2 E_2^M}} \right]$$

Résumé :

GARDIN et POTIER-FERRY proposent un *modèle bidimensionnel de micro-flambage* associé à la prise en compte de l'*anisotropie* du composite et certains effets transverses. La demi-période de micro-flambage devient une fonction des autres paramètres.

Ce modèle repose également sur l'hypothèse de l'absence de glissement à l'interface. Le cisaillement interfacial n'est pas calculé. Il n'est d'ailleurs pas calculable directement puisqu'il dépend de l'amplitude de micro-flambage v_0 qui n'apparaît pas dans le modèle de GARDIN et POTIER-FERRY. L'influence de la contrainte transversale n'apparaît pas dans le modèle.

Les auteurs ont effectué quelques applications numériques de σ_{cGPF} . Ils ont obtenu des valeurs en bon accord avec l'expérimentation, mais globalement *sensiblement supérieures*. Ils ont donc abouti à la nécessité de prendre en considération les défauts géométriques et les dégradations du matériau qui sont susceptibles de diminuer σ_{cGPF} .

B.1.e.) Modélisation du micro-flambage des films

Introduction

Nous avons présenté deux approches reposant sur la prise en considération de deux phénomènes :

- *glissement interfacial* mais l'anisotropie est négligée,
- *anisotropie* mais le glissement interfacial est négligé.

Il nous est difficile de savoir lequel des deux phénomènes est prépondérant dans notre cas. La prise en compte du glissement se heurtant à plus de difficultés, nous proposons donc de *partir du modèle de GARDIN et POTIER-FERRY* et de chercher à *adapter au micro-flambage des films*.

B.1.e.1.) cadre de la transposition

Le micro-flambage des fibres et celui des films diffèrent sur trois principaux points :

-1. les constituants du matériau composite

Dans le cas du composite matrice/fibres, la matrice est un matériau isotrope de faible module d'YOUNG et la fibre est un matériau isotrope de fort module d'YOUNG.

Par analogie, nous pourrions considérer que :

- la couche de film correspond à la fibre : *film = fibre*
- la couche d'air et de rugosités correspond à la matrice : *rugosités = matrice*

Nous avons reporté sur la figure V.12 les conditions de cette transposition :

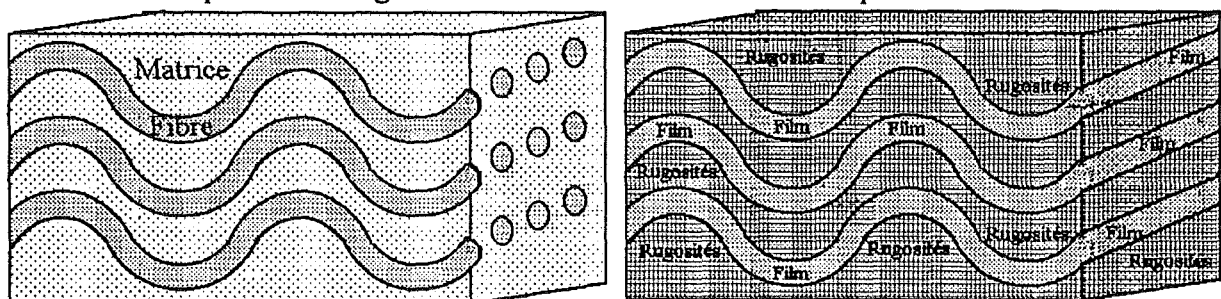


Figure V.12 : analogie composite fibre/matrice ↔ empilement de couches de film

La seule limitation que l'on peut y voir concerne l'ordre de grandeur de la fraction volumique : 0,30 à 0,60 pour les composites à fibres longues et 0,95 pour le film enroulé et la très forte anisotropie de la "matrice".

-2. la symétrie

Dans le premier cas, il s'agit de *cylindres* alors que dans le second, il s'agit de *plans parallèles*. La transposition sera simple parce que *le modèle de GARDIN et POTIER-FERRY est bidimensionnel* :

→ les effets dans la direction 3 sont *négligés* par hypothèse par GARDIN et POTIER-

FERRY (ce qui peut être *constestable* dans le cas de fibres unidirectionnelles)

→ les effets dans la direction 3 sont *inexistants* dans le cas de l'empilement des films.

En fait, il faut considérer que le micro-flambage des films est bidimensionnel alors que le micro-flambage des fibres unidirectionnelles est tridimensionnel.

Les dimensions des fibres sont caractérisées par le rapport η de la distance interfibres sur les dimensions du rouleau et par la fraction volumique f . Par analogie, nous proposons :

$$(5.13) \quad \begin{cases} \text{distance interfibres} = e_f + e_a \\ l_2 \approx 20 \text{ à } 50 \text{ mm (distance au bord)} \\ f = \frac{e_f}{e_f + e_a} \text{ et } \eta = \frac{e_f}{l_2} \end{cases}$$

-3. la nature du micro-flambage

En accord avec quelques observations, POTIER-FERRY [1992] propose de représenter la flèche des fibres sous la forme d'un double sinus (relation (5.8)). Il n'est pas certain que cette formulation soit satisfaisante dans le cas du rouleau de film. En particulier, l'hypothèse de la flèche nulle aux bords peut être contestable.

Il ne faut toutefois pas oublier que POTIER-FERRY introduit cette hypothèse concernant le profil de la flèche par pure simplification. Il est en effet possible de se contenter d'introduire une fonction quelconque $v(x_2)$ définie par ses seules conditions aux limites. On obtient alors une équation différentielle en $v(x_2)$ que l'on peut résoudre (on peut ainsi vérifier que si les coefficients de l'équation différentielle sont constants, le sinus est une solution possible).

Nous ne chercherons pas à affiner les hypothèses du modèle proposé par POTIER-FERRY mais simplement à savoir s'il conduit à une première estimation satisfaisante. Par suite, nous conserverons cette forme de la flèche avec un double sinus, même si elle plus critiquable dans notre cas.

-4. la variation transverse des propriétés

POTIER-FERRY suppose que les matériaux ont des propriétés invariantes dans la direction transverse. Cette hypothèse est plus contestable dans le cas du rouleau de film : le fort gradient de contrainte radiale va induire un fort gradient de module d'YOUNG radial.

En particulier, d'après la remarque précédente, une telle distribution de E_r risque d'affecter la forme de la loi $v(x_2)$ (l'équation différentielle en $v(x_2)$ ne sera plus à coefficients constants).

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous ne chercherons pas à affiner les hypothèses du modèle proposé par POTIER-FERRY. Nous prendrons une valeur moyenne de E_r .

-5. les conditions à l'interface

Nous supposerons également qu'il n'y a pas de glissements à l'interface.

Nous nous proposons donc de *reprendre directement les formules établies par GARDIN et POTIER-FERRY [1992] dans leur forme actuelle en les transposant au cas du micro-flambage des films.*

B.1.e.2.) Estimation des coefficients

Précisons la valeur des différents coefficients (E_1^F , E_2^F , E_1^M ...) dans le cas du rouleau de film.

E_1^F : la couche de film sera assimilée à la fibre $E_1^F = (E_z)_{\text{film}} \approx 5,0 \text{ GPa}$

E_2^M : L'espace compris entre les deux couches de film sera assimilé à la matrice. E_2^M peut être déduit des propriétés globales du composite dans la direction 2 en considérant un classique couplage de REUSS entre les deux constituants :



Figure V.13 : Couplage de REUSS entre le film et les rugosités

Nous avons en effet :

$$\frac{1}{(E_r)_{\text{spire}}} = \frac{e_f}{e_f + e_a} * \frac{1}{(E_r)_{\text{film}}} + \frac{e_a}{e_f + e_a} * \frac{1}{E_2^M} \quad \text{avec} \quad (E_r)_{\text{film}} \gg E_2^M$$

d'où $E_2^M \approx \frac{e_a}{e_f + e_a} * (E_r)_{\text{spire}}$

E_1^M est inconnu, mais probablement inférieur à E_2^M de plusieurs ordres de grandeur

ν^M est défini par $\nu^M = \epsilon_2 / \epsilon_1$ sous une contrainte de la forme $(\sigma_1, 0, 0)$. D'après les considérations de l'annexe II.B.5 concernant $(\nu_{r\theta})_{\text{spire}}$ et $(\nu_{\theta r})_{\text{spire}}$ pour des corps fortement anisotropes, nous pouvons écrire :

$$\nu^M \approx 0,30 * \frac{E_1^M}{E_2^M}$$

On vérifie que le rapport des différents modules du composite film/rugosité reste du même ordre de grandeur que pour le composite fibres/matrice, soit un *facteur proche de 100* afin de pouvoir reprendre la même approche d'échelles multiples.

B.1.e.3.) Demi-période de micro-flambage

Considérons maintenant l'expression (5.11) de la demi-période de micro-flambage dans la direction x_1 . Compte tenu des ordres de grandeurs des paramètres E_1^M , E_2^M , ν^M , e_a et e_f , nous avons les simplifications suivantes :

$$\begin{cases} E_1^M - (\nu^M)^2 E_2^M \approx E_1^M \\ e_f + e_a \approx e_f \end{cases}$$

D'où l'expression réduite de cette demi-période de micro-flambage :

$$(5.14) \quad l_1 = \sqrt{\frac{\pi l_2}{12} \sqrt{e_f e_a}} \sqrt{\frac{(E_z)_{\text{film}}}{(E_r)_{\text{spire}}}}$$

Cette expression dépend de la demi-période de micro-flambage dans la direction transverse l_2 , sous l'hypothèse du micro-flambage sinusoïdal). l_2 est donc difficile à estimer : $l_2 \approx 20$ à 50 mm.

Application numérique :

$$l_2 \approx 20 \text{ à } 50 \text{ mm} \quad e_f \approx 14,5 \text{ } \mu\text{m} \quad e_a \approx 0,3 \text{ à } 0,6 \text{ } \mu\text{m} \quad (E_z)_{\text{film}} \approx 5,0 \text{ GPa} \quad (E_r)_{\text{spire}} \approx 2 \text{ à } 50 \text{ MPa}$$

Nous trouvons $l_1 \approx 3$ à 8 mm.

Les différents paramètres dont les valeurs sont mal connues (l_2 , $(E_r)_{\text{spire}}$...) interviennent à la puissance $+0,50$ et $-0,25$: *leur effet sur l_1 est donc peu sensible*. Seul leur *ordre de grandeur* est important et *il n'est* (heureusement) *pas nécessaire de connaître précisément l_2 et $(E_r)_{\text{spire}}$* .

Nous retrouvons bien l'ordre de grandeur de la demi-période de micro-flambage généralement observé expérimentalement sur les rouleaux de films de polyester.

B.1.e.4.) Contrainte critique de micro-flambage

Considérons maintenant la formule (5.12). L'utilisation des mêmes hypothèses que pour le calcul de l_1 nous permet déjà de simplifier l'expression de $\sigma_{c\text{GPF}}$. Le module de cisaillement de la matrice G^M est inconnu. Rappelons que celle-ci possède une structure tout à fait particulière :

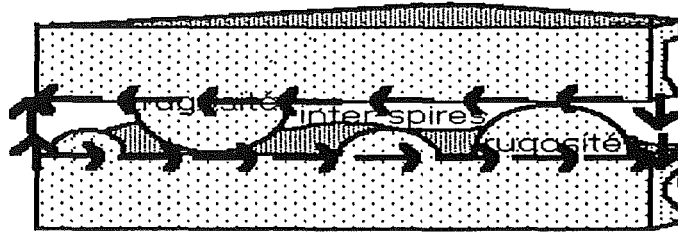


Figure V.14 : cisaillement de la couche interspires

Du fait de la faible valeur de l'aire de contact et donc de la faible quantité de matière sollicitée dans le cisaillement, il est donc tout à fait probable que celui-ci soit relativement facile : nous nous proposons donc de négliger le terme qui contient G^M devant les autres termes.

Sous toutes ces hypothèses, il vient ainsi :

$$(5.15) \quad \sigma_{c\text{GPF}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{e_f}{l_2} \sqrt{\frac{e_f}{e_a}} \sqrt{(E_z)_{\text{film}} (E_r)_{\text{spire}}}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} l_2 &\approx 20 \text{ à } 50 \text{ mm} & e_f &\approx 14,5 \text{ } \mu\text{m} & e_a &\approx 0,3 \text{ à } 0,6 \text{ } \mu\text{m} \\ (E_z)_{\text{film}} &\approx 5,0 \text{ GPa} & (E_r)_{\text{spire}} &\approx 5 \text{ à } 50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Nous trouvons des valeurs comprises entre 3 et 45 MPa. Comme précédemment, l'estimation de $\sigma_{c\text{GPF}}$ se heurte à l'incertitude portant sur l_2 .

L'ordre de grandeur de la contrainte critique est compatible (tout en étant un peu élevé) avec celui des contraintes internes régnant dans le rouleau, traduisant ainsi le *risque potentiel de micro-flambage*.

Conclusion

Nous avons *transposé au cas du micro-flambage des films un modèle bidimensionnel de micro-flambage des composites à fibres unidirectionnelles* dans les conditions suivantes :

- les hypothèses concernant les ordres de grandeur des dimensions et propriétés mécaniques sont applicables,
- un nouveau paramètre (l_2) associé à la dimension du composite dans la direction transverse apparaît dans le modèle, mais seule la connaissance de son *ordre de grandeur* est suffisante (de plus l'origine de l_2 résulte d'un choix de flèche $v(x_2)$ qui peut être repris et amélioré),
- la *demi-période de micro-flambage devient une fonction des propriétés du système*,
- l'estimation de cette demi-période est en *plein accord avec l'expérimentation*,
- l'estimation de la contrainte critique conduit à des ordres de grandeur *satisfaisants*.

Nous pensons donc que *le modèle* développé par GARDIN et POTIER-FERRY *peut être transposé au cas du micro-flambage des films* et ainsi fournir une *première base de réflexion théorique*.

B.1.f.) Etude de σ_{cGPF}

Nous proposons maintenant de discuter de l'influence de deux grandeurs sur cette contrainte critique : la contrainte radiale de compression et les écarts à la symétrie.

B.1.f.1.) influence de la contrainte radiale

Le modèle que nous utilisons repose sur l'hypothèse de l'absence de glissement à l'interface. Les conditions de ce glissement sont supposées être essentiellement définies par la valeur de la contrainte radiale. Cela ne signifie pas pour autant que l'influence de σ_r est négligée. Elle apparaît en effet indirectement dans la formulation de σ_{cGPF} par l'intermédiaire de e_a et $(E_r)_{spire}$. En effet, si e_a a atteint l'équilibre, e_a et $(E_r)_{spire}$ sont reliés à σ_r et aux coefficients h_0 et P_0 de la fonction $f_{\text{équil}}$:

$$\begin{cases} e_a = f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité}) = h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}} \\ (E_r)_{spire} = e_f \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_r} f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité}) \right]^{-1} = 2 \frac{e_f}{e_a} \sqrt{-\sigma_r P_0} \end{cases}$$

La contrainte critique σ_{cGPF} peut ainsi être reformulée sous la forme :

$$(5.16) \quad \sigma_{cGPF} = \pi \frac{e_f^2}{h_0 l_2} \sqrt{\frac{2}{3} (E_z)_{\text{film}} \sqrt{-\sigma_r P_0}} e^{\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}}$$

Cette équation établit ainsi d'une manière plus ou moins complexe l'influence conjuguée de la *contrainte radiale* et de la *topographie de surface* sur la contrainte critique de micro-flambage.

Application numérique :

$$\begin{aligned} l_2 &\approx 50 \text{ mm} & e_f &\approx 14,5 \text{ } \mu\text{m} & (E_z)_{\text{film}} &\approx 5,0 \text{ GPa} \\ \text{film} & \text{ VIDÉO 1 : fonction } f_{\text{équil}} : h_0 &= 0,495 \text{ } \mu\text{m} & \text{ et } P_0 &= 0,427 \text{ MPa} \end{aligned}$$

VIDÉO 2 : fonction $f_{\text{équil}}$: $h_0 = 0,476 \mu\text{m}$ et $P_0 = 0,367 \text{ MPa}$

D'après le tableau II.1, si e_a varie entre $0,16$ et $0,37 \mu\text{m}$, σ_r varie entre $0,005$ et $0,5 \text{ MPa}$.

Nous obtenons ainsi les variations de σ_{cGPF} avec σ_r suivantes :

Tableau V.2 : variation de la contrainte critique de micro-flambage avec σ_r

Contrainte σ_r (MPa)	Contrainte critique (MPa)	
	VIDÉO 1	VIDÉO 2
-0,005	-0,37	-0,37
-0,01	-0,46	-0,46
-0,02	-0,59	-0,59
-0,05	-0,83	-0,85
-0,1	-1,14	-1,18
-0,2	-1,65	-1,74
-0,5	-3,09	-3,37
-1,0	-5,75	-6,50
-2,0	-12,9	-15,3

Il semble que l'ordre de grandeur de la contrainte critique de micro-flambage calculé avec ce modèle soit toujours légèrement trop élevé dans le domaine qui nous intéresse ($0,1$ à $0,5 \text{ MPa}$). On peut probablement attribuer ce résultat à l'absence de prise en compte du *glissement radial/tangentiel*.

Il ne faut également pas oublier que ce calcul concerne le micro-flambage d'un film n'ayant *aucun défaut de symétrie* (sousépaisseur...).

Or, de tels écarts à la symétrie sont susceptibles de diminuer considérablement la valeur locale de la contrainte radiale, conduisant ainsi à des ordres de grandeur de σ_{cGPF} compatibles avec σ_θ ou σ_z . GARDIN et POTIER-FERRY avaient émis les mêmes remarques après une application numérique conduisant à un ordre de grandeur de la contrainte critique sensiblement trop élevé.

Dans ce cas, le modèle actuel traduirait la grande difficulté de micro-flambage d'un film parfait.

B.1.f.2.) influence d'un écart à la symétrie

Nous allons dans ce paragraphe discuter les effets d'un écart à la symétrie des propriétés du film sous la forme d'une sousépaisseur locale *dans la direction de micro-flambage*. Nous avons précisé dans le tableau II.1 du chapitre I la variation de la pression d'équilibre avec l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle d'air.

Reprenons ce calcul dans un plus large domaine d'épaisseur de la couche d'air (e_a compris entre $0,15$ et $0,60 \mu\text{m}$) dans le cas particulier du film de référence VIDÉO 2.

Remarque :

Nous déduisons la relation entre l'épaisseur et la pression de la fonction $f_{\text{équil}}$. Cela suppose implicitement que la zone considérée soit à l'*équilibre*.

Nous avons en particulier montré que dans un tel cas, l'épaisseur de la couche d'air est obligatoirement inférieure au coefficient h_0 de cette fonction $f_{\text{équil}}$. On comprend bien qu'une telle inégalité ne soit pas nécessairement satisfaite. Nous n'avons malheureusement pas d'autres formulations disponibles pour caractériser σ_r . Pour une épaisseur donnée, la formule $f_{\text{équil}}$ conduit à un **majorant** de la contrainte radiale de compression : elle *sous-estime donc les effets* de l'écart à la symétrie, ce qui va dans le bon sens.

Nous avons reporté dans le tableau V.3 l'évolution de la contrainte radiale en fonction de l'épaisseur dans une zone ayant une *sous-épaisseur* de $\Delta e_f = -0,10 \mu\text{m}$ par rapport au niveau moyen (soit 0,7% de l'épaisseur nominale du film) pour le film VIDÉO 1 :

Tableau V.3 : variation de σ_r et de σ_{CGPE} avec l'épaisseur de la couche d'air à l'équilibre

Epaisseur e_a (μm) moyenne \rightarrow sous-épaisseur	Contrainte σ_r (MPa) moyenne \rightarrow sous-épaisseur	Contrainte critique (MPa) moyenne \rightarrow sous-épaisseur
0,15 \rightarrow -0,25	-0,61 \rightarrow -0,20	-3,63 \rightarrow -1,65
0,20 \rightarrow -0,30	-0,35 \rightarrow -0,11	-2,37 \rightarrow -1,18
0,25 \rightarrow -0,35	-0,20 \rightarrow -0,051	-1,65 \rightarrow -0,84
0,30 \rightarrow -0,40	-0,11 \rightarrow -0,019	-1,18 \rightarrow -0,57
0,35 \rightarrow -0,45	-0,051 \rightarrow -0,0039	-0,84 \rightarrow -0,34

D'après ce tableau, une variation de -0,7% de l'épaisseur nominale du film se traduit par une variation des contraintes radiale et critique locale de -70%. Ce résultat met en évidence la nécessité de prendre en considération les éventuels écarts à la symétrie du film.

Conclusion

Le micro-flambage des composites à fibres longues unidirectionnelles offre un **grand nombre d'analogies** avec celui du film enroulé. Nous nous sommes donc intéressés à une modélisation du micro-flambage des composites au cas du film enroulé. Les hypothèses de cette modélisation s'appliquant au film, nous avons procédé à une transposition directe des résultats.

La demi-période de micro-flambage, qui apparaît dans ce modèle comme une fonction des propriétés globales du système a pu être comparée favorablement aux résultats expérimentaux.

Nous avons obtenu des ordres de grandeur des contraintes critiques sensiblement supérieurs à ceux des contraintes régnant dans le rouleau de film. Nous attribuons cet écart à la **nécessité de prendre en considération les écarts à la symétrie du film**. On peut en effet montrer qu'une sous-épaisseur locale de -0,7% de l'épaisseur nominale du film se traduit par une chute considérable (-70%) de la contrainte critique de micro-flambage.

Cette transposition apparaît donc comme une **première réflexion théorique sur les conditions critiques de micro-flambage du film enroulé**.

B.2.) Application aux instabilités d'enroulement

Introduction

Nous avons présenté au paragraphe précédent un modèle susceptible d'estimer les contraintes critiques d'apparition d'instabilité d'enroulement. Bien que reposant sur de nombreuses *hypothèses*, il a toutefois permis de retrouver quelques résultats empiriques. Il peut à ce titre fournir une première base de réflexion théorique.

Ajoutons qu'une véritable modélisation des instabilités d'enroulement en termes de contraintes résiduelles ne saurait être développée sans s'appuyer parallèlement sur une *étude expérimentale approfondie des instabilités d'enroulement*, ce qui n'a pas été le cas.

Notre analyse restera donc essentiellement *qualitative*.

Fondamentalement, on peut distinguer deux familles d'instabilités :

→ *celles qui apparaissent après l'enroulement ou pour des spires déjà formées.*

Il s'agit par exemple des cannelures ou des annelures et défauts "vis" post-enroulement'.

Dans ce cas, il faut étudier l'état des contraintes au moment de l'apparition de l'instabilité, c'est à dire généralement celui qui résulte de la dernière superposition : c'est ce que nous faisons.

→ *celles qui apparaissent au moment de l'enroulement de la couche considérée.*

Il s'agit par exemple des annelures pendant la décélération ou bien des défauts "vis" qui se forment pendant l'enroulement immédiatement au voisinage de la dernière couche.

Dans ce cas, il faut étudier l'état de contrainte au moment de leur apparition, c'est à dire qu'il faut suivre l'état des contraintes dans les dernières spires au fur et à mesure de l'enroulement : bien que ce ne soit pas ce que nous faisons ici, cela ne soulève aucune difficulté particulière.

Toutefois, ces deux instabilités d'enroulement s'interprètent de la même manière. Seules, les conditions d'obtention de l'état des contraintes les caractérisant diffèrent.

Nous avons dit précédemment que les instabilités d'enroulement s'interprètent essentiellement en termes de micro-flambage dans deux directions privilégiées : tangentielle et axiale.

B.2.a.) Cannelure : micro-flambage tangentiel

Sous certaines conditions, les spires de film situées en profondeur présentent une instabilité d'enroulement qui se traduit par le défaut d'aspect suivant :

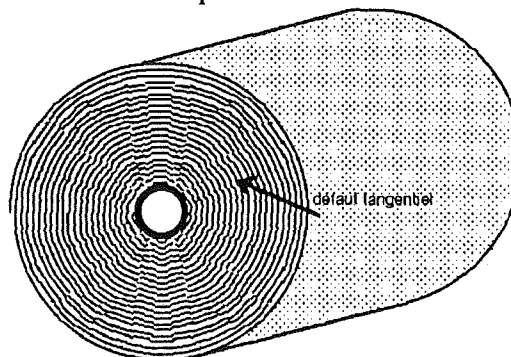


Figure V.15 : défaut cannelure

Il s'agit d'un défaut intérieur au rouleau de film. Nous proposons d'interpréter cette instabilité en termes de *micro-flambage dans la direction tangentielle*.

Nous avons vu au chapitre II que la contrainte tangentielle de chaque spire σ_θ peut s'écrire :

$$\sigma_\theta = [\sigma_\theta]_0 + \sigma_e$$

Avec :

$$\sigma_\theta = \text{contrainte tangentielle (Pa)} \quad [\sigma_\theta]_0 = \text{tension résiduelle (Pa)}$$

$$\sigma_e = \text{contrainte de compression élastique (Pa)}$$

Initialement, σ_θ est positive ($[\sigma_\theta]_0$ initial ≈ 10 MPa). Au fur et à mesure de l'enroulement, l'augmentation de $\Delta[\sigma_\theta]_0$ et la diminution de σ_e se traduisent par une chute de σ_θ qui peut ainsi devenir nulle voire négative. Si elle devient inférieure à la valeur critique de micro-flambage σ_{cGPF} , nous aurons apparition de l'instabilité tangentielle d'enroulement :

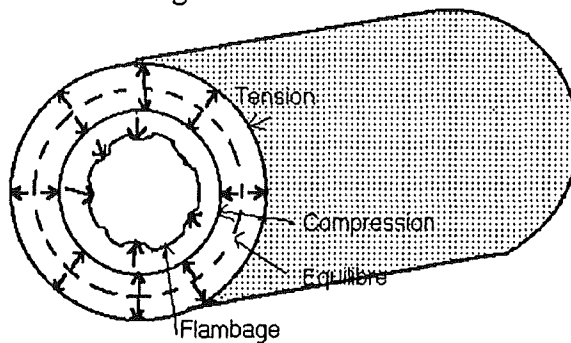


Figure V.16 : interprétation du défaut cannelure

Nous connaissons les valeurs de σ_θ et de σ_{cGPF} . Il est donc tout à fait possible de les comparer et de définir le critère suivant d'apparition de l'instabilité tangentielle :

$$\sigma_\theta < \sigma_{cGPF} \Rightarrow \text{cannelure}$$

Du fait des fluctuations des différents paramètres autour des valeurs moyennes, il est possible que certaines conditions ne conduisent pas systématiquement à 100% ou à 0% de rouleaux avec défaut, mais à des valeurs intermédiaires. De toute façon, il est clair que plus σ_θ et $[\sigma_\theta]_0$ seront faibles, plus le risque d'apparition d'instabilité d'enroulement sera élevé :

$$(5.17) \quad \begin{cases} \sigma_\theta \text{ plus petit} \\ [\sigma_\theta]_0 \text{ plus petit} \end{cases} \Rightarrow \text{risque de défaut cannelure plus élevé}$$

On accordera également une grande importance au *nombre de spires* se trouvant dans cette situation critique. Le risque sera en effet plus important si plusieurs centaines de spires se trouvent dans cette situation que s'il n'y en a qu'une seule.

Il n'y a pas d'effet cumulatif des écarts à la symétrie dans la direction tangentielle, donc *pas de sensibilité particulière aux écarts à la symétrie*.

Nous avons étudié au chapitre III (tableau III.7) différentes conditions d'enroulement. Nous avons obtenu les résultats suivants dans la zone centrale :

→ σ_θ est uniforme et varie selon les conditions d'enroulement entre -0,15 et -0,25 MPa

→ σ_r variant fortement dans la zone centrale entre -0,07 et -0,17 MPa ($\sigma_\theta = -0,15$ MPa) ou bien entre -0,18 et -0,28 MPa ($\sigma_\theta = -0,25$ MPa)

Ces valeurs de σ_r conduisent à des valeurs de σ_{cGPF} comprises entre 10 et 20 MPa.

Bien qu'aucun défaut cannelure n'ait été observé avec ces conditions d'enroulement, l'ordre de grandeur de σ_{cGPF} nous semble un peu élevé.

Remarquons qu'en comparant un niveau croissant de tension avec un niveau décroissant de tension (tableau III.9 et figures III.14 et III.15), nous obtenons dans le premier cas :

→ des valeurs de σ_θ plus faibles

→ un profil de σ_r plus dissymétrique : plus faible au début et plus élevé à la fin de l'enroulement

D'après notre interprétation de la cannelure en termes de micro-flambage, **une loi de tension croissante induit un risque de cannelure plus important qu'une loi de tension décroissante**, à niveau global équivalent. Les résultats sont identiques, mais moins sensible pour la **loi d'appui**.

Ce résultat est en plein accord avec les observations expérimentales.

B.2.b.) Défaut "vis" : micro-flambage axial

Sous certaines conditions, les spires de film présentent un défaut d'aspect typique :

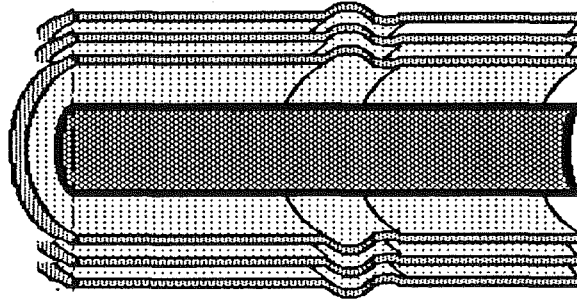


Figure V.17 : défaut "vis"

Cette instabilité peut apparaître soit à l'intérieur soit superficiellement. Nous proposons de l'interpréter en terme de **micro-flambage axial**.

La tension tangentielle imposée au film avant l'enroulement induit sur celui-ci une déformation axiale (variation de sa largeur) définie par :

$$\frac{\Delta l_f}{l_f} = \nu_{\theta z} \frac{[\sigma_\theta]_0}{E_\theta}$$

Application numérique :

$$l_f = 1500 \text{ mm} \quad \nu_{\theta z} = 0,28 \quad [\sigma_\theta]_0 = 10 \text{ MPa} \quad E_\theta = 4,50 \text{ GPa}$$

Nous trouvons $\Delta l_f = 1 \text{ mm}$. Une telle diminution de la largeur est significative.

Au fur et à mesure de l'enroulement, la contrainte tangentielle diminue. La largeur du film aura ainsi tendance à réaugmenter. Si le film est bloqué en déplacement axial, ce phénomène engendre au sein du film une **contrainte axiale de compression** σ_z (chapitre III, hypothèse des déformations planes).

On comprend alors aisément que si σ_z dépasse la valeur critique de micro-flambage, nous aurons apparition du défaut d'aspect.

$$(5.18) \quad \sigma_z < \sigma_{cGPF} \Rightarrow \text{défaut "vis"}$$

Les *écarts à la symétrie axiale* à l'échelle de la formation du micro-flambage ($l_1 \approx 3 \rightarrow 8$ mm) peuvent être importants. Leurs effets ont été analysés dans le §B.1.h. de ce chapitre.

On en retiendra deux éléments :

- un film parfait offre une contrainte critique de micro-flambage relativement élevée,
- la contrainte critique chute considérablement en cas d'écart à la symétrie même faible (divisée par 3 pour $\Delta e_f = -0,7\%$).

Il en résulte que le problème de l'étude des conditions critiques de micro-flambage axial se ramène à la connaissance des écarts à la symétrie axiale.

La question principale de l'analyse du micro-flambage axial n'est donc pas :

quel est l'état critique de micro-flambage ?

mais plutôt :

quel est l'écart maxi à la symétrie axiale qui n'induit pas de micro-flambage ?

La réponse à une telle question se trouve dans l'analyse de la sensibilité de la formule (5.11) avec e_a et σ_f faite aux §B.1.h. et §B.1.g. de ce chapitre.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des *interprétations physiques des défauts d'aspect* qui apparaissent pendant ou après l'enroulement des films. Nous avons également établi différents *critères* permettant d'estimer ces risques d'apparition à partir de l'état des contraintes résiduelles. Ces critères reposent sur la notion de *glissement* ou de *micro-flambage*.

A la différence du modèle global d'enroulement qui a fait l'objet d'une validation expérimentale, ces critères ont été présentés ici *à titre indicatif*. Seule une comparaison avec l'expérience permettrait de valider pleinement ou de compléter ces critères.

L'apport nouveau du critère de micro-flambage repose sur une formulation de la demi-période de micro-flambage dont l'ordre de grandeur est satisfaisant. Celle-ci étant auparavant estimée a priori.

Dans le cas particulier du défaut "vis", nous avons mis en évidence une *très forte sensibilité aux écarts à la symétrie axiale* (irrégularités du profil d'épaisseur) : une variation locale de $-0,7\%$ de l'épaisseur nominale induit une chute de 70% de la contrainte critique. Cela signifie que *l'étude du défaut vis passe nécessairement par la caractérisation de ces écarts à la symétrie*, qui reste mal connue.

Evolution après l'enroulement

Introduction

L'état des contraintes résiduelles et le profil de l'épaisseur de la couche d'air (chapitre II) sont ceux qui résultent de la dernière itération, c'est à dire de la dernière superposition.

Or, si le rouleau se trouve dans un *état hors l'équilibre*, il est encore susceptible d'évoluer.

De plus, tous ces calculs ont été effectués en supposant que deux paramètres restent constants : la *température* et l'*humidité relative*.

Ce chapitre sera donc consacré à l'étude de l'*évolution du rouleau après sa constitution* sous l'influence de ces paramètres :

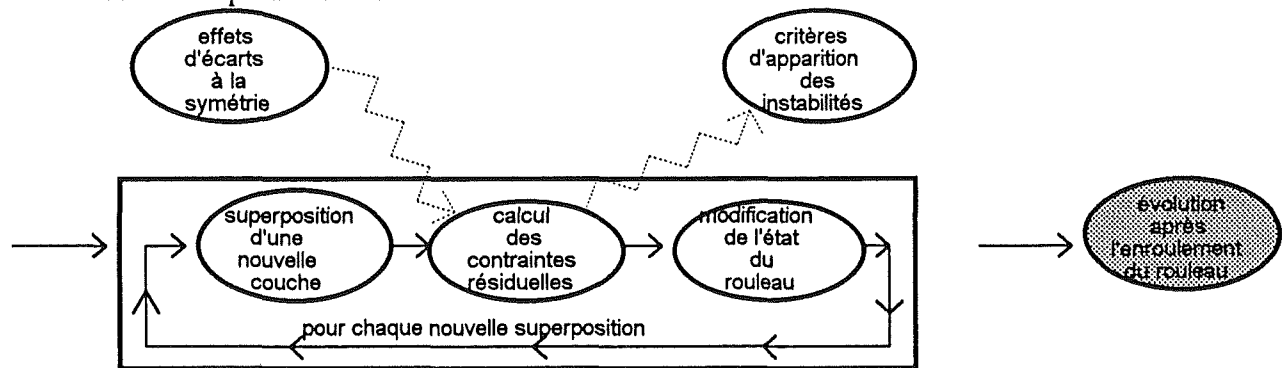


Figure VI.1 : évolution après l'enroulement

A.) Etat d'équilibre du rouleau

L'état d'équilibre est atteint lorsque l'épaisseur de chaque couche d'air est égale à sa valeur d'équilibre sous la pression considérée définie par la relation du gap d'air :

$$\text{Equilibre du rouleau} \leftrightarrow e_a(r) = f_{\text{équil}} [\sigma_r(r), \text{rugosité}] \text{ pour toutes les spires}$$

Si, pour une spire, l'épaisseur de la couche d'air est supérieure à cette valeur d'équilibre, *la spire sera dans un état hors équilibre et aura tendance à évoluer vers cet état d'équilibre*.

B.) Temps

Introduction

Juste après la fabrication du rouleau, les propriétés de celui-ci (contraintes résiduelles, couche d'air piégée...) sont celles qui résultent de la *dernière itération* (c'est à dire de la dernière superposition).

En particulier, l'épaisseur de la couche d'air à cet instant n'est pas nécessairement égale à l'épaisseur d'équilibre. Au cours du temps, sous l'action de la contrainte radiale de compression, l'épaisseur de cette couche d'air peut alors sensiblement diminuer, ce qui aura pour effet de détendre un peu les spires donc de modifier la tension résiduelle et les contraintes en général. Une telle évacuation d'air se fera préférentiellement entre les dernières spires enroulées qui contiennent plus d'air.

Ce "vieillissement" du rouleau est généralement d'autant plus marqué que celui-ci contient plus d'air, c'est à dire que sa densité est plus faible. On observe ainsi parfois l'apparition d'instabilités qui se traduisent par des défauts d'aspect sur le rouleau après la constitution de celui-ci. L'annelure est un défaut typique de 'post-enroulement'.

B.1.) Modélisation

Il est possible d'étudier les effets de ce vieillissement à l'aide du modèle de l'enroulement des films minces en *poursuivant les itérations* (calcul des contraintes et évacuation partielle de l'air) après la fin de l'enroulement jusqu'à obtention d'un équilibre entre l'épaisseur des couches d'air et la pression radiale :

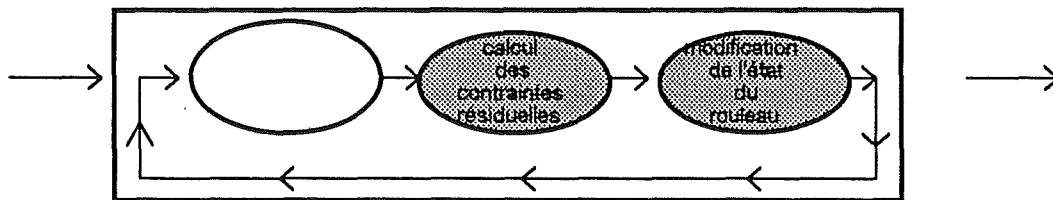


Figure VI.2 : évolution après l'enroulement

Le temps d'obtention d'un tel équilibre peut même être calculé.

Remarquons que la fonction f_{trans} de caractérisation de l'aptitude du film à laisser l'air s'échapper aura alors un rôle prépondérant.

C.) Température

Introduction

La densité du polyester, comme celle de presque tous les corps est une fonction décroissante de la température : c'est la dilatation thermique. Elle est caractérisée par les coefficients d'expansion exprimant la relation entre la déformation ε et l'écart de température ΔT :

$$(6.1) \quad \varepsilon = \alpha_T \Delta T$$

Les conséquences de la dilatation thermique des rouleaux de polyester ont été étudiées par YAGODA [1980a et 1980b] et CONNOLLY et WINARSKI [1984]. Les spires (couche de film+rugosité+air) sont anisotropes. Elles ont donc probablement des coefficients de dilatation différents dans la direction radiale, celle des rugosités $(\alpha_T)_r$ et tangentielle ou axiale, celle du film seul $(\alpha_T)_\theta$.

→ le coefficient $(\alpha_T)_\theta$ est égal à celui du PET massif : $\approx 18 \mu\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

→ le coefficient $(\alpha_T)_r$ est plus difficile à estimer du fait de l'interaction avec la couche interspires constituée de rugosités et d'air. YAGODA [1980a et 1980b] l'estime à $\approx 50 \mu\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

→ le mandrin présente également un phénomène de dilatation thermique associé à un coefficient $(\alpha_T)_m$ (ou plusieurs coefficients si celui-ci est constitué d'un matériau anisotrope).

C.1.) Modélisation

La dilatation thermique va modifier l'état des déformations résiduelles donc l'état des contraintes résiduelles.

L'introduction au sein du modèle de simulation des effets de la dilatation thermique ne soulève pas de difficulté. Il suffit pour cela de reprendre les relations du tenseur de rigidité de HOOKE et d'ajouter aux trois déformations ε_r , ε_θ et ε_z les composantes de dilatation thermique :

$$(6.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{zr} \frac{\sigma_z}{E_z} & + (\alpha_T)_r \Delta T \\ \varepsilon_\theta = -\nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_{\theta z} \frac{\sigma_z}{E_z} & + (\alpha_T)_\theta \Delta T \\ \varepsilon_z = -\nu_{zr} \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{\theta z} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} + \frac{\sigma_z}{E_z} & + (\alpha_T)_z \Delta T \end{cases}$$

Il faut alors reprendre l'écriture de l'équation différentielle d'équilibre radial en termes de déplacement. On peut montrer qu'elle fait alors apparaître un nouveau terme :

$$(6.3) \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + r \frac{d}{dr} u(r) - \lambda^2 u(r) = [(\alpha_T)_r + \frac{\alpha}{\beta} (\alpha_T)_\theta] r^2 \frac{d}{dr} \Delta T + \left[\frac{\beta - \alpha}{\beta} (\alpha_T)_r + \frac{\alpha - \eta}{\beta} (\alpha_T)_\theta \right] r \Delta T$$

Remarquons que le nouveau terme peut être fonction de r .

On peut décomposer la solution générale de cette équation en la somme de :

→ la solution $u_g(r)$ sans terme d'origine thermique.

C'est la solution générale qui satisfait à l'ensemble des équations du problème (avec intégration)

→ une solution particulière $u_p(r)$ avec le terme d'origine thermique.

La solution générale sans terme d'origine thermique $u_g(r)$ est connue et a été établie au chapitre II. Nous nous intéresserons donc essentiellement à la solution particulière avec terme d'origine thermique $u_p(r)$.

Il n'y a *pas de solution analytique de $u_p(r)$ dans le cas général* (ΔT n'a pas de formulation analytique).

En revanche, dans le cas simple où λ^2 et ΔT sont uniformes dans le rouleau, l'équation différentielle précédente se réduit à :

$$(6.4) \quad r^2 \frac{d^2}{dr^2} u_p(r) + r \frac{d}{dr} u_p(r) - \lambda^2 u_p(r) = \gamma \Delta T r$$

Où λ^2 et $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\beta} (\alpha_T)_r + \frac{\alpha - \eta}{\beta} (\alpha_T)_\theta$ sont deux constantes

Il est alors facile de montrer qu'il existe une solution analytique sous la forme :

$$(6.5) \quad u_p(r) = \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} r + A [r^{+\lambda} + B r^{-\lambda}]$$

Où A et B seront choisis de manière à satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$(6.6) \quad \begin{cases} \sigma_r(R_m) = E_c \frac{u_p(R_m)}{R_m} & \text{(contact avec le mandrin)} \\ \sigma_r(R_{rf}) = 0 & \text{(bord libre)} \end{cases}$$

En reprenant la démarche qui a été utilisée en annexe VI pour trouver A et B dans le cas de la solution générale, il est facile de trouver les expressions de A et B dans ce cas particulier :

$$(6.7) \quad \begin{cases} A = \frac{(\lambda + \gamma) R_{rf}^{-\lambda} (X - 1) R_m - (\lambda + X) R_m^{-\lambda} (\gamma - 1) R_{rf}}{(\lambda - X) (\lambda + \gamma) \left[\frac{R_m}{R_{rf}} \right]^\lambda - (\lambda + X) (\lambda - \gamma) \left[\frac{R_m}{R_{rf}} \right]^{-\lambda}} & \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} \\ B = \frac{(\lambda - \gamma) R_{rf}^{+\lambda} (X - 1) R_m - (\lambda - X) R_m^{+\lambda} (\gamma - 1) R_{rf}}{(\lambda + \gamma) R_m^{-\lambda} (X - 1) R_m - (\lambda + X) R_m^{-\lambda} (\gamma - 1) R_{rf}} \end{cases}$$

Avec $X = \frac{E_c - \alpha}{\beta}$ et $Y = -\frac{\alpha}{\beta}$

Le champ des contraintes s'écrit alors :

$$(6.8) \quad \begin{cases} \sigma_r(r) = \beta \frac{d}{dr} u + \alpha \frac{u}{r} = \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} (\alpha + \beta) + \frac{A}{r} [(\alpha + \lambda \beta) r^{+\lambda} + (\alpha - \lambda \beta) B r^{-\lambda}] \\ \sigma_\theta(r) = \alpha \frac{d}{dr} u + \eta \frac{u}{r} = \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} (\alpha + \eta) + \frac{A}{r} [(\eta + \lambda \alpha) r^{+\lambda} + (\eta - \lambda \alpha) B r^{-\lambda}] \end{cases}$$

Nous avons reporté sur la figure suivante le profil des surcontraintes induites avec pour valeurs numériques $E_r = 10$ MPa, $E_\theta = E_z = 5,0$ GPa, $\nu_{\theta r} = \nu_{zr} = \nu_{\theta z} = 0,33$ et $\Delta T = 10$ K :

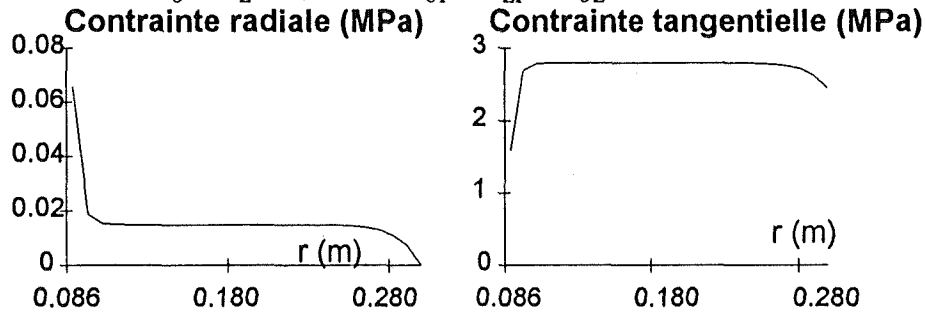


Figure VI.1 : Profil des surcontraintes radiale et tangentielle

Ces courbes peuvent se décomposer en trois parties : près du mandrin / zone centrale / extérieur. Le niveau moyen dans la zone centrale est défini par le premier terme des expressions (6.8), qui peut se simplifier sous la forme :

$$(6.9) \quad \begin{cases} \sigma_r(r) \approx \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} (\alpha + \beta) \approx (1 + \nu_{\theta r}) (\alpha_T)_\theta \Delta T E_r \approx 13 \text{ kPa} \\ \sigma_\theta(r) \approx \frac{\gamma \Delta T}{1 - \lambda^2} (\alpha + \eta) \approx (\alpha_T)_\theta \Delta T E_\theta \approx 2,5 \text{ MPa} \end{cases}$$

Ces valeurs doivent être comparées avec la tension nominale d'enroulement (environ 10 MPa) ou le niveau moyen des contraintes (0,1 - 10 MPa). On comprend donc aisément que cette variation de température (10 K) puisse avoir des conséquences sur les contraintes résiduelles donc sur les instabilités d'enroulement.

Remarques :

-1. Une composante importante de la surcontrainte thermique est liée au fait que le mandrin et les spires n'ont pas les mêmes coefficients de dilatation thermique. Il faudrait donc également introduire $[(\alpha)_T]_m$.

-2. La variation de la température accélère également les processus de relaxation ainsi que les taux de déformation anélastique et plastique. Toutefois, nous n'introduirons pas ces composantes ici puisque nous avons choisi de les négliger globalement (le comportement mécanique est supposé être strictement élastique).

C.2.) Cinétique de la diffusion

Nous avons étudié la modification de l'état des contraintes lors d'une variation instantanée de la température de ΔT dans le rouleau. Or, une telle modification ne se produit pas aussi rapidement. Un aspect important concerne donc la *cinétique* de la diffusion de la chaleur dans le rouleau.

Une prise en compte complète de ces problèmes de diffusion sort très largement du cadre de cette étude puisqu'il faudrait coupler toutes les équations précédentes (issues de la mécanique des solides, mécanique des fluides, topographie de la surface...) avec l'équation de la chaleur !

Différentes études à caractère expérimental ou théorique ont été menées à RHÔNE-POULENC FILMS dans le cadre de stages (GAUSSORGUE [1990]). Elles permettent d'avoir une idée de la cinétique de la diffusion de la température dans le rouleau. Il est alors possible d'introduire dans le modèle des valeurs de ΔT différentes pour chaque couche et d'en étudier les effets.

D.) Humidité relative

La variation du degré d'humidité relative présente qualitativement les mêmes effets que la variation de la température. Il est donc possible d'étudier l'effet de l'humidité relative en reprenant la même approche que précédemment avec des coefficients d'expansion hygrométrique appropriés (YAGODA [1980d]).

En revanche, il est probable que les mécanismes de diffusion de l'humidité relative ne soient pas exactement les mêmes que les mécanismes de diffusion de la température (ROEDERER [1991]).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différents paramètres susceptibles de modifier l'état du rouleau de film après l'enroulement. L'étude complète de certains d'entre eux suppose un couplage avec les lois de la diffusion. Cela pourrait faire l'objet d'*extensions futures*.

Il est en revanche facile de calculer les surcontraintes induites par un écart de température ou bien d'humidité uniforme dans le rouleau.

Conclusion générale

Conclusion générale

Un modèle théorique de calcul des *contraintes résiduelles dans les rouleaux* de films minces plastiques a été développé ici afin de caractériser les *états critiques d'apparition de défauts d'aspect*.

Ce modèle est fondé sur une *approche physique globale* prenant en compte l'ensemble des phénomènes qui gouvernent ce problème. Le calcul de l'état des contraintes résiduelles prend en considération les effets de toutes les grandeurs susceptibles d'influencer cet état. En particulier, les effets de la *topographie de surface* et l'ensemble des *phénomènes aérodynamiques* sont précisés. Ces deux effets étant traditionnellement négligés par toutes les approches connues, ce modèle représente une *contribution nouvelle au problème de l'enroulement des matériaux souples*.

Les risques d'apparition de défaut d'aspect ont été interprétés en termes de *glissement* ou de *micro-flambage*. Un modèle de calcul des contraintes critiques de micro-flambage inspiré d'études sur les composites à fibres unidirectionnelles a été présenté ici. Il permet pour la première fois d'expliquer la *quasi-constance de la demi-période de micro-flambage* du film enroulé.

Une *très forte sensibilité* des valeurs des contraintes résiduelles et des contraintes critiques avec les *écarts à la symétrie du film* a été mise en évidence.

Le modèle nous permet de prédire en fonction de l'ensemble des paramètres de l'enroulement et du film, le profil de l'épaisseur résiduelle de la couche d'air, la tension interne résiduelle, les contraintes ainsi que les risques d'apparition des défauts.

Les prédictions du modèle ont été validées dans un très large domaine de conditions d'enroulement et de types de films sur la base de la mesure de l'épaisseur moyenne de la couche résiduelle et de la tension résiduelle. Des *profils caractéristiques* de ces grandeurs ont été mis en évidence. L'influence respective des quatre principales composantes (vitesse, tension, appui, rugosité) sur l'état des contraintes résiduelles a été étudiée. Nous avons montré que l'évacuation latérale de l'air se traduit par une *chute importante de la tension résiduelle*. Des effets du même ordre de grandeur ont été observés. Cela montre la *nécessité de prendre en considération les effets de la topographie de surface et des phénomènes aérodynamiques*. Une *non-équivalence stricte* et une *non-linéarité* entre les effets de ces grandeurs ont également été mises en évidence.

Quelques améliorations théoriques sont possibles : meilleure caractérisation de la non-linéarité du comportement mécanique du film enroulé, meilleure représentation de l'échappement de l'air...

Mais le principal axe de recherche (théorique et expérimentale) doit concerner les instabilités d'enroulement.

L'utilisation intensive du modèle devra ainsi permettre d'avoir une *meilleure maîtrise* des mécanismes physiques qui gouvernent l'enroulement des films minces ainsi que d'*optimiser* les paramètres du procédé, voire de déboucher sur des *recommandations à caractère technologique*.

Annexes

I.) Caractérisation de la topographie de surface

A.) Etat d'équilibre : fonction $f_{\text{équil}}$

A.1.) Introduction

Sous une pression donnée, après obtention d'un *état d'équilibre*, l'épaisseur moyenne de la couche interspire atteint une *valeur d'équilibre*, fonction de la topographie de surface et de la pression :

- plus le film est lisse, plus l'épaisseur d'équilibre est faible,
- plus la pression est élevée, plus l'épaisseur d'équilibre est faible.

Cette variation de l'épaisseur d'équilibre est associée à un écrasement des rugosités et à un fléchissement du film entre les pics :

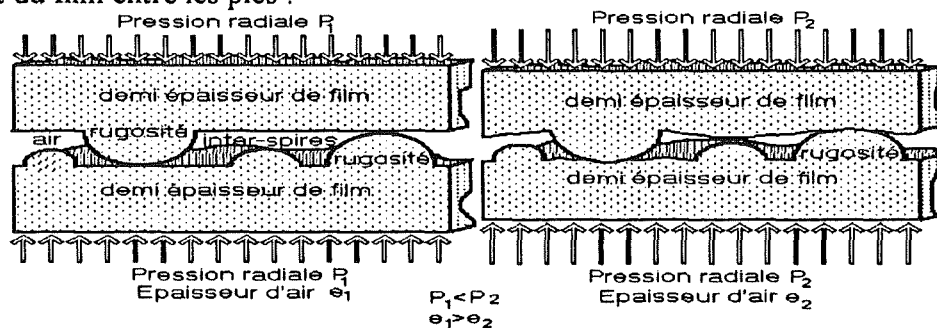


Figure A.1 : variation avec la pression de l'épaisseur de la couche d'air

La pression radiale dans le rouleau varie dans des proportions importantes. Il en ira de même de l'épaisseur d'équilibre des couches résiduelles d'air. Il est donc nécessaire de connaître la *relation qui existe entre l'épaisseur d'équilibre, la pression et la topographie de surface* :

$$e_a = f_{\text{équil}}(\text{pression, rugosité})$$

A.2.) Description

Afin de caractériser cette fonction $f_{\text{équil}}$ (pression, rugosité), un test dit du *Gap d'Air*, a été développé par le département Recherche et Développement de RHÔNE-POULENC FILMS (P. CORSI et D. GERWIG [1986]). La pression est appliquée à l'aide d'un champ électrostatique, en portant à un potentiel l'une des faces. Après obtention de l'équilibre, l'épaisseur de la couche d'air résultante est mesurée à l'aide d'un dispositif optique utilisant les propriétés d'interférence de la lumière.

A.3.) Résultats

Nous avons reporté sur la figure suivante les résultats obtenus avec deux films destinés à l'enduction magnétique (VIDÉO 2 et VIDÉO 3) :

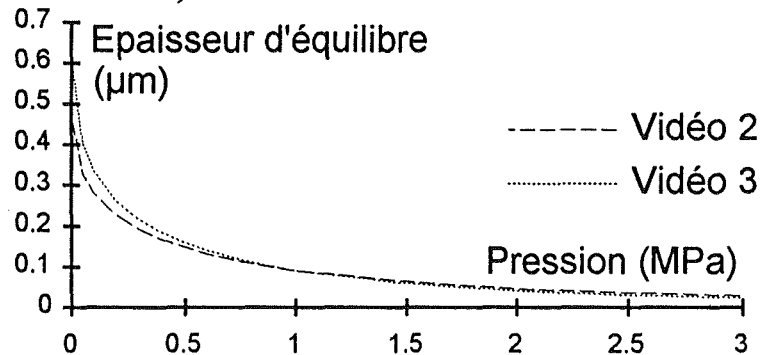


Figure A.2 : variation de l'épaisseur de la couche résiduelle d'air avec la pression à l'équilibre

Pour des valeurs typiques de la pression dans le rouleau (0,1 → 0,5 MPa), l'épaisseur décroît assez fortement : 0,30 → 0,15 µm environ.

L'analyse des résultats montre que le logarithme de l'épaisseur de la couche d'air à l'équilibre e_a est une fonction affine décroissante de la racine carrée de la pression P . Cela suggère la *formulation empirique* suivante de la fonction $f_{\text{équil}}$ (pression, rugosité) :

$$(A.1) \quad e_a = f_{\text{équil}}(P, \text{rugosité}) = h_0 e^{-\sqrt{\frac{P}{P_0}}}$$

La rugosité est caractérisée dans cette fonction $f_{\text{équil}}$ par deux coefficients : h_0 (m) et P_0 (Pa) :

→ h_0 est l'épaisseur d'équilibre lorsque $P = 0$ (ou $P = P_0$ pour $h_0 / \exp 1$). h_0 est donc directement liée à la *hauteur moyenne des pics de la surface*. h_0 est, selon le type de film, compris entre 0,40 et 0,80 µm.

→ P_0 caractérise la décroissance de e_a avec la pression P . Une valeur élevée de P_0 correspond à une faible décroissance de e_a avec P donc à une grande *densité de pics*. En effet, plus l'aire de contact (liée à la densité de pics) est importante, plus la pression exercée sur chaque pic est faible et plus la sensibilité à la pression est faible. P_0 varie entre 0,2 et 1 MPa.

La formule (A.1) peut être inversée afin d'exprimer la valeur de la pression radiale moyenne P en fonction de l'épaisseur de la couche d'air e_a et des deux coefficients h_0 et P_0 :

$$(A.2) \quad P = f_{\text{équil}}^{-1}(e_a) = P_0 * \left[\ln \left(\frac{e_a}{h_0} \right) \right]^2$$

A partir de considérations théoriques, R. MEYRUEIX [1988] a obtenu des relations comparables. Cela justifie à la fois ses hypothèses théoriques et la représentation (A.1).

Nous avons reporté dans le tableau A.1 quelques valeurs de h_0 et P_0 pour des films destinés à l'application d'enduction magnétique :

A.) état d'équilibre : fonction $f_{\text{équil}}$ (test du gap d'air)

Tableau A.1 : paramètres de caractérisation du gap d'air

Référence du film	h_0 (μm)	P_0 (MPa)
VIDÉO 1	0,50	0,43
VIDÉO 2	0,48	0,37
VIDÉO 3	0,62	0,27

Le test du gap d'air apparaît donc comme un bon moyen de caractériser l'état d'équilibre de la topographie de surface des films, c'est à dire la fonction $f_{\text{équil}}$ (pression, rugosité).

A.4.) Limitations

Notre objectif est de caractériser l'épaisseur de la couche résiduelle d'air piégée dans le rouleau. Sous cet angle, l'utilisation des résultats du test du gap d'air présente plusieurs limitations :

→ l'ordre de grandeur de la pression

Dans le test, celle-ci est exercée entre 0,1 et 4 MPa alors que dans le rouleau, elle n'excède pas 0,5 MPa. Cela signifie que nous utiliserons simplement une faible partie de la courbe alors que la formulation (A.1) est déduite dans un domaine de variation plus grand.

→ la technique d'application de la pression

La pression est appliquée électrostatiquement. Elle dépend donc de la *permittivité* du milieu. Or, s'il y a contact ou non, l'espace traversé n'est pas le même : PET d'épaisseur double ou PET+air+PET. La pression est plus faible d'un facteur $\epsilon_r = 3,2$ dans les zones où il y aura contact entre les deux couches de film par rapport aux zones sans contact.

Il en résulte que la relation entre le champ électrostatique et la pression réelle dépend de l'*aire de contact* et que la pression n'est *pas uniforme* sur toute la surface. Si l'aire de contact n'est pas trop importante (pression peu élevée ou film assez rugueux), cela ne pose pas de problème.

→ la mesure de l'épaisseur de la couche d'air

La longueur d'onde correspond à l'ordre de grandeur des épaisseurs moyennes des couches d'air des films très peu rugueux (enduction magnétique vidéo) : de 0,03 à 0,5 μm .

Les films destinés aux applications emballage et enduction magnétique audio ont des niveaux moyens de rugosité plus élevés, situés en dehors de ce domaine. La courbe $f_{\text{équil}}$ de ces films ne peut être mesuré à l'aide de ce dispositif.

La connaissance de la loi de décroissance de l'épaisseur de la couche d'air avec la pression (fonction $f_{\text{équil}}$) est une *notion fondamentale* pour l'étude théorique de l'enroulement. Cette loi ne peut être déduite que du test du gap d'air dont le domaine d'utilisation est limité aux films peu rugueux destinés aux applications vidéo.

De ce fait, *l'utilisation du modèle sera restreinte aux seuls films vidéo*, ce qui correspond d'ailleurs au domaine dont la maîtrise du procédé est la plus difficile.

B.) Etat transitoire : fonction f_{trans}

B.1.) Introduction

L'action conjuguée de la contrainte radiale de compression des couches supérieures et de la force d'appui a pour effet de *chasser une partie de la couche d'air initialement entraînée*, jusqu'à obtention du niveau d'équilibre (défini précédemment par la fonction $f_{équil}$).

Il s'agit d'un *état transitoire*.

En fonction de sa topographie de surface, le film présente une *aptitude* plus ou moins grande à évacuer cette couche d'air. La connaissance de cette "aptitude" est fondamentale pour la maîtrise empirique comme pour la modélisation de l'enroulement des films.

Nous proposons de représenter cet état transitoire par une fonction f_{trans} :

$$\frac{\partial}{\partial t} e_a = f_{trans} (e_a, \text{géométrie, pression, rugosité})$$

B.2.) Description

En vue de caractériser cette fonction f_{trans} , un test appelé *test d'échappement d'air*, a été développé par le département Recherche et Développement de RHÔNE-POULENC FILMS.

Dans ce test, on fixe une couche de film sur un support emprisonnant ainsi une certaine quantité d'air entre le film et le support. On force ensuite l'air à s'échapper en appliquant une pression. Un dispositif spécial permet de visualiser la nature du contact entre le film et son support. Il est ainsi possible d'estimer le temps moyen d'évacuation t_{ea} (évolution vers l'état d'équilibre).

B.3.) Résultats

Quelques résultats expérimentaux ont été reportés dans le tableau suivant :

Tableau A.2 : temps moyen d'échappement d'air

Référence	R_z (μm)	t_{ea} (s)
EMBAL 1	0,38	15
AUDIO 1	0,20	20
VIDÉO 1	0,12	52

Le test d'échappement d'air est *très sensible à la topographie de surface*. Il s'agit donc d'un bon test comparatif de *caractérisation de l'aptitude du film à échapper l'air* piégé entre les couches de film.

B.4.) Caractérisation de la fonction f_{trans}

Le test précédent quantifie l'aptitude de film à échapper l'air entre les aspérités d'une topographie de surface donnée grâce au temps t_{ea} . Mais le problème que nous nous sommes posés est sensiblement différent : caractérisation de f_{trans} telle que $\frac{\partial}{\partial t} e_a = f_{trans}(e_a, \text{géométrie, pression, rugosité})$:

→ il faut déduire de la valeur du temps t_{ea} la valeur de la fonction f_{trans} dans les conditions du test : c'est un problème de *modélisation du test d'échappement d'air*

→ quelle serait la valeur de t_{ea} ou de la fonction f_{trans} dans la configuration réelle de l'enroulement. C'est un problème d'*extrapolation aux conditions réelles de l'enroulement*.

En fait, le problème à résoudre (caractérisation de $f_{trans}(e_a, \text{géométrie, pression, rugosité})$) pourrait être formulé de la manière suivante :

1. *Considérons deux couches de film en contact l'une sur l'autre séparées par une couche d'air d'épaisseur e_a sous une pression P .*

2. *Quelle est la diminution δe_a de l'épaisseur de cette couche pendant le temps δt ?*

Nous proposons de répondre à cette question en trois étapes :

1. introduction d'*hypothèses* (§B.4.a.),
2. *estimation* de la fonction f_{trans} dans les *conditions du test* (§B.4.b.),
3. *extrapolation* de la fonction f_{trans} aux *conditions réelles de l'enroulement* (§B.4.c.),

B.4.a.) Hypothèse de la surface lisse équivalente

La modélisation physique de l'écoulement de l'air passe implicitement par une résolution même simplifiée des équations de NAVIER-STOKES.

Or l'espace considéré est délimité par les *deux surfaces rugueuses* en contact l'une avec l'autre. Ces deux surfaces sont très proches l'une de l'autre et le profil de topographie de surface n'est pas connu. Il n'est donc pas possible de résoudre les équations en prenant le profil des rugosités pour conditions géométriques aux limites.

Nous proposons d'introduire les notions de *surface lisse équivalente* et d'*homogénéisation des rugosités*. L'épaisseur de la couche équivalente $e_{eq}(e_a)$ sera telle que l'écoulement y sera parfaitement équivalent (au sens de la valeur du temps t_{ea} ou celle de la fonction f_{trans}) à celui qui existe dans l'espace réel caractérisé par une épaisseur moyenne e_a :

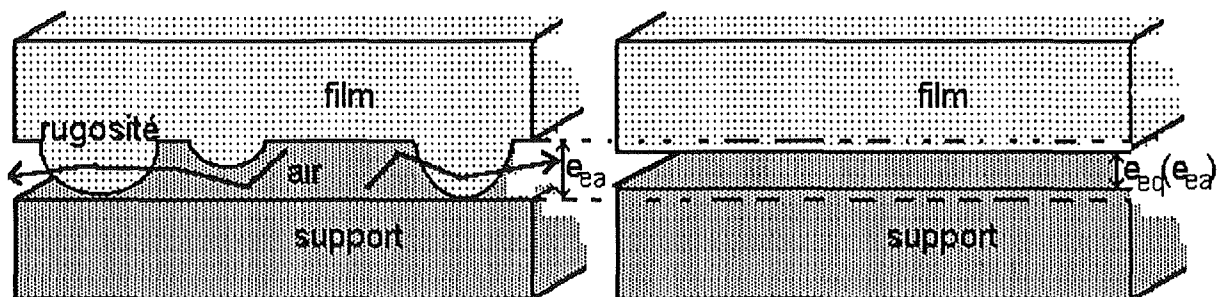


Figure A.3 : homogénéisation des rugosités

Si le nombre de pics est faible ou si l'épaisseur du film est faible ou bien encore si la pression est élevée, le film peut *fléchir* entre les rugosités, conduisant ainsi à un contact irrégulier. L'approximation *surface rugueuse* → *surface lisse* sera alors moins satisfaisante.

Nous avons également essayé d'aborder le problème avec une autre démarche reposant sur l'analogie avec l'*écoulement dans les milieux poreux*. Toutefois nous n'avons pas trouvé de formulations facilement transposable. En effet notre écoulement est essentiellement bidimensionnel alors que les milieux poreux classiques sont tridimensionnels (sable...).

B.4.b.) estimation de la fonction f_{trans} dans les conditions du test

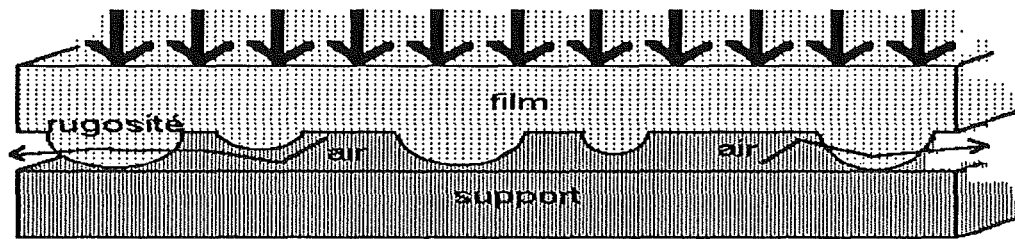


Figure A.4 : évacuation de l'air piégé

Nous avons remarqué que pendant la période transitoire d'échappement de l'air, un front quasi circulaire se propage de l'extérieur vers le centre. *Sur la base de cette observation*, nous en déduisons que *ce front est associé à une variation rapide de l'épaisseur de la couche d'air*.

Sa propagation traduirait ainsi l'existence de deux zones :

- en amont du front, l'épaisseur de la couche d'air est égale à sa valeur initiale,
- en aval du front, l'épaisseur de la couche d'air est égale à sa valeur finale.

La propagation de ce front sera caractérisée par la fonction $R(t)$ telle que :

$$(A.3) \quad \begin{cases} r < R(t) \Rightarrow e_a = e_{\text{initiale}} \\ r > R(t) \Rightarrow e_a = e_{\text{finale}} = e_{ea} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} t = 0 \Rightarrow R(t) = R_0 \\ t = t_{ea} \Rightarrow R(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{rayon initial})$$

Les conditions aux limites concernant la pression seront supposées être les suivantes :

$$(A.4) \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq R(t) \Rightarrow P = P_0 \text{ (zone d'écrasement)} \\ r = R_0 \Rightarrow P_1 \ll P_0 \text{ (zone d'échappement)} \\ R(t) \leq r \leq R_0 \Rightarrow P(r) = \text{décroissant entre } P_0 \text{ et } P_1 \ll P_0 \text{ (voir plus loin)} \end{cases}$$

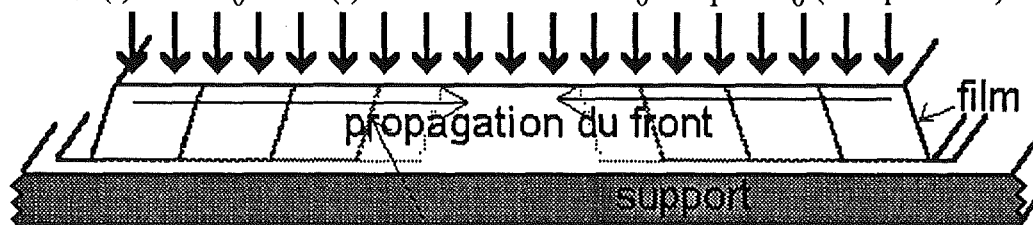


Figure A.5 : représentation du front d'échappement de l'air

Notre nouveau problème se réduit donc à la recherche d'une *expression analytique de $R(t)$* à partir des différentes grandeurs (géométrie, temps t_{ea} ...)

Nous noterons $e_{eq}(e_{\text{finale}})$ l'épaisseur de la couche finale équivalente. Nous continuerons toutefois à écrire e_{initiale} l'épaisseur de la couche initiale car il n'y a pas d'écoulement dans la zone centrale $0 \leq r \leq R(t)$.

Le calcul qui suit repose sur deux formulations différentes (§1. et §2.) du débit d'évacuation qui sont ensuite égalisées (§3.)

1. première formulation du débit

A un instant t , le volume d'air $V(t)$ compris entre le support et le film s'écrit :

$$V(t) = \pi R(t)^2 e_{initiale} + \pi [R_0^2 - R(t)^2] e_{eq}(e_{finale})$$

Le débit d'air $Q_{\text{évac}}(t)$ dans la section d'évacuation :

$$(A.5) \quad Q_{\text{évac}}(t) = \frac{d}{dt} V(t) = 2 \pi [e_{initiale} - e_{eq}(e_{finale})] R(t) \frac{d}{dt} R(t)$$

2. seconde formulation du débit

Par ailleurs, dans la zone où l'épaisseur de la couche d'air est égale à $e_{eq}(e_{finale})$, nous avons un écoulement de POISEUILLE classique sous l'action d'un gradient de pression. En négligeant les termes de diffusion et dans l'hypothèse d'un écoulement quasiment stationnaire (valable si le front d'onde se déplace lentement), l'équation de NAVIER-STOKES qui régit cet écoulement d'air se réduit à :

$$\frac{1}{\mu_{air}} \frac{\partial}{\partial r} P(r,t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r(r,z,t)$$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r,t) = \text{gradient de pression dans la zone considérée}$$

$$v_r(r,z,t) = \text{vitesse de l'air dans la direction radiale (m.s}^{-1}\text{)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} z = 0 \Rightarrow v_r = 0 \\ z = e_{eq}(e_{finale}) \Rightarrow v_r = 0 \end{cases}$$

Il est alors facile de résoudre cette équation. On retrouve un profil des vitesses très classique :

$$v_r(r,z,t) = \frac{1}{2 \mu_{air}} \frac{\partial}{\partial r} P(r,t) z [z - e_{eq}(e_{finale})]$$

Exprimons alors le débit de l'air $Q(r,t)$ dans la section $S = 2 \pi r e_{eq}(e_{finale})$:

$$(A.6) \quad Q_{\text{évac}}(r,t) = \int_0^{e_{eq}(e_{finale})} 2 \pi r v_r(z,t) dz = 2 \pi \frac{e_{eq}(e_{finale})^3}{12 \mu_{air}} r \frac{\partial}{\partial r} P(r,t)$$

L'équation de continuité se traduit par l'indépendance de ce débit avec la variable r . La pression $P(r,t)$ doit donc s'exprimer sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r,t) = \frac{A(t)}{r}$$

Avec :

$A(t)$ = fonction de la seule variable t

$$P(r = R(t), t) = P_0$$

$$P(r = R_{01}, t) = P_1 \ll P_0$$

L'intégration de l'équation précédente conduit aux expressions suivantes de $P(r,t)$ et de $r \frac{\partial}{\partial r} P(r,t)$:

$$P(r,t) = P_1 + (P_0 - P_1) \frac{\ln[\frac{r}{R_0}]}{\ln[\frac{R(t)}{R_0}]} \quad \text{et} \quad r \frac{\partial}{\partial r} P(r,t) = \frac{P_0 - P_1}{\ln[\frac{R(t)}{R_0}]} \approx \frac{P_0}{\ln[\frac{R(t)}{R_0}]}$$

3. égalisation des deux formulations du débit

Annexe I : caractérisation de la topographie de surface

Les deux expressions (A.5) et (A.6) du débit $Q_{\text{évac}}(t)$ sont nécessairement égales. D'où :

$$[e_{\text{initiale}} - e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})] R(t) \ln \left[\frac{R(t)}{R_0} \right] \frac{d}{dt} R(t) = P_0 \frac{e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})^3}{12 \mu_{\text{air}}}$$

Intégrons cette équation différentielle à partir de l'instant $t = 0$ pour lequel $R(t) = R_0$:

$$\frac{R_0^2}{4} - \frac{R(t)^2}{4} \left[2 \ln \left[\frac{R(t)}{R_0} \right] - 1 \right] = P_0 \frac{e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})^3}{12 \mu_{\text{air}} [e_{\text{initiale}} - e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})]} t$$

Enfin, l'écriture de la seconde condition aux limites $t = t_{\text{ea}} \Rightarrow R(t) = 0$ permet d'obtenir :

$$(A.7) \quad t_{\text{ea}} = 3 \frac{[e_{\text{initiale}} - e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})] R_0^2 \mu_{\text{air}}}{e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})^3 P_0}$$

$e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})$ apparaît ainsi comme la solution de l'équation du troisième degré :

$$(A.8) \quad e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})^3 + 3 \frac{\mu_{\text{air}} R_0^2}{P_0 t_{\text{ea}}} [e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}}) - e_{\text{initiale}}] = 0$$

$e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})$ est fonction des principales grandeurs du problème :

- *géométrie du dispositif* : R_0 (m)
- *propriétés visqueuse de l'air* : $\mu_{\text{air}} = 16 \cdot 10^{-6}$ Pa.s
- *pression appliquée dans le dispositif* : P_0 (Pa)
- *topographie de surface* : SR_z , e_{initiale} (μm)
- *temps d'évacuation d'air* : t_{ea} (s)

Nous avons reporté dans le tableau A.3 quelques valeurs de $e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})$.

Tableau A.3 : valeurs de $e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})$

e_{initiale} (μm)	t_{ea} (s)	$e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})$ (μm)
2,0	250	0,17
1,0	250	0,14
3,0	25	0,50
2,0	25	0,43

L'ordre de grandeur de l'épaisseur $e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})$ est tout à fait satisfaisant. Il est très sensible à la valeur de t_{ea} et moyennement sensible à celle de la valeur initiale de l'épaisseur de la couche d'air (que nous avons supposé proche de SR_z).

Il est alors aisé d'en déduire l'expression de la vitesse moyenne dans la section d'évacuation $V_{\text{évac}}$ de cet écoulement ou bien celle de la valeur moyenne de la fonction f_{trans} (e_a , géométrie, pression, rugosité) pendant l'intervalle $0 < t < t_{\text{ea}}$:

$$(A.9) \quad \begin{cases} V_{\text{évac}} = \frac{e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})^2}{12 \mu_{\text{air}}} * \frac{d}{dr} P \\ f_{\text{trans}} = \frac{\partial}{\partial t} e_a = \frac{e_{\text{initiale}} - e_{\text{eq}}(e_{\text{finale}})}{2 P_0 t_{\text{ea}}} R_0 \frac{d}{dr} P \end{cases}$$

avec $\frac{d}{dr} P$ = gradient de pression dans l'espace considéré

Nous avons maintenant modélisé le test et estimé la valeur de la fonction f_{trans} (e_a , géométrie, pression, rugosité) dans les conditions correspondantes.

B.4.b.) estimation de f_{trans} dans les conditions réelles du rouleau

Notre problème est maintenant de trouver l'expression de la fonction f_{trans} (e_a , géométrie, pression, rugosité) dans les *conditions réelles du rouleau*.

Différents aspects différencient les deux conditions d'évacuation :

1. les deux surfaces en contact

Dans le test, les deux surfaces sont celle du *film* et du *support* alors que dans le rouleau, les deux surfaces sont celles du film. Quelques essais ont été réalisés avec deux couches de film et le dispositif expérimental précédent. Il est alors nécessaire de plaquer une première couche de film sur le support selon la procédure précédente puis une seconde couche au-dessus. Le temps t_{ea} est du même ordre de grandeur. En revanche, la mise en œuvre est plus complexe et l'observation de la propagation du front d'évacuation de l'air plus délicate.

Nous continuerons donc d'une part à effectuer les tests d'échappement d'air entre un support et une couche de film et d'autre part à *extrapoler les résultats au cas de l'échappement de l'air entre deux couches de film*.

2. les conditions d'évacuation de l'air

Dans le test, l'écoulement de l'air se fait entre deux surfaces rugueuses séparées par une couche d'air d'épaisseur finale connue. Cet écoulement est équivalent à un écoulement fictif entre deux surfaces parfaitement lisses séparées par une couche d'air d'épaisseur, notée $e_{eq}(e_a)$.

Or, l'écoulement réel se fait pour une couche d'air d'épaisseur différente e_a . Il est donc nécessaire de connaître la valeur de l'épaisseur équivalente $e_{eq}(e_a)$.

Nous n'avons a priori aucune idée de cette dépendance. L'écart entre l'épaisseur de la couche réelle et celle de la couche équivalente correspond à une zone sans écoulement occupée par les rugosités.

Nous postulons que *cet écart reste constant*, conduisant ainsi à la dépendance :

$$(A.10) \quad e_{eq}(e_a) = e_a - [e_{ea} - e_{eq}(e_{ea})]$$

Avec :

e_a = couche d'air d'épaisseur réelle

$e_{eq}(e_a)$ = épaisseur équivalente d'air lorsque l'épaisseur réelle est e_a

e_{ea} = épaisseur réelle de la couche dans le test d'échappement d'air (connue par $f_{équil}$)

$e_{eq}(e_{ea})$ = épaisseur équivalente de la couche d'air lorsque l'épaisseur réelle de la couche d'air est égale à e_{ea} (solution de l'équation (A.9)).

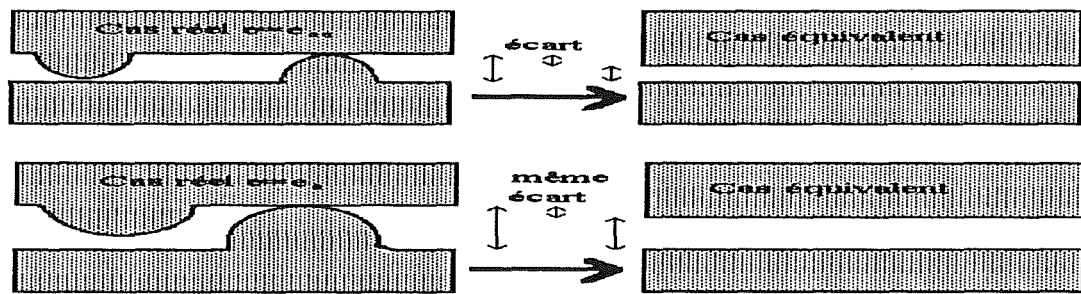


Figure A.6 : variation de l'épaisseur équivalente

3. la géométrie d'évacuation

Dans le test, la géométrie d'évacuation de l'air est donnée. Dans le rouleau, les dimensions sont plus grandes : de 400 à 2400 mm. Ici encore, il sera donc nécessaire de définir les conditions de l'extrapolation des résultats du test aux conditions réelles.

Récemment, dans le cadre d'un stage (P. GAUDET [1990]), différents dispositifs de géométries variables ont été étudiées. Les résultats obtenus ont présenté une très grande dispersion que l'on peut attribuer à la non-homogénéité de la topographie de surface du film ou bien à l'opérateur. t_{ea} ne semble pas dépendre linéairement des dimensions du dispositif. Ces essais ont également permis de mettre en évidence la décroissance au cours du temps de la vitesse de déplacement du front d'onde.

Nous n'introduisons donc *pas de dépendance spécifique* de la géométrie dans $V_{\text{évac}}$. La géométrie interviendra toutefois indirectement puisqu'elle affecte le volume d'air global.

4. l'épaisseur initiale de la couche d'air

Elle n'est pas mesurée dans le test, mais probablement voisine de la hauteur des plus grands pics. Nous la supposons égale à SR_z mais il s'agit d'une hypothèse dont il faudra discuter. Elle est en revanche connue dans le rouleau de film.

5. l'épaisseur finale de la couche d'air

Celle-ci n'est pas mesurée dans le test, mais est définie par la fonction $f_{\text{équil}}$ avec $P = P_0$. Elle est également connue dans le cas du rouleau de film.

6. Le gradient de pression

Le test d'échappement d'air est toujours réalisé sous le même gradient de pression. Or, dans les conditions réelles d'enroulement, l'évacuation se fait sous des pressions sensiblement supérieures (0,01 → 0,5 MPa). Nous *définirons a priori la dépendance de la vitesse d'évacuation $V_{\text{évac}}$ avec la pression.*

Compte tenu de la forme de l'équation de NAVIER-STOKES, il est logique de penser que, au moins pour les faibles pressions, la vitesse d'évacuation est proportionnelle à la pression appliquée. Par la suite, nous remplacerons le gradient de pression du test d'échappement d'air par l'estimation suivante du gradient de pression dans la couche inter-spires :

$$V_{\text{évac}} = \frac{e_{\text{eq}}(e_{\text{ea}})^2}{12 \mu_{\text{air}}} * \frac{P}{l_{\text{évac}}}$$

Où $l_{\text{évac}}$ est la largeur d'application du gradient de pression, c'est à dire de la zone de décroissance de la pression moyenne jusqu'à la pression atmosphérique. Celle-ci sera prise égale à 100 mm quels que soient la largeur du rouleau et le type de film utilisé en accord avec des observations.

En résumé, entre deux couches de film et sous une pression P , l'air s'échappe par la section d'évacuation avec une vitesse moyenne définie par :

$$V_{\text{évac}} = \frac{[e_a - e_{ea} + e_{eq}(e_{ea})]^2}{12 \mu_{\text{air}}} * \frac{P}{l_{\text{évac}}}$$

e_{ea} et $e_{eq}(e_{ea})$ sont calculés à partir des tests présentés aux annexes I.A et I.B. Les paramètres μ_{air} et $l_{\text{évac}}$ sont deux constantes du problème. e_a et P sont deux variables qui évoluent pendant l'enroulement.

Cherchons maintenant à en déduire la variation de l'épaisseur e_a d'une couche d'air pour une spire donnée sous une pression donnée P pendant un temps donné dt , c'est à dire la fonction f_{trans} :

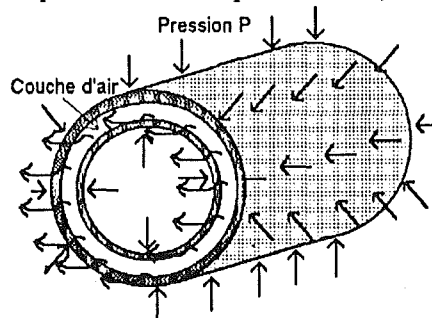


Figure A.7 : évacuation de l'air dans les conditions réelles de l'enroulement

Considérons une spire du rouleau, caractérisée par :

l_f = largeur du rouleau (m) r = rayon de la spire (m)

e_a = épaisseur de la couche d'air (m)

$V = l_f * 2 \pi r * e_a$ = volume de l'air piégé entre les deux couches de film (m^3)

$S_{\text{évac}} = 2 \pi r * e_a$ = section latérale d'évacuation par les deux bords (m^2)

Pendant le temps dt , le volume d'air évacué dV_{air} est défini par :

$$(A.11) \quad dV = V_{\text{évac}} * S_{\text{évac}} * dt$$

Où $V_{\text{évac}}$ est la vitesse calculée précédemment

Il est alors aisé d'en déduire la valeur moyenne de la fonction f_{trans} :

$$(A.12) \quad f_{trans} = \frac{\partial}{\partial t} e_a = \frac{dV}{2 \pi r l_f dt} = \frac{[e_a - e_{ea} + e_{eq}(e_{ea})]^2 e_a}{12 \mu_{\text{air}} l_{\text{évac}} l_f} * P$$

Nous avons ainsi résolu le problème que nous nous étions initialement posé concernant la modélisation de l'échappement de l'air dans les conditions réelles du rouleau de film en termes de fonction f_{trans} (e_a , géométrie, pression, rugosité).

C.) Autres tests de caractérisation

C.1.) Introduction

Les résultats des tests que nous venons de présenter sont fondamentaux pour la modélisation de l'enroulement des films minces. Or, l'un d'eux, le test du gap d'air, restreint le domaine d'utilisation du modèle à quelques films. Il serait donc souhaitable de rechercher un moyen d'accéder à la *même information* (fonction $f_{\text{équil}}$) à partir d'un autre test de caractérisation.

Deux autres tests typiquement utilisés pour caractériser la topographie de surface des films :

C.2.) Peak Height Distribution

Il s'agit d'une mesure du nombre de pic par mm² compris entre deux hauteurs données :

On utilise de nouveau le principe d'interférence de la lumière (anneaux de NEWTON). Cette mesure est réalisée manuellement. Elle est donc de ce fait difficile à généraliser et donc à utiliser.

C.3.) Peak Count Distribution

Il s'agit d'une mesure, automatisée, de la loi de distribution du nombre de pics avec la hauteur :

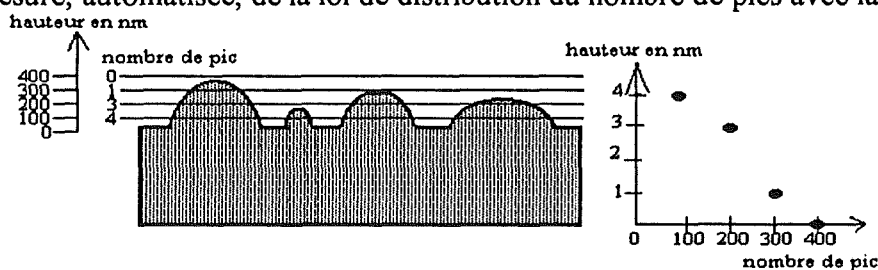


Figure A.8 : Peak Count Distribution.

Un palpeur scrute mesure la hauteur d'un certain nombre de points sur une petite surface du film. Après traitement, on obtient une courbe $N(h)$ qui contient un très grand nombre d'informations. De ce fait, il est envisageable de chercher à corréler $N(h)$ avec la courbe $f_{\text{équil}}$.

On observe que ces courbes $N(h)$ suivent une loi de distribution log-normale, ce qui semble cohérent puisqu'il en va de même de la loi de distribution des charges :

$$(A.13) \quad N(h) = \frac{N}{h-h_1} * \exp \sqrt{C_1 \ln\left(\frac{h-h_1}{\sigma_1}\right)}$$

Avec :

N_1 = nombre de pics (sans unité)

h_1 = hauteur (m)

C_1 = coefficient sans unité

σ_1 = hauteur (m)

Ces quatre coefficients $(N_1, h_1, C_1, \sigma_1)$ sont alors supposés caractériser la courbe $N(h)$.

C.4. Corrélation PCD / Air Gap

Le problème de la corrélation entre le test du gap d'air et le test des PCD se résume alors à la recherche d'une autre formulation de la fonction $f_{\text{équil}}$ à partir de ces coefficients :

$$f_{\text{équil}} = f_{\text{équil}}[\sigma_r, \text{rugosité}(h_0, P_0)] = f_{\text{équil}}[\sigma_r, \text{rugosité}(N_1, h_1, C_1, \sigma_1, e_f)]$$

Nous rajoutons l'épaisseur du film car nous savons qu'elle intervient dans le test de l'air gap par la flexion entre les pics. Or, elle n'intervient a priori pas dans le test du PCD.

Il est difficile de chercher à établir cette corrélation par une approche purement théorique car elle intègre un grand nombre de notions : propriétés mécaniques des rugosités, fléchissement du film entre les rugosités...

Nous avons donc envisagé dans un premier temps une approche numérique du problème. Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un stage par J.M. YVON [1992]. Nous avons ainsi traité avec un logiciel de statistique les paramètres caractéristiques ($h_0, P_0, N_1, h_1, C_1, \sigma_1, e_f$) d'un trentaine de films polyester destinés à des applications d'enduction magnétique vidéo. En procédant par tâtonnement (guidé par une *analyse en composantes principales*), les meilleurs résultats ont été obtenus avec les deux formulations :

$$(A.14) \quad \begin{cases} h_0 = A_1 - \frac{A_2}{\sigma_1} + e \left[A_3 \frac{e_f}{C_1} - A_4 \right] \\ P_0 = A_5 + A_6 \frac{N_1}{\sigma_1} - A_7 \cdot - A_8 \frac{(\sigma_1 - A_9)^2}{(C_1 - A_{10})^4} \end{cases}$$

Où A_1 à A_{10} sont des constantes obtenues par un calcul

Ces deux formulations permettent d'*excellentes prédictions* de la fonction d'équilibre $f_{\text{équil}}$ (à 15-20% près) dans le domaine de rugosité des films destinés à l'enduction magnétique vidéo.

En revanche, l'extrapolation de ces formulations aux films plus lisses ou plus rugueux se heurte à la grande complexité de ces formules. Elle conduit toutefois à des ordres de grandeur cohérents. Il n'est donc pas encore possible d'estimer la fonction $f_{\text{équil}}$ en se dispensant totalement des résultats du test du gap d'air.

Toutefois, cette approche qui vise à étendre le domaine d'utilisation du modèle par des corrélations numériques doit être poursuivie.

II.) Loi de HOOKE

A.) Expression de la loi

A.1.) forme générale

→ formulation $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \nu_{zr} \frac{\sigma_z}{E_z} \\ (A.15) \quad \varepsilon_{\theta} &= -\nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_{\theta}} + \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \nu_{\theta z} \frac{\sigma_z}{E_{\theta}} \\ \varepsilon_z &= -\nu_{zr} \frac{\sigma_r}{E_z} - \nu_{\theta z} \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} + \frac{\sigma_z}{E_z} \end{aligned}$$

→ formulation $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(1 - \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta z}^2) E_r \varepsilon_r + (\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) E_r \varepsilon_{\theta} + (\nu_{zr} + \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z}) E_r \varepsilon_z}{1 - \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}} \\ (A.16) \quad \sigma_{\theta} &= \frac{(\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) E_r \varepsilon_r + (1 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2) E_{\theta} \varepsilon_{\theta} + (\nu_{\theta z} + \frac{E_r}{E_z} \nu_{\theta r} \nu_{zr}) E_z \varepsilon_z}{1 - \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}} \\ \sigma_z &= \frac{(\nu_{zr} + \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z}) E_r \varepsilon_r + (\nu_{\theta z} + \frac{E_r}{E_z} \nu_{\theta r} \nu_{zr}) E_z \varepsilon_{\theta} + (1 - \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r}^2) E_z \varepsilon_z}{1 - \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_{\theta}} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}} \end{aligned}$$

A.2.) Déformation planes

→ formulation $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{h}_d(\boldsymbol{\sigma})$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= (1 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2) \frac{\sigma_r}{E_r} - (\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} \\ (A.17) \quad \varepsilon_{\theta} &= -(\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) \frac{\sigma_r}{E_{\theta}} + (1 - \frac{E_z}{E_{\theta}} \nu_{\theta z}^2) \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned}$$

→ formulation $\sigma = h_d^{-1}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{(1 - \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta z}^2) E_r \varepsilon_r + (\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) E_r \varepsilon_\theta}{1 - \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}} \\
 \sigma_\theta &= \frac{(\nu_{\theta r} + \nu_{\theta z} \nu_{zr}) E_r \varepsilon_r + (1 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2) E_\theta \varepsilon_\theta}{1 - \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}} \\
 \sigma_z &= \nu_{zr} \sigma_r + \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta z} \sigma_\theta = \frac{(\nu_{zr} + \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z}) E_r \varepsilon_r + (\nu_{\theta z} + \frac{E_r}{E_z} \nu_{\theta r} \nu_{zr}) E_z \varepsilon_\theta}{1 - \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta z}^2 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2 - \frac{E_r}{E_z} \nu_{zr}^2 - 2 \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z} \nu_{zr}}
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

A.3.) Contraintes planes

→ formulation $\varepsilon = h_c(\sigma)$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_{\theta r}^* \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} \\
 \varepsilon_\theta &= -\nu_{\theta r}^* \frac{\sigma_r}{E_\theta} + \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} \\
 \varepsilon_z &= -\nu_{zr}^* \frac{\sigma_r}{E_z} - \nu_{\theta z}^* \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} = -\frac{\nu_{zr} + \frac{E_z}{E_\theta} \nu_{\theta r} \nu_{\theta z}}{1 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2} \frac{\sigma_r}{E_z} - \frac{(\nu_{\theta z} + \frac{E_r}{E_z} \nu_{\theta r} \nu_{zr})}{1 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2} \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

→ formulation $\sigma = h_c^{-1}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{E_r \varepsilon_r + \nu_{\theta r} E_r \varepsilon_\theta}{1 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2} \\
 \sigma_\theta &= \frac{\nu_{\theta r} E_r \varepsilon_r + E_\theta \varepsilon_\theta}{1 - \frac{E_r}{E_\theta} \nu_{\theta r}^2} \\
 \sigma_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.20}$$

B.) Expression des coefficients

Nous allons déterminer la valeur des douze coefficients de la matrice de HOOKE. Rappelons que ce sont des "*coefficients équivalents*" dans la mesure où la matrice de HOOKE recherchée caractérise le *comportement mécanique du solide homogène équivalent*.

B.1.) $(E_\theta)_{\text{spire}}$ et $(E_z)_{\text{spire}}$

Le module radial E_θ est défini comme le rapport entre σ_θ et ε_θ sous l'action d'une contrainte purement tangentielle. Le module axial E_z est défini de manière similaire.

Les rugosités sont disposées perpendiculairement au plan θz . Sous l'action d'une contrainte exercée dans ce plan, elles ne sont donc pratiquement pas sollicitées. De plus, leur déformation (radiale) n'est pas considérée. Les deux modules E_θ et E_z ne dépendront donc pas des propriétés mécaniques des rugosités. Toutefois, vis à vis de la sollicitation, le solide homogène se comporte comme un couplage parallèle de VOIGT des deux phases :

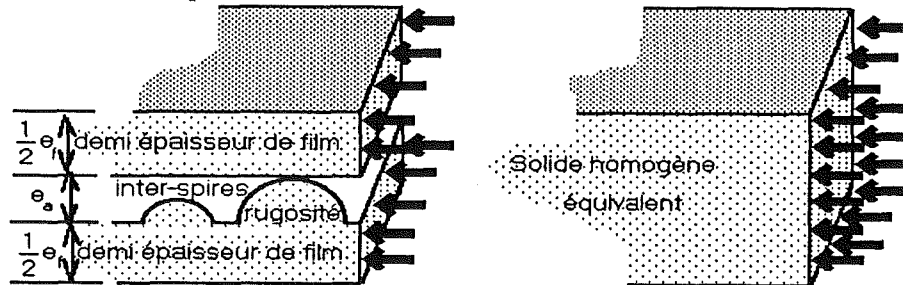


Figure A.9 : section réelle du solide homogène

Les modules $(E_\theta)_{\text{spire}}$ et $(E_z)_{\text{spire}}$ sont donc définis par la relation de couplage classique de VOIGT :

$$\begin{cases} (e_f + e_a) (E_\theta)_{\text{spire}} = e_f (E_\theta)_{\text{film}} + e_a (E_\theta)_{\text{interspires}} \\ (e_f + e_a) (E_z)_{\text{spire}} = e_f (E_z)_{\text{film}} + e_a (E_z)_{\text{interspires}} \end{cases}$$

En fait, les rugosités n'ont pas de réponse mécanique dans le plan θz : les modules $(E_\theta)_{\text{interspires}}$ et $(E_z)_{\text{interspires}}$ sont largement négligeables devant ceux du film. Nous avons donc les relations :

$$(A.21) \quad \begin{cases} (E_\theta)_{\text{spire}} = (E_\theta)_{\text{film}} * \frac{e_f}{e_f + e_a} \\ (E_z)_{\text{spire}} = (E_z)_{\text{film}} * \frac{e_f}{e_f + e_a} \end{cases}$$

B.2.) $(E_r)_{\text{spire}}$

Le module E_r est défini par le rapport entre σ_r et ε_r sous l'action d'une contrainte purement radiale. Dans ce cas, les rugosités du film sont directement sollicitées.

$(E_r)_{spire}$ dépend de P , de e_a , de la topographie de surface et des propriétés mécaniques du film.

On comprend que, selon la valeur de e_a , deux cas puissent se présenter :

- l'épaisseur de la couche d'air est *très supérieure à la hauteur moyenne des rugosités*,
- l'épaisseur de la couche d'air est *définie par la hauteur des rugosités (équilibre)*.

Nous chercherons à interpoler les deux limites.

B.2.a.) l'épaisseur de la couche d'air est élevée

L'épaisseur de la couche d'air est par exemple très supérieure à la hauteur moyenne des rugosités. Il s'agit d'un *état transitoire* au sens où l'air piégé s'évacue continûment. Les rugosités n'ont aucune influence et la réponse mécanique est principalement celle du "matelas d'air". Nous fixerons arbitrairement la limite inférieure de l'épaisseur de la couche d'air e_a à la valeur moyenne de la hauteur des plus grands pics : $e_a = SR_z$.

La spire a été assimilée à l'assemblage en série suivant :

- une couche de film d'épaisseur $\frac{1}{2}e_f$ obéissant à la loi de HOOKE : $\sigma = E \epsilon$
- une couche d'air d'épaisseur e_a obéissant à la loi des gaz parfaits : $P V = cte$
- une couche de film d'épaisseur $\frac{1}{2}e_f$ obéissant à la loi de HOOKE : $\sigma = E \epsilon$

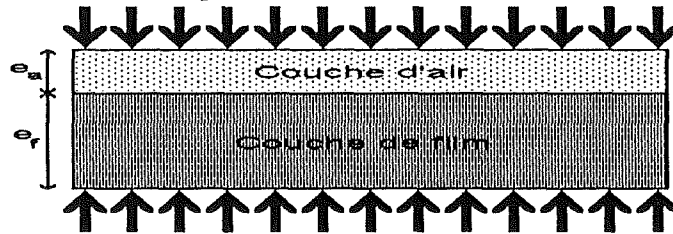


Figure A.10 : couplage série d'une couche d'air et d'une couche de film

Dans le cadre de ce couplage en série, les contraintes sont égales et les déplacements s'additionnent.

Le module d'YOUNG équivalent du système considéré est défini par la relation suivant :

$$(A.22) \quad (E_r)_{spire} = \frac{\delta \sigma_r}{(\epsilon_r)_{spire}}$$

avec :

$$\delta \sigma_r = \text{contrainte de compression} \quad (\epsilon_r)_{spire} = \text{déformation correspondante} = \frac{\delta e_f + \delta e_a}{e_f + e_a}$$

La loi de comportement de la couche de film s'écrit :

$$\delta \sigma_r = (E_r)_{film} * (\epsilon_r)_f \quad \text{avec} \quad (\epsilon_r)_f = \frac{\delta e_f}{e_f}$$

Celle de la couche s'écrit :

$$P V = cte \quad \text{ou} \quad P e_a = cte$$

En différenciant cette dernière expression autout d'un d'état d'équilibre (e_a , P), il vient :

$$P \delta e_a + e_a \delta P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\delta P}{P} = - (\epsilon_r)_a = - \frac{\delta e_a}{e_a}$$

Dans cette formulation, δe_a est la variation de l'épaisseur de la couche d'air associée à la sur-pression dP . Cela signifie donc que dP représente la sollicitation : $\delta P = \delta \sigma_r$ et $P = \sigma_r$.

En combinant les deux expressions de δe_f et de δe_a , il vient :

$$\delta e_f + \delta e_a = e_f * \frac{\delta \sigma_r}{(E_r)_{\text{film}}} + e_a * \frac{\delta \sigma_r}{\sigma_r}$$

Les ordres de grandeurs des différentes valeurs sont :

$$\begin{aligned} e_f &\approx 7 \text{ à } 23 \text{ } \mu\text{m} & e_a &\approx 0,15 \text{ à } 1 \text{ } \mu\text{m} \\ (E_r)_{\text{film}} &\approx 2 \text{ à } 3 \text{ GPa} & \sigma_r &\approx 0,1 \text{ à } 0,5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Il est donc envisageable de négliger le premier terme devant le second. Cela permet d'écrire :

$$(\epsilon_r)_{\text{spire}} \approx \frac{\delta e_a}{e_f}$$

Cette approximation traduit le fait que seule la couche d'air se déforme sous une sollicitation radiale.

En identifiant ensuite cette expression de $\delta e_f + \delta e_a$ avec (A.22), il vient ainsi :

$$(A.23) \quad (E_{r1})_{\text{spire}} \approx \frac{e_f}{e_a} P \quad \text{ou} \quad - \frac{e_f}{e_a} \sigma_r$$

Cette expression montre le rôle non linéaire de e_a et de σ_r .

B.2.b.) la couche d'air est à l'équilibre

Suffisamment d'aspérités sont en contact pour assurer le contact du film. Il s'agit d'un *état stable* : l'air ne s'évacue plus. Considérons le système de la figure A.10, sollicité dans les mêmes conditions mais tel que l'épaisseur e_a soit définie par la déformation des rugosités (fonction $f_{\text{équil}}$ du §I.A.) :

$$e_a = f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité}) = h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}}$$

Comme précédemment, le module d'YOUNG est défini par :

$$(E_r)_{\text{spire}} = \frac{\delta \sigma_r}{(\epsilon_r)_{\text{spire}}}$$

Les ordres de grandeur des différents paramètres restent les mêmes qu'au §I.A. Nous nous intéressons aux variations autour d'un état équilibre.

$$\epsilon_{\text{spire}} \approx \frac{\delta e_a}{e_f}$$

Différencions l'expression $e_a = f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité})$:

$$\delta e_a = \frac{\partial}{\partial \sigma_r} f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité}) \delta \sigma_r = \left[h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}} \right] * \frac{\delta \sigma_r}{2 \sqrt{-\sigma_r P_0}} = e_a * \frac{\delta \sigma_r}{2 \sqrt{-\sigma_r P_0}}$$

En identifiant avec (A.22), il vient alors l'expression du module d'YOUNG équivalent :

$$(A.24) \quad (E_{r2})_{\text{spire}} = e_f \left[\frac{\partial}{\partial \sigma_r} f_{\text{équil}}(\sigma_r, \text{rugosité}) \right]^{-1} = 2 * \frac{e_f}{e_a} * \sqrt{P * P_0} \quad \text{ou} \quad 2 * \frac{e_f}{e_a} * \sqrt{-\sigma_r * P_0}$$

Il s'agit de nouveau d'une formulation non-linéaire. Nous avons reporté sur les figures A.11a et A.11b l'évolution de la loi de comportement $E_r = E_r(P)$ et l'évolution de la loi de comportement $\sigma_r = \sigma_r(\epsilon_r)$. Cette dernière est calculée à partir de l'état initial $e_a = h_0$ et $\sigma_r = 0$, soit :

$$(A.25) \quad \varepsilon_r = \frac{h_0 - e_a}{e_f} \quad \text{et} \quad \sigma_r = \left[-\ln \left(1 - \frac{e_f}{h_0} \varepsilon_r \right) \right]^2 P_0$$

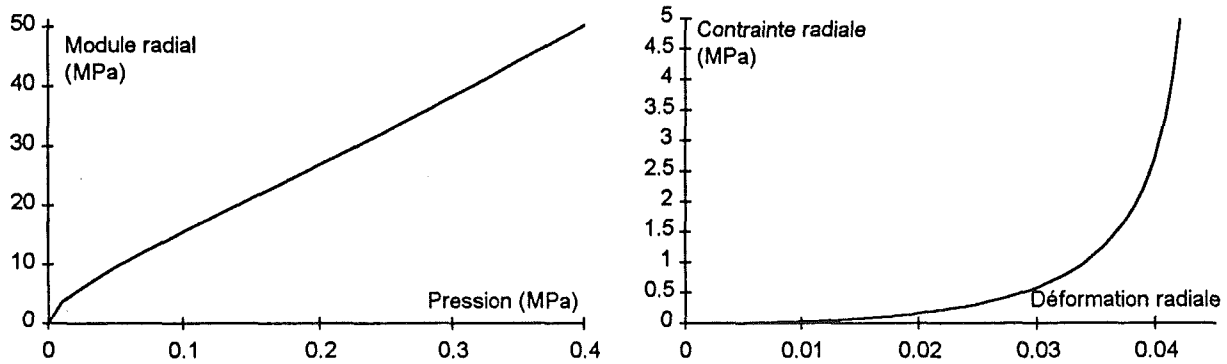


Figure A.11 : relation $E_r = E_r(P)$ et $\sigma_r = \sigma_r(\varepsilon_r)$

L'état d'équilibre étant atteint, P et e_a sont liées entre elles par la relation (A.1). Il est donc possible d'exprimer E_{r2} à partir de la seule épaisseur de la couche d'air ou de la seule pression :

$$\begin{cases} (E_{r2})_{\text{spire}}(e_a) = 2 * P_0 * \ln \left[\frac{h_0}{e_a} \right] * \frac{e_f}{e_a} & \text{avec } e_a \leq h_0 \\ (E_{r2})_{\text{spire}}(P \text{ ou } \sigma_r) = 2 * \frac{e_f}{h_0} * \sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}} * e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}} * P_0} \end{cases}$$

L'expression de $(E_{r2})_{\text{spire}}(\sigma_r)$ fait apparaître la fonction :

$$x \rightarrow \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} \quad \text{où } x \text{ est la variable sans dimension } x = \frac{P}{P_0} = -\frac{\sigma_r}{P_0}$$

x est compris entre 0 et 2, ce qui permet d'effectuer un développement limité autour de 1 :

$$\sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} = e^1 + e^1 (x-1) + \frac{e^1}{8} (x-1)^2 + \frac{e^1}{48} (x-1)^3 + \frac{e^1}{64} (x-1)^4 + o(x-1)^5 \approx 2,718 x$$

La formule (A.24) peut alors se réduire à :

$$(A.26) \quad E_{r2}(P \text{ ou } \sigma_r) = 5,437 \frac{e_f}{h_0} P = -5,437 \frac{e_f}{h_0} \sigma_r$$

Avec :

$$5,437 \frac{e_f}{h_0} = 50 \text{ à } 200$$

Nous trouvons que E_{r2} est **directement proportionnel à la pression P** ou à la contrainte radiale σ_r . PFEIFFER [1981] et HAKIEL [1987] ont essayé de mesurer directement ce module en utilisant un test de compression sur des empilements de feuilles de papier ou de film plastique. Ils ont obtenu :

$$(A.27) \quad E_r(\sigma_r) = K_2 (\sigma_r + K_1)$$

Avec :

$$K_2 = 50 \text{ à } 250$$

$$K_1 = 1 \text{ à } 5 \text{ kPa}$$

Il est intéressant de voir que *ces auteurs ont obtenu à la fois la même non-linéarité et un ordre de grandeur des paramètres similaire* (de K_1 et de K_2).

B.2.c.) cas réel

Nous avons établi une formulation du module radial dans deux cas limites :

- pas d'influence des rugosités,
- pas d'influence de la couche d'air.

En pratique, la configuration est souvent *intermédiaire entre ces deux cas limites* : quelques rugosités sont déjà en contact mais l'équilibre n'est pas encore atteint. Le module radial s'écrit alors :

$$\begin{cases} (E_r)_{\text{spire}} = (E_r)_{\text{spire}}(h_0 \text{ et } P_0, \sigma_r \text{ et } e_a) \\ \text{avec } e_a > SR_z \rightarrow (E_r)_{\text{spire}}(h_0 \text{ et } P_0, \sigma_r \text{ et } e_a) = (E_{r1})_{\text{spire}} = -\frac{e_f}{e_a} \sigma_r \\ \text{et } e_a = h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}} \rightarrow (E_r)_{\text{spire}}(h_0 \text{ et } P_0, \sigma_r \text{ et } e_a) = (E_{r2})_{\text{spire}} = -5,437 \frac{e_f}{h_0} \sigma_r \end{cases}$$

Nous allons linéairement interpoler le module radial réel entre les deux valeurs limites, soit :

$$(A.28) \quad h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}} < e_a < SR_z \rightarrow E_r(\sigma_r) = -\frac{e_f}{e_a} \sigma_r - \frac{SR_z - e_a}{SR_z - h_0 e^{-\sqrt{-\frac{\sigma_r}{P_0}}}} \left(\frac{5,437}{h_0} - \frac{1}{e_a} \right) e_f \sigma_r$$

Remarques :

-1. Le module $(E_r)_{\text{film}}$ n'intervient pas dans les formulations de $(E_r)_{\text{spire}}$ qui ne dépend que de l'épaisseur de la couche de film, des propriétés mécaniques et de l'épaisseur de la couche inter-spires (air/rugosités). La seule hypothèse dont nous avons eu besoin est de savoir qu'il est très supérieur à la pression. BOGY, BUGDAYCI et TALKE [1979] estiment $(E_r)_{\text{film}}$ entre 2 et 3 GPa.

-2. Les deux expressions du module $(E_r)_{\text{spire}}$ conduisent à des valeurs comprises entre 1 et 100 MPa, donc très inférieures à E_θ et E_z (environ 5 GPa). Le comportement d'une spire est donc *très fortement orthotrope*. Une orthotropie aussi importante s'explique par le fait que les éléments sollicités sont différents selon la direction choisie :

- *contrainte appliquée radialement* : seules les rugosités se déforment,
- *contrainte appliquée tangentiellement ou axialement* : seul le film se déforme.

-3. Pour une même pression, nous avons $(E_{r2})_{\text{spire}} > (E_{r1})_{\text{spire}}$. Ce résultat est tout à fait cohérent : il est plus facile de comprimer une couche d'air que de déformer des rugosités.

B.3.) $(\nu_{\theta z})_{\text{spire}}$ et $(\nu_{z\theta})_{\text{spire}}$

Le coefficient de POISSON $\nu_{\theta z}$ (respectivement $\nu_{z\theta}$) est égal au rapport de ε_z sur ε_θ (respectivement ε_θ sur ε_z) sous une contrainte tangentielle pure (respectivement axiale). Les rugosités ne sont ni sollicitées directement (la contrainte est dans le plan θz) ni même mesurées (les mesures de déformation sont limitées à ce plan). Par suite, $\nu_{\theta z}$ et $\nu_{z\theta}$ seront simplement définis par :

$$(A.29) \quad \begin{cases} (\nu_{\theta z})_{\text{spire}} = (\nu_{\theta z})_{\text{film}} \\ (\nu_{z\theta})_{\text{spire}} = (\nu_{z\theta})_{\text{film}} \end{cases}$$

Ces deux coefficients sont reliés entre eux (symétrie du tenseur) : $(\nu_{\theta z})_{\text{film}} = (\nu_{z\theta})_{\text{film}} * \frac{(E_{\theta})_{\text{film}}}{(E_z)_{\text{film}}}$

B.4.) $(\nu_{\theta r})_{\text{spire}}$ et $(\nu_{zr})_{\text{spire}}$

Le coefficient de POISSON $\nu_{\theta r}$ (respectivement ν_{zr}) est égal au rapport de ϵ_r sur ϵ_{θ} (respectivement ϵ_z) sous une contrainte tangentielle pure (respectivement axial). Cette fois, les rugosités ne sont pas sollicitées directement mais leur réponse indirecte dans la direction radiale est mesurée.

Considérons l'assemblage précédant mais disposé parallèlement à l'axe de sollicitation :



Figure A.12 : couplage parallèle d'une couche d'air et d'une couche de film

Cette fois, nous nous intéressons au coefficient de POISSON entre les directions parallèle et perpendiculaire au plan des couches, défini par la relation :

$$(\nu_{\theta r})_{\text{spire}} = \frac{(\epsilon_r)_{\text{spire}}}{(\epsilon_{\theta})_{\text{spire}}} \quad \text{pour la sollicitation} \quad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme pour E_r , nous considérons que les comportements mécaniques des deux constituants peuvent être définis par des lois de HOOKE. Dans le cadre de la sollicitation envisagée, nous avons :

$$(\epsilon_{\theta})_{\text{spire}} = (\epsilon_{\theta})_f = \frac{(\epsilon_r)_f}{(\nu_{r\theta})_f}$$

Dans le cas précédent (contrainte radiale), la couche inter-spires était sollicitée dans le sens des aspérités (pics de la surface). La réponse globale de la spire était donc directement liée à la réponse mécanique (aptitude à la déformation) de ces pics.

Cette fois, la couche inter-spires est sollicitée en contrainte perpendiculairement à la direction des pics. Elle ne va donc offrir quasiment aucune résistance à la déformation tangentielle sans pour autant se déformer radialement. Tout au plus, nous avons $P V = \text{cte}$ qui conduit à une surpression négligeable. La variation d'épaisseur radiale δe_a est donc pratiquement nulle. Par suite, nous avons tout simplement :

$$(\epsilon_r)_{\text{spire}} = \frac{\delta e_f + \delta e_a}{e_f + e_a} \approx \frac{\delta e_f}{e_f} = (\epsilon_r)_f$$

En reportant ces deux expressions de $(\epsilon_{\theta})_{\text{spire}}$ et $(\epsilon_r)_{\text{spire}}$ dans la définition de $\nu_{\theta r}$, il vient alors :

$$(A.35) \quad \begin{cases} (\nu_{\theta r})_{\text{spire}} = (\nu_{\theta r})_{\text{film}} \\ (\nu_{zr})_{\text{spire}} = (\nu_{zr})_{\text{film}} \end{cases}$$

Les résultats sont bien sûr identiques pour $(\nu_{rz})_{\text{spire}}$.

B.5.) $(\nu_{r\theta})_{\text{spire}}$ et $(\nu_{rz})_{\text{spire}}$

Le coefficient de POISSON $\nu_{r\theta}$ (respectivement ν_{rz}) est égal au rapport de la ϵ_θ sur ϵ_r (respectivement ϵ_z sur ϵ_r) sous l'action d'une contrainte strictement radiale. Cette fois, les rugosités sont directement sollicitées puisque la contrainte est appliquée radialement. La symétrie du tenseur impose les relations suivantes :

$$(A.31) \quad \begin{cases} (\nu_{r\theta})_{\text{spire}} = (\nu_{\theta r})_{\text{spire}} * \frac{(E_r)_{\text{spire}}}{(E_\theta)_{\text{spire}}} \\ (\nu_{rz})_{\text{spire}} = (\nu_{zr})_{\text{spire}} * \frac{(E_r)_{\text{spire}}}{(E_z)_{\text{spire}}} \end{cases}$$

Les valeurs de $(E_r)_{\text{spire}}$, $(E_\theta)_{\text{spire}}$, $(\nu_{\theta r})_{\text{spire}}$ et $(\nu_{zr})_{\text{spire}}$ ont été précisées précédemment.

Remarques :

-1. Le module d'YOUNG $(E_r)_{\text{spire}}$ est très inférieur à $(E_\theta)_{\text{spire}}$. Ces deux coefficients de POISSON sont donc très faibles : environ 0,003. De nombreux auteurs (ALTMANN [1966] et YAGODA [1980a et 1980b]) n'ont pas utilisé ces relations de symétrie et ont directement écrit :

$$\begin{cases} (\nu_{r\theta})_{\text{spire}} = (\nu_{\theta r})_{\text{spire}} \\ (\nu_{rz})_{\text{spire}} = (\nu_{zr})_{\text{spire}} \end{cases}$$

La matrice de HOOKE est alors *non symétrique*, ce qui est *incompatible avec l'hypothèse des milieux continus*. Rappelons que l'on décompose les tenseurs des contraintes et des déformations sous la forme de la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Le premier, celui qui nous intéresse est donc, sous cette hypothèse, symétrique.

De nombreux auteurs (TRAMPOSH [1965 et 1967], GOOD [1992]...) sont en désaccord avec cette symétrie du tenseur et justifient ce caractère non symétrique en considérant que l'hypothèse de milieux continus n'est pas valable (existence de glissements locaux).

-2. UMANSKII, KRYUTCHOV et SHIDLOVSKII [1981] ont mesuré les différents coefficients de POISSON pour des matériaux qui, comme le film enroulé, présentent une très forte anisotropie. Ils ont bien sûr vérifié la pleine validité des relations (A.31).

Nous travaillerons bien sûr avec une matrice symétrique de HOOKE.

B.6.) $(G_{\theta z})_{\text{spire}}$, $(G_{r\theta})_{\text{spire}}$ et $(G_{rz})_{\text{spire}}$

Les problèmes de cisaillement seront globalement négligés dans cette étude. Seuls les effets radial/tangentiel du couple d'enroulement seront étudiés, mais ils ne nécessiteront pas la connaissance du module de COULOMB.

III.) Equation d'équilibre

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial}{\partial r} \sigma_r + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + r \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \\ (A.32) \quad & \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} \tau_{r\theta} + 2 \tau_{r\theta} + r \frac{\partial}{\partial z} \tau_{\theta z} = 0 \\ & r \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z + r \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} + \tau_{rz} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned}$$

IV.) Relations $\varepsilon = \varepsilon(u)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r} u_r \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} u_z \\ (A.33) \quad \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_z + \frac{\partial}{\partial r} u_\theta - \frac{u_\theta}{r} \right] \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_z \right] \\ \gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} u_r + \frac{\partial}{\partial r} u_z \right] \end{aligned}$$

V.) $\sigma_r = \sigma_r ([\sigma_\theta]_0)$

Considérons une portion de spire d'épaisseur dr , de longueur dz et d'angle $d\theta$ sous tension $[\sigma_\theta]_0$:

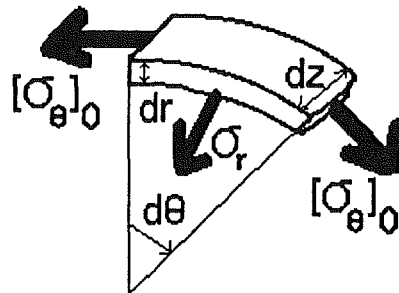


Figure A.13 : portion de spire

L'application de la tension $[\sigma_\theta]_0$ ou de la force $[\sigma_\theta]_0 dr dz$ se traduit par une contrainte radiale $d\sigma_r$.

La relation entre $[\sigma_\theta]_0$ et $d\sigma_r$ s'obtient en projetant sur l'axe radial la résultante des forces:

$$2 [\sigma_\theta]_0 dz dr \sin \frac{d\theta}{2} = - d\sigma_r r d\theta dz$$

avec :

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$$

D'où :

$$(A.34) \quad d\sigma_r = - [\sigma_\theta]_0 \frac{dr}{r}$$

VI.) Résolution de l'équation différentielle

A.) Résolution générale

Nous nous proposons dans cette annexe de résoudre l'équation différentielle d'équilibre radiale formulée en termes de déplacement radial. Nous nous placerons indifféremment dans le cadre des contraintes ou des déformations planes en introduisant des coefficients : α , β , λ ...

Exprimons la loi de HOOKE sous la forme :

$$(A.35) \quad \begin{cases} \sigma_r = \beta \varepsilon_r + \alpha \varepsilon_\theta = \beta \frac{d}{dr} u(r) + \alpha \frac{u(r)}{r} \\ \sigma_\theta = \alpha \varepsilon_r + \eta \varepsilon_\theta = \alpha \frac{d}{dr} u(r) + \eta \frac{u(r)}{r} \\ \sigma_z = \psi \varepsilon_r + \phi \varepsilon_\theta = \psi \frac{d}{dr} u(r) + \phi \frac{u(r)}{r} \end{cases}$$

Avec :

α , β , η , ψ et ϕ sont des coefficients fonction de l'hypothèse axiale choisie :

- annexe II.A.2. pour les *déformations planes*,
- annexe II.A.3. pour les *contraintes planes*.

(ψ et ϕ) sont nuls dans ce dernier cas)

La procédure d'obtention de l'équation différentielle a été détaillée au §C.3.b. Elle conduit à :

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} [\delta u]_s(r) + r \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r) - \lambda^2 \delta u]_s(r) = 0$$

Avec :

$$(A.36) \quad \lambda = \sqrt{\frac{\eta}{\beta}}$$

La première condition à la limite s'écrit :

$$[\delta \sigma_r]_s(R_m) = E_c \frac{[\delta u]_s(R_m)}{R_m} \Rightarrow \frac{d}{dr} [\delta u]_s(R_m) = \frac{E_c - \alpha}{\beta} \frac{[\delta u]_s(R_m)}{R_m}$$

Annexe VI : résolution de l'équation différentielle

Avec :

E_c = module équivalent du mandrin, calculé ultérieurement (annexe VI.2) :

La seconde condition à la limite s'écrit :

$$[\delta\sigma_r]_s(s) = -[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \Rightarrow \beta \frac{d}{dr} [\delta u]_s(s) + \alpha \frac{[\delta u]_s(s)}{s} = -[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s}$$

Avec :

$[\sigma_\theta]_0(s, R_{rf})$ = tension de la spire considérée de rayon s

On peut aisément montrer que les fonctions $r \rightarrow r^{+\lambda}$ et $r \rightarrow r^{-\lambda}$ sont deux solutions de l'équation différentielle et que toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est également solution.

Pour simplifier, nous écrirons cette combinaison linéaire sous la forme :

$$(A.37) \quad \begin{cases} \frac{[\delta u]_s(r)}{r} = A(R_m, s) [r^{+\lambda-1} + B(R_m) r^{-\lambda-1}] [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \\ \frac{d}{dr} [\delta u]_s(r) = A(R_m, s) \lambda [r^{+\lambda-1} - B(R_m) r^{-\lambda-1}] [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \end{cases}$$

Avec :

$A(R_m, s)$ et $B(R_m)$ = constantes appropriées fonctions des conditions aux limites

En reportant les deux expressions de (A.37) dans les conditions aux limites, on obtient les deux valeurs suivantes de $A(R_m, s)$ et $B(R_m)$:

$$(A.38) \quad \begin{cases} A(R_m, s) = \frac{s^{-\lambda+1}}{(\alpha + \beta \lambda) + (\alpha - \beta \lambda) B(R_m) s^{-2\lambda}} \\ B(R_m) = \frac{\beta \lambda - E_c + \alpha}{\beta \lambda + E_c - \alpha} R_m^{+2\lambda} \end{cases}$$

En reportant alors ces deux expressions dans (A.37), on obtient le champ des contraintes σ_r , σ_θ et σ_z induit en r par le serrage de la spire s :

$$(A.39) \quad \begin{cases} [\delta\sigma_r]_s(r) = [(\alpha + \beta \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\alpha - \beta \lambda) r^{-\lambda-1}] A(R_m, s) [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \\ [\delta\sigma_\theta]_s(r) = [(\eta + \alpha \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\eta - \alpha \lambda) r^{-\lambda-1}] A(R_m, s) [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \\ [\delta\sigma_z]_s(r) = [(\phi + \psi \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\phi - \psi \lambda) r^{-\lambda-1}] A(R_m, s) [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \frac{\delta s}{s} \end{cases}$$

Le champ des contraintes induit en r par la présence de toutes les spires supérieures ($r < s < R_{rf}$) s'obtient alors en *intégrant* le champ précédent entre les deux bornes r (la spire considérée) et R_{rf} (la dernière spire du rouleau de film) et en ajoutant la tension interne à la contrainte tangentielle :

$$(A.40) \begin{cases} \sigma_r(r) = [(\alpha + \beta \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\alpha - \beta \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \\ \sigma_\theta(r) = [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) + [(\eta + \alpha \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\eta - \alpha \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \\ \sigma_z(r) = [(\phi + \psi \lambda) r^{+\lambda-1} + B(R_m) (\phi - \psi \lambda) r^{-\lambda-1}] l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) \end{cases}$$

Avec :

$$l(R_m, s, [\sigma_\theta]_0) = \int_r^{R_{rf}} \frac{s^{-\lambda}}{(\alpha + \beta \lambda) + (\alpha - \beta \lambda) B(R_m) s^{-2\lambda}} [\sigma_\theta]_0(s, R_{rf}) \delta s$$

B.) Application au module du mandrin

Le mandrin est un cylindre de rayon interne R_{ml} et de rayon externe R_m . Les propriétés mécaniques du matériau le constituant sont supposées connues. Or, dans la résolution de l'équation différentielle d'équilibre, nous introduisons le module d'YOUNG E_c tel que :

$$\sigma_r(R_m) = E_c \frac{u(R_m)}{R_m}$$

Il apparaît donc nécessaire de relier ce module E_c aux dimensions et aux propriétés mécaniques du matériau. En réalité, E_c est le module d'YOUNG du mandrin si celui-ci était un solide plein homogène et de même diamètre extérieur. E_c va donc s'obtenir en résolvant l'équation différentielle précédente avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_r(R_{ml}) = 0 & \Rightarrow \frac{d}{dr} u(R_{ml}) = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{u(R_{ml})}{R_{ml}} \\ \sigma_r(R_m) = \sigma_0 & \Rightarrow \beta \frac{d}{dr} u(s) + \alpha \frac{u(R_m)}{R_m} = \sigma_0 \end{cases}$$

Ensuite, le module E_c sera défini par :

$$E_c = \sigma_r(R_m) \frac{R_m}{u(R_m)}$$

Il est inutile de reprendre toute la résolution de l'équation différentielle. Considérons juste une solution de la même forme :

$$\begin{cases} \frac{u(r)}{r} = A(R_{ml}, R_m) [r^{+\lambda-1} + B(R_{ml}) r^{-\lambda-1}] \sigma_0 \\ \frac{d}{dr} u(r) = A(R_{ml}, R_m) \lambda [r^{+\lambda-1} - B(R_{ml}) r^{-\lambda-1}] \sigma_0 \end{cases}$$

Les nouvelles conditions aux limites conduisent à :

$$\begin{cases} A(R_{mI}, R_m) = \frac{R_m^{-\lambda-1}}{(\alpha + \beta \lambda) + (\alpha - \beta \lambda) B(R_{mI}) R_m^{-2\lambda}} \\ B(R_{mI}) = \frac{\beta \lambda + \alpha}{\beta \lambda - \alpha} R_{mI}^{+2\lambda} \end{cases}$$

En reportant $\frac{u(R_m)}{R_m}$ dans la condition aux limites, nous trouvons finalement :

$$E_c = \frac{(\lambda \beta^2 - \alpha^2) \left[1 - \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2\lambda} \right]}{(\lambda \beta - \alpha) + (\lambda \beta + \alpha) \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2\lambda}}$$

Application à un matériau isotrope caractérisé par E_m et ν_m :

$$\begin{aligned} \text{déformation planes} : E_c &= \frac{E_m}{1 + \nu_m} \frac{1 - \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2}}{1 - 2\nu_m + \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2}} \\ \text{contraintes planes} : E_c &= E_m \frac{1 - \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2}}{1 - \nu_m + (1 - \nu_m) \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2}} \end{aligned} \quad (A.42)$$

Remarque :

En réalité, le problème est encore plus compliqué car le mandrin carton est obtenu par enroulement d'une bande de papier avec un certain angle (environ 60° : GERHARDT [1992])

C.) Application au module global du rouleau

Reprenons le calcul précédent du module équivalent mais en l'appliquant cette fois au rouleau. La principale différence avec le mandrin concerne le caractère fortement *orthotrope* du rouleau. Cette orthotropie va nous permettre de simplifier les expressions des différents coefficients :

$$E_r \ll E_\theta \text{ et } E_z \Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx \nu_{\theta r} E_r & \beta \approx E_r & \eta \approx E_\theta \\ \lambda \approx \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} & \left[\frac{R_{mI}}{R_m} \right]^{+2\lambda} \ll 1 \end{cases}$$

Nous trouvons les mêmes simplifications en déformations planes et en contraintes planes.

Puis :

$$(A.43) \quad E_c \approx \beta \lambda \approx \sqrt{E_\theta E_r}$$

VII.) Défauts de planéité

Nous nous plaçons bien sûr dans le cadre des hypothèses du §D. du chapitre IV.

- le film est assimilé à une distribution selon l'axe z , de bandes de largeur dz et de longueur $L(z)$,
- les effets transversaux entre les différentes bandes seront négligés,
- de plus, le module tangentiel sera supposé égal dans toute la largeur du film.

On sait, par expérience que les sur-longueurs sont symétriques et plus faibles sur les bords qu'au centre. Afin de ne pas trop compliquer l'étude, nous représenterons le profil par une loi de variation :

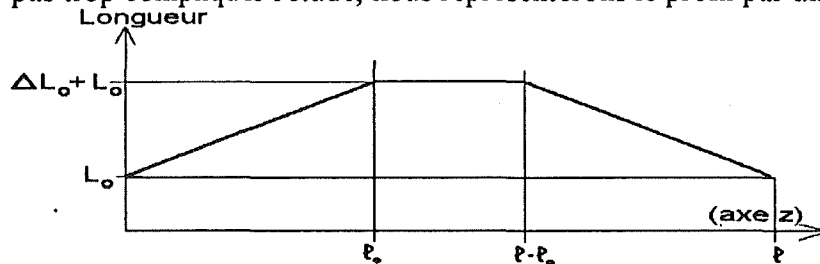


Figure A.14 : profil des sur-longueurs

C'est à dire défini par la loi :

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq l_0 \Rightarrow L(z) = L_0 + \frac{z}{l_0} \Delta L_0 \\ l_0 \leq z \leq l - l_0 \Rightarrow L(z) = L_0 \\ l - l_0 \leq z \leq l \Rightarrow L(z) = L_0 - \frac{l-z}{l_0} \Delta L_0 \end{cases}$$

Appelons $[\sigma_\theta]_0(z)$ le profil axial de la tension réelle et $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$ la tension globale. En réalité, c'est la tension globale qui est appliquée. $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$ est relié au profil $[\sigma_\theta]_0(z)$ par la relation :

$$\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle = \frac{2}{l} \int_{z=0}^{z=\frac{l}{2}} [\sigma_\theta]_0(z) dz = \frac{2}{l} \int_{z=0}^{z=l_0} [\sigma_\theta]_0(z) dz + 2 \int_{z=\frac{l}{2}-l_0}^{z=\frac{l}{2}} [\sigma_\theta]_0(z) dz$$

Appliquons maintenant une tension globale $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$. L'application de cette tension globale va se traduire par une déformation des zones de plus faible longueur initiale (bords).

Selon la valeur de $\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle$, il va y avoir deux zone : déformée ($z \leq s$ et $z \geq l - s$) et non déformée ($s \leq z \leq l - s$). Au-delà d'une valeur critique appelée $\{[\sigma_\theta]_0\}_s$, tout le film correspondant à la totalité du film déformé $s = l_0$.

Pour une tension donnée, nous aurons un profil du type :

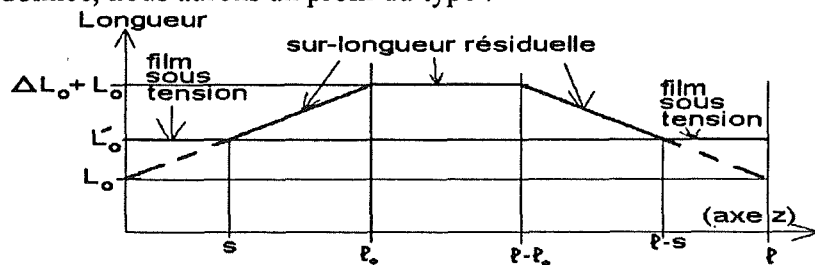


Figure A.15 : profil des sur-longueurs

Ce profil des longueurs sera défini par:

$$(A.44) \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq s \Rightarrow L'(z) = L_0(s) \\ s \leq z \leq l-s \Rightarrow L'(z) = L(z) \\ l-s \leq z \leq l_0 \Rightarrow L'(z) = L_0(s) \end{cases}$$

La distribution de la tension interne $[\sigma_\theta]_0(z)$ est directement reliée à la sur-longueur :

$$(A.45) \quad [\sigma_\theta]_0(z) = E_\theta \frac{L'(z) - L(z)}{L(z)} = \begin{cases} \left(\frac{L_0(s)}{L_0 + \frac{z}{l_0} \Delta L_0} - 1 \right) E_\theta & \text{si } 0 \leq z \leq s \\ 0 & \text{si } s \leq z \leq l_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle = \frac{2 l_0}{1} \frac{L_0(s)}{\Delta L_0} E_\theta \int_0^s \frac{1}{z + l_0 \frac{L_0}{\Delta L_0}} dz - 2 \frac{s}{1} E_\theta = \log \left[1 + \frac{s}{l_0} \frac{\Delta L_0}{L_0} \right] \frac{2 l_0}{1} \frac{L_0(s)}{\Delta L_0} E_\theta - \frac{s}{l_0} E_\theta$$

Le terme situé à l'intérieur du logarithme est proche de 1. Effectuons donc un développement limité :

$$\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle \approx \left[\frac{s}{l_0} \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{s^2}{2 l_0^2} \frac{\Delta L^2}{L_0^2} + \frac{s^3}{3 l_0^3} \frac{\Delta L^3}{L_0^3} \right] \frac{2 l_0}{1} \frac{L_0(s)}{\Delta L} E_\theta - 2 \frac{s}{1} E_\theta$$

Or, nous avons la relation suivante :

$$\frac{L_0(s)}{L_0} = 1 + \frac{s}{l_0} \frac{\Delta L}{L_0}$$

D'où :

$$\langle [\sigma_\theta]_0 \rangle \approx \frac{s^2}{l_0} \frac{\Delta L}{L_0} E_\theta - \frac{s^3}{3 l_0^2} \frac{\Delta L_0^2}{L_0^2} + \frac{2 s^4}{3 l_0^3} \frac{\Delta L_0^2}{L_0^3} \approx \frac{s^2}{l_0} \frac{\Delta L}{L_0} E_\theta$$

Puis, en écrivant la condition $s = l_0$ correspondant à la totalité du film sous tension :

$$(A.46) \quad \{[\sigma_\theta]_0\}_s = \frac{l_0}{1} \frac{\Delta L}{L_0} E_\theta$$

VIII.) Aspects numériques

A.) Maillage

L'objectif de ce modèle d'enroulement est la compréhension et la prévention des risques d'apparition de défaut. Nous allons aborder ici quelques aspects numériques induits par la programmation du modèle. Ils sont principalement liés au *maillage*, à l'*évolution de celui-ci* et à la *programmation*.

A.1.) Maillage à une dimension

variable temps

Le calcul des contraintes sera effectué depuis la première superposition jusqu'à la dernière superposition. *La variable temps est implicite dans le modèle*, le compteur utilisé étant le numéro de la dernière couche, noté dans la suite I , compris en 1 et N . Il est possible de s'intéresser seulement à l'état des contraintes résultant de la dernière ou bien de chaque superposition.

variable tangentielle

Nous nous intéressons à la présence du rouleau d'appui uniquement de manière globale en ne calculant que son effet moyen pendant une rotation. De ce fait, le rouleau présente une symétrie axiale et il n'est pas nécessaire d'introduire des points de maillage dans cette direction.

variable axiale

Nous introduisons deux séries de points de maillage : au bord et au milieu du rouleau :

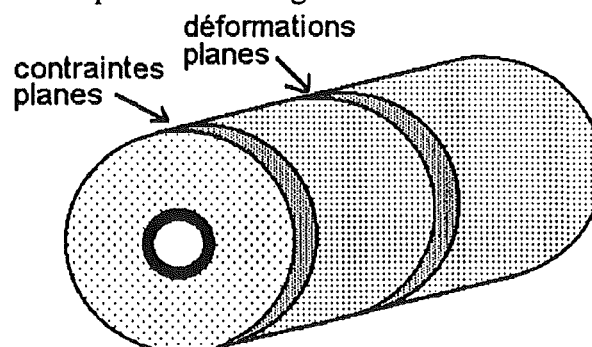


Figure A.16 : hypothèse des contraintes planes et des déformations planes

Ces deux séries de points correspondent à des résolutions par conséquent séparées. Par extension, on peut considérer qu'il y a deux points de discrétisation dans la direction axiale.

variable radiale

Il s'agit de la direction d'accrétion des couches de film.

Chaque nouvelle superposition correspond à l'ajout d'un point de discrétisation supplémentaire.

A.2.) Interpolation à deux dimensions

La résolution est effectuée en 1D dans deux tranches : bord et centre du rouleau. Il est possible d'avoir une estimation de l'état bidimensionnel (axial-radial) des contraintes et des déformations à partir de ces deux solutions monodimensionnelles en construisant des fonctions simples, interpolant les deux cas et respectant les symétries du problème. Prenons l'origine de l'axe z au centre du rouleau et considérons une fonction telle que $f_d(r)$ et $f_c(r)$ soient les solutions au centre et au bord :

$$(A.47) \quad \begin{cases} f(r, -\frac{l_f}{2}) = f_c(r) \\ f(r, 0) = f_d(r) \end{cases}$$

Cas des fonctions $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, u_r$

Ces fonctions sont symétriques par rapport au centre du rouleau. La fonction la plus simple respectant cette symétrie est la fonction polynômiale d'ordre 2 définie par :

$$(A.48) \quad f(r, z) = 4 \left[\frac{z}{l_f} \right]^2 [f_d(r) - f_c(r)] + f_c(r)$$

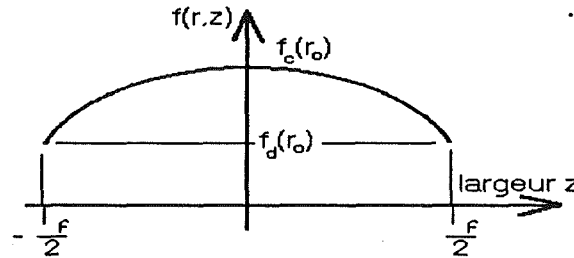


Figure A.17 : cas d'une fonction symétrique

Cas de la fonction u_z

Cette fonction est antisymétrique par rapport au centre du rouleau où elle est nulle. La fonction la plus simple respectant cette symétrie est la fonction polynômiale d'ordre 1 définie par :

$$(A.49) \quad f(r, z) = \frac{z}{l_f} f_c(r)$$

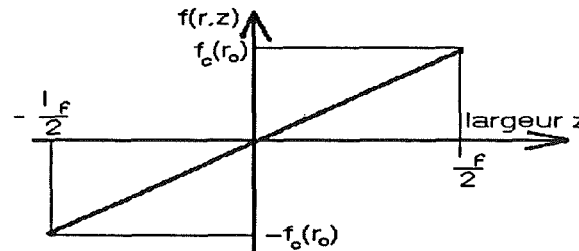


Figure A.18 : cas d'une fonction antisymétrique

Il s'agit d'une résolution en 1+1 par opposition à une résolution 2 D directe. Une telle résolution présente l'avantage de donner une idée de l'état bidimensionnel des contraintes sans pour autant compliquer le calcul.

B.) Maillage auto-adaptatif

B.1.) Nombre d'opérations de base

La simulation de l'enroulement des films est un *processus incrémental* qui suppose qu'après chaque nouvelle itération l'état des contraintes soit entièrement recalculé :

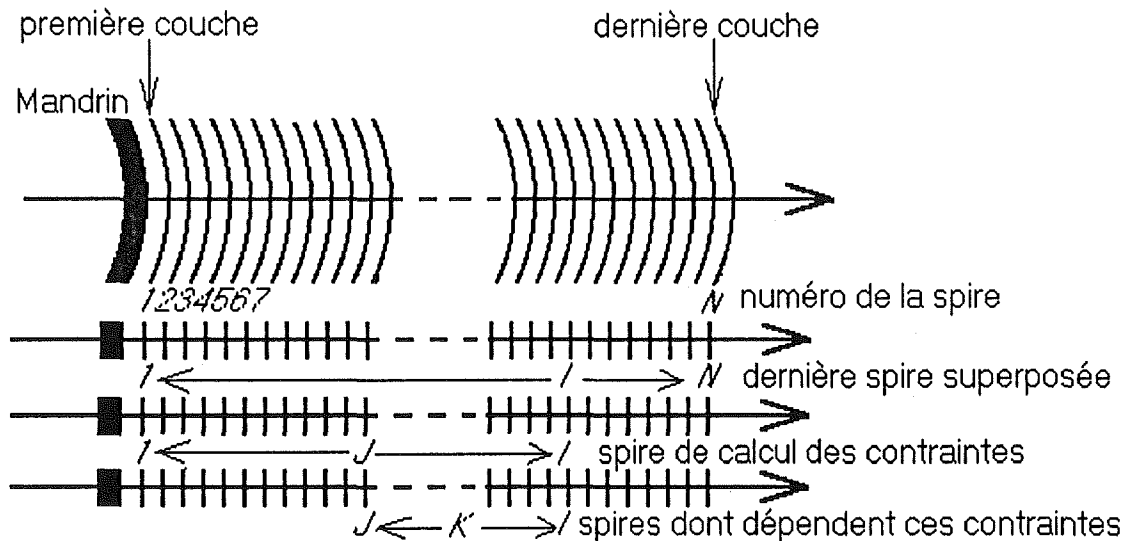


Figure A.19 : nombre d'opérations élémentaires.

Considérons le calcul des contraintes résultant de la superposition de la spire n° I . Il s'agit du calcul des contraintes résiduelles dans les spires n° J , J variant de 1 à I . Le calcul des contraintes pour la spire J représente une intégration des effets des superpositions de toutes les spires supérieures (comprises entre $K=J+1$ et $K=I$) et donc en théorie $I-J$ résolutions d'équations différentielles.

Finalement, la superposition de N spires représente environ N^2 *résolutions* d'équations différentielles et environ N^3 *intégrations*. Le nombre total N de spires d'un rouleau est défini par :

$$\pi * R_m^2 + L (e_f + e_a) = \pi * [R_m + N (e_f + e_a)]^2$$

Application numérique :

$$L = 18\,000 \text{ m} \quad e_f + e_a = 14,5 \text{ } \mu \quad R_m = 90 \text{ mm}$$

Nous trouvons $N = 15000$ spires. Cela représente **225 millions** de résolutions d'équations différentielles et **3400 milliards** d'intégrations!. Quel que soit le support informatique, il n'est pas possible d'envisager une telle finesse dans l'étude, c'est à dire d'*introduire et de conserver un nouveau point de discrétisation pour chaque spire du rouleau*.

B.2.) Notion de paquet de spires

La première méthode envisagée pour réduire le temps de calcul est d'introduire la notion de "*paquet de spires*". Nous superposons alors non pas 1 mais NS_G *spires* qui se comportent alors comme une

entité indivisible et homogène. Avec cette technique, si au lieu d'envisager la superposition de 15 000 fois 1 spire, nous superposons 150 fois 100 spires, nous divisons par 10 000 le nombre de résolution d'équations différentielles et par 1 million le nombre d'intégrations. Il devient alors possible d'envisager une résolution numérique avec un temps de calcul raisonnable.

Il est bien évident que plus NS_G sera grand, moins la précision des calculs sera bonne. Il existe donc un compromis entre NS_G et la précision souhaitée.

B.3.) Maillage auto-adaptatif

Avec la technique précédente de décomposition du rouleau en paquets de spires, le pas de discrétisation, c'est à dire le nombre de spires que représente un paquet reste constant pour tous les points de calcul entre le mandrin et la spire en formation. Or :

- certaines zones où les variations sont peu importantes (le milieu du rouleau en général) n'ont pas besoin d'être finement maillées : NS_G peut être grand.
- inversement, d'autres zones où les variations sont plus importantes (près du mandrin ou de la spire en cours de superposition) nécessitent un maillage fin : NS_G doit être petit.

Par ailleurs, le solide est obtenu par accréation de couches : il y a donc ajout d'un point de discrétisation après chaque itération. La spire en cours de superposition à un instant donné (qui nécessite un pas de discrétisation fin) sera, quelques itérations plus tard, au centre du rouleau (zone où le pas de discrétisation peut être plus grand).

L'introduction d'un pas variable $NS_G[I]$ suppose donc que l'on déplace ou supprime des points de discrétisation peu après leur introduction, c'est à dire que l'on introduise la notion de maillage évolutif ou *maillage auto-adaptatif*.

De nombreuses études sur les maillages évolutifs ont été publiées, mais apparemment rien sur la discrétisation de la modélisation des phénomènes d'accréation des corps. L'exemple typique de maillage évolutif traité dans la littérature concerne la propagation d'un front de flamme : LARROUTUROU [1987], BENKALDOUM [1988]. L'évolution du maillage peut se décomposer en deux étapes : *suppression d'un point* puis *rajustement des autres*.

Le rajustement ou repositionnement des points de maillage est une opération très complexe qui suppose la définition d'un critère de rajustement (généralement lié au profil des fonctions étudiées) puis le lissage des fonctions, le repositionnement complet du maillage. Une telle opération représente en soi une étude très complète qui sort largement du cadre du modèle.

Par suite, nous nous contenterons de supprimer un point de discrétisation au centre du maillage après chaque ajout d'un nouveau point à l'extérieur. La suppression du point I (associé à $NS_G[I]$ spires par exemple) correspond en fait à la fusion de celui-ci avec son voisin immédiat (associé à $NS_G[I+1]$ spires) qui représentera alors $NS_G'[I]=NS_G[I]+NS_G[I+1]$ spires.

Cette suppression ne s'effectue pas aléatoirement mais suit un algorithme très précis que nous avons développé et dont l'objectif est de rapprocher le plus possible la fonction $NS_G[I]$ d'une courbe en

forme de "cloche" avec de faibles valeurs de NS_G (maillage très fin) près du mandrin et de la dernière spire et de plus grandes valeurs de NS_G (maillage plus grossier) au milieu du rouleau. Dans cette méthode, le rajustement du maillage suit un algorithme préétabli, indépendant des profils réels des différentes fonctions (épaisseur de la couche d'air, contraintes...). Il présente toutefois l'avantage d'offrir - compte tenu de la nécessité de construire un maillage évolutif - un excellent compromis entre la simplicité et l'efficacité.

Appelons :

NG = nombre total de paquet de spires qui vont être superposées (nombre total d'itérations)

NG_c = nombre maximum de points de discrétisation du rouleau

I = nombre de paquets de spires déjà superposés (I varie de 1 à NG)

$NS_G[I]$ = nombre de spires du paquet de spires n° I

N_{spi} = nombre de spires que représente un paquet de spires au moment de sa superposition

Lors de la première itération, nous avons $I=1$ et $NS_G[I]=N_{spi}$

Ensuite I augmente de 1 après chaque itération correspondant à la superposition de N_{spi} spires.

Si I reste inférieur ou égal à NG_c , nous avons $NS_G[I]=N_{spi}$ pour tout I compris entre 1 et I :

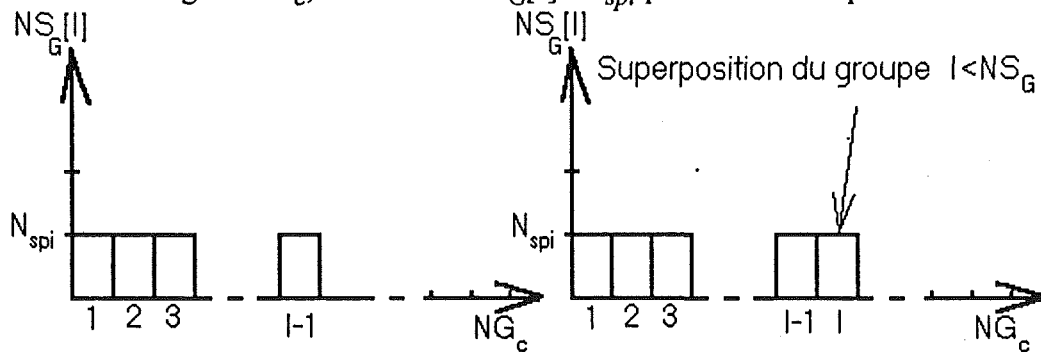


Figure A.20 : profil de discrétisation initial

Ensuite, pour chaque superposition telle que I soit supérieur à NG_c , nous avons la disparition d'un autre point de discrétisation (J) et la translation de tous les points suivants (I compris entre $J+1$ et NG_c). Nous avons reporté sur la figure suivante un exemple où les points 4 et 5 sont fusionnés, puis où les points 5 à NG_c sont déplacés vers 4 à NG_c-1 afin de permettre l'ajout d'un nouveau point NG_c .

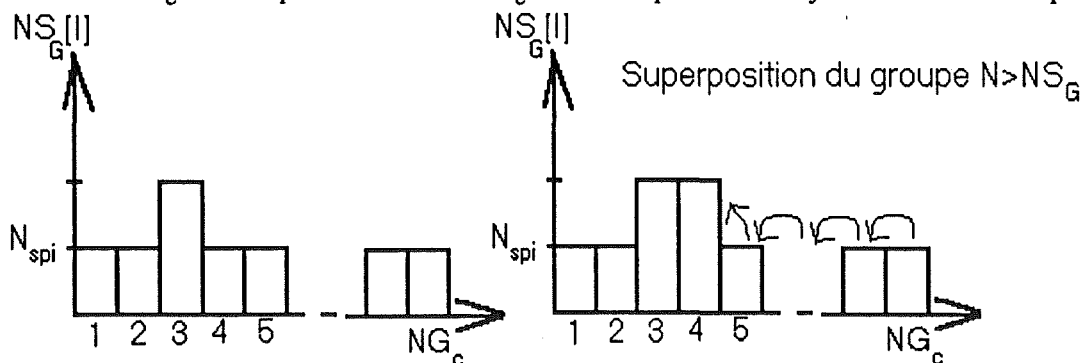


Figure A.21 : auto-adaptation du maillage

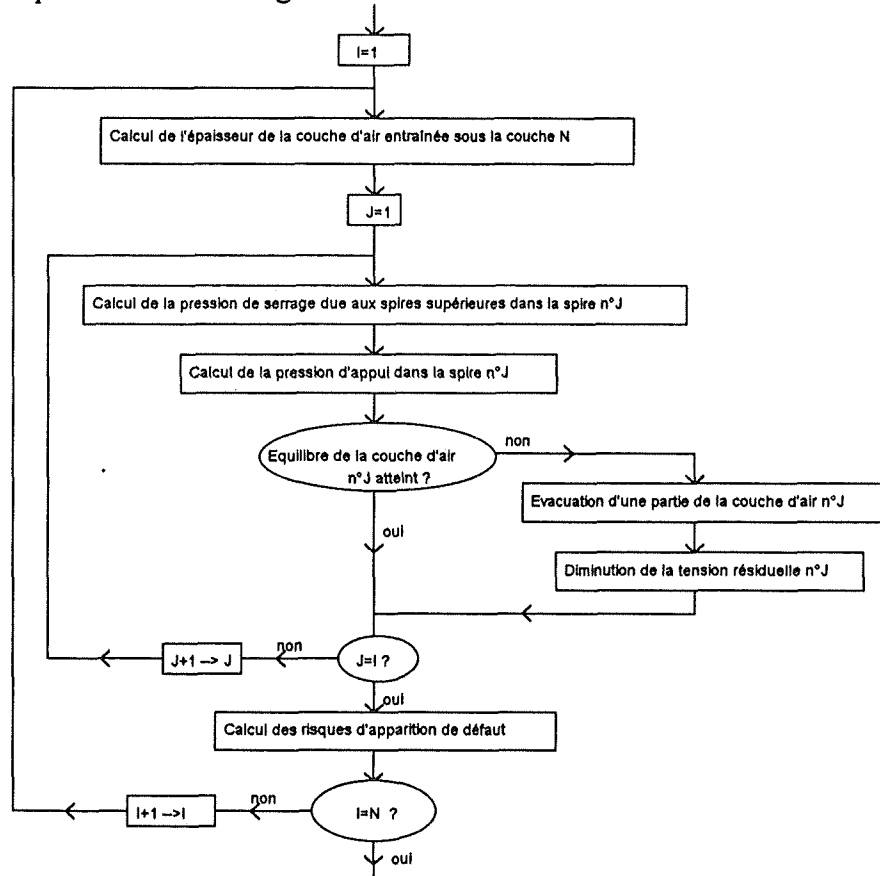
C.) Programme informatique

C.1.) Support matériel

Trois versions successives du logiciel de simulation de l'enroulement des films minces ont été écrites. La dernière version, écrite en Visual Basic 2.0 tourne sur PC-i486dx à 33 MHz sous Windows.

C.2) Algorithme général

Le programme reprend la démarche globale du modèle d'enroulement :



Conclusion

Nous avons présenté dans cette annexe les aspects numériques associés à la programmation sur un ordinateur du modèle théorique de simulation de l'enroulement des films minces.

Il n'est pas possible de s'intéresser à la superposition et à l'évolution de chaque couche de film qui constitue le rouleau. Il est donc nécessaire d'introduire une discrétisation plus grossière reposant sur la notion de *paquet de spires*. De plus, il est nécessaire d'introduire un *maillage auto-adaptatif* afin de privilégier l'étude des zones du rouleau les plus sensibles.

Le calcul est effectué à une dimension selon deux hypothèses axiales simples. Il est possible de procéder à une *interpolation bidimensionnelle* des contraintes en extrapolant par des fonctions appropriées les deux cas limites traités ici.

Nomenclature

Nomenclature

$r, \theta, z, t :$	variable radiale (m), tangentielle (radian), axiale (m) ou temporelle (s)
$s, r_0, R :$	autre écriture de la variable radiale, selon les cas (m)
$\delta s :$	épaisseur de la spire de rayon s (m)
$V :$	vitesse nominale de défilement du film (m)
$\omega :$	vitesse angulaire du rouleau de film (rad.s^{-1})
$\epsilon_r, \epsilon_\theta$ ou $\epsilon_z :$	déformation radiale, tangentielle ou axiale (sans dimension)
$u, u_p :$	déplacement radial global et solution particulière du problème thermique (m)
$[\delta u]_s :$	déplacement radial élémentaire dû à une seule spire (m)
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z :$	contrainte radiale, tangentielle ou axiale (Pa)
$[\delta \sigma_r]_s, [\delta \sigma_\theta]_s, [\delta \sigma_z]_s :$	contrainte radiale, tangentielle ou axiale élémentaire dû à une spire (Pa)
$[\sigma_\theta]_0(r, R_{rf}) :$	pré-contrainte tangentielle dans la spire de rayon r si le rayon extérieur est R_{rf} (Pa)
$[\sigma_\theta]_0(r, r) :$	pré-contrainte dans la spire de rayon r au moment de sa superposition : $R_{rf} = r$ (Pa)
$[\sigma_\theta]_0(z), <[\sigma_\theta]_0> :$	variation axiale de $[\sigma_\theta]_0$, valeur moyenne (Pa)
$\sigma_e :$	composante de la contrainte tangentielle d'origine élastique (Pa)
$\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z} :$	taux de cisaillement radial/tangentielle, radial/axial ou tangentielle/axial (Pa)
\vec{u}_θ et $-\vec{u}_\theta :$	vecteurs unitaires dans le sens de l'enroulement et le sens opposé
$E_r, E_\theta, E_z :$	module d'YOUNG radial, tangentielle ou axial (Pa)
$G_{r\theta}, G_{rz}, G_{\theta z} :$	module de COULOMB radial/tangentielle, radial/axial ou tangentielle/axial (Pa)
$\nu_{\theta r}, \nu_{zr}, \nu_{\theta z} :$	coefficient de POISSON tangentielle/radial, tangentielle/radial ou axial/radial (sans dimension)
$F_a :$	force linéique d'appui exercée par l'intermédiaire du rouleau d'appui (N.m^{-1})
$(\alpha_r)_T$ ou $(\alpha_\theta)_T :$	coefficients de dilatation du matériau ($\text{m.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
$\alpha, \beta, \eta, \psi, \phi :$	termes qui apparaissent dans les équations de HOOKE sous la forme $\sigma = h(\epsilon)$
$\lambda :$	termes qui apparaissent dans l'équation différentielle d'équilibre radial
$R_{mI}, R_m :$	rayon interne et externe du mandrin (m)
$E_m, \nu_m, E_c :$	module d'YOUNG et coefficient de POISSON du mandrin (Pa et sans dimension)
$E_c :$	module d'YOUNG équivalent, si celui était un cylindre plein de rayon R_m (Pa)
$P, P_D :$	Pression et valeur de la pression dans le test de DAVENPORT (Pa)
$f_{\text{équil}} :$	fonction caractéristique de la topographie de surface
$h_0, P_0 :$	coefficients de la fonction $f_{\text{équil}}$ (unités : m et Pa)
$t_{ea} :$	temps moyen mesuré dans le test d'échappement d'air, annexe I.B.(s)
$SR_z :$	hauteur moyenne des cinq plus grands pics d'une surface de $0,3 \text{ mm}^2$ (m)
$P_0, P_1 :$	pression appliquée et sous la couche de film dans le test d'échappement d'air (Pa)

R_0 :	rayon équivalent du dispositif dans le test d'échappement d'air (m)
$R(t)$:	évolution du rayon du front d'onde introduite dans l'annexe I.B. (m)
μ_{air} :	viscosité de l'air à la température ambiante = $16 \cdot 10^{-5}$ (Pa.s)
$Q_{\text{évac}}$:	débit d'air dans la section d'évacuation du test d'échappement d'air ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)
$V_{\text{évac}}$:	vitesse moyenne d'évacuation de l'air, annexe I.B. ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
$l_{\text{évac}}$:	largeur sur laquelle s'applique le gradient de pression dans le rouleau, annexe I.B (m)
f_{trans} :	fonction caractéristique de la topographie de surface
e_{ea} :	épaisseur moyenne de la couche d'air dans le test d'échappement d'air (m)
e_a ou $[e_a]_J$:	épaisseur de la couche résiduelle d'air à un instant donné (m)
$\delta[e_a]_{\text{irr}}^{\text{év}}$ ou $\delta[e_a]_{IJ}$:	variation irréversible de l'épaisseur e_a (m) (J=spire considérée, I= dernière)
$e_e, \Delta e_e$:	épaisseur des couches d'air entraînée et évacuée (m)
$e_{\text{min}}, e_{\text{max}}$:	épaisseur mini et maxi de la couche d'air induisant un glissement avec contact (m)
$e_f, \Delta e_f$:	épaisseur nominale du film et variation locale (m)
ρ :	masse volumique du PET ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
D_{PET}, D_a :	densité nominale du PET et apparente du rouleau (sans dimension)
l_f, L_f :	largeur et longueur du film enroulé (m)
N_{pp}, N_D :	nombre de pics porteurs en général et en particulier dans le test de DAVENPORT
A_c :	pourcentage d'aire de contact
$L(z)$:	longueur d'une bande de film (m)
μ_s :	coefficient de frottement statique (sans dimension)
$R_{\text{rf}}, R_{\text{ra}}$:	rayon courant du rouleau de film et du rouleau d'appui à un instant donné (m)
$E_{\text{rf}}, E_{\text{ra}}$:	module d'YOUNG équivalent du rouleau de film et du rouleau d'appui (Pa)
$\nu_{\text{rf}}, \nu_{\text{ra}}$:	coefficient de POISSON du rouleau de film et du rouleau d'appui (sans dimension)
R_{eq} :	rayon équivalent au système rouleau d'appui/rouleau de film en formation (m)
E_{eq} :	module équivalent au système rouleau d'appui/rouleau de film en formation (Pa)
X :	coefficient introduit dans la formulation de BLOK (sans dimension)
H, U, W :	coefficients introduits dans la formule de HAMROCK et DOWSON (sans dimension)
f_a, g_a, f_n, g_n :	fonctions analytiques (a) et numériques (n) dans le calcul des contraintes internes
A, B :	constantes appropriées dans le calcul des contraintes internes
F_a, F_b, F_c, F_g :	force linéique moyenne, sur le bord droit, centre et gauche d'appui ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)
P_c, P_{ra} :	pression en surface et en profondeur sous le rouleau d'appui (Pa)
$\sigma_{\text{cE}}, \sigma_{\text{cGPF}}$:	contraintes critiques de micro-flambage (Pa)
E_1 ou $2^{\text{M ou F}}$:	module d'YOUNG dans la direction 1 ou 2 de la Matrice ou de la Fibre (Pa)
l_1, l_2 :	demi période de micro-flambage (m)
I, N :	numéro de la dernière spire superposée, nombre total de spires superposées
$\text{NSG}, \text{NGc}, \text{NG}, \text{Nspi}$:	autres coefficients introduits dans le programme (annexe VIII)

Références bibliographiques

Références

- ALTMANN, H. C. Formulas for computing the stresses in center wound rolls, *Tech. Assoc. Pulp Paper Ind.*, 1966, Vol. 49, n° 8, p. 362-347
- BALANDREAU, L. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1989
- BALHI, J. P. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1987
- BENKALDOUM, F. *Etude numérique de modèles mathématiques décrivant la propagation de flammes dans un milieu gazeux bidimensionnel*. Thèse de docteur en mathématiques appliquées : université de Nice, 1988
- BLOK, H. and VAN ROSSUM, J. J. The Foil Bearing -A New Departure in Hydrodynamic Lubrication, *Lub. Eng.*, 1953, Vol. 9, p. 316-320
- BOGY, D.B., BUGDAYCI, N. and TALKE, F.E. Experimental Determination of Creep Functions for Thin Orthotropic Polymer Films, *IBM J. Develop*, 1979, Vol. 23, n° 4
- BOUQUEREL, F., BOURGIN, P. and PEREZ, J. Viscoelastic behavior of thin bioriented poly(ethylene terephthalate) films under low and medium stresses, *Polymer*, 1992, Vol. 33, n° 3, p. 516-525
- BOUQUEREL, F., and BOURGIN, P. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1990
- BOUQUEREL, F. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1991a
- BOUQUEREL, F. and SEVERO, M. *Nota tecnica Rhodia Filmes Nordeste*, 1991b
- BOUQUEREL, F. *Nota tecnica Rhodia Filmes Nordeste*, 1991c
- BOUQUEREL, F. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1992a
- BOUQUEREL, F. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1992b
- BOUQUEREL, F. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1992c
- BOUQUEREL, F. and BOURGIN, P. Irreversible reduction of tension due to aerodynamical effects, soumis à communications orale et écrite à la "Second Internationale Conference on Web Handling", StillWater Oklahoma, juin 1993
- BOURGIN, P. and BOUQUEREL, F. Une première approche vers le contrôle des défauts de forme d'une feuille mince enroulée, présentation au XXIV^{ième} congrès d'analyse numérique de Vittel, 24-27 mai 1992a
- BOURGIN, P. and BOUQUEREL, F. Winding Flexible Media. A global Approach, présentation au congrès annuel de l'ASME 8-13 novembre 1992b, Anaheim, USA

Références

- BOURGIN, P. and BOUQUEREL, F., Winding Flexible Media. A global Approach, *ASME Advance in Information and Storage Systems*, à paraître, 1992c
- BOURGIN, P. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1991
- BROWN, B. C. and GOODMAN, L.E. Gravitational stress in accreted bodies, *Proc. Roy. Soc.*, 1963, Vol. 276, A, p. 571-576
- CATLOW, G. M. and WALLS, G.W. A study of stress distribution in pirns, *J. Text. Inst.*, 1962, Vol. 53, p. 410-419
- CHAMIXAES *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1989
- CONNOLLY, D. and WINARSKI, D. Stress analysis of wound magnetic tape, *Proceeding of the ASLE - Int. Conf. SP 16*, 1984, p.172-182, San Diego
- CORNUT, P. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1988
- CORSI, P. and GERWIG, D. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1986
- DOMBES, J. J. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1991
- DUPHE, P. et DOMBES, J. J. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1989
- DUVAUT Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de COULOMB, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 1980, série A. t. 290, p. 263-265
- GAUDET, P. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1990
- GAUSSORGUE, J.F. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1990
- GERHARDT, T. D. External pressure loading of spiral paper tubes : theory and experiment, *ASME J. Engi. Mat. and Tech.*, 1990, Vol. 112, p. 144-147
- GERHARDT, T. D., BANK, L. C. and COFIE, E. A new test for the determination of the flexural modulus of spirally wound paper tubes, *ASME J. Engi. Mat. and Tech.*, 1992a, Vol. 114, p. 84-88
- GERHARDT, T. D. and QIU, Y. P. Losses in Wound-On-Tension in the Centerwinding of wound rolls, *Proceedings "Mechanics of Cellulosic Materials" of the ASME Winter Annual Meeting*, 1992, Anaheim, CA, USA, 8-13 novembre 1992b
- GHOSH, T.K., PENG, H., BANKS-LEE, P., HAMOUDA, H. and SHIN, D. Analysis of fabricdeformation in a roll-making operation, *Text. Res. SME - J. Lub. Tech.*, 1991, March, p. 153-161
- GRANDIDIER, J.C. *Compression et micro-flambage dans les matériaux composites fibres longues*, Thèse de docteur en sciences de l'ingénieur : université de Metz, 1991a
- GRANDIDIER, J.C. and POTIER-FERRY, M. Microbuckling and homogenization for long fiber composites, *ZAMM Z. angew. Math. Mech.*, 1991b, Vol. 71, n° 4, p. 371-374

- GRANDIDIER, J.C., FERRON, G. and POTIER-FERRY, M.** Microbuckling and strength in long-fiber composites : theory and experiments, *Int. J. Solids Struct.*, 1992a, Vol. **29**, n° 14/15, p.1753-1761
- GRANDIDIER., J.C. and GARDIN, C.** Micro-flambage des fibres dans un matériau composite à fibres longues : analyse asymptotique 2D, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, à paraître, 1992b
- GOOD, J. K. and FIKES, M. W. R.** Predicting Internal Stresses in CenterWound Rolls with an Undriven Nip Roller, *TAPPI Journal*, 1991, Vol. **74**, n° 6, p. 101-109
- GOOD, J. K, PFEIFFER, J.D. and GIACOMETTO, R. M.** Losses in Wound-On-Tension in the Centerwinding of wound rolls, *Proceedings "Web Handling" of the ASME Winter Annual Meeting*, 1992, Anaheim, CA, USA, 8-13 novembre 1992
- HAMROCK, B.J. and DOWSON, D.** *Ball Bearing Lubrication - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts*, John WILEYS and sons, New York, 1981, Chapitre XI : Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts for Materials of Low Elastic Modulus, p. 277-298
- HAKIEL, Z.** Non-linear model for wound roll stresses, *TAPPI J.*, 1987, Vol. **70**, n° 5, pp113-117
- HAKIEL, Z. and COLE, K.A.** A non linear Wound Roll Stress Model Accounting for Widthwise Thickness Nonuniformities, *Proceedings "Web Handling" of the ASME Winter Annual Meeting* Anaheim, CA, USA, 8-13 novembre 1992
- HANISCH, K.,** Stress and strain in coils of wound foils, *J. de Mec. Th. et Appl.*, 1985, Vol. **4**, n° 1, p. 59-72
- HARLAND, W. G.** Stress distribution and winding faults in reel of plastic film, *Polym. Eng. Sci.*, 1967, Vol. **7**, p. 58-62
- HARLAND, W.G.** Theoretical aspects (of buckling and telescoping) of winding reels (in polymer technilogy), *Plastic and Polymers*, 1974, Vol. **42**, n° 160, p.162-165
- HEINRICH, J. C., CONNOLLY, D. and BHUSHAN, B.** Axisymmetric, Finite-Element Analysis of Stress Relaxation in Wound Magnetic Tapes, *ASLE transaction*, 1986, Vol. **29**, n° 1, p. 75-84
- HIRAI, T.** On the Stress Distribution of the Yarn Package based on Polar Anisotropic Consideration, Faculty of Engineer Osaka City, University, 1959a, Vol 1
- HIRAI, T.** On the Stress Distribution of the Yarn Package based on Polar Anisotropic Consideration (continued), Faculty of Engineer, Osaka City, University, 1959b, Vol 1
- JONES, D. P.** Air entrainment as a machanism for low traction on rollers and poor stacking of polyester film reels, and its reduction, *Proceedings "Web Handling" of the ASME Winter Annual Meeting* Anaheim, CA, USA, 8-13 novembre 1992
- JARRY, J. P.** *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1981

Références

- KEDL, D. M. Using a two dimensional winding model to predict wound roll stresses that occur due to circumferencial steps in core diameter or to cross-web caliper variation, *Proceeding of the First international Conference on Web Handling*, Oklahoma State University, 1991
- LARROUTUROU, B. *Etude numérique et modélisation numérique de phénomènes de combustion*. Thèse de docteur en mathématiques appliquées : université de Paris XIII, 1987
- MEIERHOFER, D. J. and STELSON, K. A. Measurement of the interfacial stresses in rolling using the elastic deformation of the roll, *J. Eng. Ind.*, 1987, Vol. 109, n° 4, p. 362-369
- MEYRUEIX, R., CORSI, P. and VIOT, F. *Note interne Rhône-Poulenc*, 1985
- MEYRUEIX, R. *Note interne Rhône-Poulenc*, 1988
- MOUCHET, N. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1989
- PENNER, A. Roll structure theory, *TAPPI J.*, 1989, Oct, pp207-210
- PFEIFFER, J.D. Internal pressures in a wound roll of paper, *TAPPI J.*, 1966, Vol. 49, n° 8, p. 342-347
- PFEIFFER, J.D. Prediction of roll defects from roll structure formulas, *TAPPI J.*, 1979, Vol. 62, n° 10, p. 83-85
- PFEIFFER, J.D. Measurement of the K_2 factor for paper, *TAPPI J.*, 1981, Vol. 64, n° 4, p. 105-106
- PFEIFFER, J.D. An update of PFEIFFER's roll-winding model, *TAPPI J.*, 1987, p. 132, Oct 1987
- PFEIFFER, J.D. Surface winding to overcome the strain deficiency, *Proceedings of the 1990 TAPPI Finishing and Converting Conference*, TAPPI Press, 1990, Atlanta, GA, pp233-236
- POTIER-FERRY, M., Asymptotic-Numerical Methods for Buckling, présenté au Winter Annual Meeting de l'ASME, Anaheim, CA, USA, 8-13 novembre 1992
- ROEDERER, O. *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1991
- ROSEN, B.W. Mechanics of composite strenghtening, *Fiber Composite Materials*, American Society for Metals, 1964
- SHINTAKU, SUKENORI, ODA, JUHACHI, TANI YOSHINORI, OKUNO and TOKIO Measurement and evaluation of radial YOUNG's modulus distribution in yarn package, *J. of Text. Mach. Soc. of Jap.*, 1990, Vol. 43, n° 10, p. 49-55
- THOMAS, H.R. and HOERSCH, V.A. Stress due to the pressure of one elastic upon another. niv. III. *Eng. Sta. Bull.* 1930, Vol. 212
- TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*,. New York : McGraw-Hill, 3rd edition, 1970

- TRAMPOSH, H.** Relaxation of internal forces in a wound reel of magnetic tape, *ASME- J. Appl. Mech.*, 1965, Vol. **34**, p. 865-873
- TRAMPOSH, H.** Anisotropic relaxation of internal forces in a wound reel of magnetic tape. *ASME - J. Appl. Mech.*, 1967, Vol. **32**, p. 888-894
- UMANSKII, E. S., KRYUTCHOV, V. V. and SHIDLOVSKII, N. S.**, Estimating the effects of the temperature factor on the bearing capacity of a reel magnetic tape. *Prob. Proch.*, 1981, Vol. **8**, p. 62-65
- VOYIADJIS, G. Z. and HARTLEY, C. S.**, Residual-stress determination of concentric layers of cylindrically orthotropic materials. *Experim. Mec.*, 1987, p. 290-297
- VOYIADJIS, G. Z., KIOUSIS, P.D. and HARTLEY, C. S.** Analysis of residual-stress in cylindrically orthotropic materials. *Experim. Mec.*, 1985, Vol. **25**, p. 145-147
- WILLETT, M. S., and POESCH, W. L.**, Determining the stress distributions in wound rolls of magnetic tape using a non-linear finite difference approach, *ASME J. Appl. Mech.*, 1988, Vol. **55**, p. 365-371
- YAGODA, H. P.** Resolution of a core problem in wound rolls. *J. Appl. Mech.*, 1980, Vol. **47**, p. 847-854
- YAGODA, H. P.** Integral formulas for wound rolls, *Mech. Res. Comm.*, 1980, Vol. **7**, n° 2, p.103-113
- YAGODA, H. P.** Centrifugally induced stresses within center-wound rolls, Part I., *Mech. Res. Comm.*, 1980, Vol. **7**, n°3, p.181-193
- YAGODA, H. P.**, Centrifugally induced stresses within center-wound rolls, Part II., *Mech. Res. Comm.*, 1980, Vol. **7**, n° 4, p. 233-240
- YVON, J.M.** *Note interne Rhône-Poulenc Films*, 1992

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr P. BOURGIN Professeur-Directeur de l'Ecole d'Application des
Hauts Polymères-STRASBOURG,

et les rapports de

Mr POTIER-FERRY Professeur - Physique et Mécanique des Matériaux -
I.S.G.M.P. - Université de Metz - 57045 METZ,

Mr R. GAERTNER Maître de Conférences - Centre de Mécanique - UCB
LYON I - Bât. 710 - 69622 VILLEURBANNE Cedex,

Monsieur **BOUQUEREL Franck**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention
du titre de **DOCTEUR**

Spécialité : **MECANIQUE**

Fait à Ecully, le 4 février 1993

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la
Recherche



F. LEBŒUF

