

THÈSE
présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
Spécialité Mécanique
par
Anne LE DUC

ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS FAIBLEMENT
COMPRESSIBLES, DE GIRATION,
PUIS D'IMPACT SUR PAROI,
PAR THÉORIE LINÉAIRE ET
SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE

Soutenue le 7 décembre 2001 devant la
Commission d'Examen composée de

MM. C. CAMBON
G. CASALIS - *Rapporteur*
R. FRIEDRICH
S. LEBLANC
M. ROGER - *Président*
D. SIPP
F. WALEFFE - *Rapporteur*

THÈSE
présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
pour obtenir le titre de
DOCTEUR
Spécialité Mécanique
par
Anne LE DUC

ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS FAIBLEMENT
COMPRESSIBLES, DE GIRATION,
PUIS D'IMPACT SUR PAROI,
PAR THÉORIE LINÉAIRE ET
SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE

PARTIE I : STABILITÉ D'UN ÉCOULEMENT
COMPRESSIBLE EN GIRATION
EN CONDUITE CYLINDRIQUE

PARTIE II : SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE
DES INSTABILITÉS DANS L'ÉCOULEMENT
TRIDIMENSIONNEL COMPRESSIBLE DE HIEMENZ

Soutenue le 7 décembre 2001 devant la
Commission d'Examen composée de

MM. C. CAMBON
G. CASALIS - *Rapporteur*
R. FRIEDRICH
S. LEBLANC
M. ROGER - *Président*
D. SIPP
F. WALEFFE - *Rapporteur*

71876
ÉCOLE CENTRALE DE LYON
BIBLIOTHÈQUE
BP 163 - 69131 ECULLY CEDEX

Remerciements

Cette thèse a été effectuée pour moitié au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon, UMR-CNRS 5509, avec un financement MENESR et pour moitié au sein du Fachgebiet Strömungsmechanik de la Technische Universität München avec un financement DFG.

Mes premiers remerciements vont à mes deux directeurs de thèse, Claude Cambon et Rainer Friedrich tant pour leur encadrement scientifique que pour leurs encouragements amicaux. Je remercie Denis Jeandel pour son accueil au laboratoire et Michel Roger pour son soutien.

Je remercie Grégoire Casalis et Fabian Waleffe, rapporteurs de ce mémoire, et les membres du jury Stéphane Leblanc, Michel Roger et Denis Sipp d'avoir accepté d'examiner ce travail. L'attention qu'ils ont portée à la lecture du manuscrit et leurs commentaires ont permis de clarifier certains points.

Ce travail n'aurait été nullement possible sans les conseils avisés de mes bons collègues français et allemand. Ils ont été présents dans les moments de stagnation tout en suscitant un cheminement plus personnel dans les temps plus sereins. Un grand merci donc à Stéphane Leblanc pour son enthousiasme, son extrême compétence et son franc parler. Un autre non moins grand merci à Jörn Sesterhenn pour son soutien éclairé et non dirigiste et ses superbes nœuds papillons.

Je tiens aussi à remercier ceux qui, en sus d'une mauvaise humeur atlantique, durent souffrir une certaine inaptitude informatique et y remédier. Merci à Fabien Godeferd et Sven Eisenbach.

Je remercie Joëlle Kreiss pour sa diligence à faire parvenir des articles exotiques dans les lointaines contrées outre-Rhin. Merci aussi à Dominique Échampard, Françoise Maupras et Odile Vitali.

Au cours de ces quelques années le moral a tenu grâce à la présence de quelques bons collègues, avec qui j'ai pu non seulement partager de grands malheurs scientifiques mais aussi dans le plus grand désordre dégorger des notes, ingurgiter des thés, des cafés ou des chocolats, dévorer des gâteaux nantais ou engloutir des Plätzchen. En sus des sus-nommés et dans l'arbitraire de l'ordre alphabétique, merci à Christophe, Daniel, Djamel, Jean-Louis, Laurent, Marie-Hélène, Nathalie, Patrick, Patrick, Philippe, Pierre, Richard.

Merci enfin à ceux qui simplement sont là. À Marie et à Emmanuel, à la joyeuse troupe d'Art d'Écho et à celle de Cantabile, à mon grand-père, à mes parents, à Frédéric.

Introduction Générale

L'étude de la stabilité hydrodynamique d'écoulements faiblement compressibles reste un domaine encore peu exploré. Ces écoulements donnent lieu à des applications dans des domaines variés. En aéronautique externe les tourbillons de bouts d'aile d'avions de grande taille mettent en jeu des vitesses telles que les stratifications de densité ne peuvent être a priori négligées. La déstabilisation de ces structures est critique dans le souci de diminuer les distances de sécurité entre appareils. En aérodynamique interne, la stabilité des écoulements dans les chambres de combustion joue sur les propriétés de mélange. Une application intrinsèquement compressible est celle de la réfrigération acoustique. Or la compressibilité, même faible, peut significativement changer les propriétés de stabilité / instabilité d'un écoulement. Un écoulement compressible supporte en effet trois modes de perturbation. En sus du mode de vorticité (seul mode dans le cas incompressible) sont présents des modes acoustique et entropique [Kov53], ce dernier reflétant des inhomog nit s de température. Par la non-uniformité du champ de base, et tout particulièrement par sa vorticité, ces trois modes peuvent interagir de manière complexe. De plus le champ de base est lui-même modifié par la compressibilité. La dynamique de perturbation est donc plus riche et le comportement faiblement compressible peut significativement différer du comportement strictement incompressible, ce qui justifie les études faiblement compressibles. En revanche, la faible compressibilité induit des difficultés de mise en œuvre aussi bien des méthodes numériques qu'analytiques. Pour les études numériques, l'examen de petites perturbations nécessite des outils de calculs peu dispersifs et peu dissipatifs. Une difficulté majeure consiste alors à formuler des conditions limites adéquates. Elles doivent en particulier ne pas générer de réflexions parasites des ondes acoustiques aux frontières non physiques du domaine (typiquement aux sorties). Pour les études analytiques, le petit nombre de champs de base connus analytiquement est un facteur restrictif. De plus, le traitement analytique exige souvent des simplifications. Parmi celles-ci on peut citer la restriction à certaines interactions modales (certains couplage entre les modes de vorticité, acoustique et entropique sont explicitement exclus), la limitation à des classes particulières de champs de base, ou l'examen de perturbations de longueur d'onde sélectionnée. Nous mentionnerons ici quelques théories linéaires utilisant un mélange de ces simplifications.

La théorie de la distorsion rapide étendue au cas faiblement compressible permet de déterminer l'évolution temporelle de statistiques d'un champ turbulent ho-

mogène, et en particulier celle de son énergie cinétique. Le champ de base est un écoulement à gradient S spatialement uniforme. Les perturbations comprennent les deux modes de vitesse : vorticité (solénoïdale) et partie dilatationnelle (  divergence non nulle). Les modes de perturbations sont des combinaisons de modes de Fourier dont le vecteur d'onde dépend du temps. L'écoulement de base n'introduit aucune échelle de longueur, seulement l'échelle de temps S , de sorte que toutes les longueurs d'onde de la perturbation sont admises. Malgré leur disparité d'échelle de longueur, d'autant plus significative que le nombre de Mach est petit, les modes de vorticité et acoustiques peuvent donc être combinés. En revanche, l'homog nit  statistique est incompatible avec la présence d'un mode entropique significatif : la théorie reste homoentropique. Les résultats principaux sont résumés dans Simone et al. [SCC97] et comparés avec succès à des simulations numériques directes. Un paramètre important est le nombre de Mach de gradient $M = Sl/c$, où l est une échelle de longueur des structures énergétiques et c la célérité du son. On notera que le mode dilatationnel n'est pas nécessairement couplé à la pression fluctuante sous forme d'onde acoustique. En cas de compression irrotationnelle, le taux de croissance temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation augmente quand le nombre de Mach de gradient croît.   la limite infinie, le mode dilatationnel de vitesse est complètement découplé de la pression ("pressure-released mode"). En présence de cisaillement par contre, la partie rotationnelle du champ de base introduit une rétroaction entre modes dilatationnel et vortical de vitesse. On peut alors distinguer différentes périodes : pour les faibles temps, le taux de croissance temporelle augmente avec le nombre de Mach de gradient (effet déstabilisant). Pour des temps plus élevés, le taux de croissance temporelle diminue quand le nombre de Mach croît.

La théorie WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) [LH91, ES78] ondes courtes peut s'affranchir des conditions contraignantes d'uniformité spatiale du gradient de vitesse. Il n'a pas d'hypothèses restrictives sur le champ de base. En particulier le champ d'entropie porteuse peut être non uniforme. La méthode consiste à suivre au cours du temps, le long de chemins caractéristiques, des perturbations ondes courtes initialement localisées. Mathématiquement la méthode permet de réduire le système différentiel partiel régissant la perturbation à un système différentiel ordinaire. On peut ainsi obtenir analytiquement des conditions suffisantes d'instabilité. Il est analytiquement aisé de suivre les perturbations inertielles le long des trajectoires de base. Les seuls modes considérés sont alors les modes entropique et vortical. Notons que ce dernier est exclu par la théorie de la distorsion rapide. En revanche, les perturbations acoustiques sont exclues de la méthode WKB. D'une part la disparité d'échelle (de deux à trois ordres de grandeur pour un nombre de Mach $M = 0.3$, et d'autant plus grande que le nombre de Mach est petit) les exclut. WKB est en effet une méthode asymptotique à grands nombres d'onde. D'autre part, la limitation est d'ordre technique pour des nombres de Mach plus élevés. La méthode des rayons peut réintroduire les courbes caractéristiques des rayons acoustiques, mais le traitement est compliqué par les possibilités d'intersection des rayons acoustiques et leurs réflexions contre les parois (caustiques). On peut noter que la méthode

exposée par Eckhoff et Storesletten [ES78] pour les perturbations inertielles compressibles suivies le long des trajectoires ne revient pas aux équations de la théorie de la distorsion rapide à l'ordre dominant. Au contraire, en incompressible strict, les équations WKB [LH91] sont exactement les équations de Townsend de la théorie de la distorsion rapide [CS99].

La dernière théorie linéaire ici mentionnée est la théorie de Ribner (1954), aussi connue sous le nom de "Linear Interaction Approximation". Elle traite du passage de perturbations au travers d'un choc infiniment mince. Les premiers auteurs se limitent à un unique mode de perturbation. Fabre et al. dans [FJS01] introduit un formalisme permettant le même traitement de tous les modes possibles. Les perturbations sont décomposées sous forme de modes de Fourier. La surface de discontinuité peut aussi être affectée de déformations sinusoïdales couplées avec les perturbations. En raison de son épaisseur nulle, le choc n'introduit aucune échelle de longueur caractéristique, et il n'y a pas coupure a priori des ondes acoustiques (comme dans [ES78]) ni suppression des ondes entropiques (comme dans [SCC97]). La fonction de transfert entre la perturbation tri-modale à l'amont du choc et sa transformée à l'aval, est donc très riche. Un des résultats les plus étonnants est la prédiction théorique de la transformation en paire de tourbillons d'un spot de température, en excellent accord avec la simulation numérique directe. Évidemment la transformation ne vient pas d'un champ de base, mais des relations de saut de Rankine-Hugoniot qui caractérisent le choc.

Ceci donne un bref aperçu des simplifications utilisées tant sur les couplages modaux que sur les nombres d'onde de perturbation ou sur le champ de base pour pouvoir mettre en œuvre une théorie analytique. Ces théories sont toutes quasi non visqueuses. La prise en compte d'une instabilité due à la viscosité, en sus de l'effet de compressibilité, présente des difficultés analytiques beaucoup plus grandes encore. Dans ce cas, le recours à la simulation numérique s'impose.

Nous allons illustrer la dynamique plus riche de perturbation et le changement éventuel des propriétés de stabilité entre les cas strictement incompressible et faiblement compressible par deux études :

1. La première étude a pour application les écoulements tournants débitants (tourbillons de bouts d'aile ou chambre de combustion par exemple). Elle repose sur l'examen par une méthode WKB ondes courtes de la stabilité d'un fluide non visqueux en conduite infinie. Il est animé d'un mouvement de giration et d'un mouvement axial. Outre l'établissement analytique d'un critère suffisant d'instabilité, nous présenterons les résultats d'une analyse en modes propres et comparerons les deux approches. L'étude est intitulée **Stabilité d'un écoulement compressible en giration en conduite cylindrique** et est exposée dans les pages 9 à 96.

2. La seconde étude a trait à la transition sur les ailes en flèche. Un modèle pour l'instabilité au bord d'attaque est l'écoulement de Hiemenz. Des études incompressibles en existent. À l'aide d'une simulation numérique directe temporelle

nous procédons à une étude dans le domaine faiblement compressible. Le développement de conditions limites adéquates (i.e. maintenant le champ de base et non réfléchissantes pour la perturbation) est ici critique. Nous présenterons les résultats d'une étude de réceptivité interne. Nous suivrons en effet au cours du temps l'évolution de perturbations initialement localisées dans la couche limite. L'étude est intitulée **Simulation numérique directe des instabilités dans l'écoulement tridimensionnel compressible de Hiemenz** et est exposée dans les pages 97 à 277.

Bibliographie

- [CS99] C. Cambon and J. Scott. Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31 :1–53, 1999.
- [ES78] K. S. Eckhoff and L. Storesletten. A note on the stability of steady inviscid helical gas flows. *J. Fluid Mech.*, 89(3) :401–411, 1978.
- [FJS01] D. Fabre, L. Jacquin, and J. Sesterhenn. Linear interaction of a cylindrical entropy spot with a shock. *Physics of Fluids*, 13(8) :2403–2422, August 2001.
- [Kov53] L. S. G. Kováshay. Turbulence in supersonic flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(10) :657–674, 1953.
- [LH91] A. Lifschitz and E. Hameiri. Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A*, 3(11) :2644–2651, 1991.
- [SCC97] A. Simone, G. N. Coleman, and C. Cambon. The effect of compressibility on turbulent shear flow : a Rapid-Distorsion-Theory and Direct-Numerical-Simulation study. *J. Fluid Mech.*, 330 :307–338, 1997.

Étude d'Écoulements Faiblement Compressibles,
de Giration, puis d'Impact sur Paroi,
par Théorie Linéaire et Simulation Numérique Directe

PREMIÈRE PARTIE

STABILITÉ D'UN ÉCOULEMENT
COMPRESSIBLE EN GIRATION
EN CONDUITE CYLINDRIQUE

Anne LE DUC

7 décembre 2001

Étude d'Écoulements Faiblement Compressibles,
de Giration, puis d'Impact sur Paroi,
par Théorie Linéaire et Simulation Numérique Directe

PREMIÈRE PARTIE

STABILITÉ D'UN ÉCOULEMENT
COMPRESSIBLE EN GIRATION
EN CONDUITE CYLINDRIQUE

Anne LE DUC

7 décembre 2001

Table des matières

Introduction	15
1 Critère Asymptotique d'Instabilité	19
1.1 Introduction	19
1.2 Équations pour la perturbation	20
1.2.1 Stabilité et norme énergétique	21
1.2.2 Propriétés du système linéarisé	21
1.3 Développement WKB	22
1.3.1 Équations aux différents ordres	22
1.3.1.1 Ordre $1/\varepsilon$	23
1.3.1.2 Ordre 1	24
1.3.1.2.1 Équations pour les termes indexés 0	25
1.3.1.2.2 Équations pour les termes indexés ε	26
1.3.1.3 Récapitulatif des équations	27
1.3.2 Intégrations énergétiques	28
1.3.2.1 Majoration de l'ordre ε	28
1.3.2.2 Majoration du résidu	29
1.4 Conclusion	30
2 Écoulement Hélicoïdal	31
2.1 Introduction	31
2.2 Critère WKB	32
2.2.1 Condition de résolution analytique	33
2.2.2 Critère suffisant d'instabilité	34
2.2.2.1 $W' \neq 0$ ou $-V' + \frac{V}{r} \neq 0$	35
2.2.2.2 $W' = 0$ et $-V' + \frac{V}{r} = 0$	37
2.2.3 Taux de croissance énergétique	37
2.3 Formulation en modes normaux	38
2.3.1 Méthode numérique	41
2.3.2 Validation par des cas incompressibles	44
2.3.2.1 Ondes inertielles de Kelvin	44

2.3.2.2	Critère incompressible de Rayleigh	45
2.4	Cas compressibles	46
2.4.1	Critère compressible de Rayleigh	47
2.4.2	Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme	55
2.4.3	Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche	60
2.4.4	Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique	67
2.4.4.1	Profil parabolique faible	68
2.4.4.2	Profil parabolique fort	70
2.4.5	Vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche	72
	Conclusions et Perspectives	79
	A Hyperbolicité et symétrie	83
	B Ordre de troncature	85
	C Majoration des opérateurs symétriques	87
	D Conditions limites	89
	Bibliographie	93

Table des figures

2.1	Géométrie étudiée	31
Rotation Solide Incompressible		45
2.2	Pulsation des ondes de Kelvin	45
Critère compressible de Rayleigh		48
2.3	Vitesse azimutale porteuse	48
2.4	Pression porteuse et masse volumique porteuse	48
2.5	Taux d'amplification WKB	49
2.6	Taux d'amplification des modes normaux	50
2.7	Vitesse radiale pour différents nombres d'onde	50
2.8	Correction du taux d'amplification des modes normaux par rapport au taux d'amplification WKB	53
2.9	Perturbation de vitesse radiale des quatre modes les plus amplifiés . .	54
2.10	Perturbation de pression pour différents nombres de Mach	55
Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme		56
2.11	Pression porteuse et masse volumique porteuse	56
2.12	Taux d'amplification des modes normaux $M = 0.1$	57
2.13	Taux d'amplification des modes normaux $M = 0.3$	57
2.14	Taux d'amplification des modes normaux $M = 1.$	58
2.15	Comparaison entre le taux d'amplification WKB et le taux d'ampli- fication des modes normaux	58
2.16	Symétries du taux d'amplification des modes normaux	59
2.17	Profil de taux d'amplification WKB	60
2.18	Perturbation de vitesse radiale du mode propre le plus amplifié	61
2.19	Perturbation de vitesse radiale du deuxième mode propre le plus amplifié	61
2.20	Perturbation de vitesse radiale du troisième mode propre le plus amplifié	62
Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche		62
2.21	Pression, masse volumique et vitesse axiale porteuses	62

2.22	Taux d'amplification des modes normaux	63
2.23	Taux d'amplification des modes normaux pour $k = m$	64
2.24	Perturbation de vitesse radiale du mode le plus amplifié	65
2.25	Taux d'amplification des modes normaux et WKB pour $m = 100$	65
2.26	Perturbation de vitesse radiale des trois premiers modes	66
2.27	Perturbation de pression des trois premiers modes	67
2.28	Perturbation de pression pour trois nombres d'onde	68
Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique		69
2.29	Taux d'amplification des modes normaux	69
Vitesse axiale parabolique faible		69
2.30	Taux d'amplification des modes normaux	69
2.31	Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale du mode le plus amplifié	70
2.32	Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale des modes les plus amplifiés, $k = 200$	71
2.33	Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale des modes les plus amplifiés, $k = 400$	71
Vitesse axiale parabolique forte		72
2.34	Taux d'amplification des modes normaux	72
2.35	Partie réelle de la perturbation de pression pour un nombre d'onde axial $k = 4$	73
Vitesse azimuthale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche		73
2.36	Champ porteur pour un nombre de Mach $M = 1$	73
2.37	Taux d'amplification WKB et rayon d'autonomie	74
2.38	Taux d'amplification des modes normaux	75
2.39	Perturbation de vitesse radiale et rayon d'autonomie	76
2.40	Pulsation par rapport à l'écoulement de base	77
2.41	Pulsation par rapport à l'écoulement de base pour différents β	77
Conditions limites		92
D.1	Conditions limites	92

Introduction

L'étude de la stabilité des fluides en rotation offre de multiples applications, allant de l'aéronautique à la réfrigération acoustique en passant par le mélange en chambre de combustion. La plupart des études concernent des écoulements incompressibles. Or, pour les domaines d'application envisageables, cette hypothèse n'est a priori pas évidente. On peut ainsi citer l'étude de la stabilité de phénomènes géophysiques de moyenne échelle tels les cyclones et de phénomènes astrophysiques de grande échelle tel le comportement des atmosphères de planètes [Gan75]. Une application plus industrielle est celle de l'éclatement tourbillonnaire. Dans le cas d'avions de grande taille, les tourbillons de bout d'aile possèdent en effet des vitesses suffisamment élevées pour créer des stratifications de densité telles que la compressibilité ne peut être a priori négligée [ES78]. Dans les générateurs de tourbillons et les chambres de combustion, la compressibilité ne peut pas non plus être négligée [Soz69].

Nous nous intéresserons à la stabilité d'écoulements compressibles en rotation, avec vitesse axiale débitante (W) parallèle à l'axe de rotation (écoulements hélicoïdaux compressibles). L'extension axiale est infinie. Le champ de base dépend exclusivement de la coordonnée radiale r , distance à l'axe de rotation. La vitesse azimutale est notée V et la vitesse de rotation est $\Omega = V/r$. Nous examinerons la stabilité temporelle de ces écoulements hélicoïdaux compressibles vis-à-vis de petites perturbations. La méthode classique d'étude de stabilité linéaire consiste à linéariser le système des équations régissant le mouvement autour d'un écoulement de base et à développer la perturbation en modes normaux dépendant des nombres d'onde et fréquence de la perturbation. Une résolution numérique permet d'obtenir le spectre et les modes normaux associés aux valeurs propres. Dans le cas d'une étude de stabilité temporelle, à nombres d'onde fixés, le caractère réel ou complexe de la fréquence détermine le caractère stable ou instable de la perturbation donnée. Dans le cas général, une résolution analytique visant à déterminer valeurs et fonctions propres n'est envisageable qu'au prix de simplifications topologiques de l'écoulement porteur, notamment de symétries. En revanche moins de simplifications sont requises pour obtenir analytiquement des conditions nécessaires ou suffisantes de stabilité, sans information relative aux fonctions propres.

Les premiers résultats analytiques remontent aux travaux de Lord Rayleigh réalisés entre 1880 et 1890 et concernent un écoulement incompressible, non visqueux

et plan [Ray20, Collected Works]. Par une méthode de conservation énergétique, il montre qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour des perturbations axisymétriques est que le carré de la circulation croisse monotonement avec la distance à l'axe de rotation ($\Phi > 0$, avec Φ le discriminant de Rayleigh). La condition est étendue par Howard et Gupta [HG62] dans le cas où une vitesse axiale non uniforme est présente. Howard et Gupta considèrent des modes normaux en temps et dans la direction axiale. La perturbation est axisymétrique. Par une méthode reposant sur l'intégration dans la direction radiale de l'équation linéarisée régissant la perturbation écrite en modes normaux, ils montrent qu'une condition suffisante de stabilité est que le nombre de Richardson Ri soit partout supérieur à $1/4$, avec $Ri = \Phi/W'^2$, et W' la dérivée radiale de la vitesse axiale. Ils notent que, par rapport à un écoulement cisailé, la vitesse azimutale crée un effet analogue à un champ de densité stratifié soumis à un champ gravitationnel dans la direction radiale (instabilité de Kelvin-Helmholz). Fung et Kurzweg [FK75] généralisent le problème à des perturbations de nombre d'onde quelconque et considèrent un champ de base incompressible de densité variable. En 1973, toujours pour des perturbations axisymétriques, Howard [How73] étend le critère de Howard et Gupta au cas compressible. Il considère des perturbations axisymétriques. Le critère de Richardson précédent inclut désormais la fréquence de Brunt-Väisälä N^2 , dépendant du gradient d'entropie du champ porteur selon $N^2 = -V^2 S'/r$, où S' est le gradient d'entropie dans la direction radiale. Le nombre de Richardson s'écrit maintenant $Ri = (\Phi + N^2)/W'^2$. La stabilité est garantie si Ri est partout supérieur à $1/4$. En 1975, Warren [War75] et Lalas [Lal75] démontrent simultanément et indépendamment un critère suffisant de stabilité pour tout nombre d'onde axial et azimutal. Le critère s'écrit aussi sous la forme d'un nombre de Richardson supérieur à $1/4$, mais la définition du nombre de Richardson est modifiée par rapport à [How73]. Il s'écrit désormais $Ri = N^2/(W'^2 + (V' - V/r)^2)$.

Toutes ces études compressibles reposent sur une décomposition en modes normaux suivie d'une méthode intégrale. Elles produisent analytiquement des conditions suffisantes de stabilité. Les modes propres ne sont évidemment pas identifiés.

Par des hypothèses plus restrictives, certains auteurs proposent des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Ils doivent pour ce faire introduire des contraintes sur le champ de base. Ils utilisent une décomposition en modes normaux. Pour le cas compressible, Gans en 1975 [Gan75] utilise une vitesse azimutale éloignée d'un petit paramètre ε de la rotation solide et une vitesse axiale d'ordre ε . Le nombre de Mach basé sur la vitesse angulaire est aussi d'ordre ε . Les profils de température considérés sont proportionnels au profil de température adiabatique. Pour des nombres d'onde axiaux ε fois plus petits que les nombres d'onde azimutaux, il montre qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité est qu'un nombre de Richardson centrifuge soit partout supérieur à $1/4$. La méthode est restreinte aux taux d'amplification et pulsations au plus d'ordre ε . Pour un profil axial de Poiseuille, Gans peut déterminer

les modes propres analytiquement. Hultgreen [Hul88] en 1988 modifie le critère de Gans pour un champ de base légèrement différent. La vitesse azimutale diffère de la rotation solide au plus de ε^2 et il n'y a plus d'hypothèse sur la forme particulière du gradient de température. Hultgreen suppose que la pulsation par rapport au champ de base est de l'ordre de ε^2 et le taux d'amplification de l'ordre de ε . Il suppose aussi que la fréquence de Brunt-Väisälä est d'ordre ε . Ceci revient à se restreindre à des champs de base quasi-homoentropiques ou à de faibles nombres de Mach. Avec ces hypothèses, Hultgreen obtient une condition nécessaire et suffisante de stabilité légèrement modifiée par rapport à celle de Gans.

Les études tendant à déterminer également les modes propres introduisent des simplifications du champ de base. Sozou et Swithenbank [SS69] étudient le tourbillon de Rankine sans vitesse axiale, sous hypothèse d'homoentropie. Ils déterminent que des perturbations planes de nombre d'onde azimutal unité peuvent être instables. Ils résolvent numériquement le système des équations et obtiennent les modes propres. Broadbent [Bro84] étudie la même configuration avec des perturbations tridimensionnelles et montre que les modes les plus instables sont les perturbations planes. Pour un petit nombre de Mach, il détermine analytiquement une valeur critique du nombre d'onde axial au delà de laquelle l'écoulement est stable. Des conclusions identiques apparaissent dans les travaux suivants de Sozou [Soz87a, Soz87b]. Ces études sont limitées à de faibles nombres d'onde axiaux et azimutaux. Par ailleurs, l'état de base est homoentropique.

Ces études ne fournissent que dans de très rares cas des conditions suffisantes d'instabilité. Or, dans les applications aéronautiques, celles-ci peuvent être fort utiles. Ainsi les forts tourbillons cohérents de bouts d'aile sur les grands avions de ligne créent de violentes perturbations, même à grande distance de l'appareil. Il est utile de posséder des critères suffisants d'instabilité pour casser de tels systèmes tourbillonnaires. La méthode WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) [ES78, ES80, Eck84] fournit de tels critères. Basée sur un développement asymptotique ondes courtes d'une perturbation initialement localisée (dans l'espace physique), cette méthode permet d'en examiner l'évolution temporelle et d'obtenir des conditions suffisantes d'instabilité sous forme analytique très simple. Elle diffère formellement beaucoup de l'approche en modes normaux et ne donne a priori pas d'information sur la forme des modes propres ni sur le spectre. Elle est aussi théoriquement limitée aux grands nombres d'onde.

Le but de notre étude est d'examiner le lien entre l'approche modes normaux et l'approche asymptotique WKB. Dans la mesure où l'approche asymptotique requiert l'examen de perturbations de longueur d'onde aussi petite que voulue (i.e. le nombre d'onde de coupure visqueuse doit être infini), elle n'est théoriquement envisageable que dans le cas d'un écoulement non visqueux. Nous restreindrons notre étude au cas d'un écoulement compressible non visqueux en rotation. L'étude en modes normaux nous permettra d'examiner la validité de la méthode WKB aux petits nombres

d'onde.

Notons que la méthode en modes normaux discrets avec résolution d'un problème aux valeurs propres ne permet que d'obtenir des taux d'amplification / d'amortissement exponentiels. Les éventuelles croissances algébriques, décelables par une méthode de Laplace en temps, ne sont pas détectées. Pour la comparaison entre les deux méthodes, nous nous intéresserons donc seulement aux croissances exponentielles prédites par le développement WKB. De plus, dans la mesure où la méthode WKB ne donne que des conditions suffisantes d'instabilité, nous nous concentrerons sur les modes propres normaux les plus amplifiés.

L'étude sera divisée en deux parties. Dans un premier chapitre, nous présenterons la méthode WKB. Nous reprendrons pour ce faire largement les travaux de Lifschitz et Hameiri [LH91]. La méthode permet d'obtenir un critère suffisant d'instabilité pour tout écoulement de base stationnaire non visqueux, compressible ou non. Ce critère ne peut être que suffisant dans la mesure où seules des perturbations de phase rapidement oscillante sont envisagées.

Dans un deuxième chapitre, le critère sera particularisé au cas de l'écoulement compressible hélicoïdal, en suivant les travaux d'Eckhoff et Storesletten [ES78, ES80]. Pour ce type de champ de base, une étude en modes normaux permet d'examiner le caractère suffisant de la condition précédemment trouvée, en particulier en terme de taux d'amplification. Elle permet aussi d'obtenir les modes propres associés. Différents profils de vitesse axiale et azimutale sont envisagés. Ils satisfont ou non les conditions suffisantes d'instabilité mises en évidence par la méthode WKB.

Au cours de l'exposé, nous nous attacherons à examiner le raccord entre les comportements compressible et incompressible.

Chapitre 1

Critère Asymptotique d'Instabilité

1.1 Introduction

Nous nous intéressons à la stabilité hydrodynamique d'un écoulement faiblement compressible non visqueux soumis à de petites perturbations. L'état du fluide est décrit par le système différentiel des équations d'Euler. Nous décomposons la solution de ce système en un champ de base, lui-même solution du système, et une perturbation. Par linéarisation pour une perturbation infinitésimalement petite, nous obtenons le système différentiel linéaire aux dérivées partielles vérifié par la perturbation. Une méthode classique d'examen de sa stabilité [Cha61] consiste à choisir pour la perturbation une forme en modes normaux (en fréquence et nombre d'onde), pour les directions homogènes du champ de base. Dans le cas d'une étude de stabilité temporelle, on détermine numériquement la fréquence (complexe ou réelle) en fonction du nombre d'onde de la perturbation. Dans le cas d'une étude de stabilité spatiale, la fréquence est un paramètre et le nombre d'onde (complexe ou réel) est déterminé numériquement. Ici, au contraire, on utilise la méthode dite WKB, exposée par Lifschitz et Hameiri dans [LH91]. On obtient un critère suffisant d'instabilité exponentielle temporelle pour tout écoulement non visqueux, incompressible ou compressible subsonique. L'idée est de suivre au cours du temps, le long de chemins particuliers, une perturbation initialement spatialement localisée. Mathématiquement l'intérêt est de ramener le système différentiel aux dérivées partielles à un système différentiel aux dérivées ordinaires. Ceci rend possible un traitement analytique. Eckhoff montre [ES78] que le passage à un problème aux dérivées ordinaires est possible pour la partie hautes fréquences / hauts nombres d'onde de la perturbation. Aussi, nous décomposons la perturbation en une partie dominante (à hautes fréquences / hauts nombres d'onde) et un résidu de composante fréquentielle inconnue mais dont l'amplitude peut être majorée uniformément (i.e. indépendamment de la fréquence / du nombre d'onde) [Eck81]. On peut alors déterminer des chemins (caractéristiques) sur lesquels la partie dominante présente une croissance

non bornée. On dispose alors de conditions suffisantes d'instabilité [LH91]. Toute la puissance de la méthode réside dans le passage d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles à un système aux dérivées ordinaires.

1.2 Équations pour la perturbation

Nous considérons un fluide idéal [LL59] compressible instationnaire dans un domaine fluide S : il suit la loi des gaz parfaits et les effets de conduction thermique et visqueux sont négligés. Il n'y a pas de source de chaleur. Les équations d'Euler traduisant la conservation de la quantité de mouvement, de la masse et de l'entropie - cette dernière résultant de l'adiabaticité, due à l'absence de conductibilité thermique, et de la réversibilité, due à l'absence d'effets visqueux - s'écrivent

$$\begin{cases} R \frac{D}{Dt} \mathbf{V} = -\nabla P, \\ \frac{D}{Dt} R + R \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{D}{Dt} S = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivation matérielle et où \mathbf{V} , P , R et S désignent respectivement la vitesse, la pression, la masse volumique et l'entropie.

L'hypothèse de gaz parfait et les relations de Gibbs permettent de réécrire l'isentropie

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{R^\gamma} \right) = 0, \quad (1.2)$$

où le rapport de chaleurs spécifiques $\gamma = C_p/C_v$ est constant. Le système régissant les variables eulériennes $(\mathbf{V}, P, R)(\mathbf{x}, t)$ s'écrit alors

$$\begin{cases} R \frac{D}{Dt} \mathbf{V} + \nabla P = 0, \\ \frac{D}{Dt} R + R \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{D}{Dt} P + \gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

En décomposant le champ total en la somme d'un champ porteur (R, \mathbf{V}, P) et d'une perturbation (ϱ, \mathbf{v}, p) et en négligeant les termes non linéaires de la petite perturbation, on peut linéariser les équations (1.3) pour obtenir

$$\begin{cases} \varrho D_t \mathbf{V} + R D_t \mathbf{v} + R \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla p = 0, \\ D_t \varrho + R \nabla \cdot \mathbf{v} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{v} \cdot \nabla R = 0, \\ D_t p + \gamma P \nabla \cdot \mathbf{v} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivation matérielle selon l'écoulement porteur.

1.2.1 Stabilité et norme énergétique

La notion de stabilité / instabilité linéaire est définie au sens de Lyapounov [DR81, page 9] par l'examen de l'évolution *temporelle* de l'énergie $E(t)$ de la perturbation. L'écoulement est dit *stable* si, pour tout instant fini $t \in [0, T]$,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad E(0) < \delta \quad \Rightarrow \quad E(t) < \epsilon. \quad (1.5)$$

Il est à noter que cette définition n'est aisément applicable que dans le cas où l'écoulement de base est stationnaire ou périodique en temps. Néanmoins, cette hypothèse ne sera faite qu'au moment opportun dans la mesure où l'approche WKB permet de traiter des écoulements instationnaires [LH91].

Suivant Eckhoff [Eck81], l'énergie retenue est une norme, basée sur un produit scalaire intégré sur le volume de contrôle S :

$$E(t) = \left[\int_S (\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}^*(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \right]^{1/2} = \|\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\|. \quad (1.6)$$

(.) désigne le produit scalaire ($(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ avec \mathbf{a}^T le vecteur transposé de \mathbf{a} écrit en colonne). * est le complexe conjugué. À des coefficients d'adimensionnement près (voir section 1.2.2), $\mathbf{X} \sim (\varrho, v, p)$ décrit la perturbation.

1.2.2 Propriétés du système linéarisé

On peut montrer aisément (voir Annexe A) qu'en utilisant la transformation d'Eckart [Eck60] définie ci-dessous, le système linéaire (1.4) est directement sous une forme symétrique hyperbolique. Cette propriété sera utilisée ultérieurement (voir paragraphe 1.3.2.2). Les perturbations sur la pression et la masse volumique sont ainsi remplacées par les variables d'Eckart x et y , toutes deux en caractère non gras pour les différencier du vecteur position \mathbf{x} :

$$\varrho = (R/C)(x + y), \quad p = (\gamma P/C)y, \quad (1.7)$$

où $C = \sqrt{\frac{\gamma P}{R}}$ est la célérité locale du son. Le système sur v, x et y s'écrit

$$\begin{cases} D_t v + \mathbf{L}v - \frac{\nabla P}{RC}x + C\nabla y + \left(\frac{(\gamma - 1)\nabla P}{CR} - \nabla C \right) y = 0, \\ D_t x - \frac{D_t C}{C}x + C \frac{P^{1/\gamma}}{R} v \cdot \nabla \frac{R}{P^{1/\gamma}} = 0, \\ D_t y - \frac{D_t C}{C}y + C \nabla \cdot v + \frac{C}{P^{1/\gamma}} v \cdot \nabla P^{1/\gamma} = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

avec $\mathbf{L} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ le tenseur du gradient de vitesse porteuse.

Aux facteurs multiplicatifs près, assurant une mise sous forme de vitesse de toutes les variables du problème, y quantifie la perturbation de pression et x le défaut

d'homéotopie. En effet, dans (1.8₂), la nullité de x est reliée à celle de $\nabla \frac{R}{P^{1/\gamma}}$, soit à la nullité du gradient d'entropie du champ de base. La normalisation employée est identique à celle utilisée dans le cadre de la distorsion rapide par Simone et al. [SCC97].

Le système (1.8) sera ultérieurement rappelé sous la notation abrégée

$$\mathbf{M} \mathbf{X} = \left[\partial_t + \sum_{\nu=1}^3 \mathbf{A}^\nu \partial_{x_\nu} + \mathbf{B} \right] \mathbf{X} = 0, \quad (1.9)$$

où $\mathbf{X} = (v, x, y)^T$ contient les composantes de la perturbation. Comme les matrices \mathbf{A}^ν sont symétriques, \mathbf{M} est un opérateur différentiel hyperbolique symétrique.

Notons qu'en utilisant les variables d'Eckart, l'énergie de la perturbation (1.6) s'écrit simplement

$$E(t) = \left[\int_S (v(x, t) \cdot v^*(x, t) + x(x, t)x^*(x, t) + y(x, t)y^*(x, t)) dx \right]^{1/2} \quad (1.10)$$

et représente la somme des énergies cinétique, entropique et acoustique.

1.3 Développement WKB

On effectue un développement asymptotique du vecteur inconnu \mathbf{X} pour de grandes fréquences et on cherche à déterminer l'évolution des amplitudes dominantes en résolvant un système différentiel pour les différents ordres en fréquence. Ceci fait l'objet d'un premier paragraphe. Dans un second paragraphe, le système est ramené à un système différentiel ordinaire pour l'ordre dominant. On montre dans un troisième paragraphe que les ordres suivants peuvent être majorés uniformément. Ceci permet de garantir que, si l'on trouve un champ porteur donnant une croissance de l'ordre dominant, cette croissance ne sera pas annihilée par l'influence des ordres inférieurs.

1.3.1 Équations aux différents ordres

Le développement asymptotique onde courte de la perturbation s'écrit suivant Bender et Orszag [BO78]

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \propto \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \Phi_l(\mathbf{x}, t) \right). \quad (1.11)$$

On montre (voir Annexe B) qu'il est formellement équivalent au développement asymptotique suivant :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, t)/\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{X}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, t)/\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, t), \quad (1.12)$$

qui permet d'obtenir une solution de l'ordre dominant non dégénérée par la troncature. Dans (1.12), la phase ϕ est une fonction réelle et les amplitudes \mathbf{X} de l'ordre dominant (notées $_0$) et d'ordre résiduel (notées $_\varepsilon$ et $_r$) sont complexes. ε est un petit paramètre réel, de telle sorte que $e^{i\phi/\varepsilon}$ est caractéristique d'une variation temporelle / spatiale de courte échelle. A l'instant initial, \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_ε et \mathbf{X}_r sont du même ordre de grandeur et le développement est bien ordonné. Par majoration des ordres non dominants, nous montrerons que le développement reste bien ordonné aux instants suivants. \mathbf{X}_0 est à l'instant initial non nulle sur un domaine borné S_0 .

En injectant cette forme de perturbation dans les équations linéarisées (1.8) et en regroupant les termes de même puissance de ε , on obtient les systèmes suivants pour les ordres de grandeur $1/\varepsilon$, 1 et ε respectivement :

$$\begin{cases} v_0 D_t \phi + C y_0 \nabla \phi = 0, \\ x_0 D_t \phi = 0, \\ y_0 D_t \phi + C v_0 \cdot \nabla \phi = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$M \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} -i(v_\varepsilon D_t \phi + C y_\varepsilon \nabla \phi) \\ -i x_\varepsilon D_t \phi \\ -i(y_\varepsilon D_t \phi + C v_\varepsilon \cdot \nabla \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$M \mathbf{X}_r = e^{-i\phi/\varepsilon} M \mathbf{X}_\varepsilon, \quad (1.15)$$

avec M défini en (1.9).

On cherche une solution de l'ordre dominant non identiquement nulle. Ceci est possible si le déterminant de (1.13) est nul et fournit un lot de contraintes sur la phase ϕ sous lesquelles (1.14) devra être satisfait. De même (1.14) conditionne (1.15). On résout donc dans le sens des ordres de grandeur décroissants et on cherche à exprimer l'évolution d'un ordre donné en fonction de celle du champ porteur et/ou des ordres plus dominants.

1.3.1.1 Ordre $1/\varepsilon$

Le système (1.13) admet pour unique solution la solution nulle sauf si son déterminant D est nul, où

$$D = \begin{vmatrix} D_t \phi & 0 & 0 & 0 & C k_1 \\ 0 & D_t \phi & 0 & 0 & C k_2 \\ 0 & 0 & D_t \phi & 0 & C k_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_t \phi & 0 \\ C k_1 & C k_2 & C k_3 & 0 & D_t \phi \end{vmatrix} = (D_t \phi)^3 (D_t \phi + C|\mathbf{k}|) (D_t \phi - C|\mathbf{k}|). \quad (1.16)$$

Les composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k} = \nabla \phi$ dans la base cartésienne sont k_1, k_2, k_3 . $|\mathbf{k}|$ est la norme de \mathbf{k} .

Pour annuler le déterminant, il faut et il suffit d'être dans un des trois cas suivants :

1. $D_t\phi = -C|\mathbf{k}|$, ce qui implique

$$\begin{cases} x_0 = 0 , \\ -|\mathbf{k}|v_0 + y_0\mathbf{k} = 0 . \end{cases} \quad (1.17)$$

À l'ordre dominant, la perturbation est homoentropique et est alignée avec le vecteur d'onde (onde longitudinale progressive).

2. $D_t\phi = +C|\mathbf{k}|$, ce qui implique

$$\begin{cases} x_0 = 0 , \\ |\mathbf{k}|v_0 + y_0\mathbf{k} = 0 . \end{cases} \quad (1.18)$$

Ce cas est analogue au précédent mais l'onde est régressive.

Ces deux premiers types de perturbation sont de nature acoustique. Ils ne seront pas envisagés dans la suite du mémoire pour les difficultés techniques rencontrées. En effet, les rayons acoustiques peuvent intersecter ou heurter les parois. Ils créent ainsi des caustiques où la méthode WKB est difficile à mettre en œuvre [Whi74]. De plus, Eckhoff déclare dans son article [ES78] que ces rayons sont stables [Eck75].

3. $D_t\phi = 0$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y_0 = 0 , \\ \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 . \end{cases} \quad (1.19)$$

La phase de la perturbation est convectée par l'écoulement porteur. La dérivation spatiale de l'équation $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ (qui devra donc être satisfaite sur un ensemble de mesure non nulle) conduit à l'équation eikonale, régissant l'évolution du vecteur d'onde :

$$D_t\mathbf{k} = -\mathbf{L}^T\mathbf{k} . \quad (1.20)$$

À l'ordre dominant, la perturbation est isobare et pseudo incompressible (pseudo au sens où, contrairement à une décomposition sur des modes de Fourier, l'amplitude v_0 dépend de la position et on ne peut donc conclure quant à la nullité ou la non nullité de $\nabla \cdot \mathbf{v}_0$), même si le champ porteur est compressible. Ceci correspond à des modes inertiels, ensemble des modes vorticaux et entropiques [Kov53].

Il est à noter que la pseudo incompressibilité est satisfaite à tout instant si elle l'est à l'instant initial. En effet $D_t(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) = 0$ donc, si $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}, 0) = 0$, alors $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}, t) = 0, \forall t \in [0, T]$.

Dans la suite, nous nous restreindrons à l'examen de ce cas.

1.3.1.2 Ordre 1

Sous les relations (1.19), le système (1.14) a la forme :

$$\begin{cases} D_t \mathbf{v}_0 + \mathbf{L} \mathbf{v}_0 - \frac{\nabla P}{RC} x_0 = -iC y_\epsilon \nabla \phi, \\ D_t \frac{x_0}{C} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \ln \left(\frac{R}{P^{1/\gamma}} \right) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \ln P^{1/\gamma} = -i v_\epsilon \cdot \nabla \phi. \end{cases} \quad (1.21)$$

On cherche à former des lois d'évolution découplées pour l'ordre dominant indexé $_0$ d'une part et l'ordre résiduel indexé $_\epsilon$ d'autre part.

1.3.1.2.1 Équations pour les termes indexés $_0$ Dans le souci de simplifier les intégrations énergétiques subséquentes (voir (1.35)), on pose

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{J}}, \\ x_0 = \frac{Cb}{\sqrt{J}}, \end{cases} \quad (1.22)$$

où $J(\boldsymbol{\chi}, t) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right)$ représente le volume à l'instant courant de la particule de fluide porteuse, normalisé par le volume à l'instant 0. $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x}(t=0)$ repère la particule fluide dont on va suivre l'évolution au cours du temps. L'évolution temporelle de J est donnée par

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) J, \quad (1.23)$$

où $\frac{d}{dt}$ est l'opérateur de dérivation *lagrangienne*. Il sert à déterminer l'évolution temporelle de la particule fluide $\boldsymbol{\chi}$, fixée. De plus, la dérivée lagrangienne est aisément reliée à la dérivée eulérienne. En effet toute fonction f caractérisant l'écoulement est exprimée de manière équivalente en représentation lagrangienne ou eulérienne selon

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t), t) = \tilde{f}(\boldsymbol{\chi}, t), \quad (1.24)$$

où la notation $\tilde{}$ désigne la représentation lagrangienne. La dérivation temporelle à particule fluide $\boldsymbol{\chi}$ fixée s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{f}(\boldsymbol{\chi}, t) &= \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}, t), \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla f, \\ &= \frac{Df}{Dt}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

L'opérateur de dérivation lagrangienne est un opérateur de dérivation ordinaire (temporelle seulement) le long de la trajectoire repérée par le point initial $\mathbf{x}(t=0)$. En effet on peut définir une abscisse curviligne $s(\mathbf{x}, t)$ dépendant de la position eulérienne \mathbf{x} et du temps t , telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial s} = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

La dérivation selon s s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} &= \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla, \end{aligned}$$

qui est exactement l'opérateur de dérivation eulérienne D_t . D_t définit donc une dérivation ordinaire, le long des trajectoires de l'écoulement porteur, et est équivalent à $\frac{d}{dt}$, opérateur de dérivation lagrangienne définissant une dérivation seulement temporelle, à particule fluide porteuse fixée. Autrement dit, les trajectoires porteuses sont les caractéristiques du système. La notation en $\tilde{}$ sera ultérieurement laissée de côté quand la dépendance lagrangienne ou eulérienne est claire.

Avec la définition des variables \mathbf{a} et b , l'équation (1.21₂) devient

$$D_t b = -\frac{P^{(1/\gamma)}}{R} \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{R}{P^{(1/\gamma)}} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{V} b. \quad (1.26)$$

Pour s'affranchir des termes en ε dans (1.21₁), on projette cette équation sur une direction perpendiculaire à \mathbf{k} en la multipliant à gauche par le projecteur $\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2}$. En utilisant aussi que $(D_t \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k} = -(D_t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}$, car $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0, \forall t \in [0, T]$, (1.21₁) devient

$$D_t \mathbf{a} = -\mathbf{L} \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{a} + 2 ((\mathbf{L} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} + \frac{1}{R} \left(\nabla P - (\nabla P \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right) b. \quad (1.27)$$

1.3.1.2.2 Équations pour les termes indexés ε Rappelons ici que l'on cherche à obtenir des conditions suffisantes d'instabilité. Pour ce faire on cherche un champ porteur garantissant la croissance de l'ordre dominant de la perturbation. La croissance de la perturbation totale sera assurée si on trouve *une* solution bornée des ordres non dominants. Dans la mesure où x_ε n'apparaît pas dans le système (1.21), on suppose $x_\varepsilon = 0$. En prenant le produit scalaire de (1.21₁) avec \mathbf{k} , y_ε satisfait

$$y_\varepsilon = \frac{i}{C |\mathbf{k}|^2} \left[2 (\mathbf{L} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k} - (\nabla P \cdot \mathbf{k}) \frac{b}{R} \right]. \quad (1.28)$$

Par ailleurs, v_ε vérifie

$$-iv_\varepsilon \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{J}} \left(\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{\sqrt{J}}{P^{1/\gamma}} \mathbf{a} \cdot \nabla \frac{P^{1/\gamma}}{\sqrt{J}} \right), \quad (1.29)$$

obtenue à partir de (1.21₃) et (1.22). Cette équation est scalaire alors qu'il faut déterminer les trois composantes du vecteur v_ε . Toujours dans la mesure où l'on cherche des conditions suffisantes d'instabilité, on peut imposer des relations supplémentaires sur v_ε , ici la colinéarité avec \mathbf{k} . Une solution de (1.29) est

$$v_\varepsilon = \frac{i\mathbf{k}}{\sqrt{J}|\mathbf{k}|^2} \left(\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{\sqrt{J}}{P^{1/\gamma}} \mathbf{a} \cdot \nabla \frac{P^{1/\gamma}}{\sqrt{J}} \right). \quad (1.30)$$

1.3.1.3 Récapitulatif des équations

Pour l'ensemble des ordres, les paragraphes précédents nous ont permis de dégager le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad t = 0, \\ D_t \mathbf{k} = -\mathbf{L}^T \mathbf{k}, \\ D_t \mathbf{a} = -\mathbf{L} \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{a} + 2 ((\mathbf{L} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \\ \quad + \frac{1}{R} \left(\nabla P - (\nabla P \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right) b, \\ D_t b = -\frac{P^{(1/\gamma)}}{R} \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{R}{P^{(1/\gamma)}} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{V}, \\ y_0 = 0, \end{array} \right. \quad (1.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\varepsilon = \frac{i\mathbf{k}}{\sqrt{J}|\mathbf{k}|^2} \left(\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{\sqrt{J}}{P^{1/\gamma}} \mathbf{a} \cdot \nabla \frac{P^{1/\gamma}}{\sqrt{J}} \right), \\ y_\varepsilon = \frac{i}{C|\mathbf{k}|^2} \left[2((\mathbf{L} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}) - (\nabla P \cdot \mathbf{k}) \frac{b}{R} \right], \\ x_\varepsilon = 0, \\ \mathbf{M} \mathbf{X}_r = e^{-i\phi/\varepsilon} \mathbf{M} \mathbf{X}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Comme (1.8), le système (1.31) est fermé. De plus, et c'est là tout l'intérêt de la méthode, l'opérateur de dérivation (D_t) de la perturbation équivaut à l'opérateur de dérivation lagrangienne $\frac{d}{dt}$ et est donc seulement ordinaire.

Pratiquement, on définit d'abord les trajectoires puis on résout le système *ordinaire* (1.31₂) à (1.31₄) soumis à la seule contrainte (1.31₁). Il nous reste désormais à montrer que les ordres non dominants peuvent être majorés. Si on trouve alors un champ porteur garantissant la croissance de l'ordre dominant, l'instabilité du système sera garantie.

1.3.2 Intégrations énergétiques

Dorénavant, on supposera le champ porteur stationnaire.

La norme énergétique de l'ordre p ($p = 0$, ε ou résiduel) de la perturbation est définie en description eulérienne par

$$\begin{aligned} E_p(t) &= \left[\int_S (\mathbf{X}_p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_p^*(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right]^{1/2}, \\ &= \left[\int_S (v_p(\mathbf{x}, t) \cdot v_p^*(\mathbf{x}, t) + x_p(\mathbf{x}, t) \cdot x_p^*(\mathbf{x}, t) + y_p(\mathbf{x}, t) \cdot y_p^*(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

L'énergie totale E de la perturbation - somme des différents ordres - peut être encadrée suivant

$$E_0(t) - \varepsilon \{E_\varepsilon(t) + E_r(t)\} \leq E(t) \leq E_0(t) + \varepsilon \{E_\varepsilon(t) + E_r(t)\} \quad (1.34)$$

en utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme $E(t)$. L'intégrale est définie en description eulérienne alors que le système sur l'ordre dominant (1.31) ne fait apparaître que des dérivations lagrangiennes, plus adaptées à l'examen de l'évolution d'une perturbation initialement localisée. Pour l'ordre dominant, on procède donc à un changement de variable permettant d'utiliser la description lagrangienne de l'évolution de la perturbation :

$$\begin{aligned} E_0(t) &= \left[\int_S (\mathbf{X}_0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_0^*(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right]^{1/2}, \\ &= \left[\int_S (v_0(\mathbf{x}, t) \cdot v_0^*(\mathbf{x}, t) + x_0(\mathbf{x}, t) \cdot x_0^*(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right]^{1/2}, \\ &= \left[\int_{S_0} (v_0(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot v_0^*(\boldsymbol{\chi}, t) + x_0(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot x_0^*(\boldsymbol{\chi}, t)) J d\boldsymbol{\chi} \right]^{1/2}, \\ &= \left[\int_{S_0} (a(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot a^*(\boldsymbol{\chi}, t) + b(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot b^*(\boldsymbol{\chi}, t)) d\boldsymbol{\chi} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où S_0 désigne le domaine de référence (i.e. l'ensemble des particules fluides porteuses) où est localisée la perturbation à l'instant initial. Toutes les variables et fonctions apparaissant dans cette dernière équation sont lagrangiennes mais notées comme en eulérien dans un souci d'allègement des notations. On voit ainsi avec le changement de variable (1.22) que l'instabilité au sens lagrangien (convective) est équivalente à l'instabilité au sens eulérien (absolue) quand, de manière suffisante, S_0 est confondu avec S . C'est en particulier le cas pour des trajectoires fermées.

On procédera désormais à la majoration des ordres non dominants de la perturbation.

1.3.2.1 Majoration de l'ordre ε

Les équations (1.31₆) à (1.31₈), vérifiées par \mathbf{X}_ε , ne dépendent *pas* de ε . On peut donc trouver une constante N , ne dépendant *pas* de ε , telle que à chaque instant

$t \in [0; T]$,

$$\left[\int_S (\mathbf{X}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_\varepsilon^*(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right]^{1/2} \leq N, \quad N \in \mathbb{R}. \quad (1.36)$$

1.3.2.2 Majoration du résidu

On cherche ici à majorer indépendamment de ε la norme du résidu, intégrée sur le volume,

$$\left[\int_S \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_r^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right]^{1/2}, \quad (1.37)$$

pour ensuite utiliser un argument identique à celui du paragraphe précédent.

Dans l'Annexe C, on reprend une propriété de majoration des opérateurs hyperboliques symétriques démontrée par Eckhoff dans [Eck81] selon laquelle pour toute équation de la forme $\mathbf{M}w = f$, avec w de support compact à l'instant initial et \mathbf{M} un opérateur linéaire hyperbolique symétrique, on a la majoration suivante de la norme carrée de w :

$$\begin{aligned} \int_S w(\mathbf{x}, t) \cdot w^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \leq & e^{2\kappa t} \int_S w(\mathbf{x}, 0) \cdot w^*(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\ & + e^{2\kappa t} \int_0^t \{ e^{-2\kappa\tau} \int_S f(\mathbf{x}, \tau) \cdot f^*(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} \} d\tau, \end{aligned} \quad (1.38)$$

avec κ "suffisamment grand".

On applique ici ce résultat à l'équation (1.31₉) avec $w = \mathbf{X}_r$ et $f = e^{-i\phi/\varepsilon} \mathbf{M} \mathbf{X}_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_r^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \leq & e^{2\kappa t} \int_S \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, 0) \cdot \mathbf{X}_r^*(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\ & + e^{2\kappa t} \int_0^t \{ e^{-2\kappa\tau} \int_S \mathbf{M} \mathbf{X}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) \cdot \mathbf{M} \mathbf{X}_\varepsilon^*(\mathbf{x}, \tau) d\mathbf{x} \} d\tau, \end{aligned} \quad (1.39)$$

Il est important de noter que κ est choisi de telle sorte qu'une matrice indépendante de ε (voir Annexe C) soit définie positive. κ ne dépend donc pas de ε . De plus, la seconde intégrale du membre de droite est aussi indépendante de ε .

Pour tout instant, on est donc capable de trouver une majoration pour la norme de \mathbf{X}_r - majoration dépendant du temps, mais *pas* de ε . En prenant la majoration maximale sur l'ensemble des instants, on a pour tout $t \in [0; T]$

$$\left[\int_S \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{X}_r^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right]^{1/2} \leq M, \quad M \in \mathbb{R}. \quad (1.40)$$

Comme l'énergie aux ordres ε et r est multipliée par ε (voir (1.34)), on peut rendre la contribution de ces deux termes aussi petite que l'on veut en choisissant ε suffisamment petit. Physiquement, cela revient à considérer des perturbations de longueur d'onde aussi petite que désiré. Ceci est toujours possible pour un écoulement non visqueux, pour lequel il n'y a pas de coupure visqueuse des petites échelles.

1.4 Conclusion

On possède désormais une majoration des ordres non dominants et le développement WKB est bien ordonné pour tous les temps. Si l'on est capable de trouver des combinaisons du champ porteur pour lesquelles les variables indexées o croissent de manière non bornée, on aura déterminé des conditions suffisantes d'instabilité. Cette croissance ne pourra pas être annihilée par le comportement des ordres non dominants et l'énergie totale de la perturbation croîtra comme $E_0(t)$ (1.34). Ces conditions ne seront "que" suffisantes car seules des perturbations de courte échelle ont été envisagées. Les équations (1.31₁) à (1.31₄) seront désormais particularisées pour notre géométrie. L'influence de la compressibilité sera considérée par le raccordement entre les propriétés de stabilité compressible et incompressible.

Dans les équations (1.31₁) à (1.31₄) apparaît déjà un lien avec le comportement incompressible. En effet, si on considère un champ porteur homoentropique, la perturbation en pression est reliée à celle de densité par $p = C^2 \rho$. Alors b est nulle. Si de plus on fait l'hypothèse que le champ porteur est de divergence nulle, ce qui est satisfait pour un tourbillon porteur plan axisymétrique, alors l'équation sur la perturbation de vitesse devient :

$$D_t \mathbf{a} = -\mathbf{L}\mathbf{a} + 2((\mathbf{L}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (1.41)$$

Cette équation est exactement celle de l'évolution de la perturbation de vitesse pour un écoulement incompressible [LH91, Leb97]. Selon la méthode WKB, il y a donc équivalence entre un cas compressible homoentropique à divergence nulle et un cas purement incompressible. Cette notion d'équivalence s'applique en fait uniquement à la production de conditions suffisantes d'instabilité. En effet, Broadbent et Moore [BM79] ont démontré analytiquement par une étude en modes normaux que le tourbillon plan de Rankine, stable en incompressible, est instable à nombres d'onde azimuthal modéré ($m = 2$) en compressible homoentropique. Les auteurs notent qu'il est surprenant de constater que la perte énergétique par radiation acoustique induit une croissance des perturbations. Cet exemple met en évidence le caractère seulement suffisant des critères d'instabilité produit pas la méthode WKB ainsi que la difficulté de déduction de propriété de stabilité entre deux configurations même élémentaires et voisines.

On peut par ailleurs noter que la méthode WKB autorise une extension au faiblement non linéaire, exposée dans Hunter et Keller [HK83, Lif91].

Chapitre 2

Écoulement Hélicoïdal

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher à examiner le lien entre l'existence de modes instables au sens WKB et l'existence de valeurs propres instables de l'opérateur d'Euler pour un écoulement porteur particulier.

L'écoulement porteur considéré est stationnaire, compressible, axisymétrique et confiné dans un tube de rayon \mathcal{R} et d'extension axiale infinie, schématisé sur la figure (2.1).

Pour la méthode WKB, développée sur les caractéristiques inertielles, la présence de parois ne modifie pas le critère suffisant d'instabilité. L'écoulement sera décrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Il satisfait les seules contraintes suivantes :

- l'équation de la continuité et la condition de non pénétration à la paroi impliquent la nullité de la vitesse radiale partout : le champ de vitesse porteur s'écrit $\mathbf{V} = V(r)\hat{e}_\theta + W(r)\hat{e}_z$,
- la conservation de la quantité de mouvement radiale s'écrit

$$\frac{RV^2}{r} = \frac{dP}{dr} . \quad (2.1)$$

Les équations de conservation de quantité de mouvement dans les directions azimu-

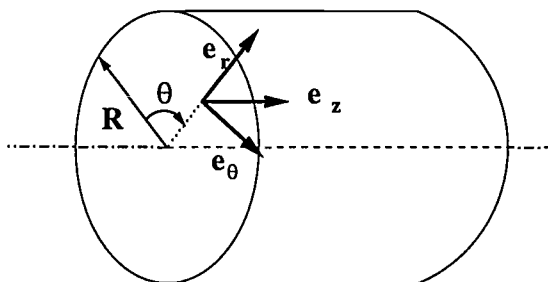


FIG. 2.1 – Géométrie étudiée

tale (θ) et axiale (z) et l'équation d'isentrobie sont identiquement nulles.

Suivant les travaux d'Eckhoff [ES78, ES80, Eck84], le système différentiel ordinaire régissant l'ordre dominant de la perturbation WKB sera particularisé pour un écoulement porteur hélicoïdal. Ceci permet d'obtenir un critère suffisant d'instabilité et un taux de croissance énergétique associé (section 2.2). Tous deux sont sous forme purement analytique. En revanche, le profil des modes propres n'est pas a priori connu. De plus, le critère WKB est théoriquement valable aux seuls grands nombres d'onde. Son éventuelle validité aux petits nombres d'onde doit être examiné à l'aide d'une autre méthode. Nous avons complété l'étude WKB par une étude en modes normaux. D'usage plus habituel mais de maniement plus lourd car nécessitant quasi systématiquement un traitement numérique, la méthode en modes normaux permet de déterminer la totalité du spectre de l'opérateur, ainsi que les modes propres associés, et d'évaluer ainsi les limites de la méthode WKB. Dans la section 2.3, nous présentons la résolution spectrale de la forme en modes normaux et sa validation dans des cas incompressibles. Dans la section 2.4 nous présentons les résultats de stabilité pour différents profils de vitesses axiale, azimutale, et de masse volumique, pour examiner l'accord entre les formulations WKB et en modes normaux.

2.2 Critère WKB

On cherche à résoudre analytiquement les équations (1.31₂) à (1.31₄) pour le champ porteur hélicoïdal. En coordonnées cylindriques, elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{k}_r = \left(-V' + \frac{V}{r}\right) k_\theta - W' k_z, \\ \dot{k}_\theta = 0, \\ \dot{k}_z = 0, \\ \dot{a}_r = \frac{2}{|k|^2} \left(-\frac{V}{r} a_\theta k_r + V' a_r k_\theta + W' a_r k_z\right) k_r + \\ \quad \frac{2V}{r} a_\theta + \frac{bP'}{R} \left(1 - \frac{k_r^2}{|k|^2}\right), \\ \dot{a}_\theta = \frac{2}{|k|^2} \left(-\frac{V}{r} a_\theta k_r + V' a_r k_\theta + W' a_r k_z\right) k_\theta - \\ \quad \left(V' + \frac{V}{r}\right) a_r - \frac{bP'}{R} \frac{k_r k_\theta}{|k|^2}, \\ \dot{a}_z = \frac{2}{|k|^2} \left(-\frac{V}{r} a_\theta k_r + V' a_r k_\theta + W' a_r k_z\right) k_z - \\ \quad W' a_r - \frac{bP'}{R} \frac{k_r k_z}{|k|^2}, \\ \dot{b} = a_r \left(\frac{R'}{R} + \frac{P'}{\gamma P}\right). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Les notations sont les suivantes :

- $\mathbf{k} = \nabla\Phi = (k_r, k_\theta, k_z) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$ est le vecteur d'onde,
- $\dot{} = \partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla = \partial_t + \frac{V}{r}\partial_\theta + W\partial_z$ est l'opérateur de dérivation matérielle selon le champ porteur pour un *scalaire*. Notons que $\dot{} = D_t$ pour les scalaires, mais *non* pour les vecteurs. Pour ceux-ci, on doit ajouter la contribution $-v^2/r$ et $+uv/r$ pour les composantes r et θ respectivement.
- $' \equiv \frac{d}{dr}$.

Notons que le champ porteur, bien que de densité variable, est de divergence nulle.

Le système (2.2) ne fait apparaître que des dérivées ordinaires (lagrangiennes) le long des trajectoires de l'écoulement porteur et on vérifie l'absence de caustiques. En effet, la position d'un point matériel M est $\mathbf{x} = r(t)\hat{\mathbf{e}}_r(t) + z(t)\hat{\mathbf{e}}_z$. En notation lagrangienne, elle est reliée à la vitesse porteuse par

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{V}, \text{ soit} \\ r\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z &= V\hat{\mathbf{e}}_\theta + W\hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les trajectoires sont donc la famille d'hélices

$$\begin{cases} r = r_0, \\ \theta = \theta_0 + \frac{V}{r}t, \\ z = z_0 + Wt, \end{cases} \quad (2.4)$$

qui n'intersectent pas et ne heurtent pas la paroi. Il n'y a donc pas de caustiques [Whi74] et les relations (2.2) décrivent des évolutions indépendantes selon les différentes trajectoires. Il suffit donc de trouver une trajectoire sur laquelle la perturbation croît de manière non bornée pour garantir l'instabilité du système [LH91].

2.2.1 Condition de résolution analytique

Le système (2.2) peut être mis sous la forme matricielle

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z} + \mathbf{B}\mathbf{Z}, \quad (2.5)$$

où seule la matrice \mathbf{A} est dépendante du temps et $\mathbf{Z} = (k_r, k_\theta, k_z, a_r, a_\theta, a_z, b)^T$. La dépendance en temps apparaît exclusivement par l'intermédiaire de la composante radiale du vecteur d'onde. La perturbation WKB est de nombres d'onde axial et azimutal constants. Pour résoudre le système complètement analytiquement, il suffit qu'il soit autonome, i.e. que la dépendance en temps soit supprimée. Ceci peut être fait simplement en imposant la condition d'autonomie

$$\left(-V' + \frac{V}{r}\right)k_{\theta 0} - W'k_{z 0} = 0. \quad (2.6)$$

En effet, l'intégration en temps de (2.2₁) à (2.2₃) donne

$$\begin{cases} k_r = \left[\left(-V' + \frac{V}{r} \right) k_{\theta 0} - W' k_{z 0} \right] t + k_{r 0} , \\ k_\theta = k_{\theta 0} , \\ k_z = k_{z 0} . \end{cases} \quad (2.7)$$

Le vecteur d'onde est constant et sera désormais noté sans l'indice $_0$. Nous nous placerons désormais sur l'ensemble \mathcal{A} des rayons r satisfaisant la condition d'autonomie. Il est à noter que cette condition d'autonomie est identique à celle de Leibovich et Stewartson [LS83]. Dans leur étude incompressible les auteurs examinent la stabilité d'un tourbillon axisymétrique avec mouvement axial soumis à des perturbations tridimensionnelles écrites sous forme de modes normaux. Ils démontrent analytiquement qu'à suffisamment grand nombre d'onde une partie de leur condition suffisante d'instabilité est que la pulsation de la perturbation par rapport au champ de base ("shifted Doppler frequency", $\omega_{Base}(r)$) présente un extremum dans $]0; \mathcal{R}[$ (voir aussi section 2.3 pour la définition de cette pulsation). La dérivée selon le rayon $d\omega_{Base}(r)/dr$ de cette pulsation par rapport au champ de base est exactement la même équation que (2.6).

(2.5) s'écrit alors $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{B}\mathbf{Z}$ avec \mathbf{B} matrice constante. (k_r, k_θ, k_z) est désormais constant et la détermination de la stabilité nécessite seulement de s'intéresser aux valeurs propres de la forme matricielle $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{D}\mathbf{Y}$ avec $\mathbf{Y} = (a_r, a_\theta, a_z, b)^T$ et

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{2V k_\theta k_r}{r |k|^2} & \frac{2V}{r} \left(1 - \frac{k_r^2}{|k|^2} \right) & 0 & \frac{P'}{R} \left(1 - \frac{k_r^2}{|k|^2} \right) \\ -V' + \frac{V}{r} \left(\frac{2k_\theta^2}{|k|^2} - 1 \right) & \frac{-2V}{r |k|^2} k_r k_\theta & 0 & -\frac{P'}{R} \frac{k_r k_\theta}{|k|^2} \\ \frac{2V k_\theta k_z}{r |k|^2} + W' & \frac{-2V}{r |k|^2} k_r k_z & 0 & -\frac{P'}{R} \frac{k_r k_z}{|k|^2} \\ -\frac{R'}{R} + \frac{P'}{\gamma P} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Ce système *ordinaire fermé* est valable le long des hélices (2.4) définissant les caractéristiques, sur l'ensemble \mathcal{A} des rayons où la condition d'autonomie (2.6) est satisfaite.

2.2.2 Critère suffisant d'instabilité

Si \mathbf{D} admet au moins une valeur propre λ réelle strictement positive, alors, selon la théorie classique de la stabilité [Ros66], il existe au moins un mode propre instable.

Le déterminant de $\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}$ peut s'exprimer sous la forme $-\lambda^2 (\lambda^2 - F)$. Si $F > 0$ sur un ensemble \mathcal{B} et que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est de mesure non nulle, le système (2.8) est instable et le taux de croissance énergétique peut être déterminé explicitement (paragraphe

2.2.3). Nous verrons ultérieurement que cette condition de mesure strictement positive peut être relaxée. $F > 0$ équivaut à

$$\frac{V^2}{r} \left(\frac{R'}{R} - \frac{V^2}{rC^2} \right) \frac{k_\theta^2 + k_z^2}{|k|^2} + \frac{2V}{r} \left(V' \frac{k_\theta^2 + k_z^2}{|k|^2} - \frac{V}{r} \frac{k_\theta^2 - k_z^2}{|k|^2} \right) < 0, \quad (2.9)$$

où on rappelle que C est la vitesse locale du son et que le gradient de pression P' peut être calculé en fonction de la vitesse azimuthale selon (2.1). La limite de \sqrt{F} à grands nombres d'onde donne le taux d'amplification exponentiel WKB $\sigma(r)$.

On distinguera ici deux cas pour déterminer σ en utilisant le critère d'autonomie (2.6).

2.2.2.1 $W' \neq 0$ ou $-V' + \frac{V}{r} \neq 0$

Rappelons encore que l'on cherche des conditions suffisantes d'instabilité. Si l'on considère des perturbations avec $k_r = 0$ et qu'on utilise la condition d'autonomie (2.6) liant k_θ à k_z , (2.9) équivaut à

$$-\sigma^2(r) = \frac{V^2}{r} \left(\frac{R'}{R} - \frac{V^2}{rC^2} \right) + \frac{2V}{r} \left(V' - \frac{V}{r} \right) \frac{\left(W'^2 + V'^2 - \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right)}{\left[W'^2 + \left(V' - \frac{V}{r} \right)^2 \right]} < 0. \quad (2.10)$$

Le premier terme est exactement la fréquence de Brunt-Väisälä $N^2 = -V^2 S'/r$ et indique qu'une croissance radiale de l'entropie du champ porteur a un effet déstabilisant. Ce résultat est en accord et étend les travaux de Chan et al. [CSP93]. Par une étude en modes normaux, les auteurs examinent la stabilité d'un tourbillon compressible plan vis-à-vis de perturbations planes. Les profils porteurs de vitesse envisagés sont un profil de Rankine et un profil plus lisse. À tout nombre d'onde ils constatent un effet déstabilisant d'un gradient d'entropie positif. Selon eux, la force centrifuge crée un effet de flottaison sur le champ porteur non homoentropique. L'effet du gradient d'entropie du champ porteur joue dans le même sens que dans le critère suffisant de stabilité écrit sous la forme d'un nombre de Richardson.

Le second terme est la condition suffisante d'instabilité dérivée en incompressible par Leibovich et Stewartson pour un tourbillon axisymétrique avec mouvement axial soumis à des perturbations tridimensionnelles [LS83].

Le premier terme apparaît donc comme une correction introduite par la compressibilité [Eck84]. En effet, (2.10) mise sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$-\bar{\sigma}^2(r) = \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}} \left(\frac{\bar{R}'}{\bar{R}} - M^2 \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}\bar{C}^2} \right) + \frac{2\bar{V}}{\bar{r}} \left(\bar{V}' - \frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right) \frac{\left(\bar{W}'^2 + \bar{V}'^2 - \left(\frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right)^2 \right)}{\left[\bar{W}'^2 + \left(\bar{V}' - \frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right)^2 \right]} < 0. \quad (2.11)$$

Dans cette inéquation, les quantités barrées sont les variables adimensionnées par les quantités de référence $*$ et $M = V^{*2}R^*/\gamma P^*$. Les grandeurs de référence pour la vitesse V^* sont le rayon \mathcal{R} du tube et la vitesse angulaire au centre du tube. La masse volumique et la pression sont adimensionnalisées par leur valeur au centre du tube. Le nombre de Mach de référence M (*non local*) est donc pris au centre du tube. De plus, pour les écoulements faiblement compressibles stationnaires, la masse volumique peut être développée [Zey86, ZM91, MMP00] selon le développement de Rayleigh-Jansen en $R(x) = R_0 + M^2 R_1(x) + \dots$

(2.11) s'écrit donc

$$-\bar{\sigma}^2(r) = M^2 \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}} \left(\frac{\bar{R}'_1}{\bar{R}} - \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}\bar{C}^2} \right) + \frac{2\bar{V}}{\bar{r}} \left(\bar{V}' - \frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right) \frac{\left(\bar{W}'^2 + \bar{V}'^2 - \left(\frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right)^2 \right)}{\left[\bar{W}'^2 + \left(\bar{V}' - \frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right)^2 \right]} < 0. \quad (2.12)$$

À la limite $M \rightarrow 0$, on retrouve exactement le critère incompressible.

(2.10) permet aussi de retrouver deux cas particuliers intéressants :

– $W' = 0$

La condition d'autonomie (2.6) implique alors que le nombre d'onde azimutal est nul, i.e. que la perturbation est axisymétrique. Le critère (2.12) dégénère en

$$-\bar{\sigma}^2(r) = M^2 \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}} \left(\frac{\bar{R}'_1}{\bar{R}} - \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}\bar{C}^2} \right) + \frac{2\bar{V}}{\bar{r}} \left(\bar{V}' + \frac{\bar{V}}{\bar{r}} \right). \quad (2.13)$$

Le deuxième terme du membre de droite est le critère de Rayleigh incompressible, exposé par exemple par Chandrasekhar [Cha61]. Il stipule que tout écoulement plan de carré de moment angulaire décroissant est instable. Cette condition s'applique aussi si la vitesse axiale est constante (non nécessairement nulle). En effet, d'après le principe d'invariance galiléenne [RA85], les propriétés de stabilité d'un écoulement ne sont pas modifiées si on translate uniformément la vitesse porteuse. Le critère (2.13) sera appelé critère compressible de Rayleigh.

– $-V' + \frac{V}{r} = 0$ (Rotation Solide)

(2.6) implique alors que le nombre d'onde axial est nul et (2.10) dégénère en

$$-\bar{\sigma}^2(r) = M^2 \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}} \left(\frac{\bar{R}'_1}{\bar{R}} - \frac{\bar{V}^2}{\bar{r}\bar{C}^2} \right) < 0. \quad (2.14)$$

La rotation solide compressible peut donc être instable selon la direction du gradient d'entropie. À la limite incompressible et au sens WKB la rotation solide avec profil de vitesse axiale variable est neutralement stable aux perturbations planes.

$$2.2.2.2 \quad W' = 0 \text{ et } -V' + \frac{V}{r} = 0$$

(2.6) est vérifiée pour tout rayon et l'écoulement est en rotation solide : $V = \Omega r$, avec Ω vitesse de rotation angulaire constante. Le critère (2.9) équivaut à

$$-\sigma^2(r) = \Omega^2 r \left(\frac{R'}{R} - \frac{\Omega^2 r}{C^2} \right) \frac{k_\theta^2 + k_z^2}{k^2} + 4\Omega^2 \frac{k_z^2}{k^2} < 0. \quad (2.15)$$

En posant $A(r) = r \left(\frac{R'}{R} - \frac{\Omega^2 r}{C^2} \right)$, on constate que (2.15) ne peut être satisfaite que si $A(r)$ est négatif, i.e. si le gradient d'entropie porteuse est positif. Pour $A(r)$ négatif, (2.15) s'écrit

$$\frac{k_\theta^2}{k_z^2} > \frac{-4 - A(r)}{A(r)}. \quad (2.16)$$

Les perturbations croissantes sont dans un cône et les perturbations les plus instables sont planes. Avec $\delta = k_z/k_\theta$, à grand nombre d'onde le taux d'amplification s'écrit :

$$-\sigma^2(r) = \Omega^2 r \left(\frac{R'}{R} - \frac{\Omega^2 r}{C^2} \right) + 4\Omega^2 \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} < 0. \quad (2.17)$$

Dans ce cas de rotation solide avec vitesse axiale constante, on est dans les conditions d'équivalence [ES78] entre la condition suffisante d'instabilité d'Eckhoff et Storesletten [ES78] et la condition nécessaire de Warren [War75]. Le critère de Warren ne fait pas apparaître explicitement les nombres d'onde. Le critère WKB montre que les perturbations les plus dangereuses sont planes ($\delta = k = 0$).

Pour $k_z = 0$, on retrouve la même expression qu'en (2.14). La rotation solide soumise à des perturbations planes a les mêmes propriétés de stabilité WKB que la vitesse axiale soit variable ou non.

Pour $k_\theta = 0$ et en procédant à la même adimensionalisation qu'au paragraphe précédent, (2.15) s'écrit

$$-\bar{\sigma}^2(r) = M^2 \bar{\Omega}^2 \bar{r} \left(\frac{\bar{R}'}{\bar{R}} - \frac{\bar{V}^2}{\bar{r} \bar{C}^2} \right) + 4\bar{\Omega}^2 < 0. \quad (2.18)$$

Ceci est en accord avec la stabilité de la rotation solide incompressible plane soumise à des perturbations axisymétriques et qui donne lieu aux ondes stables de Kelvin [Cha61].

2.2.3 Taux de croissance énergétique

Dans les cas où les formules précédentes sont valables sur un ensemble de mesure non nulle, il est possible d'obtenir le comportement de la norme énergétique aux grands temps. Suivant Bender et Orszag [BO78], la méthode de Laplace permet d'obtenir le comportement à grand temps t d'une intégrale de la forme

$$I(t) = \int_a^b f(r) e^{t\phi(r)} dr, \quad (2.19)$$

sous l'hypothèse que les fonctions f et ϕ sont de régularité suffisante et que la fonction f ne s'annule pas au maximum ϕ_0 de ϕ . Dans notre cas, l'énergie à l'ordre dominant (1.35) suit

$$E_0(t) \sim \left[\int_0^{\mathcal{R}} (\mathbf{X}_d(r) \cdot \mathbf{X}_d^*(r)) e^{2\sigma(r)t} dr \right]^{1/2}, \quad (2.20)$$

où $\mathbf{X}_d(r)$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $\sigma(r)$ et où l'intégrale est définie sur le volume fluide $[0; \mathcal{R}]$. Nous considérons pour la suite que $\mathbf{X}_d(r_0)$ n'est pas nul au maximum σ_0 de σ , atteint en r_0 .

Supposons que $r_0 = \mathcal{R}$ et que la dérivée de σ est non nulle à cette borne. Alors le comportement à grand temps de $E_0(t)$ suit

$$E_0(t) \sim \left(\frac{1}{2\sigma_0' t} \right)^{1/2} (\mathbf{X}_d(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{X}_d^*(\mathcal{R}))^{1/2} e^{\sigma_0 t}. \quad (2.21)$$

Si σ est de dérivée nulle à la borne,

$$E_0(t) \sim \left(\frac{-\pi}{4\sigma_0'' t} \right)^{1/4} (\mathbf{X}_d(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{X}_d^*(\mathcal{R}))^{1/2} e^{\sigma_0 t}. \quad (2.22)$$

Si le maximum de σ est atteint à l'intérieur $]0; \mathcal{R}[$ du domaine, $E_0(t)$ suit

$$E_0(t) \sim \left(\frac{-\pi}{\sigma_0'' t} \right)^{1/4} (\mathbf{X}_d(r_0) \cdot \mathbf{X}_d^*(r_0))^{1/2} e^{\sigma_0 t}. \quad (2.23)$$

Quel que soit l'ordre de la première dérivée non nulle de σ en r_0 , $E_0(t)$ - et donc $E(t)$, énergie totale de la perturbation, suivant (1.34) - présente une croissance exponentielle au taux σ_0 .

Ces formules ne s'appliquent que dans le cas où le taux WKB est positif sur un mesure de mesure non nulle. En particulier, si le taux croissance WKB est algébrique (au plus) presque partout sur $[0; \mathcal{R}]$ et exponentiel seulement en des points discrets, la norme L^2 de $E_0(t)$ a un taux de croissance exponentielle nul. Ce point sera nuancé à la lumière des résultats de l'étude en modes normaux.

2.3 Formulation en modes normaux

L'approche WKB, bien que particulièrement élégante, ne donne pas d'information sur les modes propres de la perturbation. En outre, elle est théoriquement limitée à des perturbations de grand nombre d'onde. Nous avons donc choisi de la compléter par une analyse en modes normaux. La méthode en modes normaux

fournit la totalité du spectre ainsi que les modes propres de l'opérateur d'Euler. L'examen préalable de cas incompressibles, mieux documentés dans la littérature que les cas compressibles, nous a permis de valider notre méthode de calcul et de considérer ultérieurement le raccordement entre les comportements compressible et incompressible.

Nous avons travaillé conjointement en variables primitives et en variables d'Eckart. Le système primitif interdit un traitement analytique car le découplage entre variables est insuffisant. En revanche, il autorise le passage à l'incompressible. Nous avons privilégié cette formulation pour l'écriture d'un code. Le système a de plus été adimensionnalisé de même qu'au paragraphe 2.2.2.1 : les grandeurs de référence sont considérées au centre du tube. En particulier le temps de référence est l'inverse de la vitesse angulaire en ce point et la longueur de référence est le rayon du tube.

Le système écrit en variables d'Eckart présente les propriétés opposées. Par sa forme hyperbolique symétrique, il est plus aisément soluble analytiquement. En revanche, le passage à l'incompressible est impossible par définition de x et y . Il a été gardé sous forme dimensionnelle.

Pour les variables d'Eckart, la notation \mathbf{X} est conservée (avec dimension de vitesse) alors que les variables primitives sont notées sous la forme d'un vecteur \mathbf{Y} (sans dimension). Comme le champ porteur est uniforme en θ et z , la perturbation en modes normaux s'écrit comme somme de modes de Fourier dans ces deux directions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}^T(r, \theta, z, t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y})^T e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} e^{st} \\ \quad \quad \quad = \tilde{\mathbf{X}}^T(r) e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} e^{st}, \\ \mathbf{Y}^T(r, \theta, z, t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{p})^T e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} e^{st} \\ \quad \quad \quad = \tilde{\mathbf{Y}}^T(r) e^{-i(\omega t + m\theta + kz)} e^{st}, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

avec m et k les nombres d'onde azimutal et axial, ω la pulsation et s le taux d'amplification de la perturbation. Les fonctions $\tilde{\cdot}$ dépendent exclusivement du rayon r .

Le système différentiel d'Eckart dimensionnel s'écrit

$$K_X \tilde{\mathbf{X}} = 0, \quad (2.25)$$

avec

$$K_X = \begin{pmatrix} -i\lambda & -2\frac{V}{r} & 0 & \frac{-1}{RC} \frac{dP}{dr} & \frac{(\gamma-1)}{RC} \frac{dP}{dr} - \frac{dC}{dr} + C \frac{d}{dr} \\ \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} & -i\lambda & 0 & 0 & -C \frac{im}{r} \\ \frac{dW}{dr} & 0 & -i\lambda & 0 & -Cik \\ \frac{CP^{1/\gamma}}{R} \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{P^{1/\gamma}} \right) & 0 & 0 & -i\lambda & 0 \\ \frac{C}{r} + \frac{C}{\gamma P} \frac{dP}{dr} + C \frac{d}{dr} & -C \frac{im}{r} & -Cik & 0 & -i\lambda \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Le système différentiel primitif adimensionnel s'écrit

$$K_Y \tilde{Y} = 0, \quad (2.27)$$

avec

$$K_Y = \begin{pmatrix} -i\lambda R & -2\Omega R & 0 & -r\Omega^2 & \frac{1}{\gamma M^2} \frac{d}{dr} \\ \left(2\Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) R & -i\lambda R & 0 & 0 & \frac{-1}{\gamma M^2} \frac{im}{r} \\ R \frac{dW}{dr} & 0 & -i\lambda R & 0 & \frac{-1}{\gamma M^2} ik \\ \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r} + R \frac{d}{dr} & -R \frac{im}{r} & -Rik & -i\lambda & 0 \\ \frac{dP}{dr} + \frac{\gamma P}{r} + \gamma P \frac{d}{dr} & -\gamma P \frac{im}{r} & -\gamma P ik & 0 & -i\lambda \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Dans les deux cas $\Omega = \frac{V}{r}$ est la vitesse angulaire de rotation et $\lambda = is + \omega + m \frac{V}{r} + kW$. La partie réelle de λ est la pulsation de la perturbation par rapport à l'écoulement porteur.

Dans ces systèmes, la transformation $(k, m) \rightarrow (-k, -m)$ laisse le taux d'amplification inchangé, change le signe de la pulsation ω , et change le mode propre en son complexe conjugué. On peut donc se limiter à l'étude des nombres d'onde azimutaux $m > 0$. De plus, si la valeur propre (ω, s) avec le mode propre associé $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y})^T$ appartient au spectre alors $(\omega, -s)$ appartient aussi au spectre avec pour mode propre associé $(\tilde{u}^*, -\tilde{v}^*, -\tilde{w}^*, -\tilde{x}^*, -\tilde{y}^*)^T$ où * désigne le complexe conjugué. Un champ de base stable est donc au plus neutralement stable.

Les lois régissant le système incompressible sont la continuité et la conservation de la quantité de mouvement dans les trois directions. Le système pour toute

perturbation (u, v, w, p_I) , où $p_I = p/R$, s'écrit

$$\begin{cases} \dot{u} - \frac{2Vv}{r} = -\frac{\partial p_I}{\partial r}, \\ \dot{v} + u \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p_I}{\partial \theta}, \\ \dot{w} + u \frac{dW}{dr} = -\frac{\partial p_I}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

avec les notations du système (2.2).

Par introduction de la forme en modes normaux de la perturbation, le système incompressible s'écrit

$$K_I \tilde{Y}_I = 0, \quad (2.30)$$

avec

$$K_I = \begin{pmatrix} -i\lambda & -\frac{2V}{r} & 0 & \frac{d}{dr} \\ \left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) & -i\lambda & 0 & -\frac{im}{r} \\ \frac{dW}{dr} & 0 & -i\lambda & -ik \\ \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} & -\frac{im}{r} & -ik & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

et les mêmes notations que pour le système compressible en variables primitives.

De même que dans l'étude WKB, on s'intéresse à la stabilité temporelle de l'écoulement. Aussi, les nombres d'onde azimutal (m) et axial (k) sont des paramètres au même titre que le champ porteur. La valeur propre du problème est la pulsation, réelle ou complexe, $\omega + is$. Pour s négatif ou nul, le mode propre associé est stable alors que pour s strictement positif, il est instable, avec un taux d'amplification temporel qui est exactement s .

La seule condition limite imposée est la nullité de la vitesse normale à la paroi. Ceci résulte de la linéarisation des conditions limites pour le système Euler complet, ces conditions étant réduites à la nullité de la vitesse normale instantanée pour une paroi non poreuse [Hir90] (voir aussi Annexe D sur l'absence de condition limite au centre du tube). Cette condition se traduit à la borne par une équation sur la pression où apparaît la valeur propre.

2.3.1 Méthode numérique

Pour la très grande majorité des profils d'écoulement porteur, les systèmes (2.26), (2.28) ou (2.31) ne sont pas solubles analytiquement. Afin de garantir une résolution correcte des modes et valeurs propres tout en évitant des durées de calcul prohibitives, nous avons retenu une méthode spectrale pour la résolution numérique [Ors71].

Pour un coût de programmation marginalement plus élevée, la diminution de l'erreur en fonction du nombre de degré de liberté du système est beaucoup plus élevée qu'avec des méthodes classiques de différences finies. Ainsi, le vecteur inconnu \tilde{Y} est développé à l'ordre N sur une base orthogonale $\{T_j\}_{j=0\dots N}$ selon

$$\tilde{Y}(\tilde{r}) = \sum_{j=0}^N \tilde{Y}_j T_j(\tilde{r}), \quad (2.32)$$

où \tilde{r} appartient au domaine de définition de la base T_j . Déterminer les coordonnées \tilde{Y}_j de \tilde{Y} dans la base T_j (i.e. les $5(N+1)$ ou $4(N+1)$ inconnues du problème selon que l'écoulement est compressible ou incompressible) peut être fait selon différentes variantes. La méthode de Galerkin consiste à choisir une base de fonctions satisfaisant les conditions limites, et à injecter l'expression (2.32) dans le système différentiel. On exige que cette forme soit orthogonale à chacune des fonctions de base, ce qui nous fournit $5(N+1)$ (ou $4(N+1)$) équations. Suit la résolution d'un système, procédure commune à toutes les méthodes présentées ici. Dans notre cas, la présence de la valeur propre du problème dans les conditions limites rend cette méthode impraticable. Présenté dans [Ors71], la méthode tau consiste à imposer le système différentiel pour les bases fréquences du développement et à exiger la seule satisfaction des conditions limites pour les hautes fréquences, ceci afin d'égaliser le nombre d'inconnues. Les méthodes de Galerkin et tau requièrent l'évaluation numérique des intégrales assurant l'orthogonalité de la solution. Cette évaluation est à reprendre pour chaque champ de base. Une méthode plus simple [Boy78] consiste à directement satisfaire exactement le système différentiel sur un ensemble de points appelés points de collocation. Nous avons retenu cette méthode. L'emploi de grilles staggered [MSH88] (pour lesquelles les points de collocation où sont exactement satisfaites les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'isotropie diffèrent des points où est satisfaite l'équation de la continuité) a été exclu car la légère amélioration de convergence ne justifie pas les difficultés de programmation (notamment la nécessité de matrices d'interpolation entre les deux séries de points de collocation) par rapport à une grille non staggered [Kho91a].

Quelle que soit la méthode retenue, il est important de noter que le choix de la base est crucial pour la rapidité de convergence de la méthode. En particulier, il n'est pas judicieux de choisir une base dite "physique". Une telle base est par exemple une base de modes incompressibles, connue dans les cas de rotation solide et tourbillon libre pour notre géométrie [LR98]. Orszag [Ors71] a en effet montré que dans le cas de l'équation de Orr-Sommerfeld, et en supposant que la solution est infiniment dérivable, utiliser des polynômes de Tchebyshev autorise une convergence d'ordre infini, au sens où l'erreur décroît plus vite que toute puissance de $1/N$ quand $N \rightarrow \infty$. Pour le même problème, le choix de bases "physiques" donne une convergence en $1/N^4$ ou $1/N^5$.

Nous avons donc choisi de travailler avec la base des polynômes de Tchebyshev,

définis pour $j = 0, \dots, N$ par

$$\begin{aligned} T_j &: [-1 : 1] \longrightarrow [-1 : 1] \\ \tilde{r} &\longmapsto \cos(j \arccos(\tilde{r})) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dans la mesure où le système différentiel (2.28) n'est pas défini en 0, on ne peut pas placer de point de collocation en ce point [KMA89, PO91]. La résolution sur $[-R; R]$ avec un nombre pair de points de collocation (et donc de polynômes de Tchebyshev) n'est possible qu'avec un traitement particulier, en joignant un intervalle radial $[0; R]$ à un angle θ à un autre intervalle radial $[0; R]$ à un angle $\theta + \pi$ avec $\theta \in [0; \pi]$. La simple prolongation à un intervalle $[-R; R]$ et l'utilisation des symétries de la solution en fonction du nombre d'onde azimutal donne le bon spectre mais les modes propres présentent une discontinuité de leur dérivée en 0. Il est plus simple de résoudre sur l'intervalle $]0; R]$. Suivant [CHQZ88] aucune condition limite n'est imposée à proximité du centre. Dans l'Annexe D, nous avons montré par un développement de Taylor que pour des taux d'amplification (ou d'amortissement) non nuls, le système différentiel satisfait naturellement les conditions limites géométriques au centre. Il ne nous a pas été possible de trouver de justification pour les cas neutralement stable. Néanmoins, la vérification a posteriori des résultats n'a pas fait apparaître de problèmes.

Pour passer de l'espace physique $]0; R]$ au domaine de définition des polynômes de Tchebyshev, on applique la transformation conforme \mathcal{T}

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:]0 : 1] \longrightarrow [-1 : 1] \\ r &\longmapsto \tilde{r} = 2r - 1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

La discrétisation est achevée par le choix de $N + 1$ points de collocation où le système différentiel est satisfait exactement. La dérivée des polynômes de Tchebyshev est directement évaluée numériquement en ces points. Le point $\tilde{r} = 1$, correspondant à $r = 0$, est simplement exclu par le choix des points de Gauss-Radau définis selon

$$\tilde{r}_l = \cos\left(\frac{2\pi l}{2N + 1}\right), \quad l = 0, \dots, N. \quad (2.35)$$

Ce choix de points présente en outre l'avantage de resserrer l'intervalle entre les points de discrétisation à proximité des bornes. L'équation résolue à la paroi tient compte de la condition limite $u = 0$.

À l'issue de cette procédure, on obtient un problème discret aux valeurs propres écrit sous forme matricielle

$$A \tilde{Y} = (s + i\omega) B \tilde{Y}. \quad (2.36)$$

Pour résoudre ce système algébrique aux valeurs propres, l'utilisation d'une méthode de tir a été exclue. D'un coût faible, cette méthode itérative consistant à supposer une

valeur propre initiale, à calculer le déterminant du système et à réajuster la valeur, voit son efficacité conditionnée par le choix initial de $s + i\omega$ [Boy78]. L'emploi d'une méthode QZ de résolution de problème généralisé aux valeurs propres complexes a été préféré. Les modes propres peuvent être reconstruits aisément en introduisant les coefficients \check{Y}_j des vecteurs propres dans la définition (2.32). Dans la mesure où le vecteur propre est défini à une constante multiplicative près, nous avons choisi de normaliser la perturbation de telle sorte que le maximum de la partie réelle de la fluctuation de vitesse radiale soit égal à 1. Il est à noter que l'on ne peut ainsi examiner des déphasages ou différences d'amplitude qu'entre les perturbations et *non* par rapport au champ de base. Par ailleurs, la recherche des modes propres ne permet pas de résoudre un problème aux valeurs initiales car il n'y a de résultat sur l'existence d'une base de modes propres dans les cas instables.

2.3.2 Validation par des cas incompressibles

Dans un souci de validation du code, nous avons d'abord réalisé des calculs spectraux incompressibles, pour lesquels des cas bien documentés avec éventuellement des contreparties analytiques existent. En outre, ceci nous a offert une base de comparaison pour les cas compressibles finalement considérés. Les deux cas présentés ici correspondent aux ondes de Kelvin d'une part et au critère incompressible de Rayleigh d'autre part.

2.3.2.1 Ondes inertielles de Kelvin

Nous considérons une colonne cylindrique de fluide incompressible en rotation solide. Elle n'est animée d'aucun mouvement porteur axial. Le critère suffisant d'instabilité WKB (2.18), considéré à la limite incompressible, n'est jamais satisfait. De plus, Chandrasekhar [Cha61] montre que ce champ porteur est stable ($s = 0$) et que la relation de dispersion entre ω , pulsation réelle, et k est une fonction semi-analytique du nombre d'onde azimutal m . Nous sommes dans le cas où nous n'avons pas pu prouver analytiquement la dégénérescence naturelle du système différentiel vers les conditions limites géométriques au centre du tube (Annexe D). Ce cas nous permet donc de vérifier la validité de notre méthode numérique et illustre la stabilité de la rotation solide incompressible.

Nous avons pour le calcul utilisé quarante polynômes de Tchebyshev. Un nombre plus grand n'a pas changé la résolution de nos résultats (à 10^{-8} près) pour la pulsation. Le taux d'amplification a toujours été nul, avec la même précision. Sur la figure (2.2), nous avons donc exclusivement tracé l'évolution de la pulsation des modes propres en fonction du nombre d'onde axial à nombre azimutal fixé. Elle est parfaitement en accord avec le résultat de [Cha61].

Dans ce cas stable, la colonne de fluide oscille à une fréquence comprise entre $-m - 2$ et $-m + 2$. À nombre d'onde axial infini, la pulsation de la perturbation

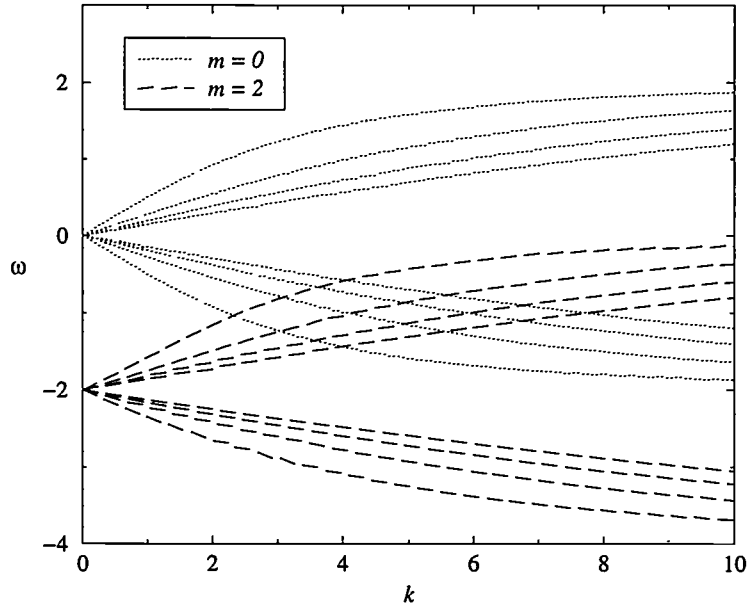


FIG. 2.2 – Pulsation des ondes de Kelvin en fonction du nombre d'onde axial k pour une perturbation axisymétrique ($m = 0$) et une perturbation de nombre d'onde $m = 2$

par rapport à l'écoulement porteur est ± 2 . Ce comportement est différent des cas instables exposés par la suite ou mentionnés par Leibovich et Stewartson [LS83] en incompressible.

2.3.2.2 Critère incompressible de Rayleigh

Considérons maintenant une colonne de fluide sans mouvement axial ($W = W' = 0$) animée d'un mouvement de rotation quelconque soumise à des perturbations axisymétriques ($m = 0$). Le critère d'autonomie (2.6) s'écrit avec la perturbation en modes normaux

$$\left(-V' + \frac{V}{r}\right) \frac{m}{r} - W'k = 0. \quad (2.37)$$

Sa forme est identique que l'on soit dans le cas incompressible ou dans le cas compressible.

Pour des perturbations axisymétriques, il est satisfait ici en tout rayon. Alors le critère suffisant d'instabilité (2.13) dégénéré à la limite incompressible indique que sont instables les champs porteurs vérifiant

$$\frac{2\bar{V}}{\bar{r}} \left(\bar{V}' + \frac{\bar{V}}{\bar{r}}\right) < 0. \quad (2.38)$$

Ceci est exactement le critère de Rayleigh, traitant de la stabilité des instabilités centrifuges.

Lord Rayleigh démontre [Ray20] ce critère grâce à un argument de conservation de moment angulaire. Il travaille avec le système des équations non linéarisées. Les variables considérées sont la somme du champ de base et de la perturbation. Pour un écoulement incompressible non visqueux axisymétrique purement azimutal soumis à des perturbations axisymétriques, la conservation de la quantité de mouvement non linéarisée selon θ s'écrit $\frac{d}{dt}(rV) = 0$. Le moment angulaire $L = r^2\Omega$ est donc conservé pour une particule fluide. Le mouvement dans la direction r est soumis à l'action équivalente d'une force centrifuge $V^2/r = L^2/r^3$, à laquelle correspond l'énergie potentielle centrifuge $\rho L^2/(2r^2)$. Lors de l'échange de deux anneaux de fluide de même masse dm situés en r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$), chacun des deux conserve son moment angulaire initial, respectivement L_1 et L_2 . Le changement d'énergie potentielle résultant d'un tel échange s'écrit

$$\frac{dm}{2} \left(\left(\frac{L_1^2}{r_2^2} + \frac{L_2^2}{r_1^2} \right) - \left(\frac{L_2^2}{r_2^2} + \frac{L_1^2}{r_1^2} \right) \right) = \frac{dm}{2} (L_2^2 - L_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right). \quad (2.39)$$

Si pour tous les rayons L_2^2 est supérieur à L_1^2 , l'échange ne peut pas se faire sans une source d'énergie : la distribution monotonement croissante de L^2 est donc stable. Au contraire, l'échange résulte en une énergie potentielle centrifuge moindre si et seulement si le carré du moment angulaire décroît quelque part dans le domaine fluide, i.e. :

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d(r^4\Omega^2)}{dr} < 0. \quad (2.40)$$

Les résultats ne sont pas présentés ici mais conjointement avec leur contrepartie compressible. Ils ont été confrontés aux travaux de Bayly [Bay88] permettant de trouver analytiquement les valeurs propres les plus amplifiées ainsi que la forme des modes propres associés. Avec cinquante polynômes de Tchebyshev, l'accord est excellent pour les valeurs propres. L'obtention des modes propres sans oscillations parasites, notamment au centre du tube, nécessite quatre-vingt-dix polynômes, alors qu'entre cinquante et quatre-vingt-dix polynômes, la valeur propre évolue de l'ordre de 10^{-8} .

Pour tous les cas subséquents le nombre de polynômes a été élevé jusqu'à ce que les modes propres n'évoluent plus. Ceci requiert environ cent polynômes. De plus, afin de distinguer les valeurs propres purement numériques (qui de toutes façons sont très souvent grandes de manière aberrante), les calculs ont systématiquement été menés à deux résolutions différentes mais proches en nombre de polynômes. Seules les valeurs communes aux deux calculs appartiennent au spectre de l'opérateur.

2.4 Cas compressibles

Les champs porteurs envisagés ici sont tous compressibles. Les premiers d'entre eux (critère compressible de Rayleigh 2.4.1, rotation solide compressible avec vitesse

axiale uniforme 2.4.2) nous permettent d'examiner l'influence de la compressibilité sur la stabilité. Une deuxième série de cas tend à mettre en évidence l'importance de la condition d'autonomie. Elle comprend le cas de la rotation solide avec vitesse axiale en cloche (2.4.3), celui de la rotation solide avec vitesse axiale parabolique (2.4.4) et finalement un cas avec vitesse azimutale identique au profil utilisé pour le critère compressible de Rayleigh et une vitesse axiale en cloche (2.4.5).

2.4.1 Critère compressible de Rayleigh

Nous désignons sous ce terme un champ porteur satisfaisant le critère (2.13), que nous rappelons ici sous sa forme adimensionnelle

$$-\sigma^2(r) = \frac{V^2}{r} \left(\frac{R'}{R} - M^2 \frac{V^2}{rC^2} \right) + \frac{2V}{r} \left(V' + \frac{V}{r} \right) < 0, \quad (2.41)$$

où les quantités adimensionnelles sont notées sans barre dans le souci d'alléger les notations. Dans le membre de droite, le second terme correspond au discriminant de Rayleigh et caractérise une instabilité centrifuge. Le premier terme représente la correction compressible, fonction du nombre de Mach : un gradient d'entropie positif du champ porteur a un effet déstabilisant.

Comme dans la démonstration initiale de Rayleigh, nous nous limiterons à des instabilités axisymétriques. En revanche, l'hypothèse de vitesse axiale nulle sera remplacée par une hypothèse de vitesse constante. Mais par transformation galiléenne, on montre que ceci ne change pas les propriétés de stabilité de l'écoulement. Le critère d'autonomie (2.37) est satisfait en tout rayon.

Nous avons choisi de considérer deux familles de champs porteurs, toutes deux paramétrées par le nombre de Mach de référence. Pour la famille B le taux d'amplification WKB maximal, σ_0 , est atteint à la Borne (i.e. au mur) alors que pour la famille I, σ_0 est atteint à l'Intérieur du domaine. Conformément aux développements de Rayleigh-Jansen pour les petits nombres de Mach, les champs de vitesse ont été choisis indépendants du nombre de Mach (i.e. ce sont aussi les champs incompressibles). Le paramétrage en nombre de Mach est introduit via la masse volumique porteuse. Pour faciliter l'intégration de la pression, la masse volumique est choisie égale à une constante à laquelle on ajoute une fonction exponentielle multipliée par le nombre de Mach au carré. La pression est intégrée analytiquement en fonction de la masse volumique et de la vitesse azimutale pour satisfaire l'équilibre radial. Pour un nombre de Mach $M = 0.1$, les champs porteurs représentant les familles B et I sont tracés figures (2.3) et (2.4). Le profil (en fonction du rayon) du taux d'amplification WKB associé est représenté figure (2.5) pour les deux familles.

Pour chacune des deux familles de champ porteur, des calculs en modes normaux ont été conduits. Sur la figure (2.6) est tracée l'évolution du taux d'amplification des modes normaux, noté s , en fonction du nombre d'onde axial pour un nombre de

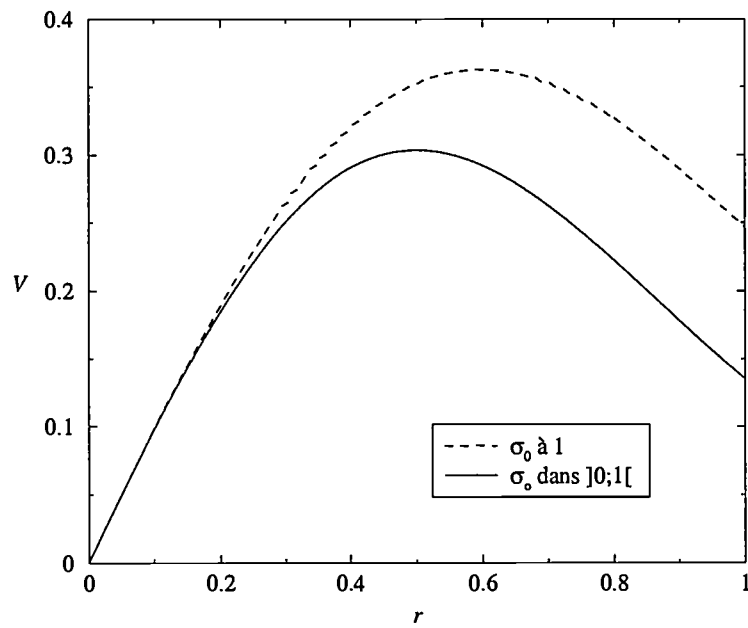


FIG. 2.3 – Critère compressible de Rayleigh : Vitesse azimutale porteuse pour un nombre de Mach $M = 0.1$, pour la famille B (maximum du taux d'amplification WKB à la Borne) et la famille I (maximum du taux d'amplification WKB à l'Intérieur)

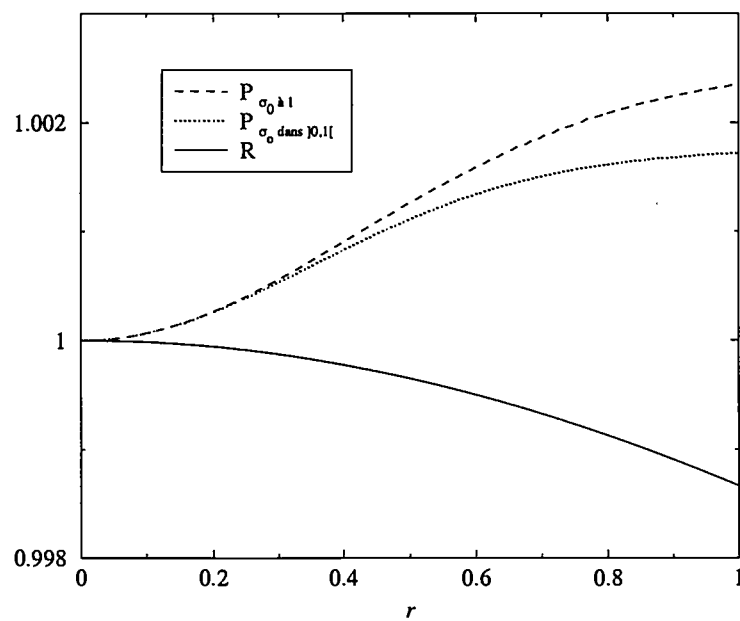


FIG. 2.4 – Critère compressible de Rayleigh : Pression porteuse et masse volumique porteuse pour un nombre de Mach $M = 0.1$, pour la famille B et la famille I

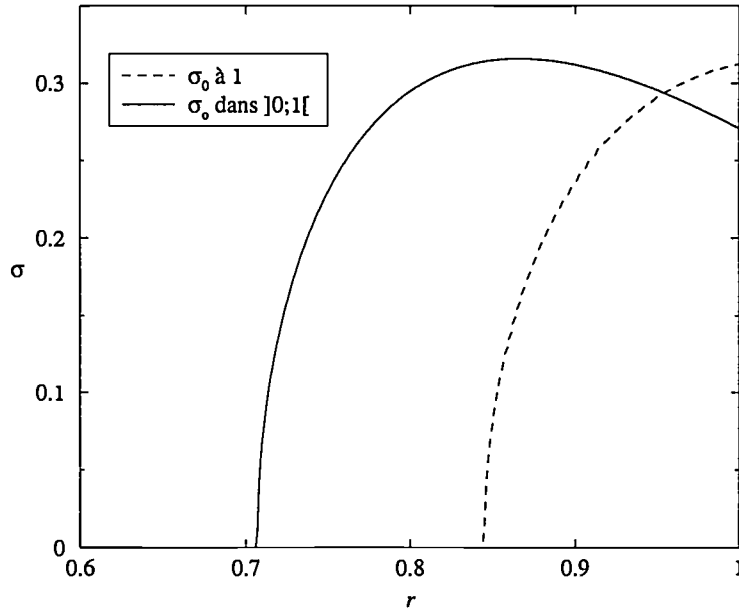


FIG. 2.5 – Critère compressible de Rayleigh : Taux d'amplification WKB pour un nombre de Mach $M = 0.1$, pour la famille B et la famille I

Mach $M = 0.1$, pour la famille B. Le même comportement de croissance monotone est observé pour la famille I. Quand le nombre d'onde axial tend vers l'infini, le taux d'amplification des modes normaux tend vers σ_0 , maximum (sur l'ensemble des rayons) du taux d'amplification WKB. Ceci est valable pour les deux familles et à tout nombre de Mach. Ce résultat est en accord avec le taux de croissance énergétique déterminé à l'aide de l'intégrale de Laplace.

Par ailleurs, pour des nombres d'onde axiaux croissants, les modes propres (par exemple la perturbation de vitesse radiale, tracée figure (2.7)) sont de moins en moins spatialement étendus et se centrent au rayon où le taux WKB maximal est atteint. Dans le cas d'un maximum à la borne, les modes viennent s'écraser contre la paroi. De plus, la pulsation réelle de la perturbation, ω , est toujours telle que $\Re(\lambda) = \omega + Wk$ soit nulle.

Ce comportement est analogue à celui observé pour un écoulement incompressible satisfaisant le critère incompressible de Rayleigh. Dans ce cas, Bayly [Bay88] a montré analytiquement la concordance entre l'approche WKB et l'approche en modes normaux aux grands nombres d'onde. Nous avons repris le même principe de démonstration et étendu ses résultats au cas compressible [LL99].

En particulierisant le système en modes normaux (2.26) au cas axisymétrique, on

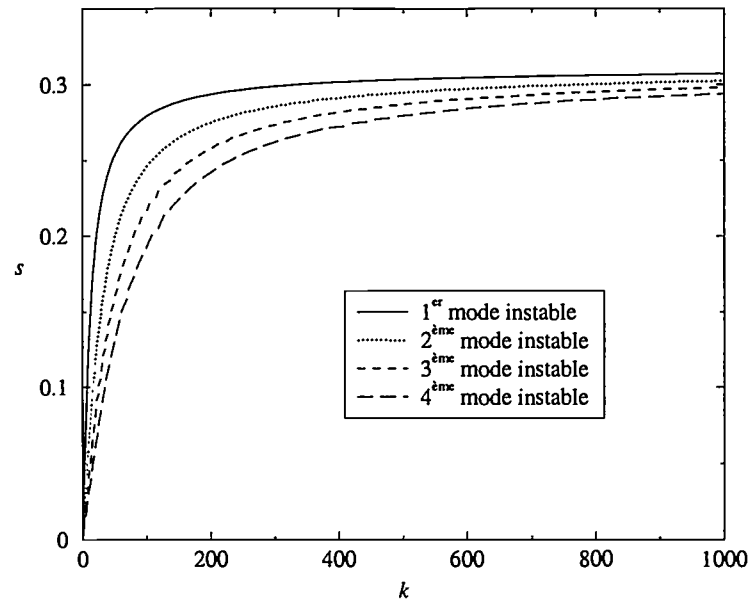


FIG. 2.6 – Critère compressible de Rayleigh : Taux d’amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 0.1$, pour la famille B

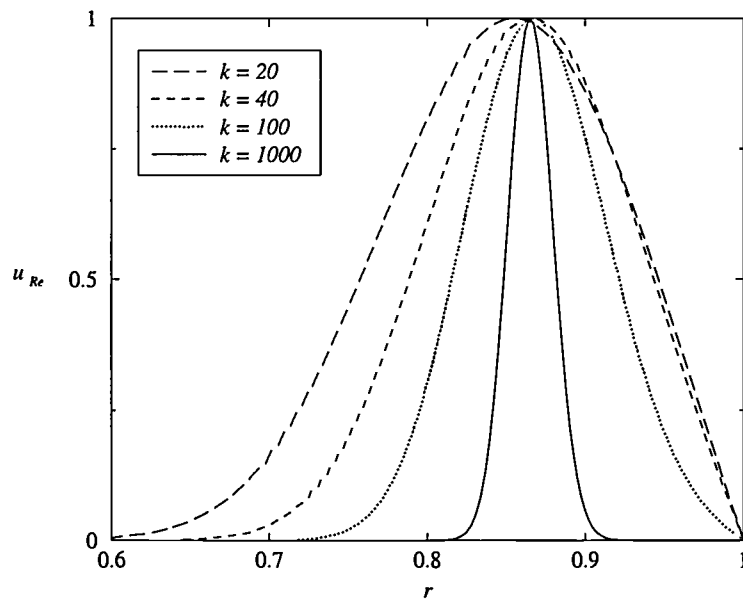


FIG. 2.7 – Critère compressible de Rayleigh : Perturbation de vitesse radiale du mode le plus amplifié pour un nombre de Mach $M = 0.3$ et différentes valeurs du nombre d’onde axial k , pour la famille I

montre que la vitesse radiale et la pression d'Eckart \tilde{y} satisfont

$$\begin{cases} [\lambda^2 + \sigma^2(r)] \tilde{u} + i\lambda \left[\left(\frac{V^2}{rC} \left(\frac{\gamma}{2} - 1 \right) + \frac{CR'}{2R} \right) \tilde{y} + C \frac{d\tilde{y}}{dr} \right] = 0, \\ \lambda \left[\left(\frac{C}{r} + \frac{V^2}{rC} \right) \tilde{u} + C \frac{d\tilde{u}}{dr} \right] + i [C^2 k^2 - \lambda^2] \tilde{y} = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Nous considérons le comportement de ce système à grands nombres d'onde ($k \rightarrow \infty$) et en réalisons un développement autour du rayon r_0 où est atteint σ_0 . Afin de satisfaire le principe d'équilibre des ordres dominants (en puissance de k), il est nécessaire que $\omega + kW$ soit nul et que les variables de (2.42) soient développées selon les ordres indiqués ci-dessous, plus des termes en $1/k$ d'ordre supérieur :

$$\begin{cases} s = -i\lambda = \sigma_0 - \frac{S}{k}, \\ \tilde{u} = \mathcal{U}(\eta), \\ \tilde{y} = \frac{1}{k^{3/2}} \mathcal{Y}(\eta), \\ \eta = (r - r_0) k^{1/2}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Cette forme de développement est en accord avec le développement WKB pour lequel la pression d'Eckart est nulle à l'ordre dominant et n'intervient au plus qu'à l'ordre ε , correspondant à $1/k$.

Ici, nous supposons que le maximum σ_0 de σ est atteint au rayon r_0 à l'intérieur du domaine et que sa dérivée seconde en ce point est non nulle. On a alors σ_0'' négative et le taux d'amplification WKB satisfait

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \frac{\sigma_0 \sigma_0'' \eta^2}{k} + \dots \quad (2.44)$$

L'ordre dominant de (2.42) régissant \mathcal{U} et \mathcal{Y} s'écrit alors

$$\begin{cases} (-2S - \sigma_0'' \eta^2) \mathcal{U}(\eta) + C_0 \mathcal{Y}'(\eta) = 0, \\ \sigma_0 \mathcal{U}'(\eta) + C_0 \mathcal{Y}(\eta) = 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

avec $C_0 = C(r_0)$. Ceci peut être réduit en une seule équation pour \mathcal{U} :

$$\left(2 \frac{S}{\sigma_0} + \eta^2 \frac{\sigma_0''}{\sigma_0} \right) \mathcal{U}(\eta) + \mathcal{U}''(\eta) = 0. \quad (2.46)$$

Cette équation est l'équation de l'oscillateur quantique harmonique dont les solutions analytiques sont données par Bender et Orszag [BO78]. En notant H_n le polynôme d'ordre n de Hermite ($H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 1 - x$, ...) et $\mathcal{A} = (-4\sigma_0''/\sigma_0)^{1/4}$, le $n^{\text{ième}}$ mode le plus amplifié présente la valeur propre et le mode propre associés suivants :

$$\begin{cases} S = (-\sigma_0 \sigma_0'')^{1/2} (n + 1/2), \\ \mathcal{U}(\eta) = \exp(-(\mathcal{A}\eta)^2/4) H_n(\mathcal{A}\eta). \end{cases} \quad (2.47)$$

L'écart de taux d'amplification entre mode n et $n + 1$ est constant à nombre d'onde fixé. À nombre d'onde croissant, il diminue jusqu'à atteindre une répartition de spectre continu. La pression de Eckart $\mathcal{Y}(\eta)$ suit

$$\mathcal{Y}(\eta) = \frac{-\sigma_0}{C_0} \mathcal{U}'(\eta) . \quad (2.48)$$

Les autres variables sont aisément déduites de \mathcal{U} , \mathcal{Y} à partir de (2.26) particularisé pour des perturbations axisymétriques :

$$\begin{cases} \tilde{v} &= - \left(\frac{dV}{dr} + V' \right) \frac{\mathcal{U}}{\sigma_0} , \\ \tilde{x} &= \frac{-C}{\sigma_0} \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{R}{P^{1/\gamma}} \right) \mathcal{U} , \\ \tilde{w} &= \frac{iC}{\sigma_0 k^{1/2}} \mathcal{Y} . \end{cases} \quad (2.49)$$

Ces relations sont identiques à celles pour le vecteur propre de D (équation (2.8)) associé à la valeur propre $+\sigma_0$. En effet, pour des perturbations axisymétriques ($k_\theta = 0$), celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} a_\theta &= - \left(\frac{dV}{dr} + V' \right) \frac{a_r}{\sigma_0} , \\ b &= \frac{-1}{\sigma_0} \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{R}{P^{1/\gamma}} \right) a_r , \\ a_w &\in \mathbb{R} . \end{cases} \quad (2.50)$$

L'absence du facteur C dans la deuxième équation apparaît en raison de la définition de \mathbf{a} et b (1.22). La pression n'apparaît pas dans ces relations car la théorie WKB la prédit nulle à l'ordre dominant. Le couplage entre perturbation de pression et perturbation de vitesse axiale est donc aussi supprimé.

Le résultat analytique en modes normaux pour les grands nombres d'onde a été comparé avec nos calculs. Sur la figure (2.8) est représentée la différence entre le taux d'amplification des modes normaux s et le taux d'amplification WKB σ_0 . Elle est comparée à l'expression théorique \mathcal{S}/k . Les deux sont en excellent accord pour des nombres d'onde $k \gg 1$. L'accord est d'autant meilleur que l'on considère des modes plus amplifiés et des nombres d'onde élevés.

Les modes propres les plus amplifiés de la perturbation de vitesse radiale u sont tracés figure (2.9) et se superposent à l'expression théorique \mathcal{U} (2.47).

De plus, on peut formellement relier ces résultats au comportement incompressible. Sous l'hypothèse de petit Mach, on peut développer les variables perturbées sous la forme

$$(\mathbf{u}, \varrho, p) = (\mathbf{u}_0, \varrho_0, p_0) + M^2(\mathbf{u}_1, \varrho_1, p_1) + \dots , \quad (2.51)$$

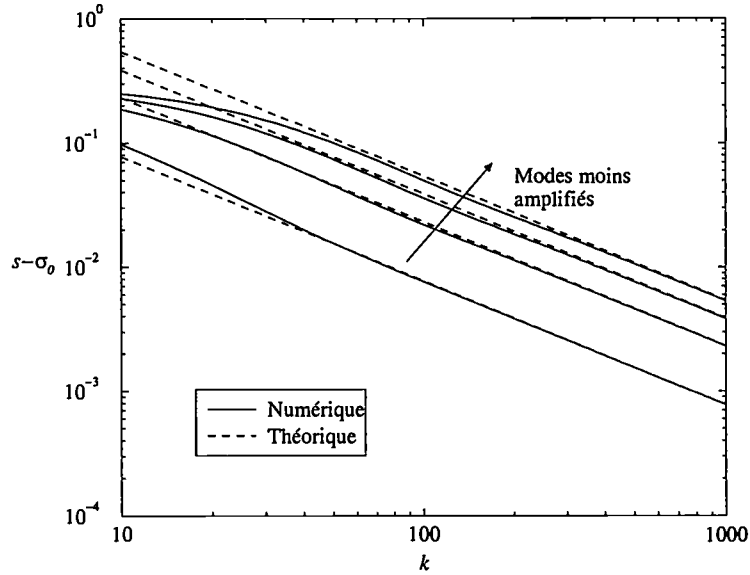


FIG. 2.8 – Critère compressible de Rayleigh : Corrections numérique ($s - \sigma_0$) et analytique (S/k) entre le taux d'amplification des modes normaux et le taux d'amplification WKB, pour un nombre de Mach $M = 0.1$, pour la famille I

et montrer que $p_0 = \varrho_0 = 0$. Alors le système régissant l'ordre dominant $_0$ du développement s'écrit

$$\begin{cases} D_t \mathbf{u}_0 + \mathbf{L} \mathbf{u}_0 + \nabla \left(\frac{p_1}{\gamma M^2} \right) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Ceci est identique au système incompressible

$$\begin{cases} D_t \mathbf{u}_I + \mathbf{L} \mathbf{u}_I + \nabla p_I = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_I = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

portant sur (\mathbf{u}_I, p_I) en posant $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_0$ et $p_I = p_1/(\gamma M^2)$. Ces relations sont très bien satisfaites jusqu'à $M = 0.3$ et l'évolution de la pression en fonction du nombre de Mach est tracée, pour un nombre d'onde donné, figure (2.10). Il est à noter que les relations (2.53) restent valables pour toute forme de perturbation, en particulier pour des perturbations non axisymétriques.

Ainsi, aux faibles nombres de Mach et pour un écoulement non visqueux, on peut déduire le comportement exact de la perturbation compressible à partir de celui de la perturbation incompressible, sous l'hypothèse que la compressibilité intervient seulement via la densité (et donc via le gradient de pression) et laisse le champ de vitesse inchangé. Une instabilité incompressible implique l'instabilité compressible à faible nombre de Mach. Il est donc intéressant de considérer désormais des champs porteurs stables en incompressible et éventuellement instables en compressibles. C'est

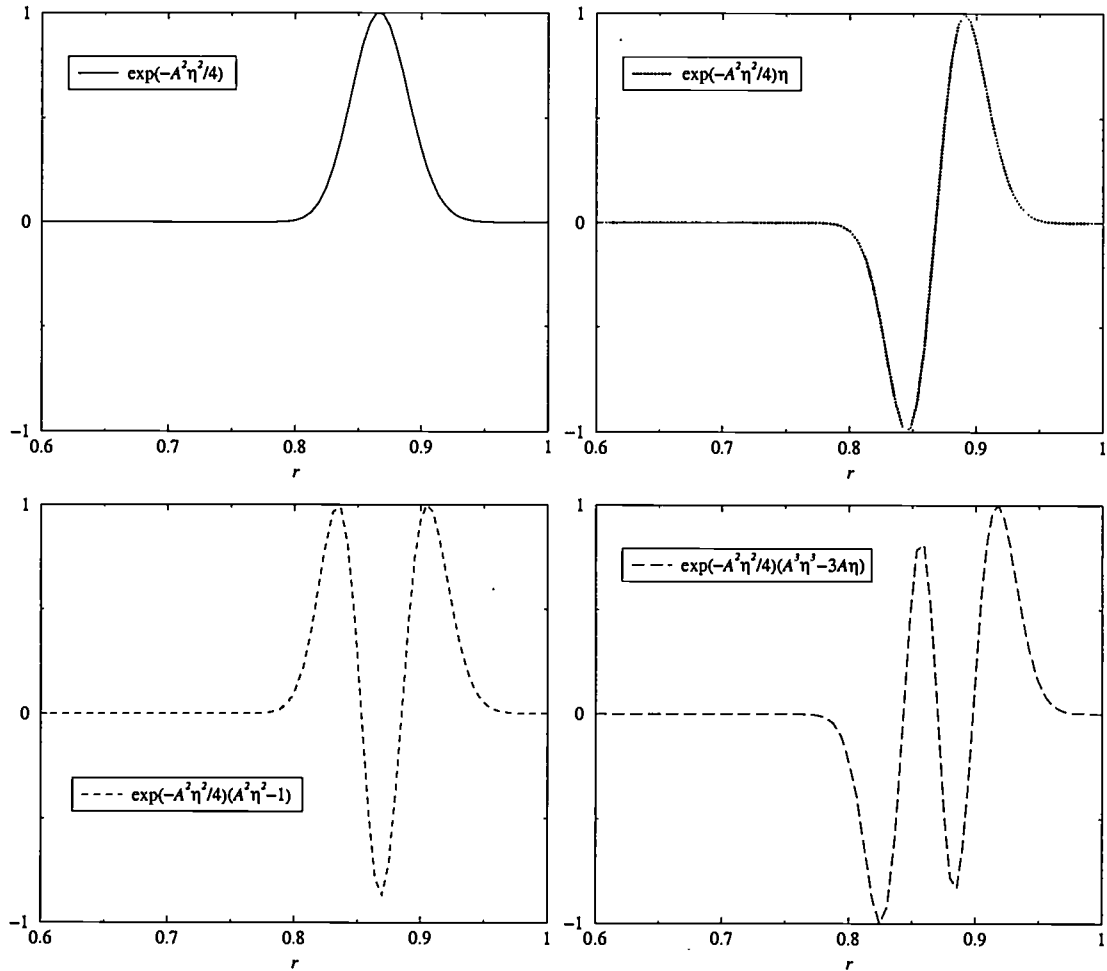


FIG. 2.9 – Critère compressible de Rayleigh : Perturbation de vitesse radiale des quatre modes les plus amplifiés pour un nombre de Mach $M = 0.3$ et un nombre d'onde axial $k = 400$ fixé, pour la famille I. Le résultat du calcul numérique et la forme analytique (2.47) sont superposés

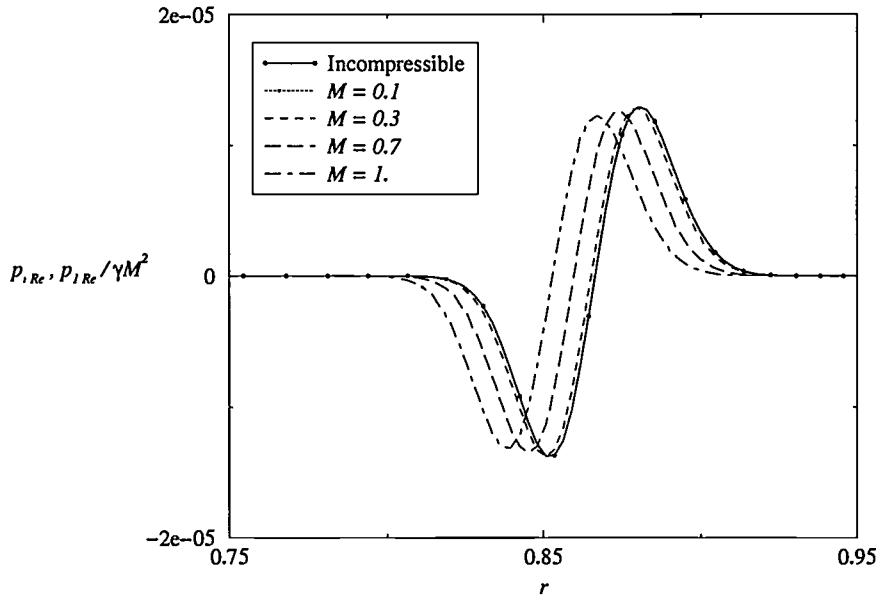


FIG. 2.10 – Critère compressible de Rayleigh : Partie réelle de la perturbation de pression du mode propre le plus amplifié pour différents nombres de Mach et un nombre d'onde axial fixé $k = 1000$. Les courbes tracées sont p_I dans le cas incompressible et $p_1/(\gamma M^2)$ dans les cas compressibles

le cas par exemple de la rotation solide superposée à une vitesse axiale uniforme ou nulle.

2.4.2 Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme

Nous avons aussi choisi d'examiner en détails ce cas car il apparaît comme un cas particulier dans l'établissement de conditions suffisantes d'instabilité par la méthode WKB. Pour la rotation solide associée à une vitesse axiale de dérivée nulle, le critère d'autonomie est satisfait en tout rayon. Le taux d'amplification WKB dépend en revanche explicitement des nombres d'onde axial et azimuthal selon :

$$-\sigma^2(r) = \Omega^2 r \left(\frac{R'}{R} - \frac{\Omega^2 r}{C^2} \right) + 4\Omega^2 \frac{\beta^2 r^2}{1 + \beta^2 r^2} < 0, \quad (2.54)$$

avec $\beta = k/m$.

L'influence de la compressibilité sur la rotation solide est examinée via un paramétrage du champ porteur par le nombre de Mach de référence. De même que dans le cas du critère de Rayleigh compressible, nous avons introduit cette dépendance via la masse volumique et intégré analytiquement la pression. Pour un nombre de Mach $M = 0.3$, la pression porteuse et la masse volumique porteuse sont représentées figure (2.11).

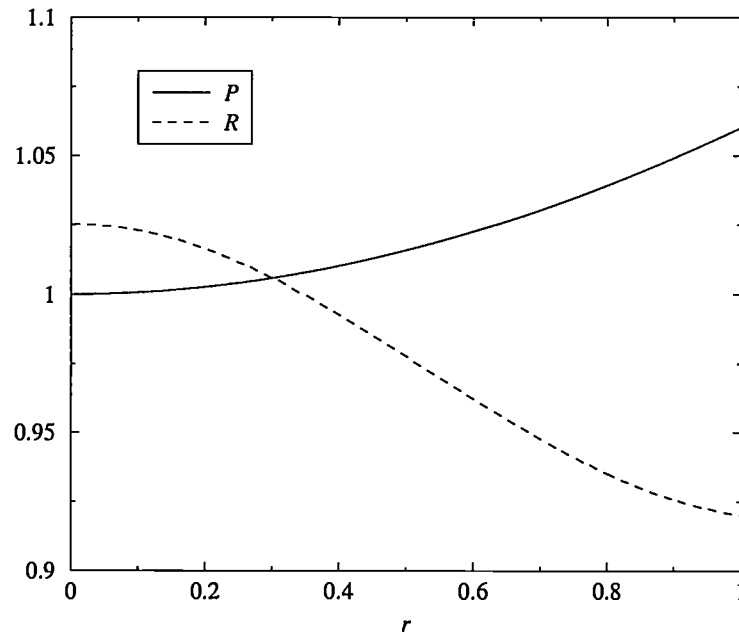


FIG. 2.11 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Champ porteur de pression et masse volumique pour un nombre de Mach $M = 0.3$

Nous avons conduit des calculs en modes normaux sur de tels champs en balayant le plan (k, m) . L'évolution du taux d'amplification en fonction du nombre de Mach est représentée successivement pour les nombres de Mach $M = 0.1$, $M = 0.3$ et $M = 1$. sur les figures (2.12), (2.13) et (2.14). Il est à noter que les échelles des axes k et s sont différentes dans les trois cas. Pour un $\beta = k/m$ donné, le taux d'amplification des modes normaux tend vers le taux d'amplification WKB à tout nombre de Mach. Le très bon accord est montré explicitement figure (2.15) où les taux d'amplification WKB et modes normaux sont tracés en fonction du nombre d'onde azimutal pour un nombre d'onde axial donné. De même que noté par Broadbent [Bro84] et Sozou [Soz87a] dans le cas d'un tourbillon de Rankine d'extension radiale infinie, les perturbations tridimensionnelles sont moins instables que les perturbations planes. De plus, des perturbations de nombre d'onde suffisamment élevé (i.e. pour $k > k_c$) peuvent être stables. En accord avec (2.16) la valeur de k_c varie linéairement avec m .

Lorsque le nombre de Mach diminue, le taux d'amplification maximal (WKB ou modes normaux, de manière équivalente) diminue jusqu'à atteindre la stabilité neutre de la rotation solide incompressible en même temps que l'angle du cône d'instabilité se réduit. Les perturbations les plus dangereuses sont les perturbations planes.

Concernant les propriétés de symétries du spectre, le changement $(k, m) \rightarrow (-k, m)$ traduit un léger effet déstabilisant d'une hélicité négative. Cet effet disparaît

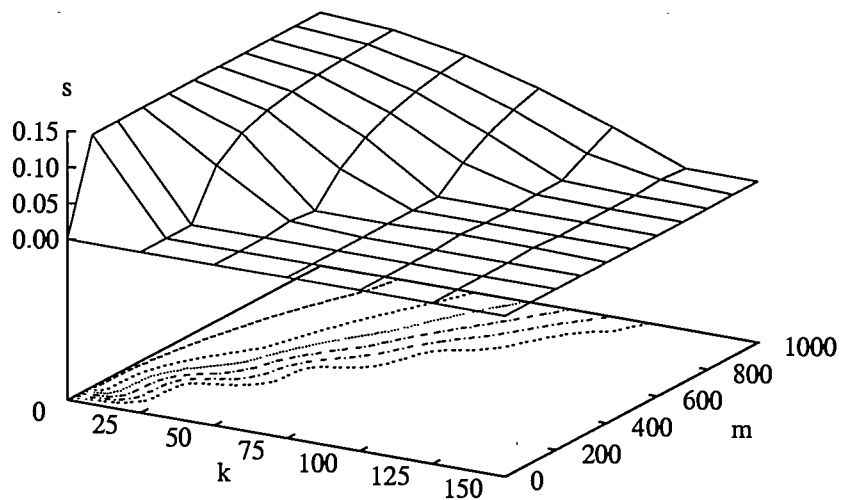


FIG. 2.12 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 0.1$

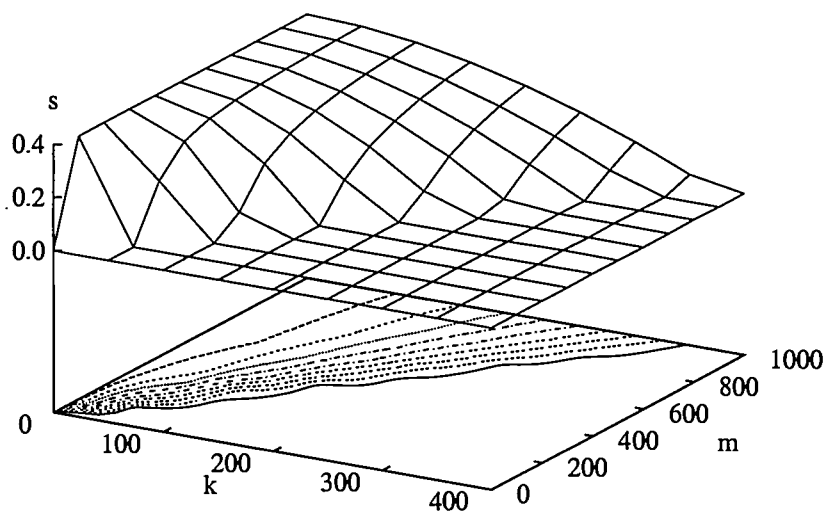


FIG. 2.13 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 0.3$

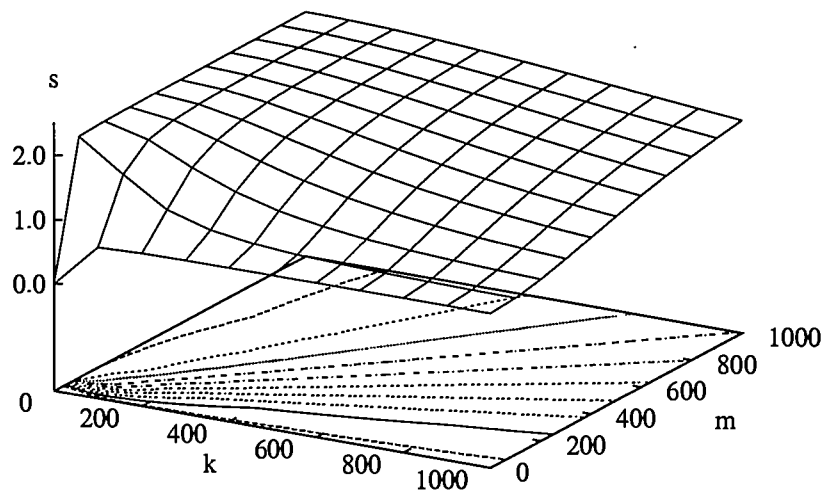


FIG. 2.14 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$.

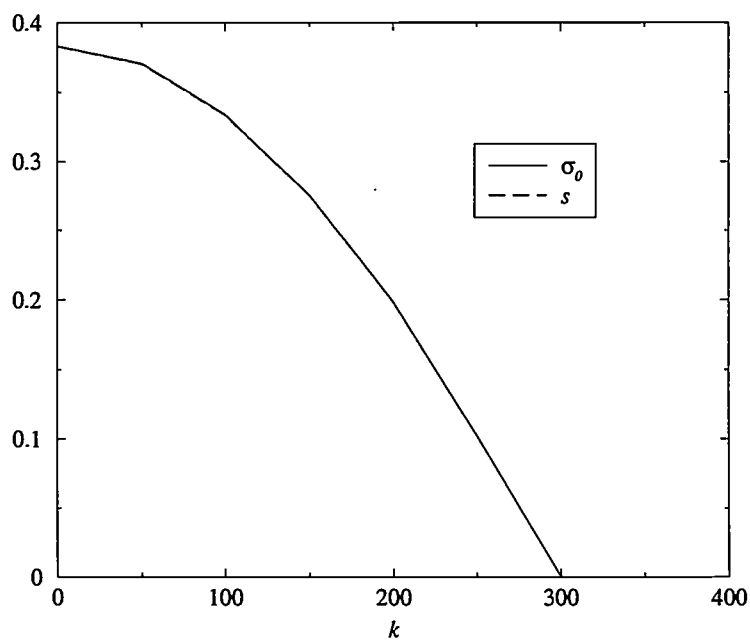


FIG. 2.15 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Taux d'amplification WKB et modes normaux en fonction du nombre d'onde axial k pour un nombre d'onde azimutal $m = 800$ donné et un nombre de Mach $M = 0.3$

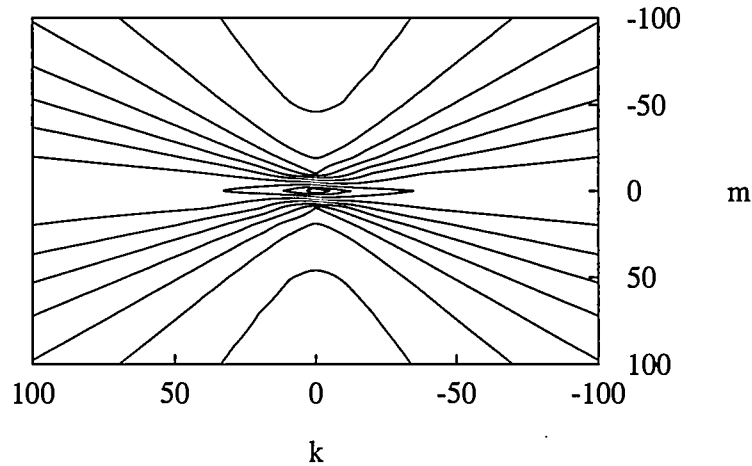


FIG. 2.16 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$. Les isovalues sont tracés en incréments de 0.2 avec 2. pour valeur maximale, atteinte pour des perturbations planes ($k = 0$) aux plus grandes valeurs du nombre d'onde azimutal

au fur et à mesure de l'accroissement du nombre d'onde et peut être observé sur la figure (2.16). À grand nombre d'onde, les quatre cadrans du plan (k, m) sont symétriques, de même que prévu par le taux d'amplification WKB.

La localisation des modes propres obéit sensiblement aux mêmes lois que dans le cas du critère de Rayleigh : les modes sont localisés au rayon où le taux d'amplification WKB est maximal. Sur la figure (2.17), celui-ci est représenté pour deux couples (k, m) de rapport β différent. Pour ces mêmes couples, la perturbation de vitesse radiale des trois modes les plus amplifiés est représentée sur les figures (2.18), (2.19) et (2.20). Ils présentent grossièrement les caractéristiques de polynômes de Hermite multipliés par une gaussienne (i.e. fonction de Weber), mais un examen plus attentif montre un écart à ce comportement. En effet, les deuxième et troisième modes propres ne sont pas parfaitement symétriques par rapport au rayon de taux d'amplification WKB maximal. En écoulement incompressible et pour un tourbillon d'extension radiale infinie superposé à une vitesse axiale, Leibovich et Stewartson [LS83] ont montré analytiquement que la variable transformée $\phi = fu$ suit l'équation de l'oscillateur harmonique. Dans cette expression u est la perturbation de vitesse

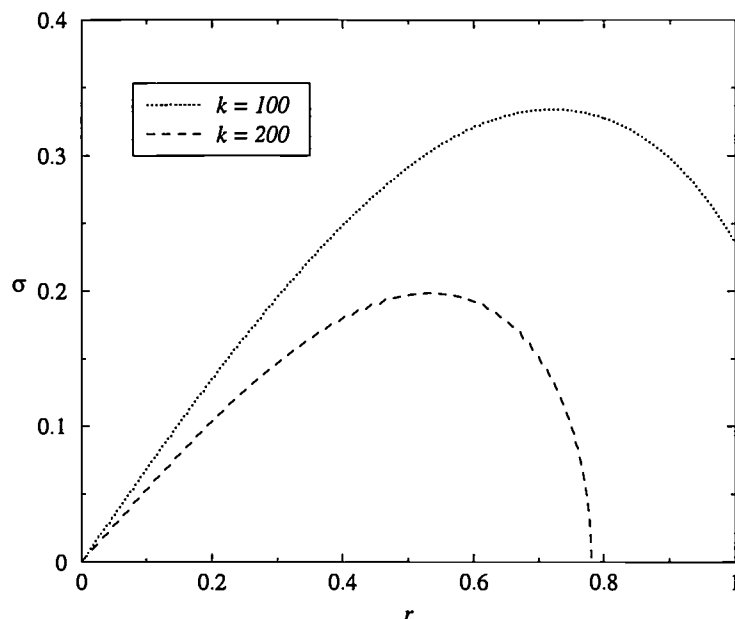


FIG. 2.17 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Profil du taux d’amplification WKB en fonction du rayon pour les couples (k, m) $(100, 800)$ et $(200, 800)$ pour un nombre de Mach $M = 0.3$

radiale et f est un facteur d’intégration dépendant de β et du rayon. ϕ et non u est la fonction de Weber. Néanmoins, à grand nombre d’onde, l’extension spatiale des modes est tellement réduite que la variation de f est faible sur cette extension. Un comportement similaire en écoulement compressible pourrait expliquer la légère dissymétrie des modes propres par rapport au rayon où le taux d’amplification WKB maximal est atteint.

Nous passons maintenant à des cas illustrant l’importance de la condition d’autonomie.

2.4.3 Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche

Nous nous sommes intéressés à un cas pour lequel les hypothèses de la théorie WKB ne sont satisfaites qu’en un point, i.e. sur un ensemble de mesure nulle. La formule de Laplace donnant le taux de croissance énergétique n’est alors plus valable.

Nous avons considéré une rotation solide compressible (avec une dépendance de la masse volumique sur le nombre de Mach identique au cas précédent) à laquelle nous avons superposé un profil de vitesse axiale indépendant du nombre de Mach, et de dérivée nulle en un point seulement. Pour un nombre de Mach $M = 1$, le champ porteur est représenté figure (2.21).

Contrairement aux cas précédents, il existe des couples de nombres d’onde tels

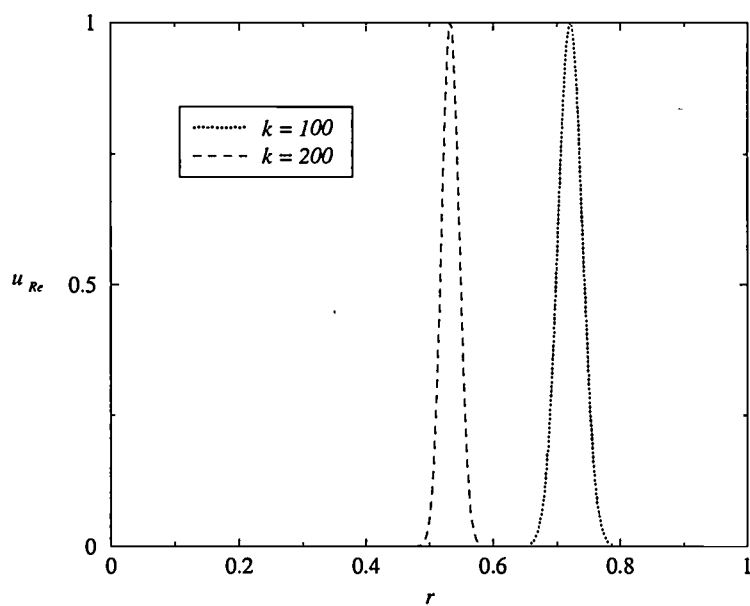


FIG. 2.18 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Perturbation de vitesse radiale du mode propre le plus amplifié pour les couples (k, m) $(100, 800)$ et $(200, 800)$ pour un nombre de Mach $M = 0.3$

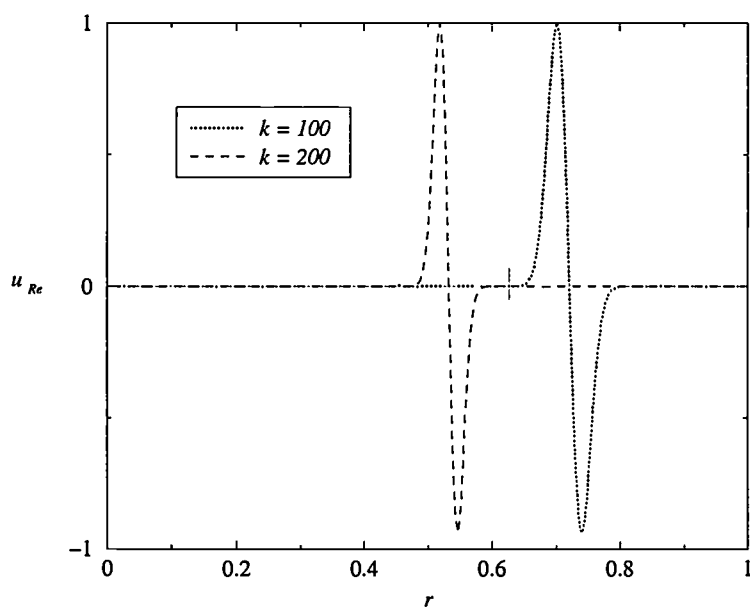


FIG. 2.19 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Perturbation de vitesse radiale du deuxième mode propre le plus amplifié pour les couples (k, m) $(100, 800)$ et $(200, 800)$ pour un nombre de Mach $M = 0.3$

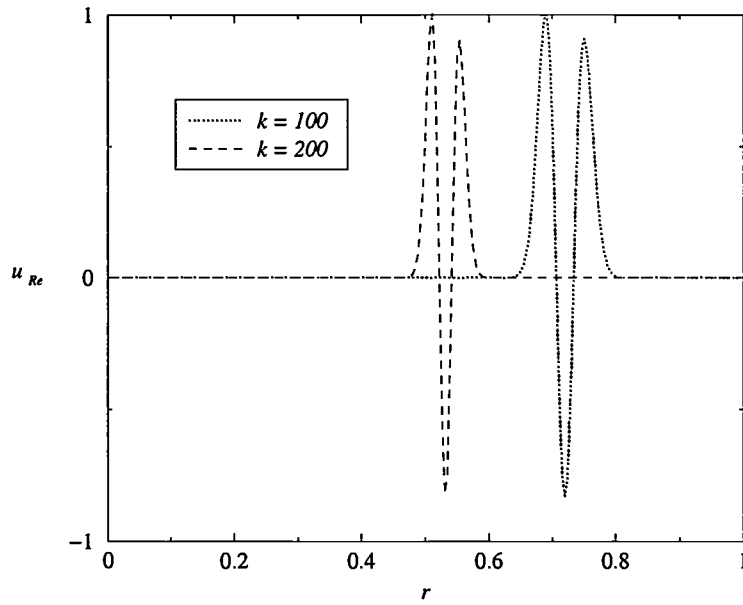


FIG. 2.20 – Rotation solide compressible et vitesse axiale uniforme : Perturbation de vitesse radiale du troisième mode propre le plus amplifié pour les couples (k, m) $(100, 800)$ et $(200, 800)$ pour un nombre de Mach $M = 0.3$

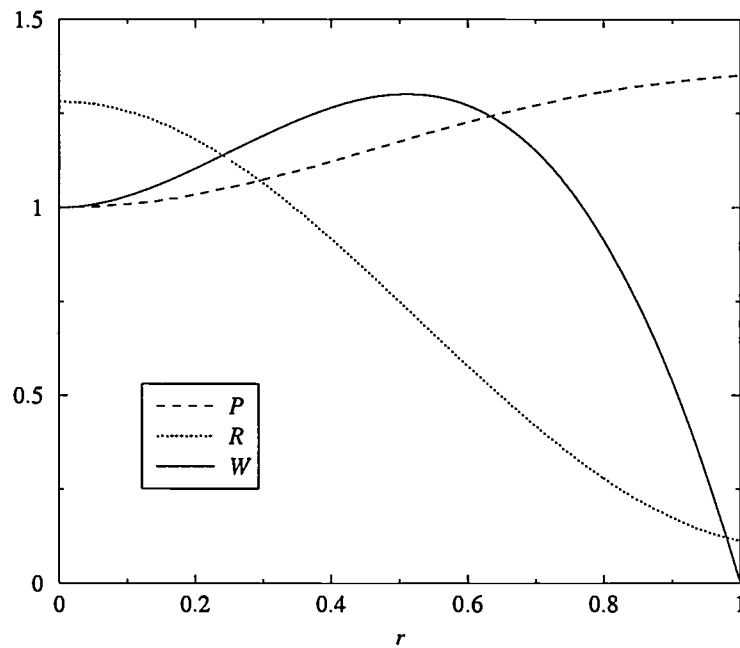


FIG. 2.21 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Pression porteuse, masse volumique porteuse et vitesse axiale porteuse pour un nombre de Mach $M = 1$

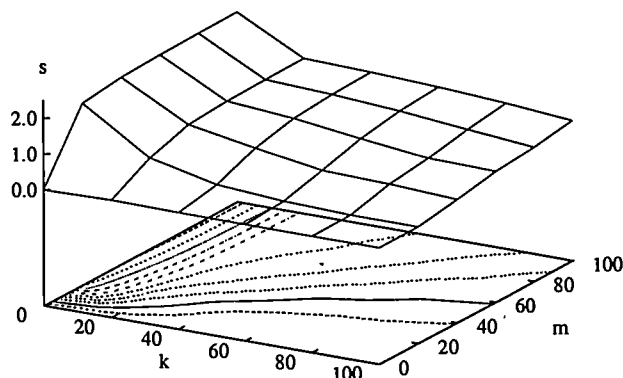


FIG. 2.22 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Taux d’amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$. L’incrément entre les isovaleurs est de 0.2 avec 0.2 pour valeur minimale

que la relation d’autonomie n’est pas satisfaite en tout rayon : pour des perturbations non planes, elle est satisfaite seulement au rayon où la vitesse axiale est maximale. Pour des perturbations planes, la relation d’autonomie est en revanche satisfaite pour tout rayon. La théorie WKB nous indique que la croissance de la perturbation est exponentielle aux points d’autonomie et au plus algébrique pour les autres rayons. Suivant (2.20), l’énergie à l’ordre dominant s’écrit

$$E_0(t) \sim \left[\int_0^{\mathcal{R}} g(r, t) dr \right]^{1/2}, \quad (2.55)$$

avec $g(r, t) = \exp(2\sigma t)$ en un rayon seulement pour des perturbations non planes. Pour tous les autres rayons, g est au plus une fonction algébrique du temps. Cette norme L^2 présente donc au plus une croissance algébrique au cours du temps.

Le taux d’amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$ est tracé figure (2.22). À l’exception de la droite des perturbations planes $k = 0$, le taux d’amplification des modes normaux est différent (inférieur) à celui obtenu pour une vitesse axiale constante (voir figure (2.14)). Mais il est aussi différent du taux exponentiel nul attendu pour une croissance algébrique.

Plus précisément, sur la figure (2.23) est représenté à titre d’exemple le taux d’amplification des trois modes normaux les plus amplifiés pour des perturbations de nombres d’onde $k = m$. Ce taux d’amplification des modes normaux tend asymptotiquement vers la valeur du taux d’amplification WKB au rayon où W' s’annule, i.e. au rayon d’autonomie. De plus pour tous les couples (k, m) , la pulsation de la perturbation par rapport à l’écoulement porteur tend vers 0 au rayon où les modes

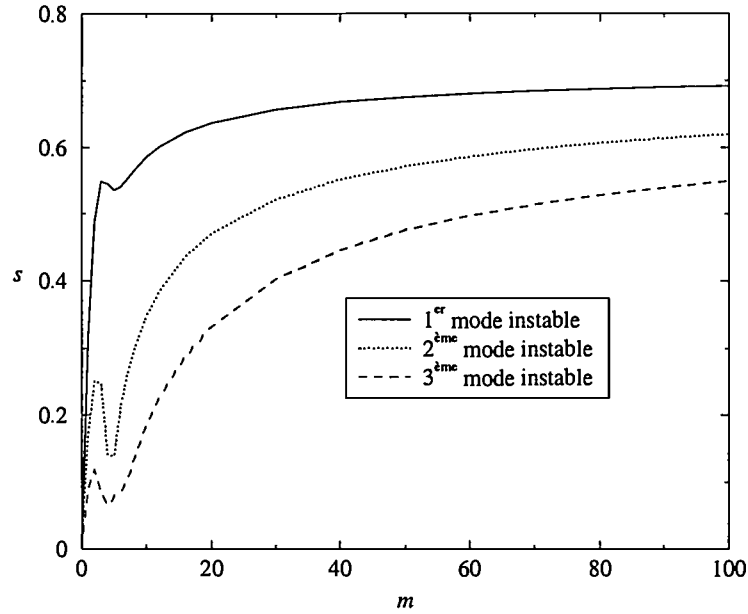


FIG. 2.23 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Taux d’amplification des modes normaux le long d’une droite $k = m$ pour un nombre de Mach $M = 1$

se centrent pour les grands nombres d’onde.

Par ailleurs, pour un rapport $\beta = k/m$ donné et des couples (k, m) croissants, les modes propres les plus amplifiés tendent à se resserrer et à se centrer au point où le critère d’autonomie est satisfait. Sur la figure (2.24) est tracée l’évolution de la perturbation de vitesse radiale pour des couples $k = m$ croissants. Ce comportement des valeurs et modes propres est analogue au comportement démontré en incompressible par Leibovich et Stewartson [LS83]. En effet, Leibovich et Stewartson indiquent que les rayons d’instabilité sont ceux où la dérivée radiale de la pulsation de la perturbation par rapport au champ porteur est nulle. Cette condition s’écrit

$$\frac{d\omega_{Base}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\omega + m \frac{V}{r} + kW \right) = \frac{m}{r} \left(V' - \frac{V}{r} \right) + kW' = 0, \quad (2.56)$$

et est exactement la relation d’autonomie (2.37).

Le taux d’amplification des modes normaux est lisse autour de la droite $k = 0$, contrairement au taux d’amplification WKB qui chute de la valeur maximale (qui peut être atteinte quand l’autonomie est partout satisfaite) à la valeur au rayon d’autonomie. Ceci peut être constaté sur la figure (2.25), où nous avons tracé le taux d’amplification WKB maximal sur l’ensemble des rayons r , ce même taux à $W' = 0$ et le taux d’amplification des modes normaux. Le tracé est fait en fonction du nombre d’onde k pour un nombre d’onde azimutal m fixé à 100.

Comme dans le cas de la rotation solide compressible avec vitesse axiale uni-

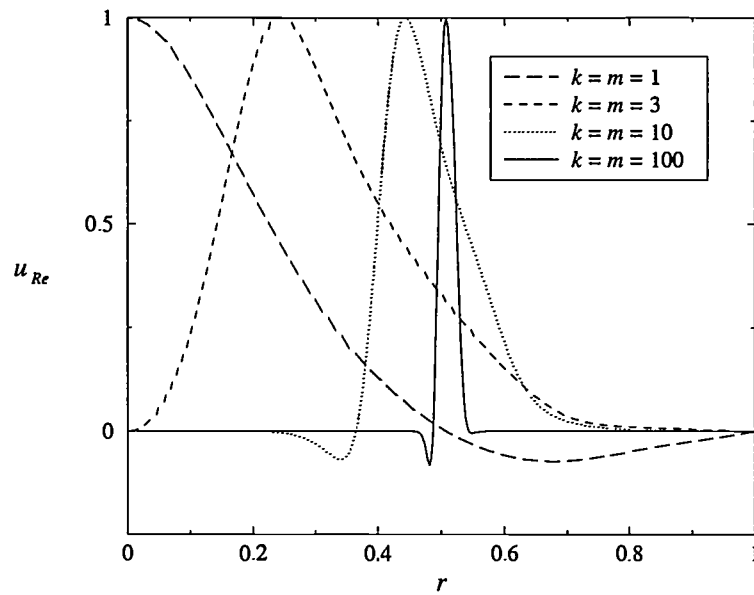


FIG. 2.24 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale du mode le plus amplifié pour un nombre de Mach $M = 1$ et quatre couples $k = m$

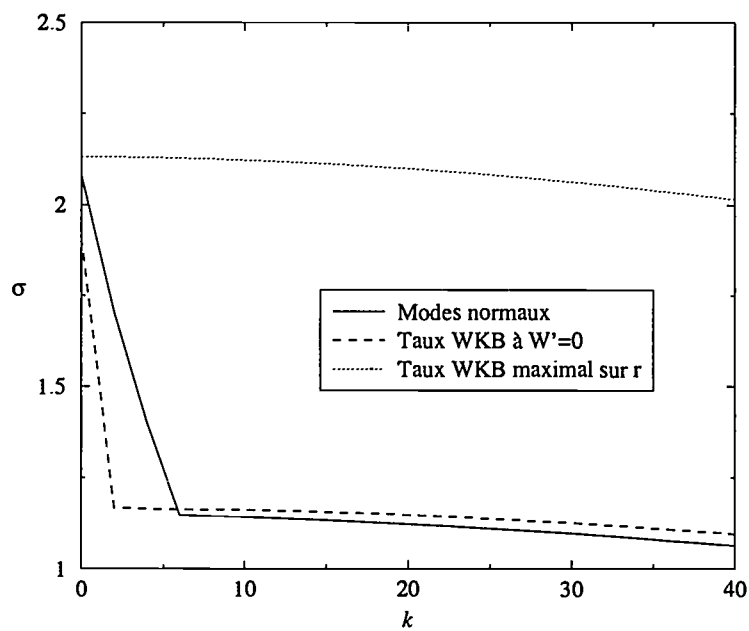


FIG. 2.25 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Taux d'amplification des modes normaux et WKB pour $m = 100$ pour un nombre de Mach $M = 1$

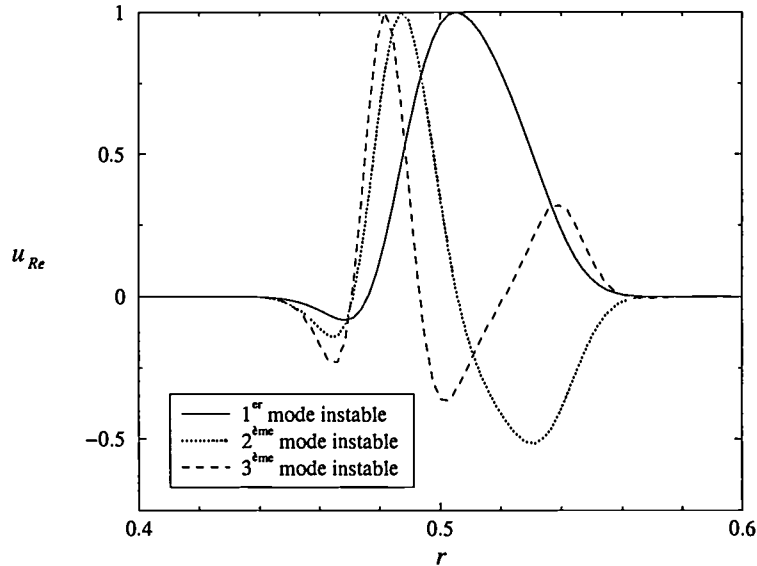


FIG. 2.26 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale des trois modes les plus amplifiés pour un nombre de Mach $M = 1$ et $k = m = 60$

forme, toutes les variables présentent un comportement proche de la fonction de Weber (polynôme de Hermite multiplié par une gaussienne). Au fur et à mesure que l'on considère des modes moins amplifiés, les modes propres ont un comportement oscillatoire de plus en plus rapide, ce qui est dû comme dans les cas précédents à une augmentation de l'ordre des polynômes de Hermite. À titre d'exemple, la partie réelle de la perturbation de vitesse radiale et la partie imaginaire de la pression à $k = m = 60$ pour les trois modes les plus amplifiés sont représentées figure (2.26) et (2.27). On constate cependant des défauts de symétries marqués par rapport au rayon d'autonomie.

Sur la figure (2.28) est tracée la perturbation de pression pour différents nombres d'onde. Les variables suivent les échelles imposées par la méthode WKB. Ainsi, la pression tend vers 0 pour un nombre d'onde croissant, et ce plus vite que $1/|k|$, mais néanmoins plus lentement que $1/|k|^{3/2}$, qui est l'échelle du critère compressible de Rayleigh. Il n'a pas été possible de mettre en défaut les prédictions de la méthode WKB. Notons que Lifschitz et Hameiri remarquent dans [LH91] que la croissance exponentielle de l'énergie sur une unique trajectoire (i.e. un ensemble de mesure nulle) suffit à garantir une instabilité dans le spectre continu. Ici nous observons une instabilité des modes normaux.

Il est à noter que les modes se placent au rayon où le critère d'autonomie est satisfait et non en un point particulier du seul profil de W . C'est le couplage entre les nombres d'onde de la perturbation et les deux composantes du champ de vitesse

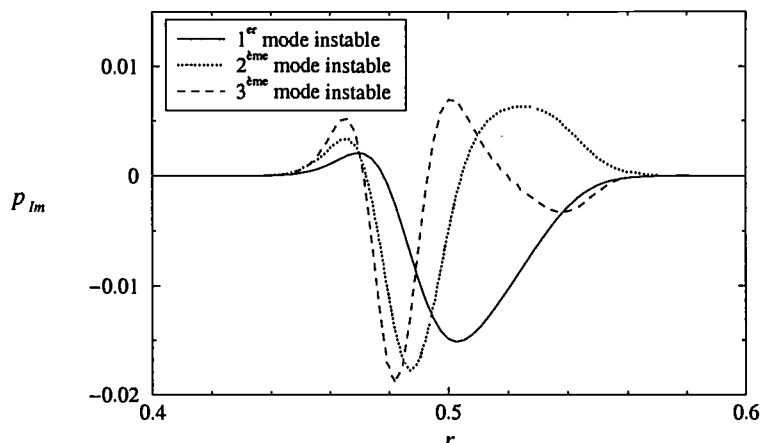


FIG. 2.27 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Partie imaginaire de la perturbation de la pression des trois modes les plus amplifiés pour un nombre de Mach $M = 1$ et $k = m = 60$

porteuse qui importe.

2.4.4 Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique

Nous examinons désormais une configuration plus proche des conditions habituellement rencontrées en canal : le profil de vitesse axiale est maintenant parabolique et maximal au centre du tube. La dérivée radiale de la vitesse axiale s'annule donc seulement en zéro. Pour certaines perturbations ce cas ne satisfait pas les conditions suffisantes d'instabilité déterminées avec la méthode WKB. En effet, pour des perturbations non planes, la condition d'autonomie n'est satisfaite qu'au rayon nul, où le taux d'amplification WKB est nul.

Nous reprenons le même profil de rotation solide compressible que précédemment (voir figure (2.21)) et nous lui superposons deux profils de vitesse axiale parabolique : un "faible", présentant une faible variation ($W(0) = 1$ et $W(1) = 0.99$), et un "fort" ($W(0) = 1$ et $W(1) = 0$).

Sur la figure (2.29) nous avons tracé le taux d'amplification des modes normaux pour la rotation solide compressible avec vitesse axiale uniforme (trait plein), avec profil parabolique faible (surface à peine discernable en dessous) et avec profil parabolique fort. Dans ce dernier cas pour tout m le taux d'amplification des modes normaux tend rapidement vers 0 quand k augmente. Il est ici évident que la superposition d'une vitesse axiale variable a un effet stabilisant. Nous avons aussi superposé à la rotation solide compressible des profils de vitesse axiale présentant un point d'inflexion et la même conclusion s'applique. Il apparaît que le profil exact

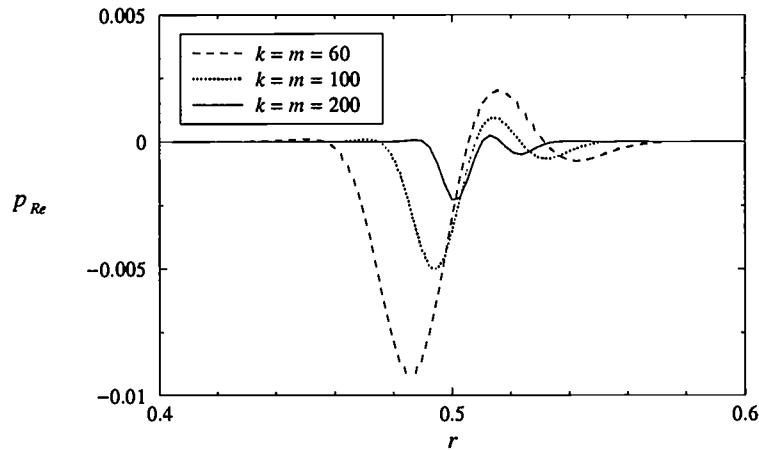


FIG. 2.28 – Rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche : Partie réelle de la perturbation de pression du mode le plus amplifié pour un nombre de Mach $M = 1$ et les couples (k, m) $(60, 60)$, $(100, 100)$ et $(200, 200)$

de W importe peu en soi mais que la relation entre W et V pour satisfaire ou non la condition d'autonomie est primordiale. Pour un profil porteur donné, le passage d'une perturbation plane à une perturbation tridimensionnelle n'induit pas de variation brusque du taux d'amplification. En revanche, à grand nombre d'onde et pour des perturbations non planes, la superposition d'un profil parabolique annihile la perturbation.

2.4.4.1 Profil parabolique faible

Nous nous sommes attachés à examiner le taux d'amplification des modes normaux pour la rotation solide compressible avec profil parabolique faible. Pour des nombres d'onde axiaux aussi grands que $k = 100$, le taux d'amplification des modes normaux est en effet quasi indiscernable du cas avec vitesse axiale constante. Sur la figure (2.30) nous avons représenté son évolution en fonction du nombre d'onde axial pour des perturbations axisymétriques. Le critère d'autonomie est satisfait seulement au rayon nul. Le taux d'amplification des modes normaux commence à chuter pour des nombres d'onde de l'ordre de 200, contrairement au cas avec vitesse axiale constante, qui présente une croissance monotone (figure (2.14)). Les résultats sur le taux d'amplification des troisième et quatrième modes sont sujets à caution à partir de $k = 500$. En effet le spectre est alors entaché de valeurs propres purement numériques. Néanmoins, il est indéniable que le comportement du cas parabolique faible est éloigné du cas sans vitesse axiale à grand nombre d'onde. Conformément à la théorie WKB qui prédit un taux d'amplification nul, le taux d'amplification des modes normaux diminue.

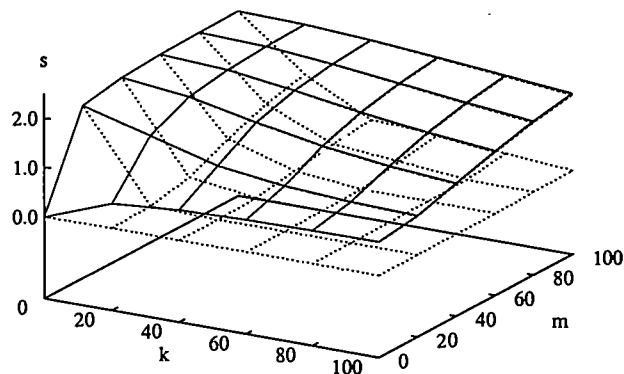


FIG. 2.29 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique : Taux d'amplification des modes normaux pour la rotation solide compressible avec vitesse axiale uniforme (trait plein), avec vitesse axiale parabolique faible (trait pointillé, surface à peine discernable de celle avec trait plein) et avec vitesse axiale parabolique forte (trait pointillé)

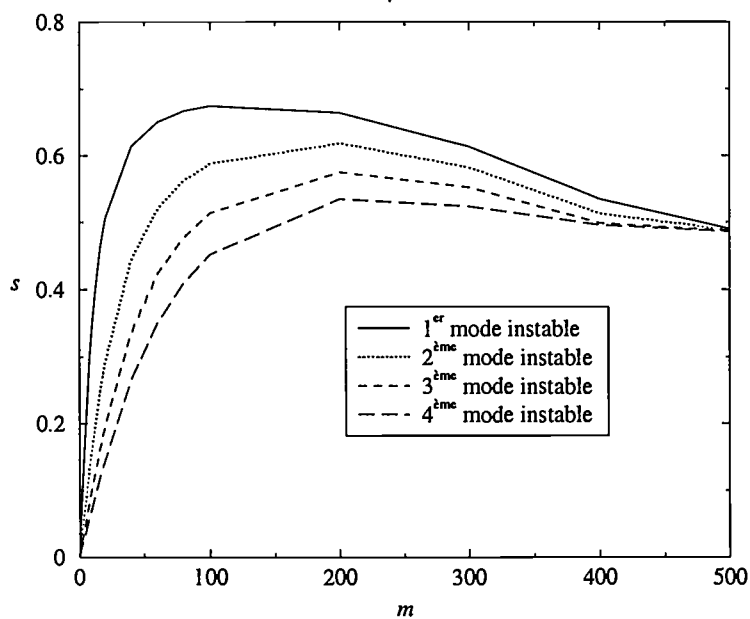


FIG. 2.30 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique faible : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$ et une perturbation axisymétrique

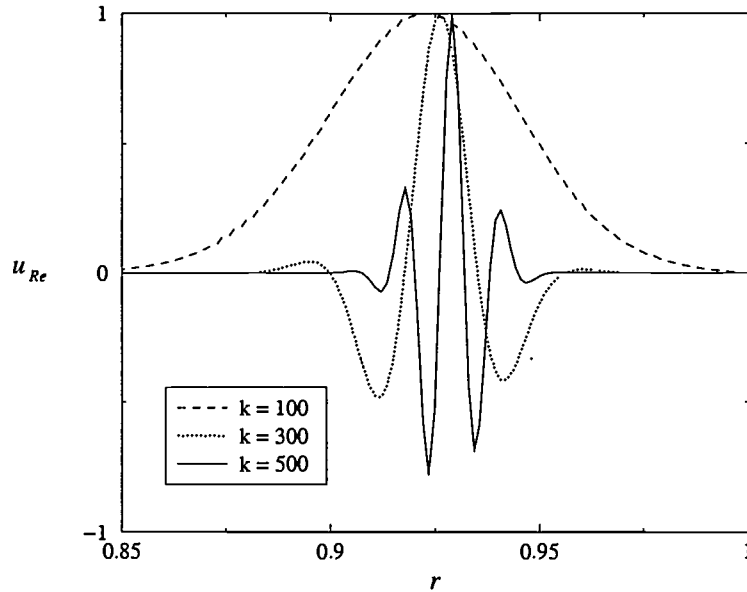


FIG. 2.31 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique faible : Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale du mode le plus amplifié pour un nombre de Mach $M = 1$ et une perturbation axisymétrique, pour un profil parabolique faible

Sur la figure (2.31), nous avons tracé le mode le plus amplifié pour une perturbation axisymétrique et différents nombres d'onde axiaux. Pour k croissant, les modes se centrent et se resserrent au rayon où le taux d'amplification WKB (2.14) est maximal, i.e. au même rayon que pour les perturbations planes. Néanmoins le comportement est différent du cas où la condition d'autonomie est satisfaite. Le mode le plus amplifié présente en effet un comportement de plus en plus oscillatoire quand le nombre d'onde axial k augmente.

Pour les nombres d'onde $(200, 0)$ et $(400, 0)$, qui sont bien convergés, les quatre modes les plus amplifiés de la perturbation de vitesse radiale sont tracés figure (2.32) et (2.33). Dans la deuxième figure, l'échelle de l'abscisse est plus grande : l'extension spatiale des modes diminue quand le nombre d'onde augmente. À un nombre d'onde donné, le caractère oscillatoire n'augmente pas quand on considère des modes propres moins amplifiés. Ceci est contraire aux cas précédents, pour lesquels le critère d'autonomie est satisfait, fût-ce en un point seulement.

2.4.4.2 Profil parabolique fort

Nous détaillons ce cas aux seuls nombres d'onde faibles, le taux d'amplification pour des nombres d'onde aussi bas que $|k| = 20$ étant nul. Sur la figure (2.34), nous avons représenté le taux d'amplification des modes normaux. Pour un nombre d'onde axial k croissant, il tend d'autant plus vite vers 0 que la perturbation est

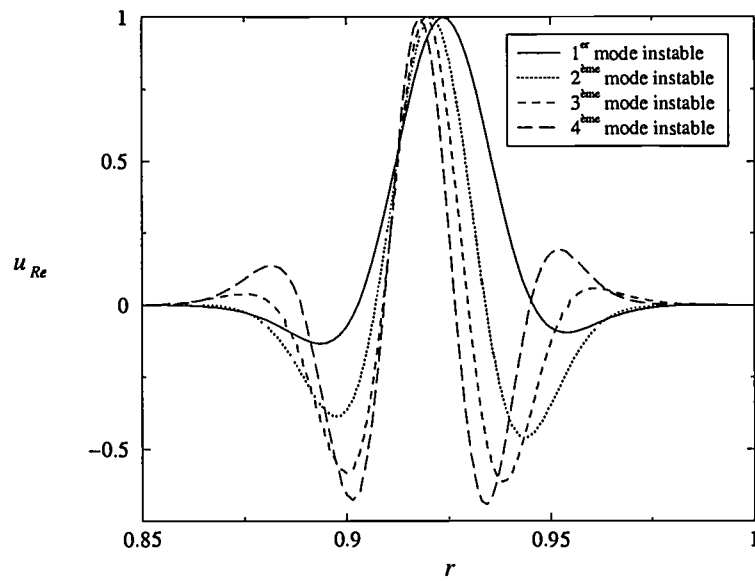


FIG. 2.32 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique faible : Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale des modes les plus amplifiés pour un nombre de Mach $M = 1$ et une perturbation axisymétrique à $k = 200$

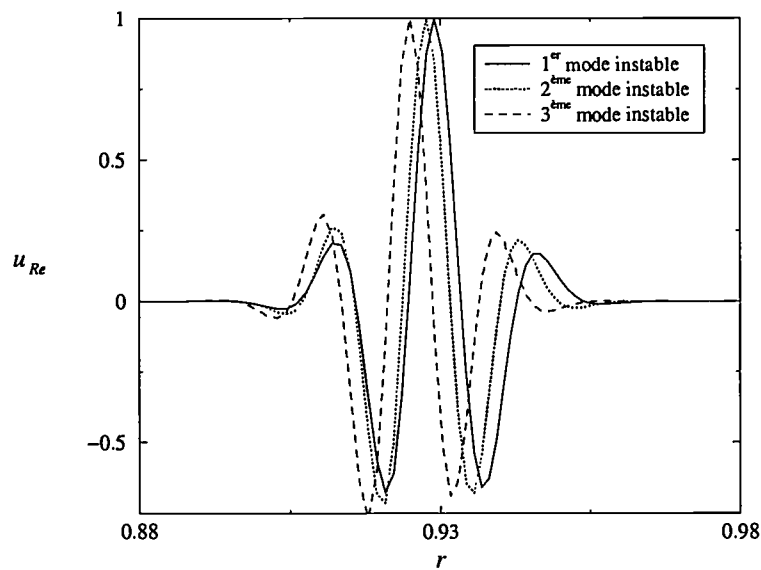


FIG. 2.33 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique faible : Partie réelle de la perturbation de vitesse radiale des modes les plus amplifiés pour un nombre de Mach $M = 1$ et une perturbation axisymétrique à $k = 400$

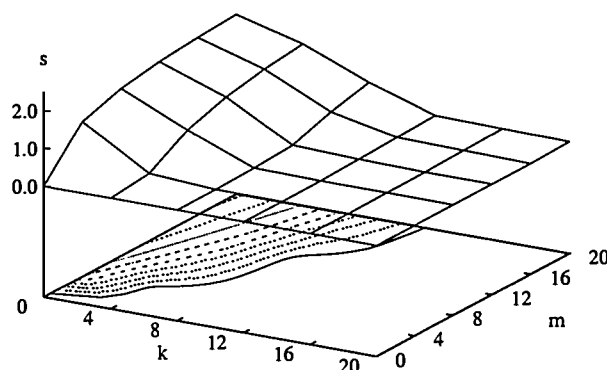


FIG. 2.34 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique forte : Taux d’amplification des modes normaux

faiblement oscillatoire dans la direction azimutale.

Le comportement des modes propres est sensiblement différent des comportements habituels observés pour des nombres d’onde faibles, pour lesquels la perturbation se localise très rapidement autour d’un rayon privilégié. À titre d’exemple, sur la figure (2.35) est tracée la partie réelle de la perturbation de pression. Les nombres d’onde où le taux d’amplification est non nul restent faibles et il n’y a pas localisation des modes propres autour d’un rayon particulier comme dans les cas précédents.

2.4.5 Vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche

Nous nous intéressons maintenant au cas général 2.2.2.1 mis en avant dans la démonstration du taux d’amplification WKB : le profil azimutal n’est pas une rotation solide et la vitesse axiale est variable. Nous avons utilisé le profil de vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh du paragraphe 2.4.1 et lui avons superposé le même profil de vitesse axiale en cloche qu’au paragraphe 2.4.3. Le champ de base pour le nombre de Mach de référence $M = 1$. est tracé figure (2.36).

Sur la figure (2.37), nous avons tracé le rayon d’autonomie, rayon où est satisfaite (2.37), pour différentes valeurs de $\beta = k/m$. Il existe au plus un rayon où la condition d’autonomie est satisfaite. Pour $\beta < -3$ ou $\beta > 2$, la condition d’autonomie n’est jamais satisfaite. Le taux d’amplification WKB tracé est celui atteint au rayon d’autonomie.

Le taux d’amplification des modes normaux est tracé sur la figure (2.38). Le

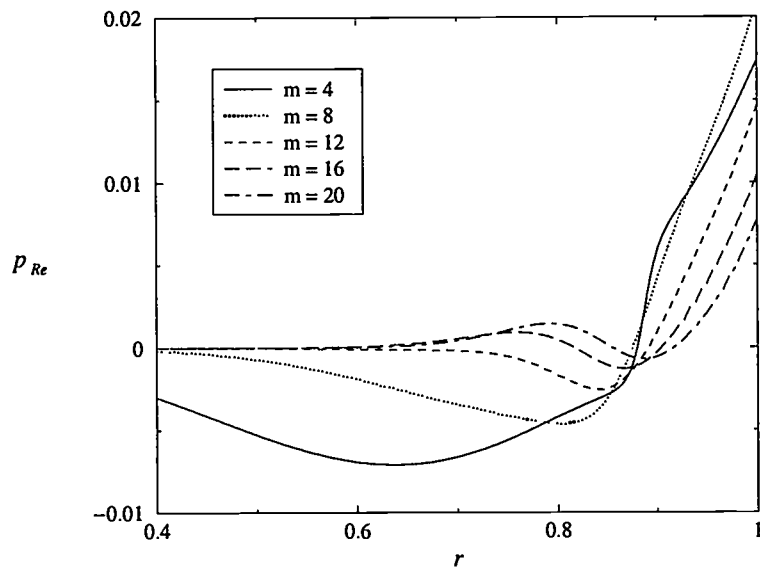


FIG. 2.35 – Rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique forte : Partie réelle de la perturbation de pression pour un nombre de Mach $M = 1$ et une perturbation de nombre d'onde axial $k = 4$

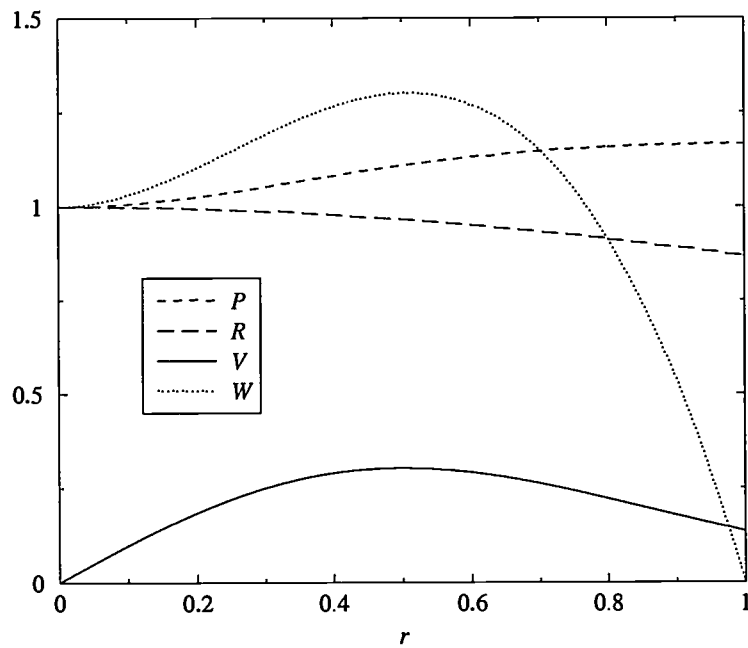


FIG. 2.36 – Vitesse azimuthale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Champ porteur pour un nombre de Mach $M = 1$

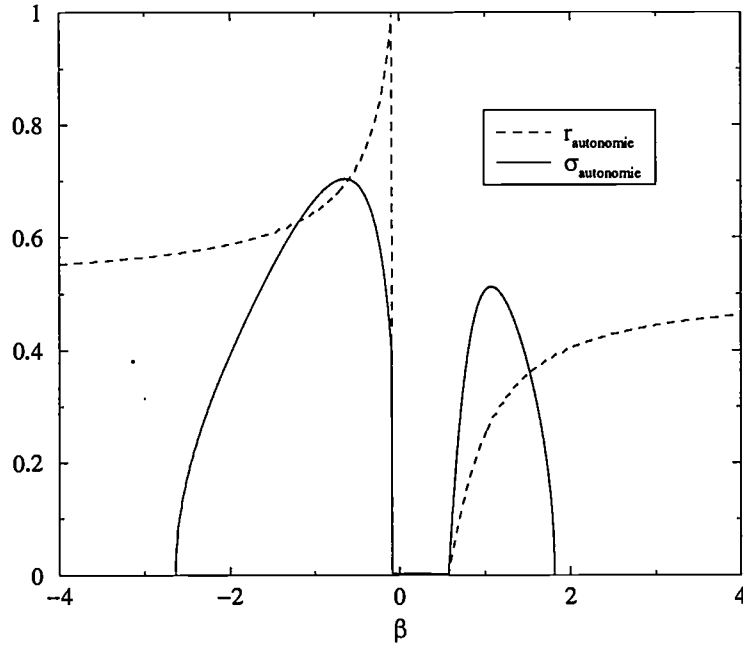


FIG. 2.37 – Vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Taux d'amplification WKB au rayon d'autonomie et rayon d'autonomie pour un nombre de Mach $M = 1$

caractère non lisse des isovalues du taux d'amplification pour les petits nombres d'onde (k, m) avec $\beta > 0$ résulte de la discrétisation insuffisante dans le plan (k, m) . Le taux d'amplification atteint pour les grands nombres d'onde (en norme) est celui prédit par la méthode WKB. Pour les valeurs de β comprises entre 0 et 0.6, le taux d'amplification des modes normaux est supérieur au taux nul prédit par la méthode WKB. Ceci est analogue au comportement de la rotation solide compressible avec vitesse axiale parabolique pour les nombres d'onde modérés.

Nous avons tracé dans la partie supérieure de la figure (2.39) la partie réelle de la perturbation de vitesse radiale pour $k = -20$ et $m = 20, 40, 60$ et 100 . Ceci correspond à des valeurs de β égales à $-1, -0.5, -0.33$ et -0.2 . En dessous, nous avons tracé β en fonction du rayon d'autonomie (fonction inverse de celle tracée figure (2.37)). Les perturbations sont centrées autour du rayon d'autonomie. Le centrage est d'autant plus précis et le mode plus resserré autour de ce rayon que la norme du nombre d'onde est grande. Ceci correspond ici à des valeurs de β plus petites en valeur absolue car nous travaillons à k fixé.

Sur la figure (2.40), nous avons tracé pour un couple $(k, m) = (-20, 20)$ la pulsation de la perturbation par rapport à l'écoulement de base, ω_{Base} , avec

$$\omega_{Base} = \omega + m \frac{V}{r} + kW . \quad (2.57)$$

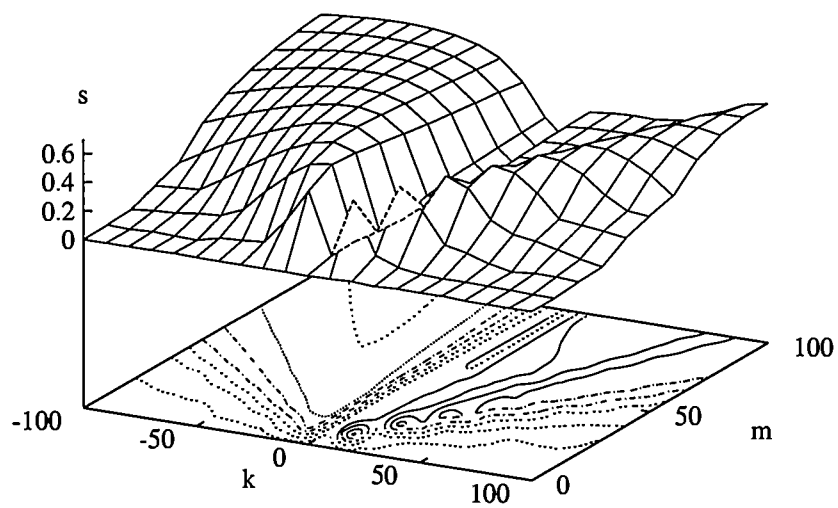


FIG. 2.38 – Vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Taux d'amplification des modes normaux pour un nombre de Mach $M = 1$. Les isovaleurs du taux d'amplification sont espacées de 0.1 et leur plus petite valeur est 0.03

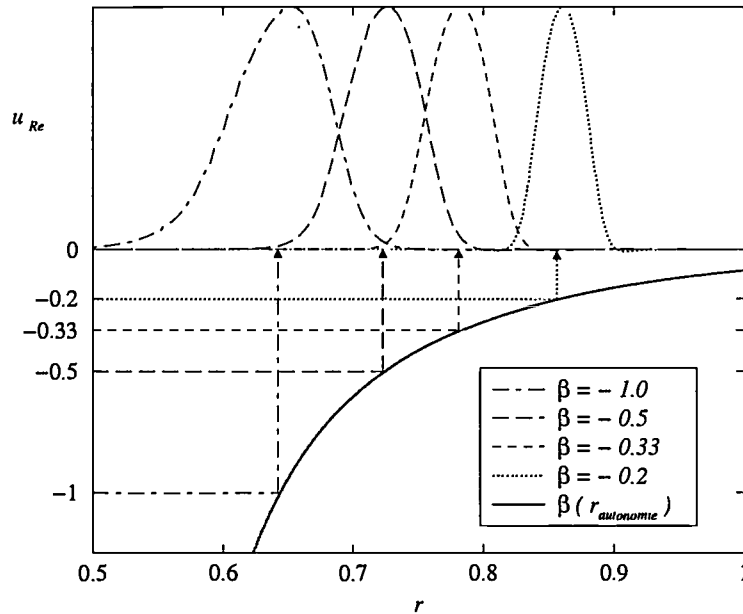


FIG. 2.39 – Vitesse azimuthale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Perturbation de vitesse radiale (partie supérieure de la figure) et rayon d'autonomie (partie inférieure) pour un nombre de Mach $M = 1$.

À l'exception des rayons $r \in [0.6; 0.7]$, la perturbation est en avance de phase par rapport au champ de base. Pour $r \in [0.6; 0.7]$, ω_{Base} est négative et proche de zéro : la perturbation est dans cette zone presque stationnaire par rapport à l'écoulement porteur. Pour ces rayons, elle est significativement non nulle (voir figure (2.39) avec $\beta = -1.0$). Sur la figure (2.41), nous avons tracé dans la partie supérieure de la figure ω_{Base}/m pour $k = -20$ et différents nombres d'onde azimuthaux. Dans la partie inférieure, nous avons tracé le rayon d'autonomie pour différents β . À grands nombres d'onde, ω_{Base}/m se réduit à $\Omega(r) + \beta W(r)$. À k fixé, pour des valeurs de m croissantes, la pulsation par rapport au champ de base prend des valeurs de plus en plus proches de zéro autour du rayon d'autonomie. Ceci est semblable au résultat de Maslowe [Mas74] pour un écoulement de Poiseuille incompressible en rotation solide. Maslowe établit en effet pour des perturbations non axisymétriques qu'une condition nécessaire d'instabilité est que la perturbation soit stationnaire par rapport au champ de base. Par ailleurs, la dérivée dans la direction radiale de la pulsation par rapport au champ de base est par définition nulle au rayon d'autonomie. Ceci est conforme au résultat incompressible de Leibovich et Stewartson [LS83].

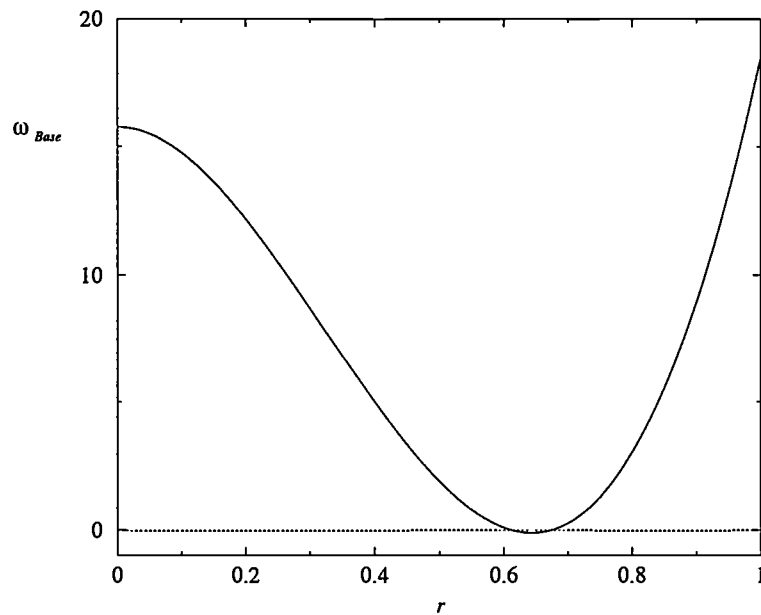


FIG. 2.40 – Vitesse azimuthale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Pulsation par rapport à l'écoulement de base pour $(k, m) = (-20, 20)$, pour un nombre de Mach $M = 1$.

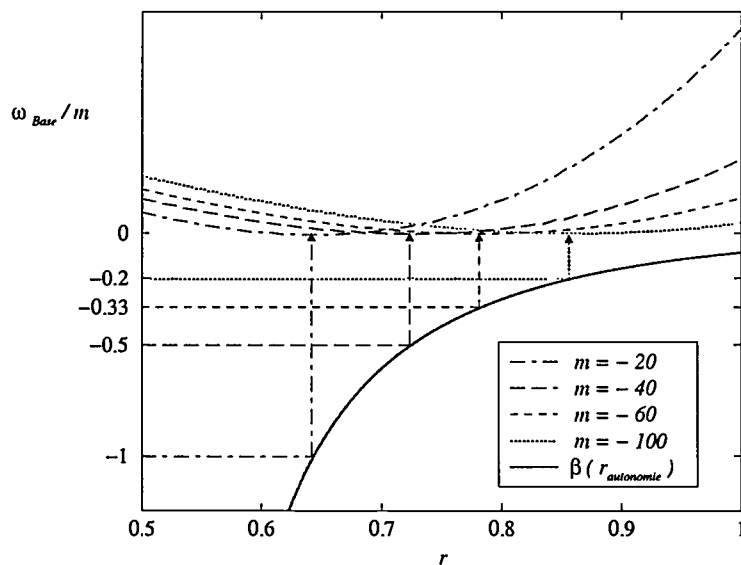


FIG. 2.41 – Vitesse azimuthale du critère compressible de Rayleigh et vitesse axiale en cloche : Pulsation par rapport à l'écoulement de base, divisée par le nombre d'onde azimuthal, pour différents m et $k = -20$, pour un nombre de Mach $M = 1$.

Conclusions et Perspectives

Nous avons exposé la méthode WKB, basée sur un développement asymptotique ondes courtes de la perturbation. Cette méthode permet de ramener le système aux dérivées partielles régissant toute perturbation à un système aux dérivées ordinaires régissant l'évolution des perturbations inertielles le long des trajectoires de l'écoulement de base. Elle s'applique à un écoulement non visqueux, incompressible ou compressible subsonique. La méthode ne tient pas compte de la présence de parois.

Dans le cas d'un champ de base hélicoïdal, nous avons exposé un critère suffisant d'instabilité. Ce critère fait apparaître une relation d'autonomie, qu'il faut satisfaire en un rayon au moins. Elle dépend des nombres d'onde azimutal et axial de la perturbation et du champ de base. Le critère fait aussi apparaître une condition que doit satisfaire le champ de base (2.9) sur au moins un point de l'ensemble des rayons d'autonomie, et un taux d'amplification associé. Ce critère montre qu'un gradient d'entropie positif du champ porteur a un effet déstabilisant.

Nous avons complété cette étude asymptotique de stabilité par une étude avec formulation en modes normaux. L'intérêt est d'une part d'obtenir les modes propres, d'autre part d'examiner les limites de la méthode WKB, en particulier sa validité à petits nombres d'onde et l'importance de satisfaire la condition d'autonomie.

Les taux d'amplification des modes normaux et les fonctions propres associées ont été déterminés numériquement avec une méthode spectrale. Le programme a été validé avec des cas incompressibles. Nous avons ensuite considéré différents champs porteurs. Certains profils et nombres d'onde de perturbation permettent de satisfaire la relation d'autonomie en tout rayon. D'autres profils ne permettent de la satisfaire qu'en un seul rayon. D'autres enfin, nulle part.

De manière commune à tous ces cas, nous n'avons jamais pu mettre en défaut les prédictions de la méthode WKB pour les grands nombres d'onde. Ceci est illustré avec le cas de la vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh superposée à une vitesse axiale en cloche. Selon les différents nombres d'onde de la perturbation, ce cas regroupe toutes les possibilités de satisfaction ou non du critère d'autonomie. Le taux d'amplification des modes normaux atteint à grands nombres d'onde est le maximum, sur l'ensemble des rayons où la condition d'autonomie est satisfaite, du taux WKB.

Dans le cas où la relation d'autonomie est satisfaite en tout rayon (critère com-

pressible de Rayleigh plan avec des perturbations axisymétriques, rotation solide compressible pour toute perturbation plane, et rotation solide compressible avec vitesse axiale uniforme pour toute perturbation), le taux d'amplification des modes normaux tend vers le maximum du taux WKB sur l'ensemble des rayons $[0 : \mathcal{R}]$, quand le nombre d'onde de la perturbation croît en norme. Les modes propres se centrent en ce point et s'y resserrent. À nombre d'onde fixé, le comportement oscillatoire augmente quand on considère des modes moins amplifiés. Pour tous ces champs de base, les modes propres présentent une forme proche d'une fonction de Weber (gaussienne multipliée par un polynôme de Hermite). Pour le critère compressible de Rayleigh, nous avons pu déterminer analytiquement les modes propres (qui sont exactement la fonction de Weber) et le taux d'amplification des modes propres les plus amplifiés à nombre d'onde fini. Le comportement faiblement compressible peut être exactement déduit du cas incompressible. Ces cas simples mettent en évidence le caractère déstabilisant d'un gradient d'entropie porteuse positif.

Quand la relation d'autonomie est satisfaite en un point seulement (rotation solide compressible et vitesse axiale en cloche pour des perturbations non planes), le taux d'amplification des modes normaux tend asymptotiquement à grands nombres d'onde vers la valeur du taux d'amplification WKB en ce point. Les modes propres présentent les mêmes allures que dans le groupe de cas précédents, mais avec des dissymétries plus marquées par rapport au rayon d'autonomie.

Ces deux groupes ont donc un comportement de modes propres très voisin. Satisfaire la condition d'autonomie sur un ensemble de points, éventuellement de mesure nulle, en générant un taux d'amplification WKB non nul, induit un type de comportement des modes. Notons que les rapports entre les différentes composantes de la perturbation peuvent être obtenus à partir des vecteurs propres de la matrice D (2.8).

Quand la relation d'autonomie n'est nulle part satisfaite, sauf en un rayon où le taux WKB est nul, un comportement différent est mis en évidence (rotation solide compressible et vitesse axiale parabolique pour des perturbations non planes). Le taux d'amplification des modes normaux tend vers zéro aux grands nombres d'onde. Pour le cas du profil parabolique faible, les modes les plus amplifiés se centrent autour d'un rayon privilégié quand le nombre d'onde augmente. Mais le mode le plus amplifié est de plus en plus oscillatoire avec l'augmentation du nombre d'onde. À un nombre d'onde donné, les modes les plus amplifiés ont tous le même caractère oscillatoire. Aux faibles nombres d'onde, ne pas satisfaire la relation d'autonomie ne garantit pas un taux d'amplification exponentiel nul. C'est ce qui explique que le taux d'amplification des modes normaux ne chute pas brusquement à zéro quand k est faible, mais non nul. Le même comportement est observé pour $\beta \in [0 : 0.5]$ pour la vitesse azimutale du critère compressible de Rayleigh et la vitesse axiale en cloche.

Nous souhaitons proposer les perspectives suivantes. Le cas de la rotation solide semble le plus favorable à la détermination analytique des modes propres. En effet, comme pour le critère compressible de Rayleigh, la relation d'autonomie est satisfaite en tout rayon. La méthode pourrait s'inspirer de Leibovich et Stewartson [LS83]. Nous avons pu montrer que le principe d'équilibre des ordres ne peut être satisfait à l'ordre dominant que si le taux d'amplification du mode normal le plus amplifié est asymptotiquement (i.e. à nombre d'onde infini) égal au taux d'amplification WKB. Par manque de temps, nous n'avons pas pu pousser la démonstration plus loin. L'obtention analytique des modes propres dans d'autres cas est beaucoup plus délicate, particulièrement quand le taux de croissance WKB est exponentiel en un rayon seulement (autonomie sur un ensemble de mesure nulle).

Il pourrait être intéressant de regarder l'influence du critère (2.9) quand la relation d'autonomie est satisfaite. L'étude consisterait à choisir des profils de vitesses axiale et azimutale et un β tels que la relation d'autonomie soit satisfaite, et à faire varier la densité jusqu'à ce que le taux WKB soit nul au point d'autonomie. Pour cette étude, il faut choisir des profils de W et V tels que $(\frac{V}{r} + V')^2 + W'^2 - 4(\frac{V}{r})^2 \neq 0$, afin de ne pas être dans le cas où (2.9) est condition nécessaire et suffisante d'instabilité [ES78, War75]. En particulier il faut éviter la rotation solide compressible avec vitesse axiale uniforme.

L'influence de la viscosité n'a pas été considérée ici. La théorie WKB permet de la prendre en compte quand l'écoulement visqueux tend asymptotiquement vers l'écoulement non visqueux [Lif91]. Le petit paramètre ε du développement WKB est alors lié à la viscosité selon $\varepsilon^2 = 1/Re$, avec Re le nombre de Reynolds de l'écoulement. Faire tendre ε vers 0 suppose alors que $Re \rightarrow \infty$. La théorie est valable seulement asymptotiquement. Notons que la viscosité n'a pas seulement un effet amortissant. Khorrami note dans [Kho91b] qu'un tourbillon incompressible de Batchelor présente des modes d'instabilité de grande longueur d'onde en présence de viscosité.

Un grand domaine laissé de côté par cette étude est l'influence de perturbations acoustiques. Pour que la méthode WKB présente un intérêt il faudrait se placer à nombre de Mach proche de 1. En effet, pour un nombre de Mach de 0.3, la disparité de longueur d'onde entre les perturbations inertielles et acoustiques est de plus de deux ordres de grandeur. À la limite incompressible, les perturbations acoustiques ont des longueurs d'onde tendant vers l'infini. Contrairement au cas des caractéristiques inertielles, l'effet des parois serait ici critique puisque les caractéristiques acoustiques peuvent se réfléchir sur les parois, et intersecter. La présence de telles caustiques induit des difficultés techniques de mise en œuvre de la méthode WKB. Cette étude permettrait en revanche d'établir un lien avec les études RDT précédentes [SCC97]. Dans une application lointaine, on peut citer le tube de Ranque-Hilsch, où des effets thermiques sont associés à une forte émission sonore en présence d'un écoulement porteur axial giratoire. La prise en compte des caractéris-

tiques acoustiques pourraient être un pas dans la compréhension de ce phénomène complexe.

Annexe A

Hyperbolicité et symétrie du système régissant la perturbation

L'hyperbolicité du système différentiel est une caractéristique indépendante du système de coordonnées. Il est plus aisé de la vérifier en coordonnées cartésiennes, $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, où on peut écrire (1.8) sous la forme suivante

$$M\mathbf{X} = \partial_t \mathbf{X} + \sum_{\nu=1}^3 A^\nu \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_\nu} + B\mathbf{X} = 0, \quad (\text{A.1})$$

et où \mathbf{X} , A^ν et B ont les expressions suivantes :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$A^x = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$A^y = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & V \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$A^z = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & W \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$B = \begin{pmatrix} \partial_x U & \partial_y U & \partial_z U & \frac{1}{RC} \partial_x P & \frac{\gamma-1}{RC} \partial_x P - \partial_x C \\ \partial_x V & \partial_y V & \partial_z V & \frac{1}{RC} \partial_y P & \frac{\gamma-1}{RC} \partial_y P - \partial_y C \\ \partial_x W & \partial_y W & \partial_z W & \frac{1}{RC} \partial_z P & \frac{\gamma-1}{RC} \partial_z P - \partial_z C \\ C \left(\frac{\partial_x R}{R} - \frac{\partial_x P}{\gamma P} \right) & C \left(\frac{\partial_y R}{R} - \frac{\partial_y P}{\gamma P} \right) & C \left(\frac{\partial_z R}{R} - \frac{\partial_z P}{\gamma P} \right) & -\frac{D_t C}{C} & 0 \\ \frac{C}{\gamma P} \partial_x P & \frac{C}{\gamma P} \partial_y P & \frac{C}{\gamma P} \partial_z P & 0 & -\frac{D_t C}{C} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Les matrices A^ν sont clairement réelles symétriques donc [Eck81, Whi74] l'opérateur M est hyperbolique symétrique.

Annexe B

Ordre de troncature

De même que dans le cas de la détermination du caractère du système différentiel, la détermination de l'ordre minimal de troncature ne dépend pas du système de coordonnées considéré. Dans un souci de simplicité, on utilise les coordonnées cartésiennes.

Le développement asymptotique (hautes fréquences / grands nombres d'onde) du vecteur inconnu $\mathbf{X} = (v, x, y)^T$ peut s'écrire comme chez Bender et Orszag [BO78] :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \mathbf{X}'_p(\mathbf{x}, t) \right) \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \Phi_l(\mathbf{x}, t) \right), \quad (\text{B.1})$$

où les amplitudes \mathbf{X}'_p sont complexes et toutes du même ordre de grandeur. Les phases Φ_l sont réelles et ε est un petit paramètre réel.

Les amplitudes étant complexes, on peut écrire un développement de forme plus simple mais formellement identique en incluant le terme de phase constante (ne dépendant pas de ε) dans l'amplitude, i.e. en remplaçant \mathbf{X}'_p par $\mathbf{X}'_p e^{-i\Phi_1}$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \mathbf{X}'_p(\mathbf{x}, t) \right) \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi_0(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\varepsilon} \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^l \Phi_l(\mathbf{x}, t) \right).$$

De plus, pour les termes de la partie exponentielle du développement d'ordre inférieur ou égal à ε , on peut réaliser un développement limité autour de la valeur 0 de ε :

$$\exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \sum_{l=2}^{\infty} \varepsilon^l \Phi_l(\mathbf{x}, t) \right) = \exp \left(i \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \Phi_{l+1}(\mathbf{x}, t) \right) = 1 + \varepsilon \Phi_a + \varepsilon^2 \Phi_b + \dots$$

Ce développement limité peut être incorporé dans l'amplitude sans en changer l'expression formelle. Le développement (B.1) est donc formellement équivalent à :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \mathbf{X}_p(\mathbf{x}, t) \right) \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(\mathbf{x}, t) \right), \quad (\text{B.2})$$

avec $\Phi \equiv \Phi_0$.

De plus, le système d'équations (1.9) peut être écrit sous la forme

$$D_t \begin{pmatrix} v \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\nabla y \\ 0 \\ C\nabla \cdot v \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} v \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Après quelques manipulations, et en regroupant les termes facteurs d'une puissance donnée de ε , on montre que le système précédent est équivalent à

– à l'ordre $1/\varepsilon$

$$\begin{cases} v_0 D_t \Phi + C y_0 \mathbf{k} = 0, \\ x_0 D_t \Phi = 0, \\ y_0 D_t \Phi + C v_0 \cdot \mathbf{k} = 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

– aux ordres supérieurs ($q \geq 0$)

$$D_t \begin{pmatrix} v_q \\ x_q \\ y_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\nabla y_q \\ 0 \\ C\nabla \cdot v_q \end{pmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} v_q \\ x_q \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(v_{q+1} D_t \Phi + y_{q+1} C \mathbf{k}) \\ -i x_{q+1} D_t \Phi \\ -i(y_{q+1} D_t \Phi + C v_{q+1} \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

avec $\mathbf{k} \equiv \nabla \Phi$ le vecteur d'onde.

En particulier, les équations régissant les variables indexées 0 font apparaître y_1 , v_1 et x_1 . Il est donc nécessaire de garder explicitement ces termes dans le développement. Les termes d'ordre supérieur peuvent être rassemblés dans un résidu (\mathbf{X}_r). En posant $\mathbf{X}_1 \equiv \mathbf{X}_\varepsilon$, on peut donc considérer la forme suivante de développement :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, t) e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{X}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) e^{i\Phi(\mathbf{x}, t)/\varepsilon} + \varepsilon \mathbf{X}_r(\mathbf{x}, t), \quad (\text{B.6})$$

avec les notations

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7}) \quad \mathbf{X}_\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \\ w_\varepsilon \\ x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8}) \quad \mathbf{X}_r = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \\ x_r \\ y_r \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

Majoration des opérateurs hyperboliques symétriques

On considère une équation de la forme :

$$Mw = f, \quad (\text{C.1})$$

avec w un vecteur de support compact à l'instant initial et M un opérateur hyperbolique symétrique de la forme (1.9). On cherche à obtenir une majoration de la forme

$$\int_S (w(x, t) \cdot w^*(x, t)) dx \leq M, \quad M \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.2})$$

Formellement, on peut toujours écrire $w = e^{\kappa t} W$ avec κ constante. (C.1) s'écrit alors

$$W_t + \sum_{\nu=1}^3 A^\nu W_{x_\nu} + (B + \kappa I) W = e^{-\kappa t} f. \quad (\text{C.3})$$

En sommant le produit scalaire à droite de (C.3) par W^* et le produit scalaire à gauche de (C.3*) par W , on obtient l'équation suivante sur $W \cdot W^*$:

$$\partial_t (W \cdot W^*) + \sum_{\nu=1}^3 \partial_{x_\nu} (W \cdot A^\nu W^*) + W \cdot (H + 2\kappa I) W^* = e^{-\kappa t} (W \cdot f^* + f \cdot W^*), \quad (\text{C.4})$$

où $H = B + B^T - \sum_{\nu=1}^3 A_{x_\nu}^\nu$ et où on a utilisé la symétrie de M . Par intégration sur S , (C.4) devient

$$\frac{d}{dt} \int_S (W \cdot W^*) dx + \int_S (W \cdot (H + 2\kappa I) W^*) dx = e^{-\kappa t} \int_S (W \cdot f^* + f \cdot W^*) dx. \quad (\text{C.5})$$

On a ici utilisé que W étant de support compact à l'instant initial, son support restera compact aux instants ultérieurs [Eck81]. L'intégrale volumique du deuxième terme de (C.4), transformée en intégrale surfacique par application du théorème de Gauss, est donc nulle à tout instant.

On cherche ensuite à majorer le membre de droite de (C.5). La norme carrée de la différence de deux vecteurs étant positive, on a pour tout vecteur V :

$$W \cdot V^* + V \cdot W^* \leq V \cdot V^* + W \cdot W^* . \quad (\text{C.6})$$

En particulier, pour $V = e^{-\kappa t} f$, (C.5) devient

$$\frac{d}{dt} \int_S (W \cdot W^*) dx + \int_S (W \cdot (H + (2\kappa - 1)I) W^*) dx \leq e^{-2\kappa t} \int_S (f \cdot f^*) dx . \quad (\text{C.7})$$

En choisissant κ suffisamment grand, on peut rendre le produit $W \cdot (H + (2\kappa - 1)I) W^*$ défini positif. Donc

$$\frac{d}{dt} \int_S (w \cdot w^*) e^{-2\kappa t} dx \leq e^{-2\kappa t} \int_S (f \cdot f^*) dx . \quad (\text{C.8})$$

Par intégration temporelle de cette dernière équation, on trouve

$$\begin{aligned} \int_S (w(x, t) \cdot w^*(x, t)) dx &\leq e^{2\kappa t} \int_S (w(x, 0) \cdot w^*(x, 0)) dx \\ &+ e^{2\kappa t} \int_0^t \{ e^{-2\kappa \tau} \int_S (f(x, \tau) \cdot f^*(x, \tau)) dx \} d\tau . \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Annexe D

Conditions limites

Sauf indication contraire, les variables apparaissant dans cette annexe sont les variables complètes.

Comme nous résolvons sur un domaine $]0, R]$, nous avons à examiner le problème des conditions limites en ces deux points.

À la paroi, la mise sous forme caractéristique du système indique que, la vitesse normale à la paroi étant nulle, nous avons trois ondes stationnaires, une onde sortante à la vitesse c et une onde entrante à la vitesse $-c$. La spécification de cette dernière est directement obtenu avec en fonction de l'onde sortante en utilisant la nullité de la vitesse à la paroi. Cette condition limite est donc la seule à imposer sur le système. Pour la perturbation de vitesse, sa linéarisation donne $u(R) = 0$.

Au centre, la condition limite est purement géométrique ([KMA89]) : elle stipule que la valeur de toute variable est unique, i.e. indépendante de θ . Pour la vitesse, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta + V_z \hat{e}_z) \\ &= \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) \hat{e}_r + \left(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \hat{e}_z = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

et pour la pression et la masse volumique

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Pour le champ de base, monodimensionnel en r et tel que $V_\theta(0) = 0$, ces conditions sont automatiquement satisfaites. Pour la perturbation, de forme

$$\mathbf{Y}^T(r, \theta, z, t) = \tilde{\mathbf{Y}}^T(r) e^{-i(\omega t + m\theta + kz)}, \quad (\text{D.3})$$

on doit avoir :

$$\begin{cases} -im\tilde{u} - \tilde{v} = 0, \\ \tilde{u} - im\tilde{v} = 0, \\ -im\tilde{w} = 0, \\ -im\tilde{\varrho} = 0, \\ -im\tilde{p} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

On obtient donc des conditions différentes selon la valeur de m :

- $m = 0$,

$$\begin{cases} \tilde{u} = 0, \\ \tilde{v} = 0, \\ \tilde{w} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\varrho} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{p} \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

- $m = \pm 1$,

$$\begin{cases} \tilde{u} = im\tilde{v}, \\ \tilde{v} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{w} = 0, \\ \tilde{\varrho} = 0, \\ \tilde{p} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

- $m \notin \{-1, 0, +1\}$,

$$\begin{cases} \tilde{u} = 0, \\ \tilde{v} = 0, \\ \tilde{w} = 0, \\ \tilde{\varrho} = 0, \\ \tilde{p} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

D'après Canuto et al. [CHQZ88], lors de la résolution sur $]0, R]$, il n'est pas besoin d'appliquer la moindre condition limite en 0. Nous avons néanmoins examiné le comportement du système différentiel (2.28) au voisinage de 0 par un développement de Taylor des variables du champ porteur comme de celle de la perturbation. Ainsi $R(r) = R_0 + R'_0 r + \dots$. Les ordres dominants, i.e. $1/r$ éventuellement, 1 et r , font apparaître les relations suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{im}{\gamma M^2} p = 0, \\ RW'u - i(\omega + m\Omega + kW + is)Rw - \frac{ik}{\gamma M^2} p = 0, \\ R(u - imv) = 0, \\ \gamma P(u - imv) = 0, \\ 2\Omega Ru - i(\omega + m\Omega + kW + is)Rv - \frac{im}{\gamma M^2} p' = 0, \\ 2R'u + 2Ru' - im(R'v + Rv') - Rikw - i(\omega + m\Omega + kW + is)\varrho = 0, \\ (\gamma + 1)P'u + 2\gamma Pu' - im\gamma(P'v + Pv') - \gamma Pikw - i(\omega + m\Omega + kW + is)p = 0. \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Dans ce système, toutes les variables $\Omega, W, R, P, u, v, w, \rho, p$ et leurs dérivées ont leur valeur au point 0. L'indice 0 a été systématiquement supprimé pour alléger la notation.

De plus, nous avons seulement considéré des champs de base lisses : en particulier $W' = P' = R' = 0$ à l'origine et la masse volumique et la pression ne sont jamais nulles. Le système (D.8) peut donc être réduit en

$$\left\{ \begin{array}{l} mp = 0 , \\ -i(\omega + m\Omega + kW + is)Rw - \frac{ik}{\gamma M^2}p = 0 , \\ u - imv = 0 , \\ 2\Omega Ru - i(\omega + m\Omega + kW + is)Rv - \frac{im}{\gamma M^2}p' = 0 , \\ R(2u' - imv' - ikw) - i(\omega + m\Omega + kW + is)\rho = 0 , \\ \gamma P(2u' - imv' - ikw) - i(\omega + m\Omega + kW + is)p = 0 . \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

Dans le cas où $(\omega + m\Omega + kW + is)$ est non nul au centre (ce qui est garanti pour les cas instables), (D.9) se réduit exactement aux conditions limites (D.5) à (D.7). À titre d'illustration, sur la figure (D.1) sont tracées les parties réelles et imaginaires des modes propres de perturbations de vitesse radiale et azimutale pour $m = 1$ et $k = 1$ pour une rotation solide compressible et une vitesse axiale en cloche.

Il a été vérifié que les conditions limites au centre, comme à la paroi, sont bien satisfaites.

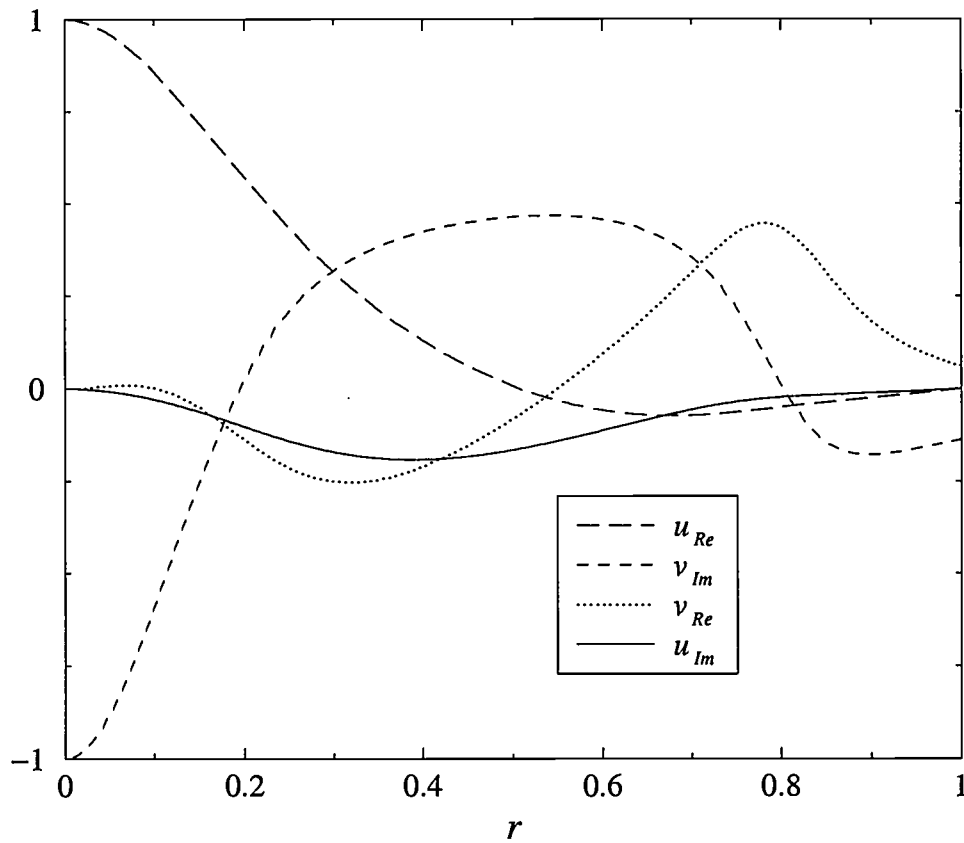


FIG. D.1 – Parties réelles et imaginaires des vitesses radiales et azimutales du mode propres le plus amplifié pour $m = 1$ et $k = 1$ dans le cas d'une rotation solide compressible à $M = 1$. et pour un profil de vitesse axiale en cloche

Bibliographie

- [Bay88] B. J. Bayly. Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows. *Phys. Fluids*, 31 :56–64, 1988.
- [BM79] E. G. Broadbent and D. W. Moore. Acoustic destabilization of vortices. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 290 :353–371, 1979.
- [BO78] C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New-York, 1978.
- [Boy78] J. P. Boyd. Spectral and pseudo spectral methods for eigenvalue and non separable boundary value problems. *Monthly Weather Review*, 106 :1192–1203, 1978.
- [Bro84] E. G. Broadbent. Stability of a compressible two-dimensional vortex under a three-dimensional perturbation. *Proc. R. Soc. London A*, 392 :279–299, 1984.
- [Cha61] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New-York, 1961.
- [CHQZ88] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [CSP93] W. M. Chan, K. Shariff, and T. H. Pulliam. Instabilities of two-dimensional inviscid compressible vortices. *J. Fluid Mech.*, 253 :173–209, 1993.
- [DR81] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [Eck60] Eckart. *Hydrodynamics of oceans and atmospheres*. Pergamon, London, 1960.
- [Eck75] K. S. Eckhoff. Stability problems for linear hyperbolic systems. Technical Report 54, Dept. Appl. Math., Univ. Bergen, 1975.
- [Eck81] K. S. Eckhoff. On stability for symmetric hyperbolic systems, I. *Journal of Differential Equations*, 40 :94–115, 1981.
- [Eck84] K. S. Eckhoff. A note on the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.*, 145 :417–421, 1984.

- [ES78] K. S. Eckhoff and L. Storesletten. A note on the stability of steady inviscid helical gas flows. *J. Fluid Mech.*, 89(3) :401–411, 1978.
- [ES80] K. S. Eckhoff and L. Storesletten. On the stability of rotating compressible and inviscid fluids. *J. Fluid Mech.*, 99(2) :433–448, 1980.
- [FK75] Y. T. Fung and U. H. Kurzweg. Stability of swirling flows with radius-dependant density. *J. Fluid Mech.*, 72(2) :243–255, 1975.
- [Gan75] R. F. Gans. On the stability of shear flow in a rotating gas. *J. Fluid Mech.*, 68(2) :403–412, 1975.
- [HG62] L. N. Howard and A. S. Gupta. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.*, 14 :463–476, 1962.
- [Hir90] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 2 : Computational methods for inviscid and viscous flows. John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
- [HK83] J. K. Hunter and J. B. Keller. Weakly nonlinear high frequency waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, 36 :547, 1983.
- [How73] L. N. Howard. On the stability of compressible swirling flow. *Stud. Appl. Maths*, 52 :39–43, 1973.
- [Hul88] L. S. Hultgreen. Stability of swirling gas flows. *Phys. Fluids*, 31(7) :1872–1876, 1988.
- [Kho91a] M. R. Khorrami. A Chebyshev spectral collocation method using a staggered grid for the stability of cylindrical flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12 :825–833, 1991.
- [Kho91b] M. R. Khorrami. On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.*, 225 :197–212, 1991.
- [KMA89] M. R. Khorrami, M. R. Malik, and R. L. Ash. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *Journal of Computational Physics*, 81 :206–229, 1989.
- [Kov53] L. S. G. Kovásznay. Turbulence in supersonic flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(10) :657–674, 1953.
- [Lal75] D. P. Lalas. The "Richardson" criterion for compressible swirling flows. *J. Fluid Mech.*, 69(1) :65–72, 1975.
- [Leb97] S. Leblanc. *Instabilités Tridimensionnelles dans un Fluide en Rotation*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1997.
- [LH91] A. Lifschitz and E. Hameiri. Local stability conditions in fluid dynamics. *Phys. Fluids A*, 3(11) :2644–2651, 1991.
- [Lif91] A. Lifschitz. Short wavelength instabilities of incompressible three-dimensional flows and generation of vorticity. *Phys. Lett. A*, 157 :481–487, 1991.

- [LL59] L.D. Landau and E.M. Lifchitz. *Fluid mechanics*, volume 6 of *Course of theoretical physics*. Pergamon, London, 1959. pp. 4.
- [LL99] A. Le Duc and S. Leblanc. A note on Rayleigh criterion for compressible flows. *Phys. Fluids*, 11(11) :3563–3566, 1999.
- [LR98] D. W. Lim and L. G. Redekopp. Absolute instability conditions for variable density, swirling jet flows. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17(2) :165–185, 1998.
- [LS83] S. Leibovich and K. Stewartson. A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.*, 126 :335–356, 1983.
- [Mas74] S. A. Maslowe. Instability of rigidly rotating flows to non-axisymmetric disturbances. *J. Fluid Mech.*, 64(2) :307–317, 1974.
- [MMP00] D. I. Meiron, D. W. Moore, and D. I. Pullin. On steady compressible flows with compact vorticity ; the compressible Stuart vortex. *J. Fluid Mech.*, 409 :29–49, 2000.
- [MSH88] M. G. Macaraeg, C. L. Street, and M. Y. Hussaini. A spectral collocation solution to the compressible stability eigenvalue problem. Technical Report TP-2858, NASA, 1988.
- [Ors71] S. A. Orszag. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50(4) :689–703, 1971.
- [PO91] J. P. Pulicani and J. Ouazzani. A Fourier-Chebyshev pseudospectral method for solving steady 3-D Navier-Stokes and heat equations in cylindrical cavities. *Computers & Fluids*, 20(2) :93–109, 1991.
- [RA85] M. Roger and H. Arbey. Relation de dispersion des ondes de pression dans un écoulement tournant. *Acustica*, 59(2) :95–101, 1985.
- [Ray20] Lord Rayleigh. On the dynamics of revolving fluids. *Scientific Papers*, 6 :447–453, 1920.
- [Ros66] M. Roseau. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. Springer, 1966.
- [SCC97] A. Simone, G. N. Coleman, and C. Cambon. The effect of compressibility on turbulent shear flow : a Rapid-Distorsion-Theory and Direct-Numerical-Simulation study. *J. Fluid Mech.*, 330 :307–338, 1997.
- [Soz69] C. Sozou. Adiabatic transverse modes in a uniformly rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 36(3) :605–612, 1969.
- [Soz87a] C. Sozou. Adiabatic perturbations in an unbounded Rankine vortex. *Proc. R. Soc. London A*, 411 :207–224, 1987.
- [Soz87b] C. Sozou. New solutions representing adiabatic transverse waves in a Rankine vortex. *Proc. R. Soc. London A*, 413 :225–234, 1987.

- [SS69] C. Sozou and J. Swithenbank. Adiabatic transverse waves in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 38(4) :657–671, 1969.
- [War75] F. W. Warren. A comment on Gans' stability criterion for steady inviscid helical gas flows. *J. Fluid Mech.*, 68(2) :413–415, 1975.
- [Whi74] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Wiley, New York, 1974.
- [Zey86] R. Kh. Zeytounian. *Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I*, volume 245 of *Lecture notes of physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [ZM91] G. P. Zang and W. H. Matthaus. The equations of nearly incompressible fluids. I. Hydrodynamics, turbulence and waves. *Phys. Fluids A*, 3(1) :69–82, 1991.

Étude d'Écoulements Faiblement Compressibles,
de Giration, puis d'Impact sur Paroi,
par Théorie Linéaire et Simulation Numérique Directe

SECONDE PARTIE

SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE
DES INSTABILITÉS DANS
L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL
COMPRESSIBLE DE HIEMENZ

Anne LE DUC

7 décembre 2001

Étude d'Écoulements Faiblement Compressibles,
de Giration, puis d'Impact sur Paroi,
par Théorie Linéaire et Simulation Numérique Directe

SECONDE PARTIE

SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE
DES INSTABILITÉS DANS
L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL
COMPRESSIBLE DE HIEMENZ

Anne LE DUC

7 décembre 2001

Table des matières

Introduction	111
1 Outils et Champ de Base	117
1.1 Préliminaires. Équations de conservation	117
1.2 Champ de base	119
1.2.1 Cas compressible non visqueux	122
1.2.2 Cas incompressible visqueux	124
1.2.3 Cas compressible visqueux	126
1.3 Méthode Numérique	128
1.4 Runge-Kutta 4 ^{ème} ordre	131
1.5 Conditions limites	139
1.6 Résultats pour le champ de base	147
1.6.1 Champ de base avec paroi adiabatique	148
1.6.2 Influence de la constante \mathcal{K} de la condition limite	154
1.6.3 Champ de base avec paroi isotherme	158
1.7 Forme analytique des perturbations	159
1.7.1 Perturbation solénoïdale	159
1.7.2 Perturbation entropique	162
1.7.3 Perturbation acoustique	166
2 Simulation des Instabilités	167
2.1 Perturbation vorticale centrée, mur adiabatique	167
2.1.1 Comportement linéaire. Perturbation de Görtler-Hämmerlin	169
2.1.2 Établissement des modes propres. Vitesse de propagation	181
2.1.3 Contribution des différentes variables	195
2.1.4 Modes de Fourier	198
2.2 Perturbation vorticale centrée, mur isotherme	213
2.3 Perturbation entropique centrée, mur adiabatique	216
2.4 Perturbation vorticale décentrée, mur adiabatique	220
Conclusions et Perspectives	239

A Perturbation vorticale centrée adiabatique	243
B Perturbation vorticale centrée isotherme	251
C Perturbation vorticale décentrée adiabatique	263
Bibliographie	272

Table des figures

Configuration étudiée	120
1.1 Ligne d'arrêt au bord d'attaque d'une aile en flèche	120
1.2 Ligne d'arrêt sur une plaque plane en impact non normal	120
1.3 Représentation schématique du domaine de calcul du point d'arrêt . .	121
Schéma d'intégration temporelle de Runge-Kutta	134
1.4 Convergence des schémas de 3 ^{ème} et 4 ^{ème} ordre	134
1.5 Domaine de stabilité des schémas de Runge-Kutta de 3 ^{ème} et 4 ^{ème} ordre en fonction du pas de temps Δt	135
1.6 Domaine de stabilité des schémas de Runge-Kutta de 3 ^{ème} et 4 ^{ème} ordre en fonction du pas de temps réduit $\Delta t_s = \Delta t_s/s$	135
1.7 Invariant de Riemann positif intégré avec Runge-Kutta 3 ^{ème} ordre, après 510 diamètres caractéristiques. La discrétisation avec 500 points donne un résultat quasiment indiscernable de la référence	136
1.8 Invariant de Riemann positif intégré avec Runge-Kutta 4 ^{ème} ordre, après 510 diamètres caractéristiques. Les discrétisations avec 200 et 500 points donne un résultat quasiment indiscernable de la référence .	137
1.9 Comparaison des intégrations Runge-Kutta 3 ^{ème} ordre 4 ^{ème} ordre pour deux résolutions différentes. Au temps final, les deux courbes sont difficiles à distinguer. Nous les avons artificiellement décalé. L'axe x en bas se rapporte à la courbe de gauche. Celui en haut se rapporte à la courbe de droite	137
1.10 Dispersion et dissipation du schéma décentré	140
1.11 Dispersion et dissipation du schéma centré	141
Conditions limites	141
1.12 Ondes normales à la face d'entrée	141
Champ de base avec mur adiabatique	149
1.13 Courbe de convergence pour le domaine $50 \times 188\delta$	149
1.14 Champ de pression de base	150
1.15 Champ de vitesse normale de base	150

1.16	Champ de vitesse tangentielle de base	151
1.17	Champ de vitesse périodique de base	151
1.18	Champ d'entropie de base	152
1.19	Champ de température de base	152
1.20	Champ de masse volumique de base	153
1.21	Champ d'enthalpie totale de base	153
1.22	Profil d'enthalpie totale du champ de base	154
1.23	Profil de température du champ de base	155
1.24	Profil de la dérivée de la température du champ de base	155
1.25	Profil de différence de vitesse périodique de l'instant initial par rapport à l'instant final	156
1.26	Courbe de convergence pour différentes valeurs de K	157
1.27	Courbe de convergence pour un mur isotherme	158
Perturbation de divergence nulle		162
1.28	Valeur instantanée de la perturbation de vitesse normale à l'instant 0	162
1.29	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse normale à l'instant 0	163
1.30	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse normale à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$	163
1.31	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse tangentielle à l'instant 0 . .	164
1.32	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse tangentielle à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$	164
1.33	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique à l'instant 0 . . .	165
1.34	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$	165
1.35	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de pression à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$. .	166
Perturbation de vortacité initialement centrée et mur adiabatique		168
2.1	Énergie cinétique de la perturbation en fonction du temps	168
2.2	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de pression au temps adimensionnel $t = 12.03$	170
2.3	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse normale au temps adimensionnel $t = 12.03$	170
2.4	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse tangentielle au temps adimensionnel $t = 12.03$	171
2.5	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 12.03$	171
2.6	Valeur <i>rms</i> de la perturbation d'entropie au temps adimensionnel $t = 12.03$	172
2.7	Valeur <i>rms</i> de la perturbation de température au temps adimensionnel $t = 12.03$	172

2.8	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de pression, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants	176
2.9	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse normale , normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants	176
2.10	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle, normalisé par sa valeur en $y = -70.4$, à différents instants	177
2.11	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants	177
2.12	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants	178
2.13	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de température, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants .	178
2.14	Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de masse volumique , normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants	179
2.15	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse normale au temps $t = 0$	182
2.16	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0$	182
2.17	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0$	183
2.18	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0.174$	183
2.19	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0.349$	184
2.20	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 1.395$	184
2.21	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0.349$	185
2.22	Valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 1.395$	185
2.23	Valeur rms selon z de la perturbation d'entropie au temps $t = 0.174$.	186
2.24	Valeur rms selon z de la perturbation d'entropie au temps $t = 0.349$.	186
2.25	Valeur rms selon z de la perturbation d'entropie au temps $t = 1.395$.	187
2.26	Valeur rms selon z de la perturbation de pression au temps $t = 0.174$	187
2.27	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la pression pour $t \in [0; 1.2]$	188

2.28	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse normale pour $t \in [0; 1.2]$	189
2.29	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [0; 1.2]$	189
2.30	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse périodique pour $t \in [0; 1.2]$	190
2.31	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de l'entropie pour $t \in [0; 1.2]$	190
2.32	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la pression pour $t \in [1.2; 6]$	191
2.33	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse normale pour $t \in [1.2; 6]$	191
2.34	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [1.2; 2.8]$	192
2.35	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [2.8; 6]$	192
2.36	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse périodique pour $t \in [1.2; 6]$	193
2.37	Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de l'entropie pour $t \in [1.2; 6]$	193
2.38	Dérivée selon y de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 1.395$	194
2.39	Position des coordonnées y_{inf} et y_{sup} des perturbations de pression, de vitesses normale et périodique et d'entropie	196
2.40	Vitesse de propagation de la perturbation initiale	196
2.41	Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques	198
2.42	Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse	199
2.43	Valeur rms de la divergence de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$	199
2.44	Valeur rms de la vorticité normale de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$	200
2.45	Valeur rms de la vorticité tangentielle de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$	200
2.46	Valeur rms de la vorticité périodique de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$	201
2.47	Divergence de la vitesse de base	201
2.48	Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de pression	204
2.49	Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	204

2.50 Normes carrées du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	205
2.51 Normes carrées du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	205
2.52 Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	208
2.53 Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	208
2.54 Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	209
2.55 Amplitudes du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	209
2.56 Phases du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	210
2.57 Pulsation	210
2.58 Pulsation par rapport au champ de base	211
2.59 Amplitudes du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	211
2.60 Phases du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	212
2.61 Maximum selon x des différents modes de Fourier de v à $t = 35.98$	213
2.62 Maximum selon x du mode de Fourier constant $t = 35.98$	214
2.63 Maximum selon x du fondamental $t = 35.98$	214
2.64 Maximum selon x du premier harmonique $t = 35.98$	215
Perturbation de vortacité initialement centrée et mur isotherme	216
2.65 Évolution de l'énergie cinétique de la perturbation	216
2.66 Amplitudes du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	217
2.67 Phases du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	217
2.68 Amplitudes du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	218
2.69 Phases du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	218
2.70 Pulsation	219
Perturbation d'entropie initialement centrée et mur adiabatique	220
2.71 Énergie cinétique de la perturbation en fonction du temps	220
2.72 Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques	221

2.73 Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse	221
Perturbation de vorticité initialement décentrée et mur adiabatique	222
2.74 Évolution de l'énergie cinétique de la perturbation	222
2.75 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 0$	223
2.76 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 0.581$	223
2.77 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 0.872$	224
2.78 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 1.163$	224
2.79 Maximum sur x_E de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse normale	226
2.80 Maximum sur x_I de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse normale	227
2.81 Maximum sur x_E de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse périodique	227
2.82 Maximum sur x_I de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse périodique	228
2.83 Maximum sur x_E de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation d'entropie	228
2.84 Maximum sur x_I de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation d'entropie	229
2.85 Maximum sur x_E de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse tangentielle	229
2.86 Maximum sur x_I de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de vitesse tangentielle	230
2.87 Maximum sur x_E de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de pression	230
2.88 Maximum sur x_I de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de pression	231
2.89 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de pression au temps adimensionnel $t = 24.01$	231
2.90 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse normale au temps adimensionnel $t = 24.01$	232
2.91 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse tangentielle au adimensionnel temps $t = 24.01$	232
2.92 Valeur <i>rms</i> de la perturbation de vitesse périodique au adimensionnel temps $t = 24.01$	233

2.93 Valeur *rms* de la perturbation d'entropie au temps adimensionnel $t = 24.01$ 233

2.94 Vitesse de propagation de la perturbation initiale en sortie de couche limite 234

2.95 Position des coordonnées y_{inf} et y_{sup} à l'intérieur de la couche limite . 235

2.96 Vitesse de propagation de la perturbation initiale 235

2.97 Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques . 236

2.98 Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse 237

Annexe A : Perturbation de vorticité initialement centrée sur un mur adiabatique **243**

A.1 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale 244

A.2 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle 244

A.3 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique 245

A.4 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie 245

A.5 Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode constant des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 246

A.6 Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 246

A.7 Amplitudes du mode constant de toutes les perturbations à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 247

A.8 Amplitudes du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 247

A.9 Amplitudes, en échelle logarithmique, du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 248

A.10 Amplitudes, en échelle logarithmique, du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 248

A.11 Amplitudes du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 249

A.12 Phases du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 249

A.13 Amplitudes du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 250

A.14 Phases du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ 250

Annexe B : Perturbation de vorticité initialement centrée sur un mur isotherme	251
B.1 Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques .	252
B.2 Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse	252
B.3 Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	253
B.4 Normes carrées du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	253
B.5 Normes carrées du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	254
B.6 Normes carrées du deuxième harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	254
B.7 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de pression	255
B.8 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale	255
B.9 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle	256
B.10 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique	256
B.11 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie	257
B.12 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de température	257
B.13 Normes carrées des diff�erents modes de Fourier pour la perturbation de masse volumique	258
B.14 Amplitudes du mode constant de toutes les perturbations à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	258
B.15 Amplitudes du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	259
B.16 Amplitudes du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	259
B.17 Phases du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	260
B.18 Amplitudes du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	260
B.19 Phases du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$	261

Annexe C : Perturbation de vorticité initialement décentrée sur un mur adiabatique	263
C.1 Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de pression à différents instants	264
C.2 Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse normale à différents instants	264
C.3 Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle à différents instants	265
C.4 Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique à différents instants	265
C.5 Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie à différents instants	266
C.6 Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	266
C.7 Normes carrées du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	267
C.8 Normes carrées du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques	267
C.9 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de pression	268
C.10 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale	268
C.11 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle	269
C.12 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique	269
C.13 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie	270
C.14 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de température	270
C.15 Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de masse volumique	271

Introduction

Les travaux sur la transition de l'écoulement au bord d'attaque d'une aile en flèche (non perpendiculaire au fuselage) ont débuté dans les années 1950 avec les expériences de Cray [Cra52]. Quand la vitesse atteint une valeur critique, la transition est localisée très proche du bord d'attaque. Des visualisations montrent que près de cette valeur critique, on peut parfois observer des courants de basse et haute vitesse alignés avec l'écoulement moyen et peu espacés. Stuart dans [GSW55] suppose que cette l'instabilité est due à un "crossflow" (composante transverse). En effet, la courbure des lignes de courant induit une force centrifuge. Celle-ci est équilibrée par le gradient de pression à l'extérieur de la couche limite. Mais cette force centrifuge décroît dans la couche limite. La pression (constante en première approximation au travers de la couche limite) crée donc une vitesse perpendiculaire à la vitesse en sortie de couche limite. Un tel écoulement peut être instable à des ondes obliques. Stuart attribue l'instabilité à la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse projeté dans la direction du nombre d'onde oblique. Un système de succion est sensé pouvoir supprimer cette instabilité de crossflow non visqueuse.

Les tests menés par Gaster [Gas65] dix années plus tard démontrent l'inefficacité du système de succion. Gaster identifie alors un mécanisme de déstabilisation par contamination le long du bord d'attaque. La turbulence créée à la jonction aile-fuselage est propagée le long du bord d'attaque et fait instantanément transitionner toute l'aile. Gaster note qu'une fois que le bord d'attaque est turbulent, les systèmes de succion sont inopérants pour relaminariser l'aile. Il propose alors de coller sur le bord d'attaque une bosse (Gaster bump) qui arrête l'écoulement perturbé venant de la jonction. Au delà du bump, une couche limite fraîche est créée. Il étend ses tests en 1967 [Gas67]. Par des tests en vol sur une aile en flèche, il détermine que des perturbations de forte intensité ne survivent pas si le nombre de Reynolds Re_θ , basé sur la vitesse en sortie de couche limite le long du bord d'attaque et l'épaisseur de quantité de mouvement, est inférieur à environ 100. Ceci est le Reynolds critique inférieur. Gaster conduit par ailleurs une série de tests en soufflerie. Il impose des fluctuations de pression sinusoïdales de faible amplitude avec un microphone placé au bord d'attaque. L'amplitude est mesurée le long du bord d'attaque. Gaster note que la perturbation est une onde propagative avec vitesse de phase constante. La vitesse de propagation dépend de la fréquence de la source. Jusqu'à $Re_\theta = 170$, nombre de

Reynolds maximal autorisé par son installation, il n'y a pas amplification.

Cumpsty et Head [CH69] en 1969 et Poll [Pol79] en 1979 identifient un mécanisme d'instabilité visqueux, distinct de l'instabilité de crossflow, au bord d'attaque d'un cylindre en flèche. Le nombre de Reynolds, toujours basé sur la vitesse hors de la couche limite le long du bord d'attaque et l'épaisseur de quantité de mouvement, pour voir apparaître les premières instabilités est $R_\theta = 230$. Un calcul théorique utilisant le profil de vitesse le long du bord d'attaque (avec hypothèse d'écoulement parallèle) donne un nombre de Reynolds critique légèrement trop élevé ($Re \sim 270$) [Jos96].

Il est alors clair que les mécanismes d'instabilité sur une aile en flèche de grand rapport d'aspect sont multiples [CL97]. Il y a possibilité de contamination par la turbulence créée le long du fuselage ou à la jonction aile-fuselage, possibilité de déstabilisation par onde de Tollmien-Schlichting le long du bord d'attaque, possibilité d'instabilité de crossflow si la courbure des lignes de courant est assez forte [Pol85, Bip99], et aussi possibilité d'instabilité par tourbillons de Taylor-Görtler si l'aile présente des zones concaves [HMP84]. Si le bord d'attaque est turbulent, les systèmes de succion sont inopérants pour ramener le reste de l'aile dans un état laminaire. La connaissance de l'instabilité au bord d'attaque est donc critique dans le souci de développer des ailes laminaires.

Dans la mesure où l'utilisation d'une hypothèse d'écoulement parallèle n'est pas supportée par la topologie de l'écoulement et que, dans le même temps, l'étude était longtemps prohibitivement compliquée, d'autres simplifications furent recherchées. La première consiste à simplifier la géométrie. Cumpsty et Head [CH67] déterminent en 1967 que la dépendance du champ de base vis-à-vis de la direction le long du bord d'attaque peut être négligée pour des ailes de grand rapport d'aspect. Ceci revient à analyser le bord d'attaque d'une aile infinie. De plus l'instabilité de la ligne d'arrêt étant limitée à une zone très proche du bord d'attaque, il est possible de considérer un impact sur une plaque plane. Hall et Malik dans [HM86] notent en effet que l'écoulement sur un cylindre en flèche peut être au premier ordre modélisé par l'impact non perpendiculaire sur une plaque plane. Ceci revient à négliger les effets de courbure. Par ailleurs, des simplifications sur les modes propres sont recherchées. Celles-ci viennent de l'étude du cas de l'impact perpendiculaire (la vitesse le long du bord d'attaque est nulle).

Historiquement, ce cas est abordé beaucoup plus tôt et fait plus l'objet d'études théoriques. Hiemenz détermine en 1911 la solution semi-analytique satisfaisante par un écoulement impactant perpendiculairement à un plan. Cette solution, rappelée par Schlichting dans [Sch79], est une solution exacte des équations de Navier-Stokes et non simplement des équations simplifiées de couche limite. L'étude de sa stabilité débute avec Görtler et Hämmerlin en 1955 [Gör55, Häm55]. Ils pensent que l'écoulement supporte une instabilité centrifuge et déterminent un cadre d'étude simplificateur, utilisé plus tard aussi pour l'impact non perpendiculaire. Ils perturbent le

champ de base à l'aide de modes normaux en temps et dans la direction où la vitesse de base est nulle. Ils supposent ensuite que la perturbation de vitesse a les mêmes dépendances vis-à-vis de la coordonnée tangentielle (direction où l'écoulement est accéléré) que le champ de base. Ceci est désigné dans les travaux subséquents comme l'hypothèse de Görtler et Hämmerlin. Görtler note que le choix de cette simplification est simplement dicté par des raisons de faisabilité analytique. Hämmerlin détermine alors des modes instables appartenant au spectre continu et décroissant algébriquement normalement au mur. Wilson et Gladwell [WG78] au contraire déclarent ces modes non acceptables physiquement, car ne présentant pas une décroissance exponentielle hors de la couche limite, où est créée l'instabilité. Ils concluent que le point d'arrêt plan est stable. Comme noté par Lyell et Huerre [LH85], les études expérimentales [CA71, Has71] révèlent au contraire de multiples régimes secondaires. Lyell et Huerre proposent donc une étude non linéaire par méthode de Galerkin. Ils retiennent une combinaison linéaire des trois modes les moins amortis du problème linéaire et étudient son évolution non linéaire. Ils concluent qu'il est vraisemblable que le point d'arrêt plan soit instable vis-à-vis de perturbations de forte amplitude mais ne cachent pas que, le développement étant fortement tronqué, le résultat est au plus qualitatif. Türkyilmazoğlu et Gajjar [TG99] montrent avec des développements multiéchelles autour d'une position tangentielle donnée que le point d'arrêt plan n'admet pas de points satisfaisant un critère d'instabilité absolue. Ils suggèrent que l'écoulement est seulement convectivement instable. À l'exception de la dernière référence, toutes ces études utilisent des perturbations de Görtler et Hämmerlin.

Outre leur mérite propre pour l'étude du point d'arrêt plan, ces études permettent de mieux saisir les problèmes apparaissant aussi dans l'étude du point d'arrêt tridimensionnel. La condition limite d'entrée apparaît ainsi critique.

Hall, Malik et Poll dans [HMP84] abordent le problème du point d'arrêt tridimensionnel par une étude de modes propres aussi dans le cadre des perturbations de Görtler et Hämmerlin. Comme pour le cas plan, le champ de base peut être déterminé analytiquement comme solution exacte des équations de Navier-Stokes. Hall et al. déterminent alors un nombre de Reynolds critique, au delà duquel les perturbations sont linéairement amplifiées. Ce nombre est en bon accord avec l'étude expérimentale de Poll [Pol79], mais très légèrement supérieur. Ils notent aussi qu'il n'y a pas de manière rationnelle de simplifier le problème complet (même sous hypothèse de modes de Görtler et Hämmerlin) en un problème de Orr-Sommerfeld. Des études non linéaires ont complété l'étude. En effet, la grande différence entre le nombre de Reynolds de survie de perturbations de forte intensité et celui d'amplification de perturbations infiniment petites autorise des possibilités de transition sous-critique. Hall et Malik [HM86] mènent une étude faiblement non linéaire. Ils considèrent des couples nombre de Reynolds / nombre d'onde proches de ceux des courbes neutres et examinent alors l'évolution de modes faiblement non linéaires (somme de modes propagatifs le long du bord d'attaque, d'amplitude décroissante avec la fréquence).

Tous ces modes ont les symétries de Görtler et Hämmerlin. Hall et Malik déterminent ainsi une zone sous critique. Hall et Seddougui [HS90] considèrent une interaction faiblement linéaire entre des modes obliques et les modes de Görtler et Hämmerlin bidimensionnels. Ils espèrent ainsi trouver un lien avec l'instabilité de crossflow, instabilité située en aval du bord d'attaque par rapport à celle de la ligne d'arrêt. Dans le même but, Bertolotti [Ber99] quand à lui étend la classe des perturbations admissibles. En sus des modes de Görtler et Hämmerlin il propose de chercher les perturbations sous la forme de fonctions hypergéométriques confluentes. Il réalise ainsi un lien entre l'instabilité de la couche limite au bord d'attaque et l'instabilité de crossflow. Mais par un argument analogue à celui présenté par Brattkus et Davis [BD91], il n'est pas clair qu'il ne faille pas éliminer les nouveaux modes proposés par Bertolotti car ils pourraient être de vorticité non algébriquement bornée avec la distance à la ligne d'arrêt.

Il est à noter qu'à l'exception de Bertolotti, toutes ces études font appel à l'hypothèse de Görtler et Hämmerlin. Or celle-ci a été introduite simplement pour obtenir un problème soluble analytiquement.

Spalart [Spa88] est en 1988 le premier à s'intéresser à la validité de cette hypothèse de modes de Görtler et Hämmerlin. Il réalise une simulation numérique directe incompressible. Sa perturbation initiale est sinusoïdale le long du bord d'attaque et un bruit blanc localisé au dessus de la ligne d'arrêt dans les deux autres directions. Après un régime transitoire, il observe les modes de Görtler et Hämmerlin. Sa simulation utilise des zones éponges en sortie qui perturbent grandement le régime transitoire. Leur influence sur l'état final atteint n'est pas claire non plus.

Toutes les études précédemment citées sont limitées au cas incompressible. Une étude compressible (même faiblement) présente un intérêt académique par la possibilité de peut-être déterminer un nombre de Reynolds critique plus faible. Il n'est pas évident que l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire sur la perturbation, même en présence d'un champ de base faiblement modifié, donne les mêmes instabilités. En particulier des instabilités par le mode entropique peuvent être envisagées. Par ailleurs, l'écoulement du point d'arrêt a des applications aéroacoustiques. Povitsky [Pov99, Pov00] note l'importance pratique de l'écoulement d'arrêt pour l'application aéroacoustique au bruit crée par un jet impactant sur une aile. En particulier, il note l'importance de la génération barocline de vorticité sur l'énergie acoustique. Malheureusement, Povitsky suppose que la vitesse du son de l'écoulement de base est uniforme alors qu'il utilise comme champ de base la solution incompressible. De plus, son étude est limitée à un impact perpendiculaire, et au cas sans viscosité. Or Criminale et al. [CJL94] déterminent (en incompressible) par la résolution d'un problème aux valeurs initiales que le point d'arrêt bidimensionnel non visqueux est neutralement stable. La seule solution physique acceptable pour le champ de base tridimensionnel est de superposer une vitesse le long du bord d'attaque uniforme. Ceci est sans incidence sur les propriétés de stabilité. Le

point d'arrêt tridimensionnel Euler est donc stable (au passage, notons que le point d'arrêt est un point hyperbolique mais qu'il est stable en raison de la présence du mur qui force la perturbation de vitesse normale à zéro). Les propriétés de stabilité des écoulements visqueux et non visqueux sont donc différentes. Une étude visqueuse compressible apparaît donc nécessaire. Collis et Lele [CL99] s'intéressent au problème de la réceptivité proche d'un bord d'attaque parabolique dans le cas compressible. Ils considèrent les équations linéarisées et excluent la ligne d'arrêt de leur étude. Ils s'intéressent en effet à la réceptivité pour l'instabilité de crossflow. Lin et Malik dans [LM95] étudient la stabilité, vis-à-vis de perturbations obliques très petites, d'une ligne d'arrêt compressible sur un objet parabolique derrière un choc en cloche. Ils déterminent un nombre de Reynolds critique basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement d'approximativement 125, à comparer avec 235 dans le cas d'une ligne d'arrêt sur une plaque plane et un écoulement incompressible. Le problème de cette étude réside dans le champ de base employé. En effet, Lin et Malik utilisent les simplifications de la couche limite (dérivées normales à l'objet très supérieures aux dérivées le long de l'objet et vitesse normale caractéristique très inférieure à la vitesse le long de l'objet), dont l'emploi pour la ligne d'arrêt est d'autant moins justifiée que le nombre de Reynolds est faible [HMP84]. De plus l'inclusion de l'effet de courbure complique l'analyse par le mélange des effets de courbure et de compressibilité.

Il n'existe pas à notre connaissance d'étude sur la stabilité compressible d'une ligne d'arrêt sur une plaque plane, avec champ de base solution des équations de Navier-Stokes compressibles sans simplification. Ce cas est important dans la mesure où le cas plan est la référence pour évaluer les effets de courbure au bord d'attaque. Par ailleurs, en vue d'une étude théorique, il est utile de déterminer en compressible la validité des modes de Görtler et Hämmerlin. À ce titre, on peut considérer les résultats de Spalart comme intéressants dans la motivation mais potentiellement entachés d'erreur numérique, particulièrement dans le développement d'une phase transitoire. Dans le cas faiblement compressible, on peut aussi espérer faire un lien avec le cas strictement incompressible.

Nous étudions le cas du point d'arrêt tridimensionnel (avec vitesse le long du bord d'attaque) par une simulation numérique directe. D'une part, il présente une application industrielle plus évidente que le cas plan, d'autre part sa contrepartie incompressible est moins sujette à controverses. De plus, nous examinons un cas faiblement compressible et nous nous plaçons à un nombre de Reynolds supérieur au nombre de Reynolds critique du cas incompressible.

Nous chercherons en particulier à examiner la validité de l'hypothèse simplificatrices des modes de Görtler et Hämmerlin. Une étude de réceptivité strictement parlant est exclue dans un premier temps. Selon la définition posée par Morkovin en 1969, la réceptivité est le processus par lequel les instabilités de la couche limite sont excitées par les perturbations extérieures à la couche limite. Elle fait l'objet d'études

dans le cas de couches limites bidimensionnelles [Kac94, BH99]. Ses éléments les plus importants sont l'ajustement entre les longueurs d'onde de l'excitation et celles des modes instables en fonction de paramètres tels le niveau de turbulence externe et la rugosité [WSGG01, Cro94]. Un paramètre peut avoir des effets différents sur la stabilité (par exemple le nombre de Reynolds critique) et sur la réceptivité. Aussi, dans la mesure où l'effet de compressibilité est nouveau, nous avons souhaité nous limiter à une expérience avec excitation de tous les modes d'instabilité par bruit blanc.

Le manuscrit se présente en deux chapitres. Dans le premier, nous présentons les outils qui nous ont permis de mener la simulation numérique directe. Après avoir brièvement rappelé les équations de Navier-Stokes et d'Euler (section 1.1), nous présentons le champ de base (section 1.2), obtenu à partir d'une correction compressible pour faible nombre de Mach. Nous exposons ensuite la méthode numérique utilisée (section 1.3) en insistant sur le schéma d'intégration temporelle (section 1.4) et sur les conditions limites (section 1.5). Pourvus de ces outils, nous pouvons calculer un champ de base avec mur adiabatique et mur isotherme (section 1.6). Nous terminons ce premier chapitre par la forme analytique des perturbations de vorticité et d'entropie utilisées (section 1.7).

Les résultats des simulations de perturbations font l'objet du deuxième chapitre. Nous avons tout d'abord introduit une perturbation de vorticité au-dessus de la ligne d'arrêt. Le mur est adiabatique (section 2.1). Pour évaluer l'influence de la condition limite thermique, nous avons repris le même test avec un mur isotherme (section 2.2). Pour évaluer l'influence de la perturbation initiale, nous avons ensuite repris le cas du mur adiabatique avec une perturbation initialement en entropie pure (section 2.3). Pour finir, nous présentons une simulation avec mur adiabatique où la perturbation de vorticité initiale est décentrée par rapport à la ligne d'arrêt (section 2.4). Nous concluons avec quelques perspectives d'étude.

Chapitre 1

Outils et Champ de Base

1.1 Préliminaires. Équations de conservation

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot [-p\mathbf{v} + \bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}], \end{cases} \quad (1.1)$$

où l'état aérodynamique du fluide est décrit par la pression p , la vitesse \mathbf{v} , la masse volumique ρ et l'énergie interne e . $\frac{d}{dt}$ est l'opérateur de dérivation matérielle, qui suit une particule fluide dans son mouvement : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$.

Le gaz est supposé parfait :

$$\begin{aligned} p &= \rho \mathcal{R} T, \\ e &= C_v T, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où T est la température et \mathcal{R} la constante des gaz parfaits. La capacité thermique à volume constant C_v et à pression constante C_p sont des constantes (elles ne dépendent pas de la température). Le rapport C_p/C_v est noté γ .

Le fluide est newtonien : le tenseur des contraintes dépend linéairement du tenseur des déformations :

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{S}} + \mu' (\text{tr} \bar{\bar{S}}) \bar{\bar{I}}, \quad (1.3)$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique et μ' le second coefficient de viscosité dynamique. $\bar{\bar{S}}$ est le tenseur des déformations :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t), \quad (1.4)$$

où t désigne le tenseur transposé. Nous supposons que le fluide est de Stokes :

$$\mu' = -\frac{2\mu}{3}. \quad (1.5)$$

De plus nous supposons que la viscosité dynamique suit une loi en puissance :

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^n, \quad (1.6)$$

avec $n = 0.7$. La viscosité dynamique de référence μ_{ref} est atteinte quand la température est égale à la température de référence T_{ref} .

Le flux de chaleur q suit la loi de Fourier :

$$q = -\lambda \nabla T, \quad (1.7)$$

où λ est la conductibilité thermique. Nous supposons que le nombre de Prandtl de l'écoulement est constant :

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} \quad (1.8)$$

est fixé à 0.72.

L'équation de conservation de l'énergie peut être réécrite de manière équivalente en utilisant l'entropie, définie à une constante additive près. En choisissant la valeur de référence de l'entropie égale à $C_v \ln(p_{ref}/\rho_{ref}^\gamma)$, l'entropie s s'écrit

$$s = C_v \ln(p/\rho^\gamma). \quad (1.9)$$

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\rho \frac{ds}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{T} \nabla T \right) + \frac{1}{T} \left(\Phi + \frac{\lambda}{T} \nabla T \cdot \nabla T \right). \quad (1.10)$$

$\Phi = \bar{\tau} : \bar{S} = \tau_{ij} S_{ij}$ est la fonction de dissipation, toujours positive.

Un cas particulier des équations de Navier-Stokes est obtenu quand les coefficients de viscosité et de conductibilité thermique sont fixés à zéro. On obtient alors les équations d'Euler.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p, \\ \frac{ds}{dt} = 0. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Une forme encore plus spécifique sera utilisée en appliquant l'hypothèse d'homotropie : le champ d'entropie est uniforme. La nullité du gradient d'entropie

combinée à l'isentropie $d_t s = 0$ implique que l'entropie est constante en temps et en espace. La définition de l'entropie permet alors d'écrire $p = \varrho^\gamma \frac{p_{ref}}{\varrho_{ref}^\gamma}$.

Le système des équations Euler homoentropique s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \\ p = \varrho^\gamma \mathcal{K}, \end{cases} \quad (1.12)$$

avec $\mathcal{K} = p_{ref} / \varrho_{ref}^\gamma$

Quand nous décomposerons les variables en champ de base et perturbation, nous utiliserons des capitales pour le champ de base et des minuscules pour la perturbation. La masse volumique sera écrite $R + \varrho$, où R est la masse volumique du champ de base.

1.2 Champ de base

Nous cherchons à obtenir une solution stationnaire de l'écoulement compressible visqueux au voisinage de la ligne d'arrêt du bord d'attaque d'une aile en flèche (voir figure 1.1), plongée dans un écoulement de vitesse à l'infini amont Q_∞ . La composante de la vitesse parallèle au bord d'attaque (aligné avec l'axe z) est W_∞ . La normale au bord d'attaque est $-x$. y est la direction tangentielle. Nous supposons que l'aile est de longueur infinie dans la direction z . Nous négligeons de plus la courbure au bord d'attaque et modélisons la géométrie par un plan. La représentation schématique de l'écoulement impactant sur une plaque plane est donnée figure (1.2). Dans la suite, cet écoulement sera appelé point d'arrêt tridimensionnel, par opposition au point d'arrêt bidimensionnel, obtenu pour un écoulement impactant sur une aile droite ($W_\infty = 0$, soit un impact normal).

Nous disposons d'un champ de base semi-analytique pour la même géométrie avec hypothèse d'écoulement incompressible. Comme nous limitons notre étude à des nombres de Mach modérés et qu'en particulier le nombre de Mach de référence pour l'impact normal est nul, nous avons cherché à corriger la solution incompressible avec un développement en puissances de Mach. Nous avons pu obtenir une correction analytique pour le cas non visqueux. Les cas visqueux incompressible et compressible non visqueux s'obtiennent à partir du cas incompressible non visqueux. Nous présentons donc tout d'abord brièvement ce dernier cas.

Nous considérons un domaine parallélépipédique borné par une face d'entrée \mathcal{X}_m , un mur \mathcal{X}_p , deux faces de sorties \mathcal{Y}_m et \mathcal{Y}_p et deux faces en périodicité \mathcal{Z}_m et \mathcal{Z}_p . Ces orientations sont représentées sur la figure (1.3). Comme l'aile en flèche est d'extension infinie, les variables du champ de base dépendent exclusivement de x et y . Dans les cas non visqueux (compressible aussi bien qu'incompressible) et visqueux

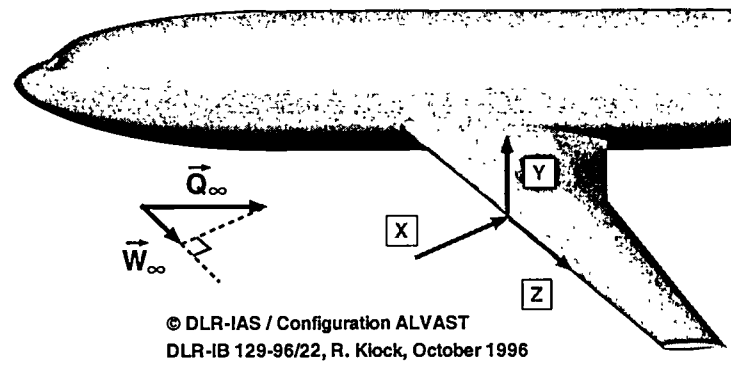


FIG. 1.1 – Ligne d'arrêt au bord d'attaque d'une aile en flèche. Le repère (x,y,z) est local au bord d'attaque

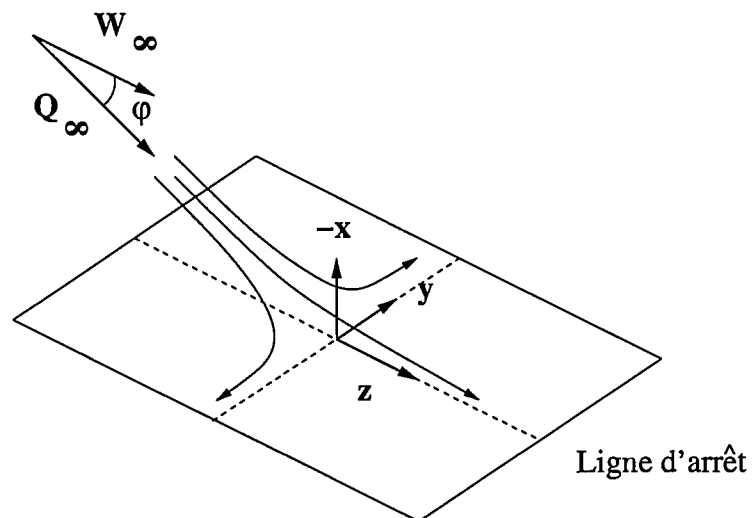


FIG. 1.2 – Ligne d'arrêt sur une plaque plane en impact non normal. Le repère (x,y,z) est local à la plaque

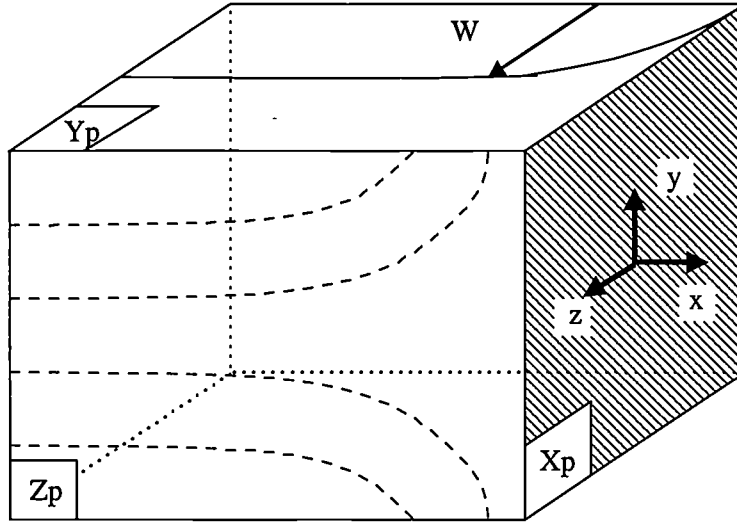


FIG. 1.3 – Représentation schématique du domaine de calcul du point d'arrêt. Les lignes pointillées sont la projection des lignes de courant dans le plan (x, y)

incompressible, les variables U, V, P (et S) sont découplées de W . La solution du cas potentiel incompressible satisfait $\nabla^2 V = 0$ soit

$$\begin{aligned} U &= - Bx, \\ V &= By, \end{aligned} \quad (1.13)$$

qui est la solution d'un point d'arrêt hyperbolique, situé ou non sur un mur. B est un gradient de vitesse, i.e. un temps caractéristique. Il n'y a pas d'échelle de longueur caractéristique. W peut ensuite être déduite de la conservation de la quantité de mouvement dans la direction z qui, en l'absence de gradient de pression, s'écrit :

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

La valeur de W est donc constante sur les lignes de courant du plan (x, y) : $W = kxy + W_0$. La seule solution raisonnablement physique pour un point d'arrêt tridimensionnel non visqueux est donc $W = W_0$, qui, par transformation galiléenne, est équivalente à $W = 0$ pour l'étude de stabilité.

Nous présentons maintenant la correction compressible analytique de cette solution. Puis nous rappellerons le résultat incompressible visqueux [Whi74]. Nous l'adapterons ensuite au cas compressible visqueux qui nous occupe en tenant compte du développement non visqueux. Cette solution initiale a ensuite été amenée à convergence dans le code de simulation numérique directe afin de disposer pour l'étude de stabilité d'un champ de base compressible convergé.

1.2.1 Cas compressible non visqueux

Nous avons ici utilisé pour point de départ les travaux de Zeytounian sur le lien entre un écoulement compressible à bas nombre de Mach et un écoulement incompressible [Zey86].

Dans le cas d'un écoulement Euler compressible homoentropique ($\nabla S = 0$) stationnaire ($\partial_t S = 0$) les équations d'Euler de conservation de l'entropie, de la quantité de mouvement et de la continuité peuvent s'écrire sous forme dimensionnelle

$$\begin{cases} P = R^\gamma K , \\ R \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla P = 0 , \\ \mathbf{V} \cdot \nabla R + R \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 , \end{cases} \quad (1.15)$$

où R est la masse volumique (et *non* la constante des gaz). De l'homoentropie (1.15₁), on tire

$$\nabla P = a^2 \nabla R , \quad (1.16)$$

avec $a^2 = \gamma P/R$ vitesse du son locale. Par projection de la conservation de la quantité de mouvement (1.15₂) sur la vitesse et soustraction de la continuité (1.15₃) réécrite à l'aide de (1.16), on obtient

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = a^2 \nabla \cdot \mathbf{V} . \quad (1.17)$$

Nous supposons désormais additionally que l'écoulement est irrotationnel. Aussi (1.15₂) réécrite avec (1.16) donne

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right) + \underbrace{\frac{\nabla P}{R}}_{\nabla \left(\frac{a^2}{\gamma - 1} \right)} = 0 . \quad (1.18)$$

$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{\mathbf{V}^2}{2}$ est donc une constante de l'écoulement. Cette relation traduit simplement le transfert sans perte entre l'énergie potentielle par unité de masse $C_p T = a^2/(\gamma - 1)$ et l'énergie cinétique par unité de masse $\mathbf{V}^2/2$, ou conservation de l'enthalpie totale.

En introduisant (1.18) dans (1.17) et en utilisant que dans l'écoulement irrotationnel la vitesse dérive d'un potentiel ϕ suivant $\mathbf{V} = \nabla \phi$, on peut finalement écrire l'équation dite de Steichen :

$$\begin{cases} a^2 \nabla^2 \phi = (\nabla \phi)^t (\nabla \nabla \phi) (\nabla \phi) , \\ a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi , \end{cases} \quad (1.19)$$

où a_0 est la vitesse du son au point d'arrêt.

Afin d'obtenir la correction due à la compressibilité, nous effectuons maintenant un développement autour du nombre de Mach $M = 0$. Cette idée apparaît déjà dans des travaux de Lord Rayleigh concernant la forme analytique du potentiel de vitesse pour un écoulement autour d'un cylindre [Ray16] (repris dans [Lam32]). Il a montré que pour une vitesse petite devant celle du son, il est possible de trouver une correction compressible à l'ordre a^2 dépendant de la solution incompressible. L'opération peut être répétée pour obtenir une solution en puissances de a^2 . Nous reprenons la même méthode pour le point d'arrêt. Pour faire apparaître le petit paramètre M , il est plus pratique de travailler sur la forme adimensionnelle de l'équation. Pour les grandeurs thermodynamiques, la valeur de référence est au point d'arrêt. En revanche, la vitesse est adimensionnée avec une vitesse U_∞ , prise à une distance arbitraire L_∞ du point d'arrêt, sur l'axe x . Il est à noter qu'il faut impérativement choisir une distance arbitraire car dans le cas non visqueux, l'écoulement n'a pas de longueur caractéristique. Ce choix conditionne celui de la vitesse de référence car il existe un gradient de vitesse caractéristique du point d'arrêt. Avec ce choix d'adimensionnement et le nombre de Mach donc défini comme $M = U_\infty/a_0$, le système (1.19) s'écrit

$$\begin{cases} a^2 \nabla^2 \Phi = M^2 (\nabla \phi)^t (\nabla \nabla \phi) (\nabla \phi) , \\ a^2 = 1 - M^2 \frac{\gamma - 1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi . \end{cases} \quad (1.20)$$

Dans cette équation, on peut introduire le développement en puissances de Mach de Rayleigh-Jansen, valable pour un écoulement stationnaire [Viv70] :

$$\phi = \phi_0(x, y) + M^2 \Phi_2(x, y) + \dots , \quad (1.21)$$

pour aboutir aux deux ordres M^0 et M^2 à :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_0 = 0 , \\ \nabla^2 \phi_2 = (\nabla \phi_0)^t (\nabla \nabla \phi_0) (\nabla \phi_0) . \end{cases} \quad (1.22)$$

$\nabla^2 \phi_0 = 0$ est simplement l'équation de l'écoulement potentiel incompressible. Le champ de vitesse bidimensionnel adimensionné s'écrit à l'ordre dominant

$$\begin{cases} U_0 = -x , \\ V_0 = y , \\ \phi_0 = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) . \end{cases} \quad (1.23)$$

La correction à l'ordre M^2 satisfait donc

$$\nabla^2 \phi_2 = -x^2 + y^2 , \quad (1.24)$$

qui admet pour solution

$$\begin{cases} U_2 = -\frac{x^3}{3} , \\ V_2 = \frac{y^3}{3} , \\ \phi_2 = \frac{1}{12}(y^4 - x^4) . \end{cases} \quad (1.25)$$

Finalement on peut écrire la vitesse selon

$$\begin{cases} U = -x - M^2 \frac{x^3}{3}, \\ V = y + M^2 \frac{y^3}{3}, \end{cases} \quad (1.26)$$

ou sous forme dimensionnelle

$$\begin{cases} U = -Bx - \frac{B^3}{3a_0^2} x^3, \\ V = By + \frac{B^3}{3a_0^2} y^3. \end{cases} \quad (1.27)$$

Elle dépend du gradient physique B mais non de la distance arbitraire L_∞ .

En outre, le même type de développement pour la pression sous forme adimensionnelle donne

$$P = 1 + \gamma M^2 P_I, \quad (1.28)$$

où P_I est la pression donnée par l'équation incompressible, ou sous forme dimensionnelle :

$$P = P_0 + P_I, \quad (1.29)$$

avec P_0 la pression au point d'arrêt. Dans notre cas, la pression sous forme dimensionnelle est donc

$$P = P_0 - B^2 R_0 \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (1.30)$$

Et pour la masse volumique

$$R = R_0 - B^2 R_0 \frac{x^2 + y^2}{2a_0^2}. \quad (1.31)$$

On possède désormais une correction compressible du point d'arrêt non visqueux.

1.2.2 Cas incompressible visqueux

Nous rappelons que dans le cas incompressible les équations Navier-Stokes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{R} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \end{cases} \quad (1.32)$$

où $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée matérielle. La viscosité cinématique ν est constante, de même que la densité R . Ces deux lois de conservation sont découplées de la conservation de l'énergie.

Nous nous intéressons à une solution autosimilaire, stationnaire et indépendante de la direction z . La solution d'Euler décrite dans l'introduction ne satisfait pas

l'adhérence à la paroi. Néanmoins on suppose que suffisamment loin de la paroi, l'écoulement est semblable à l'écoulement non visqueux ([Whi74]), i.e. la solution Euler est déplacée perpendiculairement à la paroi d'une épaisseur proportionnelle à la distance $\delta = \sqrt{\nu/B}$, qui est l'échelle de distance associée à l'écoulement visqueux. Par cette méthode, Hiemenz détermine en 1911 la solution semi-analytique des équations de Navier-Stokes pour le cas de l'impact normal ($W = 0$). L'extension au cas tridimensionnel ($W \neq 0$) est due à Hall et al. dans [HMP84]. La forme autosimilaire est introduite suivant :

$$\begin{cases} U &= B\delta F(\eta) , \\ V &= ByF'(\eta) , \\ W &= W_\infty \bar{W}(\eta) , \\ \eta &= \frac{-x}{\delta} . \end{cases} \quad (1.33)$$

Ce choix des coefficients multiplicateurs permet d'aboutir finalement à une équation auto-similaire indépendante des paramètres de l'écoulement. Dans le cas bidimensionnel, Schlichting [Sch79, p. 97] explique leur détermination. De plus la continuité est automatiquement satisfaite. Les conditions limites sont la nullité des vitesses à la paroi et le même comportement que la solution Euler incompressible à l'infini amont :

$$\begin{cases} U(0) = V(0) = W(0) = 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x = -\infty) = -B , \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x = -\infty) = 0 , \\ \frac{\partial W}{\partial x}(x = -\infty) = 0 . \end{cases} \quad (1.34)$$

Avec ce changement de variable, (1.32) devient :

$$\begin{cases} -B^2\delta FF' &= \frac{-1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} + B^2\delta F'' , \\ -B^2yFF'' + B^2yF'^2 &= \frac{-1}{R} \frac{\partial p}{\partial y} + B^2yF''' , \\ -F\bar{W}' &= \bar{W}'' . \end{cases} \quad (1.35)$$

(1.35₁) ne dépend pas de y . $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x}$ est donc nul et le gradient $\frac{\partial p}{\partial y}$ est constant perpendiculairement à la paroi. Il peut en particulier être calculé à l'infini amont $\eta \rightarrow \infty$. (1.35₂) se réduit alors à :

$$F''' + FF'' - F'^2 + 1 = 0 , \quad (1.36)$$

soumise aux conditions limites

$$\begin{cases} F(0) = F'(0) = 0 , \\ F'(\infty) = 1 . \end{cases} \quad (1.37)$$

Nous avons intégré cette équation par une méthode de tir (sur $F''(0)$) à l'appui de [CR56] et [RB58]. L'équation (1.36) est intégrée spatialement depuis zéro vers l'infini en utilisant les conditions limites sur F et F' en zéro et en supposant une valeur initiale de $F''(0)$. Ce choix est affiné itérativement jusqu'à ce que la condition limite à l'infini ($F'(\infty) = 1$) soit satisfaite. F étant alors connue, la vitesse \bar{W} peut être déterminée à l'aide de (1.35₃) intégrée analytiquement selon

$$\bar{W} = \frac{\int_0^\eta G(\tau) d\tau}{\int_0^\infty G(\tau) d\tau} \quad \text{avec} \quad G(\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau F'(\zeta) d\zeta\right). \quad (1.38)$$

La pression s'écrit simplement

$$P(\eta, y) = \frac{-R}{2} (B^2 y^2 + U^2) - RB\nu F' \quad (+P_0), \quad (1.39)$$

δ est le paramètre d'échelle qui permet de définir toutes les épaisseurs caractéristiques de la couche limite. Ainsi pour η grand, la fonction F suit asymptotiquement $F(\eta) = \eta - 0.65$. La distance 0.65δ est l'épaisseur de déplacement de l'écoulement visqueux, i.e. la distance dont l'écoulement potentiel est déplacé de la paroi sous l'effet retardant de la paroi. L'épaisseur de couche limite à 99% (où la vitesse atteint 99% de sa valeur à l'infini amont) est, pour la vitesse V , $\delta_{V 99\%} = 2.4\delta$. La constance de ces épaisseurs de déplacement et à 99% traduit l'existence d'une solution Navier-Stokes où l'épaississement de la couche limite dû aux effets visqueux est exactement compensé par son amincissement dû à l'accélération. Cette solution a été utilisée pour toutes les études incompressibles. Comme c'est une solution exacte des équations de Navier-Stokes et non simplement des équations simplifiées de la couche limite, la détermination d'un nombre de Reynolds critique peut en particulier être envisagée.

1.2.3 Cas compressible visqueux

Nous avons ensuite cherché à utiliser la correction compressible Euler pour modifier notre solution incompressible. Cette correction vise simplement à obtenir une solution initiale satisfaisante.

On constate que la solution compressible Euler ne satisfait pas la condition limite d'adhérence à la paroi. Nous avons choisi d'effectuer le rattrapage à zéro à la paroi de l'ordre M^2 avec la même fonction F que pour l'ordre 0 (termes en y^3 et y respectivement dans (1.27)). Ainsi, les vitesses dans le plan d'impact suivent :

$$\begin{cases} U = B\delta F(\eta) - \frac{B^3}{3a_0^2} x^3, \\ V = ByF'(\eta) + \frac{B^3}{3a_0^2} y^3 F'(\eta). \end{cases} \quad (1.40)$$

La pression compressible étant identique à la pression incompressible à la constante additive P_0 près, elle n'a pas été modifiée.

La vitesse W est modifiée. À l'ordre dominant, la conservation de la quantité de mouvement selon z s'écrit :

$$\left(-U + \frac{\mu_T T_x}{R}\right) W_x + \frac{\mu}{R} W_{xx} = 0, \quad (1.41)$$

où μ , T et R sont variables et $\mu_T = \partial\mu/\partial T$. De même qu'en incompressible, nous posons $W(x) = W_\infty \bar{W}(\eta)$. L'intégration analytique de l'équation différentielle ordinaire (1.41) aboutit à la même forme que (1.38). La correction de compressibilité apparaît dans l'intégrante G par le terme μ_T , qui s'annule dans le cas incompressible :

$$\bar{W} = \frac{\int_0^\eta G(\tau) d\tau}{\int_0^\infty G(\tau) d\tau} \quad \text{avec} \quad G(\tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau \left(-B\delta F(\zeta) + \frac{\mu_T T_x}{R} \right) \frac{R\delta}{\mu} d\zeta \right\}. \quad (1.42)$$

Connaissant P et la densité R , on connaît les variables T et μ . Il nous reste donc à déterminer R .

Nous considérons que notre écoulement est à enthalpie totale constante. Dans le cas d'une couche limite se développant sur une plaque plane et possédant un nombre de Prandtl égal à 1 (ce qui est une approximation correcte pour les gaz usuels), les équations de Crocco-Busemann admettent une solution isoénergétique. En effet, en supposant que la vitesse le long de la plaque est très supérieure à celle dans la direction normale et les dérivées dans la direction normale sont très supérieures à celles calculées le long de la plaque, l'équation de l'enthalpie totale admet une solution constante :

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{R_0}. \quad (1.43)$$

Dans notre cas, cette hypothèse s'admet facilement hors de la couche limite, où la solution est potentielle. De plus, la vitesse dans la direction de périodicité est nettement supérieure à celle dans le plan d'impact : dans la couche limite, l'écoulement est assez proche d'un écoulement de couche limite plane. L'hypothèse d'isoénergie nous permet de calculer une première approximation de R , en utilisant pour valeur initiale de W la formule incompressible (1.38). Cette valeur de R est utilisée pour déterminer W , qui à son tour fournit une nouvelle solution de R . Pratiquement les modifications induites par ce couplage sont très faibles.

Nous disposons désormais d'une solution compressible visqueuse initiale. Avant de montrer quelques dessins, nous présentons la méthode numérique employée en insistant sur les conditions limites.

1.3 Méthode Numérique

Nous considérons de manière générale un maillage de calcul curviligne stationnaire défini par les axes $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi^j)$, avec $j = 1, 2, 3$. Le maillage cartésien x_i est transposé dans l'espace de calcul ξ^j selon

$$\xi^j = \xi^j(x_i) . \quad (1.44)$$

Les dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes sont liées aux dérivées par rapport aux coordonnées curvilignes selon

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi^l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi^l} , \quad (1.45)$$

avec sommation sur l'indice l . Les métriques de la transformation sont définies par

$$g^{lm} = \xi_{,i}^l \xi_{,i}^m . \quad (1.46)$$

Les termes g^{ii} quantifient l'étirement de la grille cartésienne alors que g^{ij} , $i \neq j$ quantifie la rotation entre la grille de calcul curviligne et la grille cartésienne.

La vitesse contravariante u^\perp (respectivement v^\perp et w^\perp) est définie comme la projection de la vitesse V sur la normale ξ (respectivement η et ζ). Les composantes cartésiennes de la vitesse dépendent des vitesses contravariantes selon

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial \xi} u^\perp + \frac{\partial y}{\partial \xi} v^\perp + \frac{\partial z}{\partial \xi} w^\perp , \\ v &= \frac{\partial x}{\partial \eta} u^\perp + \frac{\partial y}{\partial \eta} v^\perp + \frac{\partial z}{\partial \eta} w^\perp , \\ w &= \frac{\partial x}{\partial \zeta} u^\perp + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v^\perp + \frac{\partial z}{\partial \zeta} w^\perp . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Sesterhenn dans [Ses01] a montré que l'on peut reformuler (sans simplification) les équations de Navier-Stokes (1.1) pour mettre en évidence le caractère propagatif de la partie Euler dans les directions perpendiculaires au maillage. Il aboutit ainsi au système suivant

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{\rho c}{2} [[X^+ + X^-] + [Y^+ + Y^-] + [Z^+ + Z^-]] + \frac{p}{C_v} [s_t + X^s + Y^s + Z^s] , \\ u_t^\perp &= -\frac{\sqrt{g^{11}}}{2} [X^+ - X^-] - Y^u - \frac{g^{21}}{2\sqrt{g^{22}}} [Y^+ - Y^-] - Z^u - \frac{g^{31}}{2\sqrt{g^{33}}} [Z^+ - Z^-] + \frac{\tau_\xi}{\rho} , \\ v_t^\perp &= -X^v - \frac{g^{12}}{2\sqrt{g^{11}}} [X^+ - X^-] - \frac{\sqrt{g^{22}}}{2} [Y^+ - Y^-] - Z^v - \frac{g^{32}}{2\sqrt{g^{33}}} [Z^+ - Z^-] + \frac{\tau_\eta}{\rho} , \\ w_t^\perp &= -X^w - \frac{g^{13}}{2\sqrt{g^{11}}} [X^+ - X^-] - Y^w - \frac{g^{23}}{2\sqrt{g^{22}}} [Y^+ - Y^-] - \frac{\sqrt{g^{33}}}{2} [Z^+ - Z^-] + \frac{\tau_\zeta}{\rho} , \\ s_t &= -X^s - Y^s - Z^s + \frac{1}{\rho T} \left(-\xi_{,i}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(-\lambda \xi_{,i}^l \frac{\partial T}{\partial \xi^l} \right) + \Phi \right) , \end{aligned} \quad (1.48)$$

avec les définitions

$$\tau_\xi = \xi_{,i}^1 \xi_{,j}^l \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi^l}, \quad \tau_\eta = \xi_{,i}^2 \xi_{,j}^l \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi^l}, \quad \tau_\zeta = \xi_{,i}^3 \xi_{,j}^l \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi^l}, \quad (1.49)$$

$$X^\pm := (u^\perp \pm \sqrt{g^{11}c}) \left[\frac{p_\xi}{\rho c} \pm \frac{u_\xi^\perp}{\sqrt{g^{11}}} \right], \quad X^s := u^\perp s_\xi \quad (1.50)$$

$$Y^\pm := (v^\perp \pm \sqrt{g^{22}c}) \left[\frac{p_\eta}{\rho c} \pm \frac{v_\eta^\perp}{\sqrt{g^{22}}} \right], \quad Y^s := v^\perp s_\eta \quad (1.51)$$

$$Z^\pm := (w^\perp \pm \sqrt{g^{33}c}) \left[\frac{p_\zeta}{\rho c} \pm \frac{w_\zeta^\perp}{\sqrt{g^{33}}} \right], \quad Z^s := w^\perp s_\zeta \quad (1.52)$$

$$X^v := u^\perp \left(v_\xi^\perp - \frac{g^{12}}{g^{11}} u_\xi^\perp \right), \quad X^w := u^\perp \left(w_\xi^\perp - \frac{g^{13}}{g^{11}} u_\xi^\perp \right) \quad (1.53)$$

$$Y^u := v^\perp \left(u_\eta^\perp - \frac{g^{21}}{g^{22}} v_\eta^\perp \right), \quad Y^w := v^\perp \left(w_\eta^\perp - \frac{g^{23}}{g^{22}} v_\eta^\perp \right) \quad (1.54)$$

$$Z^u := w^\perp \left(u_\zeta^\perp - \frac{g^{31}}{g^{33}} w_\zeta^\perp \right), \quad Z^v := w^\perp \left(v_\zeta^\perp - \frac{g^{32}}{g^{33}} w_\zeta^\perp \right) \quad (1.55)$$

Les quantités X^s , X^v et X^w correspondent à un transport avec la vitesse contravariante u^\perp de l'entropie et de la vorticité. Les quantités Y^s , Y^u et Y^w (respectivement Z^s , Z^u et Z^v) sont convectées à la vitesse v^\perp (respectivement w^\perp). Notons que X^s est exactement l'onde entropique apparaissant dans l'équation caractéristique de transport de l'entropie. X^v et X^w en revanche sont des ondes de cisaillement et non exactement les ondes de vorticité. Pour des raisons de facilité d'imposition des conditions limites, la formulation est en effet en pression, vitesse, entropie, et non en pression, vorticité, entropie, comme dans une décomposition caractéristique.

Les termes indexés \pm représentent le transport d'invariants de Riemann perpendiculairement au maillage avec la vitesse contravariante somm e à la vitesse du son. L'évolution temporelle des différentes variables peut être pensée comme résultant de la superposition de ces différentes ondes, et des termes visqueux et thermiques. L'obtention du système (1.48) est expliquée dans [Ses01].

Le système écrit sous cette forme est discr tisi  spatialement et intégré temporellement. L'intégration temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta. En sus du schéma de troisième ordre déjà présent, nous avons implémenté un schéma de quatrième ordre. Sa présentation détaillée fait l'objet de la section 1.4.

La discrétisation spatiale imite les phénomènes physiques : les ondes propagatives sont discrétisées avec des schémas upwind (décentrés) pour reproduire le caractère unidirectionnel de la propagation. Le choix d'une discrétisation amont ou aval repose sur l'examen du signe de la vitesse de propagation. Au contraire, les termes

(n) et ($n + 1$) selon (voir par exemple [Wil80])

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^{(n)} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i F^i, \\ F^i &= F(t^i, U^i), \\ &= F(t^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}, U^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} F^j), \end{aligned} \quad (1.61)$$

où i est l'indice de sous pas, les $a_{i,j}$ et b_i sont les coefficients de Butcher, Δt est le pas de temps et s est le nombre de sous pas, supérieur ou égal à l'ordre du schéma. Ainsi, lorsqu'on augmente l'ordre du schéma écrit sous cette forme, la mémoire requise augmente au moins proportionnellement. L'utilisation d'une version à faible stockage permet de s'affranchir de ce problème. Au sous pas i , une méthode sur deux registres consiste à se contenter de la valeur au sous pas $i - 1$. C'est le principe du schéma de van der Houwen, à la base des schémas proposés dans [KCL99]. Dans son implémentation la plus agressive, l'information alterne entre deux registres de mémoire R_1 et R_2 :

$$\begin{aligned} \text{Sous-pas } i+1 & \begin{cases} R_1 : & U^{i+1} = X^i + a_{i+1,i} \Delta t F^i, \\ R_2 : & X^{i+1} = U^{i+1} + (b_i - a_{i+1,i}) \Delta t F^i, \end{cases} \\ \text{Sous-pas } i+2 & \begin{cases} R_2 : & U^{i+2} = X^{i+1} + a_{i+2,i+1} \Delta t F^{i+1}, \\ R_1 : & X^{i+2} = U^{i+2} + (b_{i+1} - a_{i+2,i+1}) \Delta t F^{i+1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Les $a_{i,j}$ et b_j , identiques à ceux apparaissant dans (1.61), doivent satisfaire les contraintes de Butcher garantissant l'ordre du schéma. De plus, le faible stockage induit des contraintes supplémentaires [CK94].

Dans l'implémentation dans le code, un des problèmes pratiques réside dans l'alternance entre les registres. U^{i+1} est utilisé pour la détermination de F^{i+1} et aller chercher cette information alternativement dans R_1 et R_2 nuit grandement à la lisibilité. De plus, le vecteur solution précédent est écrasé au cours de l'évaluation de la fonction F . Il n'est donc pas possible de déterminer le résidu associé à une itération. Aussi, nous avons choisi d'implémenter la méthode sur trois registres. On peut ainsi éviter l'alternance et disposer d'un résidu. L'avancement d'un sous-pas à l'autre s'écrit alors :

$$\begin{cases} U^{i+1} &= X^i + a_{i+1,i} \Delta t F^i, \\ X^{i+1} &= X^i + b_i \Delta t F^i, \\ Res^{i+1} &= Res^i + b_i \Delta t F^i, \end{cases} \quad (1.63)$$

où Res est le résidu.

Nous avons choisi d'implémenter le schéma RK4(3)5[2R+]C dont on trouvera la valeur des coefficients de Butcher dans [KCL99]. C'est un solveur faiblement dispersif de quatrième ordre, à cinq sous-pas, avec stockage sur deux registres. Ses contraintes

de stockage faible s'écrivent :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{5,1} = a_{4,1} = a_{3,1} , \\ b_2 &= a_{5,2} = a_{4,2} , \\ b_3 &= a_{5,3} . \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ceci diminue les degrés de liberté vis-à-vis d'une optimisation des critères cités en introduction, néanmoins sans incidence grave. Nous vérifions l'ordre du schéma. Pour ce faire nous considérons l'équation modèle

$$F(t, U) = \lambda U , \quad (1.65)$$

où λ est un réel. Elle admet pour solution analytique $U(t) = U_0 \exp(\lambda(t - t_0))$ où U_0 est la valeur initiale de U à $t = t_0$. L'instant $(n + 1)$ s'exprime à partir de l'instant (n) selon :

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^{(n)} \\ &+ \sum_{i=1}^s b_i \Delta t \lambda U^{(n)} \\ &+ \sum_{i=1}^s \left(b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \right) \Delta t^2 \lambda^2 U^{(n)} \\ &+ \sum_{i=1}^s \left(b_i \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ a_{i,j} \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} \right\} \right) \Delta t^3 \lambda^3 U^{(n)} \\ &+ \sum_{i=1}^s \left(b_i \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ a_{i,j} \sum_{k=1}^{j-1} \left[a_{j,k} \sum_{l=1}^{k-1} a_{k,l} \right] \right\} \right) \Delta t^4 \lambda^4 U^{(n)} \\ &+ \sum_{i=1}^s \left(b_i \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ a_{i,j} \sum_{k=1}^{j-1} \left[a_{j,k} \sum_{l=1}^{k-1} \left(a_{k,l} \sum_{m=1}^{l-1} a_{l,m} \right) \right] \right\} \right) \Delta t^5 \lambda^5 U^{(n)} , \end{aligned} \quad (1.66)$$

ou sous forme synthétique

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \sum_{i=1}^s A_i \Delta t^i U^{\{i\}(n)} , \quad (1.67)$$

où $U^{\{i\}(n)}$ est la dérivée d'ordre i de U , calculée à l'instant (n) . Pour un schéma d'ordre m , les A_i doivent être égaux aux coefficients de Taylor $1/i!$. La différence entre A_{m+1} et $1/(m + 1)!$ caractérise la précision du schéma. Ici les A_i diffèrent de $1/i!$ au plus de 10^{-16} pour $i = 1$ à 4 et l'erreur sur A_5 est $-3.48 \cdot 10^{-3}$. L'ordre du schéma est aussi illustré sur la figure (1.4). Nous avons numériquement résolu l'équation modèle (1.65) avec $\lambda = 1$. Nous avons tracé à $t = 1$ l'erreur entre la solution numérique et la solution analytique. N est le nombre de pas de temps nécessaires pour atteindre l'instant final $t = 1$. L'erreur décroît bien avec une pente -3 pour le schéma de troisième ordre et avec une pente -4 pour le schéma de quatrième ordre. Le bruit pour des résolutions supérieures à 10^3 pas de temps est

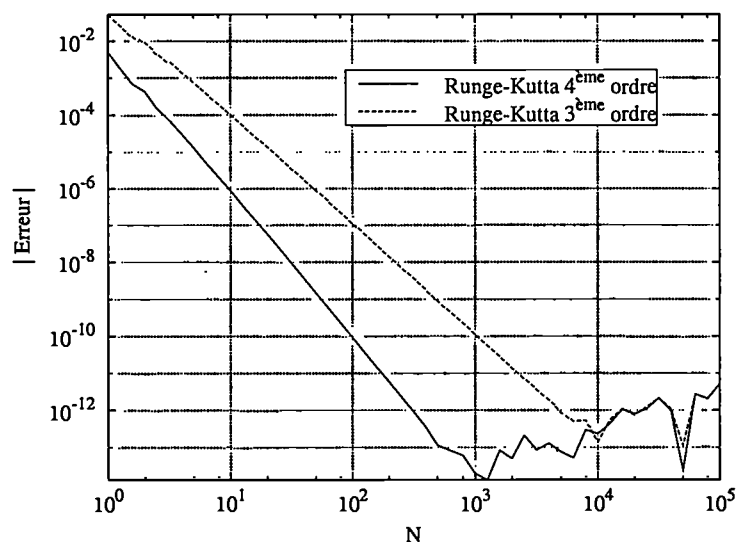


FIG. 1.4 – Erreur numérique en fonction du nombre de pas N pour les schémas Runge-Kutta de 3^{ème} et 4^{ème} ordre et l'équation modèle $\frac{dU}{dt} = U$

dû à la superposition des erreurs de troncature machine.

Nous nous intéressons maintenant à la limite de stabilité du schéma. Elle est définie comme le plus grand pas de temps tel que $|U^{(n+1)}/U^{(n)}| < 1$, soit, en utilisant le développement de Taylor, $\sum_{i=1}^s (A_i (\Delta t \lambda)^i) < 1$. Le schéma de Williamson étant de troisième ordre et comportant 3 sous pas, $|U^{(n+1)}/U^{(n)}|$ est exactement le développement de Taylor au troisième ordre. Sur la figure (1.5), la frontière à 1 des schémas Runge-Kutta de troisième et quatrième ordre est tracée. À l'intérieur des deux courbes, le critère de stabilité est vérifié. On constate que le schéma de quatrième ordre permet d'atteindre des pas de temps plus grands. Le pas de temps maximal peut être fixé à 2.5 contre 1.7 pour le schéma de troisième ordre. Néanmoins cela est au prix d'un schéma en cinq sous-pas au lieu de trois. Aussi, pour avoir une comparaison directe de l'efficacité, nous avons tracé sur la figure (1.6) les deux mêmes domaines rapportés à leur nombre de sous pas. L'efficacité du schéma de quatrième ordre est moindre que celle du schéma de troisième ordre. Ce résultat sera néanmoins nuancé au vu des résultats faisant intervenir le couplage avec la discrétisation spatiale.

Nous avons complété cette étude par l'examen de la propagation d'un invariant de Riemann dans un cas monodimensionnel. Dans le cas d'un écoulement homoentropique [Saa93, p 91-92], les équations d'Euler admettent pour invariants les quantités $R^\pm = \frac{2}{\gamma-1} c \pm u$ respectivement sur les chemins caractéristiques $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ en espace et temps [CM98]. Pour un écoulement où l'invariant de Riemann positif est perturbé linéairement, nous disposons ainsi d'une solution analytique. Nous considérons un écoulement caractérisé par la vitesse de base U et la vitesse du son C . Le nombre

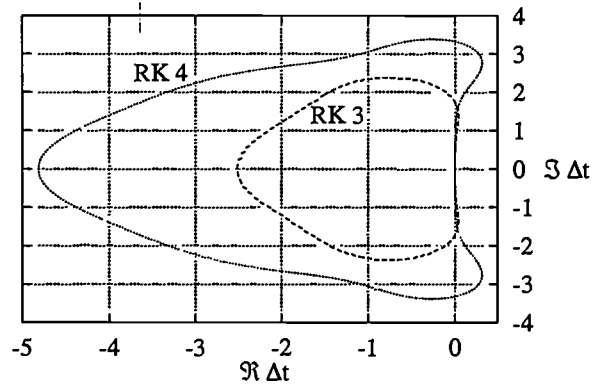


FIG. 1.5 – Domaine de stabilité des schémas de Runge-Kutta de 3^{ème} et 4^{ème} ordre en fonction du pas de temps Δt

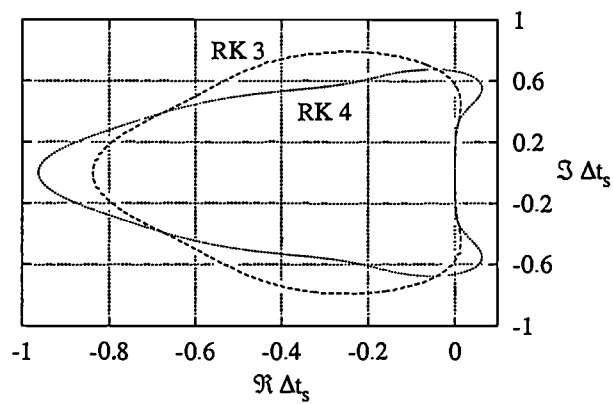


FIG. 1.6 – Domaine de stabilité des schémas de Runge-Kutta de 3^{ème} et 4^{ème} ordre en fonction du pas de temps réduit $\Delta t_s = \Delta t / s$

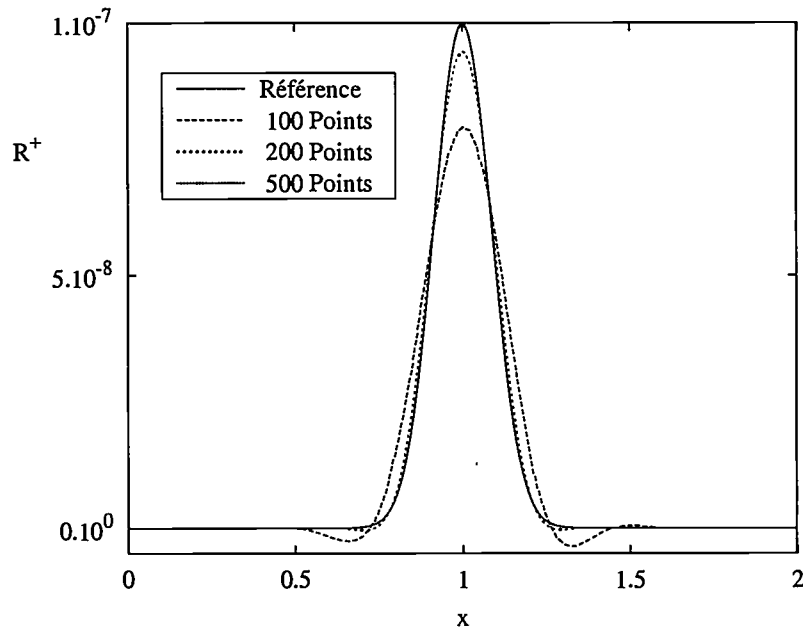


FIG. 1.7 – Invariant de Riemann positif intégré avec Runge-Kutta 3^{ème} ordre, après 510 diamètres caractéristiques. La discrétisation avec 500 points donne un résultat quasiment indiscernable de la référence

de Mach est 0.5. Le domaine est de taille $2l_0$ et la frontière \mathcal{X}_m est périodique avec \mathcal{X}_p . On obtient ainsi un domaine infini. Les invariants de Riemann de base s'écrivent $R_b^\pm = \frac{2}{\gamma-1}C \pm U$. La perturbation est une gaussienne introduite sur l'invariant positif : $R^+(x, t = 0) = R_b^+ + BR_b^+ \exp(-\frac{4 \ln 2}{A^2}(x - l_0)^2)$, où B est l'amplitude relative de la perturbation, fixée à 10^{-7} , et A le diamètre de la gaussienne à mi-hauteur. Ici $A = l_0/10$. À tout instant, et sous hypothèse de linéarité, l'invariant positif s'écrit $R^+(x, t) = R^+(x - (U + C)t, t = 0)$. Ses amplitudes et formes sont théoriquement conservées et il traverse le domaine à la vitesse $U + C$. Au temps final t_f de la simulation, l'invariant s'est déplacé de 510 fois son diamètre de gaussienne. Sur la figure (1.7) est tracé l'invariant positif pour le schéma Williamson de troisième ordre. Sur la figure (1.8) est tracé l'invariant positif pour le schéma Runge-Kutta quatrième ordre. Le nombre de points indiqué est réparti de manière équidistante sur la longueur $2l_0$. On note une nette amélioration avec le quatrième ordre, surtout pour des résolutions faibles. Sur la figure (1.9), nous avons comparé d'une part le résultat de l'intégration avec le schéma de troisième ordre et 200 points avec d'autre part le résultat de l'intégration quatrième ordre et 85 points. Pour obtenir le même niveau du pic de l'invariant de Riemann, le schéma de quatrième ordre nécessite deux fois et demie moins de points (discrétisation spatiale) que celui de troisième ordre. Ce résultat s'explique en examinant les dissipation et dispersion théoriques des schémas de dérivation spatiale et intégration temporelle.

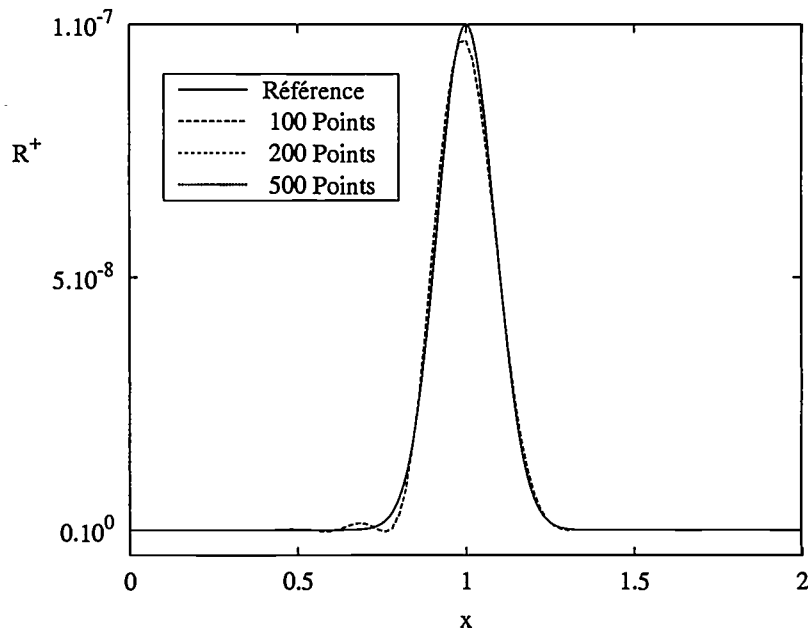


FIG. 1.8 – Invariant de Riemann positif intégré avec Runge-Kutta 4^{ème} ordre, après 510 diamètres caractéristiques. Les discrétisations avec 200 et 500 points donne un résultat quasiment indiscernable de la référence

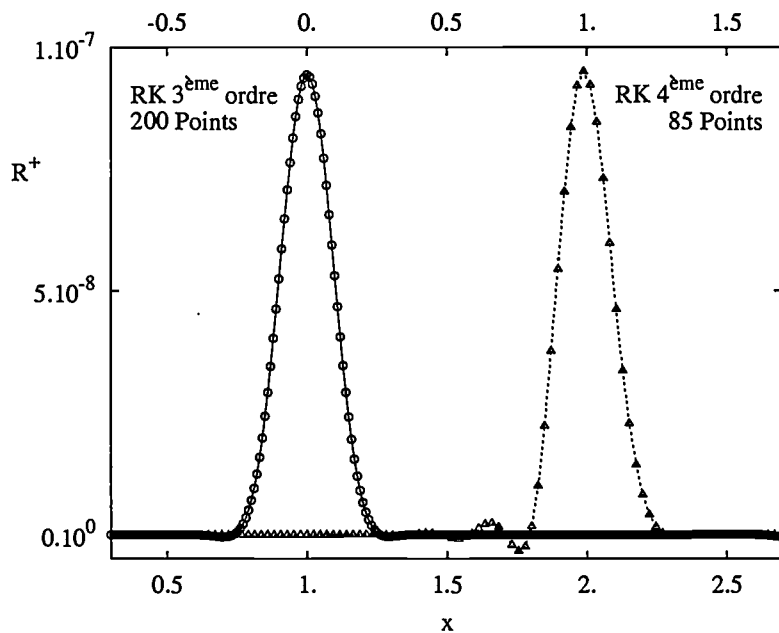


FIG. 1.9 – Comparaison des intégrations Runge-Kutta 3^{ème} ordre 4^{ème} ordre pour deux résolutions différentes. Au temps final, les deux courbes sont difficiles à distinguer. Nous les avons artificiellement décalé. L'axe x en bas se rapporte à la courbe de gauche. Celui en haut se rapporte à la courbe de droite

Suivant Sesterhenn [Ses01], nous considérons l'équation linéaire modèle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \quad (1.68)$$

Une solution spatialement discrétisée recherchée sous la forme

$$u_i = U(t) \exp(ikx_i) \quad (1.69)$$

satisfait

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0 . \quad (1.70)$$

k est le nombre d'onde réel de l'onde et x_i désigne l'ensemble des points de discrétisation, équidistants de Δx .

La dérivée spatiale $\frac{\partial u}{\partial x}$ peut aussi être calculée à l'aide d'un des schémas spatiaux mentionnés plus haut. Dans le cas du schéma décentré de Adams et Shariff [AS96], ik est, dans l'équation (1.70), alors remplacé par

$$\frac{k^*}{\Delta x} = \frac{a_{-2} \exp(-2ik\Delta x) + a_{-1} \exp(-ik\Delta x) + a_0 + a_{+1} \exp(+ik\Delta x) + a_{+2} \exp(+2ik\Delta x)}{\alpha_{-2} \exp(-2ik\Delta x) + \alpha_{-1} \exp(-ik\Delta x) + \alpha_0 + \alpha_{+1} \exp(+ik\Delta x) + \alpha_{+2} \exp(+2ik\Delta x)} \frac{1}{\Delta x} , \quad (1.71)$$

qui en général n'est pas purement imaginaire.

La quantité $c^*/c = k^*/(k\Delta x)$ a pour partie imaginaire la vitesse de phase modifiée de l'onde monochromatique (dispersion). Sa partie réelle est appelée dissipation. Un schéma spectral fournit $k^* = (k\Delta x)$ soit $c^*/c = 1$ pour tout nombre d'onde k .

La discrétisation temporelle conduit aussi à une modification du transport de l'onde. L'équation (1.70) maintenant modifiée par la discrétisation spatiale s'écrit

$$\frac{dU}{dt} + \frac{k^*c}{\Delta x} U = 0 . \quad (1.72)$$

Sa solution exacte est

$$U(t + \Delta t) = U(t) \exp\left(-k^* \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) . \quad (1.73)$$

L'utilisation d'un schéma de Runge-Kutta remplace le terme $\exp(-k^* \frac{c\Delta t}{\Delta x})$ par un développement limité précis à l'ordre du schéma. Pour le schéma d'ordre 4 que nous avons employé,

$$U(t + \Delta t) = U(t)(1 + \omega + \omega^2/2 + \omega^3/6 + \omega^4/24 + \omega^5 0.00485) , \quad (1.74)$$

où $\omega = -k^* \frac{c\Delta t}{\Delta x}$. $CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ définit le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy. Pour le schéma Runge-Kutta de troisième ordre, la troncature s'arrête à $\omega^3/6$. Le facteur k^* de (1.70) est maintenant remplacé par

$$-\frac{k^{**}}{CFL} = -\frac{1}{CFL} \ln(1 + \omega + \omega^2/2 + \omega^3/6 + \omega^4/24 + \omega^5 0.00485) . \quad (1.75)$$

Sur la figure (1.10), nous avons tracé en lignes les dissipation et dispersion du schéma spatial seul. Les symboles représentent la dispersion et la dissipation dues à la dérivation spatiale et à l'intégration temporelle. Pour cette figure, nous avons choisi $CFL = 0.5$. La vitesse de phase est conservée si $c^*/c = 1$. Le nombre $k\Delta x$ maximal permettant cette conservation définit le nombre de points nécessaires par longueur d'onde pour correctement résoudre l'onde. Par exemple, c^*/c est conservée à 1% près si $k\Delta x < 0.45\pi$ pour le schéma Runge-Kutta troisième ordre. Ce même niveau est gardé jusqu'à $k\Delta x < 0.65\pi$ pour le schéma Runge-Kutta quatrième ordre. Or la longueur d'onde est reliée au nombre d'onde par $\lambda = 2\pi/k$. Il faut donc 4.4 points par longueur d'onde pour Runge-Kutta troisième ordre et seulement 3.1 points par longueur d'onde pour Runge-Kutta quatrième ordre. La différence entre Runge-Kutta troisième et quatrième ordre est très apparente. L'intégration de quatrième ordre permet d'atteindre quasiment la dispersion théorique du schéma spatial seul. La dissipation plus grande du schéma de troisième ordre explique l'amortissement du pic de l'invariant de Riemann quand la résolution spatiale diminue (i.e. pour $k\Delta x$ plus élevé).

Sur la figure (1.11), nous avons tracé les mêmes quantités pour le schéma centré. Les mêmes conclusions sont valables. La différence de dispersion est plus grande encore que pour le schéma centré.

Il faut noter que cette analyse est faite avec une équation modèle linéaire, et non avec le système non linéaire de Navier-Stokes. Néanmoins elle explique les différences de dispersion et dissipation entre les deux schémas d'intégration temporelle. L'intérêt du schéma de quatrième ordre réside dans la possibilité d'utiliser une discrétisation spatiale plus grossière.

1.5 Conditions limites

Notre problème nécessite l'imposition de conditions limites avant d'être résolu. Sur la figure (1.12), nous avons tracé les différentes ondes se propageant perpendiculairement à la face d'entrée subsonique \mathcal{X}_m . L'onde acoustique X^- est sortante avec la vitesse $U - C$. L'onde acoustique X^+ est entrante avec la vitesse $U + C$. Les ondes entropique et de cisaillement X^s , X^v et X^w sont entrantes avec la vitesse U . Ces ondes entrantes dépendent donc des points situés à l'extérieur du domaine de calcul et doivent être modélisées. Lele note dans [Lel99] que ce problème constitue le point faible de la méthode de simulation. En l'absence d'information mathématique précise sur l'écoulement à l'extérieur du domaine il est essentiel de chercher des procédures numériques imitant les effets physiques de l'écoulement extérieur sur l'écoulement intérieur au domaine de calcul. Nous avons cherché à développer des conditions limites valables pour la menée à convergence du champ de base et pour la simulation avec perturbation.

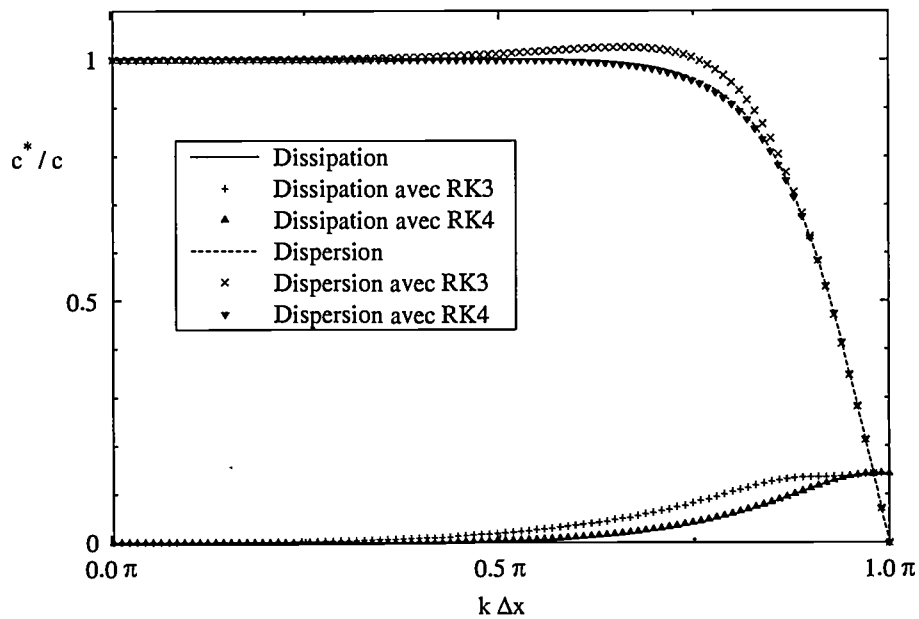


FIG. 1.10 – Dispersion et dissipation du schéma décentré avec une intégration temporelle Runge-Kutta de 3^{ème} et 4^{ème} ordre. Les lignes, figurant la dissipation et la dispersion dues à la seule discrétisation spatiale, sont indiscernables des symboles obtenus avec la discrétisation spatiale et l'intégration temporelle avec le schéma Runge-Kutta de 4^{ème} ordre

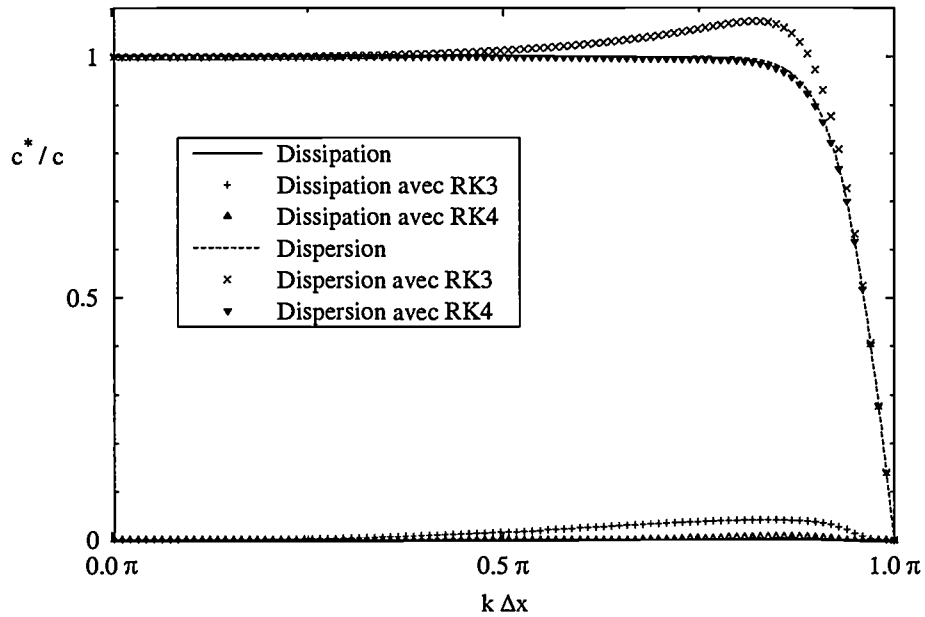


FIG. 1.11 – Dispersion et dissipation du schéma centré avec une intégration temporelle Runge-Kutta de 3^{ème} et 4^{ème} ordre. Les lignes, figurant la dissipation et la dispersion dues à la seule discrétisation spatiale, sont indiscernables des symboles obtenus avec la discrétisation spatiale et l'intégration temporelle avec le schéma Runge-Kutta de 4^{ème} ordre

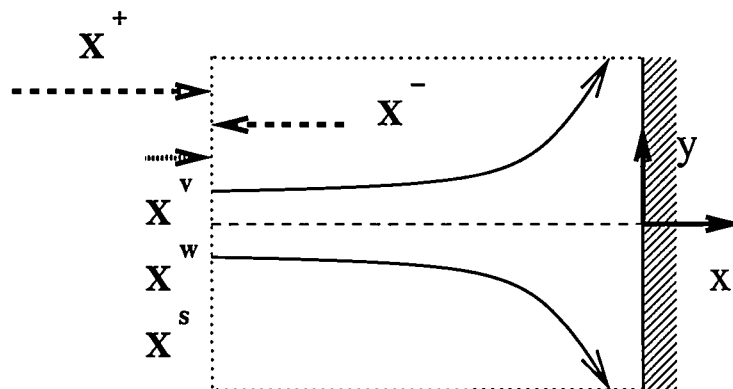


FIG. 1.12 – Ondes normales à la face d'entrée. Les ondes X^s , X^v et X^w sont des ondes inertielles entrantes. Les ondes X^- et X^+ sont acoustiques. Seule l'onde X^- est sortante

Dans notre cas, les propriétés requises sont les suivantes :

- $\mathcal{Z}_p, \mathcal{Z}_m$ La direction z est infinie. La face d'entrée est en périodicité avec la face de sortie.
- $\mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_m$ Aux deux faces de sortie subsonique, le domaine est artificiellement tronqué (frontière non physique). On veut donc y éviter les réflexions. Celles-ci peuvent se produire par les ondes acoustiques (respectivement Y^- et Y^+), seules ondes entrantes .
- \mathcal{X}_p On a un mur, adiabatique ou isotherme. Pour des écoulements suffisamment lents, il est habituel de considérer que le mur est adiabatique. La température a le temps de s'ajuster pour que le flux de chaleur normal à la paroi soit nul. Ceci correspond à un faible nombre de Mach. Néanmoins, même pour des écoulements de fort nombre de Mach, généralement considérés isothermes en paroi, l'écoulement modèle du point d'arrêt prévaut dans une zone proche de la paroi. Aussi il est souhaitable d'examiner une condition d'isothermie. Les réflexions ne sont ici pas un problème car elles sont une propriété physique du mur.
- \mathcal{X}_m En entrée on cherche à maintenir le niveau du champ de base tout en autorisant la sortie de l'onde acoustique X^- sans réflexion.

En résumé, le principe général que nous adoptons est de minimiser les réflexions sur la perturbation tout en contraignant le champ de base. Rappelons qu'au cours de la simulation nous résolvons les variables complètes (sommées du champ de base et de la perturbation). Pour conduire une étude dans le domaine linéaire, la perturbation est au début de la simulation huit ordres de grandeur plus petite que le champ de base.

Nous avons résolu ces contraintes de la manière suivante :

- $\mathcal{Z}_p, \mathcal{Z}_m$ Dans la direction de périodicité z , l'implémentation des schémas de différenciation est telle que les stencils cherchent automatiquement à la frontière opposée les points fantômes. Il n'y a donc aucune condition limite à appliquer explicitement.
- $\mathcal{Y}_p, \mathcal{Y}_m$ Les deux faces de sortie sont plus problématiques. Spalart dans [Spa88] a employé des couches-éponge en sortie. Sa motivation principale était de pouvoir utiliser un outil de calcul périodique dans deux directions. Ainsi les deux faces de sorties devaient être en périodicité, ce qui n'est pas représentatif de la configuration physique. Il a donc ajouté aux équations de Navier-Stokes des termes sources qui forcent la vitesse de sortie à zéro. Pour ce faire, 15% du domaine est explicitement perdu. Mais le problème majeur réside dans la pollution créée par ces franges sur la totalité du domaine. La correction étant locale en espace, elle affecte en effet toutes les longueurs d'onde du problème. Le forçage de la perturbation n'est pas clair. De plus, et c'est leur défaut majeur, ces zones peuvent être réfléchissantes. Obrist dans [Obr00] note que dans le cas de la simulation de la décroissance exponentielle d'un

mode linéaire en canal, et avec l'implémentation de Lundbladh et al. [LHJ92], la décroissance n'est pas continue. Il peut transitoirement y avoir croissance. Ces instants correspondent aux réentrées des paquets d'onde générés par une zone frange dans la zone frange opposée. Il est donc possible d'attraper une onde entre les deux faces de sorties. Le calage de ces zones frange (ajustement de la fonction de rattrapage à zéro) est particulièrement délicat.

Au contraire des zones franges, les couches parfaitement ajustées (Perfect Matching Layer, subséquemment dénommées couches PML) ont été développées dans un souci d'application acoustique. Historiquement, ces zones sont dues à Berenger [Ber94] dans le contexte de l'électromagnétique numérique. Leur application s'est rapidement étendue car le problème des équations de Maxwell perturbées est formellement équivalent à celui de la propagation acoustique dans un milieu au repos. Le principe de la méthode est de localement changer les propriétés des matériaux afin d'atténuer les ondes perturbées sortantes de manière non-réflexive. Elles sont nulles avant la sortie et les conditions limites adéquates pour le champ de base restent adaptées en présence de la perturbation. Un artifice consiste à travailler avec une décomposition (split) de toutes les variables considérées, qui apparaissent alors comme somme de deux variables artificielles, et à introduire des coefficients d'absorption. À l'aide de cette méthode, Hu dans [Hu96] s'intéresse aux ondes bidimensionnelles supportées par un champ de base uniforme non nul, gouvernées par les équations d'Euler linéarisées. Il montre que ce système PML admet des ondes planes acoustique, vorticale et entropique, et que le système Euler en est un cas particulier. Il prouve analytiquement que, théoriquement, on peut choisir les coefficients d'absorption de telle sorte qu'à une interface domaine intérieur (partie utile du calcul) / zone PML, l'onde réfléchie soit nulle et l'onde transmise soit amortie, et ce indépendamment de la fréquence et de la direction de l'onde plane sortante. Pratiquement sa formulation nécessite de plus l'emploi d'un filtre des grands nombres d'onde sous menace d'instabilité numérique. Néanmoins, certaines simulations numériques présentent des réflexions, qu'Hu attribue à la discrétisation et à la troncature du maillage.

Abarbanel et al. notent au contraire dans [AGH99] que la décomposition (split) conduit à un problème mal posé dans certains cas, d'où les difficultés numériques. Pour un écoulement porteur uniforme aligné avec le maillage, ils travaillent sur les variables usuelles et déterminent analytiquement les ondes du problème en utilisant le changement de variable de Prandtl-Glauert. En posant que la solution dans la zone PML est une combinaison linéaire d'ondes amorties, ils peuvent déterminer la forme des équations PML valables pour toutes les fréquences. Ce système PML conserve le caractère bien posé du système Euler. Ils notent néanmoins que le passage à un système PML introduit un forçage, qui peut induire une instabilité de la méthode pour des

temps d'intégration longs. Une correction gomme ce problème mais conduit à un amortissement inégal pour des ondes de fréquence différente impactant sur la zone PML. Bien qu'ayant obtenu des résultats de simulation numérique prometteurs reposant sur une solide méthode, les auteurs notent que l'extension à des champs de base non alignés avec le maillage ou bien pire encore non uniformes requiert des développements mathématiques non triviaux.

Dans tous les cas, ces travaux reposent sur une solution analytique de la relation de dispersion. Ils utilisent les équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles et supposent une configuration simple. Des travaux présentés au Second Aeroacoustics Workshop on benchmark problems [TH97] s'intéressent à des configurations moins simples. Néanmoins elles restent très éloignées de notre cas. En effet le point d'arrêt est, même en dehors de la couche limite, un écoulement à gradient constant mais *non* nul.

Nous nous sommes attachés à obtenir une condition limite engendrant peu de réflexion sur la perturbation mais sans emploi de zones d'absorption en sortie. La non-nullité du gradient conduit à conclure à l'impossibilité d'utiliser les conditions de non réflexion habituelles. À la frontière \mathcal{Y}_p l'onde entrante Y^- s'écrit hors de la couche limite à l'aide de la conservation de la quantité de mouvement dans la direction y pour un écoulement non visqueux :

$$\begin{aligned} Y^- &= (v^\perp - \sqrt{g^{22}c}) \begin{bmatrix} \frac{p_\eta}{\rho c} - \frac{v_\eta}{\sqrt{g^{22}}} \\ \frac{p_y}{\rho c} - v_y \end{bmatrix} , \\ &= (v - c) \begin{bmatrix} \frac{p_y}{\rho c} - v_y \end{bmatrix} , \\ &= (v - c) (-v - c) \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial y} \sim B . \end{aligned} \quad (1.76)$$

L'imposition de la nullité de ces ondes acoustiques entrantes conduit à un blocage du fluide en sortie et à une augmentation monotone de la pression.

Pour conserver un découplage par rapport à ce qui se passe à l'intérieur du domaine, nous avons choisi d'imposer constamment l'onde calculée à partir des conditions initiales, avec relaxation au cours de la convergence du champ de base. Pratiquement, pour la convergence du champ de base, nous calculons les ondes entrantes à partir du champ initial et les stockons. Nous les imposons alors jusqu'à l'instant t où le résidu du calcul a chuté d'une décade. Nous recalculons alors ces ondes entrantes avec le champ à l'instant t et les imposons pour la décade suivante. Nous procédons ainsi pour les quatre premières décades de convergence. L'incidence de cette réactualisation sur le champ final est en pratique quasi nulle. Pour le calcul avec perturbation, nous avons utilisé pour tout le calcul les ondes entrantes du champ de base. Ainsi ces ondes sont complètement découplées de ce qui se passe à l'intérieur du domaine et nous évitons les réflexions. Dans le cas d'une perturbation de très faible amplitude, la décomposition de l'onde entrante en partie de base et perturbation donne

par linéarisation :

$$\begin{aligned}
Y^- &= (V^\perp - \sqrt{g_{22}}C) \left[\frac{P_\eta}{RC} - \frac{V_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \right] \\
&+ (V^\perp - \sqrt{g_{22}}C) \left[\frac{p_\eta}{RC} - \frac{P_\eta}{RC} \left(\frac{\varrho}{R} + \frac{c}{C} \right) - \frac{v_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \right] \\
&+ (v^\perp - \sqrt{g_{22}}c) \left[\frac{P_\eta}{RC} - \frac{V_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \right].
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Avec notre principe, nous fixons la somme des deuxième et troisième termes à zéro. Le deuxième terme est bien entrant (transporté avec la vitesse $V - C$). Lui assigner la valeur 0 est donc possible. En revanche, le troisième terme peut être entrant ou sortant. Théoriquement, s'il est sortant, il faut le calculer avec les gradients de l'intérieur du domaine. Pratiquement, une telle méthode est très lourde. Elle suppose une décomposition de tout le code en champ de base plus perturbation. De plus, elle n'est valable que dans le domaine linéaire. Aussi, nous avons préféré utiliser la condition limite sur le champ complet, sans décomposition.

- \mathcal{X}_p La vitesse au mur étant nulle, on peut utiliser les quatre ondes entrantes X^- , X^v , X^s et X^w pour imposer la condition limite. Pour le mur adiabatique comme pour le mur isotherme, la dérivée temporelle de la vitesse au mur est nulle. Les équations (1.48)₂ à (1.48)₄ font apparaître les trois inconnues X^- , X^v et X^w . L'inversion du système donne :

$$\begin{aligned}
X^- &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{g^{13}(Z^+ - Z^-)}{\sqrt{g_{33}}} + 2Z^u + \frac{g^{12}(Y^+ - Y^-)}{\sqrt{g_{22}}} + 2Y^u + \sqrt{g_{11}}X^+ - \frac{2\tau_\xi}{\varrho} \right), \\
X^v &= -\frac{g^{12}(X^+ - X^-)}{2\sqrt{g_{11}}} - \frac{\sqrt{g_{22}}(Y^+ - Y^-)}{2} - Z^v - \frac{g^{23}(Z^+ - Z^-)}{2\sqrt{g_{33}}} + \frac{\tau_\eta}{\varrho}, \\
X^w &= -\frac{g^{13}(X^+ - X^-)}{2\sqrt{g_{11}}} - Y^w - \frac{g^{23}(Y^+ - Y^-)}{2\sqrt{g_{22}}} - \frac{\sqrt{g_{33}}(Z^+ - Z^-)}{2} + \frac{\tau_\zeta}{\varrho}.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

La dernière inconnue X^s apparaît de manière découplée dans l'équation de la thermique décrivant l'évolution de l'entropie.

L'adiabaticité est une propriété de la paroi et non du fluide. Sa définition est simplement que le flux de chaleur normal à la paroi est nul. C'est exactement l'implémentation que nous avons choisie. En effet, la nullité du gradient de température est une conséquence. De plus, comme notre formulation est en vitesse, pression et entropie, fixer la nullité du gradient normal de température n'est pas direct. Le terme de dissipation thermique dans (1.48)₁ et (1.48)₅ tient compte du flux normal de chaleur fixé à zéro.

Pour le mur isotherme, nous avons utilisé l'onde X^s pour fixer à zéro la dérivée temporelle de la température. D'après les relations de Gibbs, la température

est liée aux pression et entropie selon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p \frac{\partial s}{\partial t} = \\ 0 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{T}{C_p} \frac{\partial s}{\partial t} . \end{aligned} \quad (1.79)$$

$\frac{\partial p}{\partial t}$ peut être déterminé à l'aide de (1.78) et (1.48)₁. X^s doit alors satisfaire

$$X^s = -Y^s - Z^s + \frac{\sigma}{T\rho} + \frac{\sigma(\gamma - 1)}{T\rho} - (X^+ + X^- + Y^+ + Y^- + Z^+ + Z^-) \frac{c}{2T} . \quad (1.80)$$

- \mathcal{X}_m À l'entrée, nous avons quatre caractéristiques entrantes. L'onde acoustique remontant contre l'entrée est animée d'une vitesse $u - c$. Aussi nous avons choisi de ne pas travailler directement sur u . Nous avons fixé à zéro les dérivées temporelles des deux vitesses tangentielles v et w et de l'entropie s . Les ondes entrantes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} X^s &= \frac{\sigma}{\rho T} - Z^s - Y^s , \\ X^v &= \frac{\tau_\eta}{\rho} - \frac{g^{23}(Z^+ - Z^-)}{2\sqrt{g_{33}}} - Z^v - \frac{\sqrt{g_{22}}(Y^+ - Y^-)}{2} - \frac{g^{12}(X^+ - X^-)}{2\sqrt{g_{11}}} , \\ X^w &= \frac{\tau_\zeta}{\rho} - \frac{\sqrt{g_{33}}(Z^+ - Z^-)}{2} - \frac{g^{23}(Y^+ - Y^-)}{2\sqrt{g_{22}}} - Y^w - \frac{g^{13}(X^+ - X^-)}{2\sqrt{g_{11}}} . \end{aligned} \quad (1.81)$$

Dans les conditions limites précédemment citées, il n'y a aucune condition fixant un niveau moyen de pression. Une contrainte sur la pression doit donc être introduite à l'entrée. Mais le but de cette étude est d'examiner l'évolution d'une perturbation. Celle-ci est susceptible d'émettre des ondes acoustiques, qui peuvent remonter vers l'entrée. Aussi, nous avons préféré travailler sur une quantité plus globale que la pression. L'enthalpie totale, qui est théoriquement constante hors de la couche limite, a été choisie. Nous avons de plus utilisé une variante de la formulation faiblement réfléchissante exposée dans Poinot et Lele [PL92, Section 3.2.]. Pour leur configuration, l'idée est de revenir à une condition non réfléchissante classique quand le niveau de pression à l'entrée est égal au niveau de référence p_∞ souhaité. Aussi la forme proposée de l'onde entrante est :

$$X^+ = K(p - p_\infty) . \quad (1.82)$$

Dans notre cas, le champ à l'entrée étant de gradient constant mais non nul, nous souhaitons revenir à la valeur de référence X_{ref}^+ du champ de base. La dépendance est de plus sur l'enthalpie totale. Aussi, l'onde entrante est écrite

sous la forme :

$$X^+ = X_{ref}^+ \left(1 + \mathcal{K} \frac{H - H_{ref}}{H_{ref}} \right) . \quad (1.83)$$

À l'instant initial, l'onde de référence X_{ref}^+ est telle que $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$. Soit en utilisant les autres conditions limites (1.81) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} = 0 . \quad (1.84)$$

Dans le cas particulier d'une grille curviligne orthogonale, alignée avec la grille cartésienne, ceci équivaut à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u^\perp}{g_{11}} \frac{\partial u^\perp}{\partial t} = 0 . \quad (1.85)$$

X^+ apparaît seulement dans (1.48)₁ et (1.48)₂, d'où finalement

$$\begin{aligned} X_{ref}^+ = & \rho \left(u^\perp \left(\frac{g^{13}(Z^- - Z^+)}{\sqrt{g_{33}g_{11}}} + \frac{g^{12}(Y^- - Y^+)}{\sqrt{g_{22}g_{11}}} \right) \right. \\ & \left. - c(Y^- + Y^+ + Z^+ + Z^-) + X^- \left(\frac{u^\perp}{\sqrt{g_{11}}} - c \right) \right) \\ & + 2u^\perp \left(\frac{\tau_\xi}{g_{11}} - \rho \left(\frac{Y^u}{g_{11}} + \frac{Z^u}{g_{11}} \right) \right) + 2(\gamma - 1)\sigma . \end{aligned} \quad (1.86)$$

Avec la formulation (1.83), on évite un couplage fort entre les ondes entrantes et l'onde sortante.

Nous disposons maintenant de conditions limites susceptibles de permettre la résolution et allons présenter quelques résultats sur le champ de base.

1.6 Résultats pour le champ de base

En utilisant comme solution initiale la solution des équations (1.40) à (1.43) et la condition limite adiabatique au mur, nous avons obtenu un champ de base convergé. Nous avons ensuite changé la condition limite au mur et utilisé un mur isotherme. Le champ adiabatique convergé étant stationnaire, la température à la paroi satisfait $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, ce qui est exactement la condition d'isothermie. Le changement de condition limite crée une modification quasi-nulle du champ de base. On peut ainsi étudier l'influence de la seule condition limite d'isothermie ou d'adiabaticité sur la perturbation. Notons que la convergence (avec une méthode d'intégration temporelle) du champ de base est possible parce la solution initiale est très proche de la solution finale convergée et parce que, de plus, les longueurs d'onde de la différence entre ces deux champs ne sont pas dans la gamme susceptible de déclencher des instabilités (numériques ou physiques).

Les nombres adimensionnels de référence sont

- le nombre de Reynolds $Re = \frac{W_\infty \delta}{\nu_0}$, avec $\delta = \sqrt{\nu_0/B}$, ν_0 la viscosité cinématique au point d'arrêt et W_∞ , la vitesse dans la direction périodique z hors de la couche limite (voir figure (1.2)). À convergence $Re = 644.05$. La valeur du nombre de Reynolds évolue légèrement au cours de la convergence car la température en paroi (et donc aussi la viscosité) n'est pas fixée par la condition adiabatique.
- le nombre de Mach $M = W_\infty/a_0$, avec a_0 la vitesse du son au point d'arrêt. À convergence $M = 0.2977$.
- le nombre de Prandtl $Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda}$. Le nombre de Prandtl est fixé à 0.72.

Les grandeurs de référence, à l'aide desquelles les résultats sont adimensionnés, sont considérées au point d'arrêt pour les variables thermodynamiques : $P_0 = 1.04205 \times 10^5 Pa$, $T_0 = 295.015 K$. Les vitesses sont adimensionnées avec la vitesse périodique à la frontière d'entrée : $W_\infty = 102.50 m.s^{-1}$. Le temps est adimensionné avec le gradient de vitesse de l'écoulement hyperbolique (1.13) : $B = 102.50 s^{-1}$.

Nous avons utilisé un domaine de $L_y = 196 \delta$ selon la direction tangentielle y et $L_x = 50 \delta$ selon la direction normale x . Dans la direction de périodicité z , nous choisissons la taille du domaine en nous appuyant sur un résultat incompressible analytique de Hall et al. [HMP84] : $L_z = \lambda$ où λ est la longueur d'onde de la perturbation, telle que le couple (Re, λ) est dans le domaine instable du diagramme de stabilité (Re, λ) . Cette longueur L_z est sans incidence sur le champ de base. Elle est explicitée au paragraphe 1.7.1.

Les points sont équidistants en y et z avec respectivement 123 et 6 points. Dans la direction normale x , nous avons utilisé une répartition en tangente hyperbolique permettant un resserrement des points à la paroi :

$$x = -L_x + L_x \frac{\tanh(\beta \xi_i)}{\tanh(\beta)}, \quad (1.87)$$

où $\xi_i = i/N_x$ varie entre 0 à l'entrée et 1 au mur et $N_x = 61$ est le nombre de points selon x . Le resserrement est fixé à $\beta = 2.3$. La répartition des points en paroi est visible sur la figure (1.22).

1.6.1 Champ de base avec paroi adiabatique

Ces résultats sont obtenus avec le schéma d'intégration en temps Runge-Kutta 4^{ème} ordre, utilisé pour tous les calculs de perturbation présentés par la suite. Sur la figure 1.13 est tracée la courbe de convergence du calcul du champ de base. En ordonnée est tracé le résidu, moyenne sur l'ensemble du domaine et des variables P, U, V, W, S de la norme de la différence entre l'état à l'instant $n + 1$ et l'état à l'instant n .

Sur les figures 1.14 à 1.21 sont tracées la pression, les vitesses normale, tangentielle et périodique, l'entropie, la température, la masse volumique et l'enthalpie

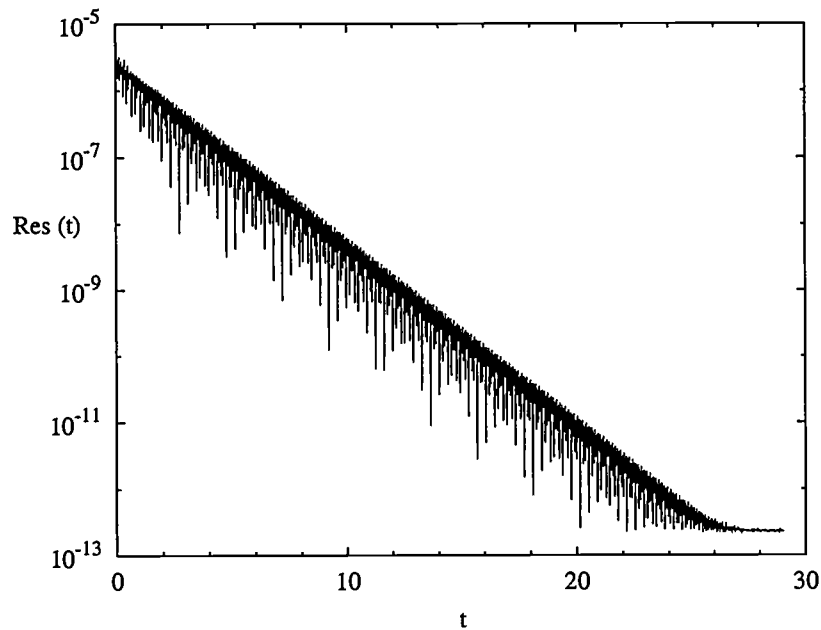


FIG. 1.13 – Courbe de convergence pour le domaine $50 \times 188\delta$ avec un schéma d'intégration temporelle Runge-Kutta 4^{ème} ordre et un mur adiabatique

totale du champ de base. Le mur est en bas à droite sur toutes les figures. En z , l'épaisseur de couche limite à 99% est constante et égale à 3.06δ . L'épaisseur de couche limite thermique ne peut pas être déterminée par une mesure à 99%. En effet, la température décroît continûment à mesure que l'on s'éloigne du point d'arrêt, et ce même à l'extérieur de la couche limite. Nous avons repéré sa frontière par la position du deuxième point d'inflexion à partir du mur du profil de température (voir figure 1.23). L'épaisseur de couche limite thermique est constante selon y et égale à 6.80δ . Elle est nettement supérieure à l'épaisseur de couche limite cinématique dans la direction périodique. Or la vitesse W apporte la contribution cinématique dominante dans l'enthalpie totale : on observe un excès d'enthalpie totale en sortie de couche limite par rapport au niveau loin du mur.

Le principal ajustement au cours de la convergence apparaît en raison de notre hypothèse initiale d'enthalpie totale constante et de l'ajustement résultant sur la vitesse périodique. En effet, l'ordre de grandeur de la différence entre champ final et champ initial (normalisée par les grandeurs de référence) est 10^{-6} pour la pression, 4.5×10^{-4} pour la vitesse normale, 10^{-3} pour la vitesse tangentielle, 10^{-2} pour la vitesse périodique, 3.5×10^{-4} pour l'entropie, 3×10^{-3} pour la température et l'enthalpie totale. Les variables au plus fort ajustement sont donc W , T et H . Sur la figure 1.22, nous comparons le profil d'enthalpie totale aux instants final et initial à une position $y = 44.4\delta$. La chute de H à la paroi se traduit par un abaissement de la température au mur, tracée figure 1.23. On vérifie également que la manière

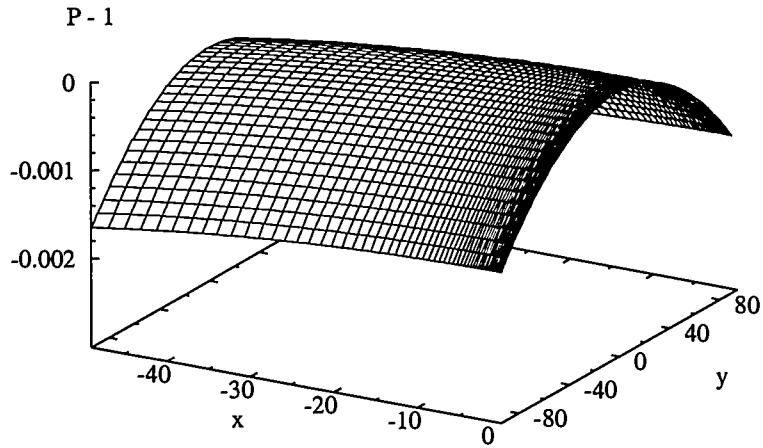


FIG. 1.14 – Champ de pression de base avec un mur adiabatique

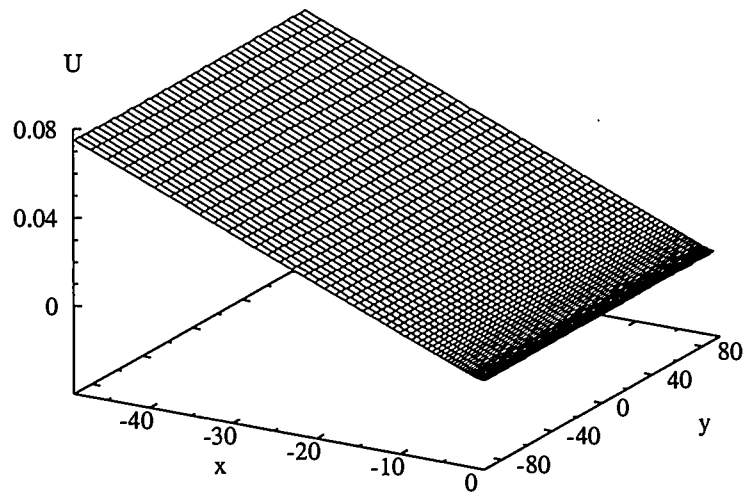


FIG. 1.15 – Champ de vitesse normale de base avec un mur adiabatique

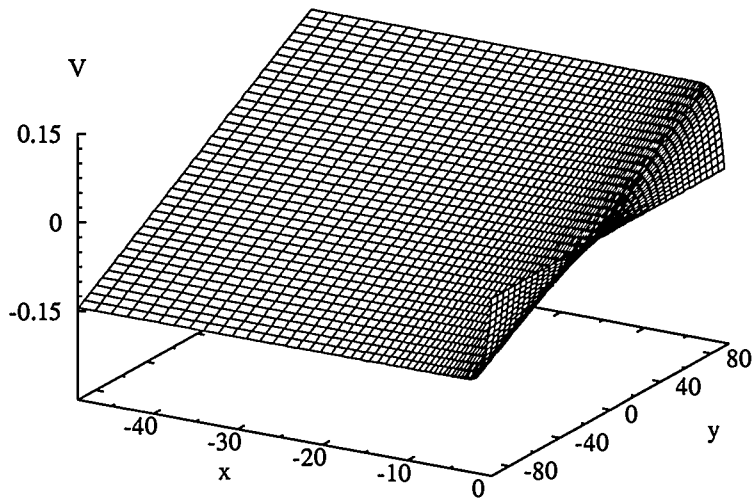


FIG. 1.16 – Champ de vitesse tangentielle de base avec un mur adiabatique

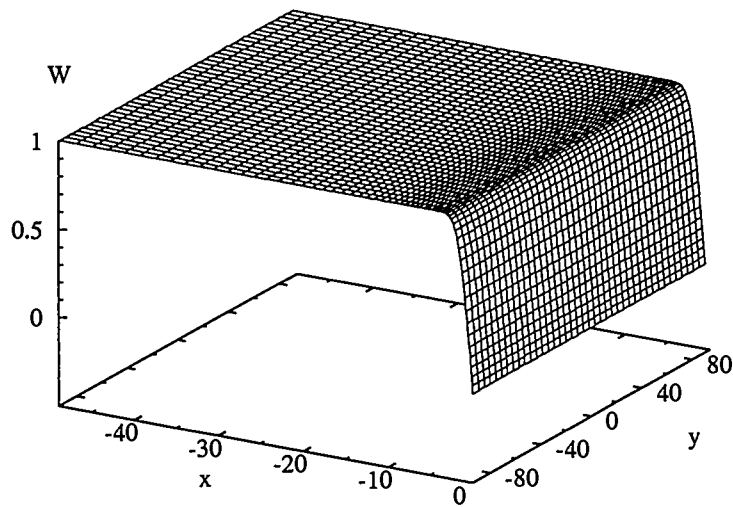


FIG. 1.17 – Champ de vitesse périodique de base avec un mur adiabatique

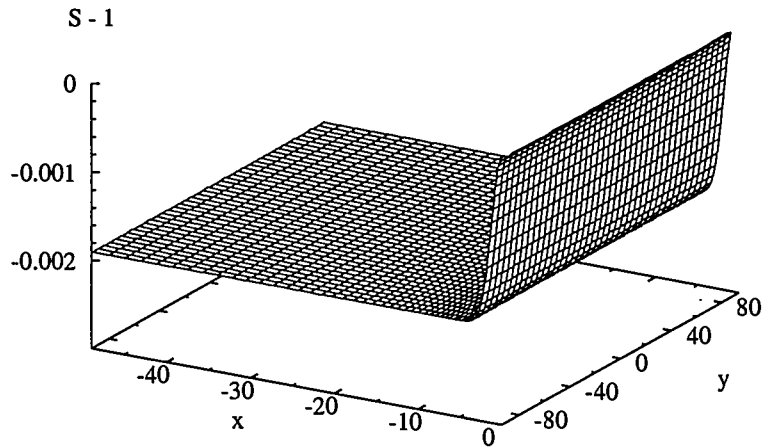


FIG. 1.18 – Champ d'entropie de base avec un mur adiabatique

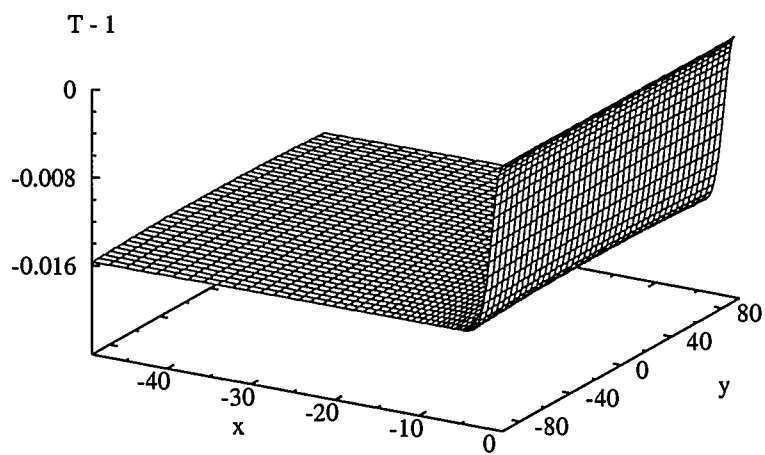


FIG. 1.19 – Champ de température de base avec un mur adiabatique

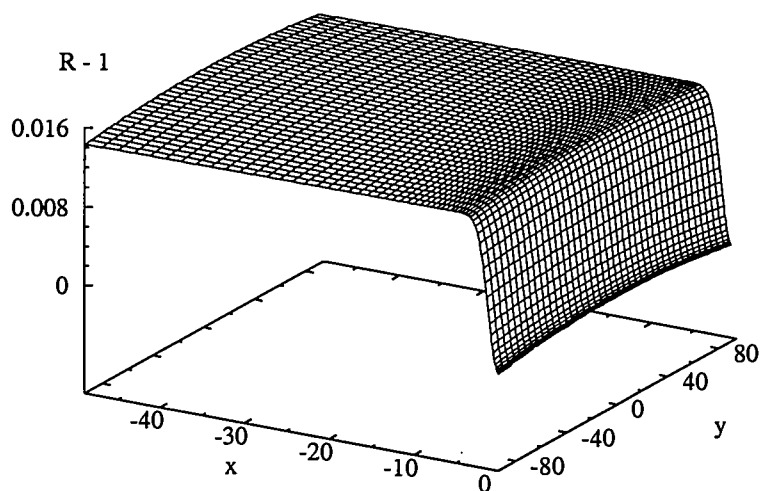


FIG. 1.20 – Champ de masse volumique de base avec un mur adiabatique

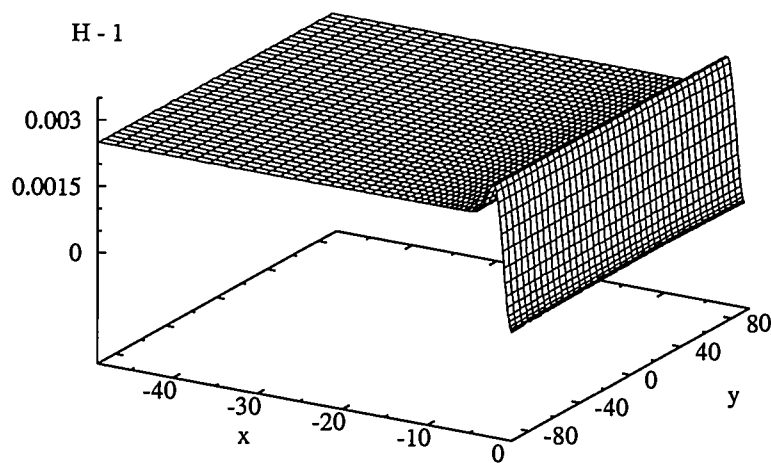


FIG. 1.21 – Champ d'enthalpie totale de base avec un mur adiabatique

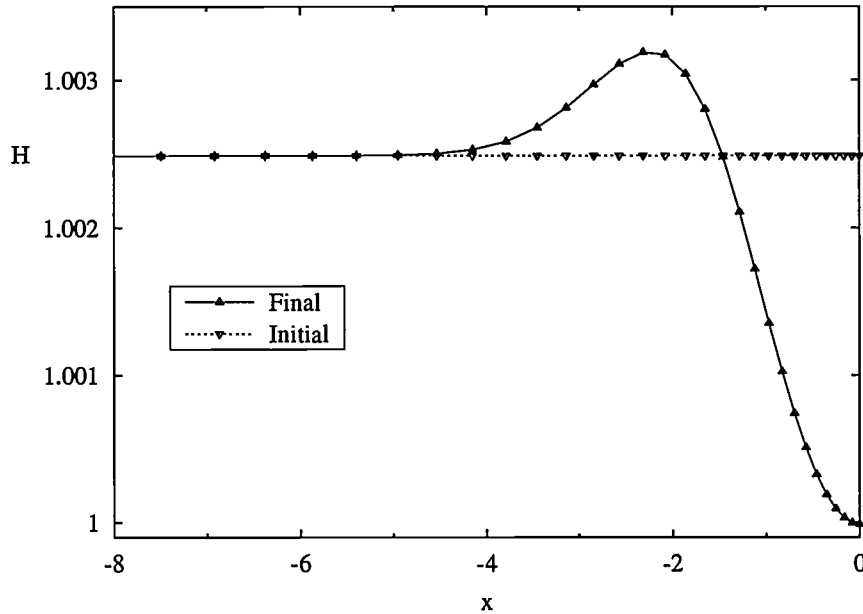


FIG. 1.22 – Profil d'enthalpie totale du champ de base aux instants initial et final. Le profil est extrait à $y = 44.4\delta$

d'imposer l'adiabaticité permet d'obtenir un gradient normal de température nul à la paroi. Sur la figure 1.24, nous traçons à $y = 44.4\delta$ un profil de $\frac{\partial T}{\partial x}$ adimensionné par δ/T_0 . Pour finir, la différence de vitesse périodique de l'instant initial par rapport à l'instant final $W_{ini} - W_{fin}$ est tracée sur la figure 1.25.

Tous ces résultats ont été obtenus avec une valeur de la constante $\mathcal{K} = 2.96 \times 10^{+3}$ dans la condition limite d'entrée (1.83) et un schéma Runge-Kutta de 4^{ème} ordre. L'emploi d'une intégration en temps Runge-Kutta 3^{ème} ordre et de la même constante conduit à un résultat identique à 10^{-10} près. Les différences entre Runge-Kutta 3^{ème} et 4^{ème} ordre apparaissent pour les résolutions spatiales faibles. La discrétisation spatiale est donc suffisamment fine pour le champ de base. Nous avons ensuite voulu évalué l'influence de la constante \mathcal{K} de la condition limite sur le champ de base.

1.6.2 Influence de la constante \mathcal{K} de la condition limite

En remarque préliminaire, il est important de noter que le résultat obtenu est obligatoirement dépendant de la condition limite. Dans le cas du point d'arrêt, les travaux analytiques ne sont pas affranchis de ce problème. Pour un point d'arrêt plan, Hämmerlin [Häm55] pose comme condition limite sur la perturbation qu'elle est nulle à l'infini amont. Le spectre a une partie continue et une partie discrète. Les modes du spectre discret présentent une décroissance exponentielle à l'infini amont alors que les modes du spectre continu décroissent algébriquement. Wilson et

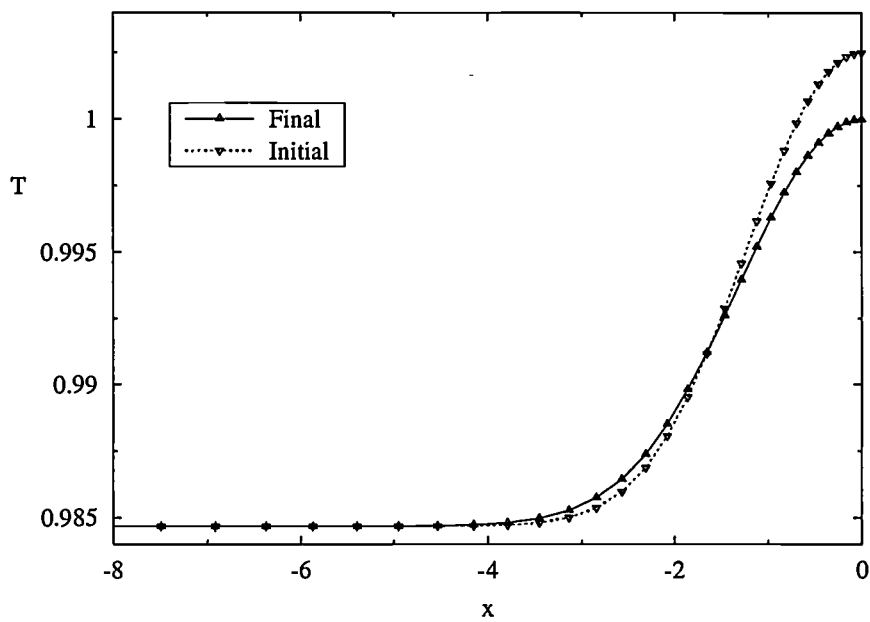


FIG. 1.23 – Profil de température du champ de base aux instants initial et final. Le profil est extrait à $y = 44.4\delta$

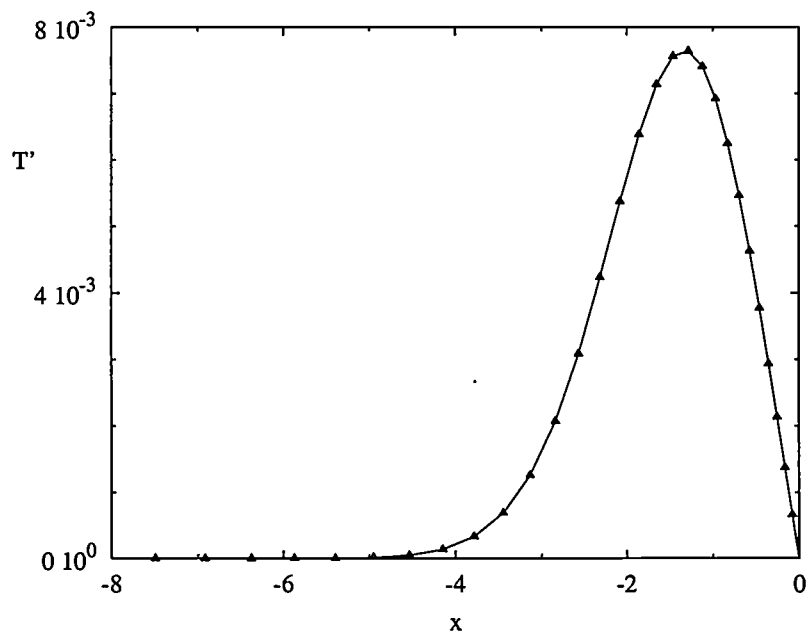


FIG. 1.24 – Profil de la dérivée de la température du champ de base à l'instant final. Le profil est extrait à $y = 44.4\delta$

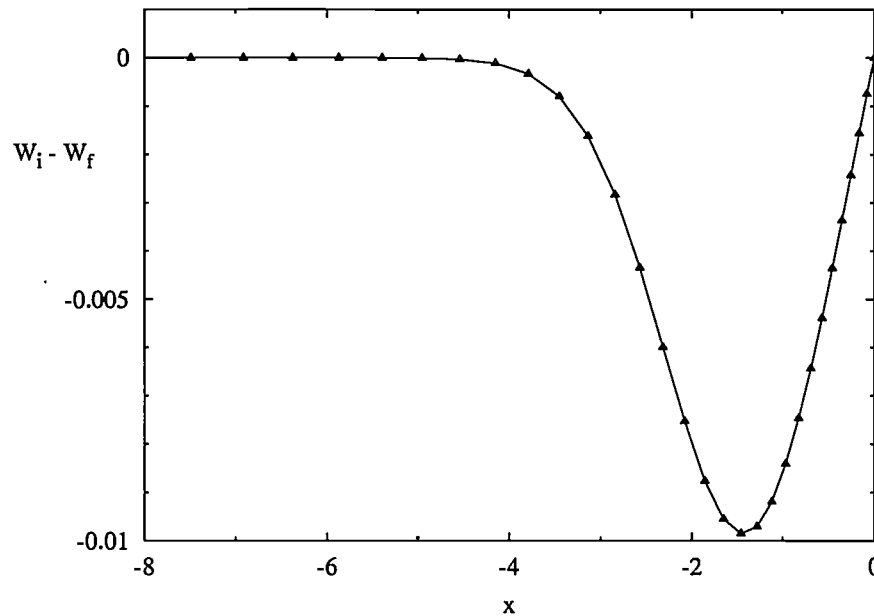


FIG. 1.25 – Profil de différence de vitesse périodique de l’instant initial par rapport à l’instant final. Le profil est extrait à $y = 44.4\delta$

Gladwell en 1978 in [WG78] notent que la condition limite de simple nullité à l’infini n’est pas valable : elle ne permet pas d’obtenir des modes physiques. Ils argumentent qu’il faut une décroissance exponentielle des modes propres pour pouvoir les faire coïncider avec une perturbation externe à la couche limite. Les modes du spectre continu sont alors rejetés. Cette condition de décroissance exponentielle est utilisée par les auteurs suivants. Dhanak et Stuart in [DS95] au contraire montrent en 1995 qu’il est possible de trouver des perturbations solénoïdales amont faibles coïncidentes avec les modes du spectre continu. Les modes du spectre continu sont à nouveau acceptés. Ceci illustre la dépendance du résultat sur les conditions limites et la difficulté à choisir une condition limite adéquate.

Plus modestement, nous présentons ici quelques tests sur l’influence de la condition limite, et plus précisément du choix de la constante \mathcal{K} dans la condition limite faiblement réfléchissante (1.83). Nous avons utilisé un petit domaine et un schéma Runge-Kutta 3^{ème} ordre. La taille du domaine est 25δ dans les directions normales et tangentielles avec 61 points dans ces deux directions. En z , nous avons 6 points. Le maillage est analogue à celui du grand domaine. Le facteur de resserrement β est 1.4.

Nous avons testé trois valeurs de la constante \mathcal{K} . La valeur la plus élevée est le maximum que l’on a pu utilisé sur cette grille pour obtenir un résultat convergé. Sur la figure (1.26), nous avons tracé le résidu pour les différentes valeurs de \mathcal{K} .

La convergence beaucoup plus lente de la constante la plus faible s’explique par

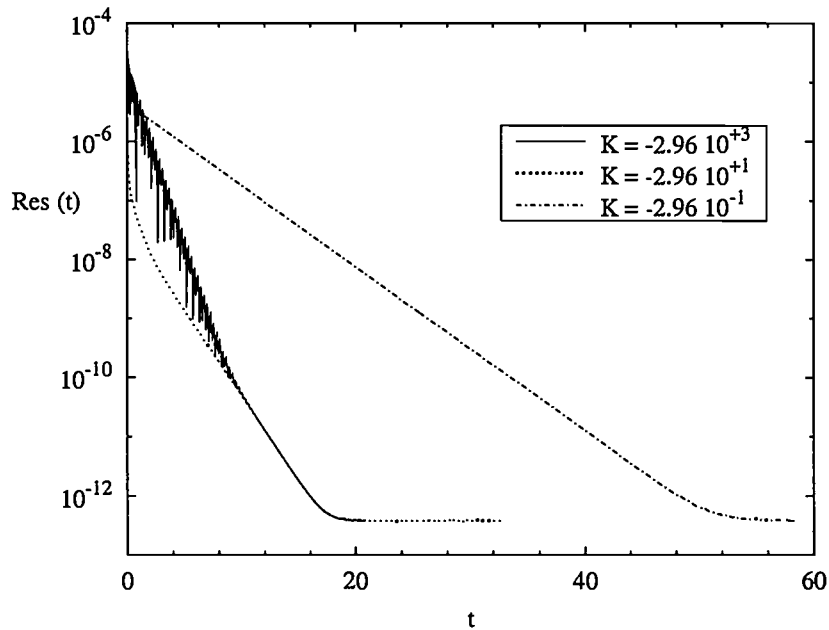


FIG. 1.26 – Courbe de convergence pour différentes valeurs de la constante de relaxation K de la condition limite d'entrée

un problème de dérive du champ de pression. En effet, la différence du champ final par rapport au champ initial a les ordres de grandeur suivants, après adimensionnement par P_0 , S_0 et W_∞ à l'instant initial :

\mathcal{K}	$2.96 \times 10^{+3}$	$2.96 \times 10^{+1}$	2.96×10^{-1}
ΔP	$1. \times 10^{-6}$	2.2×10^{-5}	8.2×10^{-4}
ΔU	$4. \times 10^{-5}$	$2. \times 10^{-5}$	$3. \times 10^{-5}$
ΔV	1.5×10^{-4}	$2. \times 10^{-4}$	$2. \times 10^{-4}$
ΔW	1.2×10^{-2}	1.2×10^{-2}	1.2×10^{-2}
ΔS	$3.5. \times 10^{-4}$	$3.5. \times 10^{-4}$	$3.5. \times 10^{-4}$

Quand la constante \mathcal{K} est diminuée, la variable qui varie le plus est la pression, avec un changement d'un ordre de grandeur et demi sur la pression pour une diminution de deux ordres de grandeur de \mathcal{K} . Les autres ajustements restent du même ordre de grandeur. Nous avons donc choisi d'utiliser la constante la plus élevée possible afin de maintenir le niveau de pression.

Ces résultats concernent seulement le champ de base. Par manque de temps, nous n'avons pas pu testé l'influence de la constante sur la perturbation. Néanmoins, nous avons pu constaté qu'une version où les ondes entrantes sont fixées une fois pour toutes (calculées à partir du champ de base convergé) ne donne pas de résultat satisfaisant. Ceci correspond à une constante \mathcal{K} nulle. En l'absence de perturbation interne, le calcul est stable : le champ de base est conservé. Les problèmes appa-

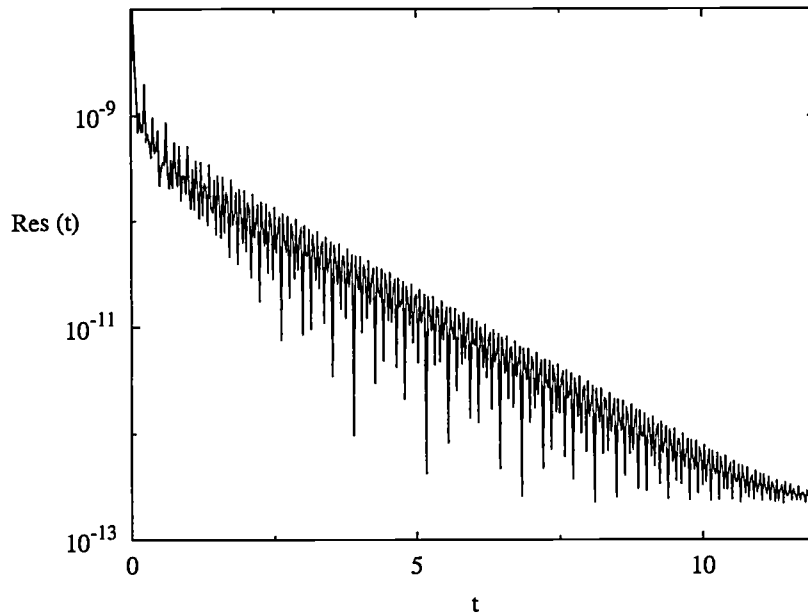


FIG. 1.27 – Courbe de convergence pour un mur isotherme

raissent avec une perturbation contenant une part acoustique. L'onde acoustique remontant à la vitesse $U - C$ sort certes sans réflexion du domaine mais induit une instabilité en frontière. En effet le passage de l'onde acoustique modifie la valeur des dérivées temporelles en entrée. Leur non-nullité change alors le champ aérodynamique, ce qui augmente encore la valeur des dérivées temporelles. Le phénomène est exponentiellement croissant. La seule instabilité alors observée est une instabilité numérique en entrée.

1.6.3 Champ de base avec paroi isotherme

On utilise le champ convergé de la solution adiabatique et on remplace le mur adiabatique par un mur isotherme. Le changement de condition limite se traduit par une augmentation du résidu. Le résidu du calcul isotherme est montré figure (1.27). La différence entre le champ adiabatique et le champ isotherme est : 10^{-11} pour la pression, 5×10^{-8} pour l'entropie, 10^{-9} pour la vitesse normale, 10^{-8} pour la vitesse tangentielle, et 2×10^{-7} pour la vitesse périodique. Les modifications sont sur l'ensemble du champ pour la vitesse normale et la pression et limitées à la couche limite pour les autres variables.

Nous disposons maintenant d'un champ de base adiabatique et d'un champ de base isotherme. Nous allons maintenant présenter les perturbations que nous avons imposé sur ce champ.

1.7 Forme analytique des perturbations

1.7.1 Perturbation solénoïdale

Afin de simuler un cas proche d'une perturbation incompressible, le champ de base a été perturbé avec une perturbation purement solénoïdale (vorticité pure) : la perturbation laisse la pression et l'entropie inchangées et affecte les composantes de vitesse selon

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (1.88)$$

Dans le cas d'un champ de base uniforme (de gradient nul) et d'une petite perturbation, Kovasnay [Kov53] a montré pour un champ non visqueux que les modes vorticaux sont au premier ordre (approximation linéaire) découplés des modes entropique et acoustique. De manière analogue à Tam et Webb dans [TW93], cette propriété nous a permis de tester la nullité de divergence de notre perturbation. En outre, pour l'application au point d'arrêt, nous espérons avec une telle perturbation minimiser les ondes acoustiques, susceptibles de problèmes de réflexion et/ou de dérive à l'entrée du domaine de calcul.

Suivant Hall et al. dans [HMP84], nous supposons que la perturbation est sinusoïdale dans la direction d'homogénéité z , de longueur d'onde égale à la longueur du domaine. Hall et al. utilisent la forme de perturbation postulée par Görtler-Hämmerlin :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) &= f(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha c t W_\infty/\delta) , \\ v(x, y, z, t) &= y g(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha c t W_\infty/\delta) , \\ w(x, y, z, t) &= h(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha c t W_\infty/\delta) , \end{cases} \quad (1.89)$$

où α est le nombre d'onde adimensionnel de la perturbation dans la direction z et $c = c_r + ic_i$. $-\alpha c_r W_\infty/\delta$ est la pulsation temporelle de la perturbation et $+\alpha c_i W_\infty/\delta$ son taux d'amplification temporelle. En utilisant le champ de base incompressible et les équations incompressibles linéarisées, les auteurs résolvent un problème aux valeurs propres en c . Ce problème dépend de deux paramètres : le nombre de Reynolds du champ de base et α . Ils peuvent ainsi déterminer un domaine d'instabilité dans le plan (Re, α) . Pour $Re = 644$, le champ incompressible est instable pour $\alpha \in [0.24 : 0.32]$. Nous avons choisi la longueur L_z de notre domaine pour que $\alpha = 0.2787$. Selon x et y , afin de perturber l'ensemble des modes, la perturbation doit s'apparenter à un bruit blanc. De plus, dans le but d'étudier son comportement transitoire, elle est initialement spatialement localisée au dessus du point d'arrêt [Obr00]. Afin de facilement résoudre (1.88) analytiquement à l'instant initial, nous avons cherché la perturbation sous la forme d'une somme de modes sinusoïdaux j modulés par des

fonctions de localisation :

$$\begin{aligned} u &= \Re \left\{ \sum_j u^j \right\} = \Re \left\{ \sum_j f^j(x, y) \exp \left(i \left(k_x^j x + k_y^j y + k_z z + \phi_x^j \right) \right) \right\}, \\ v &= \Re \left\{ \sum_j v^j \right\} = \Re \left\{ \sum_j g^j(x, y) \exp \left(i \left(k_x^j x + k_y^j y + k_z z + \phi_y^j \right) \right) \right\}, \\ w &= \Re \left\{ \sum_j w^j \right\} = \Re \left\{ \sum_j h^j(x, y) \exp \left(i \left(k_x^j x + k_y^j y + k_z z + \phi_z^j \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.90)$$

où \Re désigne la partie réelle et k_x^j et k_y^j sont des nombres d'onde aléatoires. k_z est le nombre d'onde dimensionnel de la perturbation en z : $\alpha = k_z \delta$. Les fonctions f^j , g^j et h^j permettent d'assurer la nullité de divergence et de localiser la perturbation.

Satisfaire (1.88) pour chacun des modes j s'exprime alors :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f^j}{\partial x} \exp(i\phi_x^j) + \frac{\partial g^j}{\partial y} \exp(i\phi_y^j) \right) + \\ &i \left(k_x^j f^j \exp(i\phi_x^j) + k_y^j g^j \exp(i\phi_y^j) + k_z h^j \exp(i\phi_z^j) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Il n'y a dans toute cette partie pas de convention implicite de sommation sur les indices répétés.

Une solution simple et localisée de la première parenthèse est facilement déduite de Povitsky [Pov00] :

$$\begin{aligned} f^j &= A(y - y_0) \exp \left(-r^2 \ln 2 / r_0^2 \right) \exp \left(i\phi_y^j \right) / r_0, \\ g^j &= A(x_0 - x) \exp \left(-r^2 \ln 2 / r_0^2 \right) \exp \left(i\phi_x^j \right) / r_0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ est la distance dans le plan (x, y) au centre (x_0, y_0) de la perturbation à l'instant initial. r_0 est le rayon à mi-hauteur de l'exponentielle. A^j est l'amplitude du mode.

h^j est donc choisie de telle sorte que la deuxième parenthèse de (1.91) soit nulle :

$$\begin{aligned} h^j &= \frac{-A^j}{k_z \exp(i\phi_z^j)} \left[k_x^j (y - y_0) - k_y^j (x - x_0) \right] / r_0 \times \\ &\exp \left(-r^2 \ln 2 / r_0^2 \right) \exp \left(i\phi_x^j + i\phi_y^j \right). \end{aligned} \quad (1.93)$$

Finalement, le mode j de la perturbation s'écrit

$$\begin{cases} u^j &= A^j (y - y_0) E^j / r_0, \\ v^j &= A^j (x_0 - x) E^j / r_0, \\ w^j &= A^j \frac{[-k_x^j (y - y_0) + k_y^j (x - x_0)]}{k_z r_0} E^j, \end{cases} \quad (1.94)$$

où $E^j = \exp \left(i \left(k_x^j x + k_y^j y + k_z z + \phi_x^j + \phi_y^j \right) \right) \exp \left(-r^2 \ln 2 / r_0^2 \right)$.

La perturbation est la superposition de cent modes j où les quantités A^j , k_x^j , k_y^j et $\phi_x^j + \phi_y^j$ sont choisies aléatoirement. $A^j \in [-1, 1]$ et $\phi_x^j + \phi_y^j \in [0, 2\pi]$. Certaines restrictions sont imposées sur les fréquences. En effet l'équation modèle linéaire (1.68) discrétisée temporellement et spatialement montre qu'avec $CFL = 0.8$ les schémas compact centrés [Lel92] et compact upwind [AS96] de 5^{ème} ordre garantissent une dispersion inférieures à 2% pour des fréquences telles que $k\Delta x < 2$, où Δx est la taille de maille. Ceci définit la borne supérieure sur k_x et k_y . Il est à noter que ceci est un résultat obtenu à l'aide d'une équation modèle linéaire et non des équations non linéaires de Navier-Stokes. De plus ceci est une précaution minimale qui ne tient pas compte du contenu fréquentiel éventuellement plus élevé de l'exponentielle. La somme des modes est remultipliée par un pourcentage de la vitesse, définissant le niveau nominal de perturbation.

Pour tester cette perturbation, nous considérons un champ de base uniforme : la vitesse est $(U_\infty, 0, W_\infty)$ (avec $W_\infty = U_\infty$) et la pression et l'entropie sont telles que le nombre de Mach est 0.3. Pour se placer dans les conditions de découplage théorique des modes, le nombre de Reynolds est infini. Comme pour le point d'arrêt, nous appliquons des conditions de périodicité en z et la condition limite faiblement réfléchissante en entrée \mathcal{X}_m . Les trois autres faces sont non réfléchissantes. La taille de la boîte est arbitraire, et les distances normalisées par une longueur arbitraire δ . En x , le domaine est borné entre -24 et 0 . En y entre -12 et $+12$. En y et z , les 81 et 6 points du maillage sont équidistants. En x , les 81 points sont répartis en tangente hyperbolique (voir (1.87)), avec $\beta = 1.15$. Le niveau nominal de la perturbation est fixé à 10^{-8} de la vitesse de base. Les grandeurs de normalisation sont W_∞ pour les vitesses et P_∞ et S_∞ pour la pression et l'entropie.

Sur la figure (1.28) est tracée la valeur instantanée de la perturbation u dans le plan $z = 0$ à l'instant initial. Sur la figure (1.29) est tracée la valeur *rms* ("root-mean-square") selon z (voir définition (2.2)) de la même variable au même instant. L'apparent lissage est dû au moyennage de la *rms*. Les résultats que nous présentons dans la suite de cette section sont tous des valeurs *rms*. Sur la figure (1.30), nous avons tracé cette même valeur *rms* au temps $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$. Ces deux dernières figures sont typiques de l'évolution de la perturbation aux instants $t > 0$: la vitesse est simplement convectée avec la vitesse de l'écoulement de base, comme attendu pour une perturbation de vorticité pure. Ceci est aussi vérifié pour les autres composantes de vitesses : sur les figures (1.31) à (1.34) nous avons tracé les vitesses tangentielle et périodique à l'instant 0 et un instant ultérieur. Il est à noter que le niveau de fluctuation de vitesse périodique w est un ordre de grandeur supérieur à celui de u et v . En effet, l'expression de w dans (1.94) fait apparaître le rapport k_α/k_z avec $\alpha = x$ ou y . Or k_z est fixée à $0.2787/\delta$ alors que k_α est bornée supérieurement par $2./\Delta x$. La distance moyenne entre les points en x ou y est de $25\delta/80$, d'où un rapport k_α/k_z qui peut atteindre des valeurs de 20. Ceci explique la différence d'un ordre de grandeur entre les perturbations de vitesse en x, y d'une part et en z

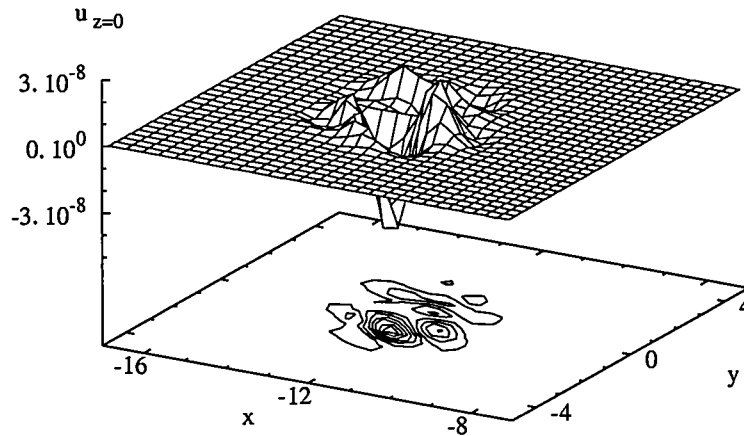


FIG. 1.28 – Valeur dans le plan $z = 0$ de la perturbation de vitesse normale superposée à un champ uniforme à l'instant 0

d'autre part.

La contribution acoustique (voir figure 1.35) n'est en revanche pas strictement nulle, comme théoriquement attendu. Elle reste néanmoins trois ordres de grandeur inférieure à la contribution vorticale. Le défaut est dû à la discrétisation. La contribution entropique est encore beaucoup plus faible : elle reste dans le brouillard numérique et est toujours inférieure à 10^{-15} , soit sept ordres de grandeur inférieure à la perturbation de vitesse. Cette différence entre ordre de grandeur acoustique et ordre de grandeur entropique est due à la forme des équations : la pression est plus fortement couplée à la vitesse dans le système (1.48), qui est écrit en pression, vitesse, entropie et non en pression, vorticité, entropie.

1.7.2 Perturbation entropique

Cette forme de perturbation pure est la plus facile à écrire car dans le système d'équations (1.48) nous travaillons directement sur l'entropie.

La perturbation est ainsi écrite sous la forme :

$$s = \sum_j A^j \cos(k_x^j x + k_y^j y + k_z z + \phi^j) \exp(-r^2 \ln 2/r_0^2) \quad (1.95)$$

avec les mêmes notations que pour (1.90).

En pratique, on aurait pu choisir n'importe quelle forme de perturbation de l'entropie puisque que le découplage est automatique. Il n'y a pas de restriction sur

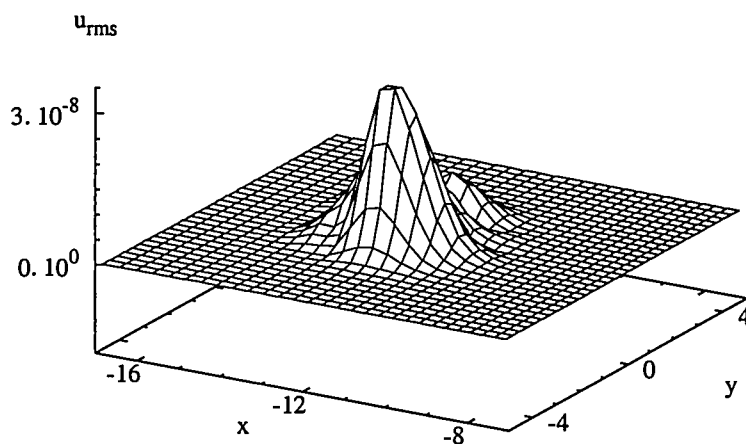


FIG. 1.29 – Valeur rms de la perturbation de vitesse normale superposée à un champ uniforme à l'instant 0

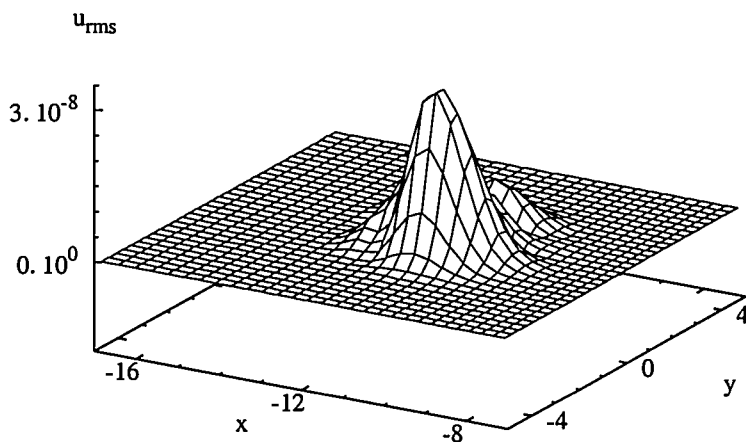


FIG. 1.30 – Valeur rms de la perturbation de vitesse normale superposée à un champ uniforme à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$

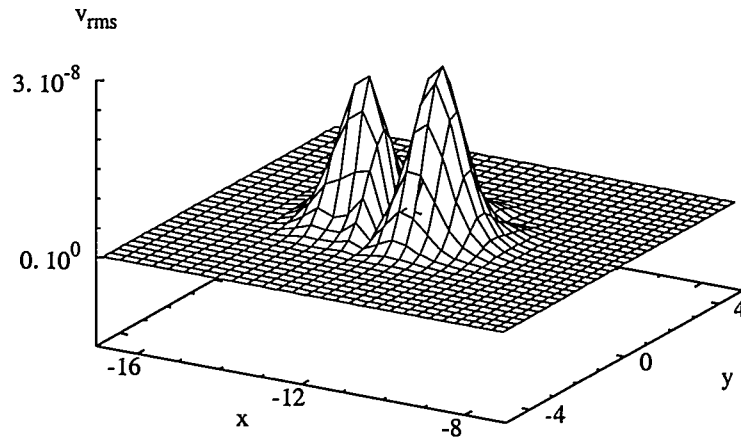


FIG. 1.31 – Valeur rms de la perturbation de vitesse tangentielle superposée à un champ uniforme à l'instant 0

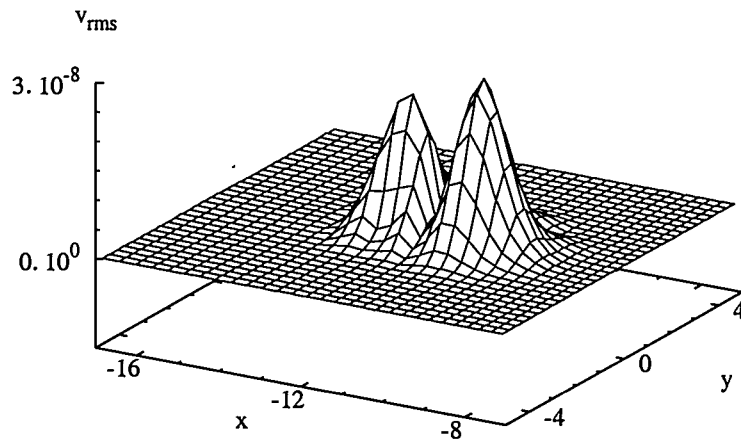


FIG. 1.32 – Valeur rms de la perturbation de vitesse tangentielle superposée à un champ uniforme à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$

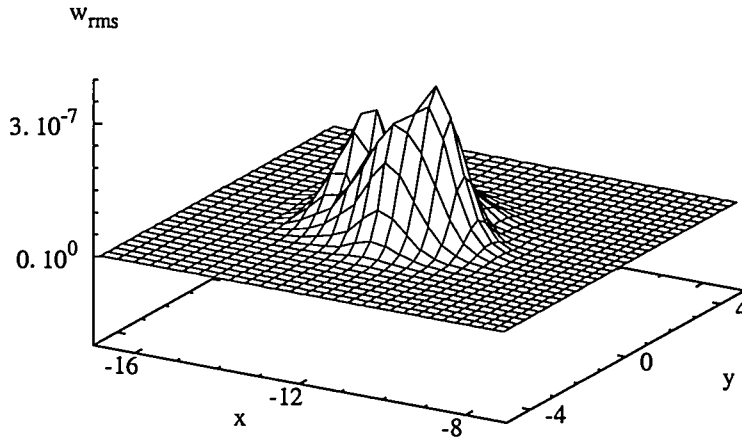


FIG. 1.33 – Valeur rms de la perturbation de vitesse périodique superposée à un champ uniforme à l'instant 0

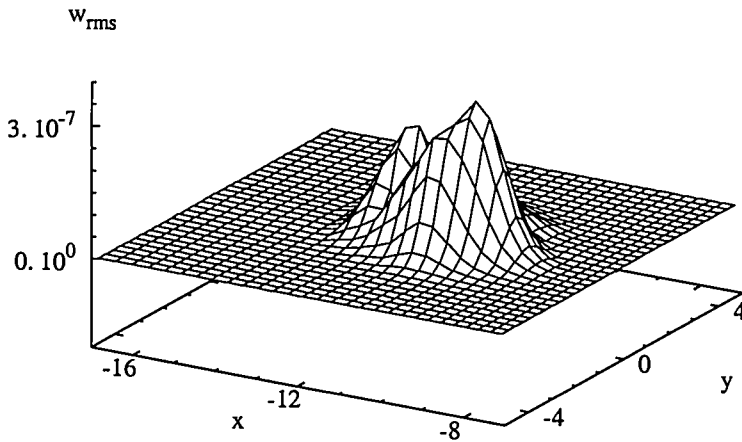


FIG. 1.34 – Valeur rms de la perturbation de vitesse périodique superposée à un champ uniforme à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$

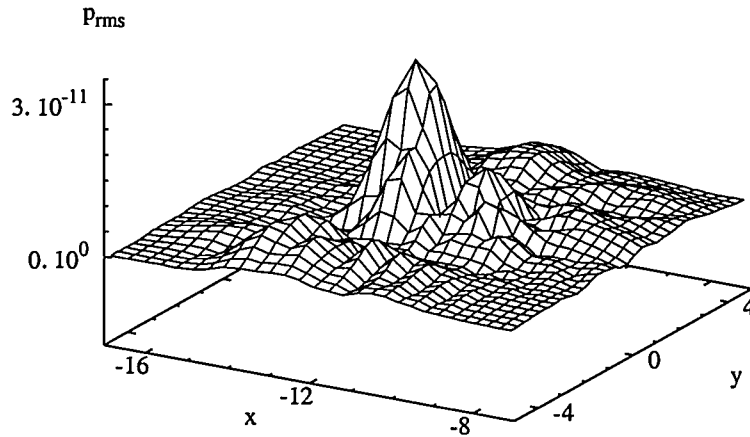


FIG. 1.35 – Valeur rms de la perturbation de pression superposée à un champ uniforme à l'instant $t = 1.70 \cdot 10^{-3}$

les fréquences k_x^j et k_y^j .

La perturbation est convectée avec l'écoulement de base. Elle reste découplée des perturbations acoustique et vorticale.

1.7.3 Perturbation acoustique

Ce type de perturbation initiale n'a pas pu être envisagé. En effet, un spot acoustique se propage à la vitesse $U \pm C$. Si on considère un spot situé initialement au milieu du domaine de calcul, il émet une onde X^+ se déplaçant à la vitesse $U + C$ vers le mur, et une onde X^- se déplaçant à la vitesse $U - C$ vers l'entrée. Compte tenu de la taille de notre domaine (L_x dans la direction x), la vitesse U reste toujours de l'ordre de quelques pourcents de C . L'onde X_p atteint donc le mur approximativement en un temps $\frac{L_x}{2C}$. L'onde X_m peut être réfléchiée à l'entrée et atteint le mur en $\frac{3L_x}{2C}$. Nous verrons que ce temps est faible devant le temps d'établissement d'une perturbation. L'étude d'un spot acoustique initial nécessiterait des conditions d'entrée parfaitement non réfléchissantes.

Chapitre 2

Simulation Numérique Directe des Instabilités

Tous les résultats sont présentés normalisés avec les grandeurs de référence suivantes : les vitesses sont adimensionnées avec W_∞ , vitesse hors de la couche limite dans la direction z . Les pression, masse volumique et entropie sont adimensionnées avec leur valeur au point d'arrêt, P_0 , R_0 et S_0 . Rappelons ici que la masse volumique du champ de base est notée R , alors que celle de la perturbation est notée ρ . Le temps est normalisé avec le gradient de vitesse de l'écoulement hyperbolique hors de la couche limite, B (1.13). Les distances sont adimensionnées avec l'épaisseur δ . Si l'adimensionnement n'est pas celui indiqué ci-dessus, il sera explicitement défini pour chaque cas. Nous rappelons les orientations données sur la figure (1.2) : z est la direction le long de la ligne d'arrêt, $-x$ est la direction normale et y la direction tangentielle.

Notre première série de tests a consisté à perturber le champ de base à l'aide de la perturbation en vorticité pure présentée au chapitre précédent. Elle est initialement centrée au dessus de la ligne d'arrêt. Nous avons ensuite complété avec d'autres tests pour lever certaines ambiguïtés apparues.

2.1 Perturbation de vorticité pure initialement centrée sur un mur adiabatique

À l'instant initial, la perturbation de vorticité pure possède un diamètre à mi-hauteur $2r_0 = 2.6 \delta$ (1.94) et est centrée à 2.6δ du mur : $(x_0; y_0) = (2.6 \delta; 0)$. L'épaisseur de couche limite à 99 % dans la direction z est de 3.06δ . La perturbation est donc à l'intérieur de la couche limite. Dans la direction de périodicité, la perturbation est sinusoïdale. Sa longueur d'onde est égale à la longueur du domaine L_z et permet d'être dans le domaine d'instabilité incompressible pour le nombre de Reynolds $Re = 644$. Le niveau nominal de la perturbation est $10^{-6} W_\infty$.

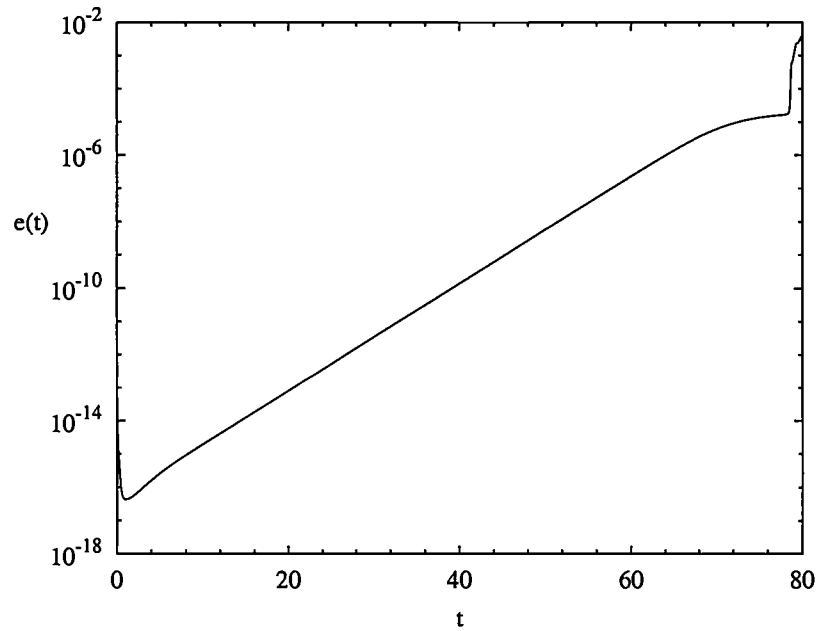


FIG. 2.1 – Énergie cinétique de la perturbation en fonction du temps pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur adiabatique

Nous traçons sur la figure (2.1) son énergie cin etique en fonction du temps. Elle est normalis ee par l'énergie cin etique du champ de base :

$$e(t) = \frac{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2 d\tau}{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} V^2 d\tau}, \quad (2.1)$$

où \mathcal{V} est le volume complet de calcul. Le niveau initial de la perturbation en énergie cin etique est $e(0) = 3 \cdot 10^{-13}$.

L'évolution temporelle de $e(t)$ peut ˆtre d compos ee en cinq périodes. Pour les temps très courts ($t \in [0; 1]$), $e(t)$ chute de quatre ordres de grandeur. De $t = 1$ à 6, elle croît avec un taux de croissance exponentiel non constant, qui se stabilise à une valeur constante pour la période suivante ($t \in [6; 60]$). Il suit une période de saturation ($t \in [60; 76]$) pendant laquelle le taux de croissance diminue progressivement jusqu'à s'annuler. Durant les derniers instants du calcul, l'énergie cin etique augmente à nouveau très fortement mais ce comportement est lié à un défaut de résolution numérique. Nous détaillerons maintenant chacune des cinq périodes en commençant par la période de croissance à taux exponentiel constant.

2.1.1 Comportement linéaire. Perturbation de Görtler et Hämmerlin

Nous avons cherché à comparer l'évolution de la perturbation avec les travaux analytiques, tous restreints au cas incompressible. Nous nous sommes en particulier intéressés aux hypothèses simplificatrices qu'ils utilisent. En effet, en raison de la complexité du problème, les études analytiques procèdent à des simplifications principalement de deux types. L'une consiste à négliger certaines composantes du champ de base, avec pour forme la plus simplificatrice l'emploi d'une hypothèse d'écoulement parallèle. C'est l'approche retenue par Poll en 1979 dans [Pol79]. Pour des nombres de Reynolds significativement plus élevés que le Reynolds critique (i.e. $Re > 1000$), cette hypothèse (non justifiée par la topologie du champ de base) influe peu sur la pulsation des perturbations. En revanche l'influence sur les taux d'amplification est plus forte, en particulier proche du nombre de Reynolds critique [Jos96]. En incompressible, le non parallélisme abaisse le Reynolds critique d'au moins 100. L'autre type de simplification consiste à supposer certaines formes de modes propres. Nous nous concentrerons sur cette approche.

Entre les temps 10 et 60, l'énergie cinétique croît exponentiellement à un taux constant. Cette évolution est caractéristique d'une perturbation suffisamment petite pour que les équations linéarisées régissent son évolution. La droite asymptote du logarithme de l'énergie cinétique entre les temps $t = 10$ et $t = 30$ s'écrit $a t + b$, avec $a = 0.3723$ et $b = -37.60$. À cette précision le résultat reste inchangé pour une régression linéaire entre les temps 20 et 40. Le taux d'amplification $a = 0.3723$ pourra être comparé avec celui des tests suivants.

Sur les figures (2.2) à (2.7) nous avons tracé les valeurs *rms* selon la direction z des perturbations de pression, vitesses, entropie et température au temps adimensionnel $t = 12.03$. La valeur *rms* selon la direction z d'une variable f est définie par

$$f_{rms}(x, y, t) = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} f^2 dz} , \quad (2.2)$$

où F est la valeur de référence de la variable f . Ces valeurs *rms* sont tracées en fonction des distances normale x et tangentielle y adimensionnées par l'épaisseur δ . Dans la direction y , un point sur trois est tracé.

On constate immédiatement que les vitesses et pression présentent les symétries postulées par Görtler et Hämmerlin [Gör55, Häm55]. Ceci apparaît aussi bien sur les valeurs instantanées des perturbations que sur leurs valeurs *rms*. Dans la première étude analytique sur le point d'arrêt bidimensionnel en 1955, Görtler et Hämmerlin supposent que les modes propres de la perturbation de vitesse présentent les mêmes dépendances normale et tangentielle que le champ de base. Rappelons que le champ

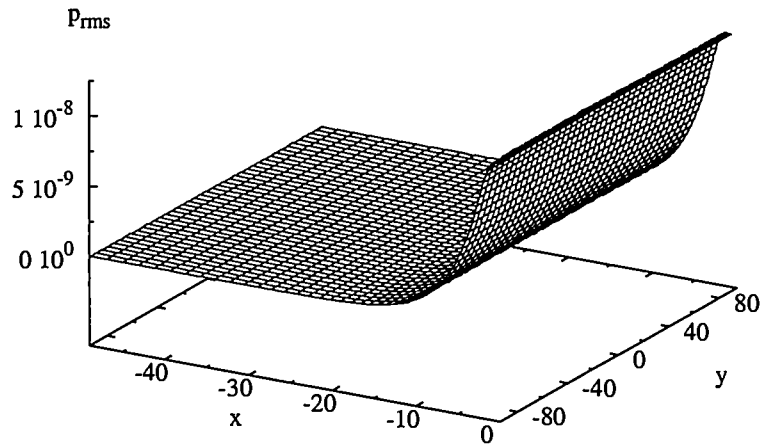


FIG. 2.2 – Valeur *rms* de la perturbation de pression au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

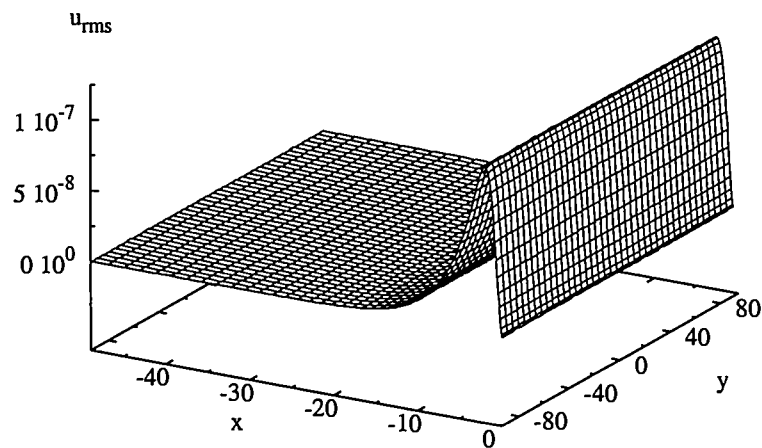


FIG. 2.3 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse normale au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

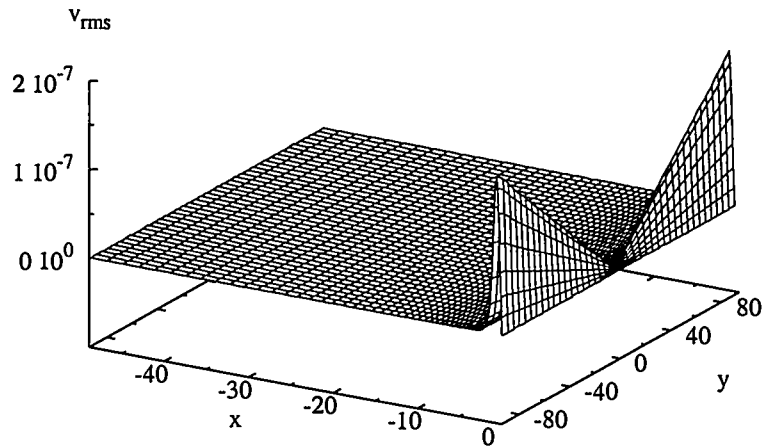


FIG. 2.4 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse tangentielle au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

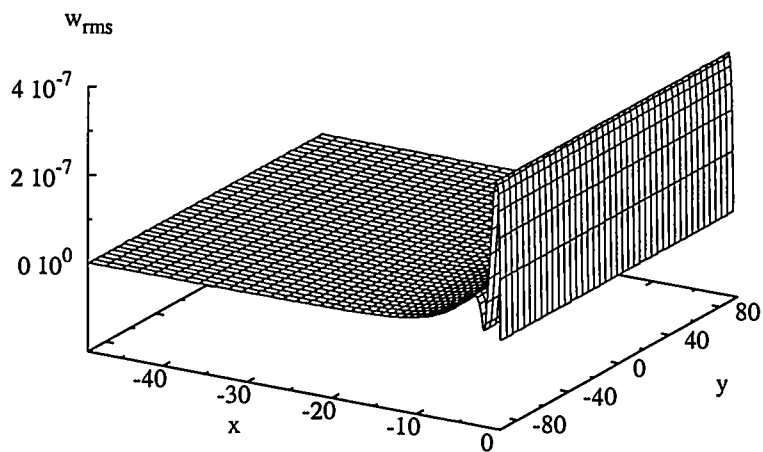


FIG. 2.5 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

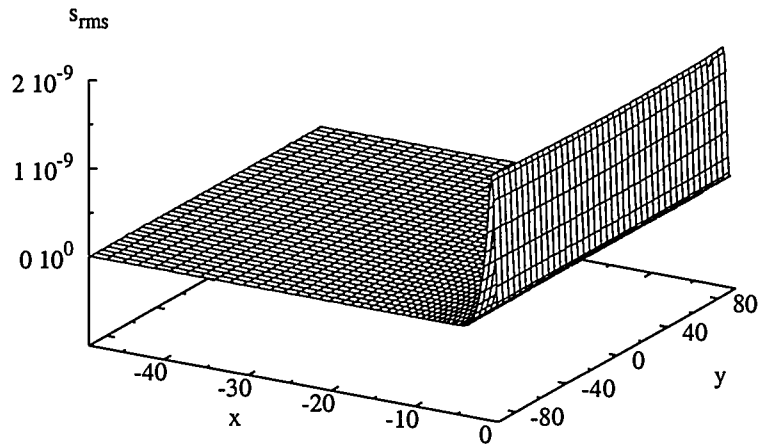


FIG. 2.6 – Valeur *rms* de la perturbation d'entropie au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

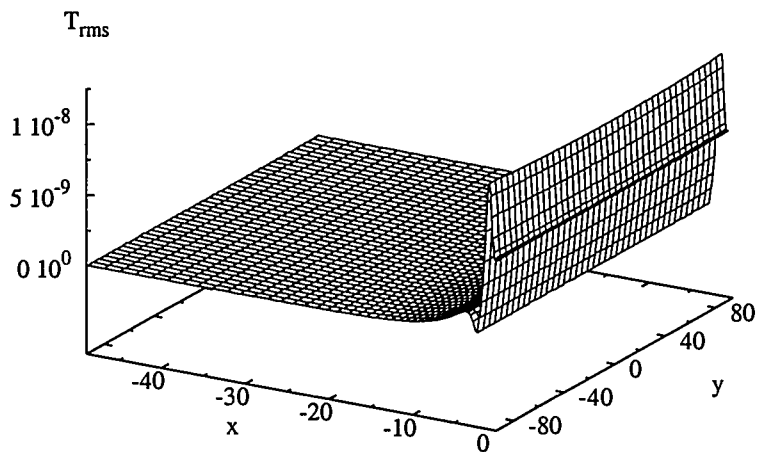


FIG. 2.7 – Valeur *rms* de la perturbation de température au temps adimensionnel $t = 12.03$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

de base incompressible s'écrit

$$\begin{cases} U(x, y, z) &= F(x) , \\ V(x, y, z) &= y G(x) , \\ W(x, y, z) &= H(x) . \end{cases} \quad (2.3)$$

Une solution particulière du système linéarisé régissant la perturbation est la forme choisie par Görtler dans [Gör55] :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) &= f(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha ct W_\infty/\delta) , \\ v(x, y, z, t) &= y g(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha ct W_\infty/\delta) , \\ w(x, y, z, t) &= h(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha ct W_\infty/\delta) , \end{cases} \quad (2.4)$$

où les fonctions u , v , w , f , g et h sont complexes. Les dépendances des perturbations de vitesse impliquent celles de la perturbation de pression p , qui s'écrit :

$$p(x, y, z, t) = l(x) \exp(i\alpha z/\delta - i\alpha ct W_\infty/\delta) . \quad (2.5)$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de justification garantissant que les perturbations présentant ces dépendances en y sont les plus amplifiées. Les auteurs cherchent à obtenir un problème soluble analytiquement. Après supposition légitime de modes normaux en temps et dans la direction z , ils cherchent à réduire le système aux dérivées partielles en x et y en un système aux dérivées ordinaires. Pour ce faire ils supposent une dépendance particulière en y . La vérification de cette supposition a été faite pour la première fois par Spalart en 1988 [Spa88] à l'aide d'une simulation numérique directe incompressible. Sa perturbation initiale est sinusoïdale dans la direction z . Dans le plan (x, y) , c'est un bruit blanc enveloppé par une gaussienne localisée au dessus du point d'arrêt. Au temps adimensionnel $t = 10.1$, Spalart montre que le maximum selon x de la valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse tangentielle v est une fonction linéaire de y . Les perturbations de vitesse normale et périodique, u et w , sont indépendantes de y . De légères oscillations à haut nombre d'onde (dans la direction y) sont présentes sur tous les profils. Sur les figures (2.8) à (2.14), nous avons tracé le maximum selon x de la valeur *rms* selon z pour différents instants et toutes les variables (même quantité que Spalart). Afin d'examiner seulement la dépendance en y des profils et non leur valeur absolue, nous traçons les valeurs *rms* de p , u , w , s , T et ρ normalisées par leur valeur en $y = 0$. Les valeurs *rms* de v aux différents instants sont normalisées par leur valeur en $y = -70.4 \delta$. Pour les temps $t > 12.03$, les variables u , w et p sont quasiment indépendantes de y , sauf à proximité des sorties. Aux sorties, ces trois variables présentent des oscillations de l'ordre de 1% de leur valeur maximale. Ce défaut est étendu sur une épaisseur de 15δ aux deux sorties. La perturbation de vitesse tangentielle est au cœur du domaine en ky . Sur les mêmes zones de sortie épaisses de 15δ , elle croît moins vite que ky . Ce comportement peut être relié à l'influence

des conditions limites de sortie. Ces zones de sortie sont de la même taille que les zones *explicitement* perdues par Spalart par l'emploi de couches éponge. Nous n'observons en revanche pas d'oscillations parasites de haut nombre d'onde alors que nous utilisons la même densité de point en y .

Plus significativement, la faiblesse majeure de la simulation de Spalart apparaît pendant le régime transitoire d'établissement de la perturbation. Pour un temps intermédiaire $t = 3.36$ (avec notre adimensionnement), les valeurs *rms* de toutes les vitesses présentent dans sa simulation de fortes oscillations de grande longueur d'onde entre les deux sorties. Ceci laisse à penser que les sorties sont fortement réfléchissantes et que le comportement transitoire est régi par la zone éponge particulière utilisée. Nos valeurs *rms* aux temps intermédiaires seront montrées ultérieurement et ne présentent absolument pas ces oscillations.

Bien que sujet à caution, le résultat de Spalart est la première vérification numérique du postulat de Görtler et Hämmerlin. La première étude analytique non limitée au stricte cadre de Görtler et Hämmerlin est due à Brattkus et Davis en 1991 [BD91]. Leur étude concerne le point d'arrêt incompressible plan ($W = 0$). Ils examinent la stabilité de modes normaux en temps et en z , évoluant lentement dans la direction tangentielle y . Ils définissent ainsi le rapport $R^{1/2} \gg 1$. La perturbation est recherchée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = (R^{-1/2}y)^a \begin{pmatrix} u_a(x) \\ yv_a(x) \\ w_a(x) \\ p_a(x) \end{pmatrix} \exp(\sigma t + ik_z z), \quad (2.6)$$

où a est éventuellement complexe. Ces modes sont appelés modes de Görtler et Hämmerlin généralisés. $a = 0$ correspond aux modes de Görtler et Hämmerlin habituels. L'équation linéarisée d'évolution de la perturbation admet sous hypothèse de perturbation de grande longueur d'onde une solution (taux d'amplification) dépendant de a . De manière assez surprenante il est possible de choisir a de telle sorte que le taux d'amplification soit aussi grand que désiré. Ce point a incité les auteurs à restreindre la classe des modes propres admissibles. Ils ont pu montrer que pour le champ de base non visqueux, l'équation (visqueuse) régissant la perturbation de vortacité admet une solution analytique faisant intervenir des fonctions paraboliques cylindriques, où apparaît un paramètre analogue à a . Ces solutions croissent exponentiellement vite avec la distance tangentielle si a n'est pas un entier positif. Imposer que la vortacité croît au plus algébriquement vite restreint la classe de solutions admissibles aux polynômes de Hermite. La même classe de solutions est alors retenue comme base pour la détermination de la perturbation des équations visqueuses avec champ de base visqueux (problème de Hiemenz). La perturbation peut

alors être recherchée sous la forme

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \exp(\sigma t + ik_z z) \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_m(x) \\ v_m(x) \\ w_m(x) \\ p_m(x) \end{pmatrix} He_m(y), \quad (2.7)$$

où les He_m sont les polynômes de Hermite d'ordre m . Avec une méthode de Galerkin, le problème est tronqué à l'ordre M et résolu numériquement. Quel que soit l'ordre de troncature, le cas le moins stable est obtenu pour le mode (u_0, v_1, w_0) , qui est la simplification postulée par Görtler et Hämmerlin. Les auteurs concluent donc que le point d'arrêt plan est stable vis-à-vis de toutes les perturbations originaires de la couche limite et dont la vorticité est algébriquement bornée dans la direction tangentielle. Le mode le moins stable est celui de Görtler et Hämmerlin. Ceci est la premier résultat analytique non limité aux modes de Görtler et Hämmerlin.

Dans notre cas la simulation numérique directe donne un résultat analogue. Il est à noter que le choix du nombre d'onde k_z garantissait l'instabilité en supposant que l'effet de compressibilité serait faible. Mais il était possible qu'il existe un mode plus instable, n'ayant pas les mêmes dépendances que celui de Görtler-Hämmerlin. Ici, les valeurs instantanées de la vitesse, comme leurs valeurs *rms* présentent les symétries postulées par Görtler-Hämmerlin. Sauf à supposer que des modes plus instables n'ont pas été excités par la perturbation initiale de type bruit blanc, le mode le plus instable du point d'arrêt est donc de type Görtler-Hämmerlin.

Il est à noter que ces observations de modes instables présentant les mêmes symétries que les modes de Görtler et Hämmerlin concernent les vitesses et la pression. Pour la température, le comportement n'est pas le même. Le comportement n'est d'ailleurs pas prévu par les études précédentes, limitées au cas incompressible.

Les figures (2.12)   (2.14) montrent les maximum selon x de la valeur *rms* selon z des perturbations d'entropie, température et masse volumique. Les trois comportements sont similaires car la variation de pression est indépendante de y dans le cœur du domaine. Comme pour les perturbations de vitesse et de pression, nous attribuons les oscillations sur une zone de 15δ à chaque sortie à l'influence des conditions limites. Au cœur du domaine, les trois courbes ressemblent à une parabole. Une tentative de résolution analytique en compressible pourrait donc supposer les modes de Görtler-Hämmerlin pour les vitesses et la pression. Le mode propre d'entropie par contre pourrait être recherché sous la forme d'une constante additionnée à un monôme y^2 . Nous n'avons malheureusement pas eu temps de mener une étude analytique pour valider cette supposition.

Une alternative consiste à s'appuyer sur les travaux de Hall et Seddougui [HS90]. Hall et Seddougui s'intéressent aux ondes obliques interagissant avec les ondes bidimensionnelles de Görtler-Hämmerlin pour provoquer une déstabilisation forte (supérieure à celle des modes Görtler-Hämmerlin seuls)   distance finie de la ligne de

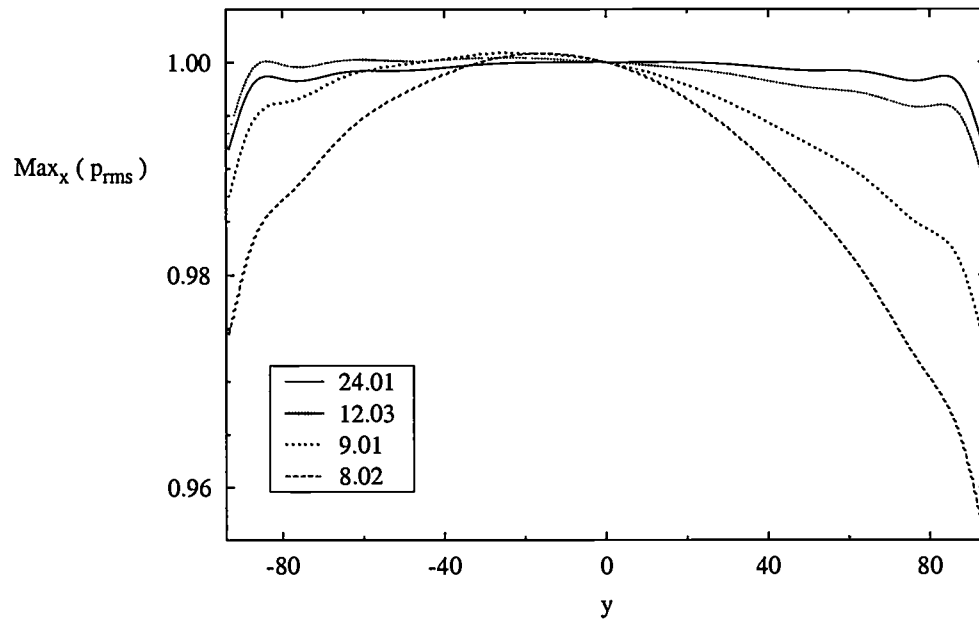


FIG. 2.8 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de pression, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

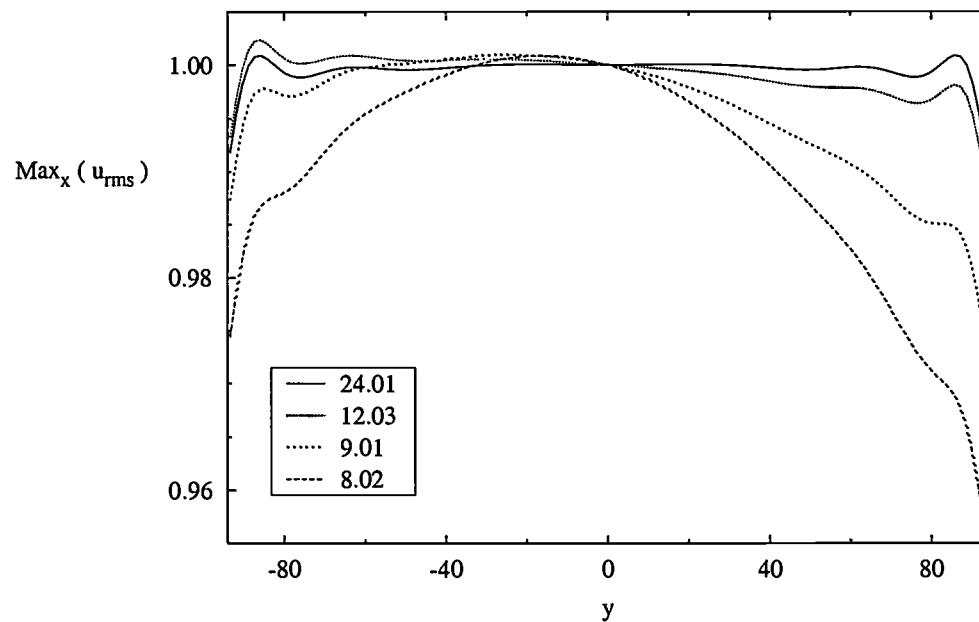


FIG. 2.9 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse normale, normalisée par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

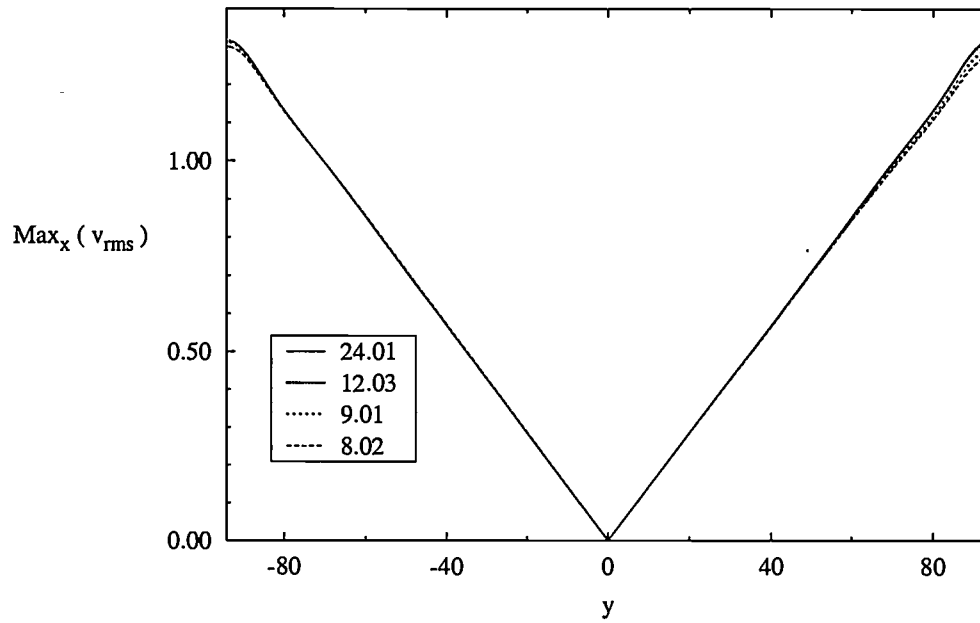


FIG. 2.10 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle, normalisé par sa valeur en $y = -70.4$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

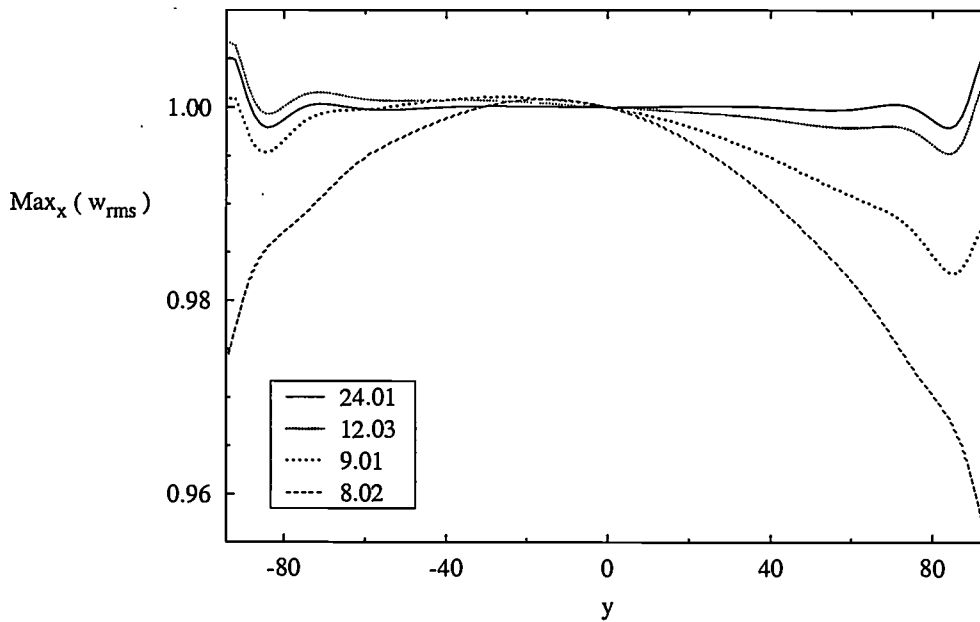


FIG. 2.11 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

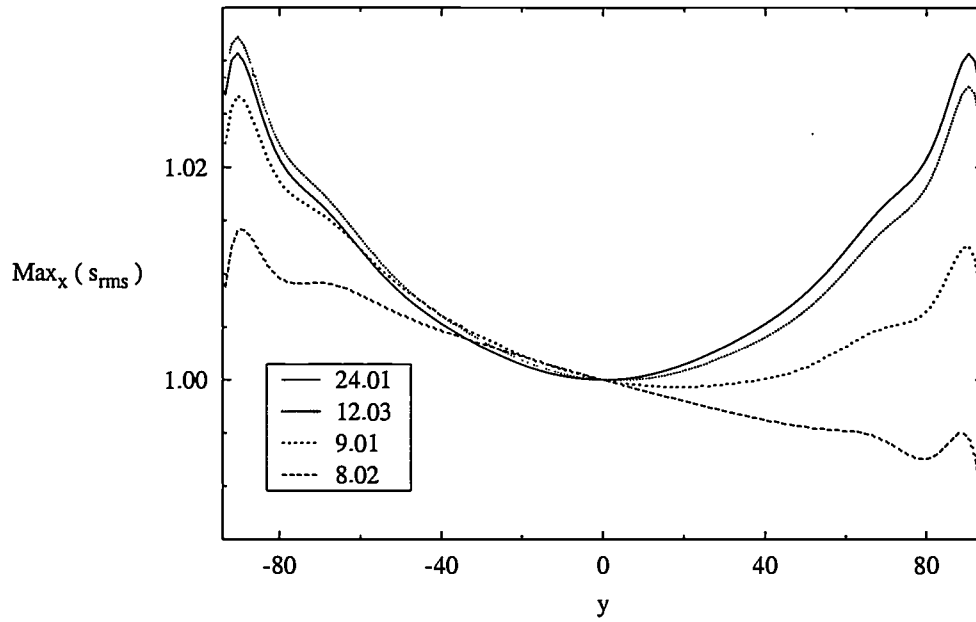


FIG. 2.12 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

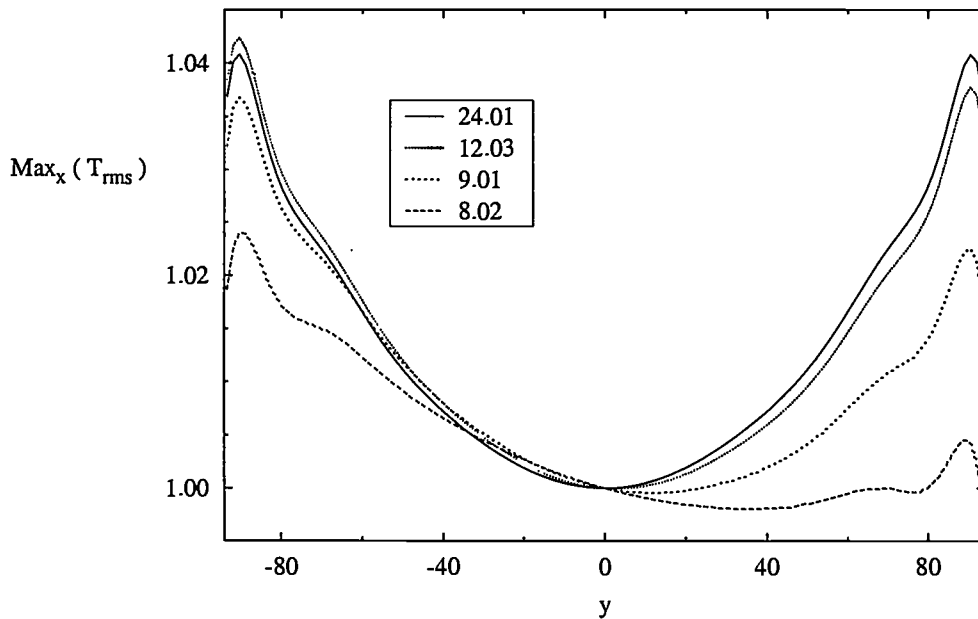


FIG. 2.13 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de température, normalisée par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

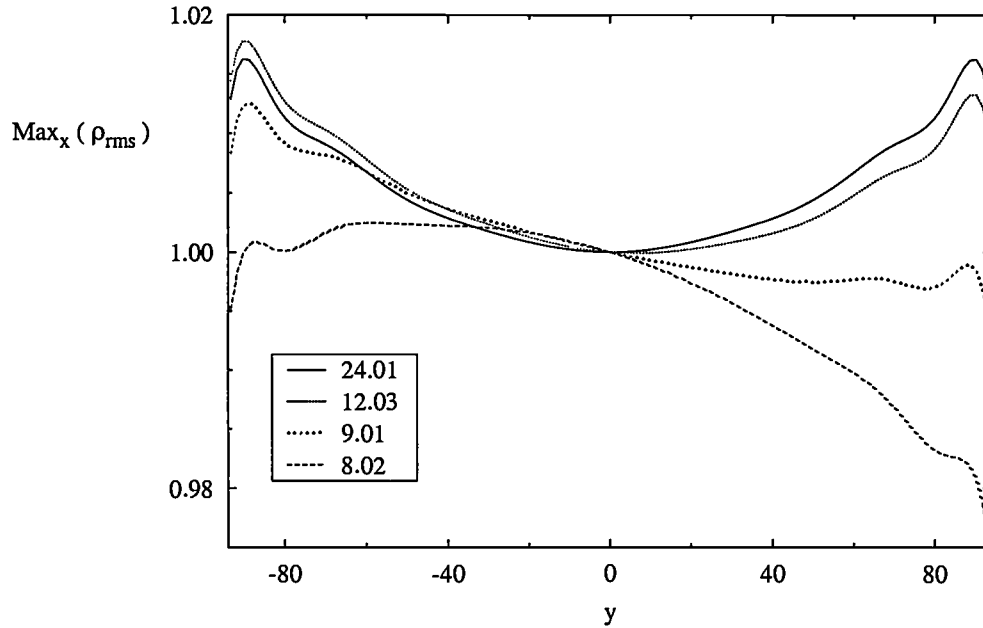


FIG. 2.14 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de masse volumique, normalisé par sa valeur en $y = 0$, à différents instants pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

arrêt. Ils espèrent ainsi trouver un lien avec l'instabilité de cross flow. Ils écrivent la perturbation oblique sous la forme d'une perturbation oscillant lentement en temps :

$$v(x, y, z, t) = \hat{v}(x, y) \exp(i \int^y k_y(\xi) d\xi + k_z z - \varepsilon kt), \quad (2.8)$$

où ε est un petit paramètre et $\hat{v}(x, y)$ possède les mêmes symétries que le champ de base. Le nombre d'onde k_y varie lentement en espace et est principalement centré autour d'une valeur de référence k_y^0 :

$$k_y = k_y^0 + \varepsilon k_y^1 + \dots \quad (2.9)$$

Ce développement asymptotique est introduit dans les équations linéarisées régissant la perturbation. Afin de découpler les différents ordres de la perturbation et de déterminer l'évolution de son ordre dominant, Hall et Sedougui supposent alors que le nombre de Reynolds est élevé et lient le paramètre ε au nombre de Reynolds selon $\varepsilon = Re^{-n}$ avec n une fraction positive. Une forme similaire à (2.8) pourrait donc être proposée pour la perturbation de température. Mais l'hypothèse de fort nombre de Reynolds interdit l'emploi de cette méthode pour des nombre de Reynolds proches du nombre de Reynolds critique.

Les travaux de Lin et Malik [LM96] offrent un cadre plus général. Lin et Malik étudient le système incompressible dans le cas du point d'arrêt tridimensionnel ($W \neq$

0). Les modes propres sont recherchés sous la forme

$$v(x, y, z, t) = \hat{v}(x, y) \exp(ik_z(z - ct)) . \quad (2.10)$$

$\hat{v}(x, y)$ est ici une fonction quelconque de x et y . Lin et Malik considèrent que la perturbation de vitesse périodique w n'admet que des modes propres symétriques (en y) ou antisymétriques. Pour tout le temps satisfaire l'équation de continuité, il est suffisant que u soit pair et v impair quand w est pair (mode dit symétrique et noté S) et réciproquement pour w impair (mode antisymétrique A). La perturbation (2.10) est introduite dans le système linéarisé. La résolution du système différentiel aux dérivées partielles est faite à l'aide d'une décomposition en polynômes de Tchebyshev dans la direction normale et en polynômes en puissance de y dans la direction tangentielle (de manière analogue à Brattkus et Davis [BD91]). Les propriétés de parité sont utilisées pour réduire par deux le nombre d'inconnues dans la direction tangentielle (coefficients en facteur des monômes) et pour imposer les conditions limites. Les auteurs montrent que pour tout nombre de Reynolds et tout nombre d'onde k_z , le premier mode antisymétrique (A_1) a un taux d'amplification moins élevé que sa contrepartie symétrique (S_1) mais plus élevé que le deuxième mode symétrique (S_2) : $S_1 > A_1 > S_2 > A_2 \dots$. Le mode S_1 est le seul pour lequel u et w sont indépendants de y . Pour ce mode v croît linéairement avec y . Ceci est en incompressible la première démonstration que, parmi les solutions polynômiales en y , le mode de Görtler-Hämmerlin est le plus amplifié. Cette formulation en modes pairs et impairs permet aussi de traiter le cas des modes obliques recherchés par Hall et Seddougui : la somme de deux modes obliques (l'un se propageant en $(+x, +z)$ et son semblable se propageant en $(-x, +z)$) a le même taux d'amplification que chacun des modes pris séparément. L'effet du nombre d'onde k_y variable en y est implicitement retenu dans le mode propre $\hat{v}(x, y)$, variable en y .

L'emploi de cette hypothèse de mode Görtler-Hämmerlin sert aussi à expliquer *qualitativement* la décroissance forte de la perturbation dans les premiers instants de la simulation ($t \in [0; 1]$). En effet, quand on considère en incompressible le spectre de la perturbation recherchée sous la forme Görtler-Hammerlin, seul un mode, dit de Tollmien-Schlichting, est instable [Obr00, Figure 6.10]. Tous les autres modes sont temporellement amortis. Bien qu'il ne soit en aucun cas prouvé que les modes propres de Görtler-Hämmerlin forment une base, on peut qualitativement dire que la décomposition de la perturbation initiale sur l'ensemble des modes propres contient majoritairement des modes stables. Dans les premiers instants, la croissance du mode instable est en fait masquée par la décroissance globale. Dit autrement, le niveau de perturbation initial quantifie la perturbation sur l'ensemble des modes. Le niveau de perturbation sur le mode le plus instable peut être obtenu en extrapolant la droite $\ln(e(t))$ jusqu'au temps $t = 0$. Notons que cette explication est sujette à caution. En effet pour un écoulement supportant des modes propres non normaux tous décroissants, on peut observer transitoirement au début une croissance algébrique de

la perturbation, pour une condition initiale judicieusement choisie.

2.1.2 Établissement des modes propres. Vitesse de propagation

Pour les temps $t \in [1; 5]$, l'énergie cinétique de la perturbation croît plus vite que pour $t \in [1; 5]$, période pendant laquelle le taux de croissance exponentiel est constant. Nous nous sommes intéressés à la forme des valeurs *rms* pendant cette phase. Sur les figures (2.15) à (2.17) sont tracées les valeurs *rms* selon z des perturbations de vitesse à l'instant initial. Le domaine est tronqué à $x = -10$ dans la direction normale. Seul un point sur trois est tracé dans la direction y . La perturbation initiale est en vorticité pure et les variables p et s ne sont initialement pas perturbées.

Sur les figures (2.18) à (2.20), nous avons tracé la valeur *rms* de la perturbation de vitesse tangentielle pour les instants $t = 0.174$ à $t = 1.395$. En sortie de couche limite ($x < -2$), la perturbation décroît significativement et conserve le caractère fortement oscillatoire du bruit blanc initial. La propagation tangentielle de la perturbation est négligeable (rappelons que la vitesse tangentielle V est nulle sur la ligne d'arrêt). Le comportement proche du mur est différent. Deux maxima symétriques par rapport à $y = 0$ sont formés dès $t = 0.174$ et s'écartent l'un de l'autre, vers les deux sorties.

Aux premiers instants, w , tracée sur les figures (2.21) et (2.22) présente le même comportement que v en sortie de couche limite. En revanche seul un maximum apparaît dans la zone proche du mur. Le mode propre de w étant plus étendu dans la direction normale que celui de v (voir les figures (2.5) et (2.4)), pour les temps $t > 1.395$, le caractère de bruit blanc en sortie de couche limite est masqué par le mode propre.

Sur les figures (2.23) et (2.25), nous avons tracé la valeur *rms* selon z de l'entropie. Dès $t > 0$, la perturbation d'entropie apparaît par couplage par le champ de base non uniforme avec la perturbation de vorticité initiale. De même que la perturbation de vorticité initiale, cette perturbation d'entropie est centrée en $x = -2.6\delta$. De même que pour w , l'instabilité apparaît ensuite proche du mur et s'élargit dans la direction tangentielle au cours du temps.

Sur la figure (2.26), nous traçons la valeur *rms* de la perturbation de pression à $t = 0.174$. Comme pour l'entropie, la perturbation apparaît par couplage avec la vorticité initiale. Les perturbations de pression et d'entropie ont une intensité de deux ordres de grandeur inférieure à la perturbation de vorticité. Rappelons que toutes les variables sont normalisées par leur valeur de référence (au point d'arrêt pour les variables thermodynamiques et par W_∞ pour les vitesses).

La perturbation de vitesse normale u présente les mêmes évolutions que w .

Afin d'examiner plus quantitativement l'évolution des différentes variables, nous avons tracé sur les figures (2.27) à (2.31) le maximum selon x de leur valeur *rms* en

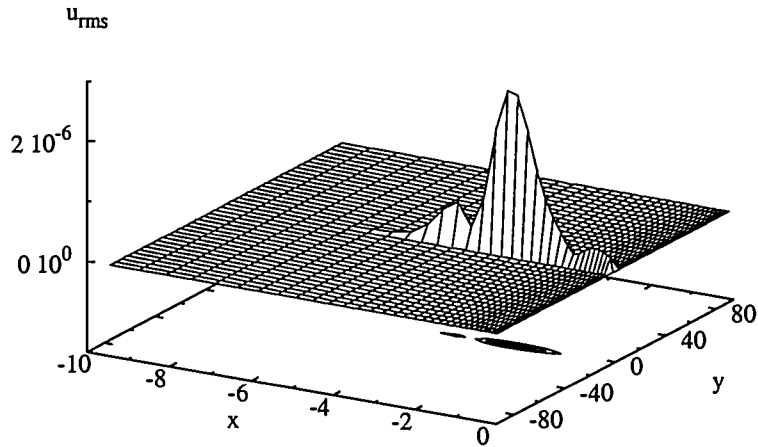


FIG. 2.15 – Valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse normale au temps $t = 0$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

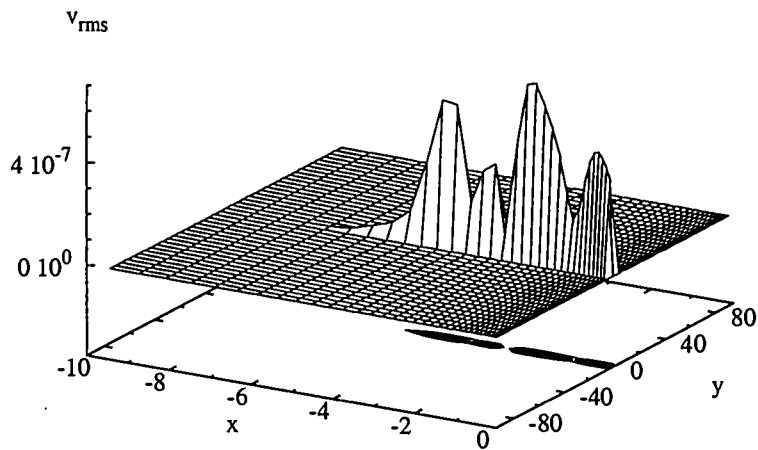


FIG. 2.16 – Valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

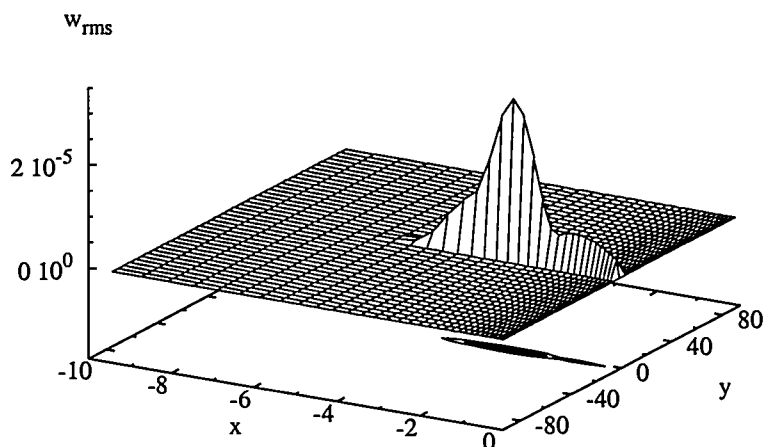


FIG. 2.17 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

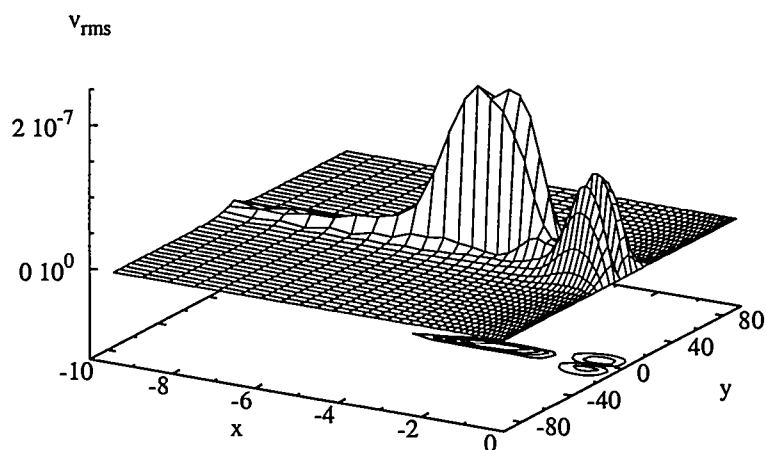


FIG. 2.18 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0.174$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

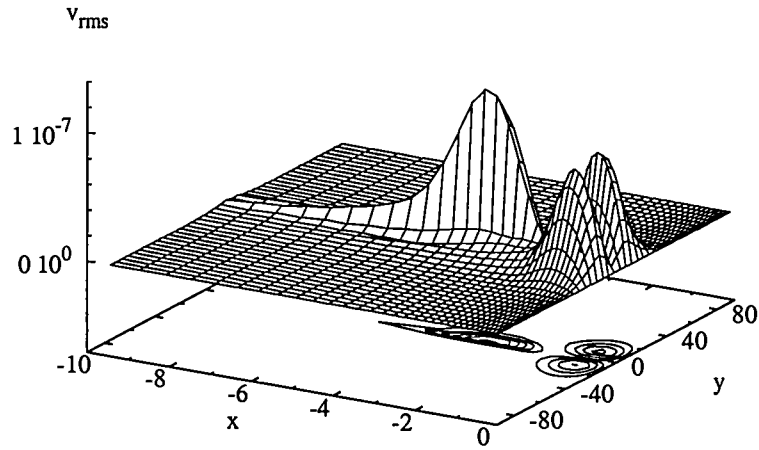


FIG. 2.19 – Valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 0.349$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

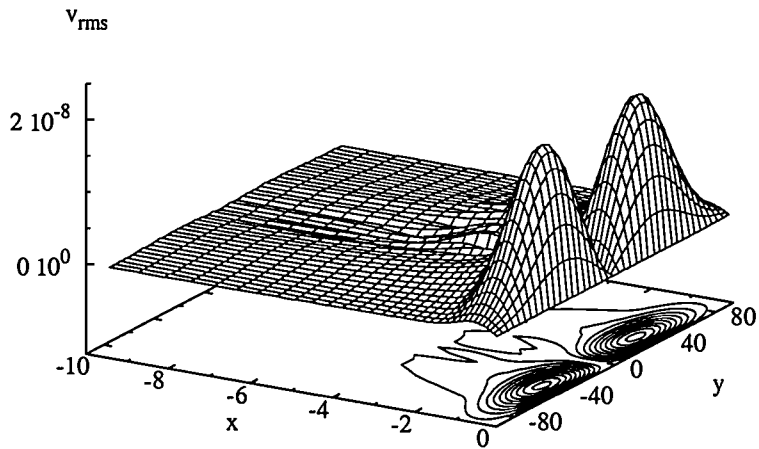


FIG. 2.20 – Valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 1.395$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

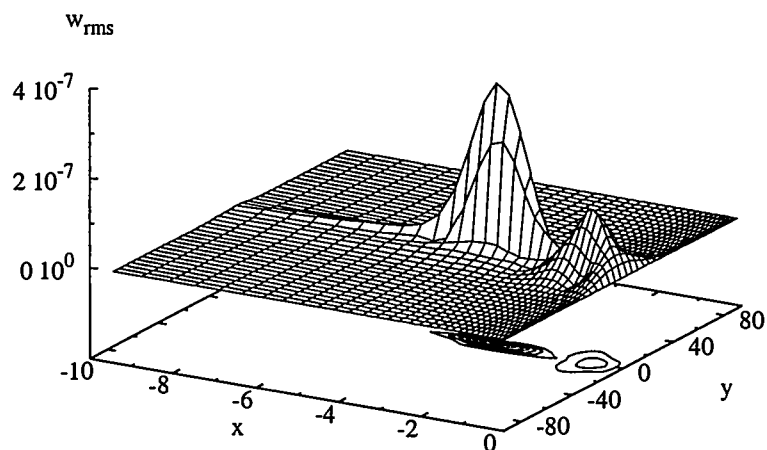


FIG. 2.21 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0.349$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

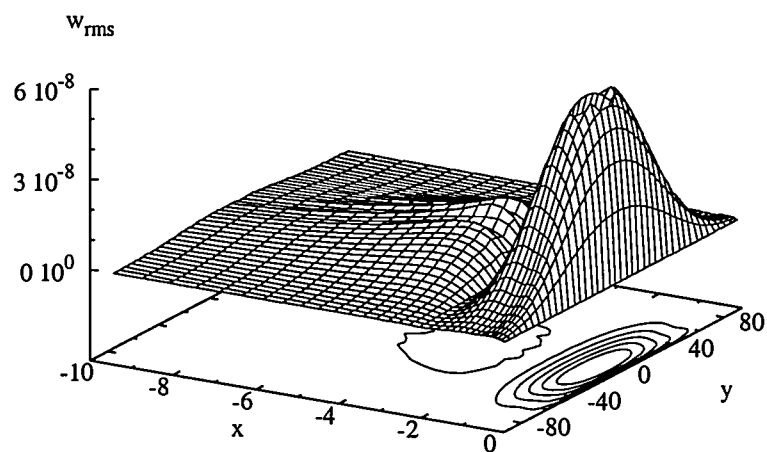


FIG. 2.22 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 1.395$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

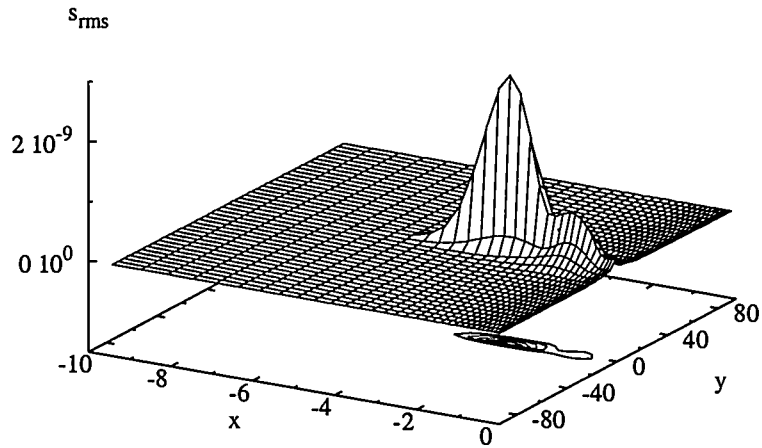


FIG. 2.23 – Valeur *rms* selon z de la perturbation d'entropie au temps $t = 0.174$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

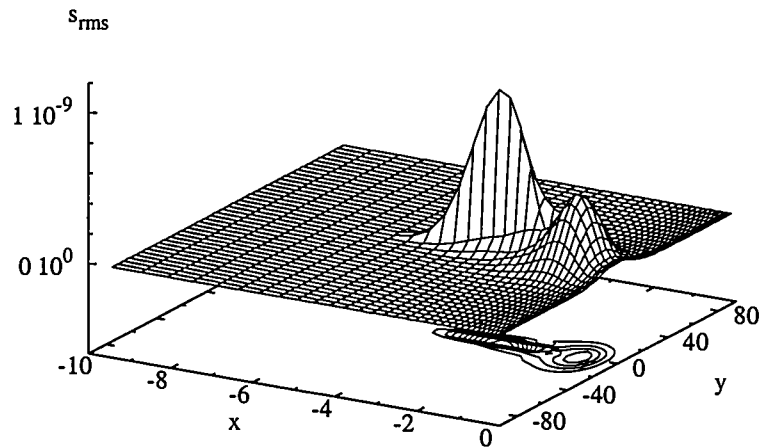


FIG. 2.24 – Valeur *rms* selon z de la perturbation d'entropie au temps $t = 0.349$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

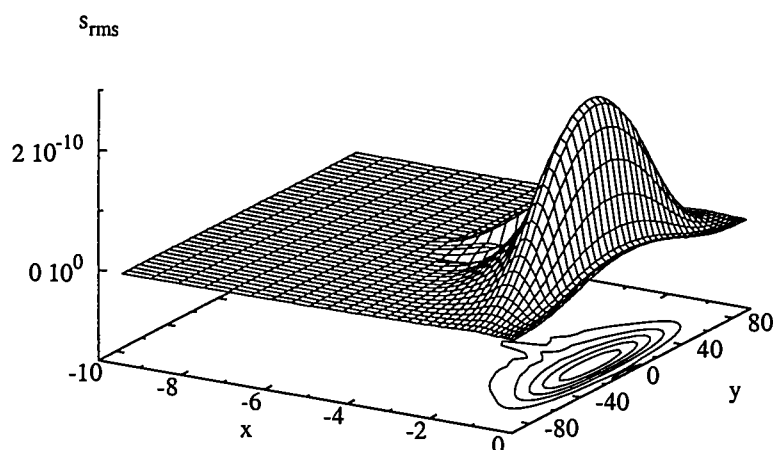


FIG. 2.25 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation d'entropie au temps $t = 1.395$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

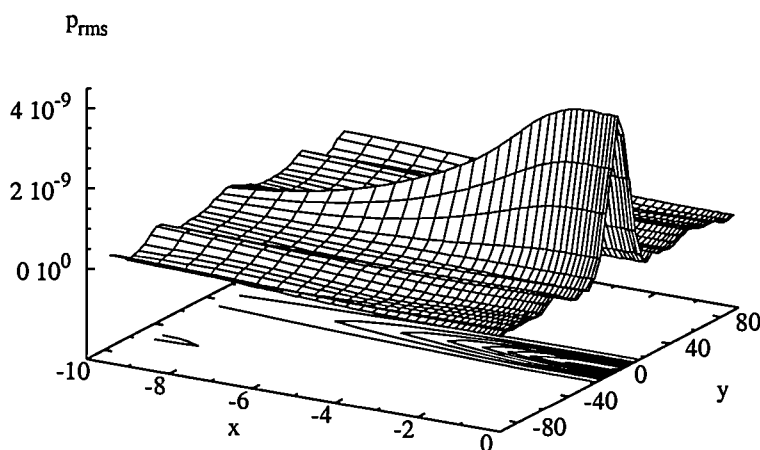


FIG. 2.26 – Valeur *rms* selon *z* de la perturbation de pression au temps $t = 0.174$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

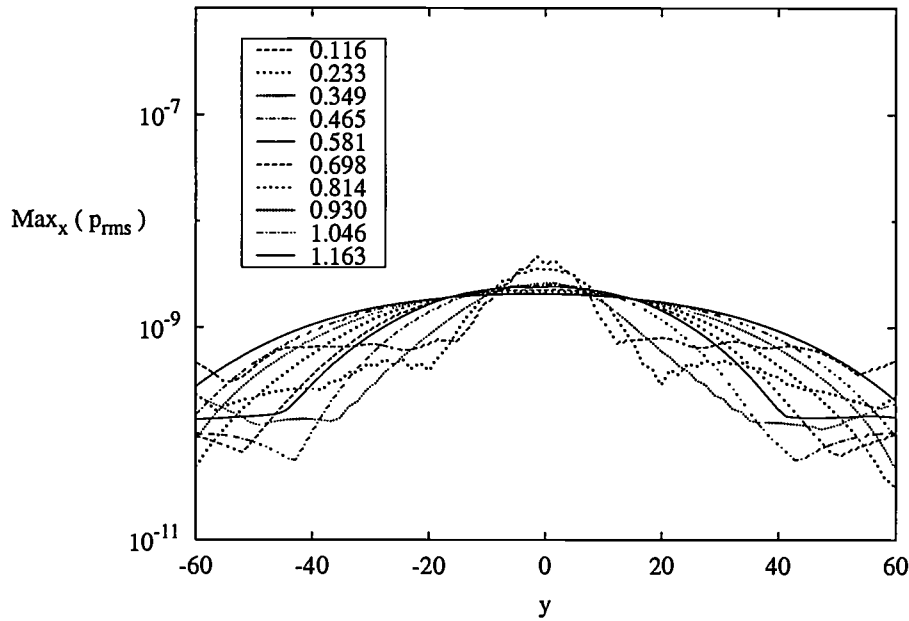


FIG. 2.27 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la pression pour $t \in [0; 1.2]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

fonction de la coordonnée tangentielle y . Le tracé est en échelle logarithmique pour les temps $t < 1.2$. Les perturbations de vitesse ((2.28) à (2.30)) sont amorties de deux ordres de grandeur jusqu'à $t = 0.8$. Dès les premiers instants, elles s'étendent dans la direction tangentielle. Pour $t > 0.8$, le maximum selon x perd le caractère initial de bruit blanc : les profils sont alors dominés par le développement tangential de l'instabilité. L'entropie s (2.31) a un comportement proche de celui des vitesses avec une chute initiale limitée à un ordre de grandeur. La perturbation de pression (2.27) perd dès $t = 0.4$ le caractère bruit blanc.

Les figures (2.32) à (2.37) montrent l'évolution pour les temps $t \in [1.2; 6]$. Les perturbations p , u , w et s ressemblent à des gaussiennes s'élargissant au cours du temps et dont l'intensité au centre augmente. L'effet combiné de la croissance du maximum et du remplissage aux bords explique le taux de croissance de l'énergie cinétique plus élevé pour $t \in [1.2; 6]$ que pour $t > 6$. La perturbation de vitesse tangentielle tend vers ky . Au centre elle tend donc vers 0 alors qu'initialement seule la zone centrale est perturbée.

Pour tenter de mettre en évidence un mécanisme d'instabilité, plus précisément la conversion d'un bruit en un mode propre instable, nous avons tenté de caractériser la vitesse de propagation de l'instabilité dans la phase d'établissement. La détermination reste néanmoins relativement grossière. Nous nous intéressons aux variables tendant vers une indépendance de y (ou une dépendance faible pour l'entropie s). Aux faibles temps ces variables ressemblent à une gaussienne. Nous déterminons

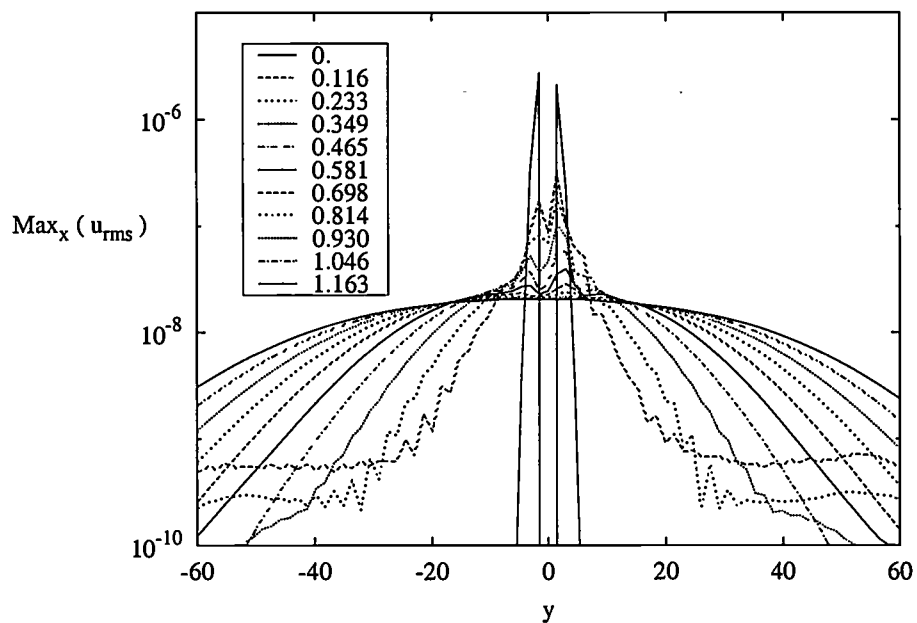


FIG. 2.28 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse normale pour $t \in [0; 1.2]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

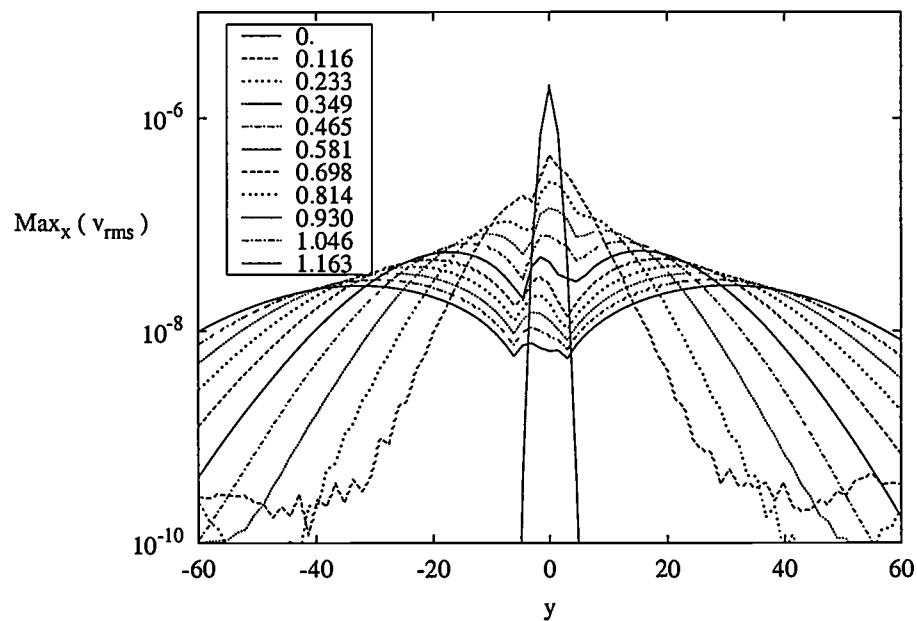


FIG. 2.29 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [0; 1.2]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

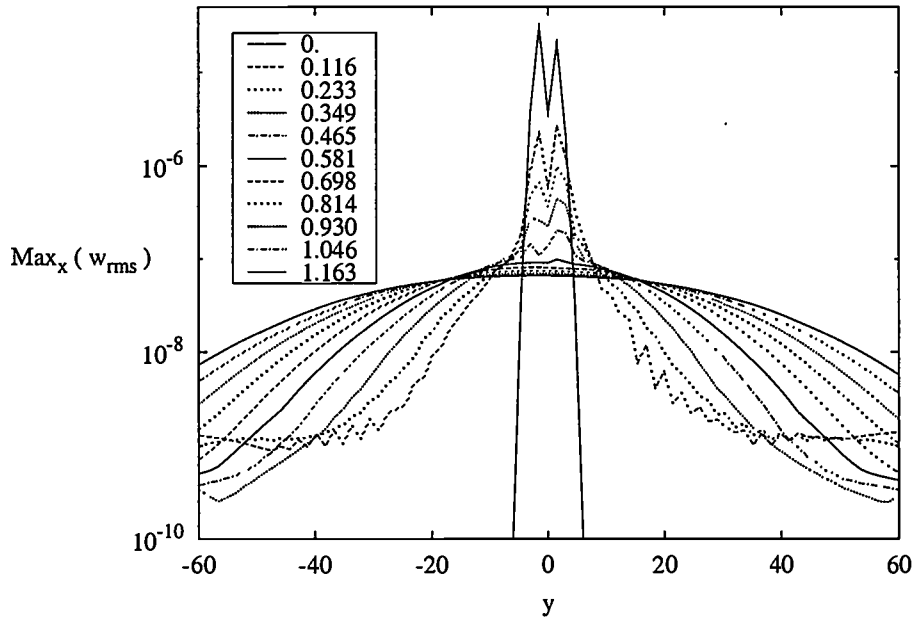


FIG. 2.30 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse périodique pour $t \in [0; 1.2]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

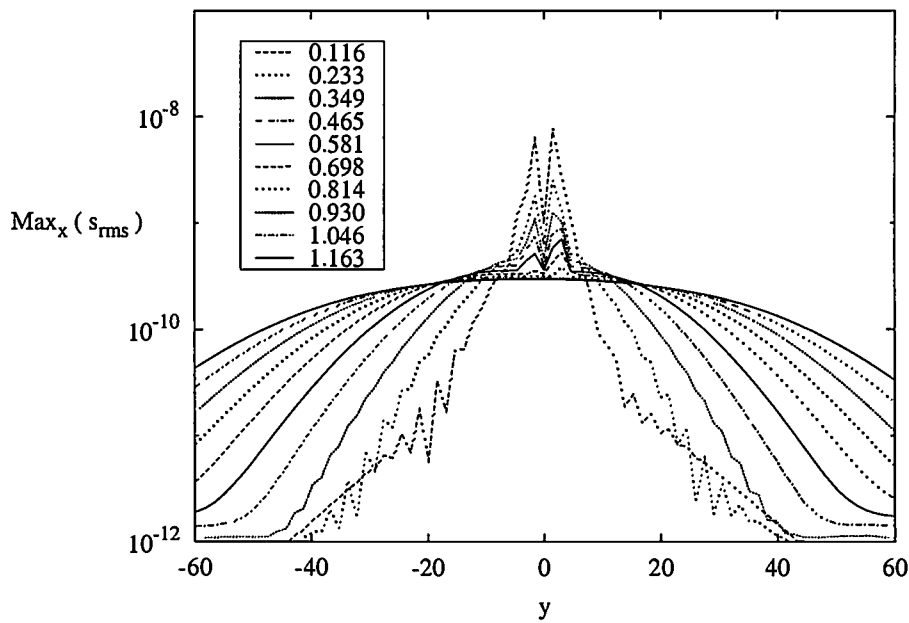


FIG. 2.31 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de l'entropie pour $t \in [0; 1.2]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

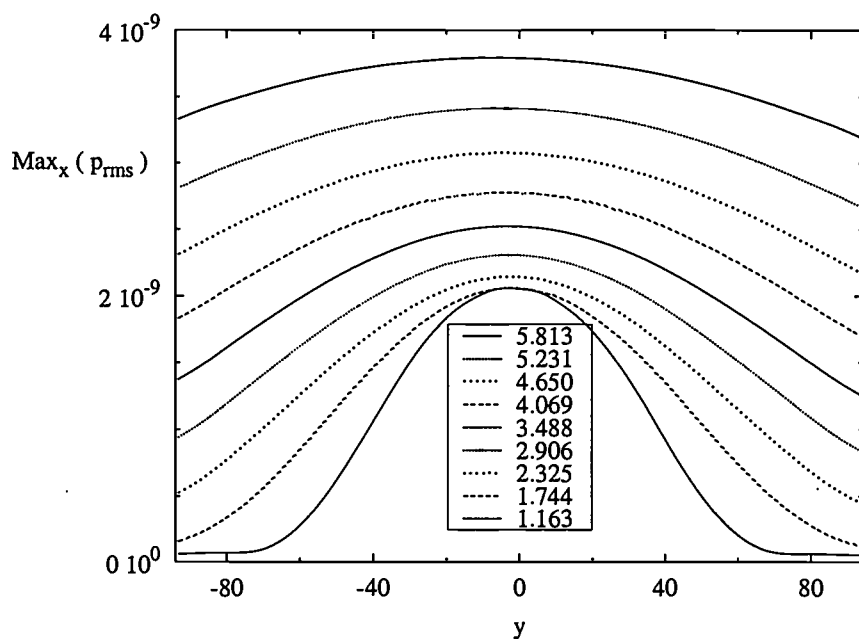


FIG. 2.32 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la pression pour $t \in [1.2; 6]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

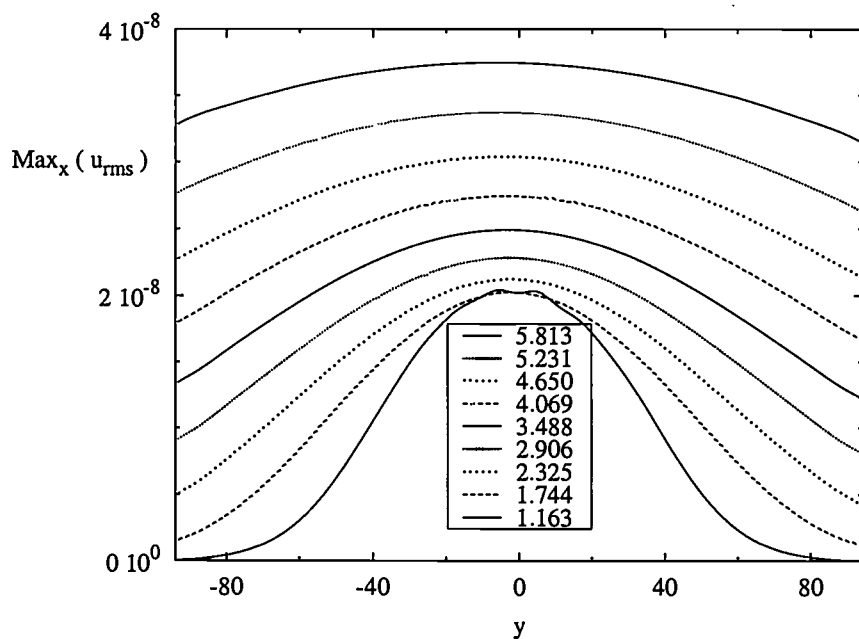


FIG. 2.33 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse normale pour $t \in [1.2; 6]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

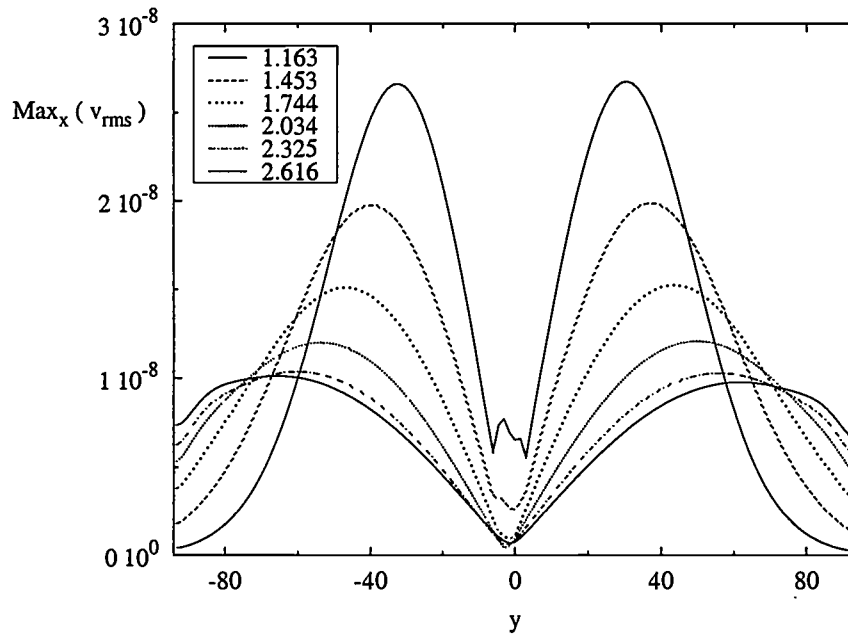


FIG. 2.34 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [1.2; 2.8]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

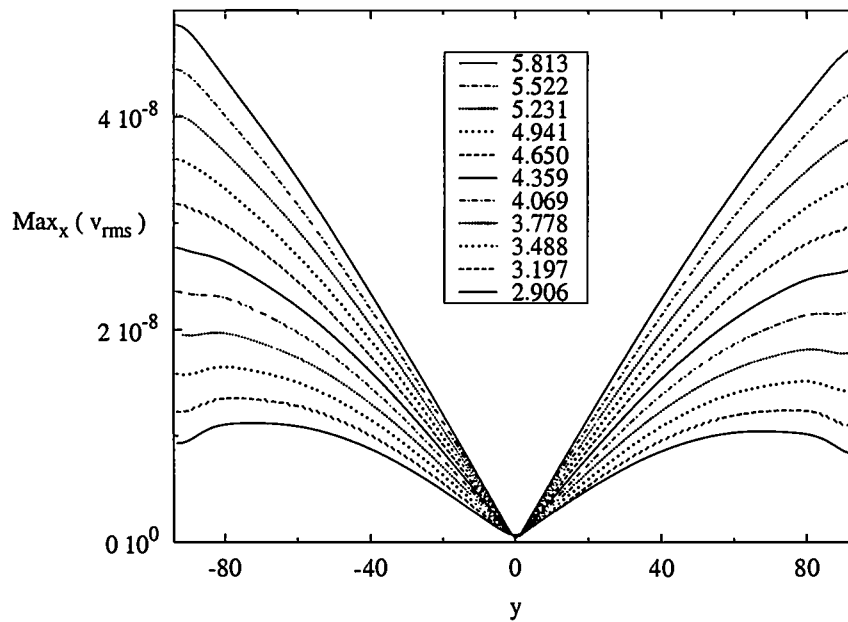


FIG. 2.35 – Maximum, selon x , de la valeur rms selon z de la vitesse tangentielle pour $t \in [2.8; 6]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

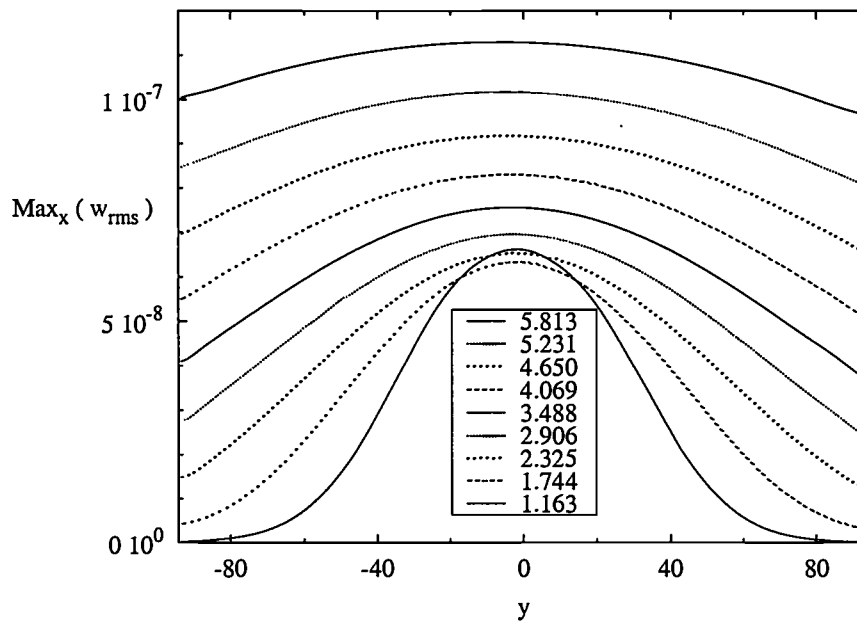


FIG. 2.36 – Maximum, selon x , de la valeur *rms* selon z de la vitesse périodique pour $t \in [1.2; 6]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

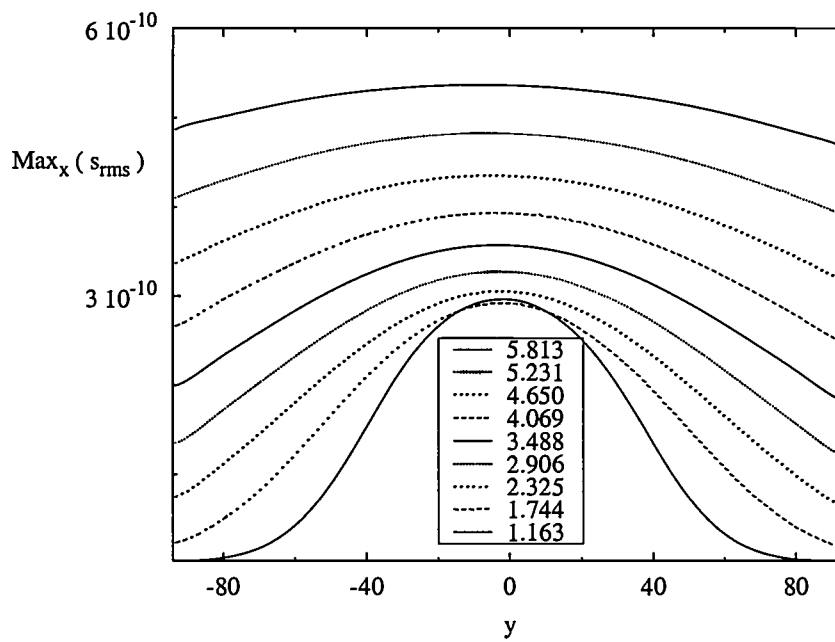


FIG. 2.37 – Maximum, selon x , de la valeur *rms* selon z de l'entropie pour $t \in [1.2; 6]$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

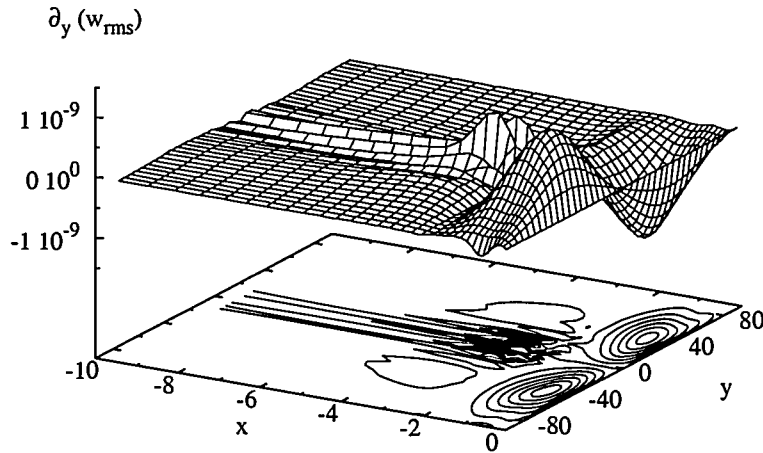


FIG. 2.38 – Dérivée selon y de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 1.395$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

alors une grandeur analogue à une largeur à mi-hauteur. Pour ce faire, nous choisissons de repérer la position y_{inf} et y_{sup} des points d'inflexion. Ils sont déterminés à l'aide des extrema des dérivées selon y des valeurs rms . Sur la figure (2.38), nous avons tracé à titre d'exemple la dérivée selon y de la valeur rms selon z de w : $\frac{\partial w_{rms}}{\partial y}$. Pour $x < -1$, la dérivée présente de fortes valeurs, dues à la conservation en sortie de couche limite du caractère bruit blanc de la perturbation initiale. En revanche, pour $x \in [-1; 0]$, la dérivée présente deux extrema distincts. La recherche de ces extrema est plus efficace que la détermination des points nuls de la dérivée seconde. Même dans une zone très proche du mur, la valeur rms n'est pas parfaitement lisse, ce qui génère des fluctuations fortes de dérivée seconde. Le maximum de $\frac{\partial w_{rms}}{\partial y}$ pour $x < -1$ est atteint en y_{inf} . Son minimum est atteint en y_{sup} .

Sur la figure (2.39), nous avons tracé ces coordonnées y_{inf} et y_{sup} en fonction du temps pour les quatre variables p , u , w et s . Pour $t > 2.7$, la position des points d'inflexion est influencée par les conditions limites en sortie. La courbe légèrement distincte des autres (coordonnées y_{inf} et y_{sup} légèrement plus faibles à un temps t donné) est celle de w . Les positions y_{inf} et y_{sup} sont des fonctions linéaires du temps : les points y_{inf} et y_{sup} se déplacent à vitesse constante. Il n'y a pas accélération en sortie. Or, le champ porteur V croît au premier ordre linéairement avec y selon $V \sim By$. La position y d'un point matériel situé en y_0   l'instant 0 serait $y_0 \exp(Bt)$ s'il était simplement convecté avec la vitesse V . En supposant que y_{inf} et y_{sup} se

comportent similairement à des points matériels, cela indique que la convection n'est pas le principal phénomène responsable de la propagation de la perturbation. Par ailleurs, une propagation à la vitesse du son est aussi exclue. En effet, le temps adimensionnel pour atteindre la sortie est de l'ordre de $4.4 \cdot 10^{-2}$. À un temps du même ordre de grandeur que ce très bref laps, la perturbation serait donc totalement établie. Or le temps d'établissement est de l'ordre de 10. La dernière possibilité consiste à envisager un mécanisme de diffusion.

Sur la figure (2.40), nous avons tracé les mêmes points que sur la figure (2.39) ainsi que les droites asymptotes au nuage de points. La droite $y = at + b$ passant au travers du nuage de points y_{inf} a pour pente -23.7 . Celle passant au travers du nuage de points y_{sup} a pour pente $+24.6$ (avec 1% d'erreur sur ces pentes). y est adimensionné par δ et t par $1/B$. Par ailleurs, une vitesse de diffusion V_D peut être construite avec les paramètres de la couche limite par simple analyse dimensionnelle : $V_D = \frac{v}{\delta}$, soit δB , ce qui est l'adimensionnement de y/t . On a donc un rapport de 24 entre notre vitesse de propagation et la vitesse de diffusion. Nous tenons à souligner que ceci n'est qu'une simple analyse dimensionnelle.

En repérant au cours du temps la position de chacun des deux maxima de v , on trouve un résultat différent mais qui reste dans le même ordre de grandeur.

Pour confirmer ou infirmer ce mécanisme de déstabilisation par un phénomène diffusif plutôt que convectif, nous avons testé une perturbation initialement décentrée, i.e. non initialement située au-dessus de la ligne d'arrêt. En effet, le bruit blanc initialement localisé sur la ligne d'arrêt n'est pas convecté tangentiellement et met un temps infini pour atteindre le mur. Il n'est donc pas possible de distinguer une instabilité convective d'une instabilité absolue avec une perturbation initialement centrée.

L'étude de la perturbation de vortacité initialement décentrée fait l'objet du paragraphe 2.4.

2.1.3 Contribution des différentes variables

Nous avons ensuite voulu examiner les contributions des différentes variables. Sur la figure (2.41), nous avons tracé leur norme L^2 au carré :

$$f_{L^2}(t) = \frac{1}{F^2 \mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} f^2 d\tau, \quad (2.11)$$

où F est la valeur de référence d'adimensionnement de la perturbation f . \mathcal{V} est le volume complet du domaine.

L'énergie cinétique est de plus de deux ordres de grandeur dominante par rapport à la contribution de la pression et de cinq ordres de grandeur dominante par rapport à l'entropie. L'énergie cinétique est elle-même dominée par la vitesse périodique puis par la vitesse normale. La contribution de la vitesse tangentielle est d'un ordre de grandeur inférieure. Notons que le niveau de la contribution de v n'est pas significatif

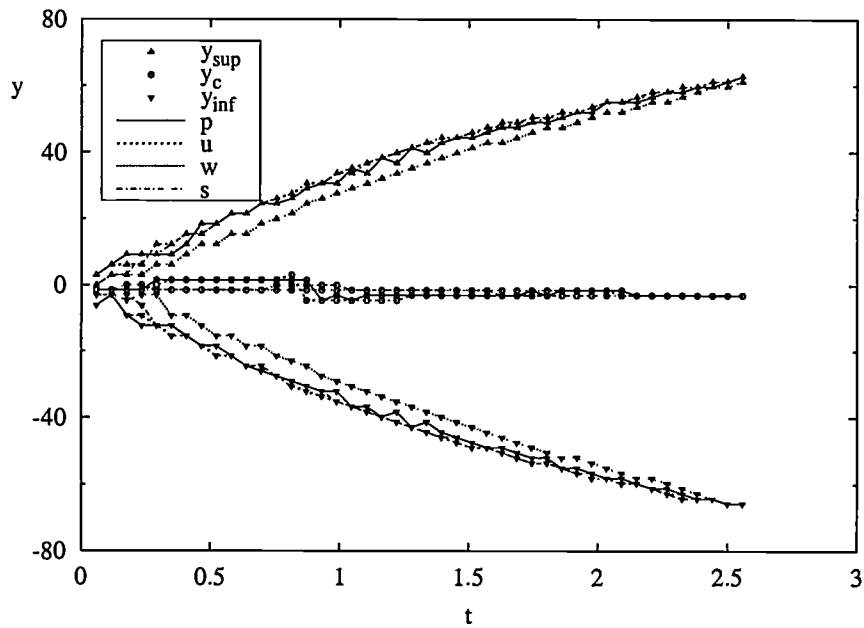


FIG. 2.39 – Position des coordonnées y_{inf} et y_{sup} des perturbations de pression, de vitesses normale et périodique, et d'entropie pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

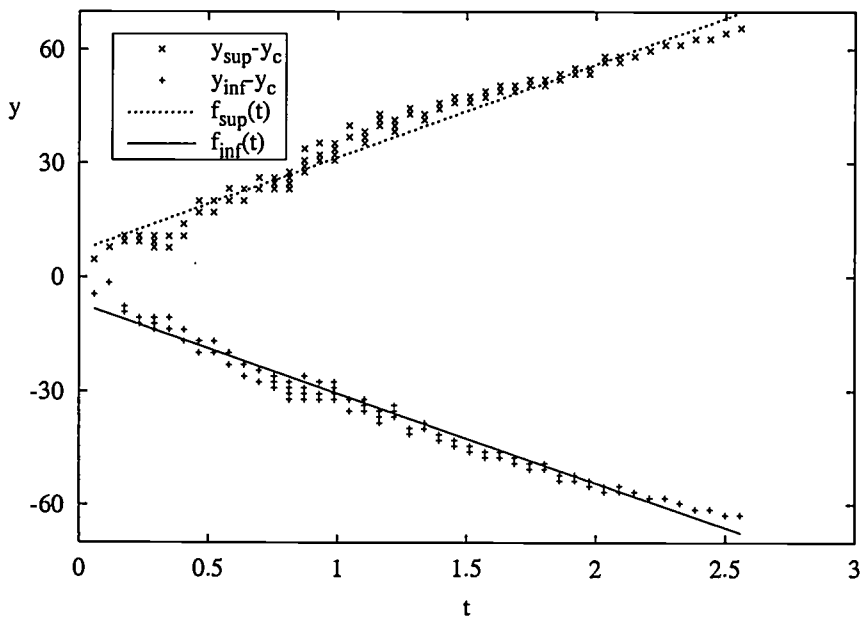


FIG. 2.40 – Vitesse de propagation de la perturbation initiale pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

car v étant une fonction linéaire de y , sa norme $f_{L^2}^v$ est une fonction linéaire de L_y , taille du domaine d'intégration de y .

Nous nous sommes intéressés aux contributions respectives de la divergence de vitesse et de la vorticité dans l'énergie. La première contribution est évidemment nulle dans les études incompressibles.

Sur la figure (2.42), nous avons tracé la norme L^2 carrée des composantes $(\nabla \times \mathbf{v})_x$, $(\nabla \times \mathbf{v})_y$ et $(\nabla \times \mathbf{v})_z$ de la vorticité et de la divergence $\nabla \cdot \mathbf{v}$. L'intégration en y est ici limitée de -70.4 à $+70.4$. Nous avons ainsi voulu nous affranchir des effets de bords dus aux conditions limites de sortie. La différence n'est pas sensible sur la norme L^2 mais apparaît pour le mode constant de $(\nabla \times \mathbf{v})_x$ (voir paragraphe sur les modes de Fourier). La divergence est six ordres de grandeur plus petite que la vorticité totale (somme des trois composantes), elle-même dominée par $(\nabla \times \mathbf{v})_y$.

Sur les figures (2.43)   (2.46), nous avons tracé les valeurs rms de la divergence et de la vorticité au temps $t = 35.98$. En utilisant les symétries de Görtler Hämmerlin la vorticité s'écrit

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$((\nabla \times \mathbf{v})_x)_{rms}$ est une fonction linéaire de y . $((\nabla \times \mathbf{v})_y)_{rms}$ est indépendant de y . $((\nabla \times \mathbf{v})_z)_{rms}$ est une fonction linéaire de y . Les normes carrées de $(\nabla \times \mathbf{v})_x$ et $(\nabla \times \mathbf{v})_z$ dépendent de la taille du domaine d'intégration de la même manière. Elles sont donc comparables l'une avec l'autre. Sur les figures de valeur rms des vorticités, nous constatons que perturbation de vorticité tangentielle est très dominante dans une zone proche de la ligne d'arrêt. L'instabilité est dominée par des tourbillons perpendiculaires à la ligne d'arrêt, alignés avec la direction tangentielle.

L'extension spatiale de ces valeurs rms est très différente (les échelles dans la direction x ne sont pas identiques). La divergence est significativement non nulle jusqu'à $x = -15$ alors que la perturbation de vorticité est cantonnée dans la couche limite selon z à 99% ($x \in [-3; 0]$). La divergence de la perturbation a une répartition différente de celle du champ de base, montr e sur la figure (2.47). Celle-ci est minimale en $y = 0$ et croît paraboliquement avec y . Hors de la couche limite, la valeur de la divergence près de la ligne d'arrêt est négative. Cette zone est une zone de compression. Loin de la ligne d'arrêt, l'écoulement est une zone d'expansion. Ceci peut être vu sur la correction compressible non visqueuse du champ de base ( quation (1.27)). En effet

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{B^3}{a_0^2}(y^2 - x^2) > 0 \text{ pour } |y| > |x|. \quad (2.13)$$

Ceci est valable hors de la couche limite.

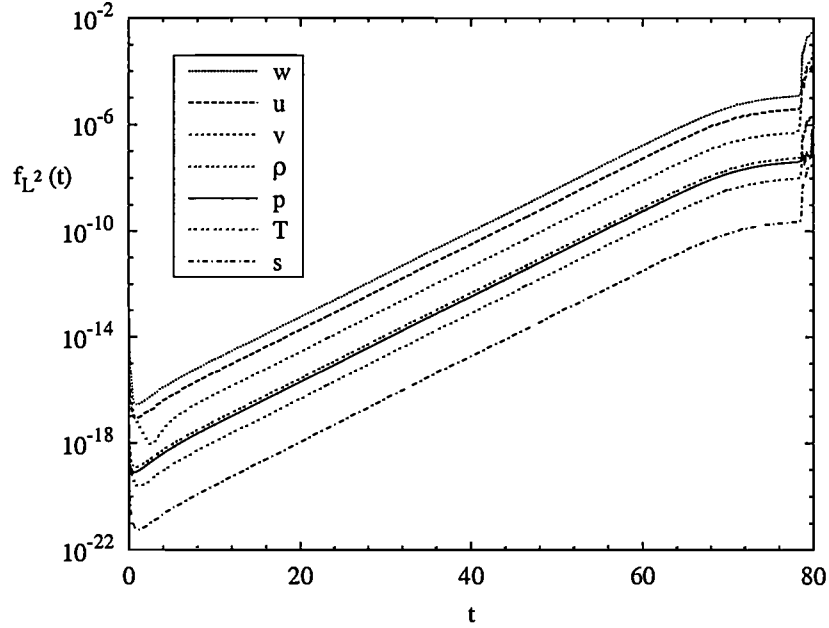


FIG. 2.41 – Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur adiabatique

La vorticit e est dominante par rapport à toutes les autres variables. Or la perturbation initiale est en vorticit e pure. Nous avons voulu connaître l'incidence de la composition de la perturbation initiale sur l'instabilit e observ ee. Nous avons dans un test compl ementaire perturbée le champ de base purement en entropie. Ce cas est pr esent e au paragraphe 2.3.

Nous avons cherchée à affiner le r esultat sur l'importance relative des contributions des diff erentes variables en consid erant la d ecomposition des champs de perturbation sur les diff erents modes de Fourier.

2.1.4 Modes de Fourier

Nous avons consid er e les modes de Fourier dans la direction de p eriodicit e z . Leur repr esentation en sinus et cosinus s' ecrit :

$$\frac{1}{F}f(x, y, z, t) = a_0^f(x, y, t) + \sum_{n=1}^N \left[a_n^f(x, y, t) \cos\left(\frac{2\pi n z}{L_z}\right) + b_n^f(x, y, t) \sin\left(\frac{2\pi n z}{L_z}\right) \right],$$

$$\text{avec } a_0^f(x, y, t) = \frac{1}{F} \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} f(z) dz,$$

$$a_n^f(x, y, t) = \frac{1}{F} \frac{2}{L_z} \int_0^{L_z} f(z) \cos\left(\frac{2\pi n z}{L_z}\right) dz \text{ pour } n = 1, 2, 3,$$

$$b_n^f(x, y, t) = \frac{1}{F} \frac{2}{L_z} \int_0^{L_z} f(z) \sin\left(\frac{2\pi n z}{L_z}\right) dz \text{ pour } n = 1, 2, 3.$$

(2.14)

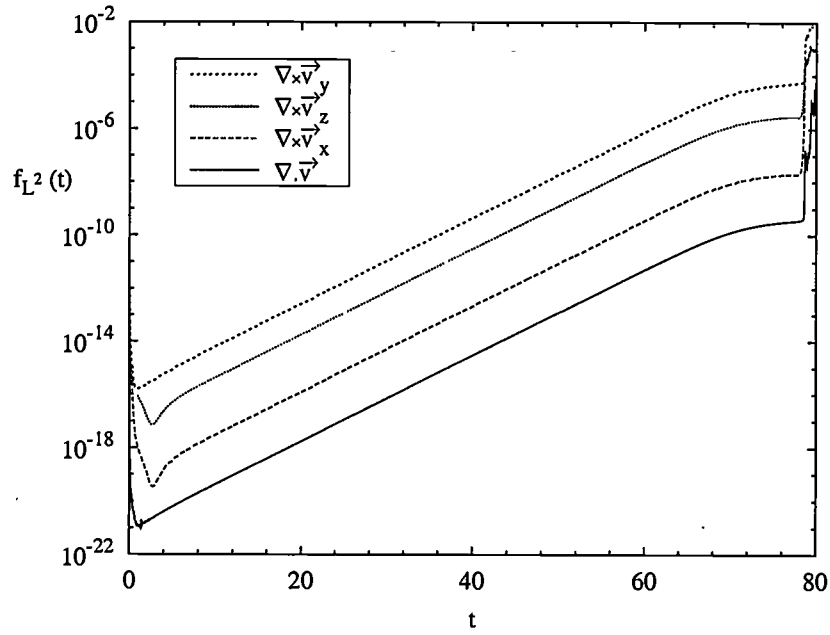


FIG. 2.42 – Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

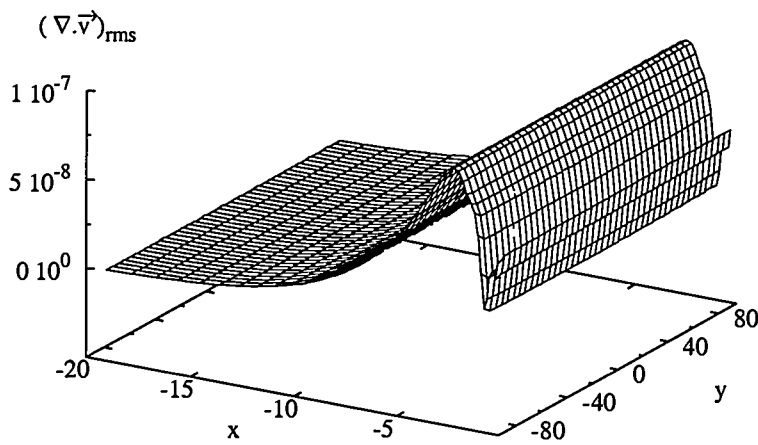


FIG. 2.43 – Valeur rms de la divergence de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

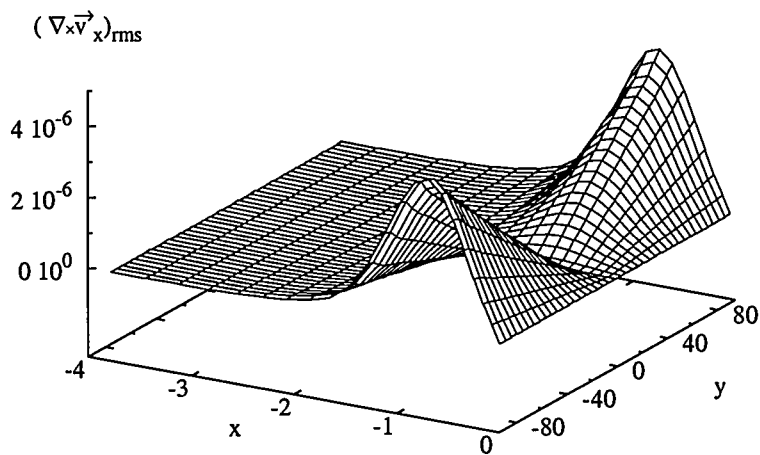


FIG. 2.44 – Valeur *rms* de la vorticité normale de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

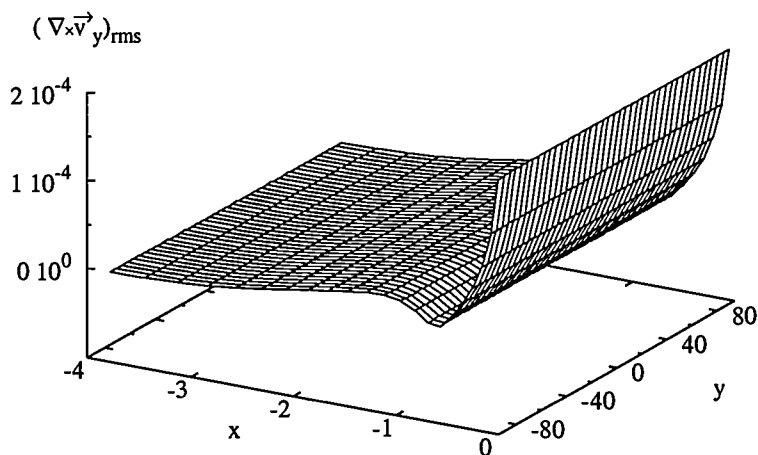


FIG. 2.45 – Valeur *rms* de la vorticité tangentielle de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

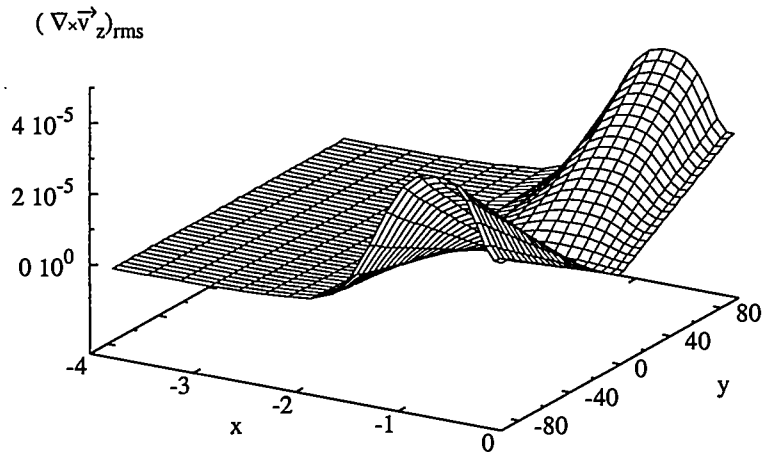


FIG. 2.46 – Valeur *rms* de la vorticité périodique de la perturbation de vitesse au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

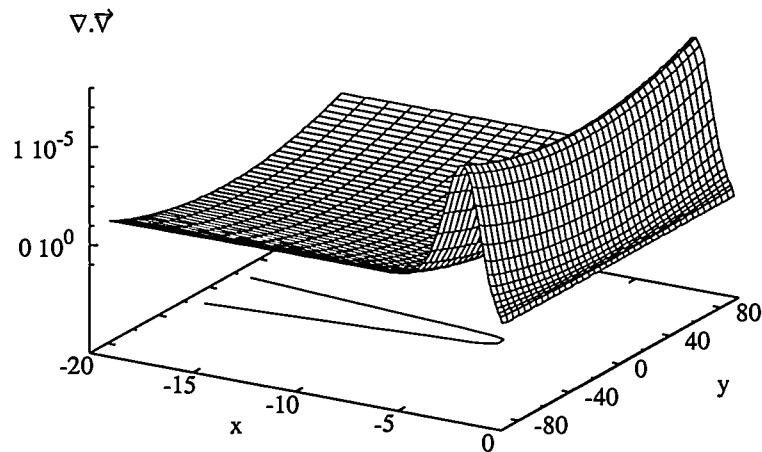


FIG. 2.47 – Divergence de la vitesse de base. La ligne tracée dans le plan (x, y) délimite la zone de compression (à l'intérieur de la ligne) de la zone d'expansion (majorité du domaine et en particulier toute la couche limite)

L_z est la taille du domaine dans la direction de périodicité. C'est aussi la longueur d'onde de la perturbation initiale. La représentation des modes de Fourier en amplitudes et phases s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} f(x, y, z, t) &= a_0^f(x, y, t) + \sum_{n=1}^N \left[c_n^f(x, y, t) \cos \left(\frac{2\pi n z}{L_z} + \phi_n^f \right) \right], \\ \text{avec } c_n^f &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \\ \phi_n^f &= \arctan \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ pour } n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

a_0^f est l'amplitude du mode constant (indépendant de z) de la variable f . Elle est calculée avec (2.14) et est la distorsion non linéaire stationnaire. c_1^f , c_2^f et c_3^f sont les amplitudes du mode fondamental, du premier harmonique et du second harmonique respectivement. Les phases associées sont ϕ_1^f , ϕ_2^f et ϕ_3^f . Le nombre d'onde du mode fondamental est $k_z = 2\pi/L_z$.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux normes carrées intégrées de chacun des modes. Elles sont calculées suivant :

$$\begin{aligned} A_0^f(t) &= \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (a_0^f)^2 d\tau, \\ A_j^f(t) &= \frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (c_j^f)^2 d\tau \text{ pour } j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ainsi $f_{L^2} = A_0^f + A_1^f + A_2^f + \dots$

Sur la figure (2.48) nous avons tracé à titre d'exemple les normes carrées des différents modes de la perturbation de pression. Les normes carrées des vitesses et de l'entropie sont présentées en Annexe A dans les figures (A.1) à (A.4).

Pour toutes les variables, le mode fondamental est dominant à tous les temps. Pour les temps $t < 20$, seul le mode fondamental croît. Le premier harmonique et le mode constant commencent à croître simultanément à $t \sim 20$ à partir d'un niveau de l'ordre de 10^{-25} . Leur taux d'amplification temporelle est double de celui du fondamental. Le deuxième harmonique sort du bruit numérique au temps $t \sim 40$ avec un niveau 10^{-30} . Son taux d'amplification est triple de celui du fondamental. Rappelons que la simulation est faite à l'aide de 6 points dans la direction périodique. Le fondamental est résolu sans problème. En effet, comme montré dans la partie concernant le schéma de Runge-Kutta, les schémas centrés et décentrés utilisés ont une dispersion inférieure à 2% jusqu'à $k\Delta x = 2\pi/3$. Ceci correspond à trois points par longueur d'onde. Le mode constant (distorsion non linéaire stationnaire) et le premier harmonique sont donc aussi correctement résolus. En revanche le deuxième harmonique est dramatiquement sous-résolu. Avec deux points par longueur d'onde, $k\Delta x = \pi$: la dispersion est alors totale. De plus, pour le schéma centré, il n'y a pas de dissipation à ce nombre d'onde. Cette sous-résolution est la cause de l'augmentation brusque de toutes les normes aux derniers instants de la simulation. Auparavant, on peut espérer que l'influence du second harmonique sur les autres modes reste faible.

Il est en effet au moins deux ordres de grandeur plus petit que le plus petit des autres modes. Notons que la détermination du nombre de points minimal pour bien résoudre une longueur d'onde est établie avec une théorie linéaire sur une équation modèle. Son résultat n'est donc pas directement applicable mais donne une bonne indication de la précision attendue.

Pour toutes les variables, la norme carrée du fondamental est au moins un ordre de grandeur plus élevée que celle des autres modes, et ce même aux derniers instants, où la différence est la plus faible. Pour v , w et s le mode constant est d'intensité plus élevée que le premier harmonique. Pour u et p au contraire, le mode constant est de deux ordres de grandeur inférieur au premier harmonique. La saturation dans la croissance intervient quand la différence d'ordre de grandeur entre le mode fondamental et le mode suivant est de deux ordres de grandeur.

Sur les figures (2.49) à (2.51), nous avons tracé, pour un mode donné, les normes carrées de l'ensemble des variables. Les légendes font apparaître les variables par ordre d'importance décroissante. Les figures (2.50) et (2.41) sont indiscernables : la norme $L^2 f_{L^2}(t)$ est dominée par la norme du mode fondamental $A_1^f(t)$ pour toutes les variables. Pour le premier harmonique (2.51), l'ordre d'importance des variables est le même que pour le fondamental (2.50). Les écarts entre les variables sont toutefois plus faibles. Dans ces deux cas, la vitesse périodique est dominante devant la vitesse normale et la vitesse tangentielle, suivies de la densité, de la pression, de la température et de très loin de l'entropie. La perturbation d'entropie est à tout temps de cinq ordres de grandeur plus faible que la perturbation de vitesse périodique. Le mode constant a en revanche un comportement différent du fondamental et du premier harmonique. La vitesse périodique reste dominante mais la vitesse normale est beaucoup plus faible. La variation de pression est la plus petite variable et est d'un ordre de grandeur inférieure à la variation d'entropie. Pour les variables aérodynamiques, l'instabilité porte très principalement sur les vitesses périodique et tangentielle.

Nous nous sommes ensuite intéressés au profil de ces variables au travers de la couche limite. Les profils d'amplitude du mode constant et du premier harmonique sont présentés en Annexe A dans les figures (A.5) à (A.8) et (A.9) à (A.14). respectivement. Les profils du mode fondamental, qui est à tout temps dominant, sont présentés dans les figures (2.52) à (2.60).

Les figures (A.5) à (A.8) concernent le mode constant. Notons que, comme dans toutes les figures, la valeur de v examinée dans l'absolu n'a pas de signification car elle varie avec y . Sur les figures (A.5) et (A.6), nous traçons $|a_0^f|$ pour les variables aérodynamiques et thermodynamiques en échelle logarithmique. Dans la couche limite u est deux ordres de grandeur plus petite que w mais ne décroît pas avec la distance au mur. a_0^u et de a_0^p varient au plus d'un ordre de grandeur entre la couche limite et l'entrée du domaine de calcul. Les autres variables ont une intensité au moins un ordre de grandeur et demi plus élevée dans la couche limite qu'à l'extérieur. Le com-

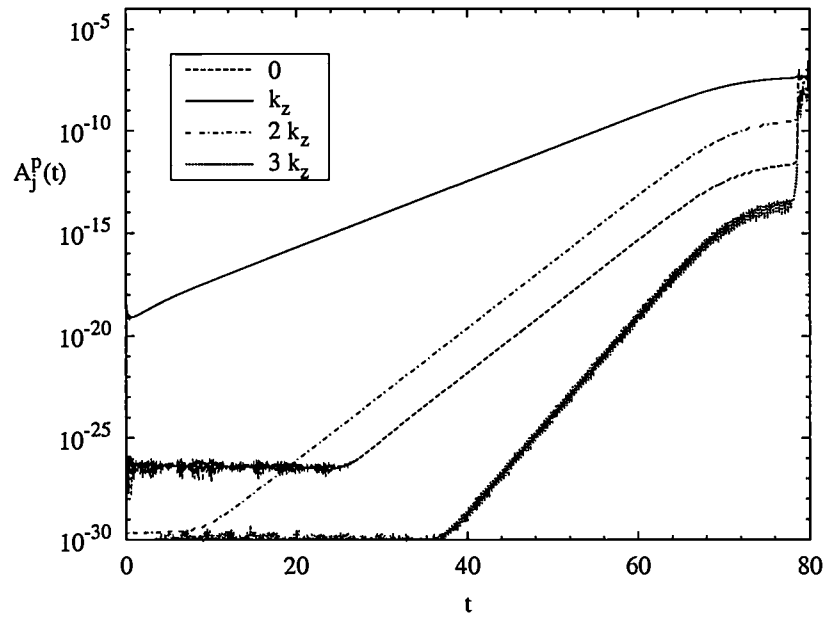


FIG. 2.48 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de pression, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

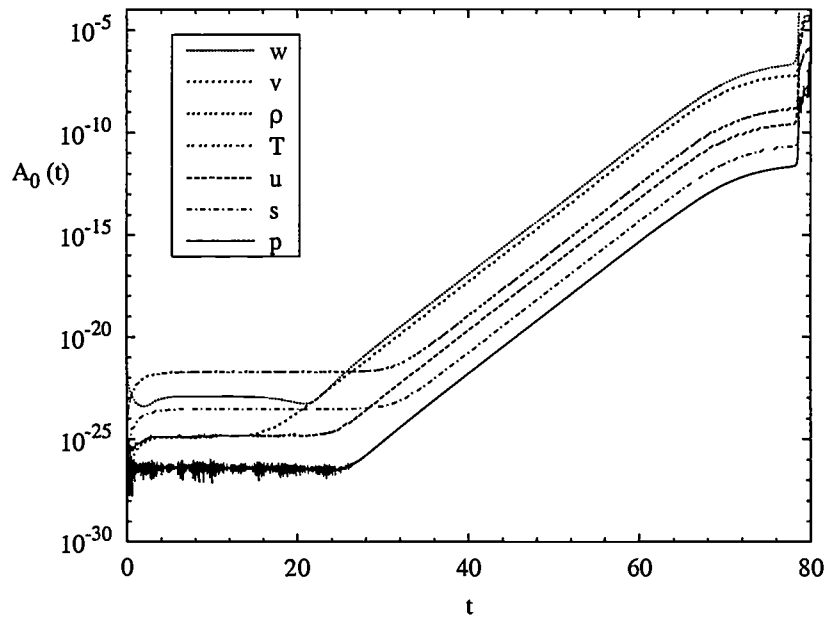


FIG. 2.49 – Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique. La norme de la masse volumique ρ et celle de la température T sont confondues

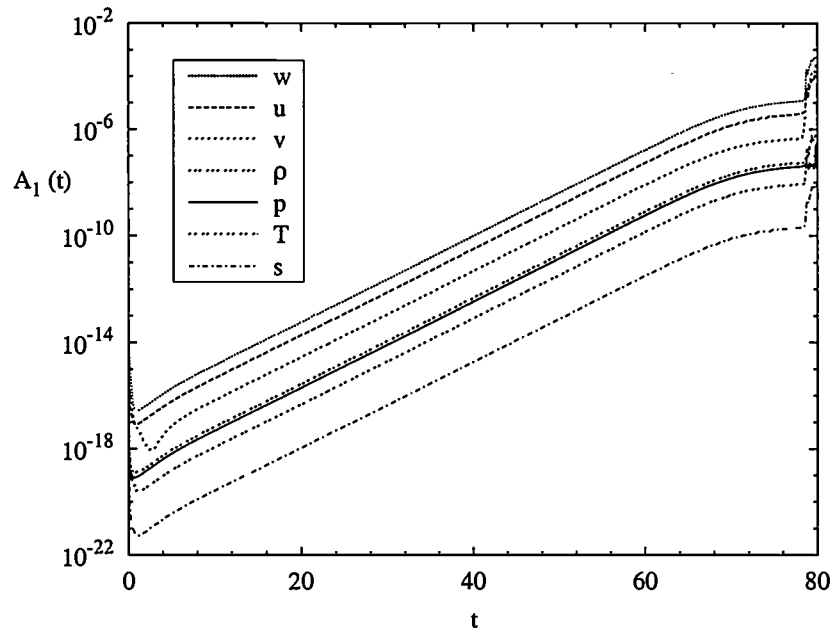


FIG. 2.50 – Normes carrées du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur adiabatique

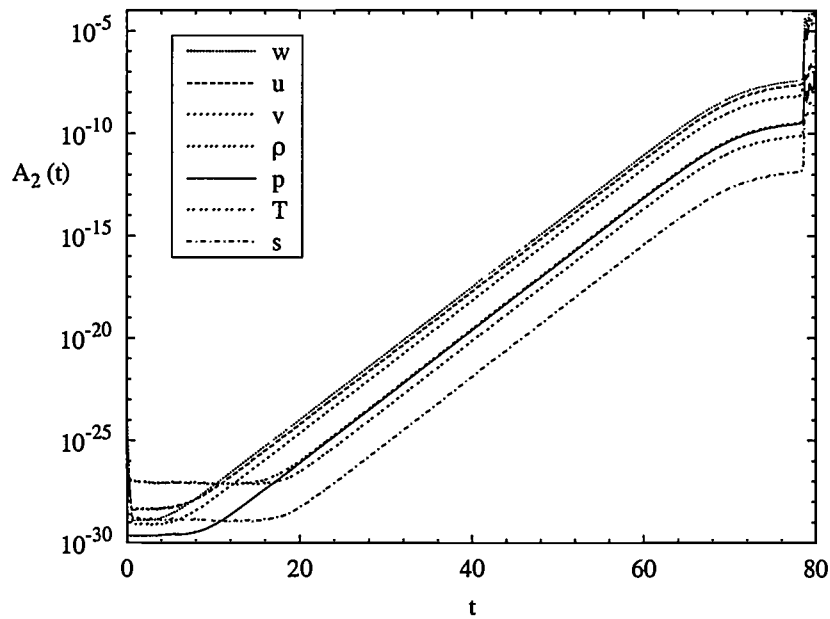


FIG. 2.51 – Normes carr ees du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur adiabatique

portement de a_0^u et a_0^p est vraisemblablement un effet des conditions limites en entrée et en sortie. Ainsi, on peut noter sur la figure (2.62) où l'on a tracé le maximum selon x de a_0 en fonction de y que a_0^u et a_0^p varient anormalement fortement dans la direction tangentielle. Hormis pour a_0^p et a_0^u , les autres variables ont un comportement qui semble non dominé par les effets numériques des conditions limites. Sur la figure (A.7), nous avons tracé l'amplitude de toutes les variables dans la couche limite. Sauf pour $x \in [-0.5; 0]$, la perturbation tend à décélérer l'écoulement dans la direction périodique et à faire entrer du fluide par les sorties. v est légèrement moins étendue que w dans la direction normale. Sur la figure (A.8), on voit que la perturbation de température compense exactement celle de masse volumique. En effet, la variation de pression étant quasi-nulle, la dérivation logarithmique de l'équation de gaz parfait donne, en considérant que les perturbations sont petites devant le champ de base $\rho/R_0 = -T'/T_0$, où T' désigne ici la perturbation de température. Le mode constant de la perturbation est quasiment isobare.

Sur les figures (2.52) à (2.60), nous avons tracé les amplitudes et phases du fondamental. Ce mode est d'intensité nettement plus élevée que le mode constant ou le premier harmonique. Rappelons que les sauts de 2π dans la phase sont sans signification et que les sauts de π traduisent un changement de signe de l'amplitude du mode. Il apparaît sur les figures (2.52) et (2.53) que toutes les variables décroissent au moins exponentiellement avec la distance au mur. Ceci est caractéristique du spectre discret déterminé en incompressible par Malik et al. [HMP84]. De plus, la vitesse tangentielle présente une forte décroissance en sortie de couche limite. En effet Hall et al. ont montré que pour une distance au mur suffisamment grande,

$$\begin{cases} u \sim \exp(-\alpha\eta), \\ v \sim \exp(-\frac{1}{2}\eta^2), \\ \eta = \frac{-x}{\delta}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour η suffisamment grand, la vitesse tangentielle décroît dans la direction normale plus vite que la vitesse normale. Les vitesses normale et périodique dominent la dynamique de la perturbation pour $x < -4$.

La perturbation d'entropie est limitée à la zone $x \in [-4; 0]$ et est négligeable sur le reste du domaine. Nous avons tracé sur la figure (2.54) la quantité $\gamma\rho$ en sus des variables thermodynamiques. En effet, dans le cas où la perturbation d'entropie est négligeable, la dérivation logarithmique de la définition de l'entropie donne

$$\frac{p}{P_0} = \gamma \frac{\rho}{R_0}. \quad (2.18)$$

Cette relation est très bien satisfaite jusqu'à la limite à 99% de la couche limite dans la direction z . À l'intérieur de la couche limite, la perturbation d'entropie non négligeable tend à abaisser la valeur de la perturbation de pression.

Sur les figures (2.55) et (2.56), nous avons tracé l'amplitude et la phase des perturbations de vitesse. Pour toutes les distances, u et w restent en déphasage voisin

de $\pi/2$ et leur phase chute de $\pi/4$ au travers de la couche limite. La phase de v augmente au contraire régulièrement de $+\pi$ dans la couche limite. Toutes les variables atteignent leur maximum dans la couche limite à 99% : u approximativement en -2 et v et w en -0.7 . Rappelons que w domine en norme l'instabilité.

La position du maximum du mode fondamental de w peut être reliée à la pulsation de la perturbation par rapport à l'écoulement de base. En effet, suivant Hall et al. [HMP84], le mode fondamental peut être écrit sous forme d'une onde propagative

$$c_1^f(x, y, t) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z} + \phi_1^f\right) = C_1^f(x, y) \exp(\alpha t) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z} - \omega t + (\phi_1^f)_0\right), \quad (2.19)$$

où $(\phi_1^f)_0$ est la phase de la perturbation à l'instant initial en $z = 0$, ω sa pulsation et α son taux d'amplification temporelle. La pulsation ω est alors simplement déterminée en calculant la différence de phase ϕ_1^f entre les instants t et $t + \Delta t$:

$$\omega = -\frac{\phi_1^f(t + \Delta t) - \phi_1^f(t)}{\Delta t}, \quad (2.20)$$

avec Δt petit.

Sur la figure (2.57), nous avons tracé la pulsation ω calculée à partir de la pression le long de la ligne $y = -56.6\delta$. Elle est adimensionnée avec B . Aux petits temps, avant l'établissement des modes de Görtler et Hämmerlin, la pulsation dépend de la position dans le domaine et de la variable considérée. Rappelons que la perturbation initiale est de phase aléatoire. Entre les instants 15 et 50, la pulsation est constante et uniforme. Elle est identique pour toutes les variables et a la valeur 68.374. Pour les temps $t > 50$, c'est à dire dès que débute le phénomène de saturation de la croissance de l'énergie cinétique, la pulsation de la pression p augmente légèrement.

La pulsation par rapport au champ de base $(\omega)_{Base}$ s'écrit :

$$(\omega)_{Base} = \omega - W \frac{2\pi}{L_z} \quad (2.21)$$

Cette quantité est tracée sur la figure (2.58) en fonction de x pour $y = -56.6\delta$. La pulsation par rapport au champ de base s'annule en $x = -0.67773$. En ce point, la perturbation est donc stationnaire par rapport à une particule fluide convectée avec la vitesse W . Le maximum de la perturbation de vitesse périodique est atteint en $x = -0.694$, point de la grille le plus proche de $x = -0.67773$.

À l'exception de p qui est maximale au mur, les variables thermodynamiques, montrées sur les figures (2.59) et (2.60), atteignent leur maximum en $x = -1$. Les phases de s et T présentent la même évolution que celle de v . En revanche, la phase de la pression est constante dans tout le domaine.

Sur les figures (A.9) à (A.14) regroupées dans l'Annexe A, nous nous intéressons au comportement du premier harmonique. Le tracé en échelle logarithmique montre que ce mode décroît plus vite dans la direction normale que le fondamental. La

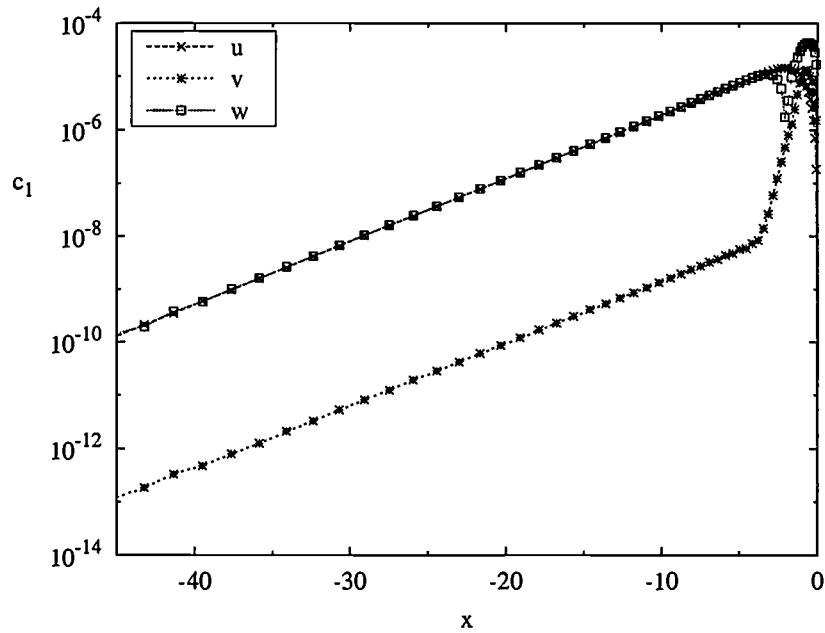


FIG. 2.52 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

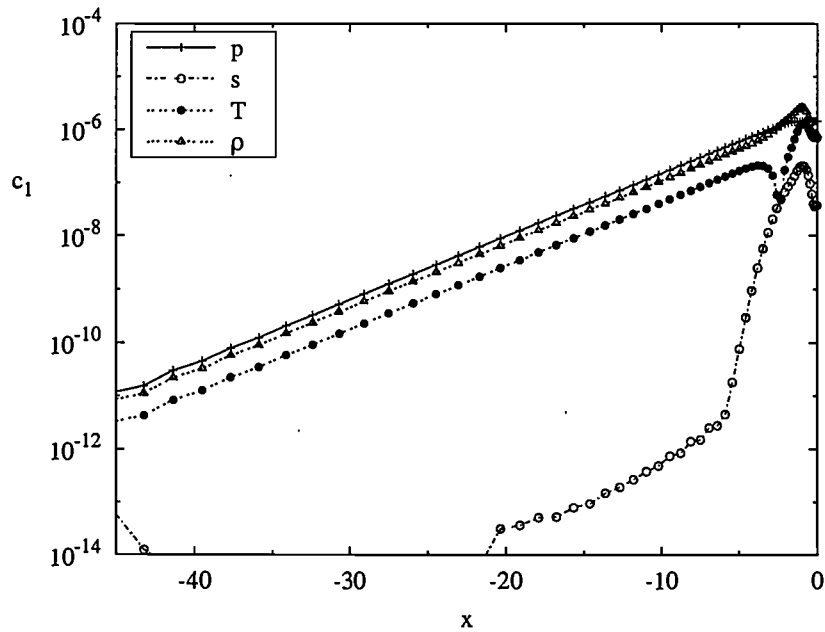


FIG. 2.53 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

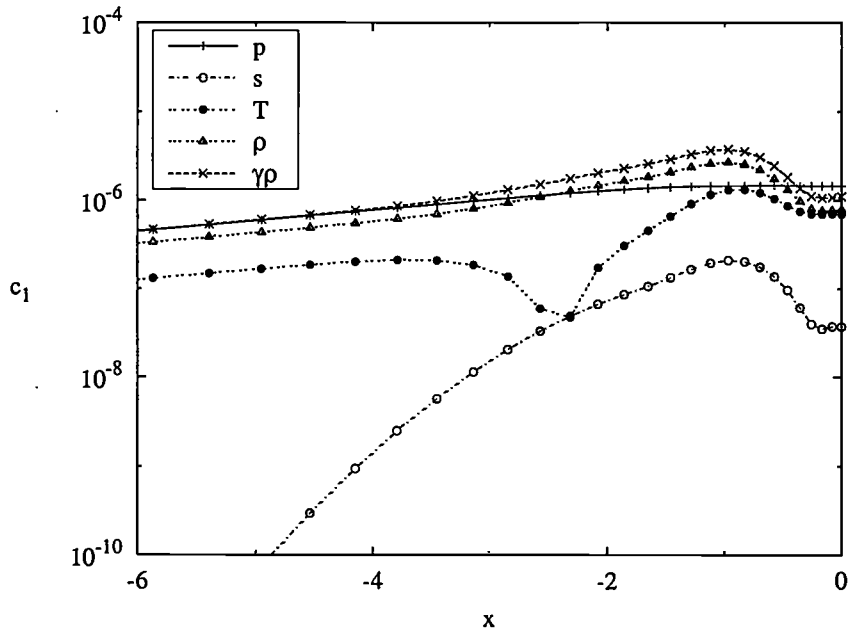


FIG. 2.54 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

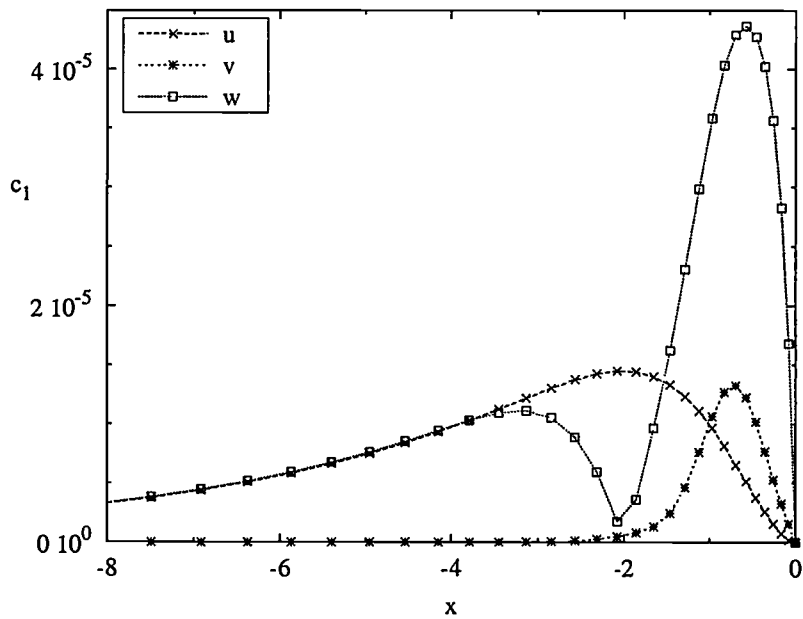


FIG. 2.55 – Amplitudes du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

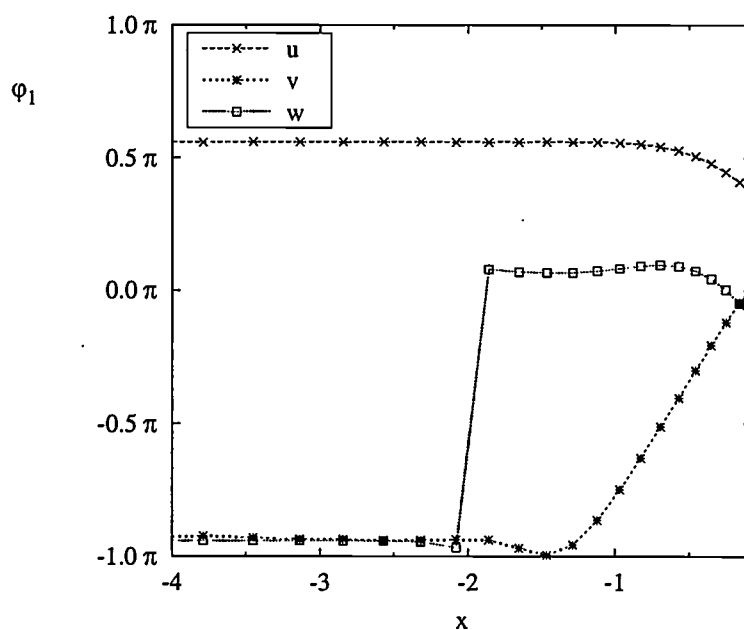


FIG. 2.56 – Phases du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

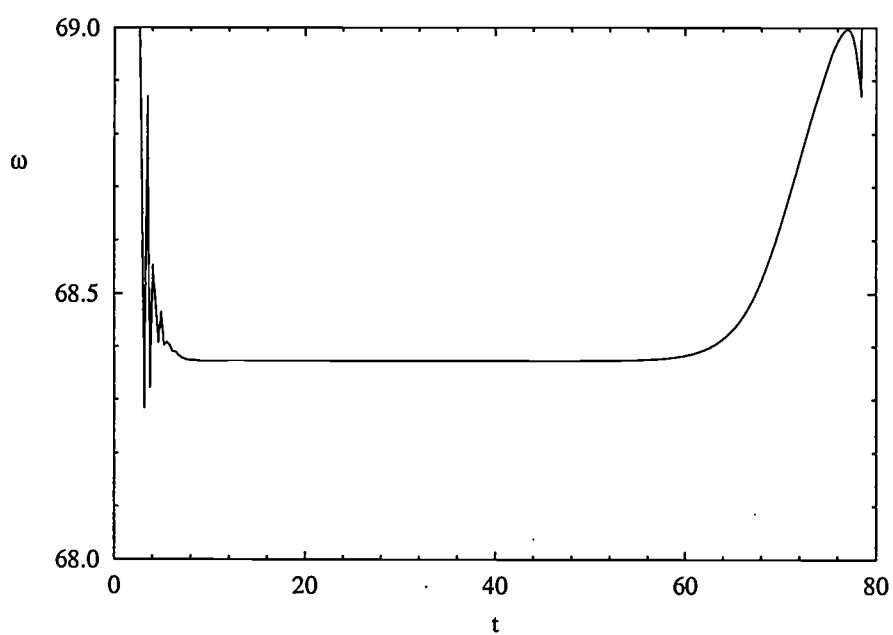


FIG. 2.57 – Pulsation de la perturbation de pression sur le profil $y = -56.6\delta$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

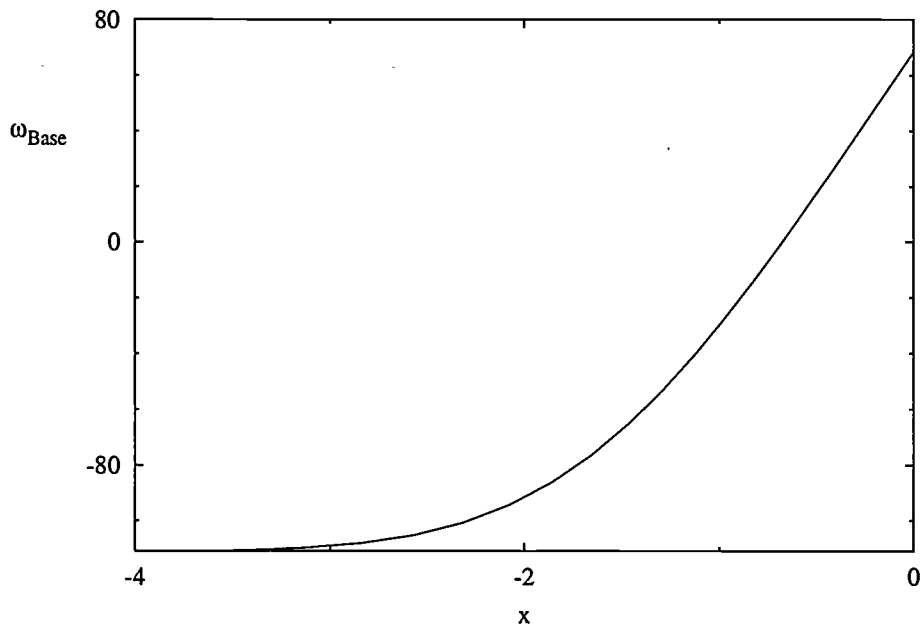


FIG. 2.58 – Pulsation par rapport au champ de base de la perturbation de pression sur le profil $y = -56.6\delta$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

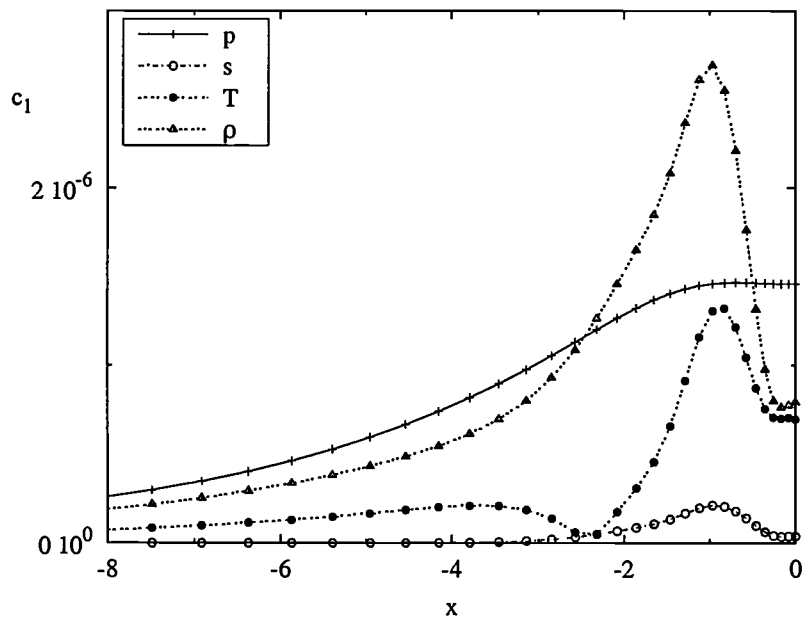


FIG. 2.59 – Amplitudes du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

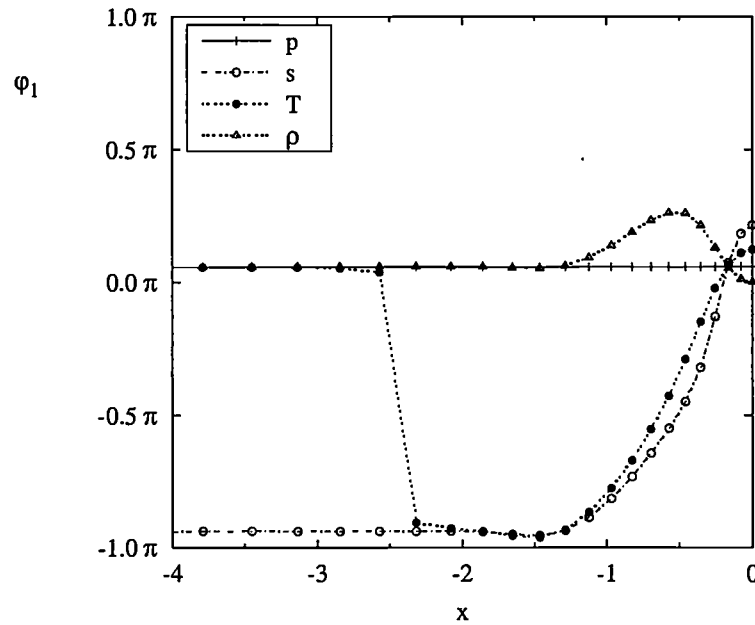


FIG. 2.60 – Phases du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

perturbation d'entropie est aussi confinée à une zone très proche du mur. u et w sont superposables en amplitude pour $x < -4$ et dominent les autres variables sur cette zone. Les amplitudes des vitesses sont tracées sur la figure (A.11). Les maxima de w et u sont plus proches du mur que pour le mode fondamental et situés respectivement en $x = -0.3$ et -1.7 . Celui de v est en revanche écarté du mur jusqu'à $x = -1$. Les maxima des variables thermodynamiques sont légèrement éloignés du mur par rapport au fondamental (figure (A.13)). En particulier, la perturbation de pression est maximale en $x = -0.7$. À l'exception de la pression, les phases du premier harmonique, montrées sur les figures (A.12) et (A.14) varient plus au travers de la couche limite que celle du fondamental. La phase de la pression reste constante sur tout le domaine.

Nous avons pu examiner la validité de l'hypothèse de Görtler et Hämmerlin pour les modes autres que fondamental. Pour ce faire, nous avons tracé sur les figures (2.61) à (2.64) le maximum selon x des différentes amplitudes de Fourier, normalisé par cette valeur en $y = 0$ pour u , w , p et s , ou par cette valeur en $y = -70.4$ pour v . Sur la figure (2.61) sont regroupées les modes de la vitesse tangentielle v . Les trois modes résolus (constant, fondamental et premier harmonique) sont des fonctions linéaires de y . Les modes constants sont tracés sur la figure (2.62). Rappelons que cette représentation montre seulement la forme des profils. La norme carrée intégrée de w est trois ordres de grandeur plus élevée que celle de u . Celle de p est un ordre

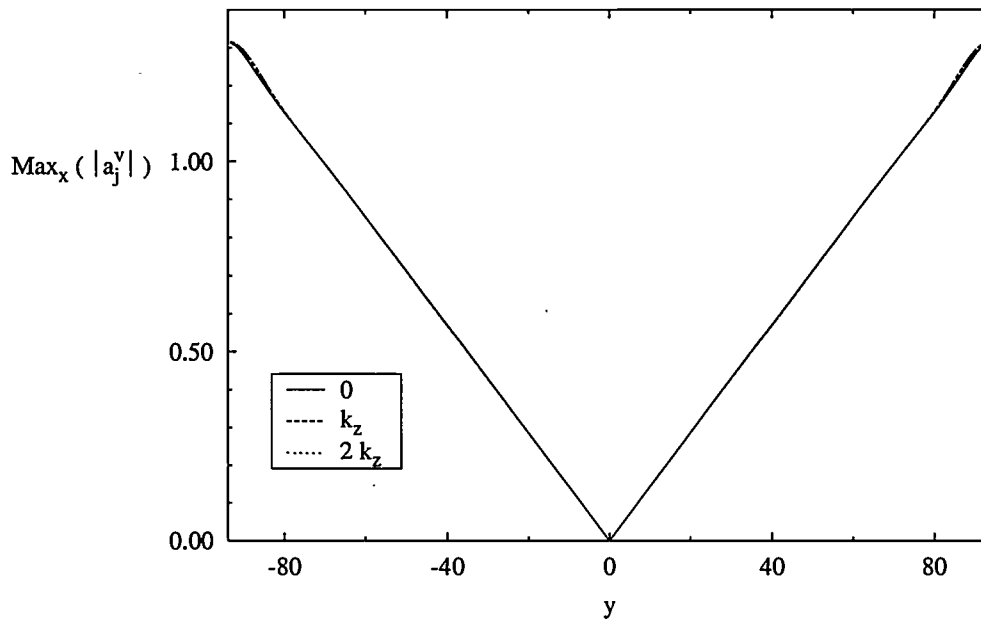


FIG. 2.61 – Maximum selon x des différents modes de Fourier de v au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

de grandeur inférieure à celle de s . Les effets des conditions limites de sortie sont très apparents pour p et u . Le mode fondamental est tracé sur la figure (2.63) et le premier harmonique sur (2.64). Pour ces deux modes, les variables u , w et p sont indépendantes de y . s est une parabole. Aussi, une étude non linéaire pourrait utiliser les mêmes simplifications de modes de Görtler et Hämmerlin que l'étude linéaire.

2.2 Perturbation de vorticité pure initialement centrée sur un mur isotherme

Nous nous intéressons à l'influence de la condition limite sur la croissance de la perturbation. Nous perturbons le champ de base convergé avec la condition limite isotherme avec la perturbation en vorticité pure déjà utilisée pour le cas du mur adiabatique. Sur la figure (2.65), nous avons tracé l'évolution temporelle de l'énergie cinétique $e(t)$. La courbe a la même allure que dans le cas adiabatique mais l'évolution temporelle est plus rapide. La droite asymptote au logarithme de $e(t)$ entre les temps 20 et 40 (ou à cette précision 10 et 30) a maintenant pour expression $0.4330t - 37.59$. Pour un mur adiabatique, le taux de croissance était 0.3723. Rappelons que le champ de base est à 10^{-8} près identique dans les cas isotherme ou adiabatique. Passé le temps $t = 30$, cette différence est masquée par la perturbation. À champ de base identique, l'isothermie a un effet déstabilisant. Le refroidissement

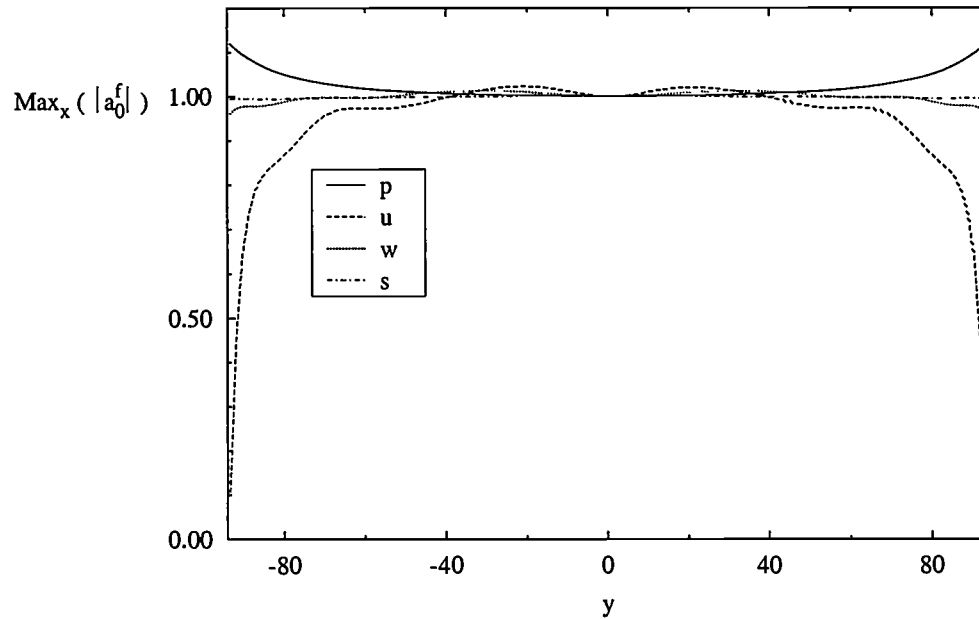


FIG. 2.62 – Maximum selon x du mode de Fourier constant pour les perturbations de vitesse périodique et d'entropie au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

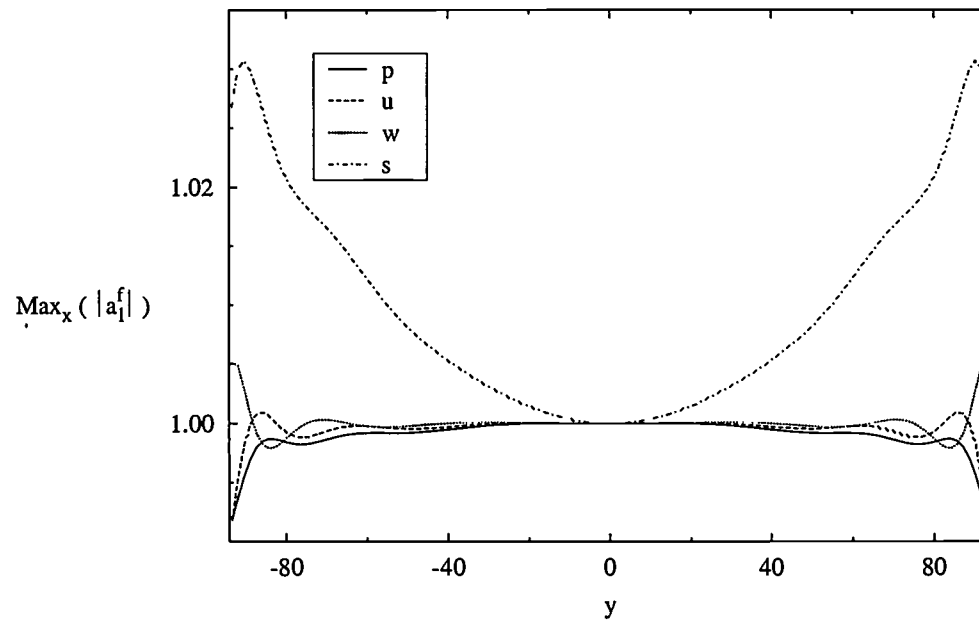


FIG. 2.63 – Maximum selon x du fondamental pour les perturbations de pression, vitesses normale périodique et d'entropie au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

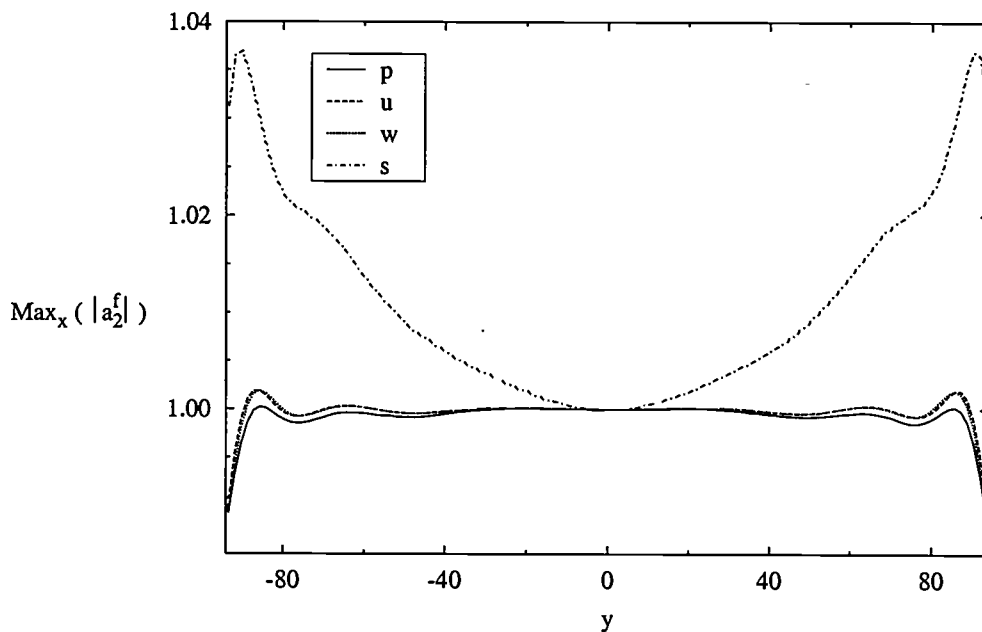


FIG. 2.64 – Maximum selon x du premier harmonique pour les perturbations de pression, vitesses normale périodique et d'entropie au temps $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

du mur n'a donc pas nécessairement un effet stabilisant.

La résolution du problème compressible ajoute un degré de liberté (l'entropie) au problème. L'effet de la compressibilité apparaît par la possibilité de conditions limites thermiques multiples.

Hormis par son taux d'amplification plus élevé, le cas du mur isotherme ne présente pas de différences notables avec le cas du mur adiabatique. Les profils de température et masse volumique sont néanmoins différents dans la zone proche du mur. L'ensemble des figures des normes carrées intégrées des différentes variables et des décompositions en modes de Fourier est à trouver en Annexe B. Nous présentons ici seulement la forme des modes fondamentaux de la perturbation. Ils sont dominants à tout temps.

Sur les figures (2.66) et (2.67), nous avons tracé les amplitudes et phases du mode fondamental pour les variables thermodynamiques au temps $t = 35.98$ à la section $y = -56.6\delta$. Les amplitudes sont plus élevées que dans le cas adiabatique en raison du taux d'amplification plus élevé. Néanmoins, sauf pour $x \in [-0.5; 0]$, les formes des variables restent inchangées. La variable dominante reste la masse volumique. La perturbation de température est nulle au mur, ce qui augmente (par rapport au cas adiabatique) la perturbation de masse volumique au mur afin de compenser la perturbation de pression. Sauf pour l'entropie, le diagramme de phase est proche dans les cas adiabatique et isotherme. Les amplitudes et phases des vitesses, montrées sur

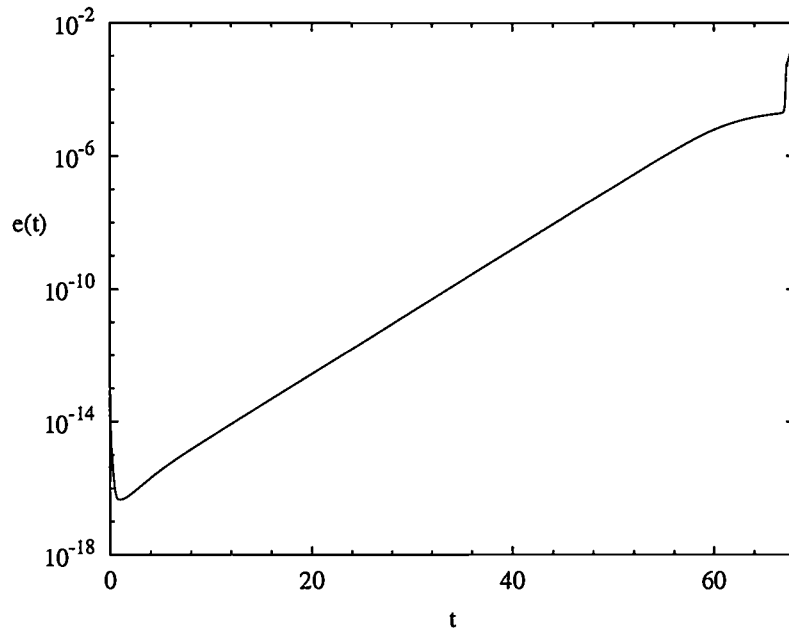


FIG. 2.65 – Évolution de l'énergie cinétique de la perturbation pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

les figures (2.68) et (2.69), sont indiscernables du cas adiabatique. Le changement de condition limite laisse les perturbations de vitesses et de pression inchangées. Les seules modifications sont sur l'entropie (et donc par conséquence sur la température et la masse volumique).

Le calcul de la pulsation donne un résultat similaire au cas avec mur adiabatique. Son évolution temporelle est tracée sur la figure (2.70). Entre $t = 20$ et $t = 50$, elle est uniforme et constante pour toutes les variables et égale à 68.397.

La pulsation par rapport au champ de base, calculée à l'aide de (2.21), s'annule en $x = -0.67797$. Le maximum du mode fondamental de la perturbation de vitesse périodique est ici atteint en $x = -0.694$, i.e. au point de la grille le plus proche de $x = -0.67797$.

2.3 Perturbation d'entropie pure initialement centrée sur un mur adiabatique

Nous avons cherché à examiner l'influence de la perturbation initiale sur le type d'instabilité déclenchée. Les perturbations de vorticité précédemment utilisées sont de nature incompressible. Nous avons noté qu'elles déclenchaient une instabilité dominée par la vorticité. Les perturbations de vitesse sont alors les modes incompressibles de Görtler-Hämmerlin. Il n'est pas clair qu'une perturbation compressible

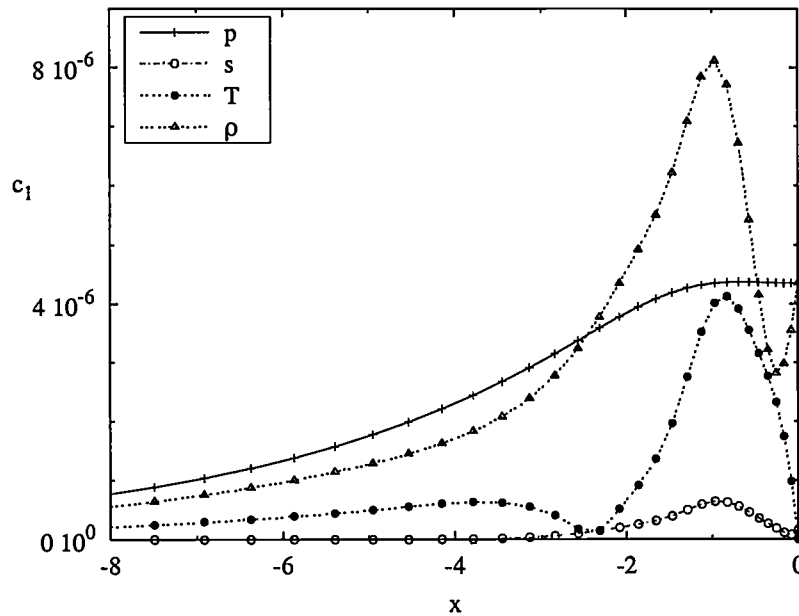


FIG. 2.66 – Amplitudes du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

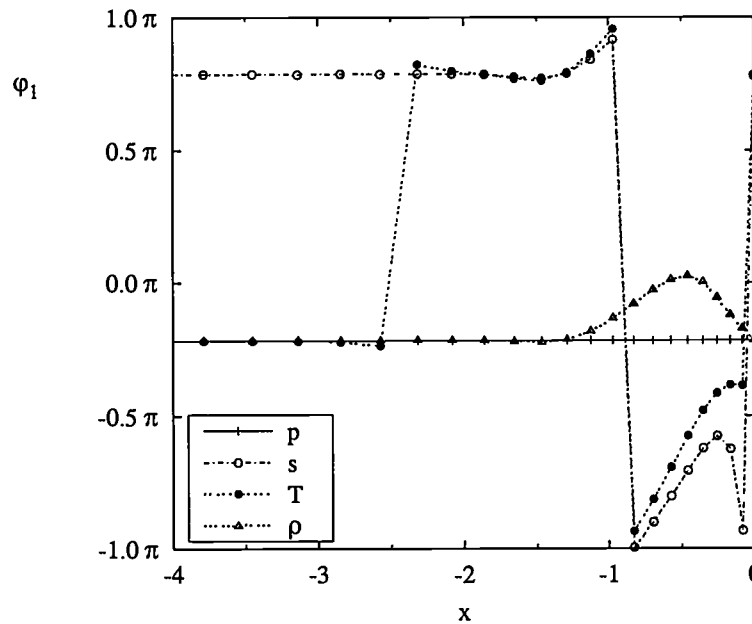


FIG. 2.67 – Phases du mode fondamental des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

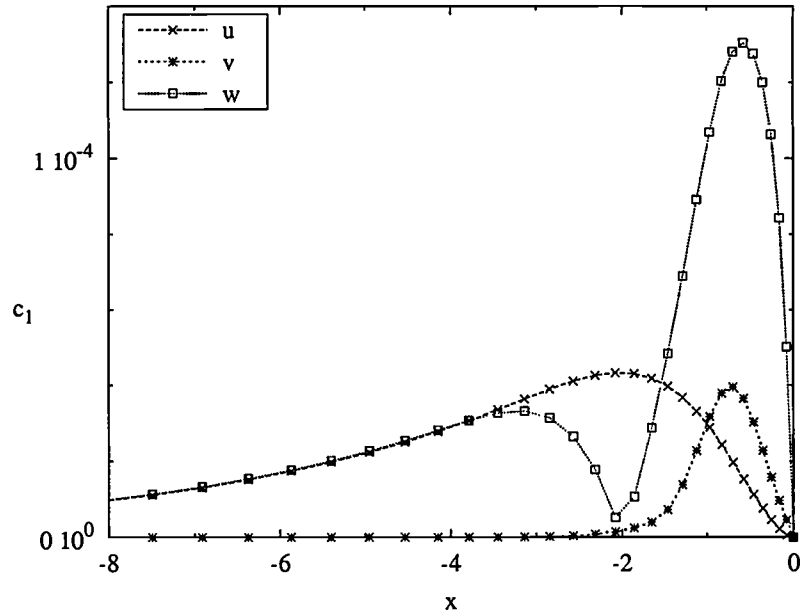


FIG. 2.68 – Amplitudes du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

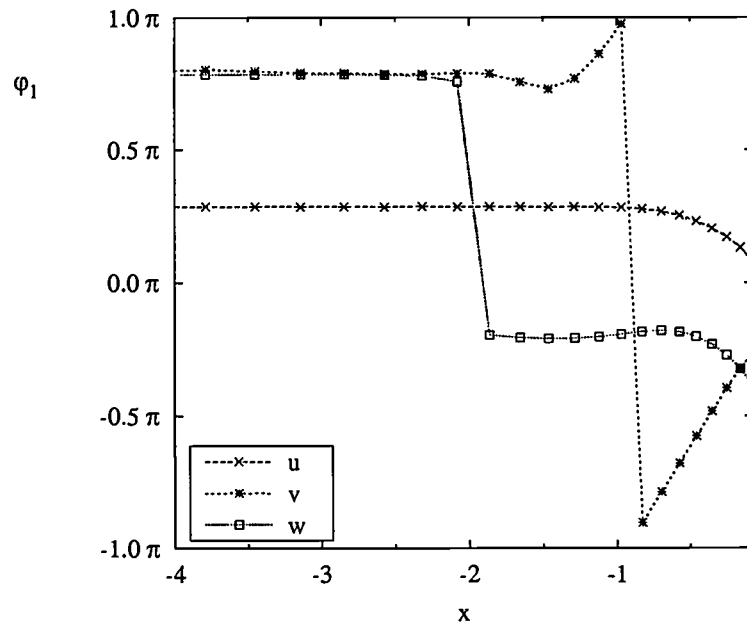


FIG. 2.69 – Phases du mode fondamental des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

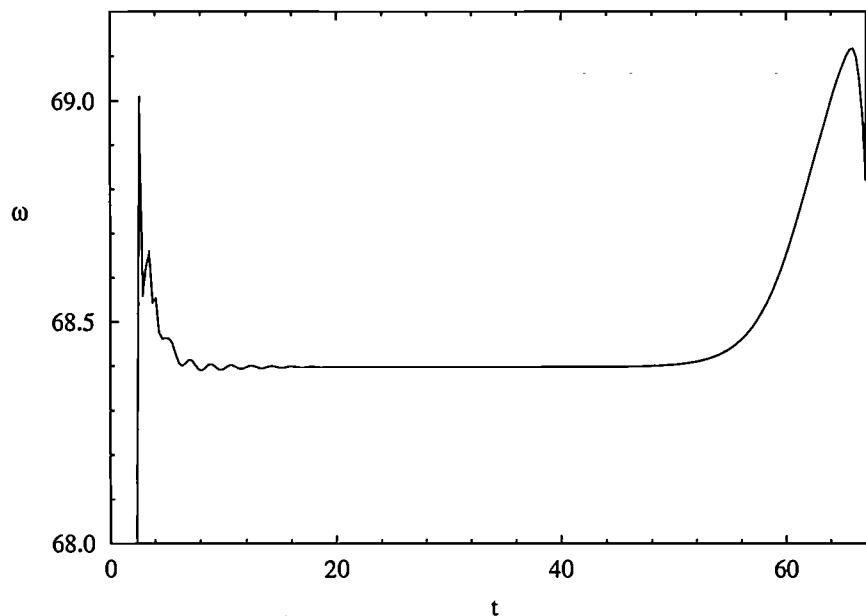


FIG. 2.70 – Pulsation de la perturbation de pression sur le profil $y = -56.6\delta$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

déclenche le même phénomène d'instabilité. Aussi nous avons perturbé le champ de base à l'aide de la perturbation d'entropie pure décrite par l'équation (1.95). Le niveau nominal de la perturbation initiale est 10^{-6} .

Sur la figure (2.71), nous avons tracé l'évolution temporelle de l'énergie cinétique $e(t)$. Le temps de simulation est légèrement trop court pour que le taux de croissance exponentielle ait atteint une valeur constante. La droite asymptote du logarithme de $e(t)$ est déterminée entre les instants t_1 et t_f , temps d'arrêt de la simulation. Sa pente dépend de t_1 . L'évaluation entre l'instant $t_1 = 9$ et l'instant final donne la meilleure corrélation. Le taux de croissance s'élève alors à 0.3759 avec une erreur de 0.04%. Une corrélation sur des intervalles de temps pour longs (avec t_1 plus petit) est entachée de la croissance plus élevée lors de la phase transitoire d'établissement de la perturbation. Il semble donc que l'on se rapproche par valeurs supérieures du taux d'amplification du cas de la perturbation initialement en vorticité pure sur un mur adiabatique.

Sur la figure (2.72), nous avons tracé les normes carrées f_{L^2} des différentes variables en fonction du temps. La perturbation d'entropie à l'instant initial induit une perturbation sur les autres variables. En particulier la norme carrée des perturbations de vitesse est quatre ordres de grandeur inférieure à celle de la perturbation initiale d'entropie. Jusqu'à $t = 0.2$, l'entropie domine. Mais elle chute plus rapidement que les autres variables. Dès l'instant $t > 0.8$, les trois variables de vitesse sont dominantes. Les contributions des vorticités et de la divergence, montrées sur

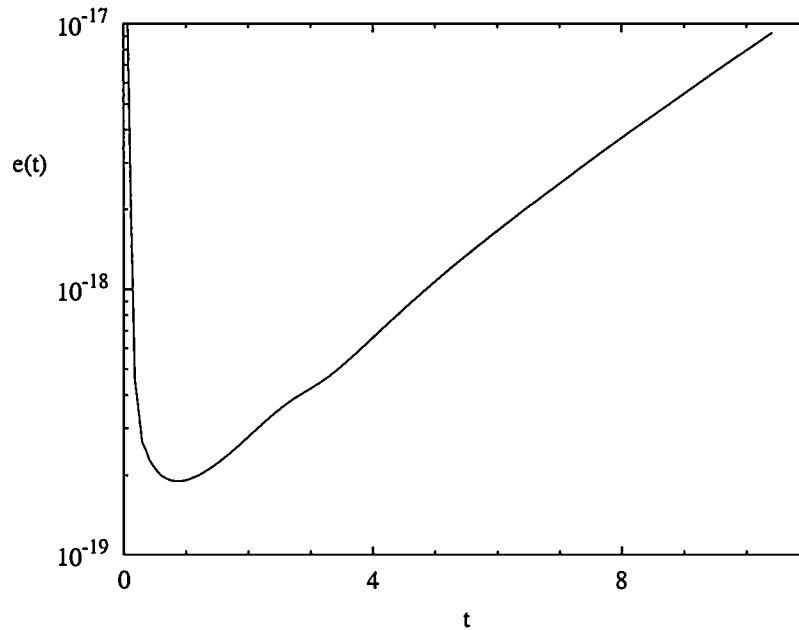


FIG. 2.71 – Énergie cinétique de la perturbation en fonction du temps pour une perturbation d'entropie initialement centrée et un mur adiabatique

la figure (2.73) sont de même importance relative que pour une perturbation de vorticité initiale.

L'apparition d'une perturbation principalement en vorticité appar it comme une caractéristique robuste de l'instabilité du point d'arrêt tridimensionnel. Un mécanisme d'instabilité quasi-incompressible domine l'instabilité du point d'arrêt tridimensionnel pour le nombre de Mach $M = 0.3$.

2.4 Perturbation de vorticité pure initialement décentrée sur un mur adiabatique

Comme dans le cas de la perturbation de vorticité initialement centrée, la perturbation initiale est solénoïdale et de diamètre à mi-hauteur $2r_0 = 2.6 \delta$. Elle est initialement centrée en $(x_0; y_0) = (-2.6 \delta; 25.8 \delta)$, i.e. décentrée par rapport à la ligne d'arrêt.

Sur la figure (2.74), nous traçons l'énergie cinétique $e(t)$ en fonction du temps. Après une phase transitoire, elle croît de même que dans le cas d'une perturbation initialement centrée.

Sur les figures (2.75)   (2.78), nous avons tracé la valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique entre les temps 0 et 1.163. Notons que le mur est sur ces figures en bas à gauche. Dans la direction tangentielle y , seul un point sur deux est

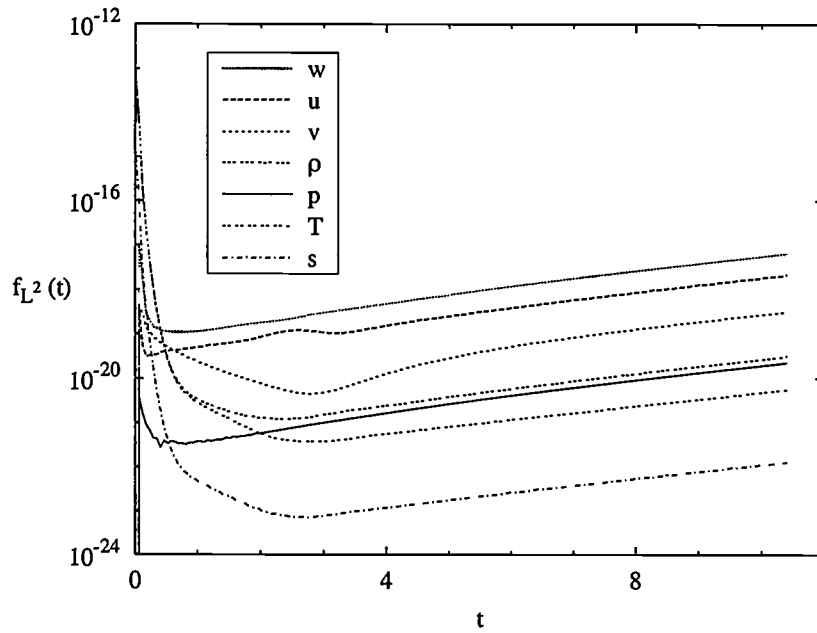


FIG. 2.72 – Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques pour une perturbation d'entropie initialement centrée et un mur adiabatique

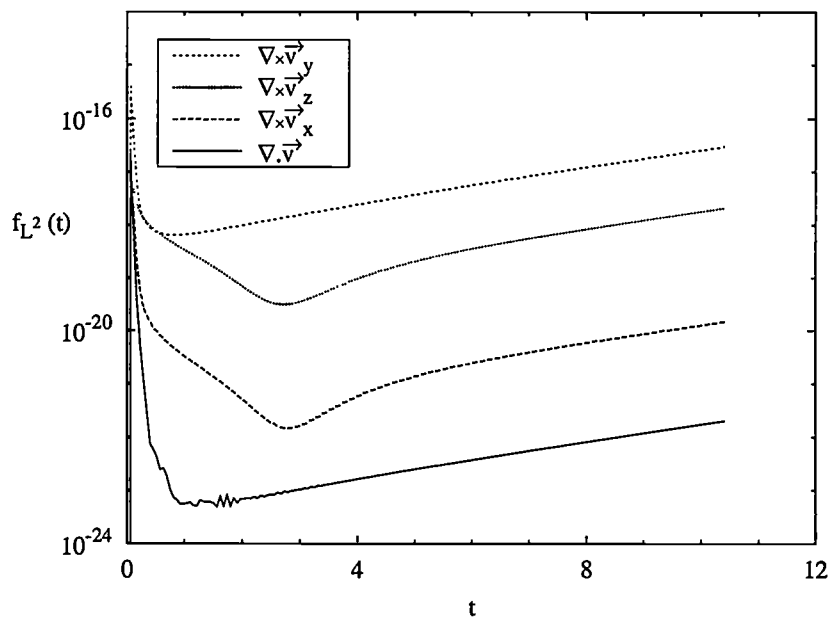


FIG. 2.73 – Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse pour une perturbation d'entropie initialement centrée et un mur adiabatique

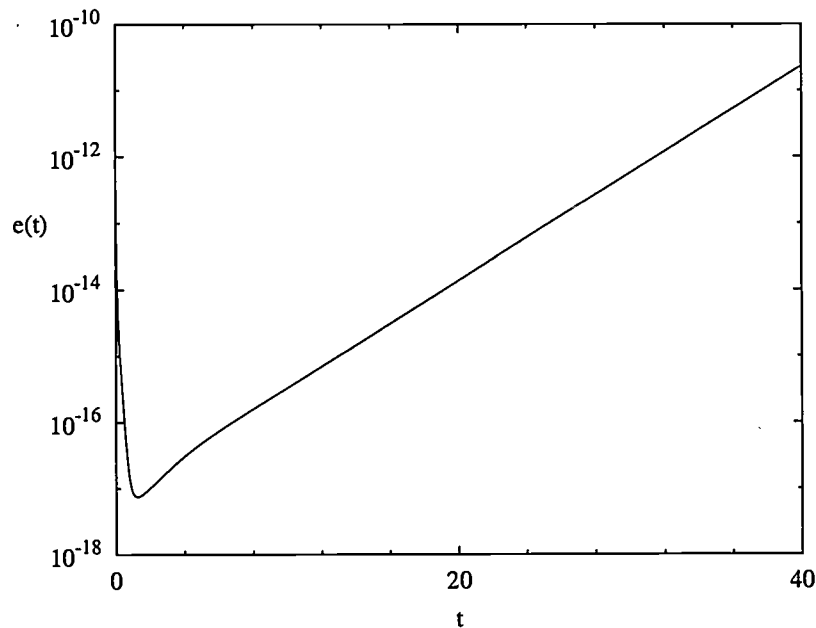


FIG. 2.74 – Évolution de l'énergie cinétique de la perturbation pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

tracé. La perturbation présente deux comportements distincts selon que l'on est très proche du mur ou en sortie de couche limite. En sortie de couche limite ($x < -1.5$), la perturbation est rapidement sortie du domaine. Bien qu'amortie (les échelles d'intensité changent au cours du temps entre les différentes figures) elle conserve son caractère initial de bruit blanc. La propagation est seulement dans le sens des y positifs. Au temps $t = 1.163$ (figure (2.78)), la perturbation de vitesse périodique est dans la zone externe déjà partiellement sortie du domaine. Au contraire, dans la zone interne proche du mur ($x \in [-1.5; 0]$), la perturbation est rapidement lisse. Sa valeur maximale selon y se déplace plus lentement que pour $x < -1.5$. Elle se propage vers les y positifs aussi bien que vers les y négatifs.

La vitesse normale et l'entropie présentent aussi ces deux comportements caractéristiques de la sortie de couche limite d'une part et d'une zone proche du mur d'autre part. La vitesse tangentielle v a le même comportement que w dans la zone externe de la couche limite. En revanche la perturbation de pression p ne présente par deux comportements distincts.

Pour examiner plus quantitativement ces comportements, nous avons tracé sur les figures (2.79) à (2.88) le maximum selon x_E (en sortie de couche limite) et selon x_I (à l'intérieur de la couche limite) des différentes valeurs rms , où

$$\begin{aligned} Max_{x_I}(f_{rms}) &= \max_{x \in [-1.5; 0]} (f_{rms}) , \\ Max_{x_E}(f_{rms}) &= \max_{x < -1.5} (f_{rms}) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

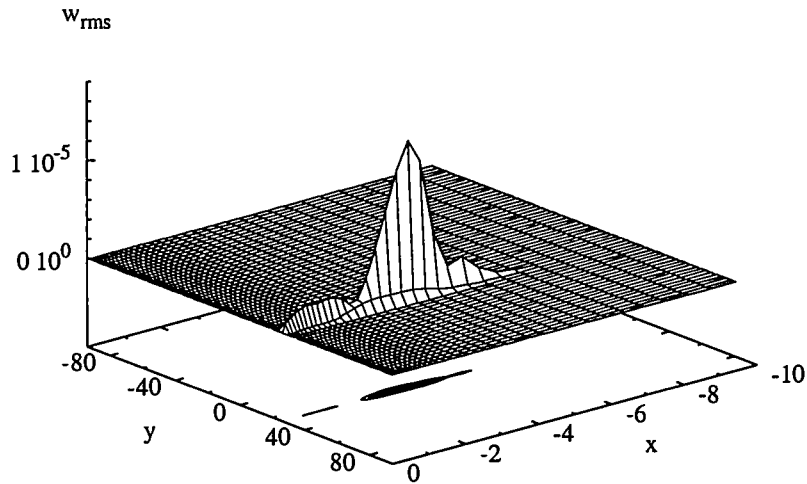


FIG. 2.75 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

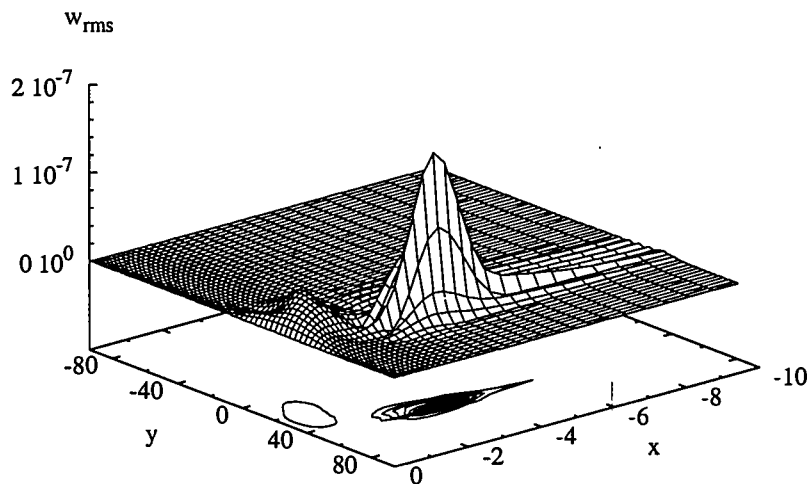


FIG. 2.76 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0.581$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

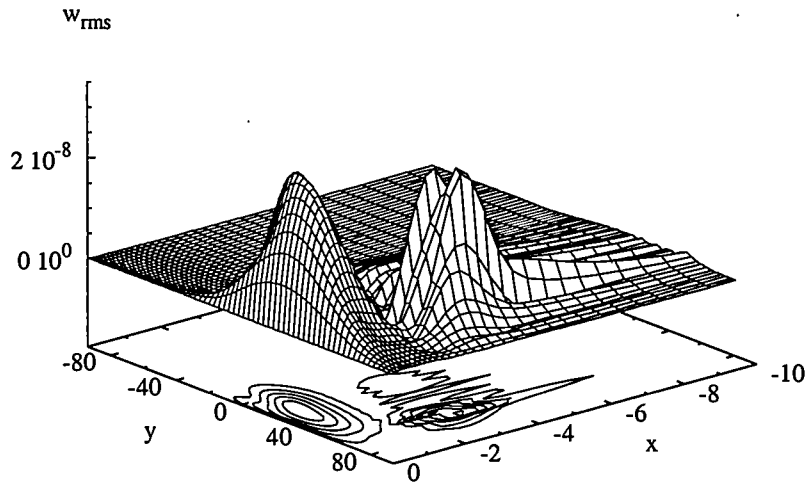


FIG. 2.77 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 0.872$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

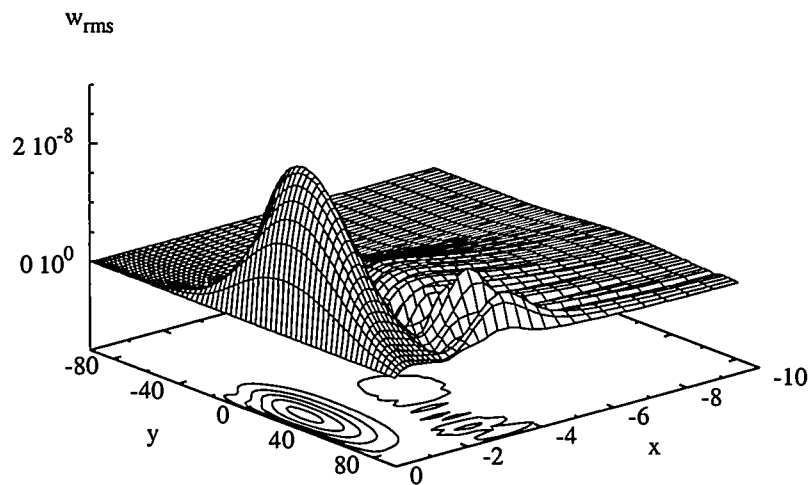


FIG. 2.78 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 1.163$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

Le tracé est en échelle logarithmique. Nous présentons les quantités $Max_{x_I}(f_{rms})$ et $Max_{x_E}(f_{rms})$ entre les temps $t = 0$ et $t = 1.163$.

Les vitesses normale et périodique u et w et l'entropie s , tracées sur les figures (2.79) à (2.84), présentent des comportements similaires. Pour la zone proche du mur (x_I), un lissage apparaît dès $t = 0.5$. u , w et s ressemblent à des gaussiennes s'élargissant dans le temps. La décroissance dans la zone proche du mur est très forte dans les premiers instants. Les vitesses u et w perdent deux ordres de grandeur entre l'instant initial et $t = 0.2$. L'entropie s a le même comportement que u et w mais la décroissance est moindre. Notons que s à l'instant initial est nulle et que la décroissance est la plus forte entre les deux premiers instants montrés pour u et w . Dès que la perturbation commence à être ajustée avec le mode propre, la décroissance est quasi-nulle. Le comportement en sortie de couche limite (x_E) reste dominé par le caractère bruit blanc initial. Autour du pic (selon y) de la valeur rms , les courbes restent en sortie de couche limite fortement oscillatoires, et ce même jusqu'à l'instant où la perturbation quitte le domaine. La décroissance est constante au cours du temps jusqu'à la sortie de la perturbation. Les effets visqueux dans x_E ne sont en effet pas nuls, la couche limite à 99% dans la direction z s'étendant jusqu'à -3.06δ . Pour u , une décroissance de deux ordres de grandeur nécessite un intervalle de temps $\Delta t = 0.9$. Le pic de valeur rms de toutes ces variables semble convecté avec l'écoulement de base. Ceci sera ultérieurement plus précisément quantifié.

La vitesse tangentielle v , tracée sur les figures (2.85) et (2.86), présente le même comportement qualitatif dans les deux zones mais ne tend pas vers une gaussienne. En effet, comme dans le cas centré, v tend à être une fonction linéaire de y . Sur les figures (2.89) à (2.93), nous avons tracé les valeurs rms des modes propres obtenus au bout du temps $t = 24.01$. Ils sont identiques à ceux obtenus avec une perturbation de vorticité initialement centrée.

Le comportement de la pression dans la zone interne proche du mur et en sortie de couche limite est indiscernable. D'une part, la perturbation de pression n'est pas propagée par un ph enom ne convectif comme c'est le cas pour les perturbations de vorticité et d'entropie. Sur les figures (2.87) et (2.88), on peut noter que la perturbation aux premiers instants ($t < 0.5$) pr esente des valeurs voisines sur l'ensemble du domaine. La diff erence entre le maximum de p selon y et son minimum est limitée à un ordre de grandeur. Une perturbation acoustique traverse en effet le domaine de 190δ en un intervalle de temps $\delta t = 0.09$. Ce r esultat est obtenu en n egligeant la vitesse de convection V , qui reste faible devant C , particuli erement dans la couche limite. D es le premier instant montr e, la perturbation de pression a pu gagner les sorties et l'entr ee et éventuellement y être partiellement r efl echie. Ceci explique les fortes oscillations de basse fr equence des premiers instants. D'autre part, le mode propre de la perturbation de pression est fortement étendu dans la direction normale (voir figure (2.89)). La combinaison de ces deux effets explique le comportement identique de la pression dans la zone externe x_E et dans la zone

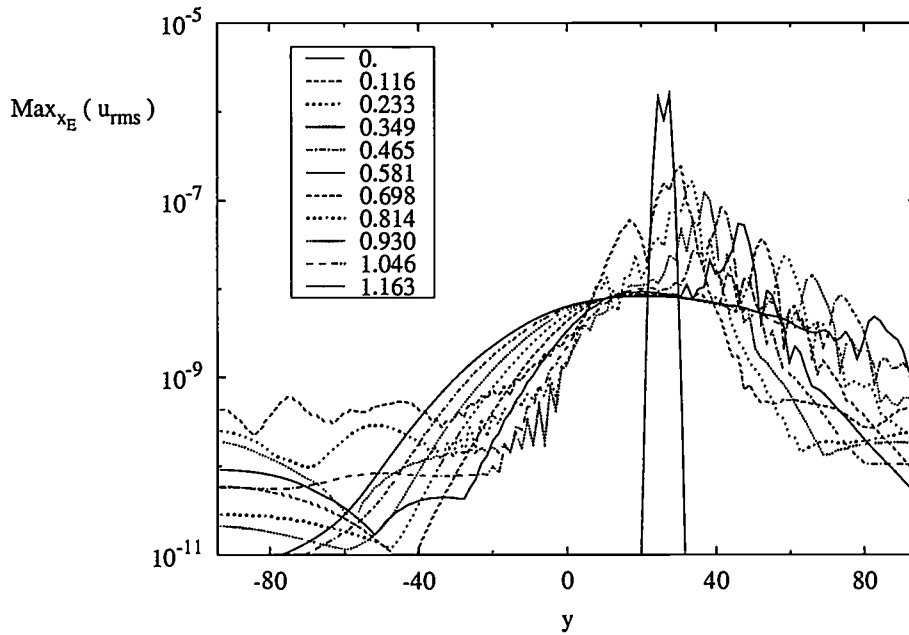


FIG. 2.79 – Maximum sur x_E de la valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse normale pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

interne x_I .

Notons que, pour les temps élevés, le comportement dans la zone interne proche du mur et en sortie de couche limite est identique pour toutes les variables car leurs modes propres ont une extension normale plus grande que la zone $x_I \in [-1.5; 0]$.

Les deux zones x_E et x_I nous ont permis d'extraire deux vitesses de propagation. Nous postulons une propagation dominée par la convection (pour u , v , w et s) pour la zone externe x_E et une propagation dominée par la diffusion pour la zone proche du mur x_I . Nous allons maintenant en déterminer les vitesses.

Sur la figure (2.94), nous avons tracé la position tangentielle y_E où est atteinte la valeur maximale (dans le plan (x_E, y) , i.e. en sortie de couche limite) de la valeur *rms* selon z des perturbations de vitesses normale, périodique et d'entropie. La courbe asymptote $f_c(t)$ a pour équation $f_c(t) = y^0 \exp(\alpha t)$, où $y^0 = 26.7$ et $\alpha = 0.97$. L'erreur sur ces deux coefficients est inférieure à 1%. Par ailleurs, la vitesse tangentielle V s'écrit By au premier ordre. La position d'un point matériel situé en y_0 à l'instant initial et convecté avec la vitesse V suit $y(t) = y_0 \exp(bt)$. Ici la perturbation initiale est centrée en $y_0 = 25.8$ et $b = 0.99$ (en considérant la vitesse tangentielle en $x = -2.58$). Les deux résultats sont en très bon accord. La perturbation en sortie de couche limite est convectée avec la vitesse du champ de base.

De la même manière que dans le cas centré, on repère la position des points d'inflexion des valeurs *rms* de u , w , s et p dans la zone proche de mur. Ces positions

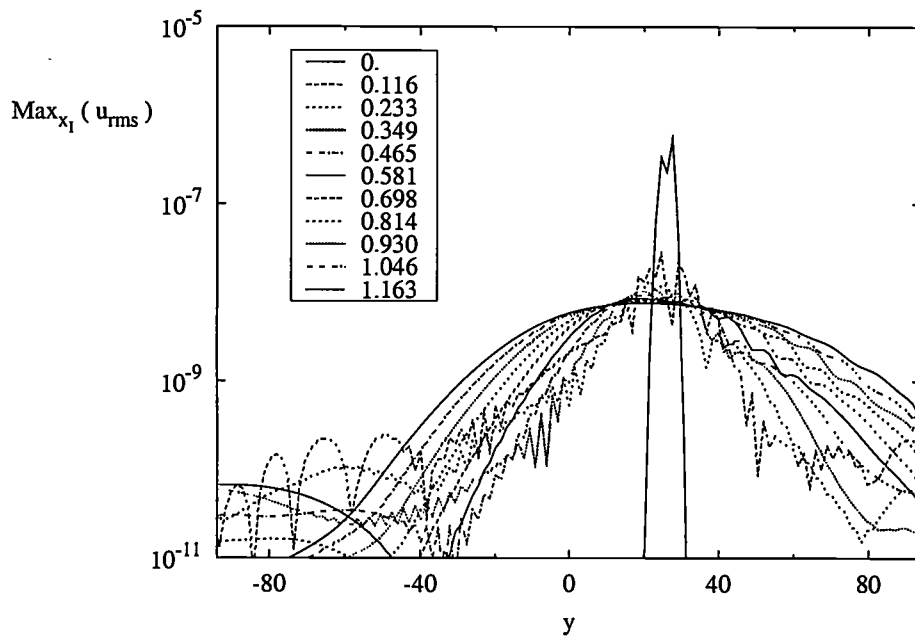


FIG. 2.80 – Maximum sur x_I de la valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse normale pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

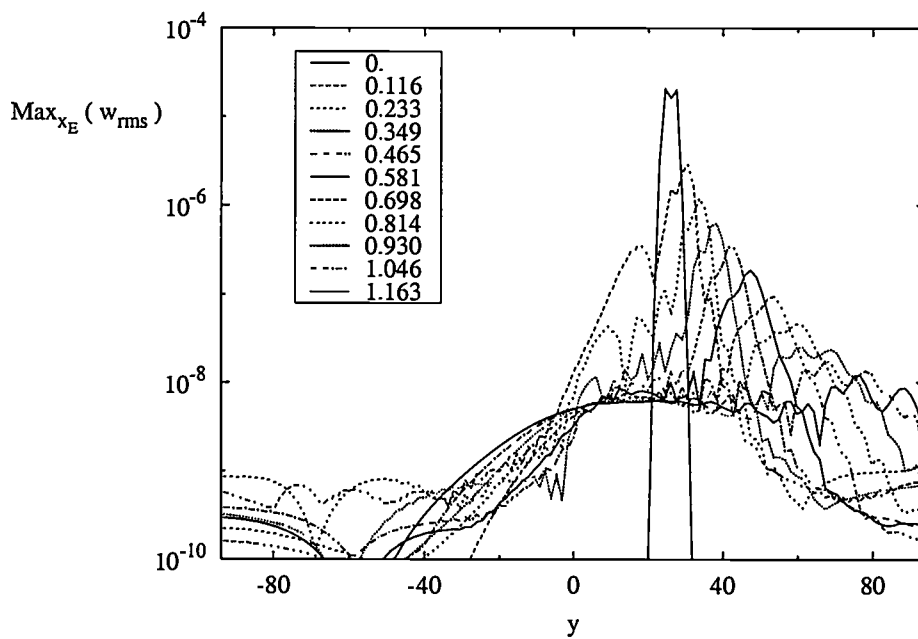


FIG. 2.81 – Maximum sur x_E de la valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse périodique pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

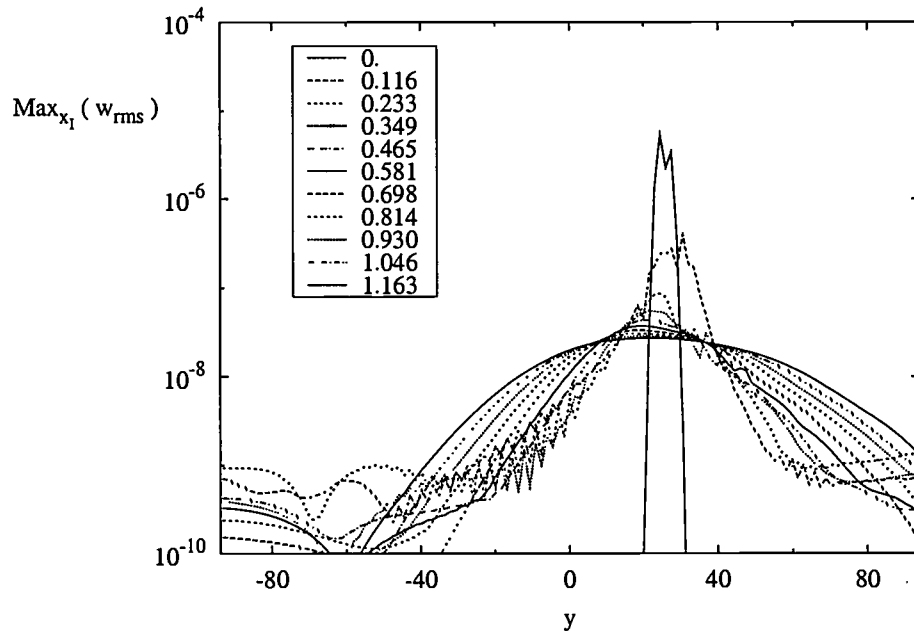


FIG. 2.82 – Maximum sur x_I de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

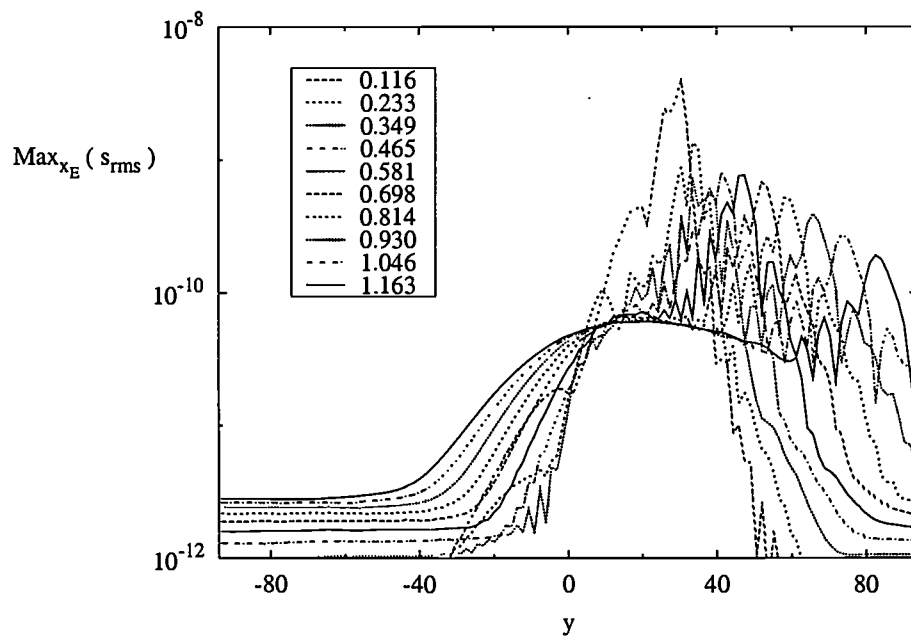


FIG. 2.83 – Maximum sur x_E de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

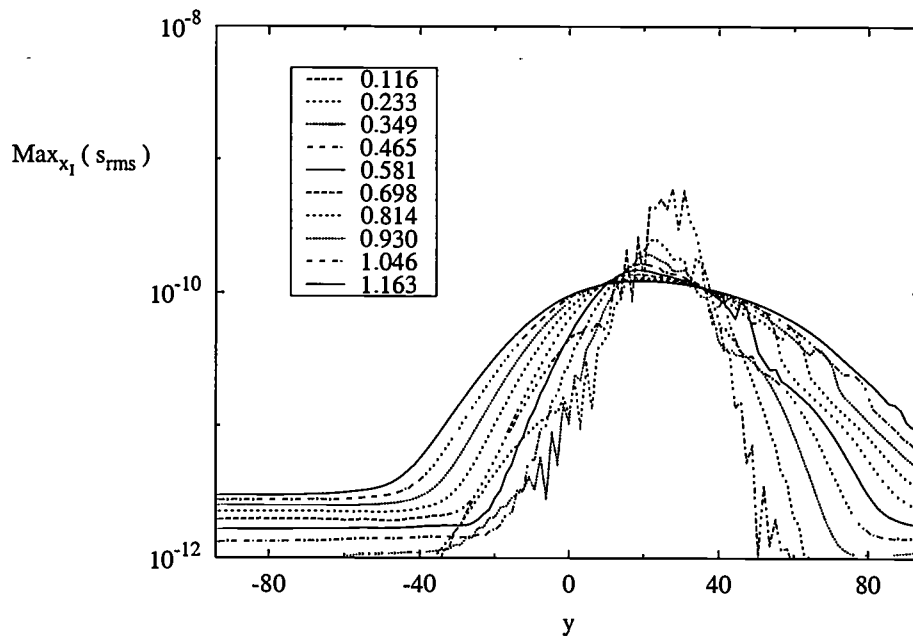


FIG. 2.84 – Maximum sur x_I de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

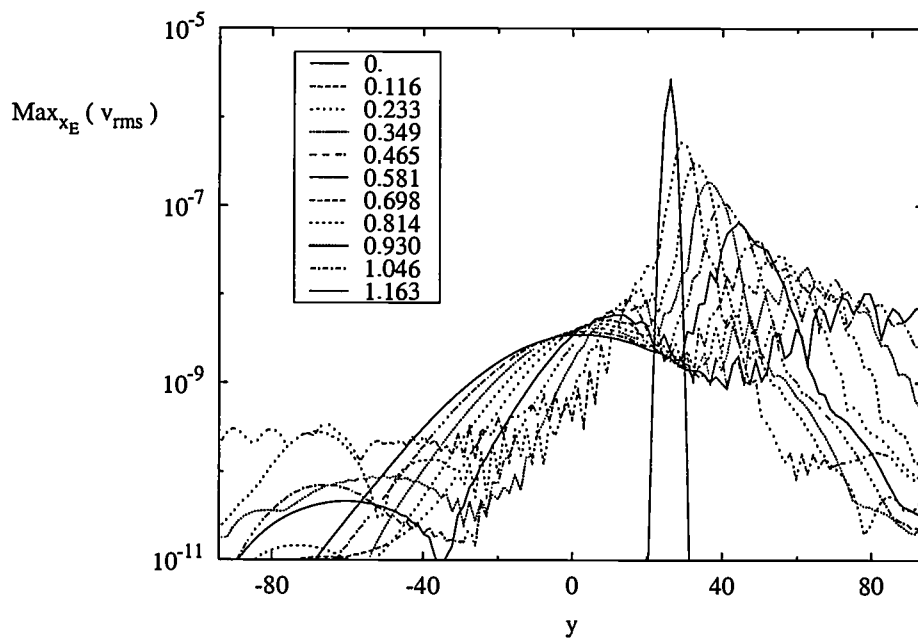


FIG. 2.85 – Maximum sur x_E de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

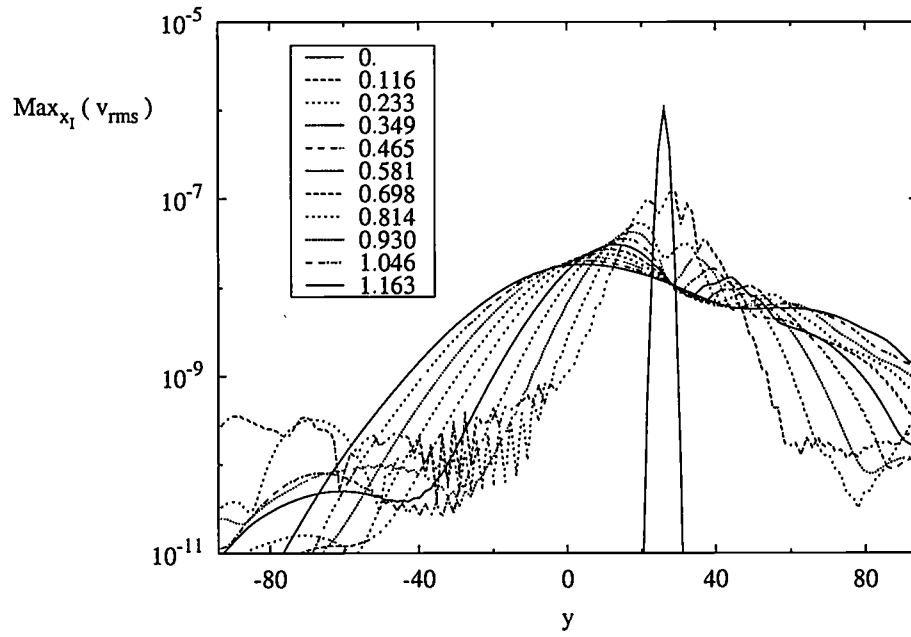


FIG. 2.86 – Maximum sur x_I de la valeur *rms* selon z de la perturbation de vitesse tangentielle pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

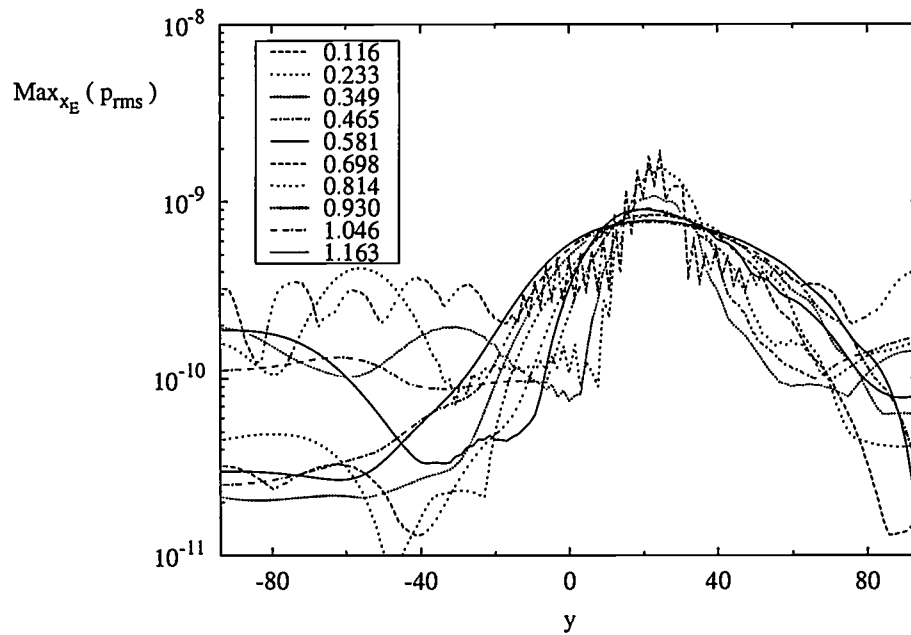


FIG. 2.87 – Maximum sur x_E de la valeur *rms* selon z de la perturbation de pression pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

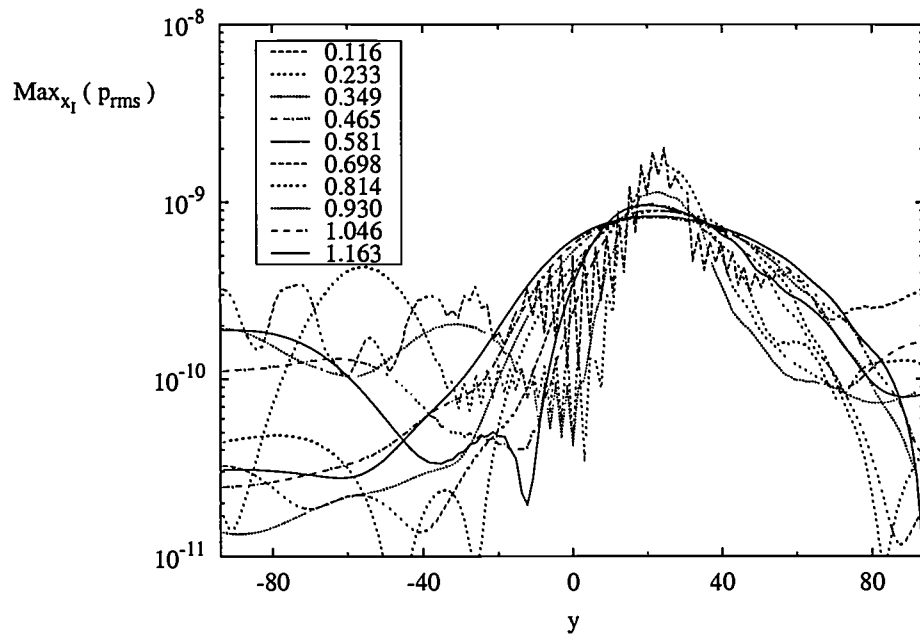


FIG. 2.88 – Maximum sur x_I de la valeur *rms* selon z de la perturbation de pression pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

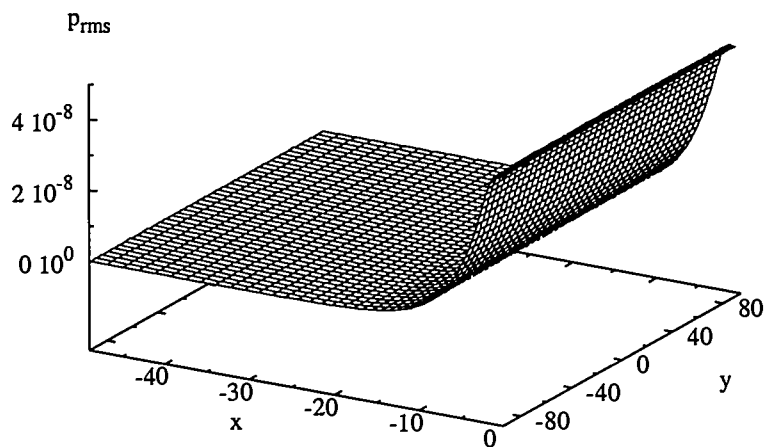


FIG. 2.89 – Valeur *rms* de la perturbation de pression au temps $t = 24.01$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

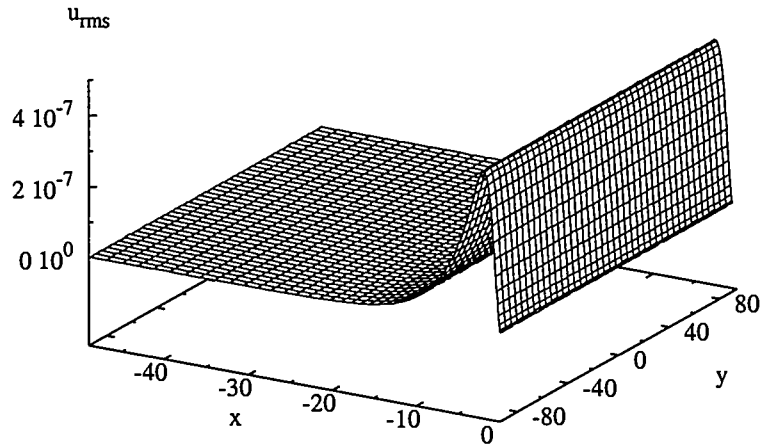


FIG. 2.90 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse normale au temps $t = 24.01$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

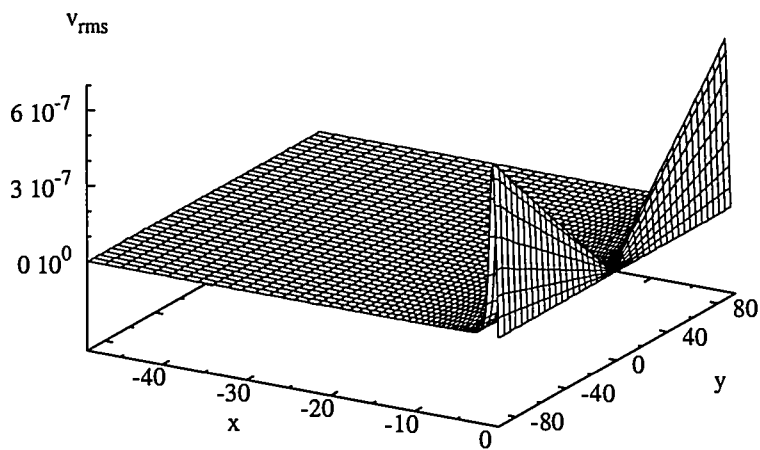


FIG. 2.91 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse tangentielle au temps $t = 24.01$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

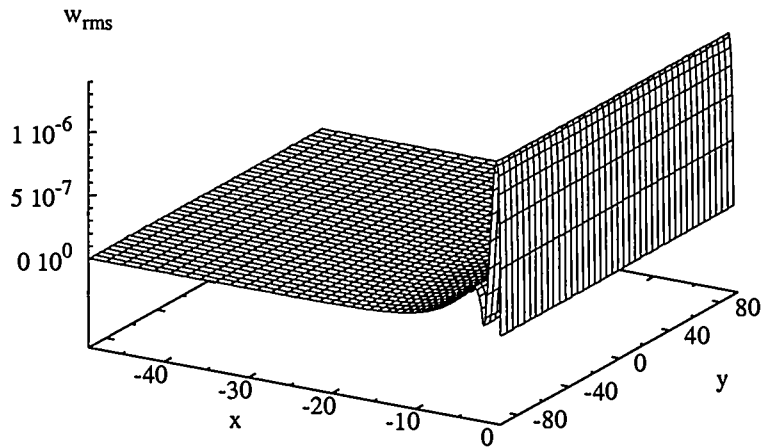


FIG. 2.92 – Valeur *rms* de la perturbation de vitesse périodique au temps $t = 24.01$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

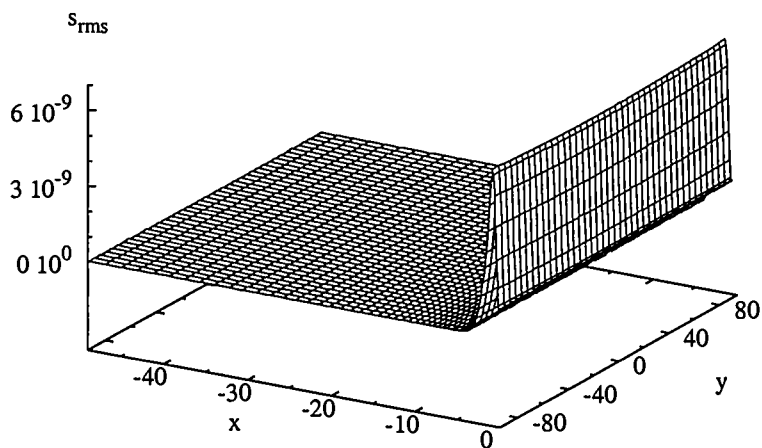


FIG. 2.93 – Valeur *rms* de la perturbation d'entropie au temps $t = 24.01$ pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

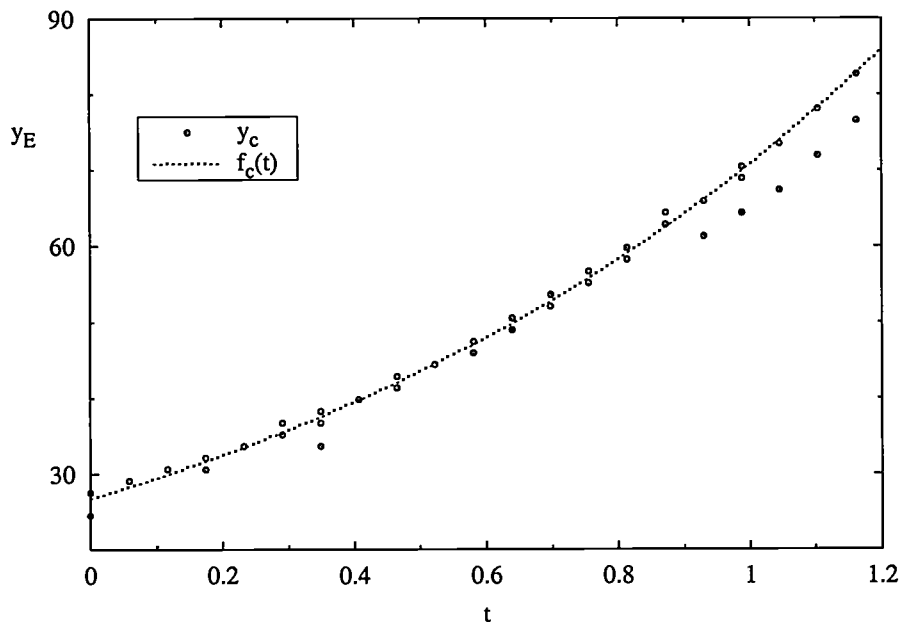


FIG. 2.94 – Vitesse de propagation en sortie de couche limite du maximum selon y et x de la valeur rms selon z de la perturbation initiale pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

sont tracées sur la figure (2.95). Au delà de $y = +70$, la position du minimum de $\frac{\partial f_{rms}}{\partial y}$ est influencée par la sortie. Sur la figure (2.96) nous avons tracé en sus des distances y_{inf} au centre y_C et y_{sup} au centre y_C les droites asymptotes des nuages de points. La droite $f_{sup}(t)$ a pour pente $+26.3$ alors que celle $f_{inf}(t)$ a pour pente -22.2 . L'erreur sur la pente positive est de 4% et sur la pente négative de 1% . Ces résultats sont en bon accord avec ceux trouvés pour la perturbation initialement centrée.

Le mécanisme de propagation de l'instabilité est clairement diffusif. La convection sort la perturbation du domaine. Notons toutefois que nous faisons une simulation temporelle, avec une condition de périodicité dans la direction z . Aussi nous ne pouvons conclure de manière sûre quant au caractère absolu de l'instabilité. Une telle détermination exige une simulation temporelle et spatiale.

Nous complétons ce cas par la présentation rapide des mêmes quantités que dans le cas centré. La plupart des figures sont regroupées dans l'Annexe C. Sur la figure (2.74), nous avons tracé l'énergie cinétique $e(t)$ en fonction du temps. La droite asymptote de son logarithme s'écrit $at + b$ avec $a = 0.3723$ et $b = -39.38$. Le taux d'amplification exponentielle est le même que dans le cas centré. Le paramètre b est légèrement différent. Il est caractéristique du contenu fréquentiel de la perturbation initiale et de la phase transitoire d'établissement des modes propres.

Sur les figures (2.97) et (2.98), nous traçons les normes carrées des différentes

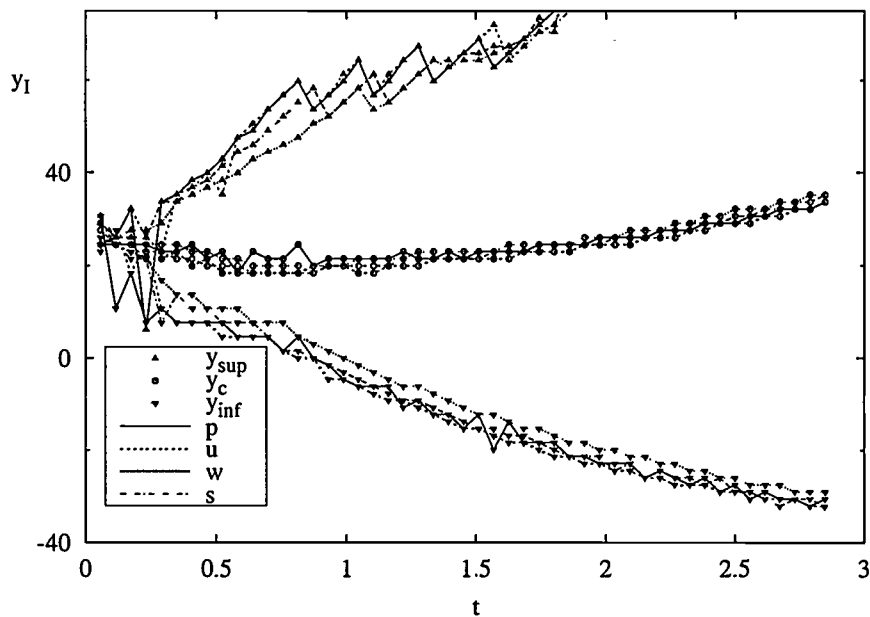


FIG. 2.95 – Position des coordonnées y_{inf} et y_{sup} de la perturbation à l'intérieur de la couche limite pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

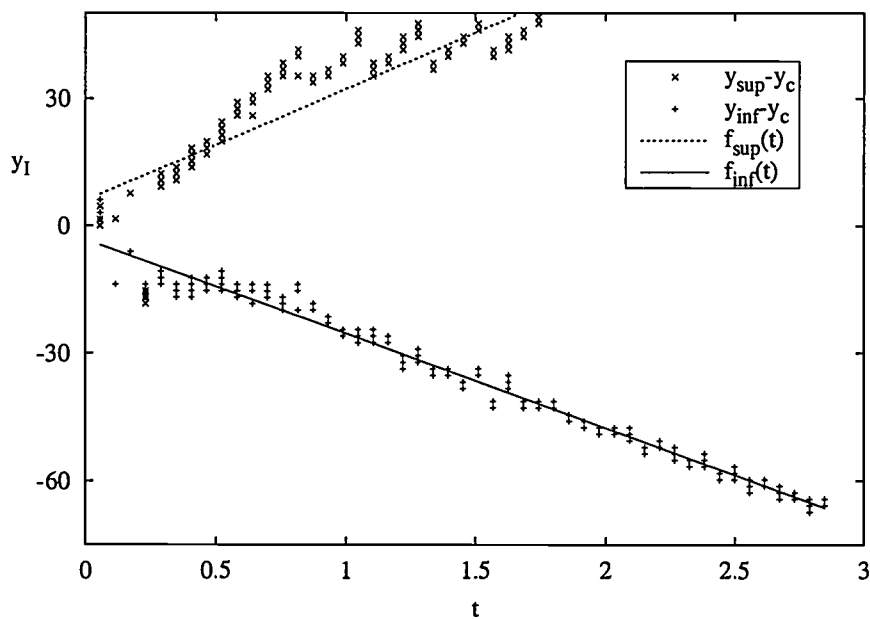


FIG. 2.96 – Vitesse de propagation à l'intérieur de la couche limite de la perturbation initiale pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

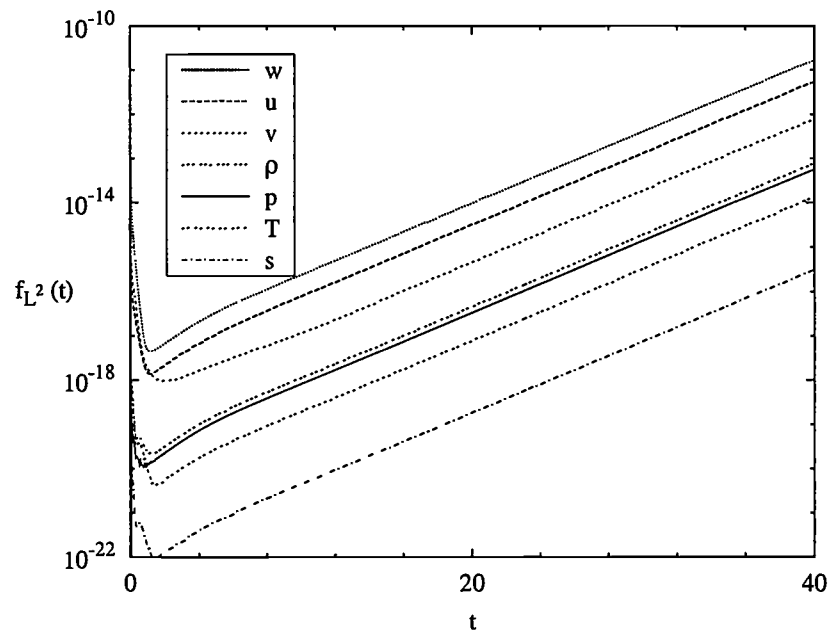


FIG. 2.97 – Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

variables. Hormis un temps d'établissement plus long, avant la croissance à un taux exponentiel constant, le comportement est identique au cas centré. Cet établissement plus long est particulièrement visible sur l'évolution de la perturbation de vitesse tangentielle. Sur les figures (C.1) à (C.5), nous avons tracé les valeurs *rms* des variables, normalisées par leur valeur en $y = 0$ pour p , u , w et s , et par sa valeur en -70.4 pour v . Toutes les variables ont une intensité plus élevée pour les y positifs que pour les y négatifs. Rappelons que la perturbation initiale est située en y positif. La différence entre les instants $t = 12.03$ et $t = 24.01$ est plus sensible que dans le cas centré. Le décentrement de la perturbation initiale double approximativement le temps d'établissement.

Sur les figures (C.6) à (C.15), nous avons tracé les normes carrées intégrées des différents modes de Fourier pour chaque variable. Les différences par rapport au cas centré ne se retrouvent que dans le mode fondamental et aux temps $t < 15$. Au moment où le mode constant et le second harmonique commencent à croître, la perturbation est complètement établie. Les perturbations de vitesse et de pression possèdent les symétries de Görtler-Hämmerlin. Le développement non linéaire est donc identique dans les cas centré et décentré. Nous avons donc arrêté la simulation au temps $t = 40$.

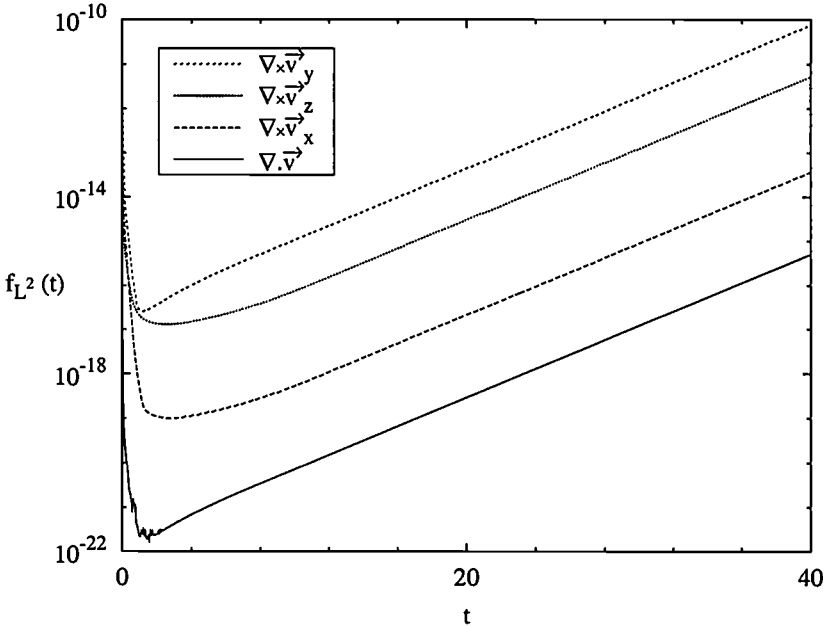


FIG. 2.98 – Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

Conclusions et Perspectives

Nous avons développé un outil de simulation numérique directe nous permettant d'étudier la stabilité d'une ligne d'arrêt compressible tridimensionnelle. En particulier, nous avons choisi des conditions limites valables aussi bien pour l'obtention d'un champ de base, que pour la simulation temporelle de perturbations superposées à ce champ de base. Nous avons aussi introduit dans l'outil de simulation un schéma d'intégration temporelle plus précis et d'efficacité plus élevée que celui précédemment à disposition.

À l'aide d'un développement en nombre de Mach et de la solution connue du cas incompressible visqueux, nous avons obtenu une solution initiale du champ de base. Nous l'avons utilisé pour obtenir un champ de base convergé pour un mur adiabatique comme pour un mur isotherme. Nous avons ensuite soumis ces deux champs de base à des perturbations de type bruit blanc en vortacité pure et en entropie pure, situées dans la direction normale dans la couche limite et dans la direction tangentielle au-dessus de la ligne d'arrêt ou décentrées. Toutes les simulations ont été conduites à un nombre de Reynolds supérieur au nombre de Reynolds critique du cas incompressible.

Quelle que soit la perturbation et la condition limite thermique au mur, l'énergie de la perturbation croît. En outre après un régime transitoire, les modes de Görtler et Hämmerlin pour les vitesses et la pression sont établis comme dans le cas incompressible. Ceci concerne aussi bien le mode fondamental que le premier harmonique. La dépendance tangentielle de la perturbation d'entropie n'est en revanche pas clairement identifiée. Le seul point sûr est qu'elle dépend de la coordonnée tangentielle. Il apparaît que le déclenchement de l'instabilité est causé par la partie de la perturbation située très proche du mur ($x \in [-\delta; 0]$), alors que la couche limite à 99% dans la direction z s'étend jusqu'à $x = -3.06\delta$. Si la perturbation atteint cette zone, et si elle a un contenu fréquentiel adéquat (ce qui est nécessairement satisfait avec un bruit blanc), l'instabilité sera déclenchée, que la perturbation soit située initialement au dessus du point d'arrêt ou non, et qu'elle soit initialement en entropie pure ou en vortacité pure. Dans cette zone active, la propagation de la perturbation initiale fait intervenir un mécanisme diffusif. Hors de la zone active, la propagation se fait principalement par convection. Après un régime transitoire, la perturbation est dominée par les modes de vortacité, que la perturbation initiale soit en vortacité pure

ou en entropie pure. Les modes de vorticité et d'entropie sont couplés.   condition limite égale, l'état atteint après un régime transitoire est indépendant de la perturbation initiale. Les modes de Görtler et Hämmerlin, principalement en vorticité, sont donc une caractéristique forte de l'instabilité du point d'arrêt tridimensionnel.   champ de base quasi-identique, la condition limite thermique est critique sur le taux d'amplification exponentiel constant, obtenu après le régime transitoire. Le mur isotherme induit un taux d'amplification plus élevé que le mur adiabatique.

Ces éléments nous suggèrent les pistes de recherche suivantes.

Tout d'abord, nous souhaiterions examiner quelques points purement liés à la méthode numérique, afin de quantifier leur influence sur les instabilités observées. L'influence de la condition limite d'entrée, et en particulier de la constante de relaxation apparaissant dans cette condition limite, a pu être étudiée pour le champ de base. Par manque de temps, nous n'avons pas mené d'étude sur son influence sur le champ perturbé. Nous avons choisi sa valeur la plus élevée possible pour maintenir la valeur du champ de base initial. Mais son influence est visible sur le mode constant de la perturbation. Il est sans doute souhaitable de trouver un compromis entre le maintien du champ de base et la diminution des réflexions de la perturbation. Une telle étude pourrait être menée avec un couple nombre de Reynolds / longueur d'onde en z donnant un taux d'amplification élevé afin de développer rapidement le mode constant. Un problème lié aux conditions limites est celui de la taille du domaine de calcul. En effet, des calculs menés avec un très petit domaine (huit fois plus petit dans la direction tangentielle et deux fois plus petit dans la direction normale, la taille de la direction de périodicité restant inchangée) ne nous avait pas permis d'observer une instabilité. Il faudrait conduire des tests sur la taille de domaine optimale et vérifier que nos résultats sont indépendants de la taille du domaine. Le but est d'avoir un petit domaine pour diminuer les temps de calcul, mais suffisamment grand pour diminuer les effets de bord au cœur du domaine. Par ailleurs, le nombre de points dans la direction de périodicité z doit être augmenté pour au moins résoudre le deuxième harmonique et conduire des calculs plus longs (non-linéaires). Il est intéressant de savoir si les dépendances en modes de Görtler et Hämmerlin sont maintenues sur une plus vaste gamme de nombres d'onde dans la direction z .

Dans le cadre d'une étude analytique, et en vue de la déterminer d'un nombre de Reynolds critique dans le régime faiblement compressible, on pourrait utiliser les modes de Görtler et Hämmerlin pour la vitesse et la pression et les formes proposées dans le manuscrit pour la perturbation d'entropie. L'étude doit impérativement envisager les conditions limites thermique et adiabatique au mur. Les tests complémentaires numériques conduits à fort taux d'amplification pourraient confirmer la forme d'entropie à considérer.

Sur un plan moins strictement numérique, il apparaît que, hormis par la possi-

bilité de conditions limites thermiques multiples donnant des taux d'amplification différents, l'influence de la compressibilité n'est pas encore claire. Nous proposons de conduire un test avec même nombre de Reynolds, même taille de domaine (en épaisseur δ), même longueur d'onde adimensionnelle en z et de faire uniquement varier le nombre de Mach. On peut ainsi espérer diminuer les effets numériques et quantifier l'effet de la compressibilité. En particulier il n'est pas clair que les modes de Görtler et Hämmerlin prévalent à nombre de Mach W_∞/a_0 élevé. Un changement de perturbation dominante pourrait grandement influencer sur la valeur du nombre de Reynolds critique dans le domaine significativement compressible.

L'étude de l'influence de la condition limite thermique est également une piste à poursuivre. Nous avons pu montrer qu'une condition limite d'isothermie induit un taux d'amplification plus élevé, alors que le champ de base est quasiment identique à celui du cas adiabatique. Il n'est donc pas clair de combien il faut abaisser la température du mur pour diminuer le taux d'amplification des perturbations, et ce même dans le domaine linéaire. Sur ce point, l'étude de Lasseigne and Jackson dans [LJ92] est informative. Ils étudient le point d'arrêt plan ($W = 0$). Ils autorisent des variations de densité par une différence de température entre l'écoulement libre et la plaque et supposent que les modes propres satisfont les symétries de Görtler et Hämmerlin et décroissent exponentiellement hors de la couche limite. Comme dans le cas incompressible à densité constante, l'écoulement est stable. Mais refroidir la plaque diminue le taux d'amortissement (moins stable) des perturbations de petites longueurs d'onde et augmente (plus stable) celui des perturbations de longueur d'onde modérée. Dans cet exemple, le contenu fréquentiel de la perturbation est critique pour le contrôle de la couche limite.

Le nombre de Reynolds de notre étude est supérieur au nombre de Reynolds critique du régime incompressible. Il est utile d'examiner le comportement à des nombres de Reynolds sous-critiques, et ce avec différents nombres de Mach. Il faut alors tester des perturbations de très faible amplitude du domaine linéaire et des perturbations plus fortes s'il n'y a pas déstabilisation par les très faibles perturbations. Nous pourrions observer une déstabilisation analogue à celle de la rotation solide non visqueuse par la compressibilité. Nous proposons pour cette étude sous critique de limiter l'étude à de petits nombres de Mach afin d'examiner le raccordement avec le comportement incompressible. Le fait d'avoir un outil de simulation numérique directe est pour ces études particulièrement intéressant. Theofilis [The98] note que la tridimensionnalité est critique dans le processus de transition sous critique. Il n'est pas clair qu'à ce régime de nombre de Reynolds les modes les plus instables soient encore des modes de Görtler et Hämmerlin. Les dépendances des modes constants, fondamentaux et des harmoniques doit être examinée.

Une autre méthode de contrôle du taux d'amplification est d'appliquer de la succion au bord d'attaque. Hall et al. notent dans [HMP84] que la succion diminue l'épaisseur de couche limite et de manière plus importante modifie la distribution de

vorticité à l'intérieur de la couche limite. Là encore l'effet n'est pas univoque. Hall et Malik remarquent dans [HM86] que, dans le domaine linéaire, la succion stabilise et le soufflage déstabilise. Le nombre de Reynolds critique linéaire augmente avec la succion, mais la partie de la courbe neutre sujette à une instabilité sous-critique augmente aussi. Donc, si la transition est liée aux perturbations sous-critiques, la succion conduit à un élargissement de la bande des modes non linéairement instables. Les auteurs notent que, par les hypothèses employées, leur discussion ignore le rôle des modes tridimensionnels. Un outil de simulation numérique directe est alors intéressant.

Dans un souci de contrôle, il reste un énorme travail à conduire sur la réceptivité. Notre perturbation initiale est sinusoïdale dans la direction de périodicité et est un bruit blanc dans les deux autres directions. La perturbation initiale est située dans la zone active de déclenchement de l'instabilité. Dans la réalité, la perturbation est initialement à l'extérieur de la couche limite. Les perturbations entropiques et vorticales sont convectées avec le champ de base alors que les perturbations acoustiques sont propagées à vitesse acoustique par rapport au champ de base jusqu'à la zone active. Les perturbations acoustiques mettent un temps beaucoup plus court que les perturbations de vorticité et d'entropie pour atteindre la couche limite. Leur amplitude est a priori plus élevée à leur arrivée. Sur le strict plan de l'amplitude de perturbation, ces perturbations acoustiques sont donc potentiellement plus dangereuses pour la déstabilisation. En revanche, les perturbations acoustiques ont dans le domaine faiblement compressible des longueurs d'onde naturelles beaucoup plus grandes que les perturbations vorticales et entropiques. Par la disparité d'échelles, le couplage par le champ de base non-uniforme entre modes acoustiques d'une part et modes inertiels d'autre part n'est donc pas clair. De plus, au cours du transport des perturbations de toute nature, des longueurs d'onde privilégiées sont sélectionnées. Leur adéquation avec les longueurs d'onde préférentielles de l'instabilité détermine le déclenchement ou non de l'instabilité. Dans une première étape vers une étude de réceptivité, il pourrait être judicieux d'étudier la réponse de l'écoulement à des perturbations de fréquence plus sélectionnées qu'un bruit blanc, mais toujours initialement situées dans la zone active.

Annexe A

Perturbation de vorticité initialement centrée sur un mur adiabatique

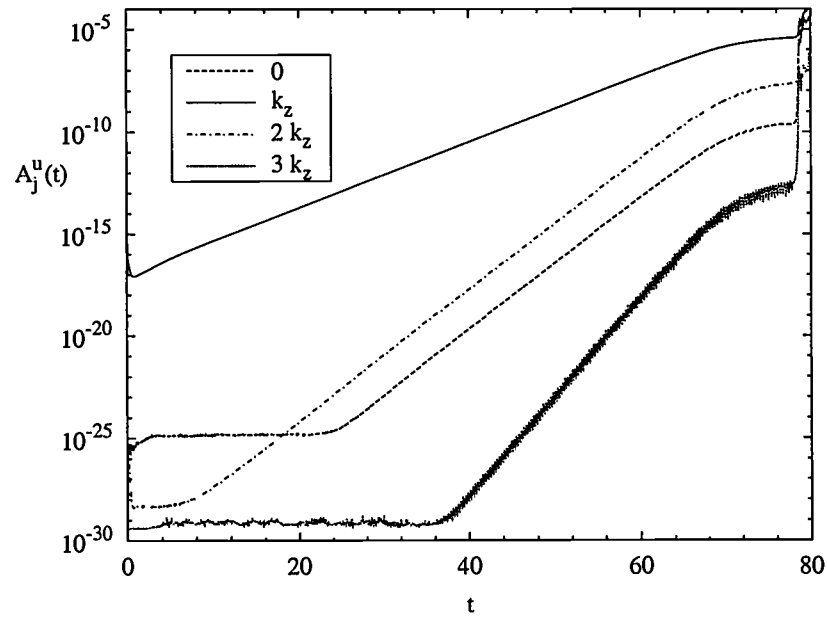


FIG. A.1 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

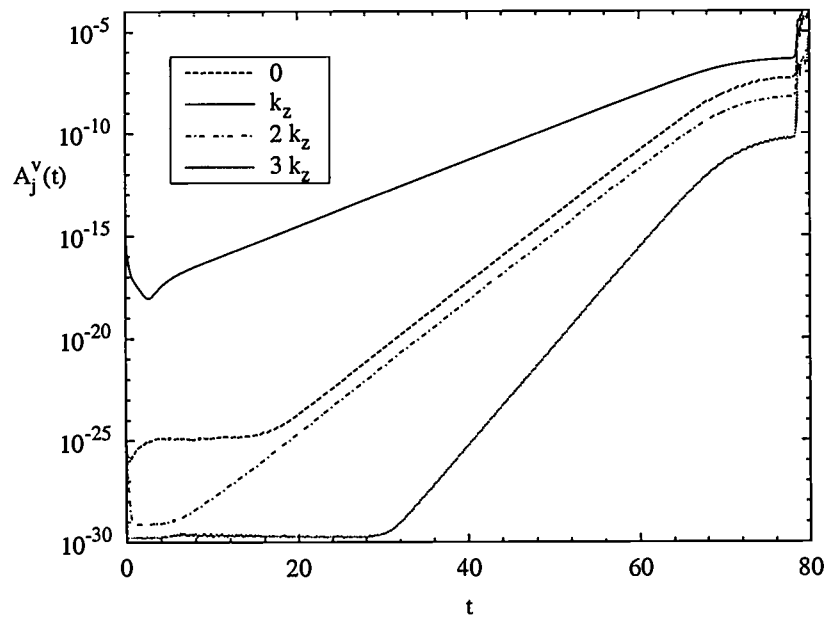


FIG. A.2 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

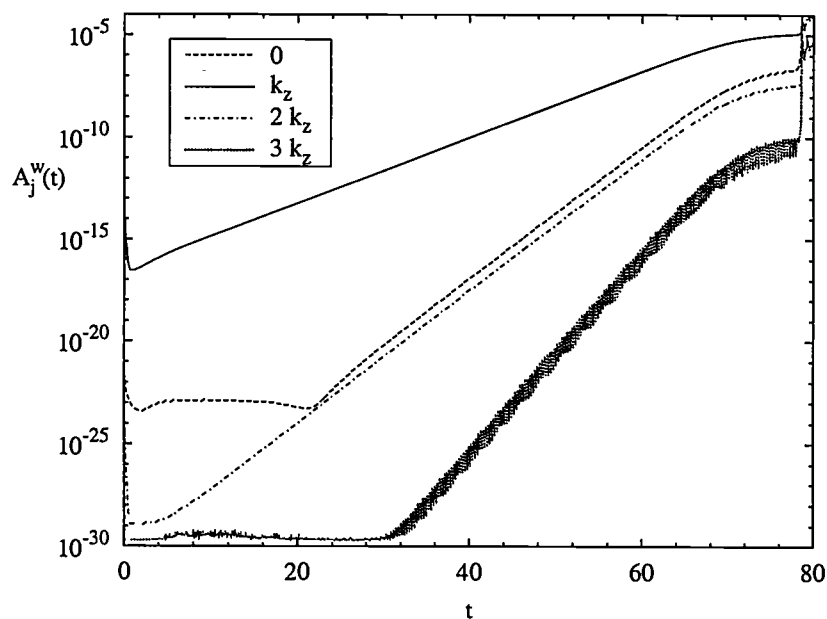


FIG. A.3 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

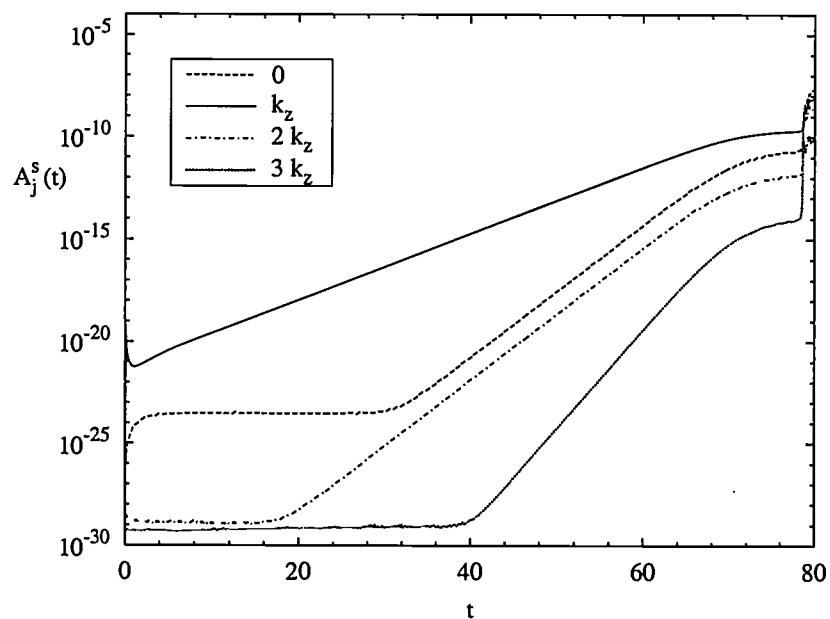


FIG. A.4 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

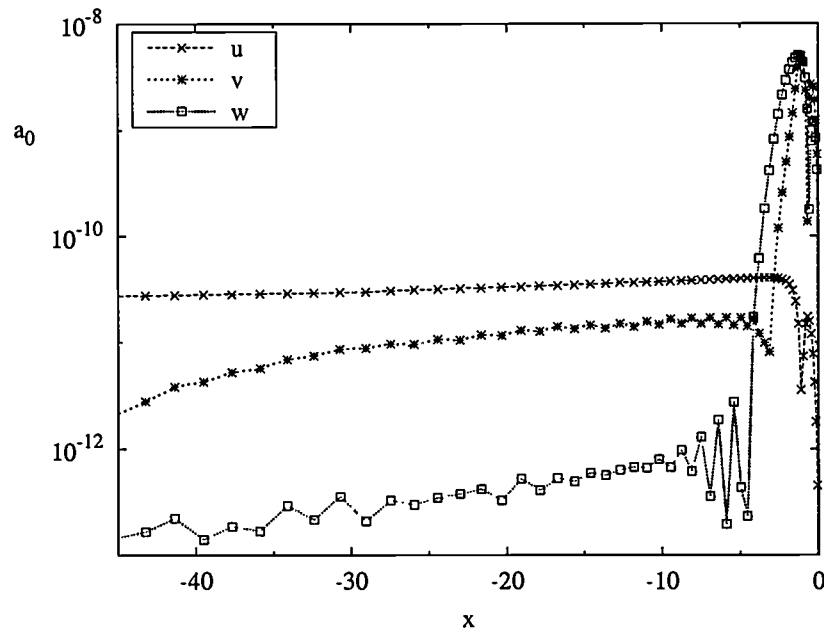


FIG. A.5 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode constant des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

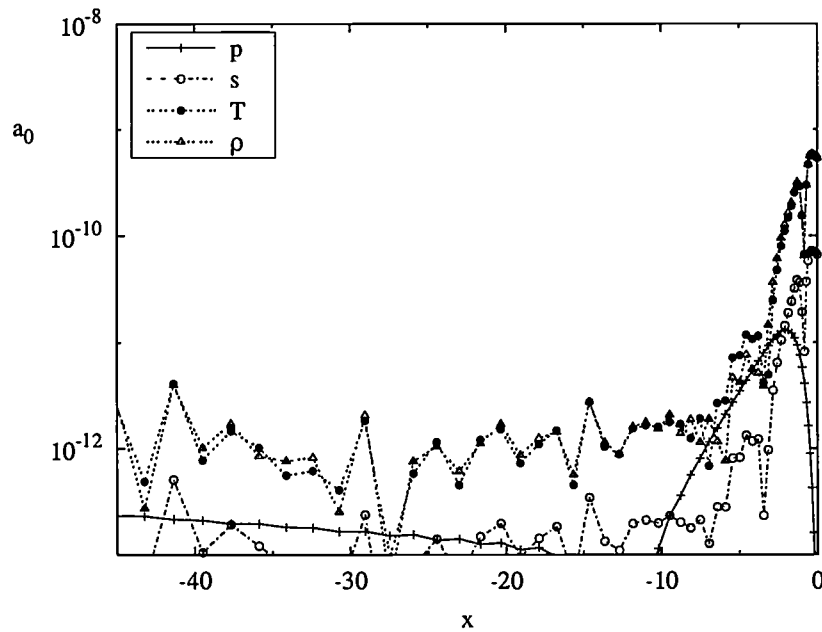


FIG. A.6 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

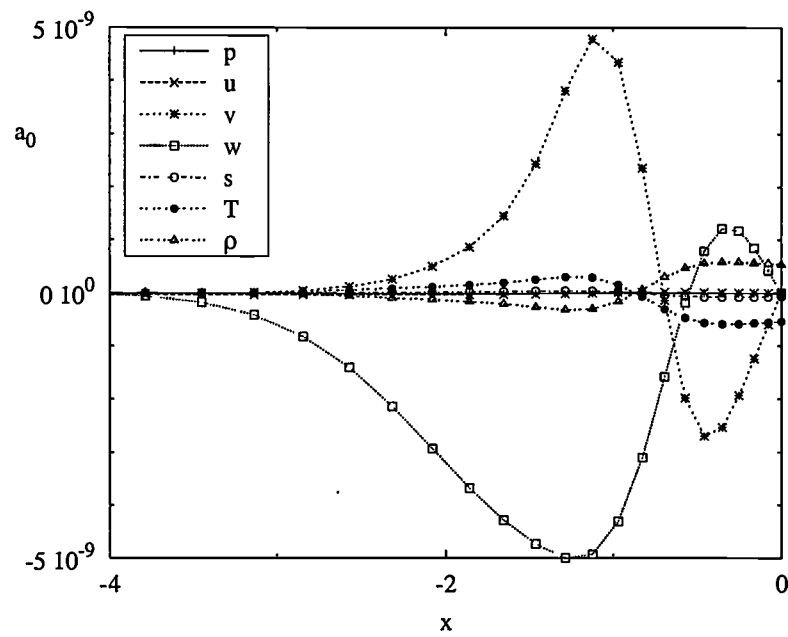


FIG. A.7 – Amplitudes du mode constant de toutes les perturbations à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

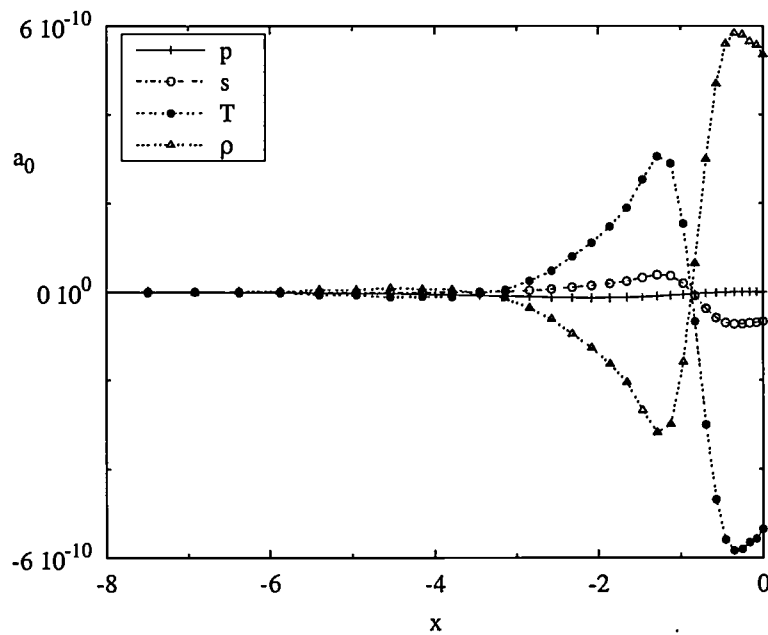


FIG. A.8 – Amplitudes du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

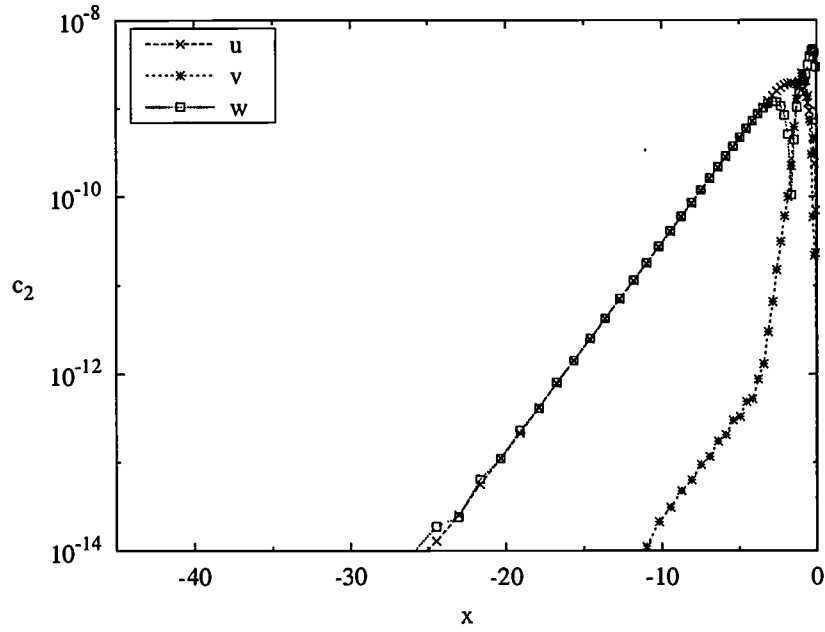


FIG. A.9 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

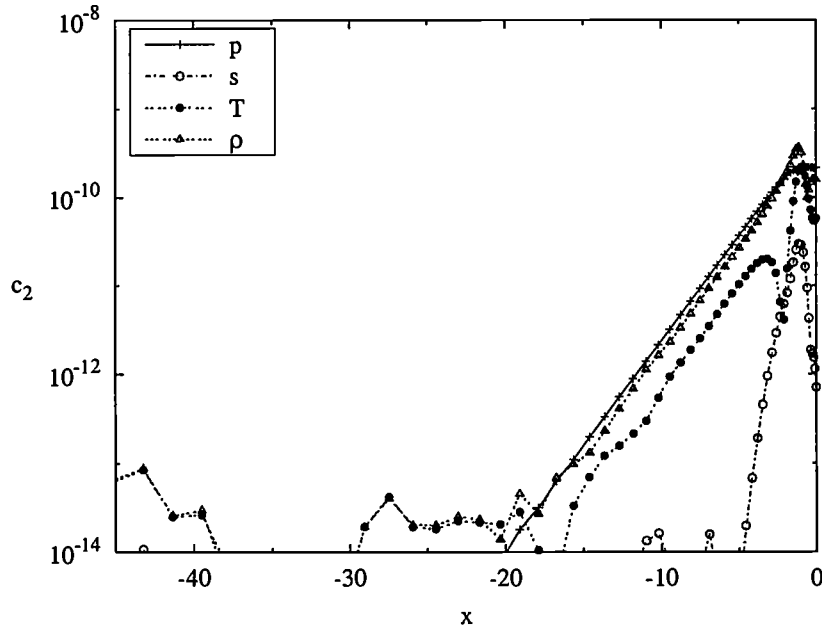


FIG. A.10 – Amplitudes, en échelle logarithmique, du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

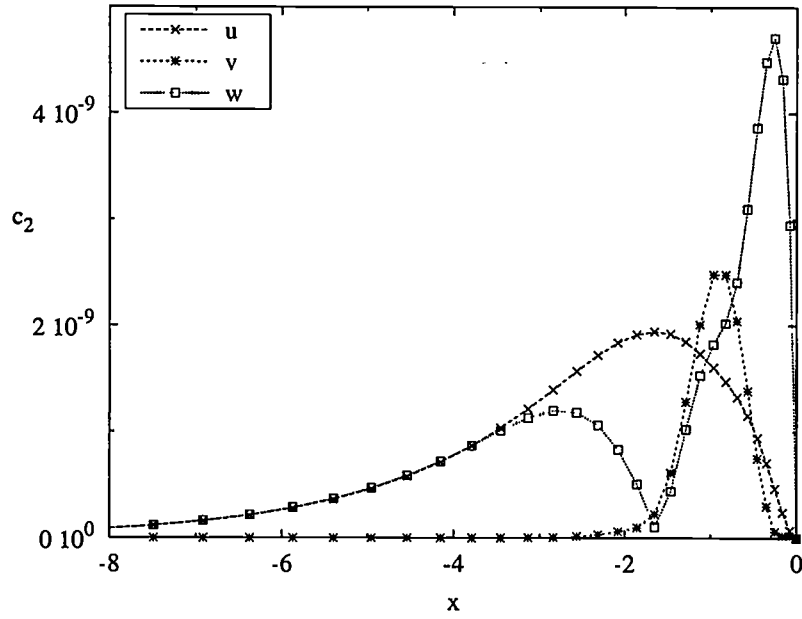


FIG. A.11 – Amplitudes du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

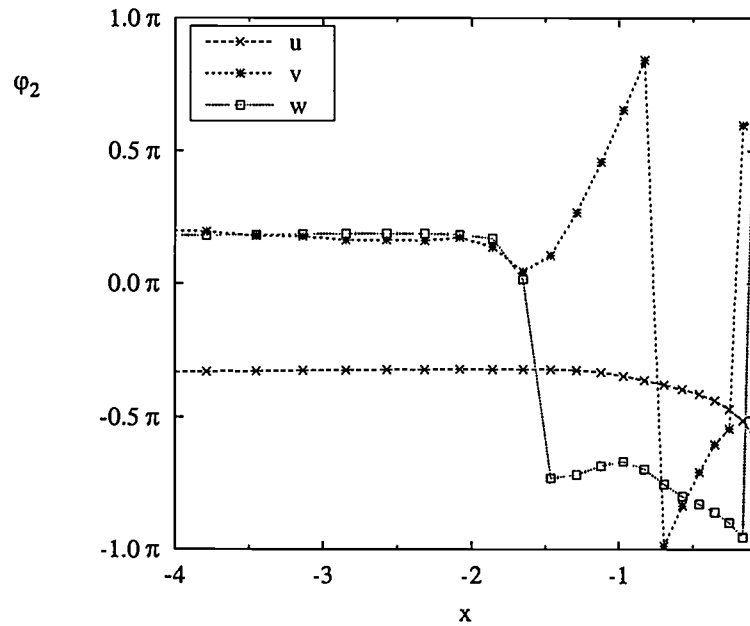


FIG. A.12 – Phases du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

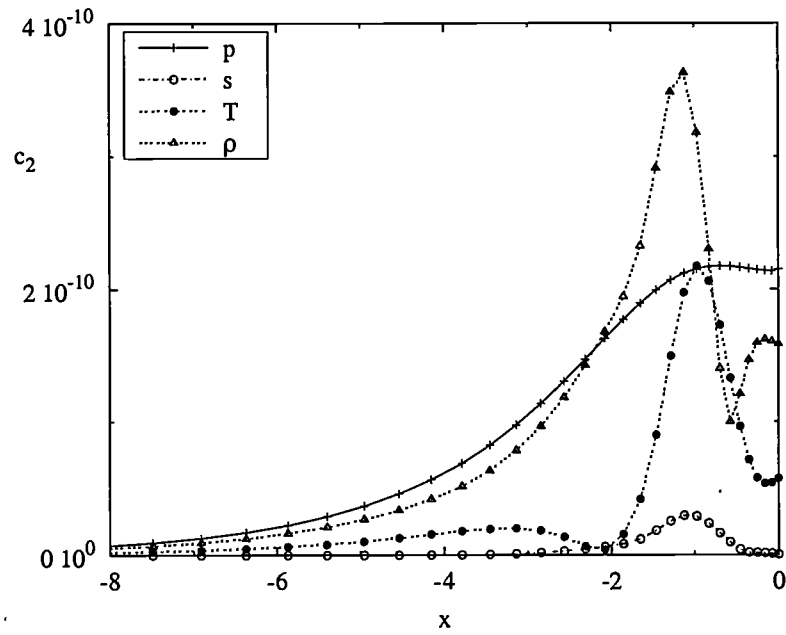


FIG. A.13 – Amplitudes du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

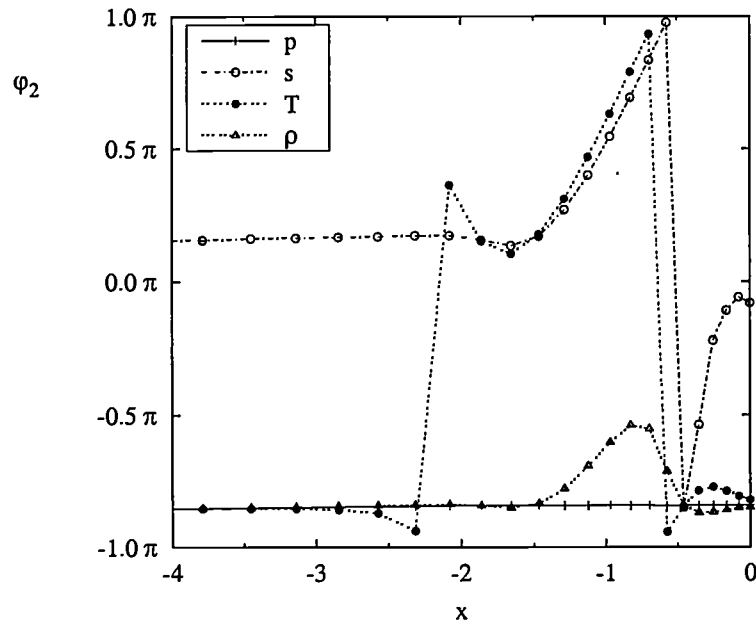


FIG. A.14 – Phases du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur adiabatique

Annexe B

Perturbation de vorticité initialement centrée sur un mur isotherme

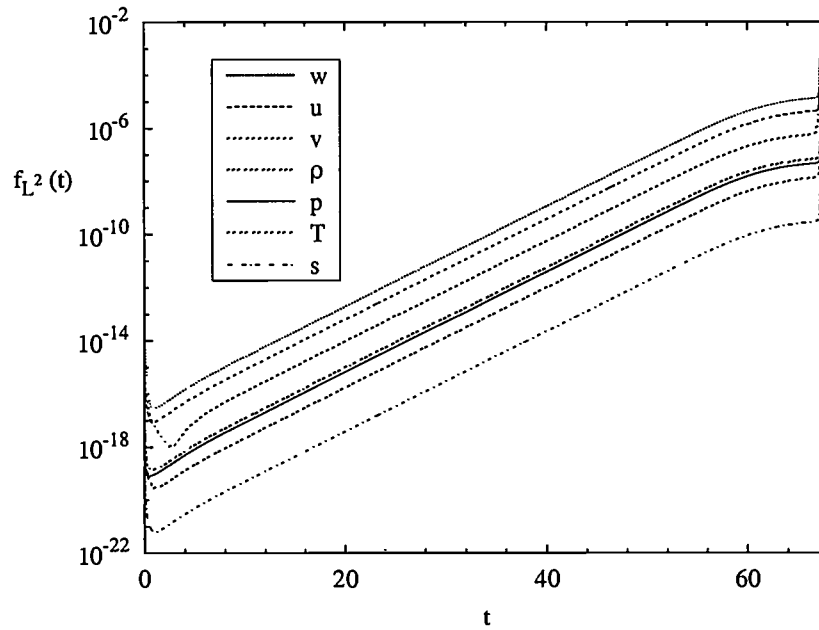


FIG. B.1 – Normes carrées des variables aérodynamiques et thermodynamiques pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

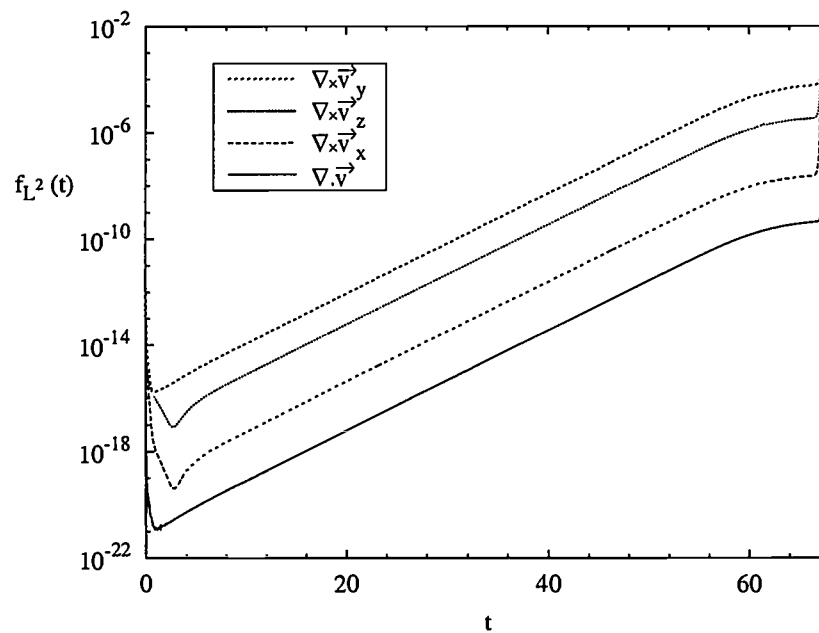


FIG. B.2 – Normes carrées des divergence et vorticité de la perturbation de vitesse pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

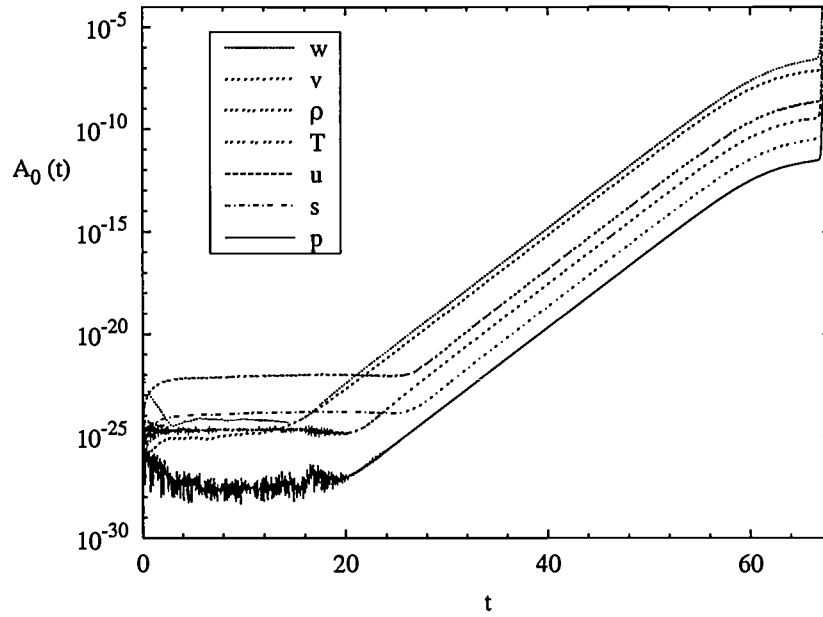


FIG. B.3 – Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur isotherme

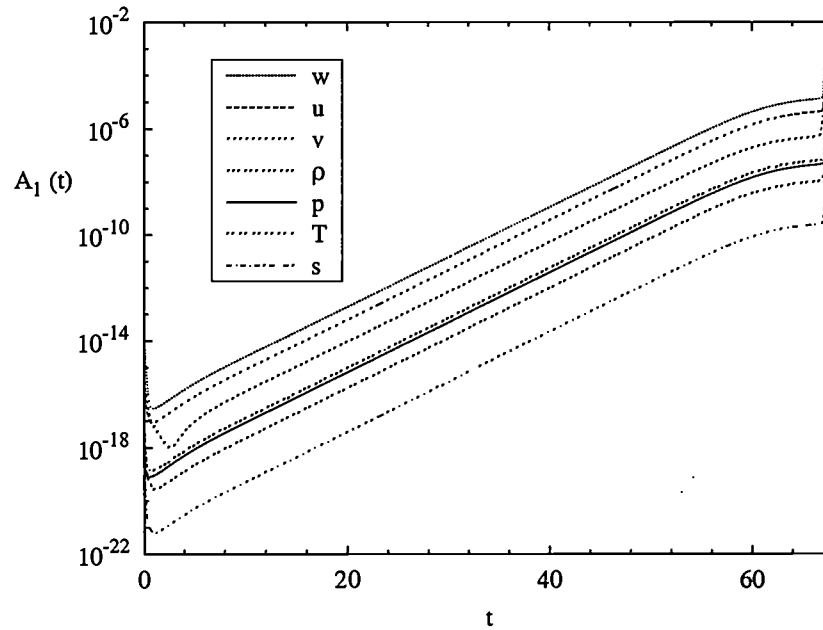


FIG. B.4 – Normes carr ees du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur isotherme

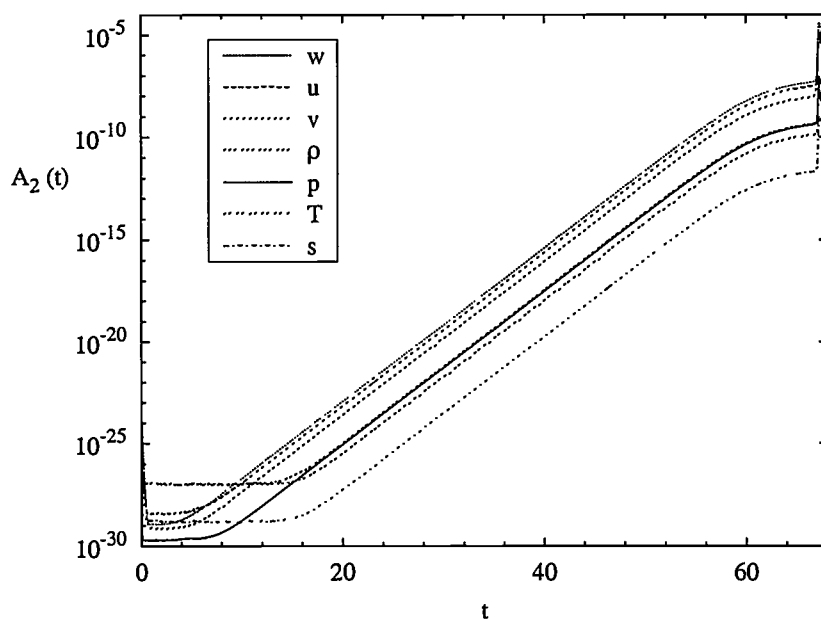


FIG. B.5 – Normes carrées du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur isotherme

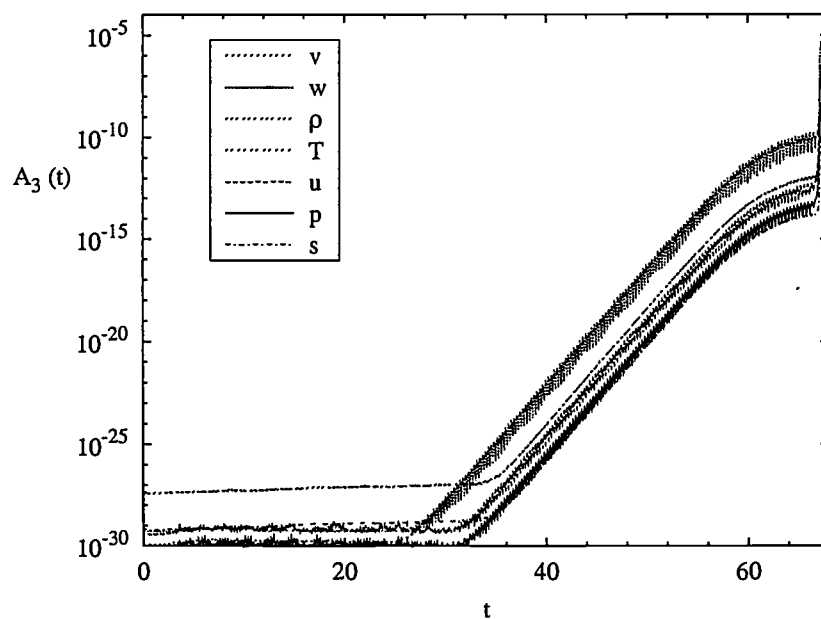


FIG. B.6 – Normes carr ees du deuxi eme harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation de vorticit e initialement centr ee et un mur isotherme

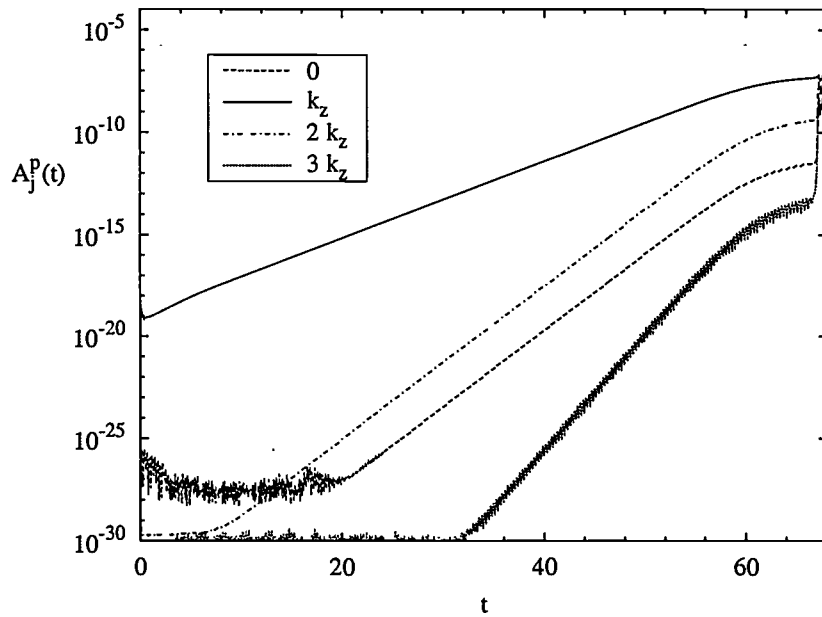


FIG. B.7 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de pression, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

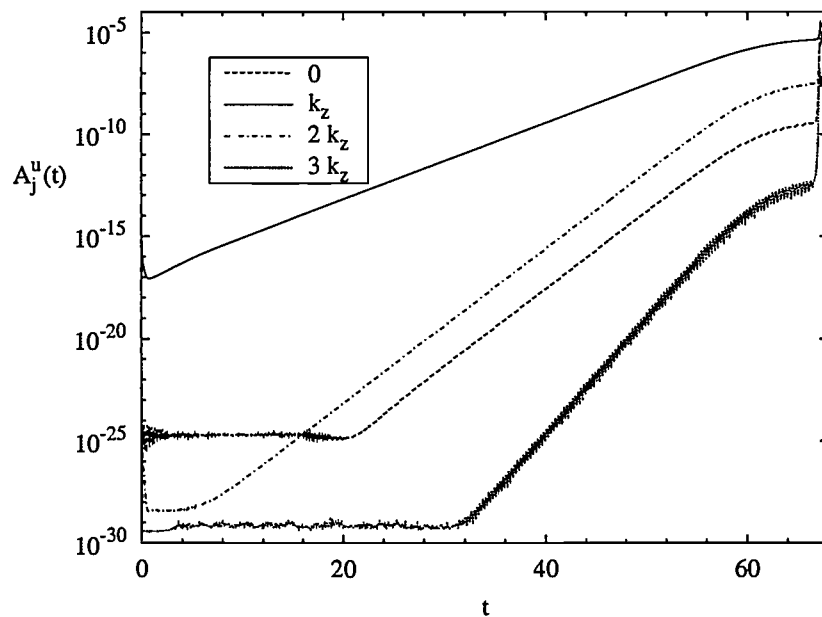


FIG. B.8 – Normes carrées des diff erents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

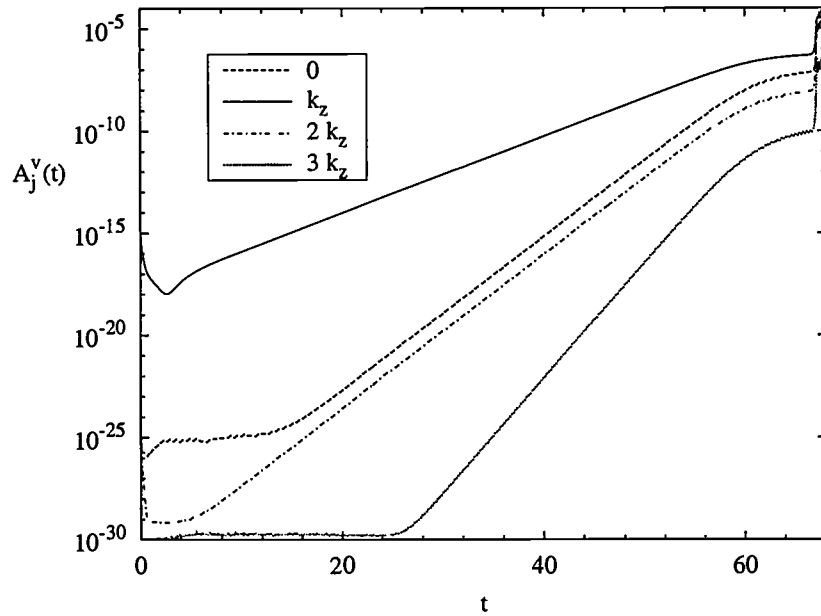


FIG. B.9 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

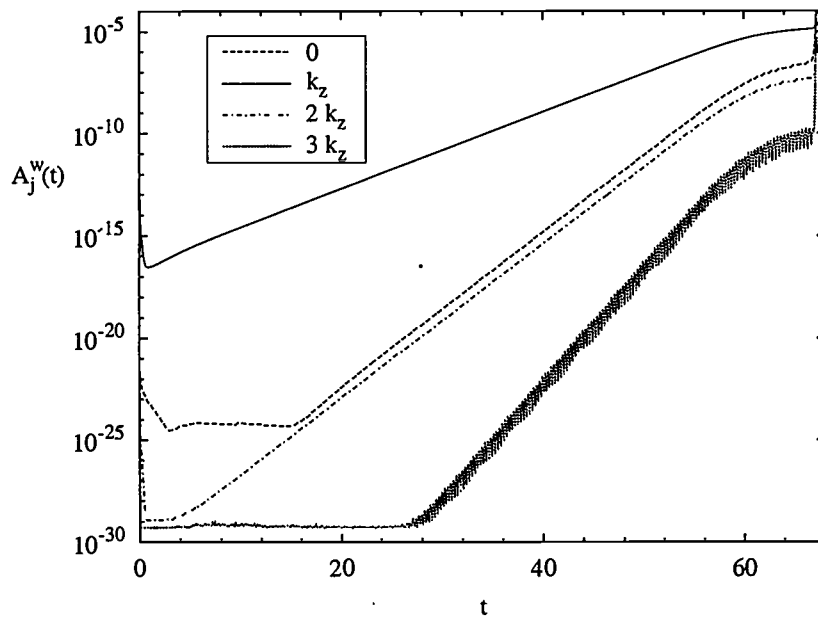


FIG. B.10 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

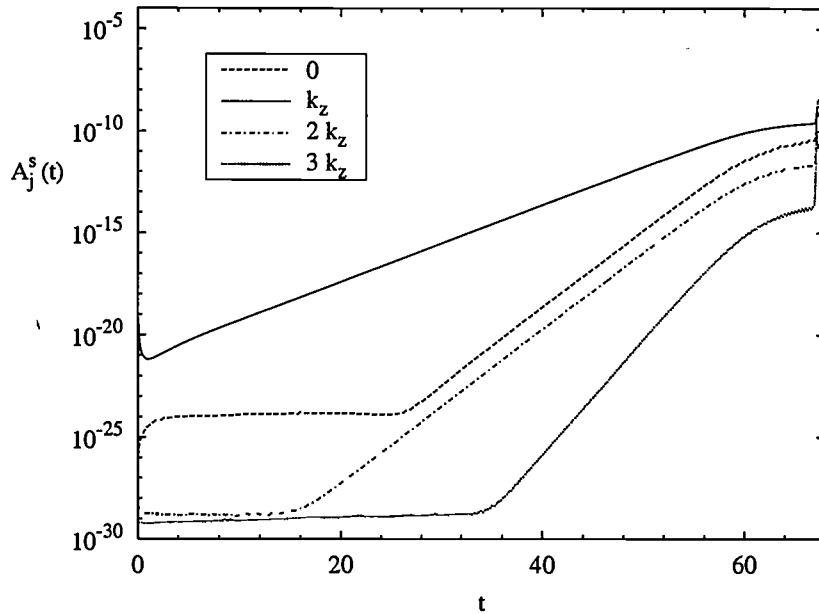


FIG. B.11 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

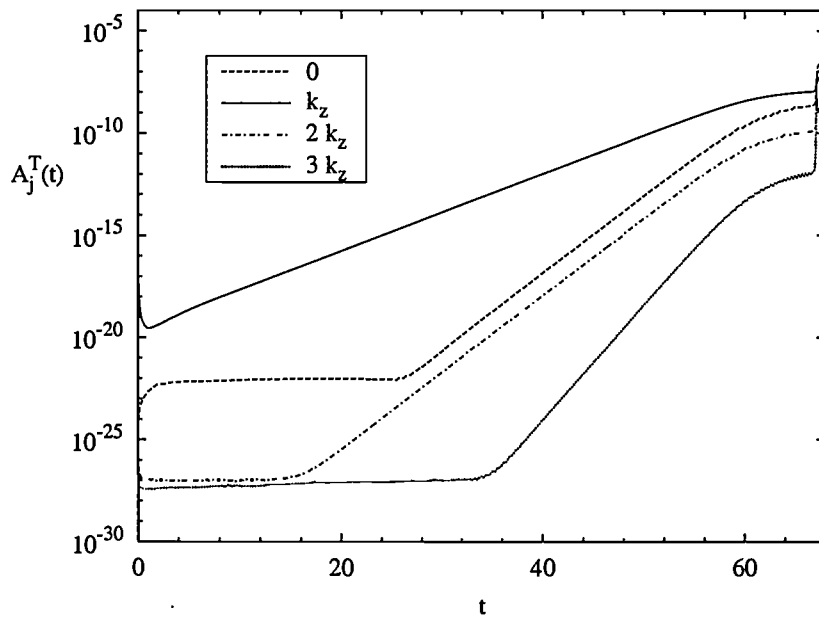


FIG. B.12 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de température, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

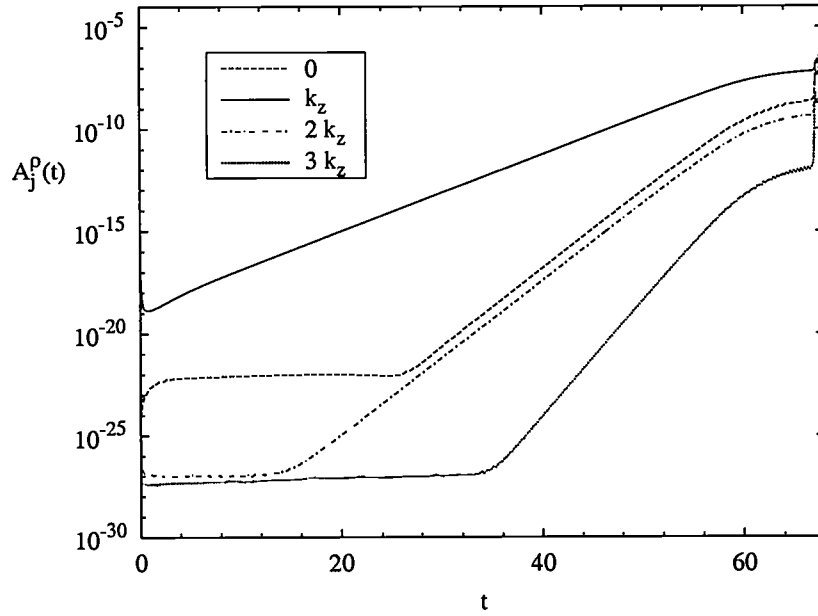


FIG. B.13 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de masse volumique, pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

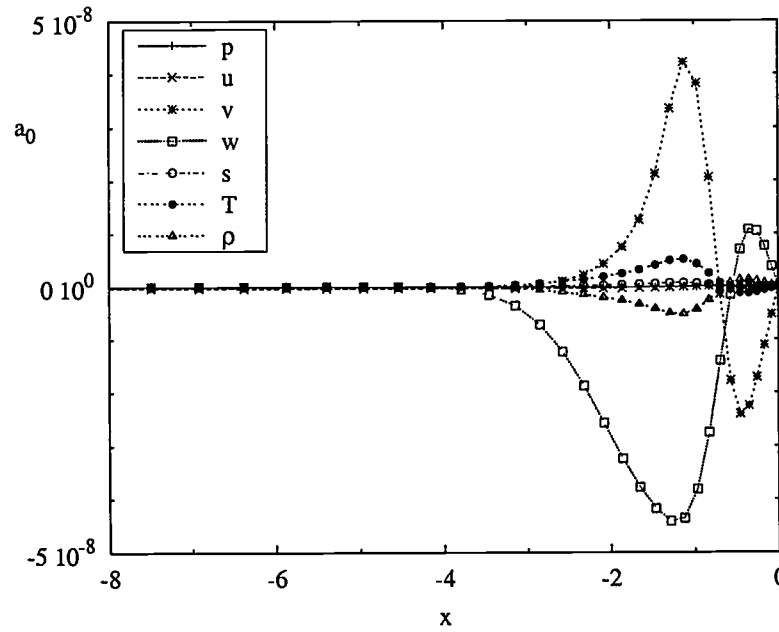


FIG. B.14 – Amplitudes du mode constant de toutes les perturbations à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

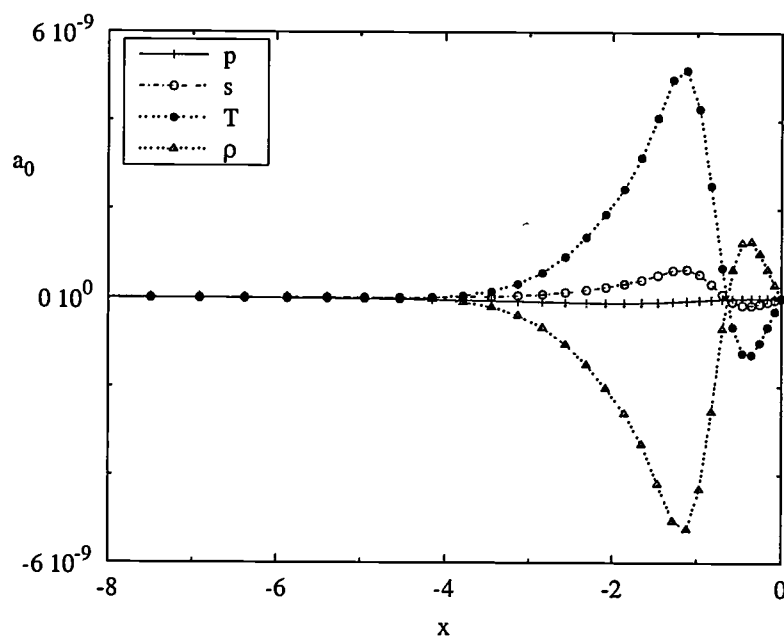


FIG. B.15 – Amplitudes du mode constant des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

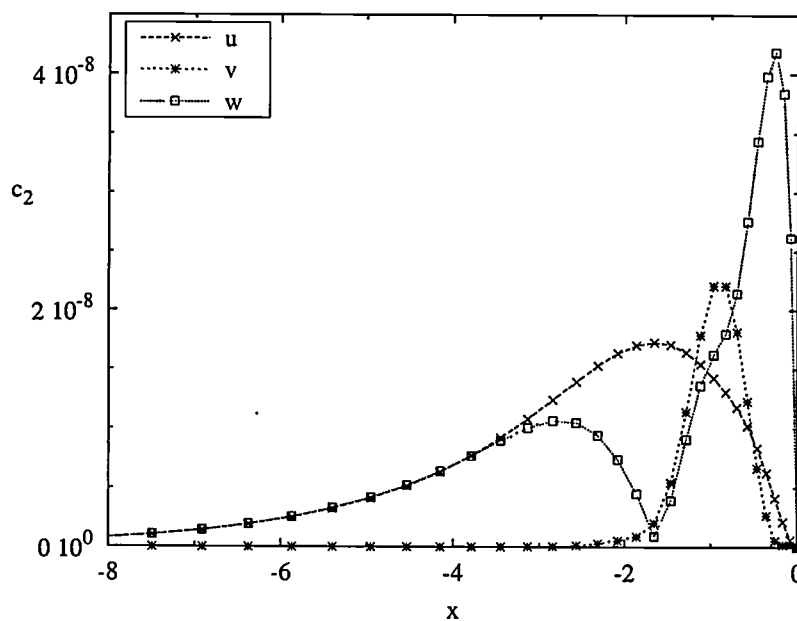


FIG. B.16 – Amplitudes du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

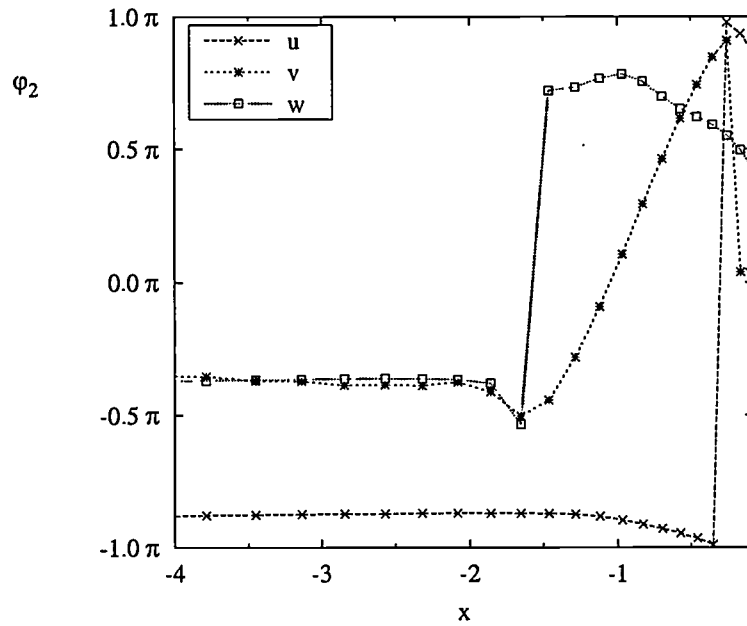


FIG. B.17 – Phases du premier harmonique des perturbations de vitesse à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

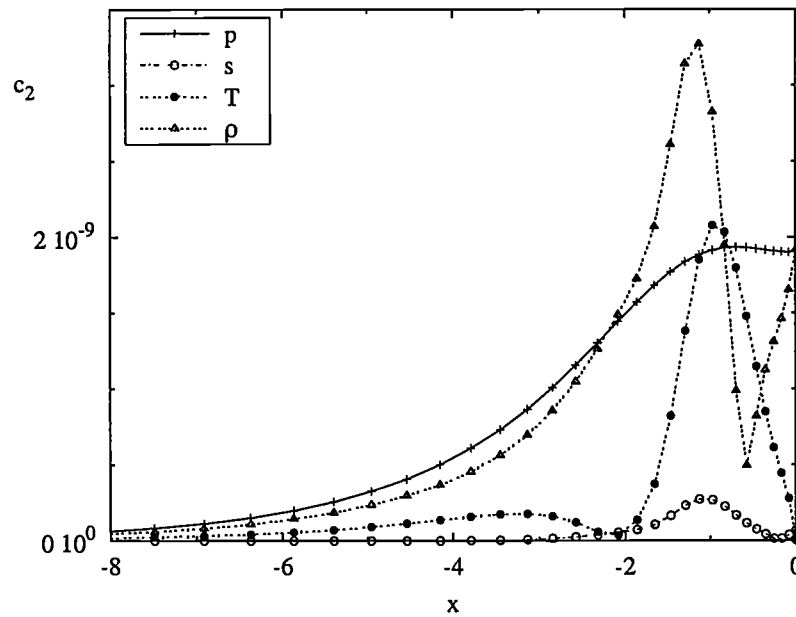


FIG. B.18 – Amplitudes du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

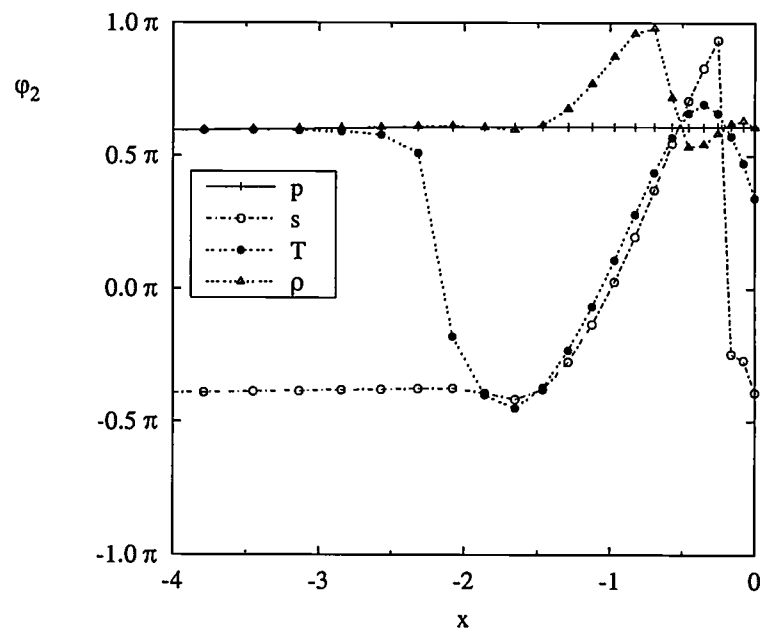


FIG. B.19 – Phases du premier harmonique des perturbations thermodynamiques à $y = -56.6\delta$ et $t = 35.98$ pour une perturbation de vorticité initialement centrée et un mur isotherme

Annexe C

Perturbation de vorticité initialement décentrée sur un mur adiabatique

264 ANNEXE C. PERTURBATION VORTICALE DÉCENTRÉE ADIABATIQUE

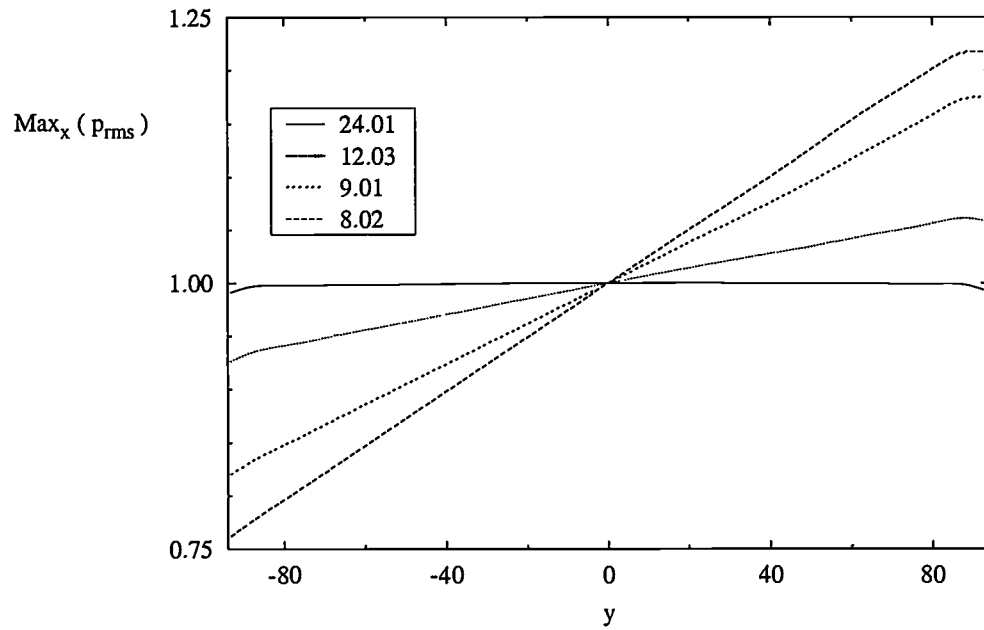


FIG. C.1 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de pression à différents instants pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

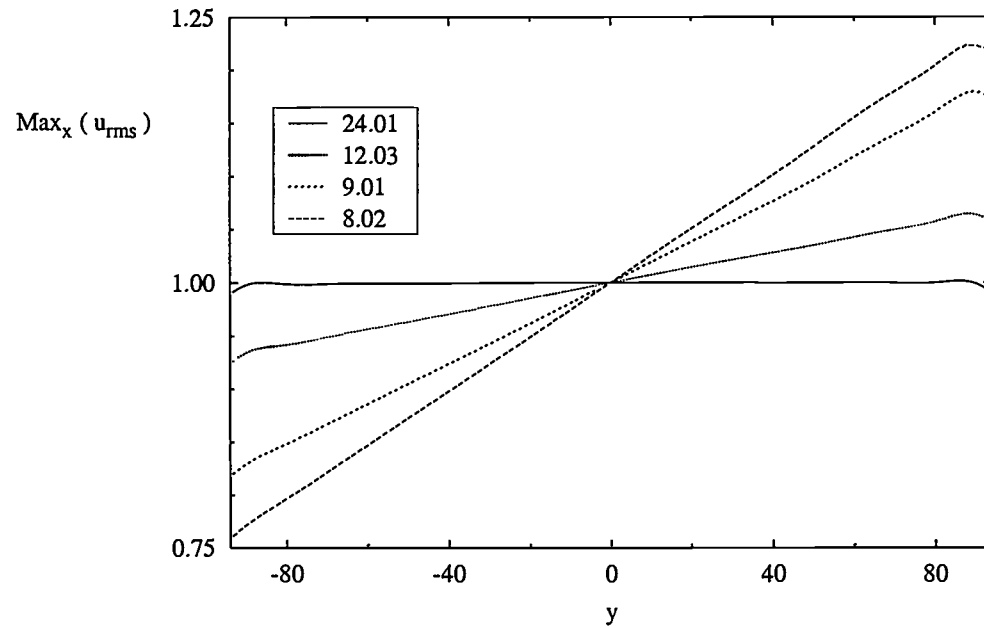


FIG. C.2 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse normale à différents instants pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

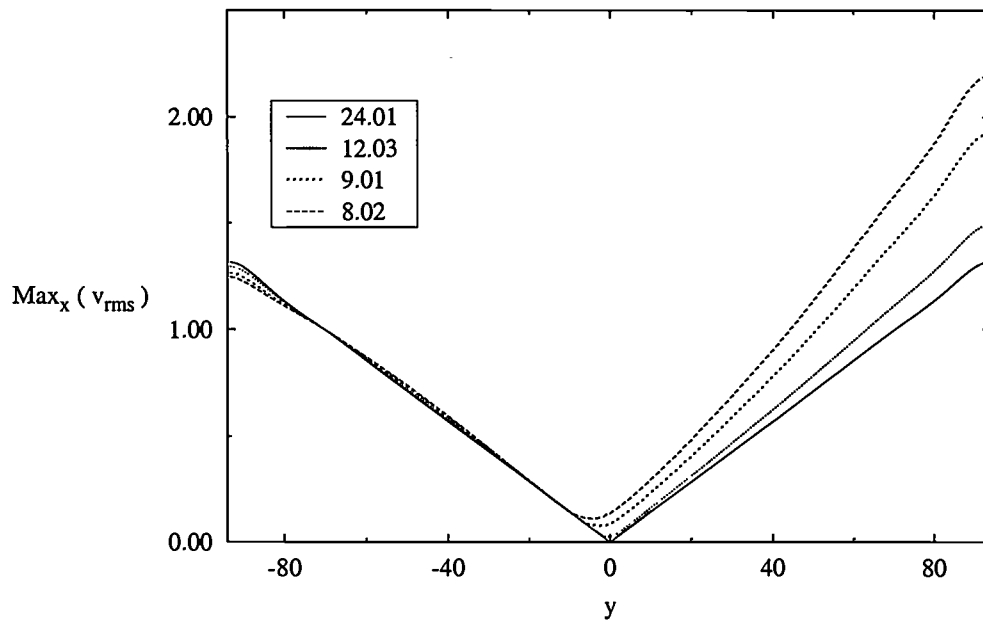


FIG. C.3 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse tangentielle à différents instants pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

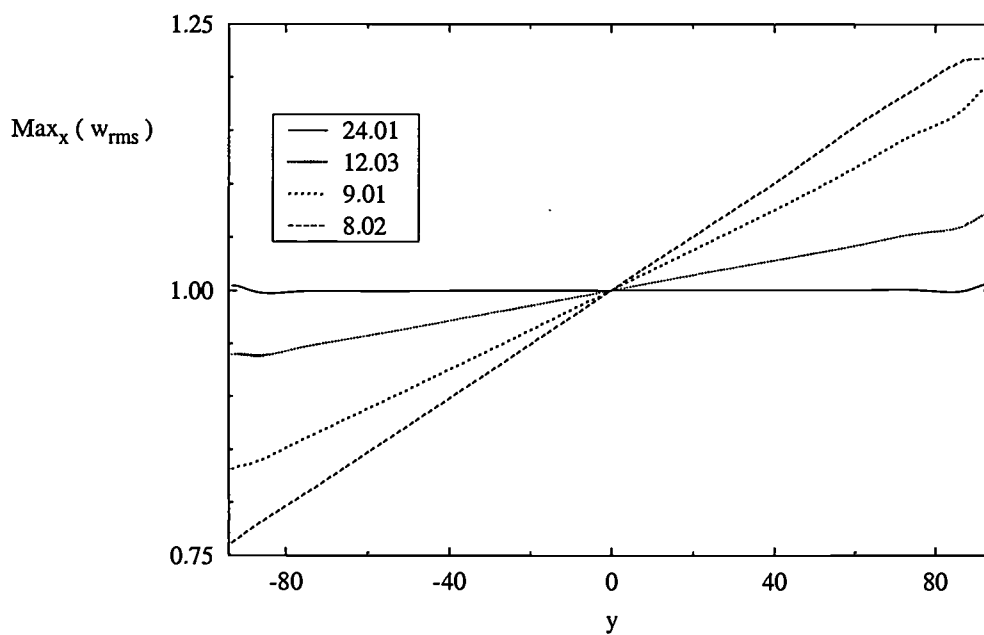


FIG. C.4 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation de vitesse périodique à différents instants pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

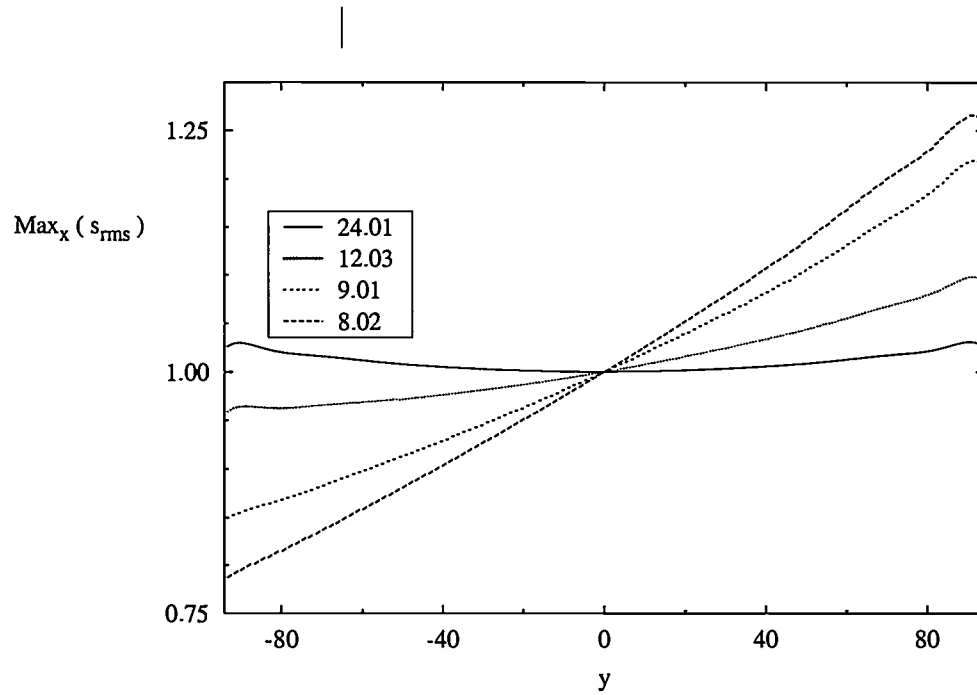


FIG. C.5 – Maximum selon x de la valeur rms selon z de la perturbation d'entropie à différents instants pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

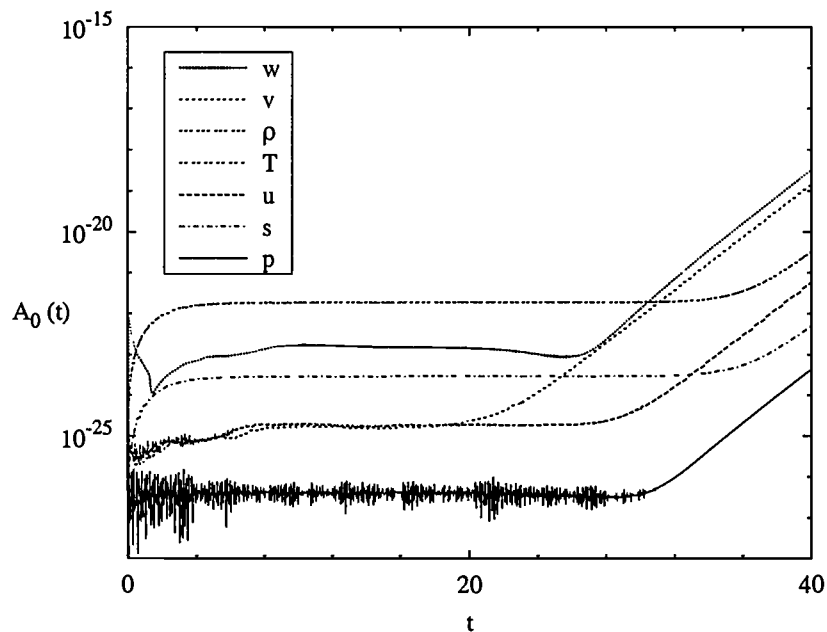


FIG. C.6 – Normes carrées du mode de Fourier constant pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique. La masse volumique et la température sont confondues et présentent l'intensité la plus élevée jusqu'au temps $t = 30$

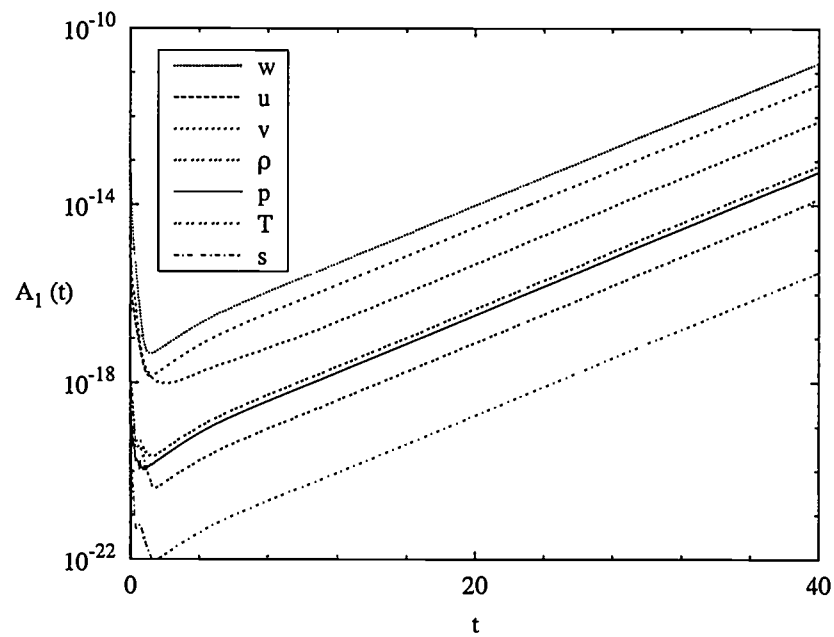


FIG. C.7 – Normes carrées du mode de Fourier fondamental pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

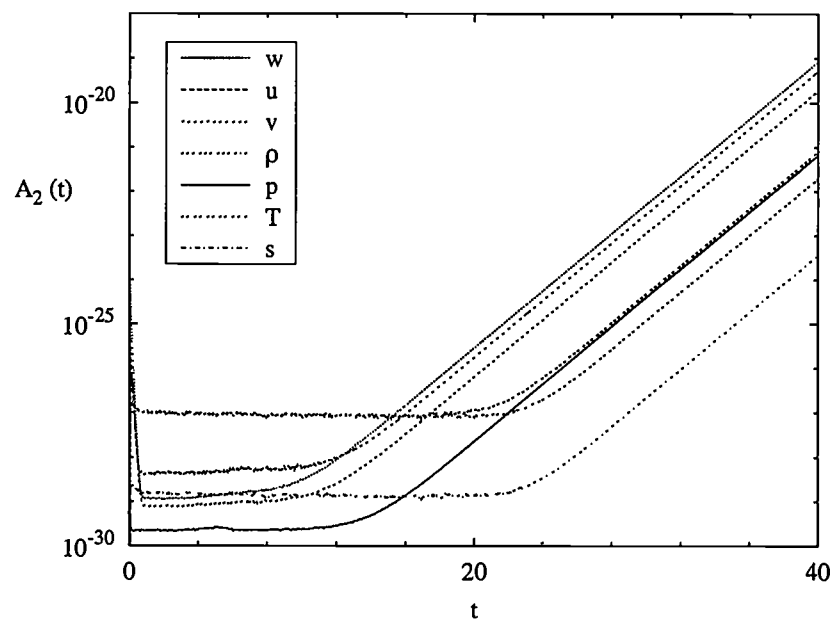


FIG. C.8 – Normes carrées du premier harmonique pour les variables thermodynamiques et aérodynamiques pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

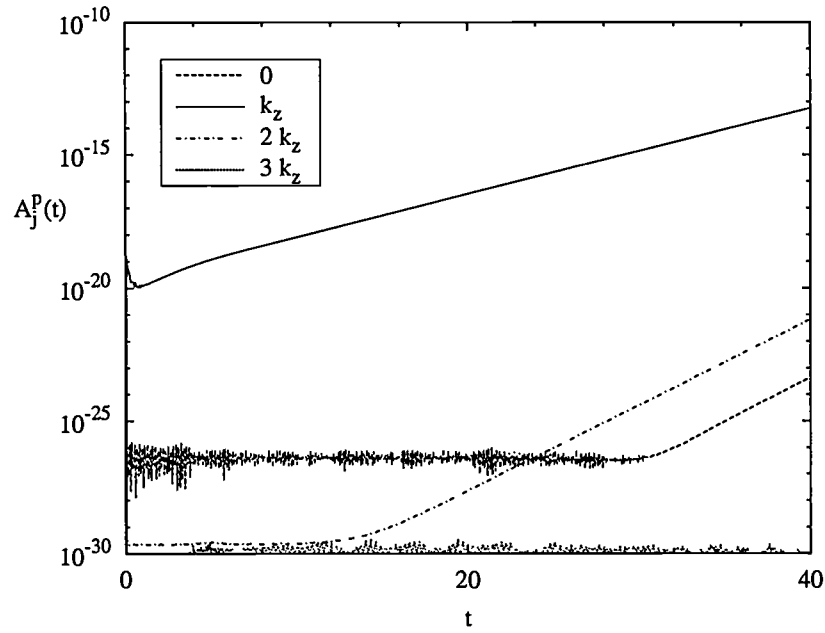


FIG. C.9 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de pression, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

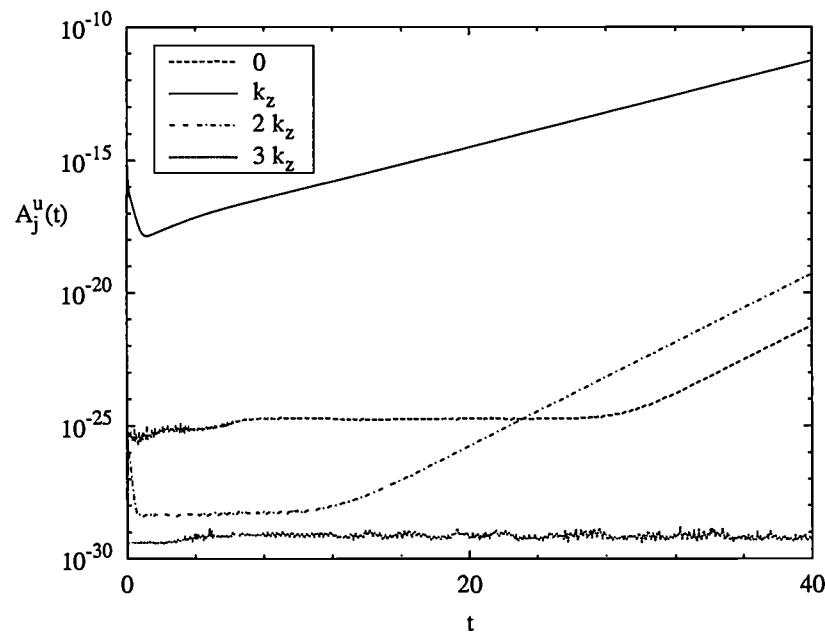


FIG. C.10 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse normale, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

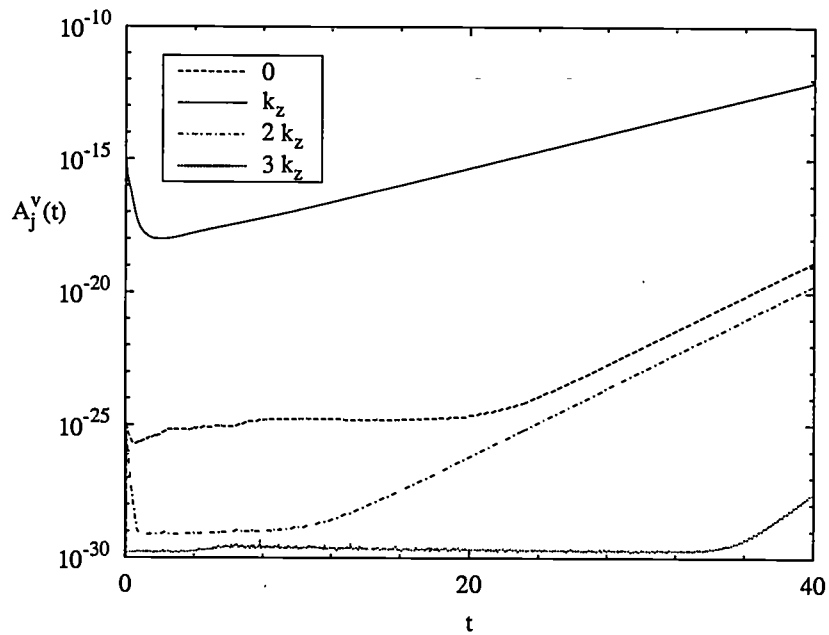


FIG. C.11 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse tangentielle, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

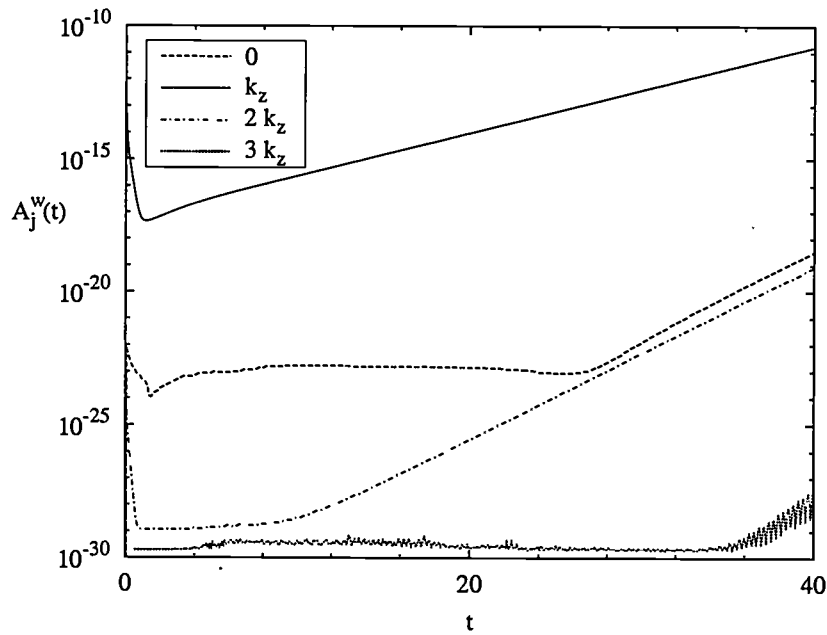


FIG. C.12 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de vitesse périodique, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

270 ANNEXE C. PERTURBATION VORTICALE DÉCENTRÉE ADIABATIQUE

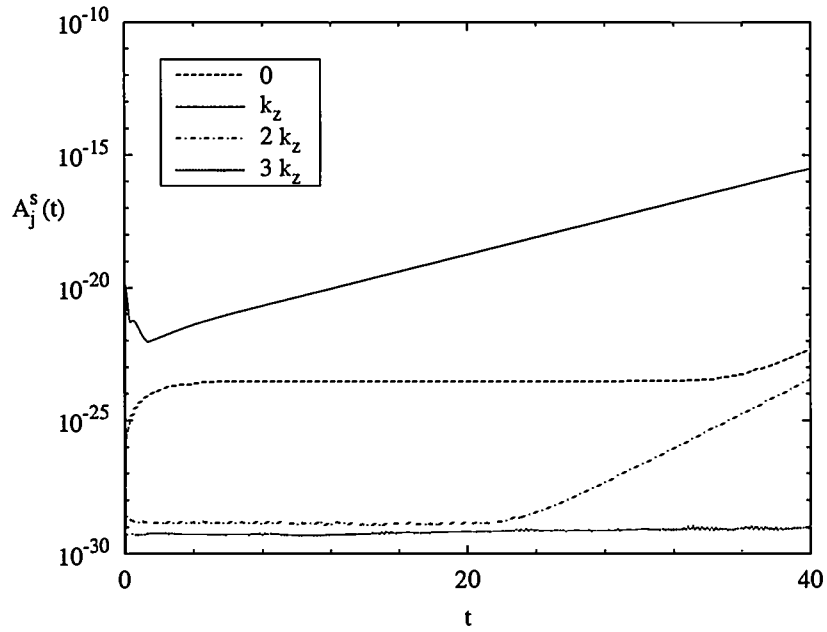


FIG. C.13 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation d'entropie, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

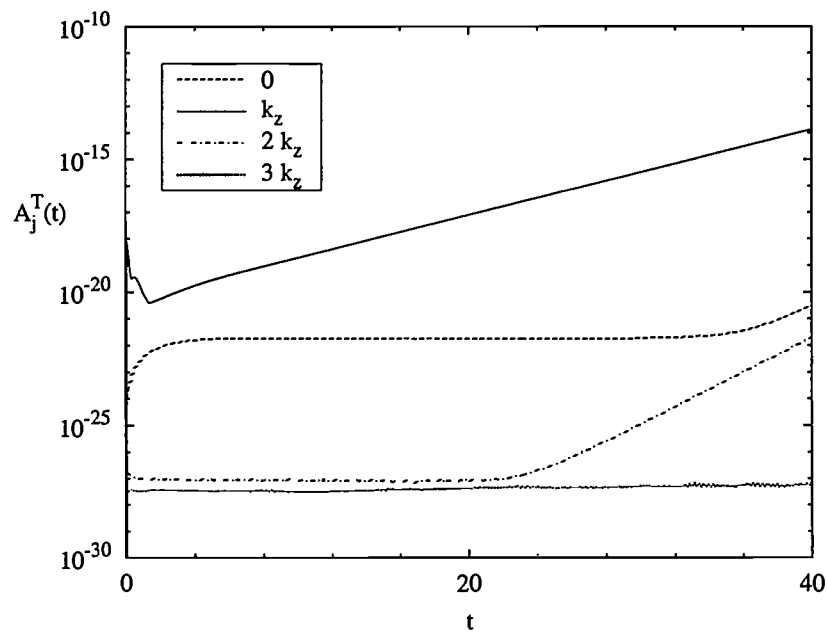


FIG. C.14 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de température, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

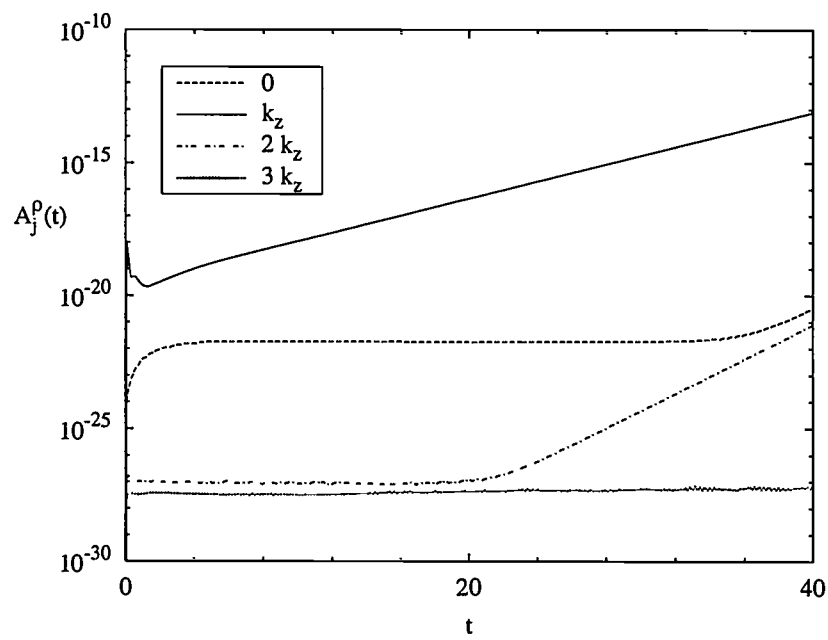


FIG. C.15 – Normes carrées des différents modes de Fourier pour la perturbation de masse volumique, pour une perturbation initialement décentrée et un mur adiabatique

272 ANNEXE C. PERTURBATION VORTICALE DÉCENTRÉE ADIABATIQUE

Bibliographie

- [AGH99] S. Abarbanel, D. Gottlieb, and J. S. Hesthaven. Well-posed Perfectly Matched Layers for advective acoustics. *Journal of Computational Physics*, 154 :266–283, 1999.
- [AS96] N. A. Adams and K. Shariff. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 127 :27–51, 1996.
- [BD91] K. Brattkus and S. H. Davis. The linear stability of plane stagnation-point flow against general disturbances. *Q. Jl Mech. appl. Math.*, 44(1) :135–146, 1991.
- [Ber94] J. P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185, 1994.
- [Ber99] F. P. Bertolotti. On the connection between cross-flow vortices and attachment-line instabilities. In *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, Sedona, USA, September 1999.
- [BH99] S. Berlin and D. S. Henningson. A nonlinear mechanism for receptivity of free-stream disturbances. *Phys. Fluids*, 11(12) :3749–3760, 1999.
- [Bip99] H. Bippes. Basic experiments on transition in three-dimensional boundary layers dominated by crossflow instability. *Progress in Aerospace Sciences*, 35 :363–412, 1999.
- [CA71] P. Colak-Antic. Visuelle Untersuchungen von Langswirbeln im Stau-punktgebiet eines Kreiszyinders bei turbulenter Anströmung. Technical Report 71-13, D.L.R., 1971.
- [CH67] N. A. Cumpsty and M. R. Head. The calculation of three dimensional turbulent boundary layers. Part II Attachment line flow on an infinite swept wing. *The aeronautical Quarterly*, XVIII :150–164, May 1967.
- [CH69] N. A. Cumpsty and M. R. Head. The calculation of three dimensional turbulent boundary layers. Part III Comparison of attachment line calculations with experiment. *The aeronautical Quarterly*, XX :99–113, May 1969.

- [CJL94] W. O. Criminale, T. L. Jackson, and D. G. Lasseigne. Evolution of disturbances in stagnation-point flow. *J. Fluid Mech.*, 270 :331–347, 1994.
- [CK94] M. H. Carpenter and C. A. Kennedy. Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes. Technical Report NASA-TM-109112, 1994.
- [CL97] S. S. Collis and S. K. Lele. A computational investigation of receptivity in high-speed flow near a swept leading-edge. Technical report, Flow Physics and computation division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1997.
- [CL99] S. S. Collis and S. K. Lele. Receptivity to surface roughness near a swept leading edge. *Journal of Fluid Mechanics*, 380 :141–168, 1999.
- [CM98] A. J. Chorin and J. E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer Verlag, New-York, 1998.
- [CR56] C. B. Cohen and E. Reshotko. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. Technical Report 1293, National Advisory Committee for Aeronautics, 1956.
- [Cra52] W.E. Cray. The effect of wing sweep on laminar flow. Technical report, RAE, TM 255 (ARC 14,929) 1952.
- [Cro94] J.D. Crouch. Theoretical studies on the receptivity of boundary layers. In *AIAA-Paper*, number 94-2224 in 25th AIAA Fluid Dynamics Conference, 1994.
- [DS95] M. R. Dhanak and J. T. Stuart. Distortion of the stagnation-point flow due to cross-stream vorticity in the external flow. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 352 :443–452, 1995.
- [Gas65] M. Gaster. A simple device for preventing turbulent contamination on swept leading edges. *J. R. Aero. Soc.*, 69 :788–789, 1965.
- [Gas67] M. Gaster. On the flow along swept leading edges. *Aeronautical Quarterly*, 18 :165–184, May 1967.
- [Gör55] H. Görtler. Dreidimensionale Instabilität der ebenen Staupunktströmung gegenüber wirbelartigen Störungen. In H. Görtler and W. Tollmien, editors, *50 Jahre Grenzschichtforschung*, pages 304–314, Braunschweig, 1955. Vieweg.
- [GSW55] N. Gregory, J. T. Stuart, and W. S. Walker. On the stability of the three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotation disc. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 248 :155–199, 1955.
- [Has71] H. Hassler. Hitzdrahtmessungen von Langswirbelartigen Instabilitäterscheinungen im Staupunktgebiet eines Kreiszyinders in turbulenter Anströmung. Technical Report 71-13, D.L.R., 1971.

- [Häm55] G. Hämmerlin. Zur Instabilitätstheorie der ebenen Staupunktströmung. In H. Görtler and W. Tollmien, editors, *50 Jahre Grenzschichtforschung*, pages 315–327, Braunschweig, 1955. Vieweg.
- [HM86] P. Hall and M. R. Malik. On the instability of a three-dimensional attachment-line boundary-layer : weakly nonlinear theory and numerical approach. *J. Fluid Mech.*, 163 :257–282, 1986.
- [HMP84] P. Hall, M. R. Malik, and D. I. A. Poll. On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 395 :229–245, 1984.
- [HS90] P. Hall and S. O. Seddougui. Wave interactions in a three-dimensional attachment-line boundary-layer. *J. Fluid Mech.*, 217 :367–390, 1990.
- [Hu96] F. Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, 129 :201–219, 1996.
- [Jos96] R. D. Joslin. Simulation of nonlinear instabilities in an attachment-line boundary layer. *Fluid Dynamics Research*, 18(2) :81–97, 1996.
- [Kac94] Y. S. Kachanov. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 26 :411–482, 1994.
- [KCL99] C. A. Kennedy, M. H. Carpenter, and R. M. Lewis. Low-storage, explicit Runge-Kutta schemes for the compressible Navier-Stokes equations. Technical Report ICASE No. 99-22, 1999.
- [Kov53] L. S. G. Kovásznay. Turbulence in supersonic flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20(10) :657–674, 1953.
- [Lam32] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 6th edition, 1932.
- [Le192] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103 :16–42, 1992.
- [Le199] S. K. Lele. DNS of compressible turbulent flows. In *Transition, turbulence and combustion modelling*, volume 6 of *ERCOTAC Series*, chapter 7, pages 421–488. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [LH85] M. J. Lyell and P. Huerre. Linear and non linear stability of plane stagnation flow. *J. Fluid Mech.*, 161 :295–312, 1985.
- [LHJ92] A. Lundbladh, D. S. Henningson, and A. V. Johansson. An efficient spectral integration method for the solution of the Navier-Stokes equations. Technical Report FFA TN 1992-28, Aeronautical Research Institute of Sweden, 1992.
- [LJ92] D. G. Lasseigne and T. L. Jackson. Stability of a non-orthogonal stagnation flow to three dimensional disturbances. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 3 :207–218, 1992.

- [LM95] R.-S. Lin and M. R. Malik. Stability and transition in compressible attachment line boundary layer flow. Technical Report 952041, SAE, 1995.
- [LM96] R.-S. Lin and M. R. Malik. On the stability of attachment-line boundary layers. part 1. the incompressible swept hiemez flow. *J. Fluid Mech.*, 311 :239–255, 1996.
- [Obr00] D. Obrist. *On the stability of the swept leading-edge boundary layer*. PhD thesis, University of Washington, Seattle, 2000.
- [PL92] T. J. Poinso and S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101 :104–129, 1992.
- [Pol79] D. I. A. Poll. Transition in the infinite swept attachment line boundary layer. *Aero. Quarterly*, 30 :607–629, 1979.
- [Pol85] D. I. A. Poll. Some observation on the transition process on the windward face of a long yawed cylinder. *J. Fluid Mechanics*, 150 :329–356, 1985.
- [Pov99] A. Povitsky. On aeroacoustics of a stagnation flow near a rigid wall. Technical Report No. 99-48, ICASE, 1999.
- [Pov00] A. Povitsky. Aeroacoustics of a stagnation flow near a rigid wall. *Phys. Fluids*, 12(10) :2595–2608, 2000.
- [Ray16] Lord Rayleigh. On the flow of compressible fluid past an obstacle. *Phil. Mag. S. 6*, 32(187) :1–6, July 1916.
- [RB58] E. Reshotko and I. E. Beckwith. Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number. Technical Report 1379, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
- [Saa93] M. A. Saad. *Compressible Fluid Flow*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [Sch79] H. Schlichting. *Boundary-layer theory*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [Ses01] J. Sesterhenn. A characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes. *Computers & Fluids*, 30(1) :37–67, 2001.
- [Spa88] P. R. Spalart. Direct numerical study of leading-edge contamination. In *Fluid dynamics of three-dimensional turbulent shear flows and transition*, pages 5 :1–5 :13. AGARD-CP-438, 1988.
- [TG99] M. Türkyilmazoglu and J. S. B. Gajjar. On the absolute instability of the attachment-line and swept-Hiemenz boundary layers. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13 :57–75, 1999.

- [TH97] C. K. W. Tam and J. C. Hardin, editors. *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, Tallahassee, 1997. NASA Langley Conference Publication 3352.
- [The98] V. Theofilis. On linear and nonlinear instability of the incompressible swept attachment-line boundary layer. *J. Fluid Mechanics*, 355 :193–227, 1998.
- [TW93] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation preserving finite differences schemes for computational acoustics. *J. of Comp. Physics*, 107 :262–281, 1993.
- [Viv70] H. Viviand. Étude des écoulements instationnaires à faible nombre de Mach avec application au bruit aérodynamique. *Journal de Mécanique*, 9(4) :573–599, 1970.
- [WG78] S. D. R. Wilson and I. Gladwell. The stability of a two-dimensional stagnation flow to three-dimensional disturbances. *J. Fluid Mech.*, 84(3) :517–527, 1978.
- [Whi74] F. M. White. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1974.
- [Wil80] J. H. Williamson. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. of Comp. Physics*, 35 :48–56, 1980.
- [WSGG01] E. B. White, W. S. Saric, R. D. Gladden, and P. M. Gabet. Stages of swept-wing transition. In *AIAA Paper*, number 2001-0271 in 25th AIAA Fluid Dynamics Conference, 2001.
- [Zey86] R. Kh. Zeytounian. *Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides I*, volume 245 of *Lecture notes of physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

ECOLE CENTRALE DE LYON
Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

<i>AIT-EL-HADJ Smaïl</i>	<i>professeur</i>	GRESTI	ECL
<i>ARQUES Philippe</i>	<i>professeur</i>		ECL
<i>AURIOL Philippe</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL
<i>BAILLY Christophe</i>	<i>maître de conférence</i>	LMFA	ECL
<i>BATAILLE Jean</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>BEN HADID Hamda</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>BERGHEAU Jean-Michel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE
<i>BEROUAL Abderhamane</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL
<i>BERTOGLIO Jean-Pierre</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>BLAIZE Alain</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	UCBL
<i>BLANC-BENON Philippe</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>BLANCHET Robert</i>	<i>professeur</i>	LEOM	ECL
<i>BRUN Maurice</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>BUFFAT Marc</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>CAMBON Claude</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>CAMBOU Bernard</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>CARRIERE Philippe</i>	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>CHAMPOUSSIN J-Claude</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>CHAUVET Jean-Paul</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>CHEN Liming</i>	<i>professeur</i>	ICTT	ECL
<i>CLERC Guy</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	UCBL
<i>COMTE-BELLOT Geneviève</i>	<i>professeur émérite</i>	LMFA	ECL
<i>COQUILLET Bernard</i>	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
<i>DAVID Bertrand</i>	<i>professeur</i>	ICTT	ECL
<i>DONNET Christophe</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
<i>DUBUJET Philippe</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
<i>ESCODIE Dany</i>	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>FERRAND Pascal</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>GAFFIOT Frédéric</i>	<i>maître de conférence</i>	LEOM	ECL
<i>GAGNAIRE Alain</i>	<i>maître de conférence</i>	LEOM	ECL
<i>GALLAND Marie-Annick</i>	<i>maître de conférence</i>	LMFA	ECL
<i>GARRIGUES Michel</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>GAY Bernard</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>GENCE Jean-Noël</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>GENDRY Michel</i>	<i>chargé de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>GEORGES Jean-Marie</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	ECL
<i>GRENET Geneviève</i>	<i>chargé de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>GUIRALDENQ Pierre</i>	<i>professeur émérite</i>	IFOS	ECL

ECOLE CENTRALE DE LYON
Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

<i>HAMADICHE Mahmoud</i>	<i>maître de conférence</i>	LMFA	UCBL
<i>HELLOUIN Yves</i>	<i>maître de conférence</i>		ECL
<i>HENRY Daniel</i>	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>HERRMANN Jean-Marie</i>	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
<i>HOLLINGER Guy</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>JAFFREZIC-RENAULT Nicole</i>	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
<i>JEANDEL Denis</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>JEZEQUEL Louis</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>JOSEPH Jacques</i>	<i>professeur</i>	LEOM	ECL
<i>JUVE Daniel</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>JUVE Denyse</i>	<i>ingénieur de recherche</i>	IFOS	ECL
<i>KAPSA Philippe</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
<i>KRÄHENBÜHL Laurent</i>	<i>directeur de recherche</i>	CEGELY	CNRS
<i>KRAWCZYK Stanislas</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>LANCE Michel</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>LANGLADE-BOMBA Cécile</i>	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
<i>LE HELLEY Michel</i>	<i>professeur</i>		ECL
<i>LEBOEUF Francis</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>LOPEZ Jacques</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	UCBL
<i>LOUBET Jean-Luc</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
<i>LYONNET Patrick</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE
<i>MAITRE Jean-François</i>	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
<i>MARION Martine</i>	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
<i>MARTELET Claude</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>MARTIN Jean-Michel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>MARTIN Jean-René</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>MATHIA Thomas</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
<i>MATHIEU Jean</i>	<i>professeur émérite</i>	LMFA	ECL
<i>MAZUYER Denis</i>	<i>professeur</i>		ECL
<i>MIDOL Alain</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	UCBL
<i>MOREL Robert</i>	<i>professeur</i>	LMFA	INSA
<i>MOUSSAOUI Mohand</i>	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
<i>MUSY François</i>	<i>maître de conférence</i>	MAPLY	ECL
<i>NGUYEN Du</i>	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
<i>NICOLAS Alain</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL
<i>NICOLAS Laurent</i>	<i>directeur de recherche</i>	CEGELY	CNRS

ECOLE CENTRALE DE LYON
Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

<i>PERKINS Richard</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>PERRET-LIAUDET Joël</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
<i>PERRIN Jacques</i>	<i>professeur</i>		INSA
<i>PICHAT Pierre</i>	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
<i>PONSONNET Laurence</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
<i>PREVOT Patrick</i>	<i>professeur</i>	ICTT	INSA
<i>REBOUX Jean-Luc</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE
<i>ROBACH Yves</i>	<i>maître de conférence</i>	LEOM	ECL
<i>ROGER Michel</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>ROJAT Gérard</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	UCBL
<i>ROUSSEAU Jacques</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	ENISE
<i>SALVIA Michelle</i>	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
<i>SCOTT Julian</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
<i>SELLIER Antoine</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>SIDOROFF François</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>SOUTEYRAND Eliane</i>	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>SUNYACH Michel</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
<i>TARDY Jacques</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>THOMAS Gérard</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>VANNES André-Bernard</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>VIKTOROVITCH Pierre</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
<i>VINCENT Léo</i>	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
<i>ZAHOUANI Hassan</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. CAMBON

et les rapports de

Monsieur G. CASALIS

Professeur - Ingénieur de Recherches au Département de modélisation pour l'Aérodynamique et l'Energétique - ONERA-CERT - 2, av. Ed. Belin - BP 4025 - 31055 TOULOUSE Cedex

et de

Monsieur F. WALEFFE

Professeur Mathematics Department - University of Wisconsin - MADISON - WI 53706 (USA)

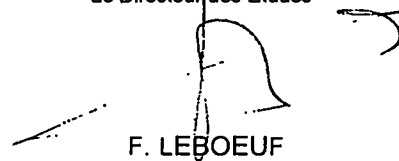
Mademoiselle LE DUC Anne

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL et ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 3 décembre 2001

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes



F. LEBOEUF

ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS FAIBLEMENT COMPRESSIBLES, DE GIRATION, PUIS D'IMPACT SUR PAROI, PAR THÉORIE LINÉAIRE ET SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE

Dans les écoulements compressibles, trois modes de perturbation existent : vorticité, acoustique et entropie, couplés par le champ de base non-uniforme. La dynamique plus riche de la perturbation peut différer du cas incompressible strictement vortical et est illustrée par deux études.

La stabilité linéaire d'un écoulement giratoire non visqueux débitant est d'abord étudiée à l'aide d'un développement WKB ondes courtes. Le système d'équations différentielles ordinaires évoluant le long des trajectoires de l'écoulement de base permet d'obtenir des conditions suffisantes d'instabilité et un taux d'amplification associé. Les modes et valeurs propres sont par ailleurs calculés avec une formulation en modes normaux. Pour des nombres d'onde élevés, les deux approches concordent et montrent un effet déstabilisant d'un gradient d'entropie positif. Pour un écoulement axial uniforme, les modes et valeurs propres axisymétriques sont obtenus analytiquement. Le critère de Rayleigh est ainsi étendu et le lien entre les comportements faiblement compressible et strictement incompressible clarifié.

L'écoulement faiblement compressible de Hiemenz, obtenu par un développement en nombre de Mach, est étudié à l'aide d'une simulation numérique directe. Le nombre de Reynolds est super-critique. La paroi est isotherme ou adiabatique. Des conditions limites maintenant l'écoulement de base tout en limitant les réflexions de la perturbation sont implémentées. De petites perturbations stochastiques sont introduites dans la couche limite et suivies au cours du temps. Qu'elles soient initialement purement entropiques ou vorticales, et situées au dessus de la ligne d'arrêt ou décentrées, les perturbations présentent après une décroissance transitoire une croissance exponentielle. Les modes de pression et vitesse développés sont similaires à ceux postulés par Görtler dans le cas incompressible. L'écoulement est absolument instable et la paroi isotherme induit un taux d'amplification supérieur.

MOTS CLÉS : stabilité hydrodynamique, compressibilité, développement de Rayleigh-Jansen en nombre de Mach, optique géométrique, Rayleigh, simulation numérique directe, Hiemenz, point d'arrêt, modes de Görtler-Hämmerlin

HYDRODYNAMIC STABILITY STUDY OF TWO WEAKLY COMPRESSIBLE FLOWS USING LINEAR THEORY AND DIRECT NUMERICAL SIMULATION

In compressible flows, three perturbation modes coexist : vorticity, acoustics and entropy, together coupled by the non-uniform base flow. The resulting richer dynamics of the perturbation potentially differs from its incompressible solely vortical counterpart and is illustrated by two studies.

The linear stability of a rotating inviscid flow with axial velocity is first studied using a WKB short wave expansion. This results in a system of ordinary differential equations evolving along trajectories of the base flow, and provides sufficient instability conditions and a related growth rate. Second, eigenmodes are computed with a normal mode analysis. For high wave numbers, both approaches are in excellent agreement and show the destabilizing effect of a positive entropy gradient. In case of a uniform axial velocity and an axisymmetric perturbation, the most amplified eigenmodes and their amplification rates are analytically obtained for finite wave numbers. The centrifugal Rayleigh criterion is thus extended in clarifying the link between weak compressibility and incompressibility.

The weakly compressible counterpart of the Hiemenz flow, obtained via a small Mach-number expansion, is studied using a compressible direct numerical simulation. The Reynolds number is higher than the incompressible critical Reynolds number. The plate is either isothermal or adiabatic ; also boundary conditions able to maintain the base flow and to limit perturbation reflections have been derived. Small stochastic perturbations are inserted into the boundary layer and allowed in time. Whether initially purely entropic or vortical, localized above the stagnation point offset, perturbations exhibit an exponential growth after a transient decay. Developed velocity and pressure modes look similar to the ones assumed by Görtler for the incompressible flow. Moreover the flow is absolutely unstable and the isothermal wall induces the highest exponential growth rate.

KEYWORDS : hydrodynamic stability, compressibility, Rayleigh-Jansen, Mach number, geometrical optics, Rayleigh, direct numerical simulation, Hiemenz, stagnation point, Görtler-Hämmerlin modes

