

# THÈSE

présentée devant

**l'École Centrale de Lyon**

École Doctorale MEGA

Spécialité : mécanique

pour obtenir le titre de Docteur

par

**Dominique Chamoret**

Titre de la thèse :

## **Modélisation du contact: nouvelles approches numériques**

Soutenue le 4 décembre 2002 devant la commission d'examen

Directeur de thèse  
Président  
Rapporteur  
Rapporteur

J.-M. Bergheau  
R. De Borst  
P. Chabrand  
J.-M. Roelandt  
A. Rassineux  
P. Saillard  
H. Zahouani

Professeur des Universités, LTDS, UMR5513  
Professeur des Universités, Delft University of Technology  
Professeur des Universités, LABM, UMSR 2164  
Professeur des Universités, LMR, UMR6066  
Maître de Conférences, LMR, UMR6066  
ESI France  
Professeur des Universités, LTDS, UMR5513



<b>A</b>	AIT-EL-HADJ Smail	professeur	GRESTI	ECL
	ARQUES Philippe	professeur		ECL
	AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
<b>B</b>	BAILLY Christophe	maître de conférence	LMFA	ECL
	BATAILLE Jean	professeur	LMFA	UCBL
	BAYADA Guy	professeur	MAPLY	INSA
	BEN HADID Hamda	professeur	LMFA	UCBL
	BERGHEAU Jean-Michel	professeur	LTDS	ENISE
	BEROUAL Abderrhamane	professeur	CEGELY	ECL
	BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLAIZE Alain	maître de conférence	LTDS	UCBL
	BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLANCHET Robert	professeur	LEOM	ECL
	BRUN Maurice	professeur	LMFA	ECL
	BUFFAT Marc	professeur	LMFA	UCBL
	<b>C</b>	CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA
CAMBOU Bernard		professeur	LTDS	ECL
CARRIERE Philippe		chargé de recherche	LMFA	CNRS
CHAMBAT Michèle		professeur	MAPLY	UCBL
CHAMPAGNE Jean-Yves		maître de conférence	LMFA	INSA
CHAMPOUSSIN J-Claude		professeur	LMFA	ECL
CHAUVET Jean-Paul		professeur	IFOS	ECL
CHEN Liming		professeur	ICTT	ECL
CLERC Guy		professeur	CEGELY	UCBL
COMTE-BELLOT Geneviève		professeur émérite	LMFA	ECL
COQUILLET Bernard		maître de conférence	IFOS	ECL
CREPEL Pierre		chargé de recherche	MAPLY	CNRS
<b>D</b>		DAVID Bertrand	professeur	ICTT
	DUBUJET Philippe	maître de conférence	LTDS	ECL
<b>E</b>	ESCODIE Dany	chargé de recherche	LMFA	CNRS
<b>F</b>	FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS
<b>G</b>	GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
	GAGNAIRE Alain	maître de conférence	LEOM	ECL
	GALLAND Marie-Annick	maître de conférence	LMFA	ECL
	GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	GAY Bernard	professeur	LMFA	UCBL

	GENCE Jean-Noël	professeur	LMFA	UCBL
	GENDRY Michel	chargé de recherche	LEOM	CNRS
	GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
	GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	IFOS	ECL
<b>H</b>	HAMADICHE Mahmoud	maître de conférence	LMFA	UCBL
	HEIBIG Arnaud	professeur	MAPLY	INSA
	HELLOUIN Yves	maître de conférence		ECL
	HENRY Daniel	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	HERRMANN Jean-Marie	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS
<b>J</b>	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
	JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
	JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
	JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
	JUVE Denyse	ingénieur de recherche	IFOS	ECL
<b>K</b>	KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
	KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS
<b>L</b>	LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY	INSA
	LANCE Michel	professeur	LMFA	UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	maître de conférence	IFOS	ECL
	LE HELLEY Michel	professeur		ECL
	LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
	LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	LYONNET Patrick	professeur	LTDS	ENISE
<b>M</b>	MAITRE Jean-François	professeur	MAPLY	ECL
	MARION Martine	professeur	MAPLY	ECL
	MARTELET Claude	professeur	IFOS	ECL
	MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
	MARTIN Jean-René	professeur	IFOS	ECL
	MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	MATHIEU Jean	professeur émérite	LMFA	ECL
	MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
	MIDOL Alain	maître de conférence	LTDS	UCBL
	MOREL Robert	professeur	LMFA	INSA

	MOUSSAOUI Mohand	professeur	MAPLY	ECL
	MUSY François	maître de conférence	MAPLY	ECL
<b>N</b>	NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
	NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
<b>P</b>	PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférence	LTDS	ECL
	PERRIN Jacques	professeur		INSA
	PICHAT Pierre	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	POUSIN Jérôme	professeur	MAPLY	INSA
	PONSONNET Laurence	maître de conférence	IFOS	ECL
	PREVOT Patrick	professeur	ICTT	INSA
<b>R</b>	REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS	ENISE
	ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
	ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
	ROJAT Gérard	professeur	CEGELY	UCBL
	ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS	ENISE
	ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY	ECL
<b>S</b>	SALVIA Michelle	maître de conférence	IFOS	ECL
	SANDRI Dominique	maître de conférence	MAPLY	UCBL
	SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
	SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
	SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
	SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	STREMSDOERFER Guy	professeur	IFOS	ECL
	SUNYACH Michel	professeur	LMFA	UCBL
<b>T</b>	TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
	THOUVEREZ Fabrice	maître de conférences	LTDS	ECL
	TREHEUX Daniel	professeur	IFOS	ECL
<b>V</b>	VANNES André-Bernard	professeur	IFOS	ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	VINCENT Léo	professeur	IFOS	ECL
	VOLPERT Vitely	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
<b>Z</b>	ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS	ENISE

---

# Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués dans le cadre d'une convention CIFRE entre la société ESI Software et le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes.

Je tiens, en premier lieu, à remercier Jean-Michel Bergheau, mon directeur de thèse qui m'a accueillie dans son groupe de recherche et accordé sa confiance. Je le remercie sincèrement d'avoir fait que ces trois années de travail se réalisent dans les meilleures conditions scientifiques et humaines.

Mes remerciements s'adressent aussi à la société ESI Software qui a permis de financer ces travaux. Merci à Patrick Saillard pour ses précieux conseils.

J'exprime également ma gratitude à Alain Rassineux qui a accompagné mes premiers pas dans le diffus. Nos discussions furent enrichissantes et souvent porteuses de solutions.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance envers René De Borst et Hassan Zahouani qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie ceux qui ont eu la lourde charge d'être les rapporteurs de ce travail : Patrick Chabrand et Jean-Marc Roelandt.

Des lecteurs consciencieux m'ont aidée à poursuivre les horreurs orthographiques et autres fautes de frappe, un merci très reconnaissant à ces courageux.

Je remercie toutes les personnes qui, au laboratoire, ont contribué à rendre ces années agréables avec une mention spéciale à Isabelle et Romain.

Un grand merci à ma famille, mon père, ma sœur Cécile, ma grand-mère Lucie, et aux amis d'ici et d'un peu plus loin.

---

# Résumé

**Mots clés:** contact, méthode des éléments finis, méthode implicite, régularisation de surface, approximation diffuse, élément de contact 3D diffus, méthode de pénalité, incrément de chargement, ajustement automatique .

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (UMR 5513 CNRS/ECL/ENISE) et la société ESI Software avec pour objectif de développer, dans une approche implicite, des algorithmes de contact susceptibles de s'adapter à la plupart de situations rencontrées dans l'industrie. L'idée de nos approches est de régulariser le contact. Pour ce faire nous proposons trois nouveaux algorithmes concernant la régularisation des surfaces de contact, l'adaptation du paramètre de pénalité et l'ajustement de l'incrément de chargement. Le traitement numérique des problèmes de contact engendre de nombreuses difficultés. Ces problèmes viennent des fortes non-linéarités géométriques et matérielles. En utilisant la méthode des éléments finis, l'interface de contact est représentée par une surface seulement différentiable par morceaux. La non-régularité de cette surface pose un problème dans le cas de grands glissements. Elle peut provoquer de brusques changements des champs de vecteurs normal et tangentiel conduisant à des problèmes de convergence. Pour éviter ces inconvénients, plusieurs stratégies peuvent être considérées. L'approche que nous proposons consiste à régulariser la surface de contact en utilisant la technique d'approximation diffuse. La discrétisation du problème conduit alors à formuler un nouvel élément de contact 3D diffus. L'obtention des différentes grandeurs élémentaires est détaillée et l'efficacité de l'approche proposée est illustrée par trois exemples.

Pour ce qui concerne le traitement du contact normal, nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalité pour son efficacité et sa simplicité de mise en œuvre. Cependant, le choix du paramètre de pénalité optimal est souvent délicat car il dépend de la rigidité locale de la structure. Nous proposons une stratégie originale de détermination d'un paramètre optimal qui repose sur une notion d'interpénétration admissible entre les corps en contact.

Le dernier algorithme proposé concerne l'ajustement de l'incrément de chargement. L'idée principale de la stratégie que nous proposons est de limiter le nombre de changements de statuts de contact sur un pas de chargement.

---

# Abstract

**Key words :** Contact, Finite Element Method, Implicit Method, Smooth Contact Surface, Diffuse Approximation, Penalty Method, Load Step, Automatic Adjustment.

This work has been done in collaboration between the Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (UMR 5513 CNRS/ECL/ENISE) and the company ESI Software . The aim is to develop the modelling of 3D contact in an implicit approach and to implement algorithms likely to adapt to most of situations met in industry. The idea of our approaches is to smooth contact. With this intention we propose three new algorithms concerning the regularization of contact surfaces, the adaptation of the penalty parameter and the adjustment of the load step.

The numerical treatment of contact problems generates many difficulties. These problems come from strong geometric and material nonlinearities. Using the finite element method, the contact interface is represented by a surface only piecewise differentiable. The non-smoothness of this surface is a problem for the numerical treatment of contact in large slips. It can provoke abrupt changes of the normal and tangential vectors fields creating numerical problems. To avoid these drawbacks, several strategies can be considered. The strategy we develop determines a smooth contact surface using only the data of the nodes of the initial finite element mesh thanks to the technique of diffuse approximation. The determination of all the contact elementary quantities is detailed and the effectiveness of the approach suggested is illustrated by three examples.

We have chosen to use the penalty method to take into account contact constraints. This approach can be easily implemented in a finite element code. The optimum choice of the penalty parameter is often very difficult because it depends on the local rigidity of the structure. We propose an original strategy to determine an optimal parameter based on the notion of acceptable interpenetration between bodies in contact

The last algorithm proposed relates to the adjustment of the load step. The main idea of the method we develop is to limit the number of changes of contact status in each load step.



---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	i
<b>Résumé</b>	iii
<b>Abstract</b>	v
<b>Notations</b>	1
<b>Introduction générale</b>	5
<b>1 Mécanique du contact</b>	7
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Mécanique des grandes déformations . . . . .	8
1.2.1 Description de la cinématique . . . . .	8
1.2.2 Tenseur gradient de déformation . . . . .	10
1.2.3 Mesure des déformations . . . . .	10
1.2.4 Description des tenseurs des contraintes . . . . .	10
1.2.5 Equations d'équilibre . . . . .	12
1.2.6 Formes incrémentale et discrète des équations d'équilibre . . . . .	14
1.3 Quelques notions sur la théorie continue du contact . . . . .	16
1.3.1 Géométrie du contact . . . . .	17
1.3.2 Définition des grandeurs cinématiques . . . . .	19
1.3.3 Loi de contact unilatéral et loi de frottement . . . . .	22
1.3.4 Principe des travaux virtuels . . . . .	25
1.3.5 Méthodes numériques : revue bibliographique . . . . .	28
1.4 Discrétisation du contact : élément "nœud-facette" . . . . .	31
1.4.1 Discrétisation par la MEF . . . . .	31
1.4.2 Élément de contact "nœud-facette" . . . . .	33

1.5	Conclusion . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Approximation diffuse et contact . . . . .	42
2.2.1	Hypothèses et choix . . . . .	42
2.2.2	Détermination du repère diffus $R^d$ . . . . .	43
2.2.3	Approximation locale associée à un nœud $\mathbf{x}^c$ . . . . .	46
2.2.4	Détermination du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ . . . . .	47
2.2.5	Fonctions de poids . . . . .	49
2.2.6	Dépendances de la fonction $f_{\mathbf{x}^c}$ . . . . .	51
2.3	Nouvelle description de la géométrie du contact . . . . .	51
2.3.1	Notion de point le plus proche . . . . .	52
2.3.2	Base locale en $\mathbf{x}^d$ . . . . .	53
2.3.3	Notion de distance normale de contact diffus . . . . .	54
2.4	Élément de contact diffus 3D . . . . .	54
2.4.1	Résidu élémentaire . . . . .	55
2.4.2	Matrice tangente élémentaire de contact . . . . .	58
2.5	Calcul des variations . . . . .	61
2.5.1	Calcul de $\delta\bar{X}_1$ et $\delta\bar{X}_2$ . . . . .	61
2.5.2	Détermination de la variation des vecteurs tangents . . . . .	62
2.5.3	Calcul de la première variation du vecteur $\boldsymbol{\nu}^d$ . . . . .	63
2.5.4	Première variation de $F$ . . . . .	64
2.5.5	Seconde variation de $F$ . . . . .	67
2.6	Implémentation et exemples . . . . .	71
2.6.1	Implémentation . . . . .	71
2.6.2	Exemples . . . . .	74
2.7	Conclusion . . . . .	90
<b>3</b>	<b>Considérations pour améliorer le traitement numérique</b>	<b>93</b>
3.1	Introduction . . . . .	93
3.2	Traitement de la pénalité . . . . .	94
3.2.1	Régularisation du paramètre de pénalité . . . . .	94

3.2.2	Ajustement automatique du paramètre de pénalité . . . . .	95
3.2.3	Algorithme détaillé de la méthode de pénalité avec paramètre ajustable . . . . .	99
3.3	Ajustement du pas de temps . . . . .	99
3.3.1	Description de la stratégie . . . . .	101
3.3.2	Détermination de $\beta$ . . . . .	101
3.3.3	Algorithme détaillé de l'ajustement automatique du pas . . . . .	104
3.4	Exemples . . . . .	105
3.4.1	Aplatissement d'une calotte sphérique . . . . .	105
3.4.2	Test d'indentation . . . . .	107
3.4.3	Contact entre une plaque et un cylindre rigide . . . . .	115
3.5	Conclusion . . . . .	116
<b>Conclusion générale</b>		123
<b>Annexes</b>		125
<b>A Elément de contact</b>		127
A.1	Calcul de $\bar{\xi}_1$ et $\bar{\xi}_2$ . . . . .	127
A.2	Détermination de $\delta\bar{\xi}_1$ et $\delta\bar{\xi}_2$ . . . . .	128
A.3	Expression de $\delta\nu^m$ . . . . .	130
A.4	Résumé . . . . .	131
<b>B Calcul des grandeurs diffuses</b>		133
B.1	Quelques vecteurs "importants" ... . . . .	133
B.1.1	Variation de $\delta\mathbf{x}^d$ . . . . .	133
B.1.2	Variation de $\tau_1^d$ et $\tau_2^d$ . . . . .	133
B.2	Calcul de $\delta\bar{X}_1$ et $\delta\bar{X}_2$ . . . . .	134
B.3	Calcul de $\delta\nu^d$ . . . . .	135
<b>C Publications</b>		137
<b>D Bibliographie</b>		139

# Notations

## Chapitre 1

$C_0$	Configuration initiale à l'instant $t = 0$
$C_t$	Configuration courante à l'instant $t$
$\phi$	Transformation
$\bar{F}^t$	Gradient de la transformation $\phi_t$
$J$	Déterminant du gradient de la transformation
$\mathbf{X}$	Position d'un point matériel à l'instant initial
$\mathbf{x}$	Position d'un point matériel à l'instant $t$
$\mathbf{U}$	Vecteur déplacement
$\bar{\bar{C}}$	Tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite
$\bar{\bar{B}}$	Tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche
$\bar{\bar{E}}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
$d\Gamma$	Élément d'aire de la configuration initiale $C_0$
$d\gamma$	Élément d'aire de la configuration actuelle $C_t$
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\bar{\bar{\Pi}}$	Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\bar{\bar{S}}$	Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$d\mathbf{f}$	Effort exercé sur l'élément d'aire $d\gamma$
$\mathbf{N}_0$	Vecteur normal à l'élément d'aire $d\Gamma$
$\mathbf{N}$	Vecteur normal à l'élément d'aire $d\gamma$
$\mathbf{t}$	Vecteur contraintes de Cauchy
$\mathbf{T}$	Premier vecteur contrainte de Piola-Kirchhoff
$\mathbf{f}$	Densité d'efforts volumiques imposée dans la configuration actuelle
$\mathbf{t}_d$	Densité d'efforts surfaciques imposée dans la configuration actuelle

---

$\mathbf{x}^c$	Point esclave en contact potentiel
$\Gamma_c^i$	Surface de contact du solide $\Omega^i$ dans la configuration de référence
$\gamma_c^i$	Surface de contact du solide $\Omega^i$ dans la configuration actuelle
$\mathbf{x}^m$	Projection de $\mathbf{x}^c$ sur la surface $\gamma_c^s$
$(\tau_1^m, \tau_2^m, \nu^m)$	Base naturelle associée à $\Omega^m$ dans la configuration actuelle au point $\mathbf{x}^m$
$(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$	Coordonnées paramétriques de $\mathbf{x}^m$
$\mathbf{v}_t$	Vitesse de glissement
$\mathbf{t}^s$	Vecteur des contraintes de Cauchy du corps esclave
$\mathbf{t}^m$	Vecteur des contraintes de Cauchy du corps maître
$\mathbf{T}^s$	Premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff du corps esclave
$\mathbf{T}^m$	Premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff du corps maître
$\mathbf{T}_g$	Composante tangentielle de $\mathbf{T}^s$
$\mathbf{t}_g$	Composante tangentielle de $\mathbf{t}^s$
$\mathbf{T}_n$	Composante normale de $\mathbf{T}^s$
$\mathbf{t}_n$	Composante normale de $\mathbf{t}^s$
$g_n$	Distance normale de contact
$\delta g_n$	Première variation de $g_n$
$\Delta \delta g_n$	Seconde variation de $g_n$
$G_c$	Travaux virtuels des efforts de contact
$\Delta G_c$	Linéarisation de $G_c$
$\varepsilon_n$	Coefficient de pénalisation
$\mathbf{R}_c$	Résidu de contact élémentaire
$\mathbf{K}_c$	Matrice tangente de contact élémentaire

## Chapitre 2

$S_g^d$	Surface de contact approchée
$R^d$	Repère diffus
$n$	Nombre de nœuds de la cible utilisés dans l'approximation
$\mathbf{x}^i$	Nœud de la surface maître utilisé dans l'approximation
$\mathbf{x}^c$	Nœud esclave
$(X_1^c, X_2^c, X_3^c)$	Coordonnées du nœud $\mathbf{x}^c$ dans $R^d$
$(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$	Coordonnées du nœud $\mathbf{x}^i$ dans $R^d$
$S^d$	Approximation locale
$\mathbf{x}^p$	Projection de $\mathbf{x}^c$ sur le plan défini par $R^d$
$f_{\mathbf{x}^c}$	Equation de l'approximation associée à $\mathbf{x}^c$
$p$	Base polynomiale
$p^i$	Base polynomiale évaluée en $\mathbf{x}^i$
$\alpha$	Coefficient de l'approximation
$\mathcal{Z}$	Vecteur des troisièmes composantes de tous les nœuds $\mathbf{x}^i$
$\mathcal{W}$	Matrice diagonale des fonctions poids
$w^i$	Fonction de poids attachée au nœud $\mathbf{x}^i$
$\mathbf{x}^d$	Projection de $\mathbf{x}^c$ sur $f_{\mathbf{x}^c}$
$\tau_\alpha^d$	Vecteurs tangents au point $\mathbf{x}^d$
$\nu^d$	Vecteur normal
$g_n^d$	Distance normale de contact diffus
$R_c^d$	Résidu élémentaire de contact diffus
$K_c^d$	Matrice tangente élémentaire de contact diffus
$\bar{X}_\alpha$	Coordonnées du point $\mathbf{x}^d$ dans $R^d$
$\mathbf{u}^d$	Vecteur des inconnues de l'élément de contact 3D diffus
$\delta \mathbf{u}^d$	Vecteur des variations de $\mathbf{u}^d$
$\Delta \mathbf{u}^d$	Vecteur des variations de $\mathbf{u}^d$
$\bar{F}$	$f_{\mathbf{x}^c}$ évaluée en $\mathbf{x}^d$
$\nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F}$	Gradient de $\bar{F}$ par rapport au vecteur $\mathbf{u}^d$
$\mathcal{N}_c^d$	Vecteur à $3(n+1)$ composantes
$\delta \mathbf{x}^d$	Première variation de $\mathbf{x}^d$

$\Delta\delta\mathbf{x}^d$	Double variation de $\mathbf{x}^d$
$\delta g_n^d$	Première variation de $g_n^d$
$\Delta\delta g_n^d$	Double variation de $g_n^d$
$\delta\tau_\alpha^d (\Delta\tau_\alpha^d)$	Variation de $\tau_\alpha^d$
$\mathcal{P}$	Matrice des $\mathbf{p}^i, i = 1, \dots, n$

### Chapitre 3

$\Delta t$	Incrément de chargement courant
$\Delta t_{cor}$	Incrément de chargement corrigé
$\Delta t_{min}$	Incrément de chargement minimum autorisé
$\Delta t_{max}$	Incrément de chargement maximum autorisé
${}^t\varepsilon_n^k$	Paramètre de pénalité du nœud $\mathbf{x}^k$ au temps $t$
${}^{t+\Delta t}\varepsilon_n^k$	Paramètre de pénalité du nœud $\mathbf{x}^k$ au temps $t + \Delta t$
${}^t g_n^k$	Distance normale de contact du nœud $\mathbf{x}^k$ au temps $t$
${}^{t+\Delta t} g_n^k$	Distance normale de contact du nœud $\mathbf{x}^k$ au temps $t + \Delta t$
$g_{max}$	Pénétration maximale autorisée
$g_{min}$	Pénétration minimale autorisée
$N_{pc}$	Nombre de nœuds potentiellement en contact
$N_c$	Nombre maximal d'entrées en contact autorisées sur un pas de temps

---

# Introduction générale

Qu'il s'agisse de simuler l'opération d'encapsulage de bouteilles, le comportement d'un contacteur électrique, le frottement d'un verre dans un boîtier de montre sans parler des procédés de mise en forme (forgeage, emboutissage, entre autres), la simulation numérique de systèmes industriels nécessite des modélisations de plus en plus fines des phénomènes de contact. Les problèmes de contact interviennent de façon très différente en fonction de la nature du problème à traiter. Il est ainsi habituel de distinguer, dans les codes de calcul par éléments finis, les problèmes de contact faisant intervenir des petits débattements relatifs de ceux faisant intervenir des grands glissements. Les premiers concernent des applications de frottement et sont généralement convenablement modélisés par des éléments de contact nœud à nœud alors que les seconds nécessitent des algorithmes performants de recherche des zones de contact et c'est souvent l'efficacité de ces algorithmes de recherche qui conditionne l'efficacité générale de la méthode. Une autre source de difficultés en présence de grands glissements résulte de la description des zones de contact. Ces zones sont en effet généralement facétisées (représentation assez naturelle dans une approche par éléments finis) ce qui conduit à des difficultés numériques lors du glissement d'un point sur deux facettes adjacentes. Là encore, la mise en place d'outils de régularisation des surfaces de contact joue un rôle primordial sur la robustesse de la méthode. Les méthodes de prise en compte des conditions unilatérales sont aujourd'hui bien connues (méthode de pénalité, multiplicateurs de Lagrange, lagrangien augmenté ...). Leur mise en œuvre dans le cas d'un problème présentant des matériaux très différents (acier, élastomère par exemple) ou des structures de rigidité dissemblable (cas d'un contacteur électrique) pose des difficultés qui se traduisent souvent par la non-convergence des calculs. L'introduction de lois de frottement à l'interface conduit à réduire très fortement les tailles d'incrément pour permettre la convergence des calculs. L'utilisation de lois de comportement élastoplastique conduit au même type de problème. Par ailleurs, l'introduction d'une loi de frottement conduit à des systèmes d'équations non symétriques. Cet aspect, combiné au mauvais conditionnement du système d'équations, limite fortement le choix d'un solveur pour la résolution.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans le cadre d'un contrat de recherche avec la société ESI Software. L'objectif de ces travaux est d'une part, de faire le point sur les techniques existantes, d'autre part, de proposer puis développer, dans un code de calcul par éléments finis implicite, une méthode de prise en compte du contact généralisé tridimensionnel entre corps déformables, susceptible de s'adapter à la plupart des situations rencontrées dans l'industrie en se limitant toutefois aux cas de sollicitations statiques. Tous les développements informatiques



ont été réalisés directement dans l'environnement du logiciel de simulation par éléments finis SYSTUS. Nous nous sommes donc uniquement focalisés sur le problème du contact.

Les problèmes de contact génèrent des difficultés tant sur le plan théorique que numérique. Il est indispensable de modéliser mathématiquement et mécaniquement le comportement de deux corps déformables en contact éventuel. Ceci a nécessité le développement d'une théorie continue du contact [49, 63]. Le problème engendré doit alors être résolu en utilisant la méthode des éléments finis associée à la méthode de pénalisation. C'est dans le premier chapitre que tous ces aspects sont évoqués. Après avoir fixé le cadre et le formalisme de la mécanique des milieux continus en grandes déformations, la modélisation du contact est présentée. Ensuite, les méthodes classiques utilisées pour résoudre les problèmes de ce type sont évoquées. Nous terminons ce chapitre par la description complète d'un élément de contact "noeud-facette" dans le cas du contact glissant.

Les deux chapitres suivants sont dédiés à la présentation de voies d'amélioration des méthodes destinées à les rendre plus robustes et donc d'application plus générale. Plusieurs voies de recherche originales ont été explorées.

Le chapitre 2 propose une stratégie pour tenter de réduire les difficultés dues à la géométrie du problème. Les techniques d'approximation diffuse ont été mises en œuvre pour régulariser efficacement les zones de contact. Ces méthodes ont été très récemment utilisées avec succès pour construire des algorithmes de remaillage de surfaces maillées ; l'approximation diffuse servant à reconstruire localement la géométrie de l'objet facétisé. Après une présentation des techniques d'approximation diffuse, nous présentons leur application au traitement d'une surface de contact. Les quantités nécessaires à la modélisation du contact glissant sont déterminées en utilisant les propriétés de la surface régularisée. La méthode des éléments finis est ensuite associée à la procédure de régularisation pour construire l'élément de contact 3D diffus. Finalement, nous présentons des exemples numériques.

Le chapitre 3 s'intéresse à deux stratégies de résolution d'un problème comportant de nombreuses fortes non-linéarités comme le contact ou le comportement élastoplastique des matériaux entre autres. Pour prendre en compte les conditions unilatérales de contact, nous avons opté pour la méthode de pénalisation qui s'avère très simple à mettre en œuvre. Cependant, la détermination d'une bonne valeur du paramètre de pénalisation est un exercice délicat. C'est pourquoi nous avons développé une approche pour tenter d'ajuster la pénalité. L'originalité de l'approche proposée repose sur le fait que le contact est piloté en interpénétration entre solides. Pour terminer, nous nous sommes intéressés à un ajustement de l'incrément de chargement. En effet, lorsqu'un problème de contact est résolu, l'entrée en contact d'un trop grand nombre de noeuds simultanément, peut perturber fortement le processus itératif de Newton. Ainsi, semble-t-il intéressant de mettre en œuvre un algorithme pour adapter les incréments de chargement.

# Mécanique du contact

## Sommaire

- 1.1 Introduction**
- 1.2 Mécanique des grandes déformations**
  - 1.2.1 Description de la cinématique
  - 1.2.2 Tenseur gradient de déformation
  - 1.2.3 Mesure des déformations
  - 1.2.4 Description des tenseurs des contraintes
  - 1.2.5 Equations d'équilibre
  - 1.2.6 Formes incrémentale et discrète des équations d'équilibre
- 1.3 Quelques notions sur la théorie continue du contact**
  - 1.3.1 Géométrie du contact
  - 1.3.2 Définition des grandeurs cinématiques
  - 1.3.3 Loi de contact unilatéral et loi de frottement
  - 1.3.4 Principe des travaux virtuels
  - 1.3.5 Méthodes numériques : revue bibliographique
- 1.4 Discrétisation du contact : élément "nœud-facette"**
  - 1.4.1 Discrétisation par la MEF
  - 1.4.2 Élément de contact "nœud-facette"
- 1.5 Conclusion**

## 1.1 Introduction

La simulation numérique de problèmes tels que le freinage d'un verre dans un boîtier de montre sans parler des procédés de mise en forme, fait intervenir le contact entre corps déformables. La plupart du temps, ces phénomènes donnent lieu à des grands déplacements et des grandes déformations. Les équations du contact vont devoir exprimer deux règles fondamentales : la non-interpénétration de la matière et la présence d'une contrainte de cisaillement pour provoquer le glissement (loi de frottement entre les deux corps en contact). La première des difficultés qui se pose est de formuler correctement le contact. Le contact peut être formulé sur le modèle discret après l'approximation par éléments finis. Une autre solution consiste à utiliser *la théorie continue du contact* dont le but est de repousser au maximum la dépendance du formalisme vis à vis de la MEF. Cette approche apparaît comme la plus

intéressante. En effet, le contact est développé sans tenir compte de la discrétisation. Ceci est particulièrement bien adapté aux problèmes des grandes déformations, cadre dans lequel nous allons travailler. C'est pourquoi, nous avons choisi d'utiliser cette formulation.

La deuxième difficulté est de résoudre numériquement le problème engendré. La résolution du problème est rendue complexe par le caractère implicite des conditions de contact, qui sont en fait des inéquations.

Ce chapitre est consacré à la mise en évidence de toutes les quantités nécessaires à la description du contact. Après quelques rappels sur la mécanique des milieux continus en grandes déformations, la théorie continue du contact est exposée. Les méthodes numériques utilisées pour faire face à ce genre de problème sont ensuite évoquées. Pour terminer, la discrétisation du contact est développée par l'intermédiaire de l'élément de contact "nœud-facette".

## 1.2 Mécanique des grandes déformations

Le but de notre travail est d'établir un algorithme du contact pour des corps déformables, subissant éventuellement des grandes transformations géométriques. A cet effet, nous présentons dans cette section quelques rappels indispensables de la mécanique des milieux continus en grandes déformations. Nous allons commencer par décrire la cinématique des corps déformables [19, 26, 72].

### 1.2.1 Description de la cinématique

Soit un solide déformable occupant le domaine  $\Omega_0$  dans sa position de référence et le domaine  $\Omega_t$  dans la configuration actuelle notée  $C_t$ . Cette configuration est définie par l'application  $\phi$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_0 \times T &\rightarrow \Omega_t \\ (\mathbf{X}, t) &\rightarrow \phi(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{X}$  est la position d'un point matériel à l'instant initial et  $\mathbf{x}$  la position du même point matériel à l'instant  $t$  (Figure 1.1). L'application  $\phi$  est une déformation de la configuration initiale; elle doit donc être régulière, préserver la non interpénétration de la matière (traduit mathématiquement par l'injectivité) et l'orientation ( $\forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \det \bar{\nabla} \phi > 0$ ). Elle permet de définir le vecteur déplacement d'un point du solide au cours de la transformation. Entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant courant  $t$ , le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point de position initiale  $\mathbf{X}$  est donné par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) - \phi(\mathbf{X}, 0) = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (1.2)$$

Cette expression s'écrit aussi :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.3)$$

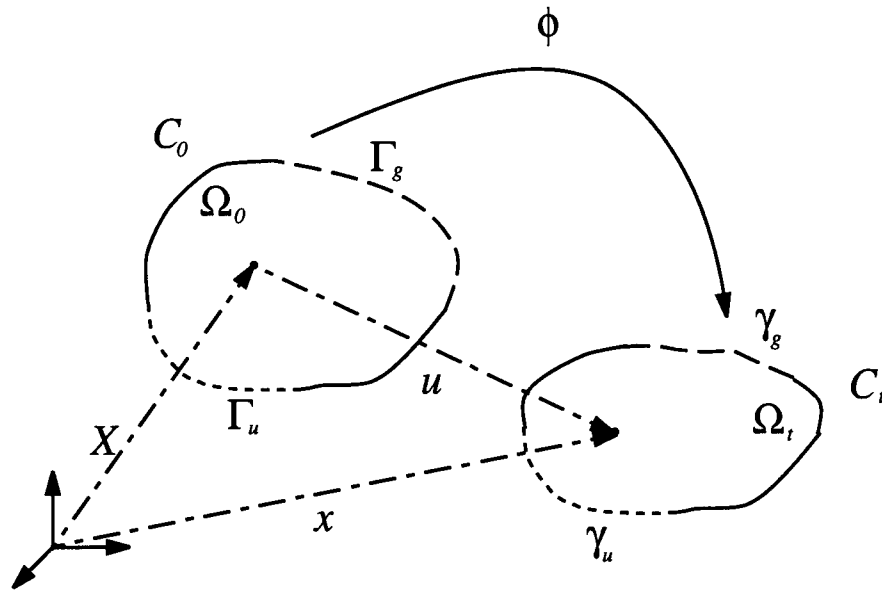


Fig. 1.1 – Configurations initiale et actuelle d'un solide

Considérons ensuite la frontière du solide déformable  $\Omega$ , notée dans la suite  $\Gamma$ . Cette frontière est composée de trois parties définies comme suit :

- une partie où le déplacement est imposé, notée  $\Gamma_u$ ;
- une partie où une densité surfacique d'efforts est imposée, notée  $\Gamma_g$ ;
- une partie éventuellement en contact notée,  $\Gamma_c$ .

Nous sommes en mesure de définir la frontière  $\gamma$  transformée de la frontière  $\Gamma$  par l'application  $\phi$  :

$$\gamma := \phi(\Gamma)$$

Cette frontière  $\gamma$  subit la même partition que la frontière  $\Gamma$ . Le problème des grandes déformations vient du fait qu'il y ait deux configurations bien distinctes. La question qui se pose alors est de savoir laquelle va être prise comme configuration de référence. Le choix d'une configuration pour représenter les grandeurs comme les déplacements et les forces définit le type d'analyse réalisée. Si toutes les grandeurs sont décrites dans la configuration de référence  $C_0$ , l'analyse est dite *lagrangienne*. Il est le plus souvent question de *description lagrangienne*. Si toutes les grandeurs sont décrites dans la configuration actuelle, l'analyse est dite *eulérienne*. Nous parlerons de *description eulérienne*.

### 1.2.2 Tenseur gradient de déformation

Le gradient de l'application  $\phi$  est appelé gradient de la déformation. Son expression est :

$$\bar{\bar{F}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.4)$$

Le déterminant de ce gradient est  $J$  :

$$J = \det \bar{\bar{F}} \quad (1.5)$$

### 1.2.3 Mesure des déformations

Le fait d'avoir deux configurations bien distinctes implique un choix entre la *description eulérienne* où les tenseurs sont définis par rapport à la configuration déformée et la *description lagrangienne* où les tenseurs sont définis par rapport à la configuration de référence.

#### Tenseurs de Cauchy-Green

Le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite joue un rôle fondamental en élasticité. Son expression est :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} \quad (1.6)$$

Ce tenseur lagrangien caractérise les déformations dans un solide.

Le tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche est eulérien et est donné par :

$$\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{F}} \bar{\bar{F}}^T \quad (1.7)$$

#### Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est un tenseur lagrangien défini par :

$$\bar{\bar{E}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2} (\bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}) \quad (1.8)$$

### 1.2.4 Description des tenseurs des contraintes

#### Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$  permet de mesurer l'effort  $d\mathbf{f}$  actuel exercé sur un élément d'aire  $d\gamma$  de la configuration actuelle  $C_t$  :

$$d\mathbf{f} = \bar{\sigma} \mathbf{N} d\gamma \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{N}$  est la normale à l'élément d'aire considéré sur la configuration actuelle. Ce tenseur est un tenseur eulérien.

Il existe dans la littérature d'autres tenseurs pour représenter les contraintes dans un milieu continu. Leur interprétation physique n'est pas toujours évidente. Comme pour les différents tenseurs des déformations, ces tenseurs sont équivalents. Ils permettent tous de calculer la contrainte de Cauchy. Leur intérêt est qu'ils simplifient parfois certaines expressions quand on désire obtenir des intégrales sur la configuration initiale.

### Tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff

Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (ou tenseur des contraintes de Boussinesq)  $\bar{\bar{\Pi}}$ , permet de mesurer l'effort actuel  $d\mathbf{f}$  exprimé sur la configuration de référence  $C_0$  :

$$d\mathbf{f} = \bar{\bar{\Pi}} \mathbf{N}_0 d\Gamma \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{N}_0$  est la normale à l'élément d'aire considéré  $d\Gamma$  sur la configuration de référence  $C_0$ . Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\bar{\bar{\Pi}}$  n'est pas forcément symétrique. De ce fait, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, tenseur symétrique et lagrangien, est introduit :

$$\bar{\bar{S}} = \bar{F}^{-1} \bar{\bar{\Pi}} \quad (1.11)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$  et le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff sont liés par :

$$J \bar{\sigma} = \bar{\bar{\Pi}} \bar{F}^T \quad (1.12)$$

Cette relation est obtenue à l'aide des formules de transformation d'un élément d'aire. Toutes ces relations sont mises en évidence et démontrées dans [20, 72].

La densité de force surfacique actuelle sur la configuration actuelle est définie par le vecteur des contraintes de Cauchy :

$$\mathbf{t} = \bar{\sigma} \mathbf{N} \quad (1.13)$$

Le premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff s'écrit :

$$\mathbf{T} = \bar{\bar{\Pi}} \mathbf{N}_0 \quad (1.14)$$

Nous considérons  $d\mathbf{f}_0$  le transporté de l'effort élémentaire  $d\mathbf{f}$  sur la configuration initiale :

$$d\mathbf{f}_0 = \bar{F}^{-1} d\mathbf{f} \quad (1.15)$$

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\bar{\bar{S}}$  s'exprime entièrement sur la configuration initiale et nous avons :

$$d\mathbf{f}_0 = \bar{\bar{S}} \mathbf{N}_0 d\Gamma \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Equations d'équilibre

Notre étude va se limiter au cadre quasi statique. Ainsi les termes d'inertie seront négligés. Reprenons un corps déformable occupant le domaine  $\Omega_0$  dans la configuration initiale et le domaine  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ . Nous supposons que ce corps déformable est soumis à une densité d'efforts volumiques  $\mathbf{f}$  dans  $\Omega_t$ . Sa frontière dans la configuration actuelle  $\gamma$  est quant à elle, soumise à un déplacement imposé  $\mathbf{u}_d$  sur  $\gamma_u$ , et une densité surfacique  $\mathbf{t}_d$  sur  $\gamma_g$ .

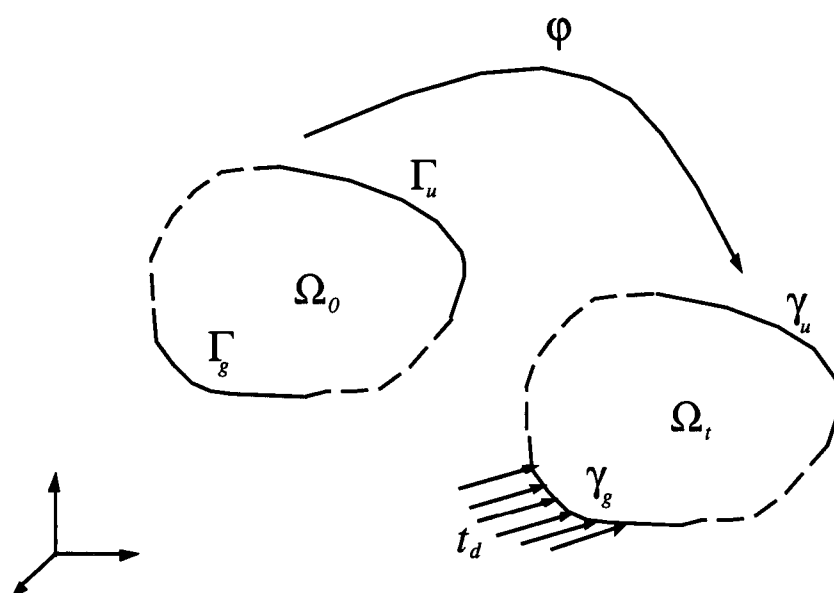


Fig. 1.2 – Représentation des efforts sur le solide

#### Equation d'équilibre dans la configuration déformée

En utilisant les théorèmes généraux de la mécanique des milieux continus, le champ des tenseurs des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$  doit être la solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ \bar{\sigma} \mathbf{N} = \mathbf{t}_d & \text{sur } \gamma_g \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \gamma_u \end{cases} \quad (1.17)$$

Les équations introduites précédemment ne sont guères exploitables car elles sont écrites sur la configuration déformée en terme de variables *eulériennes* qui sont justement les inconnues à déterminer. C'est pour cette raison, qu'il est indispensable de transporter ces équations sur une configuration connue.

### Equation d'équilibre dans la configuration de référence

Pour établir les équations dans une configuration connue, il faut être en mesure de transformer les conditions aux limites  $\bar{\sigma} \mathbf{N} = \mathbf{t}_d$  sur  $\gamma_g$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$  sur  $\gamma_u$ . Ce qui est possible à l'aide du tenseur de Piola-Kirchhoff,  $\bar{\bar{\Pi}}$ . Le problème d'équilibre sur la configuration de référence s'énonce comme suit. Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\bar{\bar{\Pi}}$  doit satisfaire les équations suivantes dans la configuration initiale :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\bar{\Pi}} + \mathbf{F} = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \bar{\bar{\Pi}} \mathbf{N}_0 = \mathbf{T}_d & \text{sur } \Gamma_g \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{d_0} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (1.18)$$

En vue d'utiliser la méthode des éléments finis pour résoudre le problème (1.17) (équivalent à (1.18)), il est indispensable de présenter une *formulation faible*, ce qui est aussi appelé *principe des travaux virtuels*. Ce principe affirme que, pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible  $\boldsymbol{\eta}$ , le travail virtuel des efforts internes est égal au travail virtuel des efforts externes.

### Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels peut être écrit soit sur la configuration de référence, soit sur la configuration actuelle.

**Sur la configuration actuelle** Pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible noté  $\boldsymbol{\eta}$ , le problème (1.17) est équivalent au problème variationnel, appelé principe des travaux virtuels sur la configuration actuelle :

$$G_t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (1.19)$$

où

$$G_t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = G_t^{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) + G_t^{ext}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) \quad (1.20)$$

Dans cette expression,  $G_t^{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  est le travail virtuel des efforts intérieurs et  $G_t^{ext}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  est le travail virtuel des efforts extérieurs.

Les quantités  $G_t^{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  et  $G_t^{ext}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})$  s'expriment de façon classique :

$$G_t^{ext}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\gamma_g} \mathbf{t}_d \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\gamma_g \quad (1.21)$$

$$G_t^{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = - \int_{\Omega_t} \bar{\sigma} : \bar{\nabla} \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t \quad (1.22)$$

A l'aide des équations (1.21) et (1.22), l'expression (1.19) devient :

$$G_t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = - \int_{\Omega_t} \bar{\sigma} : \bar{\nabla} \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\gamma_g} \mathbf{t}_d \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\gamma_g \quad (1.23)$$



Finalement, pour tout  $\boldsymbol{\eta}$ , le problème (1.17) est équivalent au problème variationnel :

$$-\int_{\Omega_t} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}} \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\Gamma_g} \mathbf{t}_d \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\gamma = 0 \quad (1.24)$$

Il est possible de montrer que cette expression peut s'écrire en introduisant  $\bar{\bar{D}}_{\boldsymbol{\eta}}$ , le taux de déformation virtuel :

$$-\int_{\Omega_t} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}}_{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Omega_t + \int_{\Gamma_g} \mathbf{t}_d \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\gamma = 0 \quad (1.25)$$

$$\bar{\bar{D}}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\bar{\nabla}} \boldsymbol{\eta} + \bar{\bar{\nabla}} \boldsymbol{\eta}^T \right\} \quad (1.26)$$

**Sur la configuration initiale** Pour tout champ cinématiquement admissible défini sur la configuration initiale, noté  $\boldsymbol{\eta}_0$ , le problème (1.18) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$G_0(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) = 0 \quad (1.27)$$

où

$$G_0(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) = G_0^{int}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) + G_0^{ext}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) \quad (1.28)$$

De façon similaire à ce qui a été fait pour la configuration actuelle,  $G_0^{int}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_0)$  représente le travail virtuel des efforts intérieurs et  $G_0^{ext}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_0)$  le travail virtuel des efforts extérieurs. L'expression de ces quantités est :

$$G_0^{ext}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_g} \mathbf{T}_d \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Gamma \quad (1.29)$$

$$G_0^{int}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}_0) = - \int_{\Omega_0} \bar{\bar{\Pi}} : \bar{\bar{\nabla}} \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Omega_0 \quad (1.30)$$

Le problème aux limites (1.18) est finalement équivalent au problème variationnel :

$$\int_{\Omega_0} \bar{\bar{\Pi}} : \bar{\bar{\nabla}} \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_g} \mathbf{T}_d \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \, d\Gamma \quad (1.31)$$

Pour plus de détails sur tous ces aspects, le lecteur peut se reporter entre autres à [6, 19, 20, 72].

## 1.2.6 Formes incrémentale et discrète des équations d'équilibre

Le problème qui doit être résolu est fortement non linéaire à cause des grands déplacements et des grandes déformations. Il apparaît alors indispensable d'utiliser un processus incrémental pour la résolution. Nous procédons donc à un découpage incrémental du chargement. Il s'agit d'évaluer le travail virtuel  $G_{t+\Delta t}$  à l'instant

$t + \Delta t$  en utilisant une configuration connue prise comme référence géométrique. Le calcul va se faire par une succession d'itérations en partant des informations disponibles sur la configuration connue. Pour cela, toutes les configurations précédentes  $0, 2\Delta t, \dots, t$  ont été déterminées. Le choix d'une configuration de référence conduit à distinguer deux formulations : une formulation dite *lagrangienne totale* et une formulation *lagrangienne actualisée*. La formulation *lagrangienne totale* utilise une configuration de référence fixe à savoir la configuration à  $t = 0$ . Pour la configuration *lagrangienne actualisée*, la configuration déterminée à l'instant  $t$  est utilisée comme nouvel état de référence.

### Formulation lagrangienne totale

Dans le cas de la formulation lagrangienne totale, la configuration de référence est la configuration à l'instant  $t = 0$ . L'objectif est donc de calculer :

$$- \int_{\Omega_0} \bar{\bar{S}} : \bar{\bar{E}}_{\eta} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\Omega_0 + \int_{\Gamma_g} \mathbf{T}_d \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\Gamma_g = 0 \quad (1.32)$$

### Formulation lagrangienne actualisée

La formulation *lagrangienne actualisée* s'écrit simplement :

$$- \int_{\Omega_t} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}}_{\eta} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega_t + \int_{\gamma_g} \mathbf{t}_d \cdot \boldsymbol{\eta} d\gamma_g = 0 \quad (1.33)$$

$D_{\eta}$  est le taux de déformation virtuel.

Le détail de ces approches peut être trouvé dans [8].

### Discrétisation

Les équations d'équilibre vont être résolues numériquement en utilisant la méthode des éléments finis, que nous supposons connue (pour d'éventuels informations nous renvoyons le lecteur à [6] ou [8]). Les inconnues sont les déplacements des nœuds.

La méthode des éléments finis suppose que le domaine  $\Omega$  étudié est discrétisé en  $n_{ele}$  éléments. Chaque élément  $e$  est défini par des fonctions de forme  $N_i^e$ , où  $i = 1, \dots, n_e$ ,  $n_e$  étant le nombre de nœuds rattachés à l'élément considéré. Il s'agit ici d'un type d'éléments dit, isoparamétrique. Tous les éléments ne sont pas de ce type, en particulier les poutres, les plaques et les coques ...

$$\mathbf{x}_{appr}^e = \mathbf{N}^{eT} \mathbf{x}^e \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{n_e} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ \dots \\ N_{n_e}^e \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

$\mathbf{N}^e$  est le vecteur élémentaire des fonctions de forme. A partir de cette approximation, l'équation d'équilibre s'écrit simplement :

$$F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (1.35)$$

avec

$$F_{int} = \sum_{n_{ele}} \int_{\Omega^e} B^{eT} \boldsymbol{\sigma}^e d\Omega_t^e \quad (1.36)$$

$$F_{ext} = \sum_{n_{ele}} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{F}^e d\Omega_t^e + \sum_{n_{ele}} \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{T}^e d\Gamma^e \quad (1.37)$$

où  $B^e$  la matrice des dérivées des fonctions de forme.

### Méthode de Newton

La méthode des éléments finis convertit le problème continu (1.32) en un problème discret équivalent (1.35) non linéaire :

$$G(\mathbf{x}) = F_{int} - F_{ext} = 0 \quad (1.38)$$

Pour résoudre ce problème la méthode de Newton Raphson peut être utilisée. La méthode de Newton transforme ce problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires. A l'itération  $i$ , le système à résoudre est de la forme :

$$K^i \Delta \mathbf{x}^i = -G(\mathbf{x}^i) \quad (1.39)$$

où

$$\Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i \quad (1.40)$$

et

$$K^i = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^i) \quad (1.41)$$

## 1.3 Quelques notions sur la théorie continue du contact

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est de parvenir à mettre en œuvre des outils numériques pour faciliter le traitement du contact. Notre attention va donc se porter surtout sur les modèles numériques mais il apparaît indispensable de présenter rapidement la modélisation continue du contact. Pour des détails concernant tous ces aspects, le lecteur peut se reporter aux nombreux travaux déjà menés :

- Simo et Laursen [45, 49]
- Klarbring [34]
- Curnier, He et Klarbring [21]

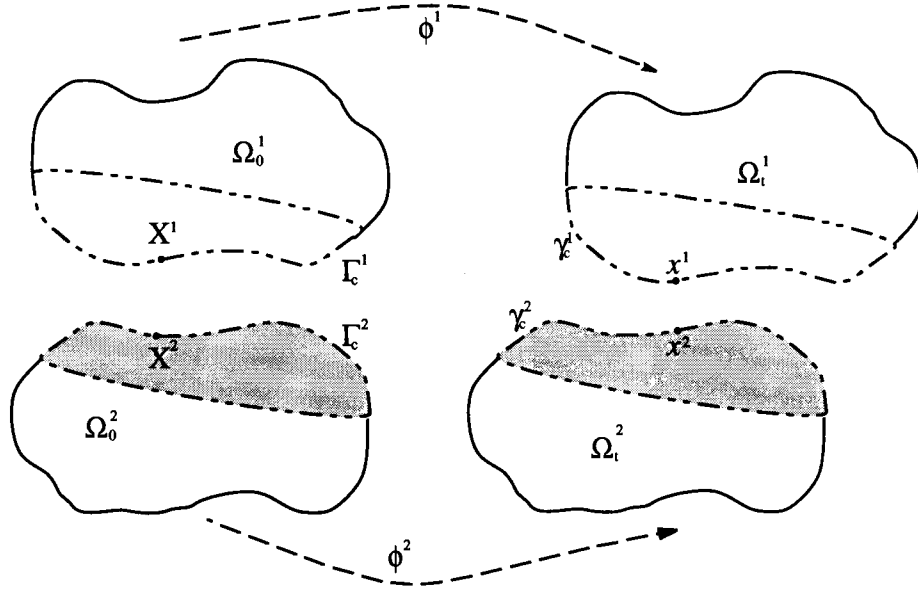


Fig. 1.3 – Cinématique du contact

– Alart et Curnier [3]

La modélisation du contact doit traduire deux phénomènes : la non-interpénétration entre les deux corps et la loi de frottement. Les phénomènes physiques seront traités correctement en incluant ces équations dans le modèle mathématique. Le cadre des grandes déformations va ajouter des contraintes à la description de ce problème. Une des difficultés majeures réside dans le fait que la surface de contact actuelle n'est pas connue *a priori*. Les équations du frottement vont dépendre de la vitesse relative entre les deux corps. Or, cette vitesse doit être objective. Il est donc nécessaire d'introduire des variables adéquates à sa description.

### 1.3.1 Géométrie du contact

Nous considérons deux corps éventuellement en contact occupant les domaines  $\Omega_0^1$  et  $\Omega_0^2$  dans la configuration de référence et  $\Omega_t^1$  et  $\Omega_t^2$  dans la configuration actuelle. Le mouvement du corps  $\Omega^i$  pour  $i = 1, 2$  est décrit par l'application  $\phi^i$  définie par :

$$\begin{aligned} \phi^i &: \Omega_0^i \times T \rightarrow \Omega_t^i \\ (X^i, t) &\rightarrow \phi^i(X^i, t) := x^i \end{aligned} \quad (1.42)$$

Nous appelons  $\Gamma_c^i$  pour  $i = 1, 2$  les surfaces de contact potentiel dans la configuration de référence et  $\gamma_c^i$  les surfaces de contact dans la configuration actuelle. Les surfaces de contact potentiel dans la configuration actuelle s'expriment alors comme suit :

$$\phi^i(\Gamma_c^i) := \gamma_c^i \quad i = 1, 2. \quad (1.43)$$

Les surfaces de contact sont supposées paramétrées dans la configuration actuelle et la configuration de référence par un paramétrage  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_t^i &: A^i \rightarrow \gamma_c^i \\ \xi &\rightarrow \Psi_t^i(\xi) \end{aligned} \quad (1.44)$$

En particulier nous avons :

$$\Psi_0^i(A^i) = \Gamma_c^i \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (1.45)$$

$$\Psi_t^i(A^i) = \gamma_c^i \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (1.46)$$

Pour tout point matériel  $X^i$  appartenant à  $\Gamma_c^i$  et la particule correspondante appartenant à  $\gamma_c^i$  à l'instant  $t$ , nous pouvons écrire, en utilisant les coordonnées curvilignes :

$$X^i = \Psi_0^i(\xi) \quad \text{et} \quad x^i = \Psi_t^i(\xi) \quad (1.47)$$

où nous avons  $x^i = \phi^i(X^i, t)$ .

L'introduction de la paramétrisation des surfaces de contact permet de définir une base locale tangente naturelle associée à la surface du corps déformable en contact dans la configuration actuelle  $b^i$  et une base dans la configuration de référence  $B^i$  (Figure 1.4).

$$\begin{aligned} B^i &= (T_1^i, T_2^i, N_0^i) \\ b^i &= (\tau_1^i, \tau_2^i, \nu^i) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Les vecteurs de ces nouvelles bases sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_\alpha^i &= \frac{\partial \Psi_0^i}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{et} \quad N_0^i = \frac{T_1^i \wedge T_2^i}{\|T_1^i \wedge T_2^i\|} \\ \tau_\alpha^i &= \frac{\partial \Psi_t^i}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{et} \quad \nu^i = \frac{\tau_1^i \wedge \tau_2^i}{\|\tau_1^i \wedge \tau_2^i\|} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Les bases duales  $B^{i*}$  et  $b^{i*}$  sont introduites :

$$\begin{aligned} B^{i*} &= (T_1^{i*}, T_2^{i*}, N_0^i) \\ b^{i*} &= (\tau_1^{i*}, \tau_2^{i*}, \nu^i) \end{aligned} \quad (1.50)$$

où les vecteurs tangents  $T_\alpha^{i*}$  et  $\tau_\alpha^{i*}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} T_\alpha^{i*} \cdot T_\beta^i &= \delta_{\alpha\beta} \\ \tau_\alpha^{i*} \cdot \tau_\beta^i &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Dans cette expression  $\delta$  représente le symbole de Kronecker. Les métriques associées sont données par les relations :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^i &= T_\alpha^i \cdot T_\beta^i \quad \text{et} \quad m_{\alpha\beta}^i = \tau_\alpha^i \cdot \tau_\beta^i \\ M_{\alpha\beta}^{i*} &= T_\alpha^{i*} \cdot T_\beta^{i*} \quad \text{et} \quad m_{\alpha\beta}^{i*} = \tau_\alpha^{i*} \cdot \tau_\beta^{i*} \end{aligned} \quad (1.52)$$

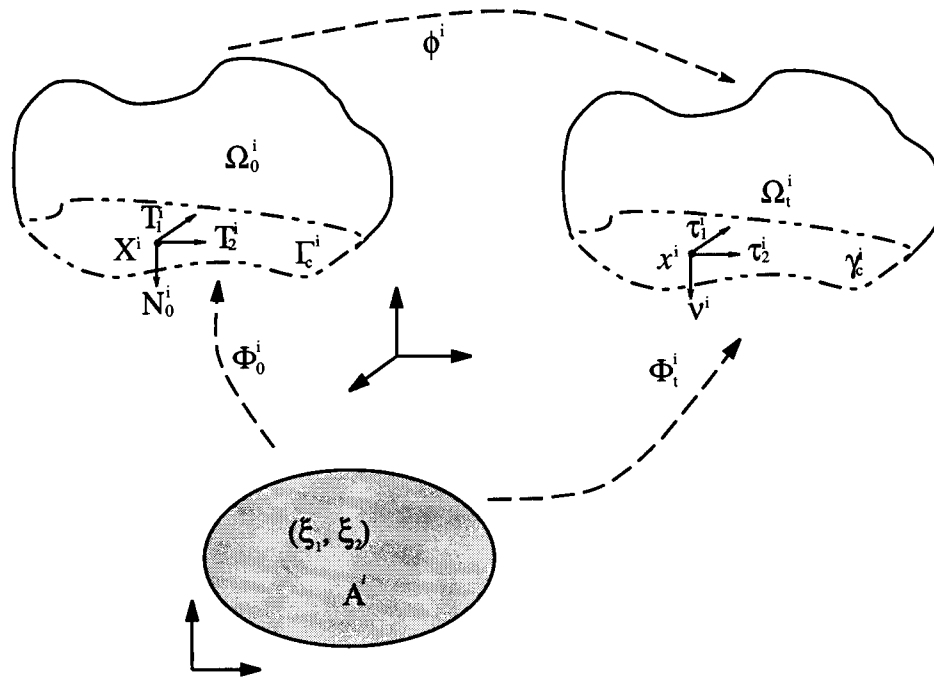


Fig. 1.4 – Base locale

### 1.3.2 Définition des grandeurs cinématiques

#### Notion de distance normale de contact

Dans la suite, le corps  $\Omega^1$  sera appelé corps esclave et le corps  $\Omega^2$  corps maître. La même terminologie sera utilisée pour les surfaces. Il est parfois question de contacteur et de cible. Le but est d'établir une bijection entre les deux surfaces de contact. Il apparaît alors que le corps maître va être décrit en fonction du corps esclave. Cette situation génère une dissymétrie dans la description du problème et c'est la critique principale qui peut être faite à propos de cette modélisation. Cependant ce problème peut être résolu numériquement en alternant le rôle d'un corps par rapport à l'autre à l'aide d'algorithmes spécifiques, nommés algorithmes "one pass" ou "two pass" [10]. Cette étude peut être menée en terme de variables lagrangiennes ou eulériennes. Le choix de l'une ou l'autre de ces options est complètement équivalent. Il est possible de voir les deux situations dans [17].

Il faut parvenir à étudier la position relative d'une particule  $\mathbf{x}^c$  appartenant à la surface de contact  $\gamma_c^s$  du corps esclave en fonction de la surface de contact maître  $\gamma_c^m$ . Ainsi, pour toute particule  $\mathbf{x}^c$  de la surface  $\gamma_c^s$  est déterminé un point de la surface  $\gamma_c^m$ , dit point le plus proche, solution du problème :

$$\mathbf{x}^m = \frac{1}{2} \operatorname{argmin}_{\xi \in A^m} \|\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\xi)\|^2 \quad (1.53)$$

L'unicité de ce problème de minimisation est un problème à part entière [21].

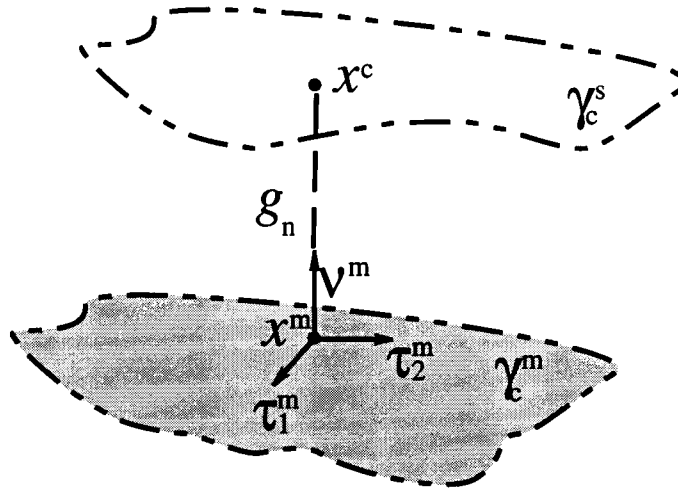


Fig. 1.5 – Définition de la distance normale de contact

Les coordonnées paramétriques du point  $\mathbf{x}^m$  seront notées dans la suite  $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ . Le vecteur séparant les points  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$  est appelé vecteur écart normal [63] ou bien vecteur distance [17]:

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad (1.54)$$

Nous considérons la base naturelle associée à la surface maître dans la configuration actuelle au point  $\mathbf{x}^m$ . Son expression se déduit des relations (1.49) et nous la notons  $\mathbf{b}^m = (\boldsymbol{\tau}_1^m, \boldsymbol{\tau}_2^m, \boldsymbol{\nu}^m)$  (Figure 1.5). Le critère de minimisation (1.53) conduit aux relations:

$$(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \cdot \boldsymbol{\tau}_i^m = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1.55)$$

Le point  $\mathbf{x}^m$  est en fait la projection de  $\mathbf{x}^c$  sur la surface  $\gamma_c^m$ . Par conséquent, le vecteur écart normal est colinéaire au vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^m$  et nous pouvons établir la relation:

$$\mathbf{g} = g_n \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.56)$$

Le scalaire  $g_n$  est appelé distance normale de contact et nous avons:

$$g_n = (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\bar{\boldsymbol{\xi}})) \cdot \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.57)$$

Ce scalaire va jouer un rôle crucial dans la mise en évidence de l'interpénétration entre les deux corps. Il traduit en fait le statut géométrique d'un point de contact. Trois statuts de contact sont envisageables (Figure 1.6):

– non contact

$$g_n > 0$$

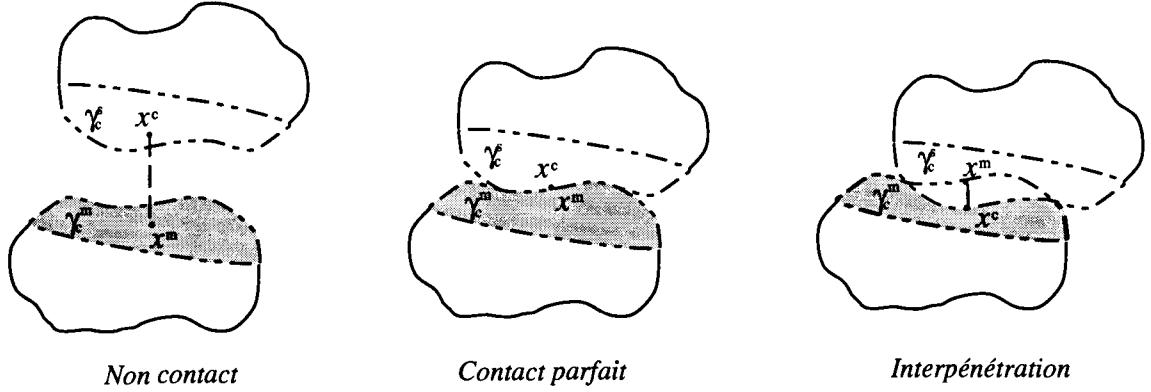


Fig. 1.6 – Statuts de contact

– contact parfait

$$g_n = 0$$

– interpénétration

$$g_n < 0$$

### Notion de distance tangentielle de contact

La prise en compte du frottement nécessite la détermination d'une vitesse de glissement qui permettra d'évaluer la puissance des efforts de frottement. La mesure du glissement doit s'effectuer dans le plan tangent à la surface maîtresse. La détermination d'une telle quantité apparaît nettement moins claire que la détermination de la distance normale. En effet, il faut donner une quantité vérifiant le critère d'objectivité. Pour ce faire, nous partons du vecteur  $\mathbf{g}$ . Sa dérivée par rapport au temps est évaluée pour obtenir :

$$\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}^c) - \mathbf{v}(\mathbf{x}^m) - \dot{\xi}_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \quad (1.58)$$

où  $\mathbf{v}(\mathbf{x}^c)$  et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}^m)$  sont les vitesses des points  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$ . La définition (1.56) est elle aussi dérivée par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{g}} = g_n \boldsymbol{\nu}^m + \dot{g}_n \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.59)$$

En utilisant les relations (1.58) et (1.59), nous obtenons :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}^c) - \mathbf{v}(\mathbf{x}^m) - \dot{\xi}_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m = g_n \boldsymbol{\nu}^m + \dot{g}_n \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.60)$$

Le problème qui se pose alors vient de la non-objectivité du terme  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ , rendant ainsi la vitesse de glissement non objective. La démonstration de ceci peut être trouvée dans [5, 17] entre autres. Dans cette situation, il faut parvenir à éliminer cet effet



non objectif. Pour ce faire, plusieurs stratégies ont été développées. Dans [49], T.A. Laursen et J.C. Simo supposent que le contact est établi et persistant, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} g_n &= 0 \quad , \text{ contact établi} \\ \dot{g}_n &= 0 \quad , \text{ contact persistant} \end{aligned} \quad (1.61)$$

De ce fait, la relation (1.60) devient simplement :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}^c) - \mathbf{v}(\mathbf{x}^m) = \dot{\xi}_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \quad (1.62)$$

D'autres possibilités sont envisageables et sont développées notamment dans [21, 34, 63]. La composante tangentielle, celle qui va nous servir à mesurer le glissement est calculée en projetant cette quantité sur le plan tangent à la surface maître, c'est à dire engendré par les vecteurs  $\boldsymbol{\tau}_1^m$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^m$  de la base  $b^m$ . Ceci conduit à la définition de la vitesse de glissement  $\mathbf{v}_g$  :

$$\mathbf{v}_g = \dot{\xi}_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \quad (1.63)$$

Cette vitesse est une vitesse eulérienne. Une autre vitesse complètement lagrangienne peut être définie, ainsi une loi de frottement totalement lagrangienne peut être établie [45].

### 1.3.3 Loi de contact unilatéral et loi de frottement

Dans cette partie, nous introduisons les grandeurs nécessaires à la modélisation des interactions entre les deux corps. Pour établir les conditions de contact unilatéral et de frottement, il est nécessaire de définir les densités d'efforts surfaciques pour le contact.

#### Grandeurs sthéniques du contact

En mécanique des milieux continus, la force de contact agissant sur la surface du corps esclave peut être représentée en considérant le vecteur des contraintes de Cauchy ou le premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Dans la suite, le vecteur des contraintes de Cauchy du corps esclave (respectivement du corps maître) sera noté  $\mathbf{t}^s$  (respectivement  $\mathbf{t}^m$ ) et le premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff du corps esclave (respectivement du corps maître),  $\mathbf{T}^s$  (respectivement  $\mathbf{T}^m$ ). Pour obtenir la loi de contact unilatéral et la loi de frottement, il faut décomposer le vecteur  $\mathbf{t}^s$  dans la base locale  $b^m$  sur la configuration actuelle. Dans un premier temps,  $\mathbf{t}^s$  est décomposé en une composante normale et des composantes tangentielles dans  $b^s$ , la base locale attachée à la surface esclave sur la configuration actuelle (par analogie à  $b^m$  complètement définie précédemment) :

$$\mathbf{t}^s = t_n^s \boldsymbol{\nu}^s + \mathbf{t}_g^s \quad (1.64)$$

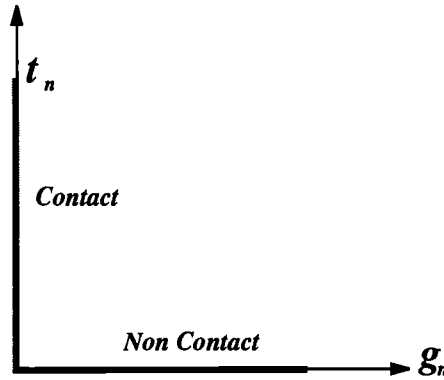


Fig. 1.7 – Loi de contact unilatéral

En passant dans la base locale  $b^m$ , nous avons :

$$t^s = -t_n \nu^m - t_g^s. \quad (1.65)$$

Nous posons alors  $t_n = -t_n^s$ . Finalement, nous obtenons :

$$t^s = t_n \nu^m - t_g^s \quad (1.66)$$

Lorsque le contact est établi,  $t_n$  est positif. Ceci traduit un état de compression en contact. S'il n'y a pas contact, cette composante normale est nulle. Pour simplifier l'écriture des travaux virtuels, il est intéressant d'écrire la partie tangentielle dans la base duale  $b^{m*}$ , soit :

$$t_g = t_{g_\alpha} \tau_\alpha^{m*} \quad (1.67)$$

### Loi de contact unilatéral

La loi de contact unilatéral (Figure 1.7) se traduit par trois conditions :

- une condition de non interpénétration de la matière

$$g_n \geq 0$$

- une condition de compression

$$t_n \geq 0$$

- une relation de complémentarité liant les quantités  $g_n$  et  $t_n$

$$t_n g_n = 0$$

Une autre possibilité pour modéliser le contact est de considérer que les surfaces susceptibles d'entrer en contact ne sont pas lisses mais possèdent des aspérités. Dans ce cas des lois de complianc qui donnent une relation particulière entre  $g_n$  et  $t_n$  peuvent être utilisées [79].

### Lois de frottement

Une loi de frottement décrit le comportement de deux corps lorsque le contact est maintenu. Il existe plusieurs modèles de frottement. La loi la plus ancienne et la plus connue est la loi de frottement de Coulomb.

**Frottement de Coulomb** Elle met en jeu deux notions fondamentales. La notion de seuil et la dépendance en la contrainte normale. Un point glisse lorsque la contrainte tangentielle  $\mathbf{t}_g$  atteint une valeur donnée. Cette contrainte tangentielle s'exprime à partir de la contrainte normale  $t_n$ . Cette loi s'écrit de façon classique :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_g\| &\leq \mu t_n \\ \|\mathbf{t}_g\| < \mu t_n &\Rightarrow \mathbf{v}_g = 0 \\ \|\mathbf{t}_g\| = \mu t_n &\Rightarrow \mathbf{v}_g = \lambda \frac{\mathbf{t}_g}{\|\mathbf{t}_g\|}, \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement. La loi de Coulomb peut être formulée en utilisant une analogie avec la théorie de la plasticité [28, 81]. Dans ce cas, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi &= \|\mathbf{t}_g\| - \mu t_n \leq 0 \\ \mathbf{v}_g &= S \frac{\mathbf{t}_g}{\|\mathbf{t}_g\|} \\ S &\geq 0 \\ \phi S &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Pour les situations fréquentes de mise en forme, un autre modèle s'avère souvent plus efficace : le frottement de Coulomb-Orowan.

**Frottement de Coulomb-Orowan** C'est une loi où l'effort tangentiel est limité par la contrainte tangentielle d'écoulement du matériau  $k$  :

$$\mathbf{t}_g = \min\{\mu t_n, k\} \frac{\mathbf{v}_g}{\|\mathbf{v}_g\|} \quad (1.70)$$

où  $\mu$  est le coefficient moyen macroscopique compris entre 0.01 et 0.5.

**Frottement de Shaw** Ce modèle suppose une dépendance entre la contrainte tangentielle et l'aire de contact réelle. Ceci conduit à une relation du type :

$$\mathbf{t}_g = -\alpha k \frac{\mathbf{v}_g}{\|\mathbf{v}_g\|} \quad (1.71)$$

où  $\alpha$  traduit la dépendance dans l'aire de contact.

**Frottement de Tresca** Le modèle de Tresca s'exprime :

$$\mathbf{t}_g = -\mu_m k \frac{\mathbf{v}_g}{\|\mathbf{v}_g\|} \quad (1.72)$$

où  $\mu_m$  est un coefficient de frottement moyen compris entre 0.03 et 0.85.

D'autres modèles de frottement existent et une revue détaillée est développée dans [55, 65]. Des modèles prenant en compte l'adhérence sont notamment mis en évidence dans [64, 67].

### 1.3.4 Principe des travaux virtuels

Le but de cette partie est de présenter le principe des travaux virtuels en tenant compte des termes introduits par le contact. Dans un premier temps, les formulations variationnelles des lois de contact unilatéral et de frottement sont rapidement exposées. Dans un second temps, nous introduirons les travaux virtuels de contact.

#### Ecriture variationnelle des lois de contact unilatéral et de frottement

L'ensemble des pressions admissibles,  $C_n$ , est défini par :

$$C_n = \{t_n : \gamma_c^s \rightarrow R \text{ tel que } t_n \leq 0\} \quad (1.73)$$

L'inégalité variationnelle équivalente à la loi de contact unilatéral s'écrit :

$$t_n \in C_n, \int_{\gamma_c^s} g_n(r_n - t_n) d\gamma_c^s \geq 0 \quad \forall r_n \in C_n \quad (1.74)$$

L'ensemble des efforts tangentiels admissibles est défini par :

$$C_g(t_n) = \{\mathbf{t}_g : \gamma_c^s \rightarrow R^3 \text{ tel que } \mathbf{t}_g \cdot \boldsymbol{\nu}^m = 0, \|\mathbf{t}_g\| \leq \mu t_n\} \quad (1.75)$$

L'inégalité variationnelle équivalente à la loi de frottement est :

$$\mathbf{t}_g \in C_g(t_n), \int_{\gamma_c^s} v_{g_i}(r_{g_i} - t_{g_i}) d\gamma_c^s \geq 0 \quad \forall \mathbf{r}_g \in C_g(t_n) \quad (1.76)$$

#### Travaux virtuels de contact

Nous considérons l'expression (1.24) des travaux virtuels sur la configuration actuelle. Elle est appliquée au système composé du corps maître et du corps esclave en tenant compte des efforts de contact, ce qui conduit à la relation :

$$G_t^s + G_t^m = 0 \quad (1.77)$$

ce qui s'écrit encore,

$$(P_c) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_t^s} \bar{\sigma}^s : \bar{\nabla} \eta^s d\Omega_t^s - \int_{\Omega_t^s} \mathbf{f}^s \cdot \eta^s d\Omega_t^s - \int_{\gamma_g^s} \mathbf{t}_d^s \cdot \eta^s d\gamma^s + \\ \int_{\Omega_t^m} \bar{\sigma}^m : \bar{\nabla} \eta^m d\Omega_t^m - \int_{\Omega_t^m} \mathbf{f}^m \cdot \eta^m d\Omega_t^m - \int_{\gamma_g^m} \mathbf{t}_d^m \cdot \eta^m d\gamma^m \\ - \int_{\gamma_c^m} \mathbf{t}^m \cdot \eta^m d\gamma_c^m - \int_{\gamma_c^s} \mathbf{t}^s \cdot \eta^s d\gamma_c^s = 0 \end{array} \right. \quad (1.78)$$

Notre attention va maintenant se porter sur les termes liés au contact. L'intégrale du principe des travaux virtuels concernant la zone de contact sur la configuration actuelle s'écrit :

$$G_c^s + G_c^m = - \int_{\gamma_c^m} \mathbf{t}^m \cdot \eta^m d\gamma_c^m - \int_{\gamma_c^s} \mathbf{t}^s \cdot \eta^s d\gamma_c^s \quad (1.79)$$

La formulation faible du principe de l'action et de la réaction nous conduit à dire que les forces de contact appliquées au corps esclave sont égales et opposées à celles appliquées sur le corps maître, i.e. :

$$\mathbf{t}^m d\gamma_c^m = -\mathbf{t}^s d\gamma_c^s \quad (1.80)$$

En choisissant de raisonner sur la surface esclave, la relation (1.79) devient alors :

$$G_c^m + G_c^s = - \int_{\gamma_c^s} \mathbf{t}^s \cdot (\eta^s - \eta^m) d\gamma_c^s \quad (1.81)$$

Considérons alors la première variation du vecteur  $\mathbf{g}$  séparant  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$  dans la direction  $\boldsymbol{\eta} = \delta\mathbf{x}$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\bar{\xi})) &= \delta[g_n \boldsymbol{\nu}^m] \\ &= \delta g_n \boldsymbol{\nu}^m + g_n \delta\boldsymbol{\nu}^m \end{aligned} \quad (1.82)$$

La difficulté est l'évaluation de  $\delta\mathbf{x}^m$ . Il faut en effet tenir compte de la dépendance de ce point en la surface maître par l'intermédiaire de  $\bar{\xi}$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m(\bar{\xi})) &= \delta\mathbf{x}^c - \delta\mathbf{x}^m(\bar{\xi}) \\ &= \delta\mathbf{x}^c - \delta\mathbf{x}^m - \delta\xi_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \end{aligned} \quad (1.83)$$

En identifiant les relations (1.82) et (1.83), nous obtenons :

$$\delta\mathbf{x}^c - \delta\mathbf{x}^m = \delta\xi_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m + \delta g_n \boldsymbol{\nu}^m + g_n \delta\boldsymbol{\nu}^m \quad (1.84)$$

A partir de ceci, le produit scalaire  $\mathbf{t}^s \cdot (\delta\mathbf{x}^c - \delta\mathbf{x}^m(\bar{\xi}))$  devient :

$$\mathbf{t}^s \cdot (\delta\mathbf{x}^c - \delta\mathbf{x}^m(\bar{\xi})) = (t_n \boldsymbol{\nu}^m - t_g) \cdot (\delta\xi_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha^m + \delta g_n \boldsymbol{\nu}^m + g_n \delta\boldsymbol{\nu}^m) \quad (1.85)$$

Nous avons  $\|\boldsymbol{\nu}^m\| = 1$ , ce qui implique :

$$\delta\boldsymbol{\nu}^m \cdot \boldsymbol{\nu}^m = 0 \quad (1.86)$$

De plus, la condition de complémentarité de la loi de contact unilatéral  $g_n t_n = 0$  et la loi de frottement de Coulomb  $\|\mathbf{t}_g\| \leq \mu t_n$  conduisent à une relation liant la distance normale  $g_n$  et la force tangentielle de contact :

$$g_n \|\mathbf{t}_g\| = 0 \quad (1.87)$$

Utilisant la décomposition de  $\mathbf{t}_g$  dans la base duale (1.67), la relation (1.85) s'écrit simplement :

$$\mathbf{t}^s \cdot (\delta \mathbf{x}^c - \delta \mathbf{x}^m) = t_n \delta g_n - t_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha \quad (1.88)$$

A partir de cette quantité, l'expression des travaux virtuels sur la configuration actuelle s'écrit :

$$G_c^m + G_c^s = - \int_{\gamma_c^s} [t_n \delta g_n - t_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha] d\gamma_c^s \quad (1.89)$$

Dans la suite, nous noterons simplement :

$$G_c = \int_{\gamma_c^s} [-t_n \delta g_n + t_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha] d\gamma_c^s \quad (1.90)$$

Nous avons choisi d'écrire le principe des travaux virtuels sur la configuration actuelle. Une écriture analogue sur la configuration de référence peut être établie. Dans ce cas, le vecteur des contraintes de Cauchy est remplacé par le premier vecteur des contraintes de Piola Kirchoff et nous avons :

$$G_c = \int_{\Gamma_c^s} [-T_n \delta g_n + T_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha] d\Gamma_c^s \quad (1.91)$$

L'avantage d'une telle écriture provient du fait que l'intégration est effectuée sur une configuration connue, ce qui permet de linéariser l'expression de  $G_c$  très simplement.

### Linéarisation de $G_c$

Le problème  $G_c = 0$  est un problème non linéaire. Il peut être résolu en utilisant une méthode itérative de type Newton Raphson. Ceci nécessite sa dérivation. Cette opération de linéarisation peut être effectuée après la discrétisation par éléments finis. Cependant, dans l'objectif de repousser la dépendance du formalisme vis à vis de la méthode des éléments finis, nous présentons cette étape en utilisant la description continue du contact. Reprenant les travaux de T.A. Laursen et J.C. Simo [49], nous notons  $\Delta$  la dérivée directionnelle. Nous pouvons alors écrire :

$$\Delta G_c = \Delta \left\{ \int_{\Gamma_c^s} [-T_n \delta g_n + T_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha] d\Gamma_c^s \right\} \quad (1.92)$$

Nous raisonnons sur une surface connue puisque nous intégrons sur la surface de référence. De ce fait,

$$\Delta G_c = \int_{\Gamma_c^s} [\Delta (-T_n \delta g_n) + \Delta (T_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha)] d\Gamma_c^s \quad (1.93)$$

Ceci s'écrit finalement :

$$\Delta G_c = \int_{\Gamma_c^s} [-\Delta T_n \delta g_n - T_n \Delta \delta g_n + \Delta T_{g_\alpha} \delta \bar{\xi}_\alpha + T_{g_\alpha} \Delta \delta \bar{\xi}_\alpha] d\Gamma_c^s \quad (1.94)$$

### 1.3.5 Méthodes numériques : revue bibliographique

Un grand nombre des méthodes utilisées pour résoudre ce type de problèmes est issu du domaine de l'optimisation. Le problème de contact peut être écrit comme un problème de minimisation sous contraintes. Les méthodes couramment associées à cette approche sont les méthodes de point fixe, de relaxation avec projection (méthode SORP), de gradient conjugué [31] avec projection, la méthode de Gauss Seidel ([14], [66], [68], ...) et les méthodes avec régularisation (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange).

Dans [36], A. Klarbring propose d'écrire le contact comme un ensemble d'équations généralisées après discrétisation du problème. Un algorithme de type Uzawa est ensuite utilisé pour résoudre le système généré. Le problème discrétisé peut être aussi écrit comme un problème de complémentarité ([12], [33], [35], [44]). Dans ce contexte, une approche directe telle que la méthode de Lemke peut s'avérer efficace ([12],[13], ...).

Les méthodes dites avec régularisation sont les plus couramment utilisées par les codes par éléments finis. Ces méthodes consistent à introduire une régularisation des lois de contact et de frottement pour lever le caractère implicite. Les forces de contact sont définies comme des fonctions dépendant des déplacements. Ces expressions des forces sont ensuite reportées dans le travail virtuel des efforts de contact. Il s'agit des méthodes de pénalisation, de multiplicateurs de Lagrange pour les deux approches les plus anciennes [4]. Plus récemment une technique apparaissant comme une combinaison des deux dernières approches citées à été développée, la méthode du lagrangien augmenté. D'autres techniques avec régularisation ont été utilisées pour traiter des problèmes de contact. Dans [37, 38], une méthode alternative au schéma lagrangien augmenté est mise en œuvre : la méthode barrière modifiée. Une autre approche combinant la méthode barrière et la méthode de pénalisation est présentée dans [83].

Cette brève revue des méthodes numériques destinées au traitement du contact n'est pas exhaustive et bien d'autres approches ont été développées ([7], [15], [18], [58], [57], ...) Seuls les principes de la méthode de pénalisation, des multiplicateurs de Lagrange et du lagrangien augmenté seront présentés dans les paragraphes suivants.

**Méthode de pénalisation** La méthode de pénalisation appartient aux techniques de régularisation. Elle permet d'éliminer les inconnues que sont les forces de contact. En effet, la force normale de contact est supposée proportionnelle au déplacement. La méthode de pénalisation estime la composante normale de la force de contact

comme suit :

$$t_n = \langle -g_n \rangle \varepsilon_n \quad (1.95)$$

où la quantité  $\varepsilon_n$  est le paramètre de pénalisation et  $\langle . \rangle$  sont les crochets de Macauley.

Cette relation s'écrit plus clairement :

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } g_n \geq 0 \\ -\varepsilon_n g_n & \text{si } g_n < 0 \end{cases} \quad (1.96)$$

Il est important de noter que les forces de contact ne sont pas calculées exactement. D'un point de vue purement mathématique, le coefficient  $\varepsilon_n$  doit tendre vers l'infini pour obtenir une approximation la plus juste possible. D'un point de vue numérique, un paramètre de pénalisation trop important conduit à de sérieux problèmes de convergence. De ce fait, des pénétrations sont autorisées. Cette méthode présente deux avantages principaux. Le premier avantage concerne son implémentation. Elle apparaît très simple à mettre en œuvre. Cette simplicité en fait une des méthodes les plus utilisées par les codes de calcul par éléments finis ([9], [76], [59], [61], [74], ...). En effet, cette approche ne nécessite pas la modification de la structure du code. Le deuxième avantage vient du fait que cette technique ne nécessite pas l'introduction de variables supplémentaires dans le problème.

Malgré ses avantages, la méthode de pénalisation a un inconvénient majeur : le choix du paramètre de pénalisation. Un paramètre de pénalisation élevé permet de satisfaire correctement les conditions de contact. Cependant, un paramètre trop grand conduit à des matrices de rigidité mal conditionnées et de fait à des problèmes numériques. Inversement, un paramètre de pénalisation trop faible conduit à des pénétrations inacceptables d'un point de vue physique. Ainsi, la précision de la solution du problème se trouve fortement affectée.

Pour tenter de réduire le choix du paramètre, nous avons développé un algorithme d'ajustement automatique du paramètre de pénalisation basé sur la notion de distance normale ou pénétration acceptable. Cet algorithme sera présenté dans le chapitre 3.

**Méthode des multiplicateurs de Lagrange** Cette approche consiste simplement à remplacer les forces de contact par les multiplicateurs de Lagrange ([9], [16]) :

$$t_n = \lambda_n \quad (1.97)$$

L'avantage principal de cette approche réside dans le fait que les conditions de contact sont parfaitement vérifiées. De plus, contrairement à la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne nécessite pas l'introduction d'un coefficient correctement déterminé. L'inconvénient principal vient du fait que cette approche introduit des inconnues supplémentaires dans le problème par l'intermédiaire des multiplicateurs.



**Méthode mixte : lagrangien augmenté** La méthode du lagrangien augmenté apparaît comme un compromis entre la méthode de pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange. En effet, l'idée de base de cette approche est de rajouter un terme pénalisé au multiplicateur  $\lambda_n$ . Ainsi, la composante normale de la force de contact est donnée par une relation du type :

$$t_n = \langle \lambda_n - \varepsilon_n g_n \rangle \quad (1.98)$$

Plusieurs approches ont été développées. L'approche proposée par P. Alart et A. Curnier [3] consiste à calculer toutes les inconnues simultanément. Les algorithmes de résolution sont habituellement des algorithmes du type Uzawa utilisés notamment par Z.Q. Feng dans [24]. Ces algorithmes sont efficaces mais lents. Pour ces raisons, P. Alart et A. Curnier se sont intéressés à un algorithme de Newton généralisé, la difficulté résidant dans le fait que le système à résoudre est non différentiable. C'est pourquoi la notion de jacobien généralisé a été introduite comme extension de la notion de différentielle [2].

L'approche développée par J.C. Simo and T.A. Laursen [73] permet de découpler la partie résolution de l'équilibre de la vérification des contraintes. Le multiplicateur  $\lambda_n$  étant inconnu, le multiplicateur correct doit être déterminé à l'aide d'un processus itératif. La valeur du multiplicateur à une itération  $k$  est supposée connue  $\lambda_n^k$ . Sa valeur à l'itération  $k + 1$  est donnée par :

$$\lambda_n^{k+1} = \langle \lambda_n^k - \varepsilon_n g_n \rangle \quad (1.99)$$

L'approche lagrangien augmenté s'applique au frottement mais nous ne détaillerons pas ces aspects ici. Une approche pour symétriser la partie due aux termes du frottement est proposée dans [47].

Pour plus de détails concernant cette technique, nous renvoyons le lecteur aux nombreux travaux déjà publiés ([46], [48], [73], [63], ...).

Le premier avantage de cette approche réside dans le fait que de tous petits paramètres de pénalisation peuvent être utilisés. Le second point positif vient du fait que la solution exacte du problème est déterminée. Néanmoins, ceci augmente fortement le nombre d'itérations nécessaires pour trouver cette bonne solution, ce qui apparaît comme un inconvénient majeur.

Dans cette partie, nous avons présenté rapidement la grande majorité des méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes de contact. Les approches les plus souvent utilisées par les codes par éléments finis restent la méthode de pénalisation et la méthode du lagrangien augmenté. Dans SYSTUS, nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalisation pour sa simplicité de mise en œuvre. C'est pourquoi, seule cette technique sera considérée dans la suite.

## 1.4 Discrétisation du contact : élément “nœud-facette”

Lorsque la méthode des éléments finis est utilisée, les différentes surfaces de contact sont des surfaces discrètes. Il faut donc parvenir à discrétiser la quantité introduite par la relation (1.91) dans le cas du traitement du contact sans frottement :

$$G_c = - \int_{\Gamma_c^s} T_n \delta g_n d\Gamma_c^s \quad (1.100)$$

La linéarisation de  $G_c$  s'écrit simplement :

$$\Delta G_c = - \int_{\Gamma_c^s} [\Delta T_n \delta g_n + T_n \Delta \delta g_n] d\Gamma_c^s \quad (1.101)$$

En utilisant la méthode de Newton, le système à résoudre est de la forme :

$$\Delta G_c \Delta \mathbf{u} = -G_c \quad (1.102)$$

### 1.4.1 Discrétisation par la MEF

Nous supposons que la surface esclave  $\Gamma_c^s$  est formée par un ensemble de facettes  $^s f_c^i$  avec  $i = 1, \dots, n_f^s$ . La forme discrète de  $G_c$  est obtenue par assemblage sur toutes ces facettes comme suit :

$$G_c^h = \sum_{i=1}^{n_f^s} \int_{^s f_c^i} T_n^h \delta g_n^h d^s f_c^i \quad (1.103)$$

Le plus souvent, cette quantité ne peut pas être évaluée analytiquement. Il faut alors, avoir recours à des techniques d'intégration numérique qui consistent à remplacer l'intégrale par une somme sur un nombre finis de points, les points d'intégration. Après intégration numérique cette quantité s'écrit :

$$G_c^h = \sum_{i=1}^{n_f^s} \left[ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k j^k \delta \mathbf{x}^{kT} \mathbf{R}_c^k \right] \quad (1.104)$$

Dans cette expression,  $n_{int}$  est le nombre de points d'intégration.  $w^k$  est la fonction de poids associée au point d'intégration  $k$ .  $j^k$  représente le jacobien de la transformation,  $\delta \mathbf{x}^k$  est le vecteur des variations nodales associé à  $k$  et  $\mathbf{R}_c^k$ , le vecteur résidu associé. En utilisant une procédure identique, l'expression linéarisée discrète de  $G_c$  est de la forme :

$$\Delta G_c^h = \sum_{i=1}^{n_f^s} \left[ \sum_{k=1}^{n_{int}} w^k j^k \delta \mathbf{x}^{kT} K_c^k \Delta \mathbf{x}^k \right] \quad (1.105)$$

$K_c^k$  est la matrice tangente associée à  $k$ . Le calcul de ces quantités  $\mathbf{R}_c^k$  et  $K_c^k$  fait appel à la notion d'élément de contact.

Un élément de contact est en fait une restriction des expressions (1.104) et (1.105) au cas où un seul nœud de la surface esclave est pris en considération. La surface maître est quant à elle constituée d'un ensemble de facettes  ${}^m f_c^i$  avec  $i = 1, \dots, n_f^m$ .

Etant donné les différentes situations rencontrées pour les problèmes de contact, plusieurs éléments de contact spécifiques ont été développés. Le contact entre corps déformables soumis à des petits déplacements relatifs est pris en considération par l'élément de contact "nœud à nœud". Pour un problème où les glissements attendus sont petits, un maillage conforme des deux corps peut être mis en œuvre. Ce maillage met alors en vis à vis les nœuds des deux surfaces (Figure 1.8(a)). Les

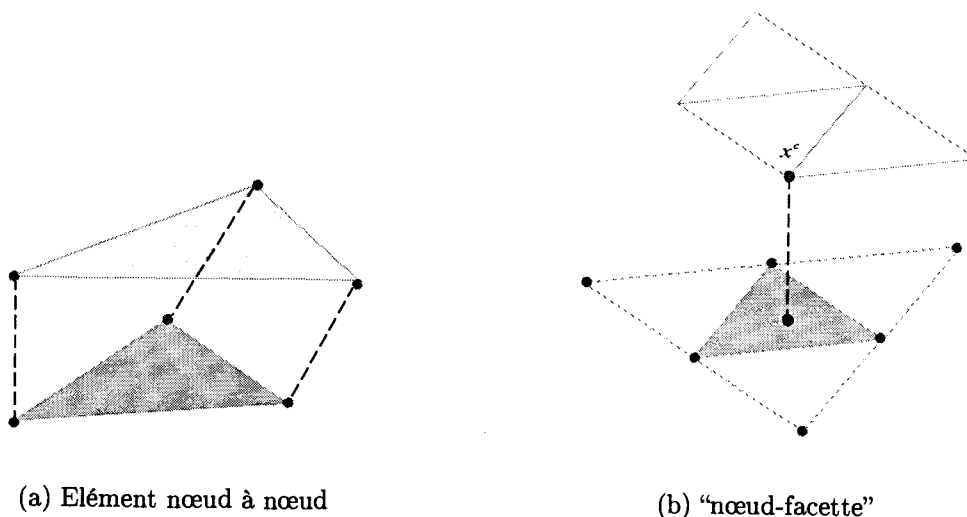


Fig. 1.8 – *Éléments de contact*

grands glissements nécessitent l'utilisation de l'élément de contact "nœud-facette" [60, 81]. Cet élément est constitué du nœud esclave et des nœuds caractérisant la facette de contact (Figure 1.8(b)). Certains éléments de contact particuliers ont été développés pour modéliser des situations spécifiques. C'est le cas par exemple de l'élément de contact "charnière avec jeu" permettant de modéliser une articulation rotoïde imparfaite entre lames déformables d'un rideau métallique [5]. L'élément "segment-segment" peut être aussi évoqué [82].

Pour l'élément de contact "nœud-facette", nous supposons qu'un nœud esclave est en contact potentiel avec une facette du solide maître. Mais la formation de cette association n'est pas triviale. Dans le cas des grandes déformations, la surface esclave peut, *a priori*, entrer en contact avec n'importe quelle partie de la surface maître. Pour des problèmes industriels où le nombre de nœuds est important il apparaît indispensable de développer une procédure de recherche du contact. Quand deux corps ou plus sont en contact, les algorithmes de recherche du contact peuvent être classés en deux catégories: les algorithmes de recherche globale et les algorithmes de recherche locale. Pour la recherche globale, plusieurs stratégies ont été proposées.

Z.H. Zhong et L. Nilsson ont développé une approche basée sur la notion de hiérarchie et territoire: "HITA Algorithm" [84, 85, 86, 87]. M. Oldenburg et L. Nilsson ont proposé le "position code algorithm" [54]. Le tri par bucket peut aussi être utilisé [10]. P. Papadopoulos et R.L. Taylor ont développé le "spherical sorting algorithm" [59]. Bien d'autres approches ont été mises en évidence [22, 39]. En ce qui concerne la recherche local: le "pinball algorithm" de [9] ou le "inside-outside algorithm" peuvent être évoqués [78].

### 1.4.2 Élément de contact "nœud-facette"

Nous avons choisi de présenter dans le détail l'élément de contact "nœud-facette". Cependant, nous limitons notre étude au cas où la facette de contact considérée est une facette plane à trois nœuds. Le détail de cet élément, pour le cas d'une facette à 4 nœuds, peut être trouvé dans [45]. L'objectif de cette partie est de noter les difficultés qui apparaissent lors de la construction d'un élément de contact. Les difficultés rencontrées seront du même ordre lors de l'établissement de l'élément de contact 3D diffus.

#### Géométrie du contact

La position du nœud esclave est notée  $\mathbf{x}^c$ . La facette avec laquelle il est potentiellement en contact est  $f_c$  (Figure 1.9). Les trois nœuds définissant  $f_c$  sont notés  $\mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{x}^2$ ,  $\mathbf{x}^3$ . Le vecteur des inconnues de l'élément de contact présenté est :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^c \\ \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{x}^3 \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

Les deux variations de ce vecteur sont notées :

$$\delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^c \\ \delta \mathbf{x}^1 \\ \delta \mathbf{x}^2 \\ \delta \mathbf{x}^3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^c \\ \Delta \mathbf{x}^1 \\ \Delta \mathbf{x}^2 \\ \Delta \mathbf{x}^3 \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

La paramétrisation de  $f_c$  est donnée par une combinaison linéaire de valeurs nodales et de fonctions de forme :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^i \quad (1.108)$$

où  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ . L'expression des fonctions de forme est classique :

$$\begin{aligned} N_1(\boldsymbol{\xi}) &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \\ N_2(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_1 \\ N_3(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_2 \end{aligned} \quad (1.109)$$

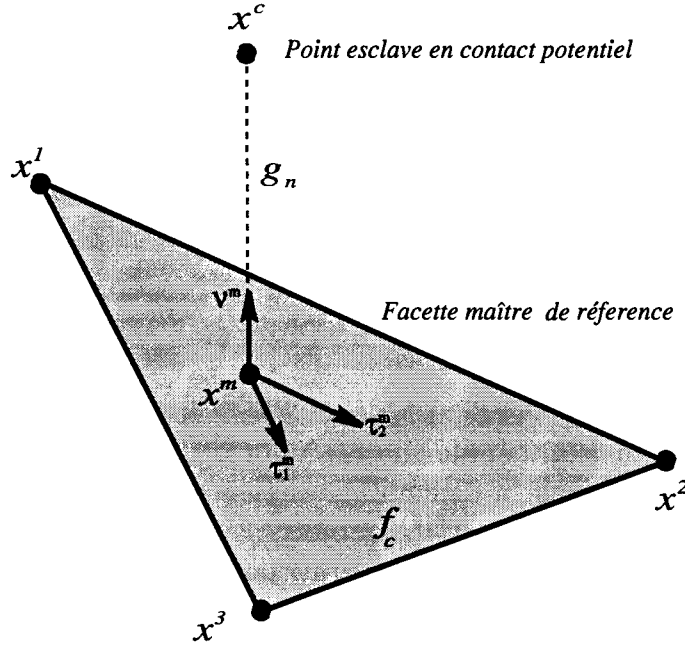


Fig. 1.9 – Grandeurs du contact

La distance  $g_n$  est calculée en considérant la projection  $\mathbf{x}^m$  de  $\mathbf{x}^c$  sur la facette  $f_c$ . Pour ce faire, nous introduisons  $\boldsymbol{\nu}^m$ , le vecteur normal à la facette au point projeté et nous avons la définition suivante de la pénétration :

$$g_n = \{\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m\} \cdot \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.110)$$

Les coordonnées paramétriques du point  $\mathbf{x}^m$  sont notées  $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$  (cf. Section A.1). Les vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}_1^m$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^m$  associés à  $f_c$  au point  $\mathbf{x}^m$  s'expriment comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}_1^m = \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \bar{\xi}_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_2^m = \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \bar{\xi}_2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad (1.111)$$

En reprenant la relation (1.108), ces relations deviennent :

$$\boldsymbol{\tau}_1^m = \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\bar{\xi}_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{x}_i \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_2^m = \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\bar{\xi}_2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{x}_i \quad (1.112)$$

Le vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^m$  est le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\nu}^m = \frac{\boldsymbol{\tau}_1^m \wedge \boldsymbol{\tau}_2^m}{\|\boldsymbol{\tau}_1^m \wedge \boldsymbol{\tau}_2^m\|} \quad (1.113)$$

La position du point  $\mathbf{x}^m$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{x}^m = \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{x}_i \quad (1.114)$$

Pour fournir une description de l'élément de contact, il est indispensable de donner l'expression de  $\mathbf{R}_c$ , vecteur résidu élémentaire de contact ainsi que l'expression de la matrice tangente élémentaire de contact  $K_c$ .

### Résidu élémentaire de contact

Nous avons vu, dans la partie 1.3.4, qu'il est nécessaire de déterminer la première et la seconde variation de la pénétration. Nous allons, dans la suite, nous attacher à calculer ces variations en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface de contact.

**Première variation de  $g_n$**  En utilisant la relation (1.110), la première variation de  $g_n$  s'écrit simplement :

$$\delta g_n = \{\delta \mathbf{x}^c - \delta \mathbf{x}^m\} \cdot \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.115)$$

Le problème de cette expression est l'évaluation de  $\delta \mathbf{x}^m$ . Cette quantité est directement donnée par (1.114) :

$$\delta \mathbf{x}^m = \delta \bar{\xi}_1 \boldsymbol{\tau}_1^m + \delta \bar{\xi}_2 \boldsymbol{\tau}_2^m + \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \quad (1.116)$$

La première variation de  $g_n$  s'écrit alors simplement :

$$\begin{aligned} \delta g_n &= \left\{ \delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{\xi}_1 \boldsymbol{\tau}_1^m - \delta \bar{\xi}_2 \boldsymbol{\tau}_2^m - \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \cdot \boldsymbol{\nu}^m \\ &= \left\{ \delta \mathbf{x}^c - \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \cdot \boldsymbol{\nu}^m \end{aligned}$$

**Ecriture vectorielle** L'écriture discrète de la première variation de  $g_n$  est directement donnée par l'expression précédente :

$$\delta g_n = \delta \mathbf{u}^T \mathcal{N}_c \quad (1.117)$$

où  $\mathcal{N}_c$  est un vecteur à 12 composantes :

$$\mathcal{N}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}^m \\ -N_1(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^m \\ -N_2(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^m \\ -N_3(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \boldsymbol{\nu}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}^m \\ -(1 - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) \boldsymbol{\nu}^m \\ -\bar{\xi}_1 \boldsymbol{\nu}^m \\ -\bar{\xi}_2 \boldsymbol{\nu}^m \end{bmatrix} \quad (1.118)$$

Le résidu élémentaire de contact s'écrit alors :

$$\mathbf{R}_c = T_n \mathcal{N}_c \quad (1.119)$$

Dans le cas où la méthode de pénalisation est utilisée, il suffit de remplacer la force de contact  $T_n$  par la définition introduite par l'équation (1.96), soit :

$$\mathbf{R}_c = -\varepsilon_n g_n \mathcal{N}_c \quad (1.120)$$

### Matrice tangente élémentaire de contact

L'écriture de la matrice tangente élémentaire de contact nécessite la seconde variation de la quantité  $g_n$  (cf. 1.3.4).

**Seconde variation de  $g_n$**  L'évaluation de  $\Delta\delta g_n$  utilise les mêmes techniques que celles employées lors de la détermination de la première variation. Nous pouvons alors écrire :

$$\Delta\delta g_n = g_n \delta \boldsymbol{\nu}^m \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}^m - \Delta\delta \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\nu}^m \quad (1.121)$$

L'évaluation de cette quantité est faite en deux temps. La première difficulté est la détermination de  $\Delta\delta \mathbf{x}^m$ . En effet, ce point est la projection de  $\mathbf{x}^c$  sur la facette de référence. De ce fait, ses coordonnées dépendent d'une part des coordonnées du point  $\mathbf{x}^c$  mais aussi de celles des nœuds constituant la facette de référence et c'est ici que se situe le premier obstacle. Il va falloir prendre en compte cette dépendance dans le calcul des variations et donc faire intervenir les variations des nœuds  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^i$ . Cette quantité nécessite aussi l'évaluation de la variation du vecteur normal. Or, ce vecteur n'est pas constant. Il évolue en fonction des nœuds de la facette. La détermination de sa variation est la seconde des difficultés.

Nous allons décomposer l'expression (1.121) en deux termes : le terme contenant la seconde variation de  $\mathbf{x}^m$  et le terme contenant la variation du vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^m$ .

**Expression du produit scalaire  $\Delta\delta \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\nu}^m$**  La détermination de ce produit scalaire passe par la détermination de  $\Delta\delta \mathbf{x}^m$ . Cette quantité est obtenue en dérivant  $\delta \mathbf{x}^m$  :

$$\begin{aligned} \Delta\delta \mathbf{x}^m &= \Delta\delta \bar{\xi}_1 \boldsymbol{\tau}_1^m + \Delta\delta \bar{\xi}_2 \boldsymbol{\tau}_2^m + \delta \bar{\xi}_1 \Delta \boldsymbol{\tau}_1^m + \delta \bar{\xi}_2 \Delta \boldsymbol{\tau}_2^m \\ &+ \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \Delta \bar{\xi}_1 + \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \Delta \bar{\xi}_2 \end{aligned} \quad (1.122)$$

A partir de là, le produit scalaire  $\Delta\delta \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\nu}^m$  devient simplement :

$$\begin{aligned} \Delta\delta \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\nu}^m &= \left[ \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \Delta \bar{\xi}_1 + \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \delta \mathbf{x}_i \right\} \Delta \bar{\xi}_2 \right] \cdot \boldsymbol{\nu}^m \\ &+ [\delta \bar{\xi}_1 \Delta \boldsymbol{\tau}_1^m + \delta \bar{\xi}_2 \Delta \boldsymbol{\tau}_2^m] \cdot \boldsymbol{\nu}^m \end{aligned} \quad (1.123)$$

Cette expression fait intervenir la première variation des coordonnées paramétriques  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$ . Cette variation est obtenue en considérant le fait que le vecteur séparant  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$  est colinéaire au vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^m$ . Pour le détail des calculs, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A. Nous admettons ici que ces quantités sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\xi}_1 &= \mathbf{S}_1^T \Delta \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \delta \bar{\xi}_1 = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S}_1 \\ \Delta \bar{\xi}_2 &= \mathbf{S}_2^T \Delta \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \delta \bar{\xi}_2 = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad (1.124)$$

où nous avons introduit deux vecteurs à 12 composantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{\det M} [m_{22}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2)] \\ \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{\det M} [m_{11}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1)] \end{aligned} \quad (1.125)$$

Les vecteurs  $T_\alpha$  et  $N_\alpha$ , vecteurs à 12 composantes, dépendent des fonctions de forme et des dérivées des fonctions de forme  $N_i$  :

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \tau_\alpha^m \\ -N_1(\bar{\xi}) \tau_\alpha^m \\ -N_2(\bar{\xi}) \tau_\alpha^m \\ -N_3(\bar{\xi}) \tau_\alpha^m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi_\alpha}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{2,\xi_\alpha}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{3,\xi_\alpha}(\bar{\xi}) \nu^m \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

Tous les calculs précédents conduisent à :

$$\Delta \delta \mathbf{x}^m \cdot \nu^m = \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{S}_2 \mathbf{N}_2^T + \mathbf{S}_1 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{S}_2^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{S}_1^T] \Delta \mathbf{u} \quad (1.127)$$

**Calcul du produit scalaire  $\delta \nu^m \cdot \Delta \nu^m$**  Nous ne détaillerons pas les calculs de la détermination de  $\delta \nu^m$  dans ce paragraphe<sup>1</sup>. Reprenant les résultats obtenus, nous avons :

$$\delta \nu^m \cdot \Delta \nu^m = \delta \mathbf{u}^T \{ m_{11}^{m*} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + m_{12}^{m*} (\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2^T) + m_{22}^{m*} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T \} \Delta \mathbf{u}^T \quad (1.128)$$

Les expressions (1.127) et (1.128) conduisent à l'expression finale suivante de  $\Delta \delta g_n$  :

$$\Delta \delta g_n = \delta \mathbf{u}^T \mathcal{M}_c \Delta \mathbf{u} \quad (1.129)$$

La matrice  $\mathcal{M}_c$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{12,12}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= g_n [m_{11}^{m*} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + m_{12}^{m*} (\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2^T) + m_{22}^{m*} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T] \\ &\quad - [\mathbf{S}_2 \mathbf{N}_2^T + \mathbf{S}_1 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{S}_2^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{S}_1^T] \end{aligned} \quad (1.130)$$

**Expression matricielle** Dans le cadre de la méthode de pénalisation et dans le cas où la facette de référence est une facette plane à trois nœuds, la définition de la matrice tangente de contact est :

$$\mathbf{u}^T K_c \Delta \mathbf{u} = -\delta T_n \delta g_n - T_n \Delta \delta g_n \quad (1.131)$$

La quantité  $\delta T_n$  s'écrit :

$$\delta T_n = -\varepsilon_n H(g_n) \delta g_n \quad (1.132)$$

1. Tous les détails se trouvent dans la partie A.3



où  $H(g_n)$  est la fonction d'Heaviside.

Nous pouvons finalement en déduire l'expression de  $K_c$  :

$$K_c = \varepsilon_n H(g_n) \mathcal{N}_c \mathcal{N}_c^T + \varepsilon_n g_n \mathcal{M}_c \quad (1.133)$$

Tous les vecteurs introduits dans cette partie sont exprimés entièrement dans l'annexe A.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les grandes lignes de la modélisation du contact ont été exposées. Il est apparu deux grandes difficultés.

La modélisation purement mathématique du phénomène physique est la première difficulté. Ceci a donné lieu à ce qui est appelé une formulation continue du contact. Cette modélisation fait appel à des concepts mathématiques complexes.

La deuxième difficulté est la résolution numérique du problème mathématique établi. La méthode des éléments finis est le plus souvent utilisée associée à des approches très diverses comme nous l'avons souligné. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalisation sans oublier son principal défaut : le choix du paramètre. C'est pourquoi nous avons développé un algorithme de gestion automatique du paramètre de pénalité qui sera développé dans le chapitre 3.

Quand la méthode des éléments finis est utilisée, la frontière de contact est représentée par une surface seulement différentiable par morceaux, ce qui implique de multiples difficultés. La non-régularité de cette surface de contact est un des problèmes du contact dans le cadre des grands glissements. Pour éviter ces inconvénients, la surface de contact peut être régularisée. C'est ce que nous proposons de faire dans le chapitre suivant.

Il est important de rappeler le rôle fondamental joué par la distance normale de contact  $g_n$  et plus exactement par ses variations dans l'établissement du résidu et de la matrice tangente élémentaire de contact. Nous avons détaillé la construction de l'élément de contact "nœud-facette", dans le cas le plus simple, c'est-à-dire avec une facette plane triangulaire à trois nœuds pour mettre en évidence toutes les difficultés liées à la détermination de ces quantités. L'objectif était double : constater effectivement les difficultés mais surtout bien les localiser... Ce sont en effet les mêmes difficultés que nous allons rencontrer dans la construction de l'élément de contact régularisé 3D diffus.

# Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse

## Sommaire

- 2.1 Introduction**
- 2.2 Approximation diffuse et contact**
  - 2.2.1 Hypothèses et choix
  - 2.2.2 Détermination du repère diffus  $R^d$
  - 2.2.3 Approximation locale associée à un nœud  $x^c$
  - 2.2.4 Détermination du vecteur  $\alpha$
  - 2.2.5 Fonctions de poids
  - 2.2.6 Dépendances de la fonction  $f_{x^c}$
- 2.3 Nouvelle description de la géométrie du contact**
  - 2.3.1 Notion de point le plus proche
  - 2.3.2 Base locale en  $x^d$
  - 2.3.3 Notion de distance normale de contact diffus
- 2.4 Élément de contact diffus 3D**
  - 2.4.1 Résidu élémentaire
  - 2.4.2 Matrice tangente élémentaire de contact
- 2.5 Calcul des variations**
  - 2.5.1 Calcul de  $\delta\bar{X}_1$  et  $\delta\bar{X}_2$
  - 2.5.2 Détermination de la variation des vecteurs tangents
  - 2.5.3 Calcul de la première variation du vecteur  $\nu^d$
  - 2.5.4 Première variation de  $F$
  - 2.5.5 Seconde variation de  $F$
- 2.6 Implémentation et exemples**
  - 2.6.1 Implémentation
  - 2.6.2 Exemples
- 2.7 Conclusion**

## 2.1 Introduction

La modélisation des phénomènes de contact nécessite une bonne description de la surface de contact. Dans le cas d'une discrétisation par éléments finis, la surface de contact est représentée par une surface facétisée donc seulement différentiable par morceaux. Cette situation engendre des discontinuités des vecteurs normal et

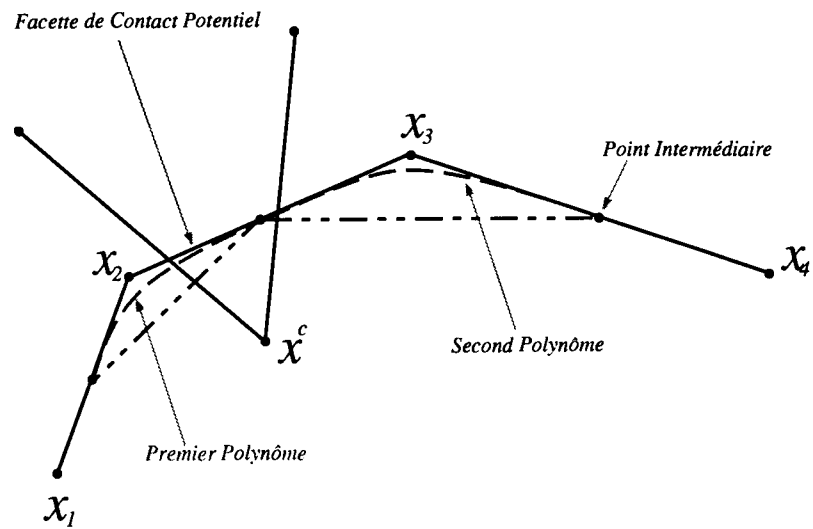
tangentiels provoquant des problèmes de convergence en présence de grands glissements. Pour éviter ces inconvénients, plusieurs stratégies peuvent être considérées. Nous pouvons distinguer deux catégories d'approches.

Une première catégorie considère la surface de contact non régulière mais ne régularise pas la surface proprement dite. Ces approches concernent le traitement du vecteur normal. La construction d'un pseudo vecteur normal variant continûment dans le voisinage d'un nœud de contact est proposée dans [51]. Le vecteur normal peut être simplement moyenné [78, 58] ou bien régularisé [27].

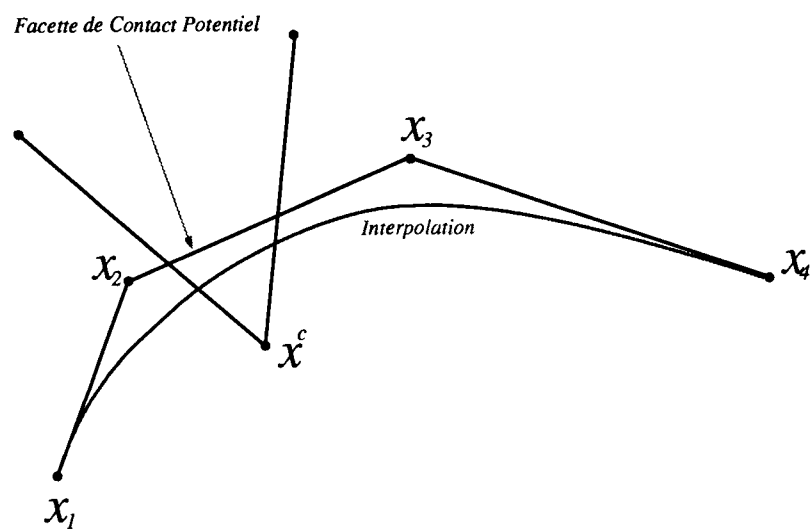
La deuxième catégorie concerne la régularisation de la surface de contact. Quand cette surface est supposée rigide, elle peut être définie régulière à l'aide de techniques issues de la CAO [30]. Dans le cadre plus général de deux surfaces de contact déformables, G. Pietrzak régularise la surface de contact en utilisant l'interpolation par des courbes de Béziérs et des B-Splines [62, 63]. Pour une facette de contact potentiel, un polynôme interpolant passant par les nœuds des facettes adjacentes à la facette considérée est déterminé (Figure 2.1(b)). Cette approche est étendue au cas 3D en utilisant le produit tensoriel de surfaces. Cette approche a aussi été développée dans le cas de B-Splines [23, 56]. P. Wriggers utilise lui aussi l'interpolation par des courbes de Béziérs [41, 43, 80]. Cependant les deux approches diffèrent totalement dans la construction de l'interpolation. En effet, l'approche développée par P. Wriggers utilise des points intermédiaires n'appartenant pas au maillage éléments finis. Ces points sont en fait situés entre deux nœuds des facettes adjacentes à la facette considérée. Ainsi, deux polynômes interpolant sont exprimés (Figure 2.1(a)). Le polynôme qui sera retenu pour le calcul est le polynôme dont la distance au nœud esclave est minimale. L'efficacité d'une telle approche est démontrée pour des problèmes 2D dans [40] et pour des problèmes 3D dans [42].

Régulariser la surface de contact apparaît comme une étape indispensable pour améliorer l'efficacité des algorithmes de contact. La stratégie que nous avons développée consiste à régulariser la surface de contact en utilisant des techniques récemment utilisées, notamment pour le remaillage de surfaces maillées [70, 71]. La méthode que nous mettons en œuvre consiste à reconstruire la surface de contact à partir de la seule donnée du maillage éléments finis en utilisant la technique d'approximation diffuse [52].

Dans une première partie, l'approximation diffuse appliquée au cas particulier du contact est exposée. La régularisation de la surface de contact est ensuite associée à la méthode des éléments finis pour construire l'élément de contact 3D diffus. Pour finir, nous présentons les problèmes liés à l'implémentation informatique d'une telle approche et nous l'illustrons par des exemples.



(a) Approche P. Wriggers



(b) Approche P. Pietrzak

Fig. 2.1 – Deux approches de régularisation de surface de contact

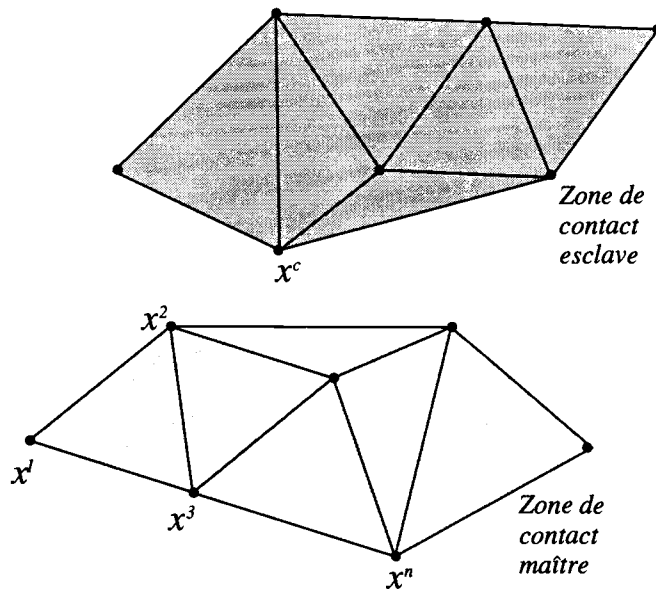


Fig. 2.2 – Zones de contact

## 2.2 Approximation diffuse et contact

Nous supposons préalablement définies deux zones de contact potentiel, une zone esclave et une zone maître. La zone maître est formée d'une collection de facettes issues du maillage du solide maître. Dans la suite, les nœuds de cette collection seront notés  $\mathbf{x}^i$  ou  $i = 1, \dots, n$ . La zone esclave est formée d'un ensemble de nœuds susceptibles d'entrer en contact avec la zone maître (Figure 2.2).

L'objectif est de déterminer une surface de contact approchée  $S_g^d$  à partir de la seule donnée des nœuds  $\mathbf{x}^i$  en utilisant la technique d'approximation diffuse. Cette surface diffuse est construite à partir d'une succession d'approximations locales. L'approche proposée va associer, à chaque nœud esclave  $\mathbf{x}^c$ , une *approximation locale*  $S^d$  de la surface.

### 2.2.1 Hypothèses et choix

Nous supposons qu'en chaque nœud de la surface issue du maillage éléments finis (surface discrétisée), dans un *repère local* orthonormal direct  $R^d$ , au *voisinage* d'un point dit *point de référence* noté  $\mathbf{x}^{ref}$ , l'approximation locale est définie par une surface de Monge d'équation cartésienne :

$$h_{\mathbf{x}^{ref}}(X_1, X_2) = X_3 \quad (2.1)$$

où  $h_{\mathbf{x}^{ref}}$  est une fonction numérique sur un domaine plan et  $(X_1, X_2, X_3)$  sont les coordonnées d'un point quelconque dans le repère  $R^d$ .

Dans la suite, les coordonnées d'un point quelconque dans ce repère seront écrites en majuscule. Les coordonnées d'un nœud de la surface maître  $\mathbf{x}^i$  dans  $R^d$  seront notées avec l'exposant  $i$ ,  $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$ , celles d'un nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  avec l'exposant  $c$ ,  $(X_1^c, X_2^c, X_3^c)$ . La notation  $h_{\mathbf{x}^{ref}}$  traduit le fait que l'équation de la surface est définie *localement* autour du point  $\mathbf{x}^{ref}$ . L'écriture intrinsèque de  $h_{\mathbf{x}^{ref}}$  va donc s'exprimer en fonction de  $\mathbf{x}^{ref}$ .

Pour chaque nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  susceptible d'entrer en contact avec les nœuds  $\mathbf{x}^i$ , nous cherchons une approximation locale de la surface, définie sur le plan engendré par  $R^d$ . Le voisinage est donc constitué de l'ensemble des nœuds  $\mathbf{x}^i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

La difficulté qui se pose pour le traitement d'une surface de contact est de prendre le point de référence le plus judicieux possible afin de donner la description la plus juste de la surface de contact maître. De fait, le choix le plus naturel est de considérer comme point de référence le point  $\mathbf{x}^p$ , *projection de  $\mathbf{x}^c$  sur le plan défini par  $R^d$* . Les coordonnées de ce point dans  $R^d$  sont exactement  $(X_1^c, X_2^c, 0)$ .

Avant de présenter la procédure d'approximation, il est indispensable de mettre en évidence la construction du repère diffus  $R^d$ . Plusieurs méthodes sont possibles pour la détermination du repère local  $R^d$  [69]. Dans notre cas,  $R^d$  est défini comme étant le repère moyen au sens des moindres carrés associé aux  $\mathbf{x}^i$ .

## 2.2.2 Détermination du repère diffus $R^d$

### Généralités

L'équation générale du plan diffus est de la forme classique :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0 \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  est un vecteur à quatre composantes qui doivent être déterminées. Le plan diffus doit être tel que la distance  $d^i$  entre un point  $\mathbf{x}^i$  et le plan soit minimale. Cette distance s'écrit simplement :

$$d^i = a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4 \quad (2.3)$$

### Détermination de $\mathbf{a}$

La détermination du plan diffus passe par le calcul du vecteur  $\mathbf{a}$ . Pour ce faire, la méthode des moindres carrés est utilisée et  $\mathbf{a}$  doit être la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{a}} \{J(\mathbf{a})\} \quad (2.4)$$

avec :

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{i=n} d^i{}^2 \quad (2.5)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4]^2 \quad (2.6)$$

Le calcul du minimum de  $J$  est déterminé par la résolution du système :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (2.7)$$

En détaillant chaque composante, ce système est équivalent à :

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4] x_1^i \\ 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4] x_2^i \\ 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4] x_3^i \\ 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 x_1^i + a_2 x_2^i + a_3 x_3^i + a_4] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

La dernière équation du système  $\mathcal{S}$  permet de connaître  $a_4$  :

$$a_4 = - (a_1 x_1^g + a_2 x_2^g + a_3 x_3^g) \quad (2.9)$$

Dans cette expression,  $x_k^g$  pour  $k = 1, 2, 3$  est la  $k^{\text{ième}}$  coordonnée du barycentre des  $n$  nœuds  $\mathbf{x}^i$  :

$$x_k^g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_k^i \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

En soustrayant le barycentre à chaque nœud  $\mathbf{x}^i$ , le plan moyen passe par l'origine, autrement dit  $a_4 = 0$ . Dans ce cas précis, le système  $\mathcal{S}$  s'écrit simplement :

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 (x_1^i - x_1^g)^2 + a_2 (x_2^i - x_2^g) (x_1^i - x_1^g) + a_3 (x_3^i - x_3^g) (x_1^i - x_1^g)] \\ 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 (x_1^i - x_1^g) (x_2^i - x_2^g) + a_2 (x_2^i - x_2^g)^2 + a_3 (x_3^i - x_3^g) (x_2^i - x_2^g)] \\ 0 = \sum_{i=1}^{i=n} [a_1 (x_1^i - x_1^g) (x_3^i - x_3^g) + a_2 (x_2^i - x_2^g) (x_3^i - x_3^g) + a_3 (x_3^i - x_3^g)^2] \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Nous considérons alors la matrice  $A$  définie par :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{i=1}^{i=n} (x_1^i - x_1^g)^2 \\
 A_{22} &= \sum_{i=1}^{i=n} (x_2^i - x_2^g)^2 \\
 A_{33} &= \sum_{i=1}^{i=n} (x_3^i - x_3^g)^2 \\
 A_{12} &= A_{21} = \sum_{i=1}^{i=n} (x_1^i - x_1^g) (x_2^i - x_2^g) \\
 A_{13} &= A_{31} = \sum_{i=1}^{i=n} (x_1^i - x_1^g) (x_3^i - x_3^g) \\
 A_{32} &= A_{23} = \sum_{i=1}^{i=n} (x_2^i - x_2^g) (x_3^i - x_3^g)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Les valeurs  $a_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont obtenues en résolvant le système :

$$A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.13}$$

Le système ci-dessus a une solution évidente  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . Pour éviter cette solution triviale, il faut imposer la condition  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ .

Le vecteur  $\mathbf{a}$  ainsi déterminé fournit la normale au plan diffus par la relation classique :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

### Expression des vecteurs tangents

Le premier vecteur tangent  $\mathbf{t}_1$  est construit à partir des deux composantes de  $\mathbf{n}$  les plus grandes :

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ si } |a_1| \leq |a_2| \text{ et } |a_1| \leq |a_3| \text{ alors } \mathbf{t}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} \\
 \bullet \text{ si } |a_2| \leq |a_1| \text{ et } |a_2| \leq |a_3| \text{ alors } \mathbf{t}_1 &= \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} \\
 \bullet \text{ si } |a_3| \leq |a_1| \text{ et } |a_3| \leq |a_2| \text{ alors } \mathbf{t}_1 &= \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$



Le vecteur  $\mathbf{t}_1$  ainsi construit est non nul et orthogonal à  $\mathbf{n}$ . Ce vecteur est alors normé,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{\|\mathbf{t}_1\|} \quad (2.16)$$

et le second vecteur tangent  $\mathbf{t}_2$  est défini comme le produit vectoriel entre  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}_1$ , soit :

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1}{\|\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1\|} \quad (2.17)$$

Le repère diffus étant déterminé, nous pouvons déterminer l'approximation locale associée à un nœud esclave  $\mathbf{x}^c$ .

### 2.2.3 Approximation locale associée à un nœud $\mathbf{x}^c$

L'approximation locale associée au nœud  $\mathbf{x}^c$  est décrite dans  $R^d$  par une surface d'équation :

$$f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) = X_3 \quad (2.18)$$

Il est fondamental de remarquer que l'expression de  $f$  dépend du point d'évaluation, c'est à dire de la projection de  $\mathbf{x}^c$  sur le plan diffus. Or comme nous l'avons souligné, les coordonnées de ce point sont entièrement déterminées par les coordonnées du nœud  $\mathbf{x}^c$  dans le repère diffus, ce qui explique la notation introduite  $f_{\mathbf{x}^c}$ .

L'expression de  $f_{\mathbf{x}^c}$  s'exprime à l'aide d'une base polynomiale  $\mathbf{p}$ , d'ordre  $r$  et de  $k$  termes :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) &= \sum_{j=1}^{j=k} p_j \alpha_j \\ &= \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dans cette expression,

- $p_j, j = 1, \dots, k$  désigne un terme de la base polynomiale,
- $\alpha_j, j = 1, \dots, k$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  qui doit être déterminé.

Dans le cas général, la base  $\mathbf{p}$  utilisée est une base quadratique :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 - X_1^c \\ X_2 - X_2^c \\ (X_1 - X_1^c)^2 \\ (X_2 - X_2^c)(X_1 - X_1^c) \\ (X_2 - X_2^c)^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Le vecteur  $\alpha$  qui doit être évalué est donc un vecteur à 6 composantes :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Pour que l'approximation soit définie, le nombre de nœuds  $\mathbf{x}^i$  utilisés doit être au moins égal à la taille de la base polynomiale en tout point, c'est à dire 6. Dans la pratique, il se peut que la zone de contact maître ne contienne pas assez de nœuds. Dans ce cas, nous utilisons une base polynomiale linéaire. Ces aspects seront détaillés dans la partie 2.6.

#### 2.2.4 Détermination du vecteur $\alpha$

Ce vecteur est calculé en utilisant une méthode des moindres carrés pondérés, minimisant la différence entre l'altitude  $X_3^i$  des nœuds  $\mathbf{x}^i$  et la fonction  $f$  évaluée en ces nœuds. Ceci conduit au critère  $J_{\mathbf{x}^c}$  suivant :

$$J_{\mathbf{x}^c}(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=n} w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c) \left\{ (\mathbf{p}^{iT} \alpha - X_3^i) \right\}^2 \quad (2.22)$$

Dans cette expression,  $w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c)$  pour  $i = 1, \dots, n$ , noté dans la suite  $w^i$  représente la fonction poids attachée au nœud  $\mathbf{x}^i$ . La fonction poids  $w^i$  est une fonction non nulle sur  $\Omega^i$ , domaine d'influence du nœud  $\mathbf{x}^i$  et nulle partout ailleurs:  $w^i > 0$  sur le domaine  $\Omega^i$  et  $w^i = 0$  ailleurs. L'expression de ces fonctions poids sera détaillée dans la partie 2.2.5. où nous avons :

$$\mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1^i - X_1^c \\ X_2^i - X_2^c \\ (X_1^i - X_1^c)^2 \\ (X_2^i - X_2^c)(X_1^i - X_1^c) \\ (X_2^i - X_2^c)^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

La détermination du coefficient  $\alpha$  nécessite le calcul du minimum de  $J_{\mathbf{x}^c}$  par :

$$\frac{\partial J_{\mathbf{x}^c}}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.24)$$

En reprenant (2.22), la relation (2.24) s'écrit :

$$\left( \sum_{i=1}^{i=n} w^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} \right) \alpha - \sum_{i=1}^{i=n} w^i X_3^i \mathbf{p}^i = 0 \quad (2.25)$$

L'expression (2.25) peut être mise sous une forme matricielle. Le vecteur  $\alpha$  doit alors être solution du système défini par :

$$\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P} \alpha = \mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{Z} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} X_3^1 \\ X_3^2 \\ \dots \\ \dots \\ X_3^n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$\mathcal{W}$  est la matrice diagonale des fonctions poids.  $W$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{n,n}$  :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} w^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & w^n \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$\mathcal{P}$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{n,6}$  formée par l'ensemble des  $\mathbf{p}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{1T} \\ \mathbf{p}^{2T} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{p}^{nT} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ceci s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} 1 & X_1^1 - X_1^c & X_2^1 - X_2^c & (X_1^1 - X_1^c)^2 & (X_2^1 - X_2^c)(X_1^1 - X_1^c) & (X_2^1 - X_2^c)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_1^n - X_1^c & X_2^n - X_2^c & (X_1^n - X_1^c)^2 & (X_2^n - X_2^c)(X_1^n - X_1^c) & (X_2^n - X_2^c)^2 \end{bmatrix}$$

La résolution du système (2.26) conduit à la détermination de  $\alpha$  et donc à la connaissance de l'approximation locale de la surface de contact associée au nœud  $\mathbf{x}^c$  :

$$\alpha = (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{Z} \quad (2.30)$$

Il faut cependant être vigilant dans l'inversion de la matrice  $\mathcal{P} \mathcal{W} \mathcal{P}^T$ . En effet, si le nombre de nœuds utilisés dans l'approximation est inférieur au nombre de termes de la base polynomiale, cette matrice est singulière. Il est donc impératif que la zone de contact maître que nous avons considérée soit constituée d'au moins 6 nœuds. Si ce n'est pas le cas, il faut avoir recours à une interpolation d'ordre inférieur.

### 2.2.5 Fonctions de poids

Comme nous l'avons présenté dans la partie précédente, le critère de minimisation permettant le calcul du vecteur  $\alpha$  nécessite l'introduction et la définition de fonctions poids.

#### Un rappel

- $w^i > 0$  sur le domaine  $\Omega^i$
- $w^i = 0$  ailleurs

#### Domaine d'influence pour l'approximation diffuse

Pour chaque point d'évaluation (point de référence)  $\mathbf{x}^p$ , projection d'un nœud esclave sur le plan diffus, seuls les nœuds  $\mathbf{x}^i$  les plus proches sont retenus. Le domaine d'influence est centré au point d'évaluation  $\mathbf{x}^p$ . Les fonctions poids sont des fonctions radiales qui tendent à diminuer avec la distance au point d'évaluation  $\mathbf{x}^p$  (Figure 2.3). La fonction de poids associée au nœud  $\mathbf{x}^i$  est notée :

$$w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^p) \quad (2.31)$$

Cette écriture traduit la dépendance en le point d'évaluation. Or comme nous l'avons évoqué, les fonctions dépendent plus exactement de la distance  $d^i$  séparant le nœud  $\mathbf{x}^i$  et le point de calcul  $\mathbf{x}^p$ . De plus, tous les nœuds qui englobent le point d'évaluation  $\mathbf{x}^p$  dans un cercle de rayon  $d_{max}$  sont pris en considération. De fait, les fonctions poids sont données par :

$$w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^p) = w_{ref}(\bar{d}^i) \quad (2.32)$$

Dans cette expression le scalaire  $\bar{d}^i$  est défini par :

$$\bar{d}^i = \frac{d^i}{d_{max}} \quad (2.33)$$

$d_{max}$  est le rayon du support.  $d^i$  est la distance séparant le nœud  $\mathbf{x}^i$  et le point de calcul  $\mathbf{x}^p$ , dans le plan diffus (Figure 2.3).

Dans notre contexte de travail, le point d'évaluation  $\mathbf{x}^p$  est la projection de  $\mathbf{x}^c$  dans le plan diffus. De ce fait, la distance  $d^i$  s'exprime simplement à partir des coordonnées du nœud  $\mathbf{x}^c$  et nous avons :

$$d^i = \sqrt{(X_1^i - X_1^c)^2 + (X_2^i - X_2^c)^2} \quad (2.34)$$

Ceci explique la notation  $w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c)$ .

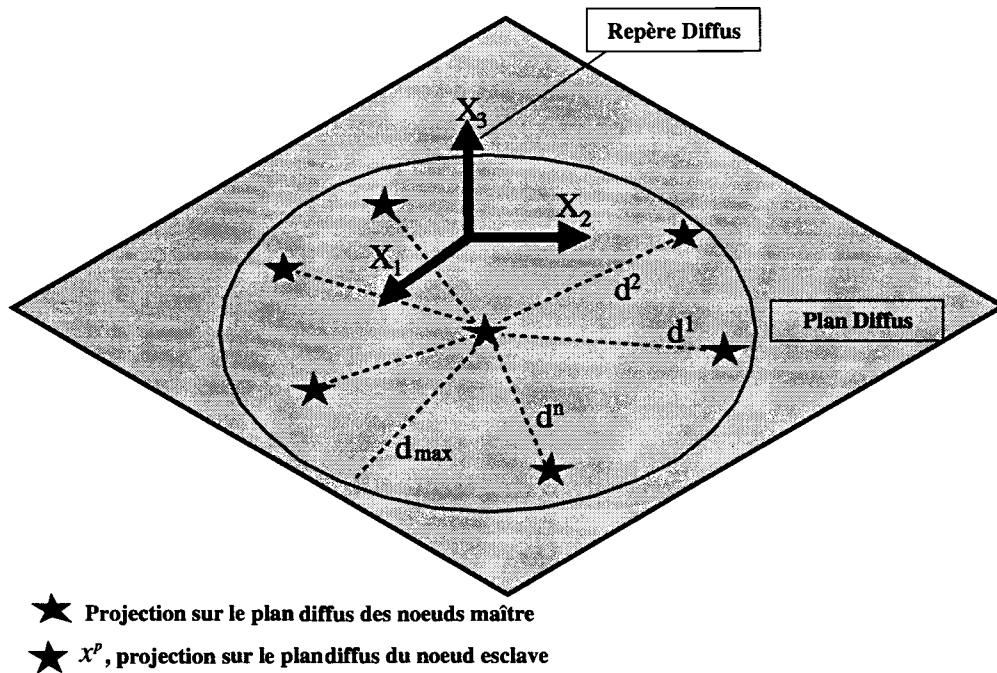


Fig. 2.3 – Support d'interpolation

### Forme des fonctions poids

Dans la pratique, une fonction cubique a été choisie pour sa simplicité et son efficacité numérique [11]. Celle-ci s'annule à l'extérieur du domaine d'influence. Elle est de la forme:

$$w_{ref}(\bar{d}^i) = \begin{cases} (1 - \bar{d}^i)^2(1 + 2\bar{d}^i) & \text{si } 0 \leq \bar{d}^i < 1 \\ 0 & \text{si } \bar{d}^i \geq 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

### Approximation ou interpolation diffuse?

Il est important de noter que dans son écriture classique, l'approximation diffuse n'est pas interpolante. En effet, l'approximation de la surface obtenue ne passe par les nœuds utilisés. La propriété d'interpolation peut être obtenue en considérant des fonctions de poids particulières que nous allons maintenant décrire. La propriété d'interpolation sera effective en considérant des fonctions de poids singulières au nœud :

$$\mathbf{x}^c \rightarrow \mathbf{x}^i \Rightarrow w(\mathbf{x}^c, \mathbf{x}^i) \rightarrow \infty \quad (2.36)$$

Ces fonctions de poids particulières sont obtenues à partir des fonctions poids classiques par la substitution suivante (interpolation de Shepard):

$$w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c) \rightarrow \frac{w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c)}{1 - w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c)} \quad (2.37)$$

Pour plus de détails concernant le choix des fonctions de poids, nous renvoyons le lecteur à la référence [11].

### 2.2.6 Dépendances de la fonction $f_{\mathbf{x}^c}$

Il est important pour le traitement du contact et notamment pour l'expression des variables cinématiques, de bien préciser quelles sont les dépendances de  $f_{\mathbf{x}^c}$ . Nous rappelons que  $f_{\mathbf{x}^c}$  s'écrit à l'aide d'une base polynomiale  $\mathbf{p}$  et d'un vecteur  $\alpha$  :

$$f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) = \mathbf{p}^T \alpha \quad (2.38)$$

Il apparaît clairement que  $f_{\mathbf{x}^c}$  dépend des deux premières coordonnées  $X_1^c$  et  $X_2^c$  du nœud esclave ainsi que des coordonnées des nœuds  $\mathbf{x}^i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ces dépendances interviennent de façons distinctes.

#### Dépendances explicites

La dépendance en  $\mathbf{x}^c$  se produit de manière explicite par l'intermédiaire de la base  $\mathbf{p}$ . Cette partie ne posera aucun problème dans le calcul des variations, il suffit de prendre la dérivée d'un polynôme. Il faut noter qu'il n'y a pas de dépendance en la troisième composante du nœud  $\mathbf{x}^c$ ,  $X_3^c$ .

#### Dépendances Implicites

L'approximation locale de la surface de contact dépend aussi obligatoirement des nœuds de l'approximation, c'est à dire des coordonnées des nœuds  $\mathbf{x}^i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Ceci intervient par l'intermédiaire seulement du coefficient  $\alpha$ , contrairement à ce qui se passe pour le nœud  $\mathbf{x}^c$ . Ce lien vient de la construction du coefficient  $\alpha$ . Reprenant la définition de  $\alpha$ , nous avons :

$$\alpha = \alpha(X_1^c, X_2^c, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) \quad (2.39)$$

C'est cet aspect qui sera le plus délicat pour le calcul de la variation de  $f_{\mathbf{x}^c}$ . Nous noterons dans la suite :

$$f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) = F(X_1^c, X_2^c, X_1^c, X_2^c, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) \quad (2.40)$$

## 2.3 Nouvelle description de la géométrie du contact

La partie précédente a mis en évidence la construction d'une surface de contact régularisée. Nous avons vu que la surface approchée  $S_g^d$  est obtenue par une succession d'approximations locales associées à chaque nœud esclave. L'équation de cette

surface approchée n'est pas explicite. De ce fait, un choix s'impose : quelle surface doit être utilisée ? La quantité indispensable à la modélisation du contact glissant est la distance normale de contact (cf. section 1.3). Il apparaît donc fondamental de donner une nouvelle définition de cette quantité en utilisant les propriétés de la surface régularisée.

### 2.3.1 Notion de point le plus proche

La distance normale de contact est habituellement définie comme la distance minimale séparant le nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  de la surface maître. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 1, elle est basée sur la notion de point le plus proche. Il est donc nécessaire de faire de même avec la nouvelle description de la surface de contact. Si nous utilisons une telle démarche, il faut associer à chaque nœud esclave, un point de la surface diffuse,  $\mathbf{x}_g^d$ . Ce point est en fait la projection de  $\mathbf{x}^c$  sur  $S_g^d$ . Or, la partie précédente a mis en évidence un des aspects fondamentaux de l'approche : l'équation de la surface diffuse n'est pas explicite. Seule une succession d'approximations locales permet d'obtenir cette surface. La seule équation que nous connaissions de façon explicite est l'équation de l'approximation locale associée à chaque nœud esclave. L'idée est donc de considérer non pas la projection de ce point sur la surface diffuse mais sur l'approximation locale. En effet, nous ne projetons pas n'importe quel point. Nous considérons le point  $\mathbf{x}^c$  : l'approximation locale a été définie autour de ce point. De plus, il a été constaté numériquement que  $\mathbf{x}^d$  tend à se rapprocher du point  $\mathbf{x}_g^d$ . De fait, ce choix apparaît tout à fait cohérent. Ainsi, au nœud  $\mathbf{x}^c$  est associé le point  $\mathbf{x}^d$  appartenant à  $S^d$  et solution du problème de minimisation :

$$\|\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d\|^2 = \min_{\mathbf{x} \in S^d} \|\mathbf{x}^c - \mathbf{x}\|^2 \quad (2.41)$$

Les deux premières coordonnées de  $\mathbf{x}^d$  dans le repère  $R^d$  seront notées  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ . Sa troisième coordonnée sera exprimée à l'aide de  $f_{\mathbf{x}^c}$  évaluée en  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  soit :

$$\bar{X}_3 = f_{\mathbf{x}^c}(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \quad (2.42)$$

Dans la suite, nous reprendrons la notation introduite en (2.40), pour écrire :

$$F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, X_1^c, X_2^c, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) = \bar{F} \quad (2.43)$$

Nous avons vu dans le chapitre 1 que le contact s'exprime dans une base locale associée à la surface maître au point le plus proche. Nous venons de donner une définition de ce point en utilisant la nouvelle description du contact, il faut donc définir une base locale en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface régularisée.

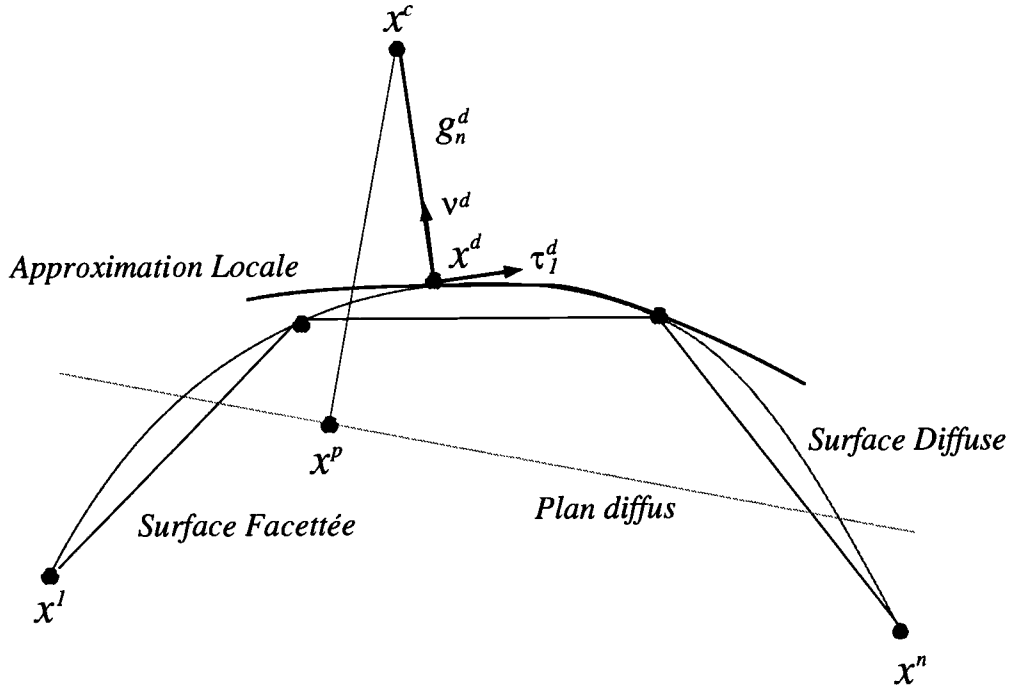


Fig. 2.4 – Nouvelle géométrie du contact

### 2.3.2 Base locale en $x^d$

L'approximation locale est paramétrée par  $(X_1, X_2)$  dans  $R^d$ . La base naturelle associée au paramétrage  $(X_1, X_2)$  est la base formée par les deux vecteurs :

$$\tau_1^d = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \quad ; \quad \tau_2^d = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \quad (2.44)$$

où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur position d'un point quelconque de  $S^d$  de coordonnées :

$$(X_1, X_2, f_{x^c}((X_1, X_2)))$$

De ce fait, les vecteurs tangents au point  $x^d$  s'expriment naturellement :

$$\tau_1^d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_2^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

où la notation  $\bar{F}_{,X_l}$  désigne la dérivée partielle de  $\bar{F}$  par rapport à la variable  $X_l$ , pour  $l = 1, 2$ . Le vecteur normal  $\nu^d$  est le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\nu^d = \frac{\tau_1^d \wedge \tau_2^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} \begin{bmatrix} -\bar{F}_{,X_1} \\ -\bar{F}_{,X_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$



### 2.3.3 Notion de distance normale de contact diffus

Le critère de minimisation (2.41) nous permet d'affirmer que  $\mathbf{x}^d$  est la projection de  $\mathbf{x}^c$  sur  $S^d$ . Ceci conduit aux conditions suivantes :

$$(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_k^d = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (2.47)$$

Le système ci-dessus est résolu par une méthode de Newton classique.

Le vecteur  $\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d$  est colinéaire au vecteur  $\boldsymbol{\nu}^d$  :

$$\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d = g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \quad (2.48)$$

ce qui implique,

$$g_n^d = (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d \quad (2.49)$$

Ce scalaire  $g_n^d$  va gérer les statuts de contact sur la surface régularisée. De manière classique, nous avons :

$$\begin{cases} g_n^d = 0 & , \text{ le nœud est en contact avec la surface régularisée} \\ g_n^d > 0 & , \text{ le nœud n'est pas en contact} \\ g_n^d < 0 & , \text{ il y a interpénétration.} \end{cases} \quad (2.50)$$

La description de l'élément de contact diffus 3D sera complète une fois que le résidu et la matrice tangente élémentaires de contact diffus auront été exprimés. Les expressions de  $\mathbf{R}_c^d$  et  $K_c^d$  vont dépendre de la nouvelle définition de la surface de contact.

## 2.4 Élément de contact diffus 3D

Dans cette partie, la régularisation de la surface de contact est associée à la méthode des éléments finis pour mettre en évidence *l'élément de contact diffus 3D*. Une des différences majeures entre l'approche "nœud-facette" introduite précédemment (cf. section 1.4) et l'approche étudiée ici réside dans le fait que nous ne raisonnons plus en termes de facette de contact potentiel mais en termes de nuage de nœuds de contact potentiel. En effet, les surfaces esclave et maître peuvent être considérées comme un ensemble de nœuds : un nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  est supposé en contact avec une zone maître composée de  $n$  nœuds  $\mathbf{x}^i$ .

L'élément de contact présenté est constitué d'un nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  et des  $n$  nœuds  $\mathbf{x}^i$ . Ces nœuds sont les nœuds qui ont été utilisés pour construire l'approximation locale associée à  $\mathbf{x}^c$ . Le vecteur des inconnues de cet élément est noté  $\mathbf{u}^d$  :

$$\mathbf{u}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^c \\ \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Les variations de ce vecteur sont écrites :

$$\delta \mathbf{u}^d = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}^c \\ \delta \mathbf{x}^1 \\ \delta \mathbf{x}^2 \\ \dots \\ \dots \\ \delta \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{u}^d = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^c \\ \Delta \mathbf{x}^1 \\ \Delta \mathbf{x}^2 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta \mathbf{x}^n \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

### 2.4.1 Résidu élémentaire

La quantité nécessaire à la détermination du résidu  $\mathbf{R}_c^d$  est la première variation de  $g_n^d$ . Nous allons, par la suite, nous attacher à calculer cette variation en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface de contact régularisée.

#### Première variation de $g_n^d$

Cette quantité est calculée en reprenant (2.49). De façon générale, cette variation s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta g_n^d &= \delta [(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d] \\ &= \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d + g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\nu}^d \end{aligned} \quad (2.53)$$

Or  $\|\boldsymbol{\nu}^d\| = 1$ , ce qui a pour conséquence directe :

$$\boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\nu}^d = 0 \quad (2.54)$$

En effet,

$$\|\boldsymbol{\nu}^d\| = 1 \Rightarrow \delta \|\boldsymbol{\nu}^d\| = 0$$

Or,

$$\delta \|\boldsymbol{\nu}^d\| = \delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \boldsymbol{\nu}^d$$

d'où

$$\delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \boldsymbol{\nu}^d = 0$$

L'expression  $\delta g_n^d$  devient finalement :

$$\delta g_n^d = \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d \quad (2.55)$$

La difficulté qui apparaît alors vient de  $\delta \mathbf{x}^d$ . En effet, le calcul de cette quantité nécessite la détermination de la variation de  $\bar{F}$ . Au vue des dépendances introduites par l'équation (2.40), les contributions du nœud  $\mathbf{x}^c$  et celles des nœuds  $\mathbf{x}^i$  vont être prises en considération.

Reprenons pour ceci, l'expression de  $\mathbf{x}^d$ :

$$\mathbf{x}^d = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

La variation de  $\mathbf{x}^d$  dans la direction  $\delta \mathbf{u}^d$  en  $\mathbf{u}^d$  va s'écrire :

$$\delta \mathbf{x}^d = \begin{bmatrix} \delta \bar{X}_1 \\ \delta \bar{X}_2 \\ \delta \bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Nous rappelons que  $\bar{F}$  est en fait  $f_{\mathbf{x}^c}$  évaluée en  $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ . Les deux premières coordonnées de ce vecteur concernent la variation des coordonnées  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ . Ces variations vont obligatoirement faire intervenir les variations de tous les nœuds  $\mathbf{x}^i$  et celles du nœud esclave. La troisième coordonnée traite la variation de  $F$  dans la direction  $\delta \mathbf{u}^d$  au point  $\mathbf{u}^d$ .

**Rappels et notations** Nous présentons quelques rappels sommaires de calcul différentiel qui vont être utilisés dans la suite. Loin d'un cours de mathématiques, ce paragraphe est surtout là pour fixer les idées et bien spécifier les notations qui seront utilisées ultérieurement.

Nous considérons une fonction  $\mathbf{h}$  suffisamment régulière de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{h} : \quad & \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) & \rightarrow \mathbf{h}(u_1, \dots, u_m) := (h_1, \dots, h_p) \end{aligned} \quad (2.58)$$

La première variation de la fonction  $\mathbf{h}$  en  $\mathbf{u}$  dans la direction  $\delta \mathbf{u}$  ou bien différentielle de  $\mathbf{h}$  en  $\mathbf{u}$ , notée  $\delta \mathbf{h}$  est définie par :

$$\delta_{\mathbf{u}} \mathbf{h} = \sum_{l=1}^{l=m} h_{,u_l}(\mathbf{u}) \delta u_l \quad (2.59)$$

Dans le cas particulier où  $p = 1$ , cette variation s'écrit tout simplement à partir du gradient de  $h$  comme suit :

$$\delta_{\mathbf{u}} h = \delta \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}} h(\mathbf{u}) \quad (2.60)$$

Pour mémoire, l'écriture du gradient de  $h$  est :

$$\nabla_{\mathbf{u}} h(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} h_{,u_1}(\mathbf{u}) \\ \dots \\ \dots \\ h_{,u_m}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

**Application au calcul de  $\delta\bar{F}$**  En appliquant la relation (2.59) à  $\bar{F}$ , nous sommes en mesure d'écrire :

$$\delta\bar{F} = \bar{F}_{,X_1}\delta\bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_2}\delta\bar{X}_2 + \delta\mathbf{u}^{dT}\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F} \quad (2.62)$$

$\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F}$  est le gradient de  $\bar{F}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{u}^d$ , c'est à dire :

$$\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c}\bar{F} \\ \nabla_{x^1}\bar{F} \\ \dots \\ \nabla_{x^n}\bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

où nous avons introduit les notations

$$\nabla_{\mathbf{x}^c}\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{,X_1^c} \\ \bar{F}_{,X_2^c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{x}^i}\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{,X_1^i} \\ \bar{F}_{,X_2^i} \\ \bar{F}_{,X_3^i} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Il est important de noter que la troisième composante du vecteur  $\nabla_{\mathbf{x}^c}\bar{F}$  est nulle car  $\bar{F}$  ne dépend pas de la troisième coordonnée du nœud esclave comme nous l'avons déjà évoqué.

**Expression de  $\delta\mathbf{x}^d$**  En reprenant l'expression (2.62) pour la variation de  $\delta\mathbf{x}^d$ , nous obtenons :

$$\delta\mathbf{x}^d = \begin{bmatrix} \delta\bar{X}_1 \\ \delta\bar{X}_2 \\ \bar{F}_{,X_1}\delta\bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_2}\delta\bar{X}_2 + \delta\mathbf{u}^{dT}\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

soit encore,

$$\delta\mathbf{x}^d = \delta\bar{X}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} + \delta\bar{X}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\mathbf{u}^{dT}\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

En utilisant la définition des vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}_1^d$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^d$  (2.45), il apparaît que :

$$\delta\mathbf{x}^d = \delta\bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta\bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + d\bar{F} \quad (2.67)$$

où les deux premières composantes du vecteur  $d\bar{F}$  sont nulles. La troisième composante fait intervenir la variation de  $\bar{F}$  par rapport à  $\mathbf{u}^d$  :

$$d\bar{F}_3 = \delta\mathbf{u}^{dT}\nabla_{\mathbf{u}^d}\bar{F} \quad (2.68)$$

Dans cette partie, le calcul détaillé des quantités  $\bar{F}_{,X_k^c}$  et  $\bar{F}_{,X_k^i}$  pour  $k = 1, 2$  et  $i = 1, \dots, n$  n'est pas présenté. Seule une expression générale est donnée. En reprenant la définition de l'approximation locale introduite par l'équation (2.19) évaluée au point  $\mathbf{x}^d$ , les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{,X_k^c} &= \bar{\mathbf{p}}_{,X_k^c}^T \boldsymbol{\alpha} + \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} \\ \bar{F}_{,X_k^i} &= \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i}\end{aligned}\quad (2.69)$$

où  $\bar{\mathbf{p}}$  est la base polynomiale  $\mathbf{p}$  évaluée en  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ . Il est à noter que la base polynomiale ne dépend pas des nœuds  $\mathbf{x}^i$ , ce qui explique l'expression de  $\bar{F}_{,X_k^i}$ . Les difficultés rencontrées sont liées à l'évaluation des grandeurs  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c}$  et  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i}$ .

### Expression discrète et résidu élémentaire de contact diffus

Il est maintenant possible de donner l'expression discrète de la première variation de  $g_n^d$ . Cette quantité est calculée en reportant la valeur de  $\delta \mathbf{x}^d$  (2.67), dans l'équation de la définition de  $g_n^d$  (2.55), nous obtenons alors :

$$\delta g_n^d = \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{N}_c^d \quad (2.70)$$

où  $\mathcal{N}_c^d$  est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes dont l'expression est :

$$\mathcal{N}_c^d = \frac{-1}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \times \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{c1}^d \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Les trois premières composantes de ce vecteur prennent en compte seulement les contributions du nœud  $\mathbf{x}^c$  :

$$\mathcal{N}_{c1}^d = \begin{bmatrix} \bar{F}_{,X_1^c} + \bar{F}_{,X_1} \\ \bar{F}_{,X_2^c} + \bar{F}_{,X_2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Dans le cas où la méthode de pénalisation est utilisée, le résidu élémentaire de contact est donc un vecteur à  $3(n+1)$  composantes donné par :

$$\mathbf{R}_c^d = -\varepsilon_n g_n^d \mathcal{N}_c^d \quad (2.73)$$

où  $\varepsilon_n$  est le paramètre de pénalisation.

### 2.4.2 Matrice tangente élémentaire de contact

Le calcul de la matrice tangente élémentaire de contact diffus nécessite le calcul de la seconde variation de  $g_n^d$ . Comme pour la première variation, cette quantité dépend des propriétés de l'approximation locale.

### Seconde variation de $g_n^d$

Cette seconde variation s'écrit de manière générale en dérivant la relation (2.55) :

$$\Delta \delta g_n^d = \Delta [(\delta \mathbf{x}^c - \delta \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d] \quad (2.74)$$

ce qui est équivalent à :

$$\Delta \delta g_n^d = g_n^d \delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}^d - \Delta \delta \mathbf{x}^d \cdot \boldsymbol{\nu}^d \quad (2.75)$$

Les difficultés rencontrées au cours de cette évaluation sont de la même nature que celles rencontrées pour la première variation, à savoir le calcul de  $\Delta \delta \mathbf{x}^d$  qui va faire intervenir la seconde variation de  $\bar{F}$ . La seconde variation de  $\mathbf{x}^d$  est déterminée en prenant la variation de la relation (2.67) :

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{x}^d &= \Delta [\delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + d\bar{\mathbf{F}}] \\ &= \delta \bar{X}_1 \Delta \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta \bar{X}_2 \Delta \boldsymbol{\tau}_2^d + \Delta \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \Delta \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + \Delta d\bar{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Le problème qui se pose est l'évaluation du terme  $\Delta d\bar{\mathbf{F}}$ . Les deux premières composantes de ce vecteur étant nulles, la difficulté est liée à l'expression de la troisième composante. En effet, cette dernière fait intervenir la variation du gradient  $\nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F}$ . En utilisant les rappels que nous avons introduits dans la section précédente, nous sommes en mesure d'écrire que :

$$\Delta \left[ \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right] = \delta \mathbf{u}^{dT} \left[ \mathcal{H}_{\bar{F}} \Delta \mathbf{u}^d + \mathcal{T}_1 \Delta \bar{X}_1 + \mathcal{T}_2 \Delta \bar{X}_2 \right] \quad (2.77)$$

Nous considérons la matrice  $\mathcal{H}_{\bar{F}}$  appartenant à  $\mathbb{M}_{3(n+1), 3(n+1)}$  qui ne fait intervenir que les contributions du nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  et celles des nœuds  $\mathbf{x}^i$ . En fait,  $\mathcal{H}_{\bar{F}}$  est la Hessienne de  $\bar{F}$ .  $\mathcal{T}_l$  est le gradient de  $\bar{F}_{,X_l}$  par rapport à  $\mathbf{u}^d$ .

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_1} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_1} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_2} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_2} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_l} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{,X_l X_1^c} \\ \bar{F}_{,X_l X_2^c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{x}^i} \bar{F}_{,X_l} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{,X_l X_1^i} \\ \bar{F}_{,X_l X_2^i} \\ \bar{F}_{,X_l X_3^i} \end{bmatrix} \quad l = 1, 2 \quad (2.79)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{F}} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_1^c}{}^T & \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_1^c}{}^T & \cdots & \cdots & \cdots & \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_1^c}{}^T \\ \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_2^c}{}^T & \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_2^c}{}^T & \cdots & \cdots & \cdots & \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_2^c}{}^T \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_1^1}{}^T & \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_1^1}{}^T & \cdots & \cdots & \cdots & \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_1^1}{}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_3^1}{}^T & \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_3^1}{}^T & \cdots & \cdots & \cdots & \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_3^1}{}^T \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

La quantité  $\Delta\delta\mathbf{x}^d$  a alors la forme suivante :

$$\Delta\delta\mathbf{x}^d = \delta\bar{X}_1 \Delta\boldsymbol{\tau}_1^d + \delta\bar{X}_2 \Delta\boldsymbol{\tau}_2^d + \Delta\delta\bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \Delta\delta\bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + \mathbf{d}^2 \bar{\mathbf{F}} \quad (2.81)$$

où les deux premières composantes du vecteur  $\mathbf{d}^2 \bar{\mathbf{F}}$  sont nulles.

$$\mathbf{d}^2 \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\mathbf{u}^{dT} [\mathcal{H}_{\bar{F}} \Delta\mathbf{u}^d + \mathcal{T}_1 \Delta\bar{X}_1 + \mathcal{T}_2 \Delta\bar{X}_2] \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

### Expression discrète et matrice tangente

Nous admettons que les variations des coordonnées  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  ainsi que celles du vecteur  $\boldsymbol{\nu}^d$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \delta\bar{X}_l &= \delta\mathbf{u}^{dT} \mathbf{S}_l \quad \text{et} \quad \Delta\bar{X}_l = \mathbf{S}_l^T \Delta\mathbf{u}^d \quad l = 1, 2 \\ \delta\boldsymbol{\nu}^d &= \mathcal{U} \delta\mathbf{u}^d \quad \text{et} \quad \Delta\boldsymbol{\nu}^d = \mathcal{U} \Delta\mathbf{u}^d \end{aligned} \quad (2.83)$$

où  $\mathbf{S}_l$  ( $l = 1, 2$ ) est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes obtenu en différentiant (2.47).  $\mathcal{U}$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{3,3(n+1)}$  calculée à partir de la relation (2.46). La détermination de ces différents termes est présentée dans la partie 2.5.

La variation des vecteurs tangents est indispensable. En reprenant leur expression (2.45), il apparaît clairement que seule la troisième composante de cette variation est non nulle. Nous montrerons dans la partie 2.5.2 que cette quantité s'écrit :

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_l^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{D}_n^T \Delta\mathbf{u}^d \end{bmatrix} \quad l = 1, 2 \quad (2.84)$$

Le vecteur  $\mathcal{D}_n$  est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes qui s'exprime à partir de  $\mathbf{S}_l$  et  $\mathcal{T}_l$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tau_1} &= \bar{F}_{,X_1 X_1} \mathbf{S}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \mathbf{S}_2 + \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{D}_{\tau_2} &= \bar{F}_{,X_2 X_1} \mathbf{S}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \mathbf{S}_2 + \mathcal{T}_2 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ces relations ainsi que le calcul de  $\Delta\delta\mathbf{x}^d$  permettent d'écrire l'expression discrète de la seconde variation de  $g_n^d$  :

$$\Delta\delta g_n^d = \delta\mathbf{u}^{dT} \mathcal{M}_c^d \Delta\mathbf{u}^d \quad (2.86)$$

où la matrice  $\mathcal{M}_c^d$  est donnée par :

$$\mathcal{M}_c^d = \frac{-1}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} (\mathcal{H}_{\bar{F}} + \mathcal{T}_1 \mathcal{S}_1^T + \mathcal{T}_2 \mathcal{S}_2^T + \mathcal{S}_1 \mathcal{D}_{\tau_1}^T + \mathcal{S}_2 \mathcal{D}_{\tau_2}^T) + g_n^d \mathcal{U}^T \mathcal{U}$$

La matrice tangente élémentaire de contact diffus  $K_c^d$  est une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{3(n+1),3(n+1)}$  et son expression est la suivante :

$$K_c^d = \varepsilon_n g_n^d \mathcal{M}_c^d + \varepsilon_n \mathcal{N}_c^d \mathcal{N}_c^{dT} \quad (2.87)$$

Cette partie nous a permis de déterminer toutes les grandeurs indispensables à la construction et l'implémentation de l'élément de contact.

## 2.5 Calcul des variations

Dans la partie précédente, des expressions ont été admises sans spécifier leur expression globale pour ne pas charger la description de l'élément de contact. Cependant, cet élément de contact ne saurait être complet sans ces grandeurs. La partie à venir est consacrée à la mise en évidence de ces différents termes : calcul de la variation des vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}_1^d$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^d$  et de la variation du vecteur  $\boldsymbol{\nu}^d$ . Nous terminerons par l'expression de la variation du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$ .

### 2.5.1 Calcul de $\delta\bar{X}_1$ et $\delta\bar{X}_2$

Nous avons noté qu'il était indispensable de connaître les quantités  $\delta\bar{X}_1$  et  $\delta\bar{X}_2$ . Pour ce faire, nous considérons la relation (2.47) qui est différenciée :

$$\delta [(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_k^d] = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (2.88)$$

La définition de la distance normale  $g_n^d$  conduit à :

$$\delta(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_k^d + g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_k^d = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2 \quad (2.89)$$

Reprenant la relation qui donne la variation  $\delta\mathbf{x}^d$  (2.67), ainsi que celle donnant la variation du vecteur tangent  $\delta\boldsymbol{\tau}_k^d$  (2.84),  $\delta\bar{X}_1$  et  $\delta\bar{X}_2$  doivent être solutions du système :

$$(S_1) \begin{cases} m_{11}^d \delta\bar{X}_1 + m_{12}^d \delta\bar{X}_2 = \delta\mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta\mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \mathcal{T}_1 - \bar{F}_{,X_1} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \\ m_{21}^d \delta\bar{X}_1 + m_{22}^d \delta\bar{X}_2 = \delta\mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d + \delta\mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \mathcal{T}_2 - \bar{F}_{,X_2} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \end{cases} \quad (2.90)$$



## 62 Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse

où nous avons introduit  $M^d$ , une matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{2,2}$  définie par :

$$m_{ij}^d = \boldsymbol{\tau}_i^d \cdot \boldsymbol{\tau}_j^d - \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \bar{F}_{,X_i X_j} \quad (2.91)$$

La résolution du système  $(S_1)$  ci-dessus nous conduit alors à :

$$\begin{aligned} \det M^d \delta \bar{X}_1 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \left[ \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} (m_{22}^d \boldsymbol{\mathcal{T}}_1 - m_{12}^d \boldsymbol{\mathcal{T}}_2) - (m_{22}^d \bar{F}_{,X_1} - m_{12}^d \bar{F}_{,X_2}) \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right] \\ &+ \delta \mathbf{x}^c \cdot [m_{22}^d \boldsymbol{\tau}_1^d - m_{12}^d \boldsymbol{\tau}_2^d] \\ \det M^d \delta \bar{X}_2 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \left[ \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} (m_{11}^d \boldsymbol{\mathcal{T}}_2 - m_{21}^d \boldsymbol{\mathcal{T}}_1) - (m_{11}^d \bar{F}_{,X_2} - m_{21}^d \bar{F}_{,X_1}) \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right] \\ &+ \delta \mathbf{x}^c \cdot [m_{11}^d \boldsymbol{\tau}_2^d - m_{21}^d \boldsymbol{\tau}_1^d] \end{aligned} \quad (2.92)$$

Nous notons finalement :

$$\begin{aligned} \delta \bar{X}_1 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \boldsymbol{\mathcal{S}}_1 \\ \delta \bar{X}_2 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \boldsymbol{\mathcal{S}}_2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

Seules les grandes lignes du calcul de  $\delta \bar{X}_1$  et  $\delta \bar{X}_2$  ont été présentées dans cette partie. Le détail peut être trouvé dans la partie B.2 de l'annexe B.

### 2.5.2 Détermination de la variation des vecteurs tangents

Dans la partie 2.4.2, relation (2.84), l'expression suivante de la variation des vecteurs tangents a été admise :

$$\delta \boldsymbol{\tau}_l^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\boldsymbol{\tau}_l}^T \delta \mathbf{u}^d \end{bmatrix} \quad \text{avec } l = 1, 2 \quad (2.94)$$

Nous allons maintenant détailler l'obtention de cette expression. La première variation des vecteurs tangents est calculée en différentiant la relation (2.45) :

$$\delta \boldsymbol{\tau}_1^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta \boldsymbol{\tau}_2^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Seule la troisième composante de ces vecteurs est non nulle. Cette quantité s'exprime à partir de la variation de  $\bar{F}_{,X_l}$  pour  $l = 1, 2$ . Au vue des dépendances introduites pour  $\bar{F}$ , nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \delta \bar{F}_{,X_1} &= \bar{F}_{,X_1 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \boldsymbol{\mathcal{T}}_1 \\ \delta \bar{F}_{,X_2} &= \bar{F}_{,X_2 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \boldsymbol{\mathcal{T}}_2 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Nous avons introduit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  les gradients de  $\bar{F}_{,X_1}$  et  $\bar{F}_{,X_2}$  par rapport à la variable  $\mathbf{u}^d$ :

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^e} \bar{F}_{,X_1} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_1} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^e} \bar{F}_{,X_2} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_2} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

L'expression finale des vecteurs  $\mathcal{D}_{\tau_1}$  et  $\mathcal{D}_{\tau_2}$  est:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tau_1} &= \bar{F}_{,X_1 X_1} \mathbf{S}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \mathbf{S}_2 + \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{D}_{\tau_2} &= \bar{F}_{,X_2 X_1} \mathbf{S}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \mathbf{S}_2 + \mathcal{T}_2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

Ces vecteurs nous permettent d'obtenir une expression vectorielle des variations de  $\bar{F}_{,X_1}$  et  $\bar{F}_{,X_2}$ :

$$\begin{aligned} \delta \bar{F}_{,X_1} &= \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{D}_{\tau_1} \\ \delta \bar{F}_{,X_2} &= \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{D}_{\tau_2} \end{aligned} \quad (2.99)$$

### 2.5.3 Calcul de la première variation du vecteur $\boldsymbol{\nu}^d$

Le calcul de la variation du vecteur normal est basé sur quelques notions d'algèbre.

#### Un rappel

On considère la fonction norme  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^+$ . Pour un vecteur  $\mathbf{a}$  de  $\mathbb{R}^3$  non nul nous avons la formule suivante:

$$\delta \|\mathbf{a}\| = \frac{\mathbf{a}^T \delta \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (2.100)$$

Cette relation permet d'écrire de manière générale:

$$\delta \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \left( I_{3 \times 3} - \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \frac{\mathbf{a}^T}{\|\mathbf{a}\|} \right) \delta \mathbf{a} \quad (2.101)$$

#### Expression de $\delta \boldsymbol{\nu}^d$

La relation (2.101) peut être appliquée directement au vecteur  $\boldsymbol{\nu}^d$  pour obtenir:

$$\delta \boldsymbol{\nu}^d = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \wedge \boldsymbol{\tau}_2\|} \left( I_{3 \times 3} - \boldsymbol{\nu}^d \boldsymbol{\nu}^{dT} \right) \delta [\boldsymbol{\tau}_1 \wedge \boldsymbol{\tau}_2] \quad (2.102)$$

La difficulté est de parvenir à déterminer le produit vectoriel  $\delta [\boldsymbol{\tau}_1 \wedge \boldsymbol{\tau}_2]$ . Grâce à la définition des vecteurs tangents, il apparaît que ce produit fait intervenir les

variations de  $\bar{F}_{,X_1}$  et  $\bar{F}_{,X_2}$  données par l'équation (2.99). Cette quantité peut alors être écrite comme le produit entre la matrice  $\mathcal{U}$  et  $\delta \mathbf{u}^d$  vecteur à  $3(n+1)$  composantes comme suit :

$$\delta \boldsymbol{\nu}^d = \mathcal{U} \delta \mathbf{u}^d \quad (2.103)$$

La matrice  $\mathcal{U}$  appartient à  $\mathbb{M}_{3,3(n+1)}$ . Elle s'écrit en fonction des vecteurs  $\mathbf{D}_{\tau_1}$  et  $\mathbf{D}_{\tau_2}$  introduits précédemment :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \wedge \boldsymbol{\tau}_2\|} \left\{ I_{3 \times 3} - \boldsymbol{\nu}^d \boldsymbol{\nu}^{dT} \right\} \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{\tau_1}^T \\ -\mathbf{D}_{\tau_2}^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

La détermination complète de ce terme peut être trouvée dans la partie B.3 de l'annexe B. Le produit  $\delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}^d$  s'écrit alors simplement :

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}^d &= \delta \boldsymbol{\nu}^{dT} \Delta \boldsymbol{\nu}^d \\ &= \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{U}^T \mathcal{U} \Delta \mathbf{u}^d \end{aligned} \quad (2.105)$$

### 2.5.4 Première variation de $F$

Reprenant la définition de  $F$ , la forme générale de  $F_{,X_k^c}$  et  $F_{,X_k^i}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} F_{,X_k^c} &= \mathbf{p}_{,X_k^c}^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} \\ F_{,X_k^i} &= \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i} \end{aligned} \quad (2.106)$$

Nous avons supposé dans cette expression que le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  dépendait du point d'évaluation qui est en fait la projection du nœud esclave sur le plan diffus. Comme nous l'avons évoqué,  $\boldsymbol{\alpha}$  dépend des coordonnées du nœud esclave. Cette supposition nous conduit à calculer la dérivée complète de  $F$  et non pas la dérivée diffuse. Le calcul de la dérivée diffuse s'effectue en supposant que  $\boldsymbol{\alpha}$  ne dépend pas du point d'évaluation. Pour le cas du traitement d'une surface de contact cette simplification n'est pas admissible dans la mesure où il y a autant de points d'évaluation qu'il y a de nœuds en contact potentiel. Ce choix aurait considérablement simplifié les calculs. En effet, c'est l'évaluation des dérivées de  $\boldsymbol{\alpha}$  qui va être la plus délicate.

$\mathbf{p}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$  étant des vecteurs à 6 composantes, nous avons opté pour l'écriture :

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,X_k^i} \\ \alpha_{2,X_k^i} \\ \alpha_{3,X_k^i} \\ \alpha_{4,X_k^i} \\ \alpha_{5,X_k^i} \\ \alpha_{6,X_k^i} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,X_k^c} \\ \alpha_{2,X_k^c} \\ \alpha_{3,X_k^c} \\ \alpha_{4,X_k^c} \\ \alpha_{5,X_k^c} \\ \alpha_{6,X_k^c} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_{,X_k^c} = \begin{bmatrix} p_{1,X_k^c} \\ p_{2,X_k^c} \\ p_{3,X_k^c} \\ p_{4,X_k^c} \\ p_{5,X_k^c} \\ p_{6,X_k^c} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, n \\ k &= 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (2.107)$$

Il est à noter que la base polynomiale  $\mathbf{p}$  ne dépend pas des nœuds  $\mathbf{x}^i$ , ce qui explique l'expression de  $F_{,X_k^i}$ . L'évaluation de l'expression  $\mathbf{p}_{,X_k^i}$  n'engendre aucun problème. Il s'agit simplement de dériver des polynômes ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$\mathbf{p}_{,X_1^c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2(X_1 - X_1^c) \\ -(X_2 - X_2^c) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{,X_2^c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -(X_1 - X_1^c) \\ -2(X_2 - X_2^c) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Revenons sur la relation (2.39). A priori, nous sommes en mesure d'écrire :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(X_1^c, X_2^c, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) \quad (2.109)$$

Les fonctions poids utilisées ne considèrent que la distance  $d^i$  séparant un nœud maître du point d'évaluation dans le plan diffus. De ce fait, seule la différence  $\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^c$  intervient. Nous pouvons même affirmer que seules les deux premières coordonnées de cette différence jouent un rôle puisque  $d^i$  est la distance dans le plan diffus (cf. section 2.2.5). Il est aussi évident que l'expression (2.29) de la matrice  $\mathcal{P}$  ne dépend que de cette différence, et que les troisièmes coordonnées ne sont pas mises à contribution. La dépendance de  $\boldsymbol{\alpha}$  en la troisième coordonnée des nœuds  $\mathbf{x}^i$  provient du vecteur  $\mathcal{Z}$ . Nous pouvons donc établir que l'expression générale de  $\boldsymbol{\alpha}$  est la suivante :

$$\boldsymbol{\alpha}(X_1^i - X_1^c, X_2^i - X_2^c, X_3^i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.110)$$

Pour parvenir à exprimer  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c}$  et  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i}$ , nous procédons au changement de variable suivant pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\begin{aligned} V_1^i &= X_1^i - X_1^c, \\ V_2^i &= X_2^i - X_2^c \\ V_3^i &= X_3^i \end{aligned} \quad (2.111)$$

L'expression (2.110) devient alors :

$$\boldsymbol{\alpha}(V_1^i, V_2^i, V_3^i) \quad (2.112)$$

Dans le cas du calcul de  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i}$ , ce changement de variable peut paraître superflu puisque qu'il conduit simplement à :

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i} = \boldsymbol{\alpha}_{,V_k^i} \quad k = 1, \dots, 3 \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.113)$$

Ce changement de variable est nettement plus intéressant pour le calcul de  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c}$ . En effet, grâce à lui, il apparaît clairement que  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c}$  peut s'exprimer en fonction d'une somme sur l'ensemble des nœuds  $\mathbf{x}^i$  :

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} = - \sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{\alpha}_{,V_k^i} \quad k = 1, 2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\alpha}_{,X_3^c} = 0 \quad (2.114)$$

soit encore en reprenant (2.113),

$$\alpha_{,X_k^c} = - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{,X_k^i} \quad k = 1, 2 \quad (2.115)$$

La difficulté à résoudre est maintenant l'évaluation des quantités  $\alpha_{,X_k^i}$  pour  $k = 1, \dots, 3$  et  $i = 1, \dots, n$ .

### Expression de $\alpha_{,X_3^j}$

Cette quantité est exprimée en reprenant la relation (2.25) et en la dérivant par rapport à  $X_3^j$ . Nous obtenons alors la relation suivante :

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^{i=n} w^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} \right) \alpha \right]_{,X_3^j} = \left[ \sum_{i=1}^{i=n} w^i X_3^i \mathbf{p}^i \right]_{,X_3^j} \quad (2.116)$$

Cette grandeur est obtenue en dérivant de façon classique un produit de fonctions. Son expression se simplifie fortement en tenant compte du fait que les  $w^j$  et  $\mathbf{p}^j$  ne dépendent pas des  $X_3^j$ . Reprenant les matrices  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{W}$  introduites dans la partie ??, nous avons:

$$(\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_3^j} = w^j \mathbf{p}^j \quad \text{avec } j = 1, \dots, n \quad (2.117)$$

L'expression de  $\alpha_{,X_3^j}$  est finalement obtenue en inversant la matrice  $\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}$ :

$$\alpha_{,X_3^j} = w^j [\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}]^{-1} \mathbf{p}^j \quad (2.118)$$

### Expression de $\alpha_{,X_1^j}$

La détermination de  $\alpha_{,X_1^j}$  est un peu plus complexe que celle de  $\alpha_{,X_3^j}$ . En effet, dans ce cas précis, il faut prendre en considération la dépendance de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{W}$  en la variable  $X_1^j$ . Nous repartons de (2.25) que nous dérivons cette fois par rapport à  $X_1^j$  pour obtenir :

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^{i=n} w^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} \right) \alpha \right]_{,X_1^j} = \left[ \sum_{i=1}^{i=n} w^i X_3^i \mathbf{p}^i \right]_{,X_1^j} \quad (2.119)$$

En développant les différents termes nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_1^j} &= - \left[ w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^{jT} \right) \right] \alpha \\ &+ \left( w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \right) X_3^j \end{aligned} \quad (2.120)$$

Le vecteur  $\mathbf{p}_{,X_1^j}^j$  s'écrit simplement :

$$\mathbf{p}_{,X_1^j}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2(X_1^j - X_1^c) \\ (X_2^j - X_2^c) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

L'expression  $w_{,X_1^j}^j$  dépend des fonctions de poids choisies. Nous garderons, dans cette partie cette expression générale. Finalement,  $\alpha_{,X_1^j}$  est donné par la relation :

$$\begin{aligned} \alpha_{,X_1^j} &= (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P})^{-1} \left\{ - \left[ w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^{jT} \right) \right] \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \right) X_3^j \right\} \end{aligned} \quad (2.122)$$

### Expression de $\alpha_{,X_2^j}$

Le calcul de  $\alpha_{,X_2^j}$  s'effectue d'une manière tout à fait similaire à ce qui a été fait précédemment en remplaçant  $X_1^j$  par  $X_2^j$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_2^j} &= - \left[ w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} \right) \right] \alpha \\ &\quad + \left( w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \right) X_3^j \end{aligned} \quad (2.123)$$

L'expression du vecteur  $\mathbf{p}_{,X_2^j}^j$  est :

$$\mathbf{p}_{,X_2^j}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ (X_1^j - X_1^c) \\ 2(X_2^j - X_2^c) \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Pour terminer, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_{,X_2^j} &= (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P})^{-1} \left\{ - \left[ w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} \right) \right] \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \right) X_3^j \right\} \end{aligned} \quad (2.125)$$

### 2.5.5 Seconde variation de $F$

Cette partie est consacrée à l'évaluation de tous les termes constituant la matrice introduite par l'équation (2.80). Les difficultés vont concerner les dérivées du vecteur  $\alpha$ .

Commençons par étudier les dérivées du type  $F_{,X_k^i X_l^j}$  où  $k, l = 1, \dots, 3$  et  $i, j = 1, \dots, n$ . Cette quantité prend en compte les contributions des nœuds du solide maître. Comme la base polynomiale  $\mathbf{p}$  ne dépend pas de ces nœuds cette quantité s'exprime simplement:

$$F_{,X_k^i X_l^j} = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i X_l^j} \quad (2.126)$$

où nous avons noté:

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i X_l^j} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,X_k^i X_l^j} \\ \alpha_{2,X_k^i X_l^j} \\ \alpha_{3,X_k^i X_l^j} \\ \alpha_{4,X_k^i X_l^j} \\ \alpha_{5,X_k^i X_l^j} \\ \alpha_{6,X_k^i X_l^j} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

Les dérivées croisées de  $F$ , faisant intervenir le nœud esclave et les nœuds de la surface maître sont un peu plus complexes à évaluer. Nous avons :

$$F_{,X_k^c X_l^j} = \mathbf{p}_{,X_k^c}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_l^j} + \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^j} \quad j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad k = 1, 2 \quad (2.128)$$

Les dérivées secondes de  $F$  ne concernant que le nœud esclave s'écrivent :

$$F_{,X_k^c X_l^c} = \mathbf{p}_{,X_k^c X_l^c}^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{p}_{,X_k^c}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_l^c} + \mathbf{p}_{,X_l^c}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} + \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^c} \quad k, l = 1, 2 \quad (2.129)$$

Les quantités du type  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^c}$  et  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^j}$  sont déterminées en utilisant le changement de variable que nous avons précédemment introduit :

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^c} = \sum_{i,j=1}^{i,j=n} \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i X_l^j} \quad k, l = 1, 2 \quad (2.130)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c X_l^j} = - \sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i X_l^j} \quad l = 1, \dots, 3; \quad k = 1, 2; \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.131)$$

Il faut maintenant calculer toutes les dérivées secondes de  $\boldsymbol{\alpha}$ . Ces évaluations sont basées sur des principes similaires à ceux utilisés pour les premières variations.

### Expression de $\boldsymbol{\alpha}_{,X_3^i X_3^j}$

Cette quantité se détermine de façon triviale en reprenant la relation (2.118). Cette expression met en évidence le fait que  $\boldsymbol{\alpha}_{,X_3^i}$  est indépendant de la troisième coordonnée  $X_3^j$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ . On en déduit donc :

$$\boldsymbol{\alpha}_{,X_3^i X_3^j} = 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.132)$$

**Expression de  $\alpha_{,X_3^i X_1^j}$** 

Cette grandeur est évaluée en dérivant la relation (2.117) par rapport à  $X_1^j$  pour obtenir :

$$\left\{ (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_3^i} \right\}_{,X_1^j} = \left\{ w^i \mathbf{p}^i \right\}_{,X_1^j} \quad (2.133)$$

Nous sommes alors en mesure d'écrire :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_3^i X_1^j} &= - \left[ w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^{jT} \right) \right] \alpha_{,X_3^i} \\ &\quad + \left( w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.134)$$

**Expression de  $\alpha_{,X_3^i X_2^j}$** 

La détermination de cette grandeur est effectuée en utilisant un raisonnement totalement analogue à ce qui a été fait pour  $\alpha_{,X_3^i X_1^j}$  ce qui conduit à une expression similaire à (2.134) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_3^i X_2^j} &= - \left[ w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} \right) \right] \alpha_{,X_3^i} \\ &\quad + \left( w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.135)$$

**Expression de  $\alpha_{,X_1^i X_1^j}$  et  $\alpha_{,X_2^i X_2^j}$** 

La valeur  $\alpha_{,X_1^i X_1^j}$  est calculée en reprenant la relation (2.120) et en la dérivant par rapport  $X_1^j$  :

$$\begin{aligned} \left\{ (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_1^i} \right\}_{,X_1^j} &= - \left\{ \left[ w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} + w^i \left( \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^{iT} + \mathbf{p}^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^{iT} \right) \right] \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i + w^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \right) X_3^i \right\}_{,X_1^j} \end{aligned} \quad (2.136)$$



En décomposant les différents termes, nous sommes en mesure d'écrire :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_1^i X_1^j} &= \left( w_{,X_1^j X_1^j}^j \mathbf{p}^j + 2w_{,X_1^i}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_1^i X_1^i}^j \right) X_3^i \delta_{ij} \\
 &- \left[ w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} + w^i \left( \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^{iT} + \mathbf{p}^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^{iT} \right) \right] \alpha_{,X_1^j} \\
 &- \left[ w_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^j}^{jT} \right) \right] \alpha_{,X_1^i} \\
 &- \left[ w_{,X_1^i X_1^i}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + 2w_{,X_1^i}^j \left( \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^{jT} + \mathbf{p}_{,X_1^i}^j \mathbf{p}^{jT} \right) \right. \\
 &\left. + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^i X_1^i}^j \mathbf{p}^{jT} + 2\mathbf{p}_{,X_1^i}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^i X_1^i}^{jT} \right) \right] \alpha \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

La quantité  $\alpha_{,X_2^i X_2^j}$  est identique à l'expression (2.137) en remplaçant  $X_1^i$  par  $X_2^j$ . Dans ces relations, nous avons noté :

$$\mathbf{p}_{,X_1^j X_1^i}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{,X_2^j X_2^i}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.138}$$

### Expression de $\alpha_{,X_2^i X_1^j}$ et $\alpha_{,X_1^i X_2^j}$

Les dérivées croisées  $\alpha_{,X_2^i X_1^j}$  et  $\alpha_{,X_1^i X_2^j}$  sont mises en évidence avec des méthodes analogues. L'expression  $\alpha_{,X_1^i X_2^j}$  (resp.  $\alpha_{,X_2^i X_1^j}$ ) est évaluée en dérivant la quantité (2.120) (resp. (2.123)) par rapport  $X_2^j$  (resp.  $X_1^j$ ). Ceci conduit à :

$$\begin{aligned}
 \left\{ (\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_1^i} \right\}_{,X_2^j} &= - \left\{ \left[ w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} + w^i \left( \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^{iT} + \mathbf{p}^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^{iT} \right) \right] \alpha \right. \\
 &\left. + \left( w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i + w^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \right) X_3^i \right\}_{,X_2^j}
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

En appliquant les règles usuelles de calcul, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P}) \alpha_{,X_1^i X_2^j} &= \left( w_{,X_1^i X_2^j}^j \mathbf{p}^j + w_{,X_1^i}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^j + w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^j + w^j \mathbf{p}_{,X_1^i X_2^j}^j \right) X_3^i \delta_{ij} \\
&- \left[ w_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^i \mathbf{p}^{iT} + w^i \left( \mathbf{p}_{,X_1^i}^i \mathbf{p}^{iT} + \mathbf{p}^i \mathbf{p}_{,X_1^i}^{iT} \right) \right] \alpha_{,X_2^j} \\
&- \left[ w_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w^j \left( \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} \right) \right] \alpha_{,X_1^i} \\
&- \left[ w_{,X_1^i X_2^j}^j \mathbf{p}^j \mathbf{p}^{jT} + w_{,X_1^i}^j \left( \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} + \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} \right) \right. \\
&+ w^j \left( \mathbf{p}_{,X_1^i X_2^j}^j \mathbf{p}^{jT} + \mathbf{p}_{,X_2^j}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^{jT} + \mathbf{p}_{,X_1^i}^j \mathbf{p}_{,X_2^j}^{jT} + \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^i X_2^j}^{jT} \right) \\
&\left. + w_{,X_2^j}^j \left( \mathbf{p}^j \mathbf{p}_{,X_1^i}^{jT} + \mathbf{p}_{,X_1^i}^j \mathbf{p}^{jT} \right) \right] \alpha \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Le vecteur  $\mathbf{p}_{,X_1^i X_2^j}^j$  est donné par :

$$\mathbf{p}_{,X_1^i X_2^j}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.141}$$

Il est important de noter que toutes ces quantités sont exprimées dans le repère diffus  $R^d$ .

Cette partie a été consacrée à l'évaluation de toutes les quantités nécessaires à l'écriture du résidu élémentaire de contact et de la matrice tangente de contact. Les difficultés résident dans le fait que le contact est supporté non plus par les nœuds d'une facette, mais par un nuage de nœuds. Les contributions de tous ces nœuds doivent être prises en considération au prix de calculs relativement complexes.

## 2.6 Implémentation et exemples

Cette méthode a été développée et implémentée dans le code par éléments finis SYSTUS [75]. Nous décrivons ici l'implémentation informatique de l'élément de contact 3D diffus. Nous rappelons que la notion d'élément de contact ne correspond pas à la notion d'élément fini mais à une structure de donnée qui associe le nœud esclave à des nœuds de la surface maître potentiellement en contact.

### 2.6.1 Implémentation

Les parties des solides qui sont en contact éventuel peuvent considérablement évoluer au cours du processus surtout quand des grandes déformations sont considé-

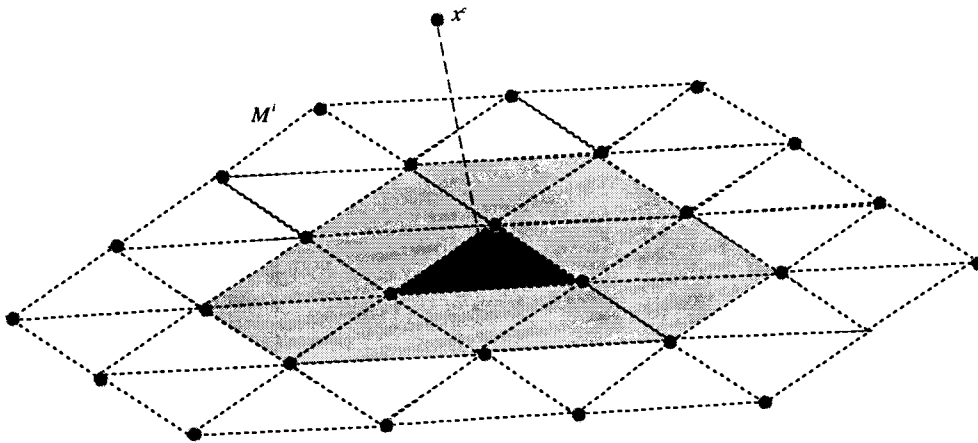


Fig. 2.5 – Approche INTP

rées. Pour détecter les zones de contact, un prétraitement est nécessaire. L'utilisateur doit spécifier toutes les zones du solide esclave susceptibles d'entrer en contact. Pour chacune d'entre elles, une zone maître en vis-à-vis doit être donnée. A ce niveau, nous avons mis en œuvre deux stratégies. Ces stratégies vont différer dans la détermination des nœuds utilisés dans l'approximation.

### Détermination des nœuds utilisés dans l'approximation

La première stratégie dite *INTP* conserve le support du maillage. Pour chaque nœud esclave appartenant à une zone de contact esclave  $C_i$ , la facette la plus proche appartenant à la zone de contact maître  $M^i$  est déterminée et notée  $f_c^i$ . Une fois cette facette parfaitement connue, toutes les facettes adjacentes et les adjacentes des adjacentes ... suivant le choix de l'utilisateur sont détectées. L'ensemble  $E^i$  des nœuds de l'approximation est défini comme l'ensemble des nœuds de toutes ces facettes. L'élément de contact 3D diffus est alors constitué du nœud esclave et de tous les nœuds de l'ensemble  $E^i$  (Figure 2.5).

La deuxième stratégie appelée *SC3D*, utilise directement les nœuds issus du prétraitement. Pour chaque nœud esclave appartenant à une zone esclave donnée  $C_i$ , le principe de régularisation est mis en œuvre avec les nœuds de la surface maître  $M^i$  en vis à vis. L'avantage fondamental de cette approche réside dans le fait que les tris ne sont plus nécessaires. De plus, la notion de facette est complètement inexistante puisque seuls les nœuds sont considérés. L'élément de contact 3D diffus sera donc constitué d'un nœud esclave et de tous les nœuds appartenant à la zone maître antagoniste au nœud esclave (Figure 2.6). Ces deux approches ne diffèrent que sur l'aspect détection du contact et la régularisation de surface s'applique de façon complètement similaire à l'une ou l'autre.

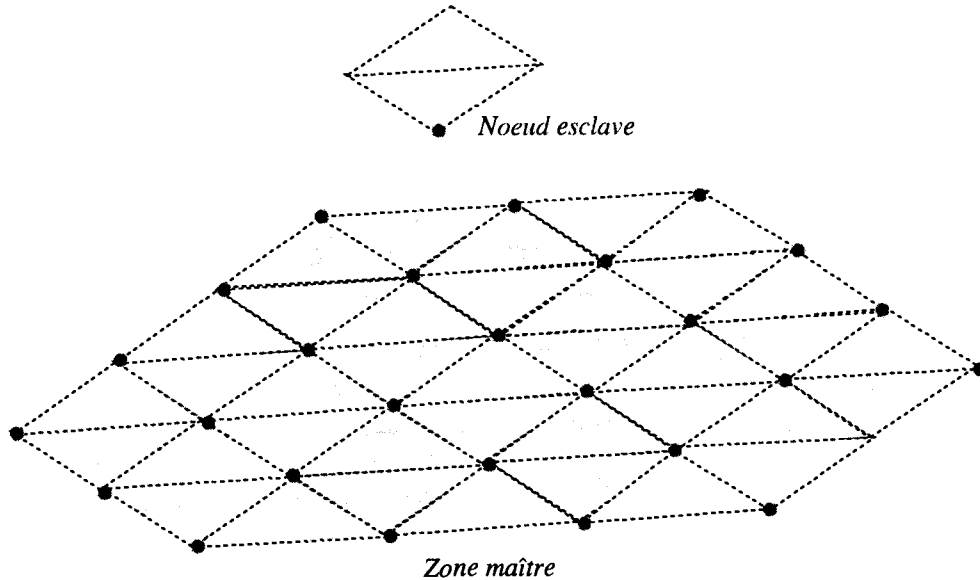


Fig. 2.6 – Approche SC3D

### Choix de l'ordre de l'approximation

Quelle que soit l'approche utilisée *INTP* ou *SC3D*, il se peut que le nombre de nœuds retenus ne soit pas suffisant. Ce problème sera vraisemblablement plus courant pour l'approche *INTP*. Que faire alors quand le nombre de nœuds est inférieur à 6? Dans cette situation, la matrice  $\mathcal{P}\mathcal{W}\mathcal{P}^T$  (cf 2.30), donnant la valeur du vecteur  $\alpha$  n'est pas inversible. L'idée est en fait de "descendre" l'ordre de l'approximation. Dans ces cas extrêmes, la base polynomiale utilisée est une base linéaire :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 - X_1^c \\ X_2 - X_2^c \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Seuls trois nœuds sont alors indispensables à la bonne marche du problème, ce qui sera toujours le cas.

### Plan diffus

Un choix s'imposait pour la détermination du plan diffus. Fallait-il l'évaluer à chaque itération? Ce choix nous est apparu coûteux et pas forcément judicieux. En effet, calculer le plan diffus à chaque itération, implique des problèmes dans les variations. Il apparaissait nécessaire de tenir compte du changement de repère à chaque itération ce qui rendait les expressions du résidu et de la matrice tangente extrêmement complexes. C'est pourquoi nous avons choisi de considérer le plan diffus fixe au cours du processus itératif. A chaque début d'incrément de chargement après

le prétraitement concernant les nœuds utilisés dans l'approximation, ce plan est évalué et stocké pendant tout le pas.

## 2.6.2 Exemples

La suite de cette partie est consacrée à la présentation d'exemples pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche développée. *Le contact est supposé glissant.*

La méthode développée s'avère efficace face à des problèmes de nature distincte. En effet, la géométrie de la cible peut être telle que des pénétrations importantes peuvent surgir et dans ce cas, il semble intéressant de tenter de réduire cette pénétration. Dans d'autres situations, le problème est tel que des difficultés purement numériques comme l'oscillation du vecteur résidu peuvent se produire.

### Contact entre une plaque et un cylindre rigide

Dans un souci de clarté, nous présentons en un premier lieu un exemple de contact, solide rigide, solide déformable quasi 2D. Nous considérons le contact entre un cylindre rigide et une plaque élastique de module d'Young  $E = 200000MPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  (Figure 2.7). Les dimensions de la plaque sont les suivantes :

- $l = 65mm$
- $L = 20mm$
- $e = 5mm$

Le rayon du cylindre est de  $100mm$ . Cette plaque est soumise à une pression imposée  $P = 200MPa$  suivant la direction  $y$  sur la partie  $S_e$  de sa frontière et à un déplacement imposé suivant la direction  $x$  sur la partie  $S_u$ . Le modèle éléments finis ainsi que les conditions aux limites sont présentés sur la figure 2.8. Le solide maître est défini comme étant le cylindre rigide.

Cet exemple, en apparence relativement simple, met en évidence les problèmes qui peuvent être éventuellement rencontrés avec l'approche étudiée. Dans un premier temps la zone maître est constituée de 8 mailles triangulaires et de 21 nœuds (2.9(a)). Les deux stratégies, *INTP* et *SC3D*, sont mises en œuvre pour traiter le problème. Dans le cadre *INTP*, 7 nœuds au plus seront utilisés dans l'approximation, ce nombre dépendant de la facette maître de référence considérée. Nous avons alors constaté des difficultés géométriques qui ne se produisaient absolument pas dans le cadre *SC3D*. Cette constatation nous a conduit à un des points fondamentaux : le nombre de nœuds intervenant dans l'interpolation n'est pas suffisant ce qui a pour conséquence de déstabiliser le système. Ainsi, la reconstruction de la surface de contact ne peut être effectuée correctement. Dans le cadre *SC3D*, les difficultés disparaissent car les 21 nœuds issus du prétraitement sont choisis comme support de l'approximation. L'utilisation d'un maillage plus dense de la zone maître, 32 mailles

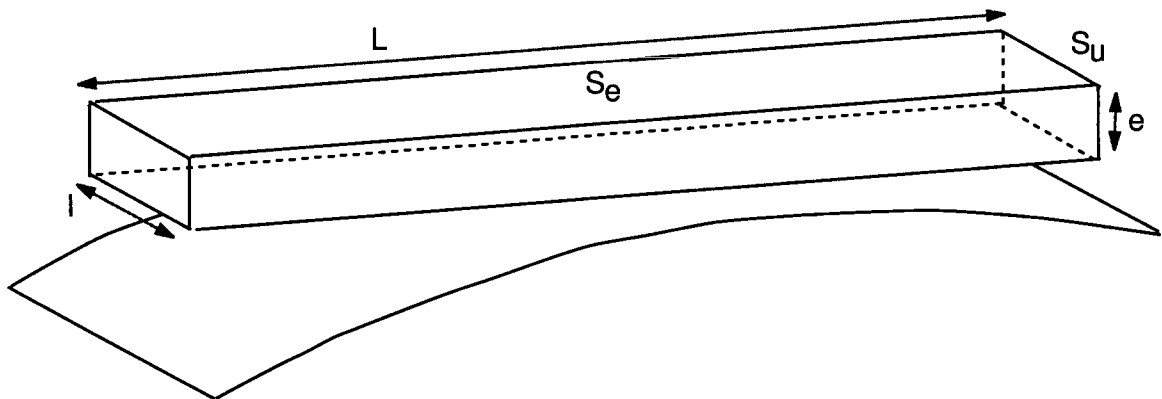


Fig. 2.7 – Contact entre une plaque et un cylindre rigide

triangulaires et de 27 nœuds (Figure 2.9(b)) confirme totalement ce fait. En effet, les problèmes géométriques disparaissent avec ce nouveau maillage.

La forme de la cible pose quelques difficultés. Pour tenter de comprendre ces problèmes, nous étudions une partie particulière de la cible (Figure 2.10). Un zoom sur la configuration déformée obtenue avec un algorithme de contact n'utilisant pas l'élément de contact diffus  $3D$  est représenté sur les figures 2.11(b) et 2.12(b). Il est très net que la non-régularité du cylindre génère une forte interpénétration. Ce problème est atténué en utilisant l'élément de contact diffus  $3D$ . Ceci est spécialement visible sur les figures 2.11(a) et 2.12(a). Le contact n'a plus lieu sur une facette (un plan), mais sur une surface qui suit tout à fait la forme du cylindre.

### Pincement d'un tube entre deux plaques

Cet exemple traite un problème de contact entre deux corps déformables en trois dimensions. Un tube est pincé entre deux plaques parallèles identiques (Figure 2.13). Les dimensions du tube sont les suivantes:

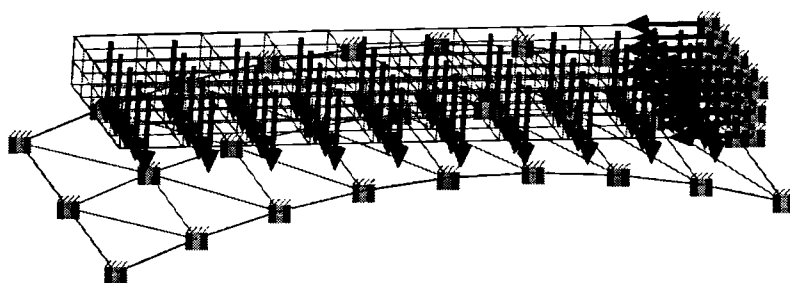
- $l = 200m$
- $r = 90mm$
- $R = 100mm$

Les plaques ont pour dimensions:

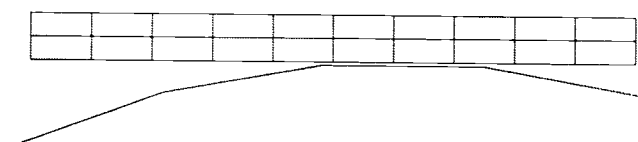
- $l = 200mm$
- $L = 75mm$
- $e = 20mm$

Compte tenu des symétries, seul le quart du dispositif est modélisé. Ce choix conduit aux conditions aux limites suivantes (Figure 2.16):

- $U_x = 0$  dans le plan  $OYZ$

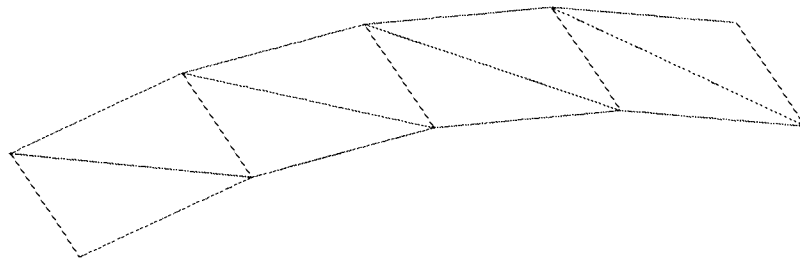


(a) Modèle éléments finis et chargement

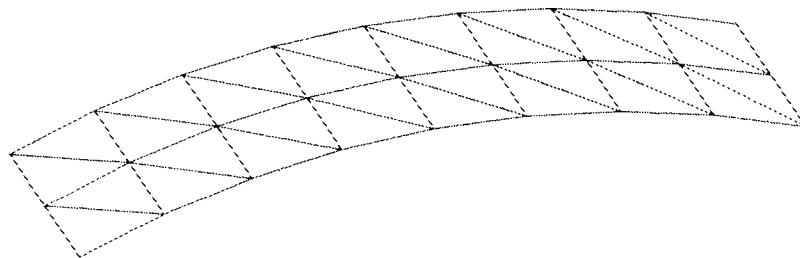


(b) Modèle éléments finis: vue 2D

Fig. 2.8 – Contact entre une plaque et un cylindre rigide: modèle éléments finis



(a) Maillage grossier



(b) Maillage plus raffiné

Fig. 2.9 – *Contact entre une plaque et un cylindre rigide: zone de contact maître*



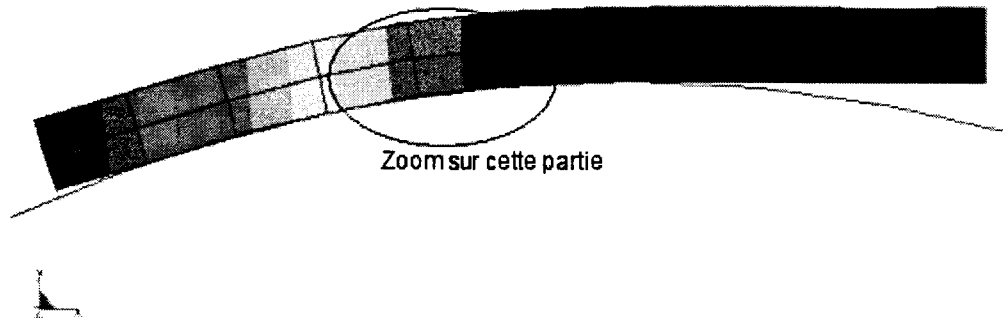


Fig. 2.10 – Contact entre une plaque et un cylindre rigide: configuration déformée

- $U_y = 0$  dans le plan  $OXZ$
- $U_z = 0$  dans le plan  $OXY$

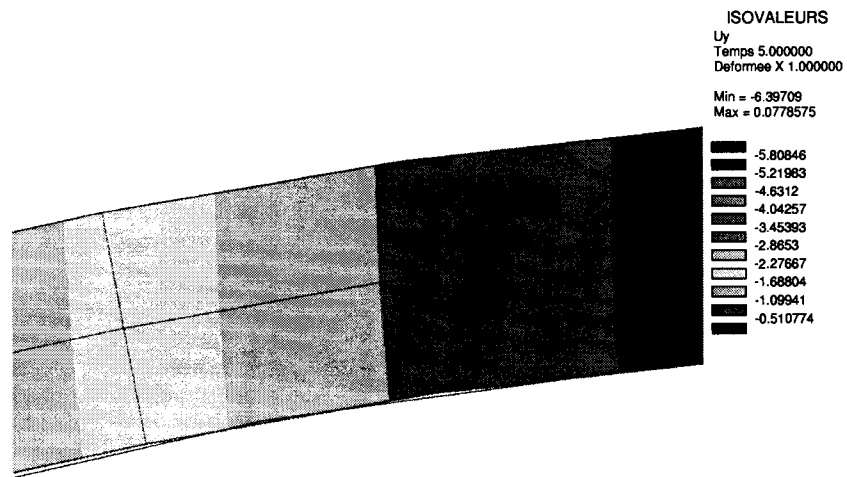
La modélisation géométrique d'un quart du tube est réalisée avec 432 éléments volumiques et celle de la plaque avec 192 éléments volumiques (Figure 2.17). La modélisation géométrique du contact conduit à la définition de deux zones de contact potentiel :

- la surface maître est une partie du tube supérieur modélisée par des éléments à trois nœuds ;
- la surface esclave est une partie de la plaque modélisée par des éléments surfaciques à quatre nœuds (Figure 2.18).

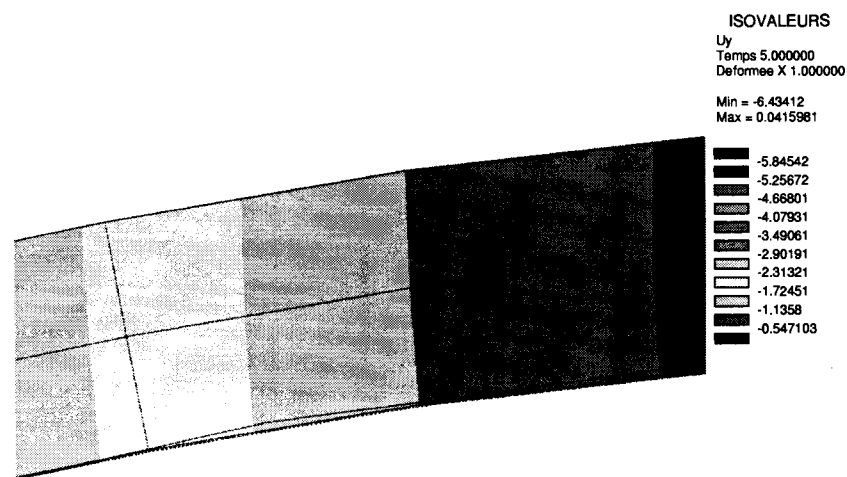
Le modèle mécanique des matériaux est dans un premier test élastique et dans un second test le comportement élastoplastique est considéré. Les matériaux de la plaque et du tube ont les mêmes propriétés mécaniques :

- Module d'Young  $E = 200000MPa$
- Coefficient de Poisson  $\nu = 0.30$
- Limite élastique  $\sigma_y = 400MPa$
- Pente d'érouissage  $H = 3450MPa$

Le chargement consiste en un déplacement vertical imposé de  $100mm$  à l'extrémité de la plaque (Figure 2.16). Dans le cas élastique, ce chargement est appliqué par pas de  $2.5mm$ . Dans le cas plastique, l'incrément de chargement est réduit à  $1mm$ . Pour un comportement élastique, le test est réalisé avec un algorithme du contact classique et un algorithme mettant en œuvre la régularisation de surface. Dans les deux cas, le calcul peut être mené à son terme. Cependant, en utilisant la procédure de régularisation, le coût itératif peut être réduit. En effet, sans régularisation le nombre d'itérations est 374. Celui ci est réduit à 322 avec régularisation soit une diminution de 14% du nombre d'itérations (cf Tableau 2.14). Les figures 2.19 et 2.20 présentent l'évolution de la configuration déformée.

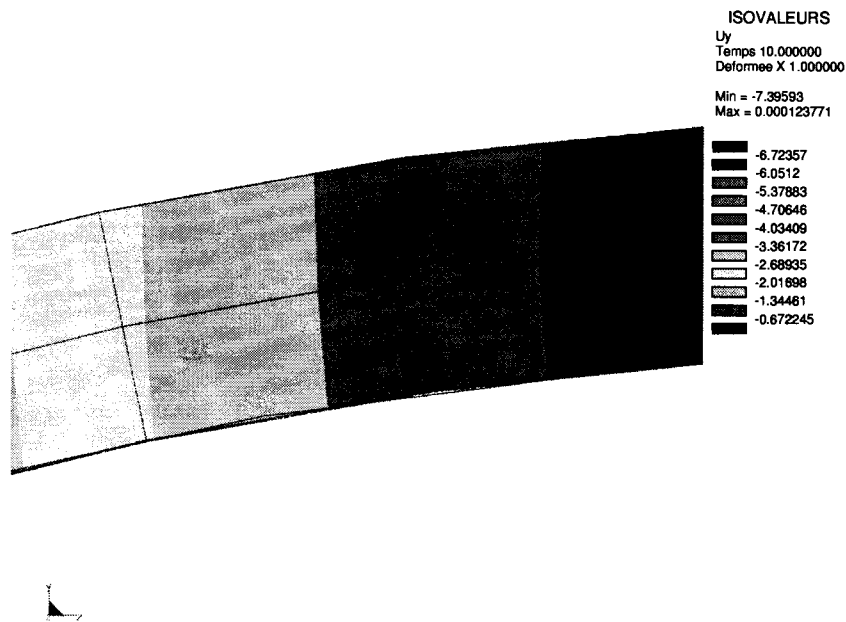


(a) Avec approximation diffuse

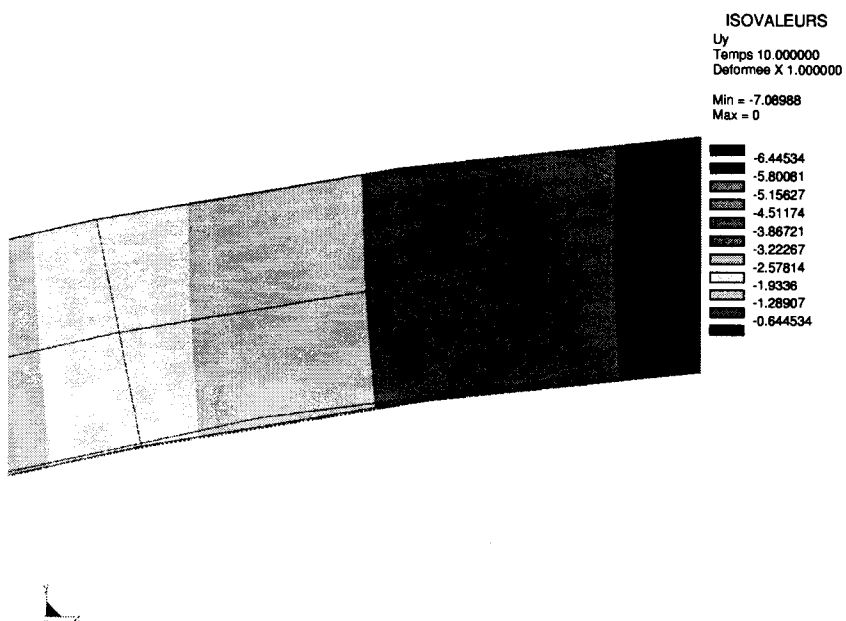


(b) Sans approximation diffuse

Fig. 2.11 – Zoom sur la configuration déformée au temps 5



(a) Avec approximation diffuse



(b) Sans approximation diffuse

Fig. 2.12 – Zoom sur la configuration déformée au temps 10

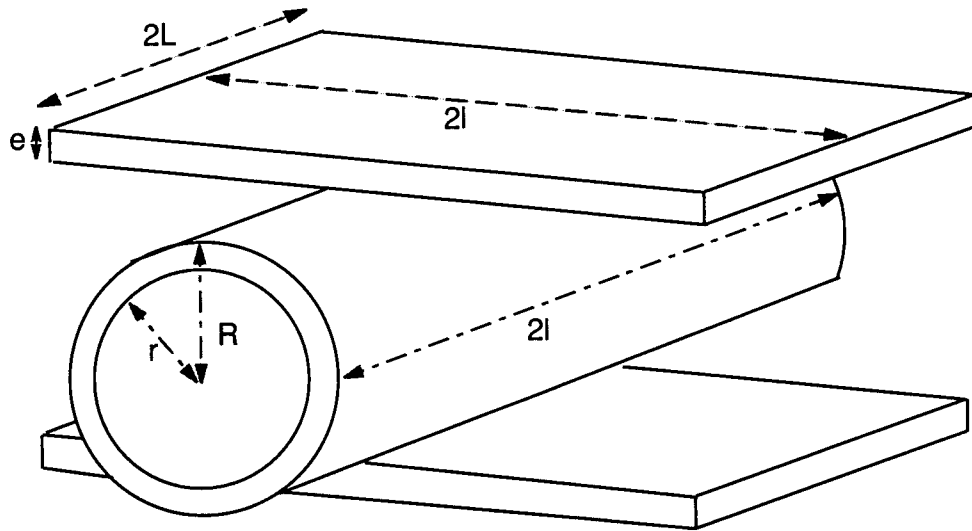


Fig. 2.13 – Pincement d'un tube entre deux plaques

	Approche <i>INTP</i>	Approche <i>SC3D</i>	Approche classique
Nombre d'itérations	322	330	374

Fig. 2.14 – Pincement d'un tube entre deux plaques: nombre d'itérations (élastique)

Dans le cas d'un comportement plastique, la réduction du coût est un peu plus faible à savoir 3% :

	Approche <i>INTP</i>	Approche classique
Nombre d'itérations	527	544

Fig. 2.15 – Pincement d'un tube entre deux plaques: nombre d'itérations (plastique)

Les configurations finales obtenues avec une procédure classique sans régularisation et avec l'algorithme développé sont présentées sur la figure 2.21

### Contact entre deux tubes

Un tube droit est posé sur un autre tube qui lui est perpendiculaire. Le contact initial est ponctuel (Figure 2.22). Le tube intérieur est encastré à une extrémité et son autre extrémité est libre. Le tube supérieur est lui aussi encastré à une de ses extrémités et l'autre est soumise à une force verticale répartie sur sa circonférence. La force totale est égale à 150 *KN* appliquée en 75 incréments. La modélisation géométrique des tubes est réalisée par des éléments volume parallélépipèdes à 8 nœuds (Figure 2.23). La modélisation géométrique du contact conduit à la définition

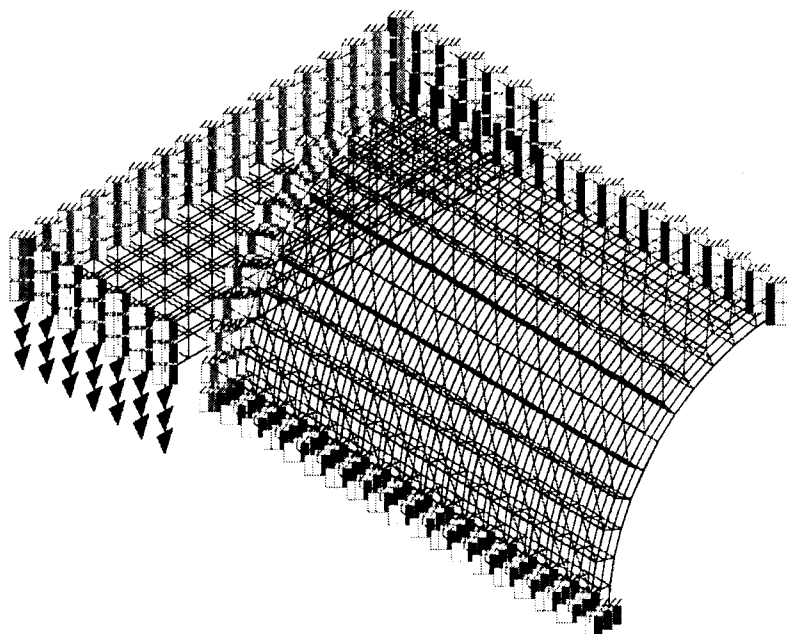


Fig. 2.16 – *Pincement d'un tube : chargement et conditions aux limites*

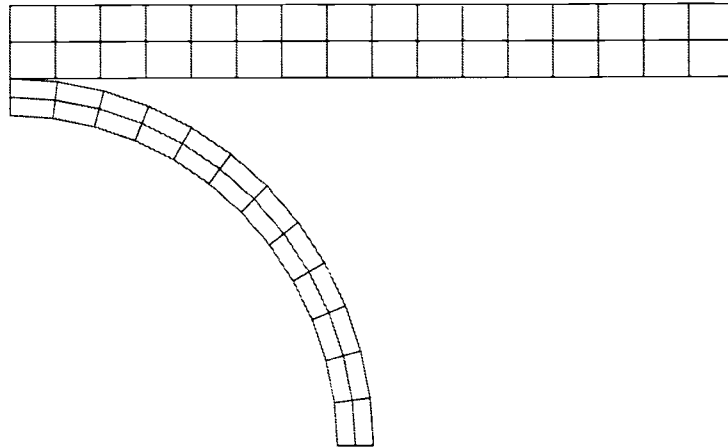


Fig. 2.17 – *Pincement d'un tube entre deux plaques : modèle éléments finis*

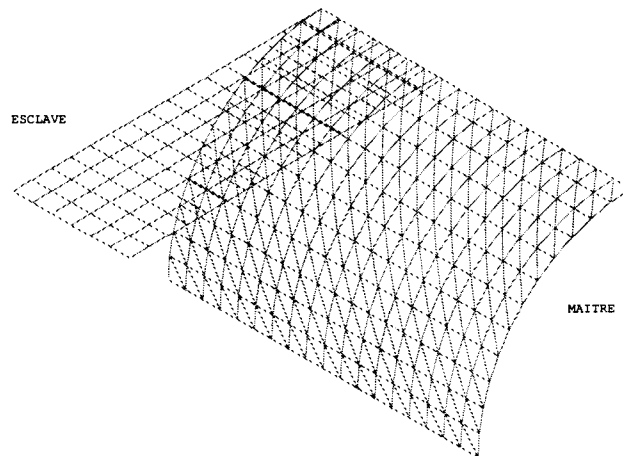
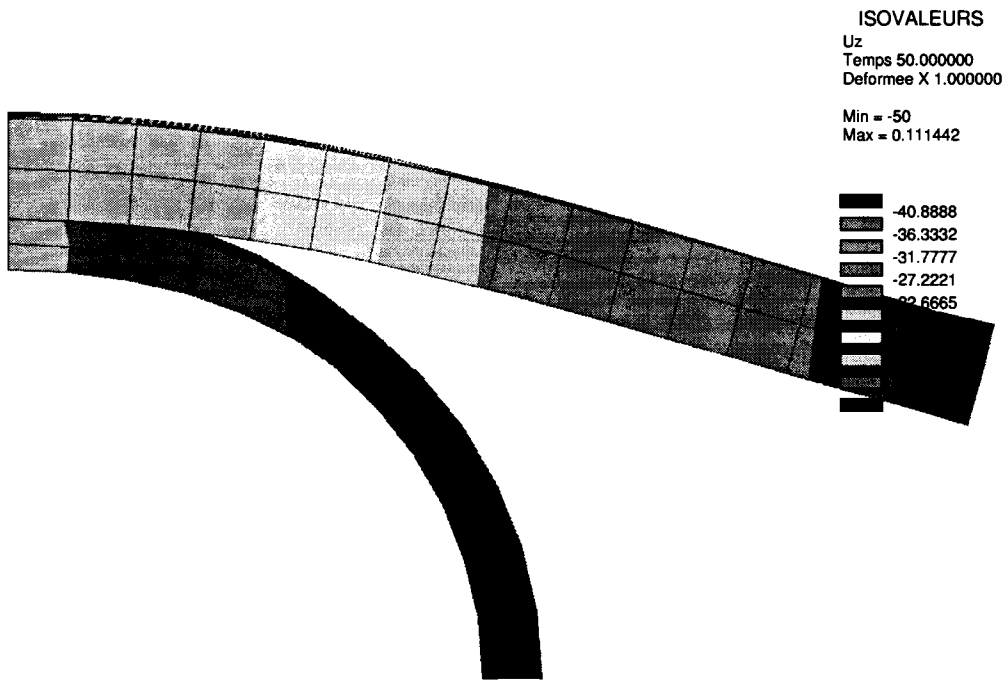
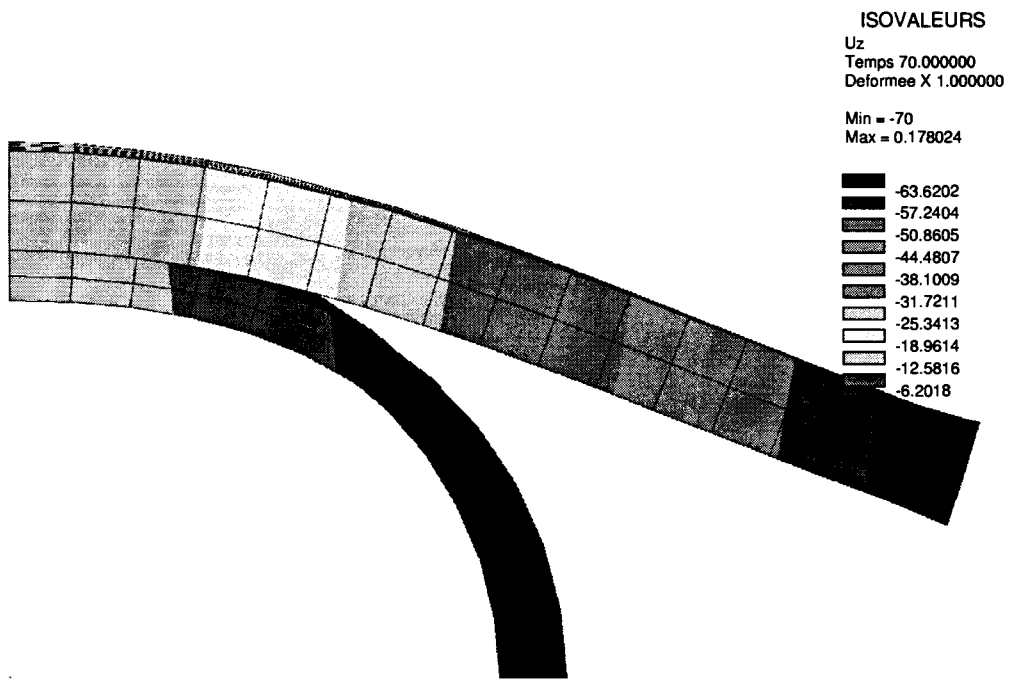


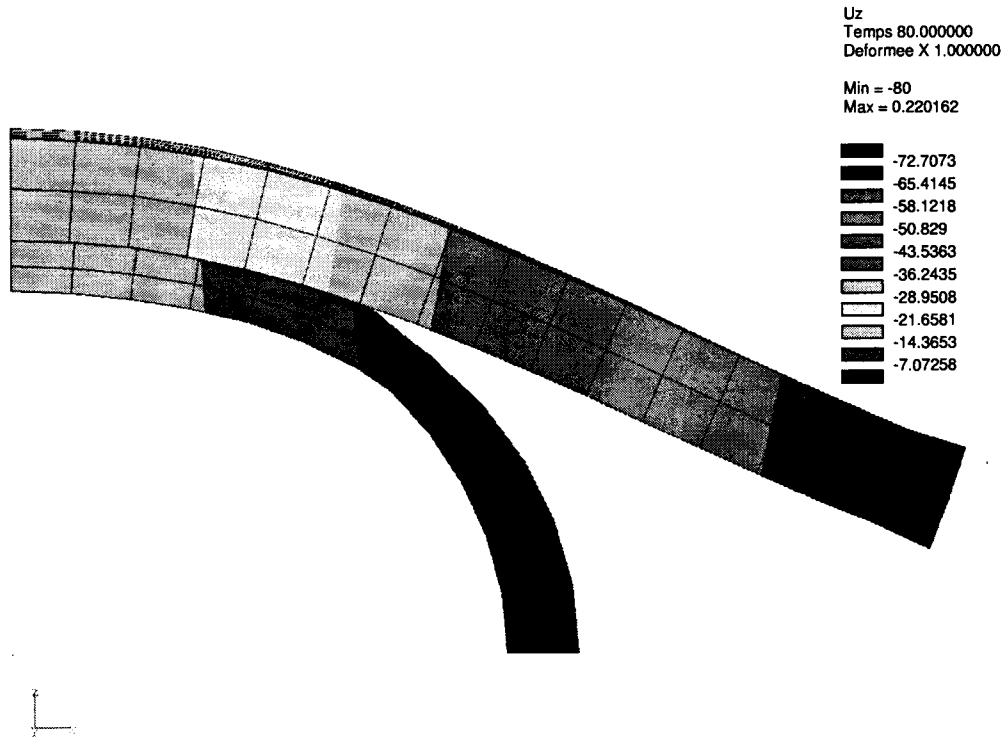
Fig. 2.18 – *Pincement d'un tube entre deux plaques : zones de contact*



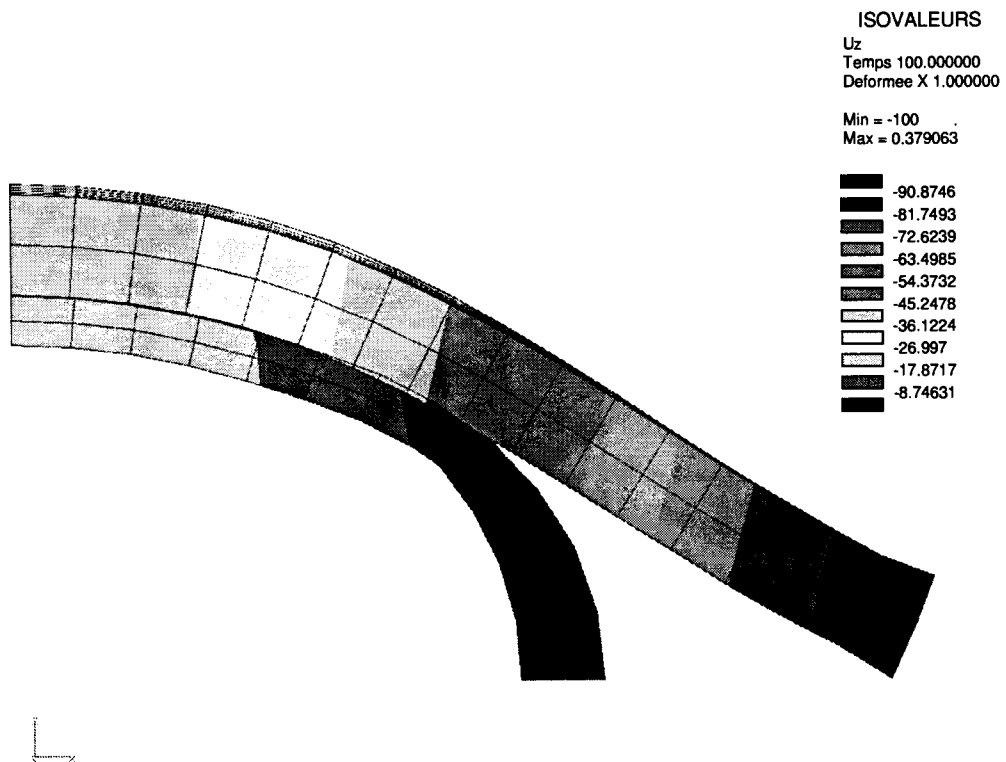
(a)  $U_z = 50mm$



(b)  $U_z = 70mm$

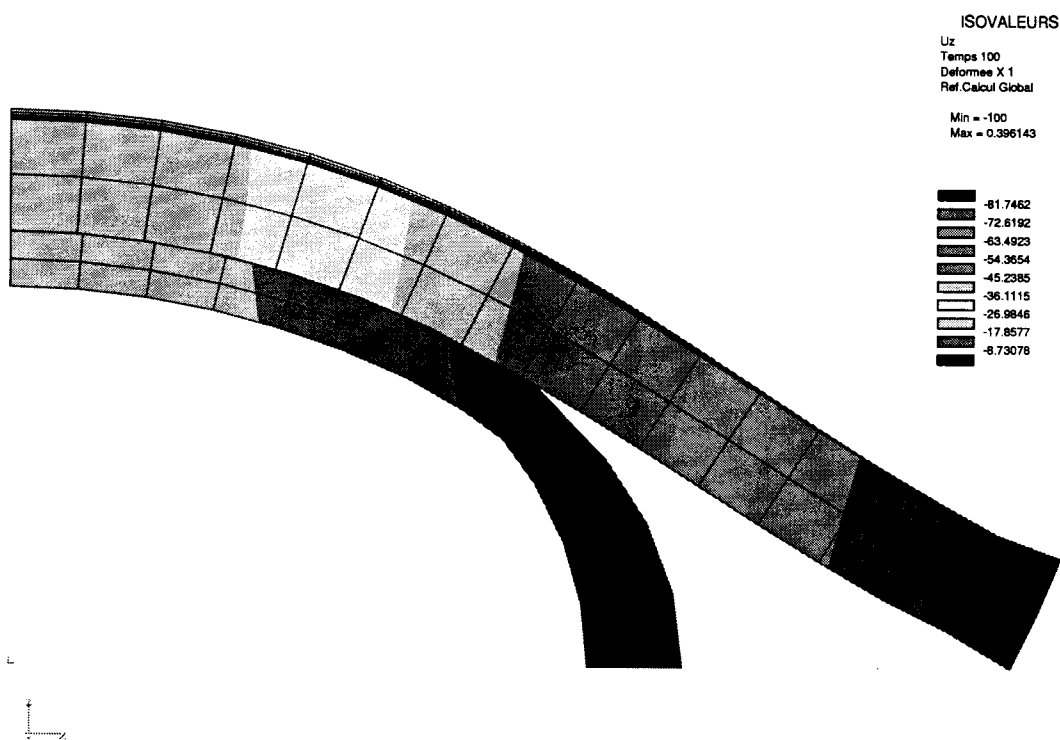


(a)  $U_z = 80mm$

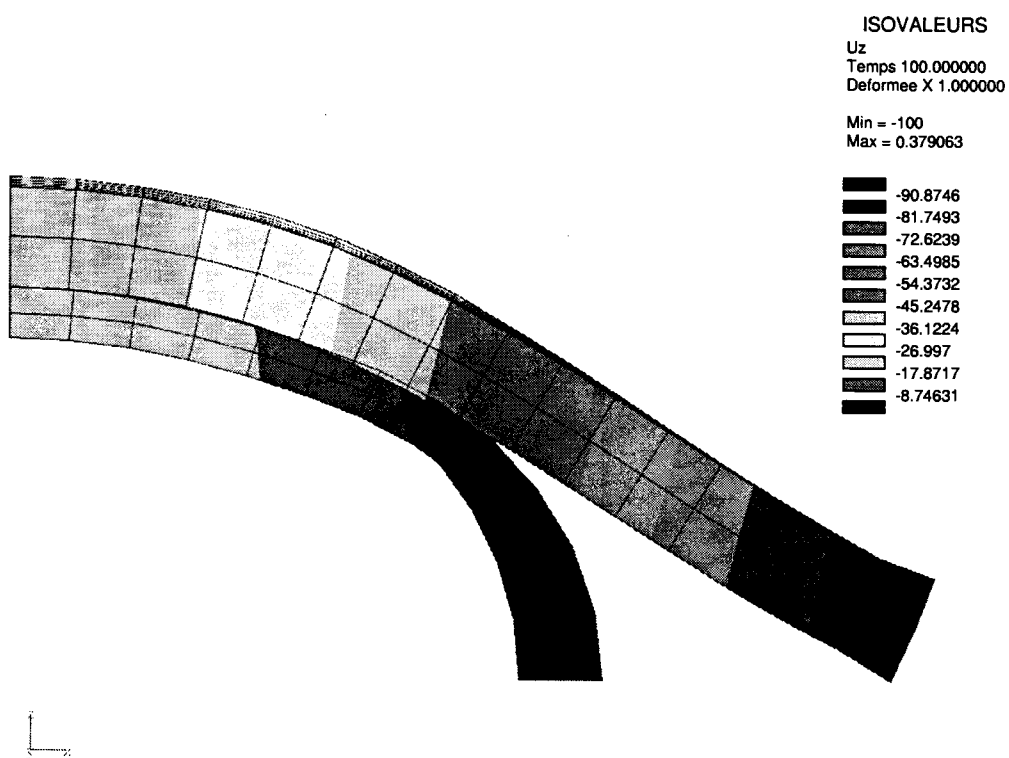


(b)  $U_z = 100mm$





(a)  $U_z = 100mm$ , sans régularisation



(b)  $U_z = 100mm$ , avec régularisation

Fig. 2.21 – Configuration déformée : sans et avec régularisation

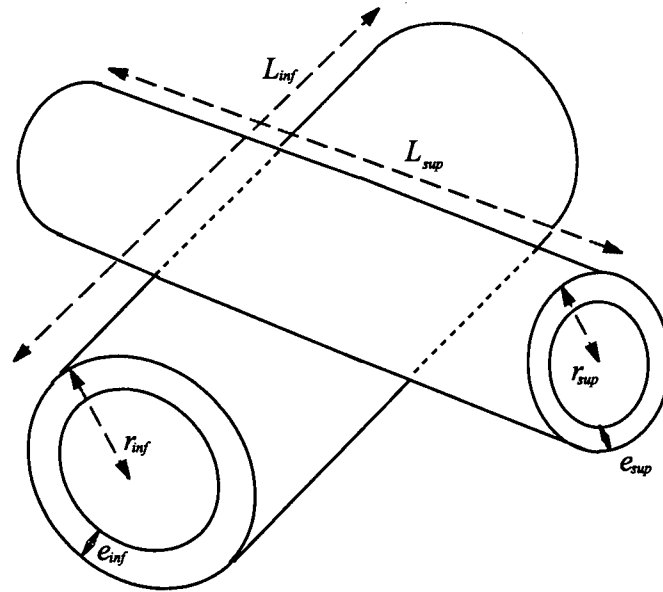


Fig. 2.22 – Contact entre deux tubes

de deux zones de contact potentiel :

- la surface maître est une partie du tube supérieur modélisée par des éléments à trois nœuds;
- la surface esclave est une partie du tube inférieur modélisée par des éléments surfacique à quatre nœuds (Figure 2.24).

Les dimensions des tubes sont les suivantes:

- $L_{inf} = 500mm$
- $r_{inf} = 100mm$
- $e_{inf} = 20mm$
- $L_{sup} = 525mm$
- $r_{sup} = 50mm$
- $e_{sup} = 10mm$

Le modèle mécanique des deux matériaux est élastique. Les deux tubes sont faits du même matériau dont les propriétés mécaniques sont les suivantes:

- Module d'Young  $E = 150000MPa$
- Coefficient de Poisson  $\nu = 0.30$

Ce problème a été considéré pour étudier le coût de l'approche quand il n'y pas beaucoup de nœuds entrant en contact au cours du processus. En effet, le contact initial est ponctuel et seul un nœud est en contact à la fin. Sur un problème comme celui ci, le nombre d'itérations est augmenté, de manière plus significative pour l'approche *SC3D*. Ceci peut être expliqué par la taille des matrices tangentes que

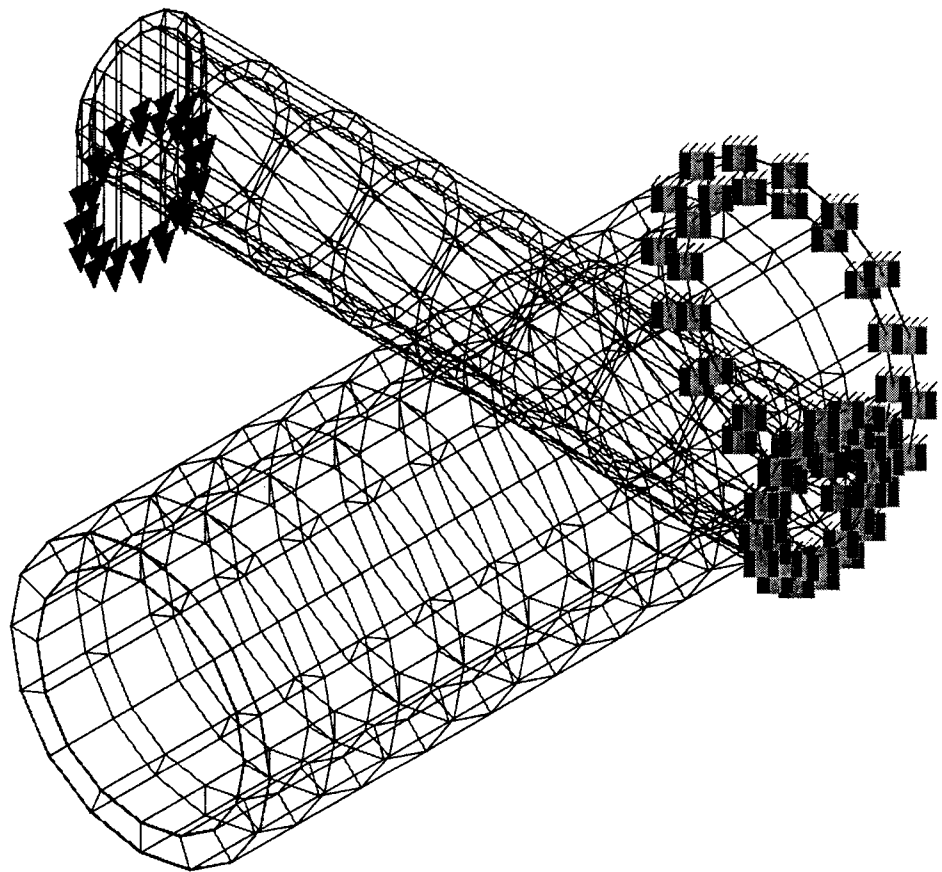


Fig. 2.23 – *Contact entre deux tubes : chargement et conditions aux limites*

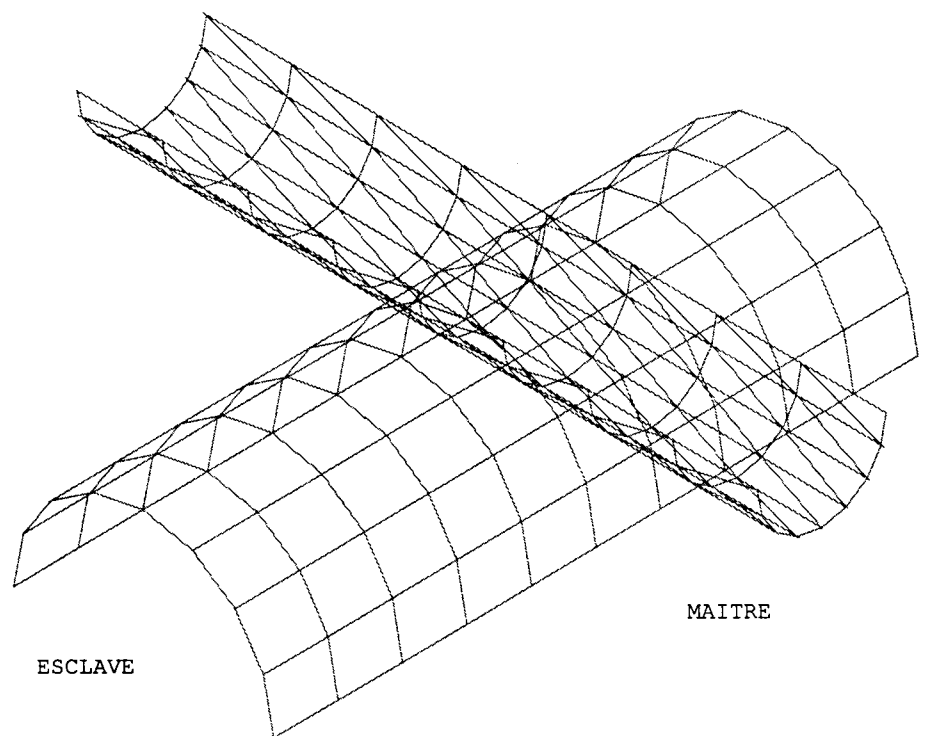


Fig. 2.24 – *Contact entre deux tubes : zones de contact*

nous construisons pour l'élément de contact alors que très peu de nœuds sont en contact. La taille des matrices est d'autant plus importante pour l'approche *SC3D* car tous les nœuds de la zone de contact (Figure 2.24) sont pris en compte dans la détermination de l'approximation. Dans le cas *INTP*, ce nombre est réduit puisqu'une présélection est effectuée en détectant la facette la plus proche associée à chaque nœud esclave. Pour information, la figure 2.26 présente l'évolution de la

	Approche <i>INTP</i>	Approche <i>SC3D</i>	Approche classique
Nombre d'itérations	307	339	204

Fig. 2.25 – Contact entre deux tubes : nombre d'itérations (élastique)

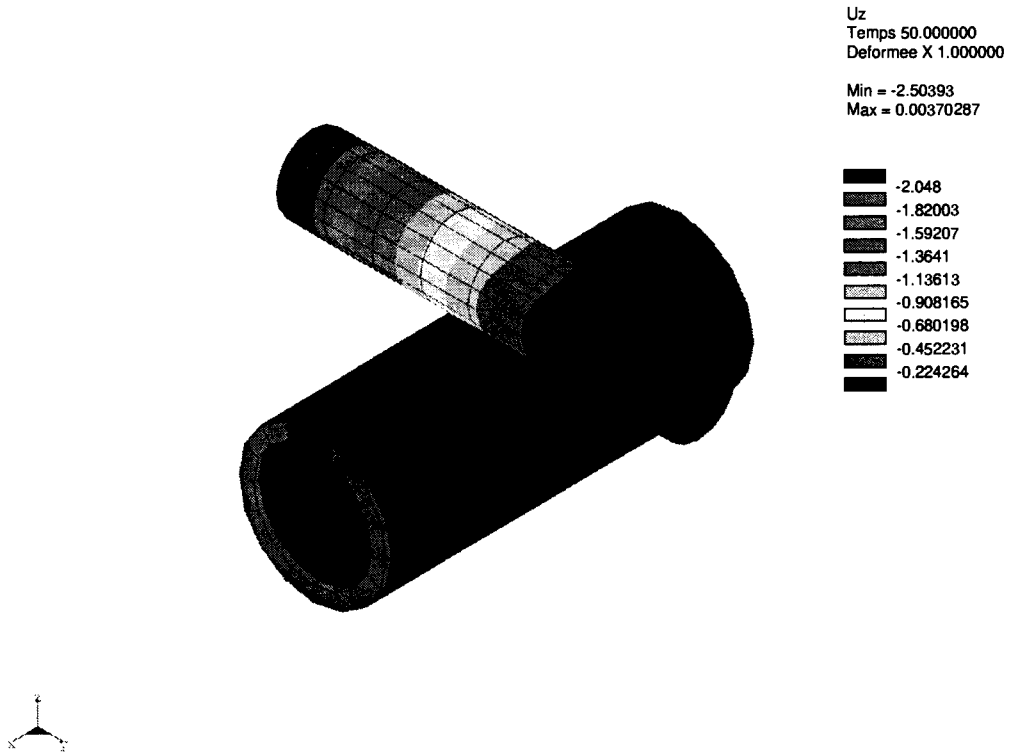
configuration déformée.

## 2.7 Conclusion

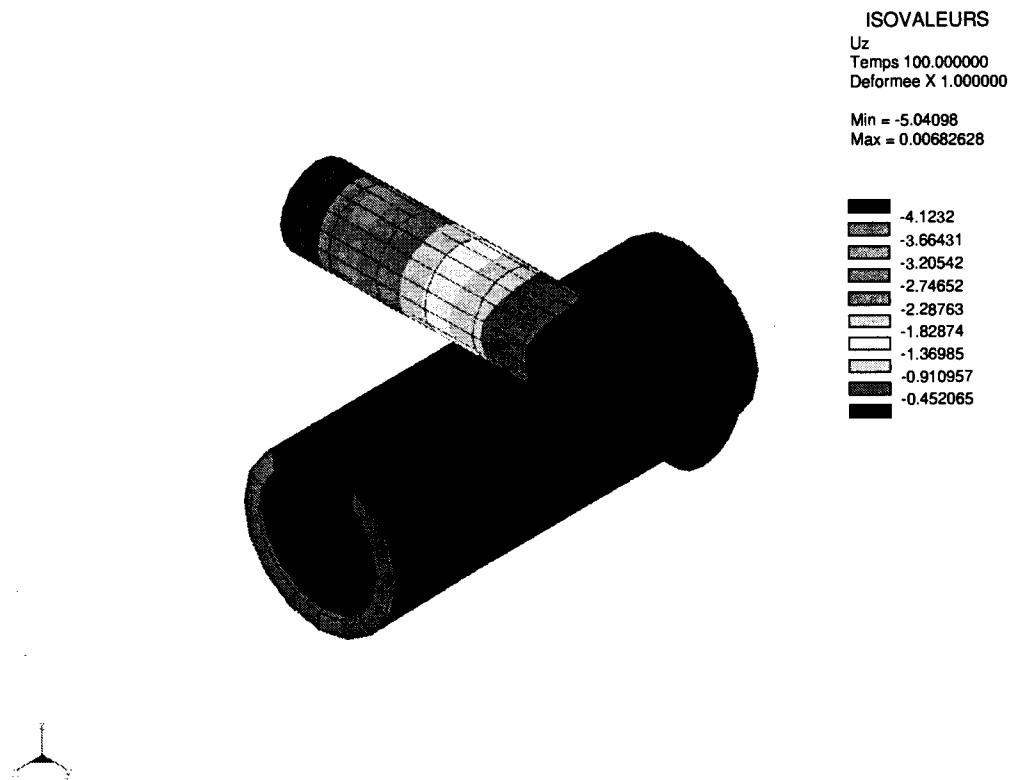
Ce chapitre a été consacré à la présentation d'une procédure de régularisation d'une surface de contact issue de la discrétisation par éléments finis. Cette approche apparaissait comme une étape indispensable pour améliorer le traitement du contact. En effet, une surface de contact résultant d'un maillage par éléments finis est seulement différentiable par morceaux ce qui peut être source de difficultés numériques. Nous avons choisi d'utiliser l'approximation diffuse pour régulariser la surface.

L'originalité de l'approche proposée par rapport à celle présentée dans l'introduction [62, 80] tient en deux aspects. Le premier concerne les nœuds utilisés dans l'approximation. Les nœuds participant à l'approximation ne sont plus seulement les nœuds d'une facette de référence et de ses voisines les plus proches mais des nœuds appartenant à un ensemble que nous avons défini comme la zone de contact du solide maître. Cette considération a une répercussion directe sur la gestion de la recherche des candidats au contact. En effet, l'association nœud esclave–facette présentée dans la partie 1.4 n'a plus lieu d'être. L'étape de tri ou de recherche du contact par buckets par exemple est ainsi évitée. La seconde originalité de l'approche proposée vient du fait que la surface de contact régularisée est obtenue par une succession d'approximations locales qui dépendent des nœuds de la surface maître mais aussi des nœuds du solide esclave.

La régularisation conduit à une nouvelle description de la surface de contact. Il a ainsi été nécessaire de faire des choix basés sur des constatations numériques notamment pour la définition de la pénétration diffuse. La pénétration diffuse a été définie en projetant sur l'approximation locale et non sur la surface diffuse. Nous avons aussi souligné la difficulté d'implémentation d'une telle approche. En effet, la construction de l'élément de contact *3D* diffus nécessite les variations de  $g_n^d$ . C'est ceci qui est le plus délicat. Il faut parvenir à évaluer cette quantité en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface régularisée et ce n'est pas chose



(a)  $F_z=50$  KN



(b)  $F_z=100$  KN

Fig 2 26 – Contact entre deux tubes : configuration déformée

## **92 Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse**

---

aisée. Force est de constater que cette approche n'est pas exploitable en l'état pour le contact frottant. En effet, la prise en compte du frottement nécessite la connaissance de coordonnées matérielles, que nous ne possédons pas en écrivant les grandeurs comme nous les avons présentées. Ce problème pourrait être résolu en redéfinissant l'approximation locale avec un autre paramétrage, ce qui se trouve être complexe. Cette lacune est la principale critique que nous pouvons faire à l'approche développée et c'est aussi l'inconvénient majeur. Cependant, cette méthode se révèle relativement efficace pour le contact glissant.

# Considérations pour améliorer le traitement numérique

## Sommaire

- 3.1 Introduction**
- 3.2 Traitement de la pénalité**
  - 3.2.1 Régularisation du paramètre de pénalité
  - 3.2.2 Ajustement automatique du paramètre de pénalité
  - 3.2.3 Algorithme détaillé de la méthode de pénalité avec paramètre ajustable
- 3.3 Ajustement du pas de temps**
  - 3.3.1 Description de la stratégie
  - 3.3.2 Détermination de  $\beta$
  - 3.3.3 Algorithme détaillé de l'ajustement automatique du pas
- 3.4 Exemples**
  - 3.4.1 Aplatissement d'une calotte sphérique
  - 3.4.2 Test d'indentation
  - 3.4.3 Contact entre une plaque et un cylindre rigide
- 3.5 Conclusion**

## 3.1 Introduction

Le traitement du contact mène à des inégalités variationnelles. Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes numériques ont été développées. Nous avons choisi d'utiliser, dans SYSTUS, la méthode de pénalisation. Cette méthode peut être facilement développée dans un code par éléments finis. Néanmoins, le choix optimal du paramètre de pénalisation est souvent délicat [53]. Un ajustement automatique de cette quantité semble nécessaire [50]. Le but de la stratégie que nous proposons est d'ajuster le paramètre de pénalisation en fonction de l'interpénétration entre solides.

Les phénomènes de contact produisent des fortes non-linéarités. La méthode de Newton est généralement employée pour résoudre ces problèmes. Cependant, quand trop de changements de statuts de contact se produisent, les algorithmes de Newton Raphson peuvent ne pas converger. Dans ce contexte, un algorithme d'ajustement automatique du chargement peut être utilisé [29, 32, 77]. Trop de nœuds entrant en contact simultanément peuvent occasionner des difficultés dans la solution. L'idée principale de la méthode que nous développons est de limiter le



nombre de changements de statut de contact sur un pas de chargement.

Dans une première partie, nous présentons deux approches pour tenter de réduire les difficultés liées à la pénalisation. Ceci concerne le lissage de la loi de pénalisation et l'ajustement automatique de la pénalisation. Dans une seconde partie, l'ajustement automatique de l'incrément de chargement est mis en évidence. Pour terminer, l'efficacité des approches développées est illustrée par des exemples.

## 3.2 Traitement de la pénalité

Nous considérons  $\mathbf{x}^k$  un nœud esclave potentiellement en contact avec une facette maître  $f_c$ . Ce nœud est supposé en contact à l'instant  $t$  et il est encore en contact à l'instant  $t + \Delta t$  (Fig. 3.2). Nous avons vu dans la partie 1.3.5 que la méthode de pénalité estime la force normale de contact associée au nœud  $\mathbf{x}^k$  en fonction de la pénétration  $g_n^k$ :

$$T_n^k = \langle -g_n^k > \varepsilon_n^k \quad (3.1)$$

Le coefficient de pénalisation  $\varepsilon_n^k$  est calculé à partir du terme diagonal maximal de la matrice de rigidité associée au nœud esclave  $\mathbf{x}^k$ . Ce coefficient mesure la rigidité locale au nœud considéré. Au début de chaque incrément de chargement, cette valeur est évaluée et conservée tout au long du pas considéré. La valeur de ce paramètre peut fortement perturber le processus. Dans certaines situations, la raideur locale peut être très différente de la raideur globale de la structure. Dans ce cas, de sérieuses difficultés de convergence peuvent apparaître. Pour tenter de réduire ces difficultés, une des stratégies consiste à régulariser le coefficient  $\varepsilon_n^k$ .

### 3.2.1 Régularisation du paramètre de pénalité

Le coefficient  $\varepsilon_n^k$  est régularisé de sorte que la force normale de contact  $T_n^k$  présente l'évolution mise en évidence par la figure 3.1. La force normale de contact s'exprime alors comme suit :

$$T_n^k = -\phi(g_n^k)\varepsilon_n^k \quad (3.2)$$

où la fonction  $\phi$  est donnée par :

$$\phi(g_n^k) = \begin{cases} g_n^k & \text{si } g_n^k \leq -\varepsilon \\ \frac{g_n^{k2}}{4\varepsilon} + \frac{g_n^k}{2} + \frac{\varepsilon}{4} & \text{si } |g_n^k| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

Les intérêts d'un tel lissage sont multiples. D'une part la dérivée est continue à l'origine. Ceci améliore le changement de statut de "non contact-contact". D'autre part, lorsque  $|g_n^k| < \varepsilon$ , la pénalité apparente est plus faible, ce qui permet un meilleur

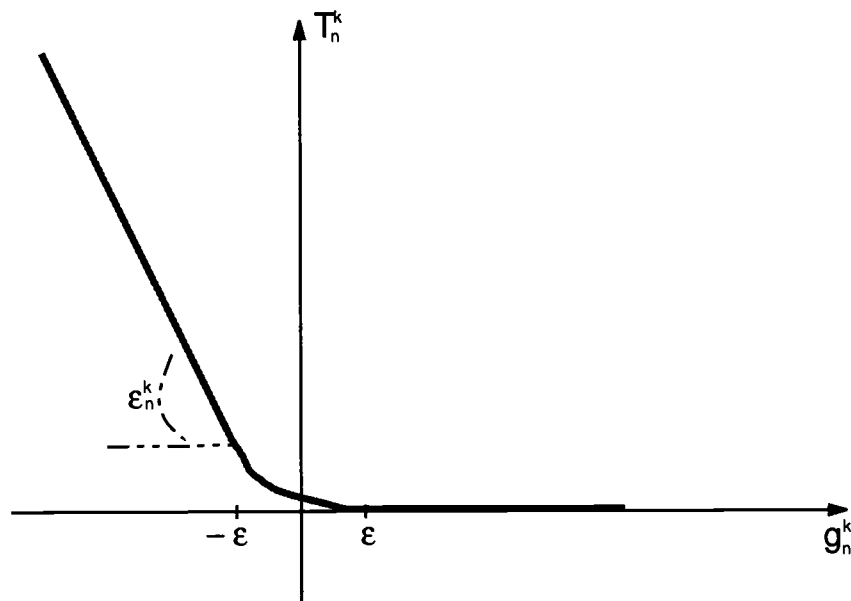


Fig. 3.1 – Lissage de la force de contact

conditionnement quand la pénalité est trop importante. Une autre stratégie peut être envisagée pour tenter de réduire les difficultés liées à la pénalité : l'ajustement de la pénalité au cours du processus. C'est ce que nous proposons dans la suite.

### 3.2.2 Ajustement automatique du paramètre de pénalité

Nous considérons toujours un nœud en contact à l'instant  $t$  et toujours en contact à l'instant  $t + \Delta t$ . L'objectif de l'ajustement est de parvenir à donner une expression du paramètre de pénalité à l'instant  $t + \Delta t$  en utilisant les quantités connues à  $t$  après convergence. Lorsqu'on résout un problème en utilisant un algorithme de Newton, la solution recherchée est obtenue à une précision près. Cette remarque s'applique notamment aux déplacements. Or la pénétration est ni plus ni moins un déplacement normal. Alors, pourquoi essayer de satisfaire la solution parfaite  $g_n = 0$  alors que les déplacements ne sont pas totalement exacts? Le paramètre de pénalité va être ajusté à partir de cette considération. L'algorithme proposé ajuste le paramètre de pénalité en fonction de la précision exigée pour la pénétration. D'une part, une pénétration trop importante, c'est à dire *inacceptable* d'un point de vue physique, signifie que le paramètre de pénalité est trop petit. Ainsi, il semble nécessaire d'augmenter ce paramètre. D'autre part, si la pénétration est *acceptable*, le paramètre de pénalité peut être diminué ou bien gardé tel que. Nous avons introduit dans les phrases précédentes deux termes fondamentaux pour la suite : *inacceptable* et *acceptable*. Dans la mesure où une précision  $P_{dep}$  est requise en déplacement, une pénétration *acceptable* d'un point de vue physique est une pénétration qui est de

l'ordre de grandeur de cette précision  $P_{dep}$ . Par conséquent une pénétration inacceptable d'un point de vue physique est une pénétration supérieure à la précision requise en déplacement.

### Notion de précision requise en pénétration

Pour ce faire, nous introduisons les précisions requises en pénétration. Nous considérons  $g_{max}$  la valeur maximale de la pénétration autorisée, qui sera en quelque sorte la borne supérieure de l'erreur en pénétration. Nous considérons de même  $g_{min}$  pénétration minimale autorisée qui est la borne inférieure. Quand il y a contact, nous souhaitons donc obtenir :

$$g_{min} \leq |g_n| \leq g_{max} \quad (3.4)$$

où les quantités  $g_{min}$  et  $g_{max}$  sont des quantités spécifiées par l'utilisateur avec :

$$g_{min} \sim P_{dep} \quad \text{et} \quad g_{max} \sim P_{dep} \quad (3.5)$$

### Stratégie

La stratégie que nous allons présenter a été mise en œuvre pour des éléments de contact nœud à nœud, "nœud-facette" mais aussi pour l'élément de contact 3D diffus. Puisque la formulation nœud à nœud peut être considérée comme un cas particulier de la formulation "nœud-facette", et que la description de l'élément diffus est un peu complexe au niveau des notations, nous n'allons appliquer la stratégie proposée qu'au cas "nœud-facette". Cependant, l'extension aux diverses formulations ne pose aucun problème. La pénétration après convergence à l'instant  $t$  est notée  ${}^t g_n^k$  et celle à l'instant  $t + \Delta t$  est  ${}^{t+\Delta t} g_n^k$ . Le paramètre de pénalité du nœud  $\mathbf{x}^k$  à l'instant  $t$  (respectivement  $t + \Delta t$ ) est  ${}^t \varepsilon_n^k$  ( ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^k$ ).

Pour un nœud  $\mathbf{x}^k$ , le paramètre de pénalité  ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^k$  va s'exprimer comme suit :

$${}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^k = \mathcal{F}(|{}^t g_n^k|, g_{min}, g_{max}) {}^t \varepsilon_n^k \quad (3.6)$$

La difficulté est maintenant de donner l'expression de la fonction  $\mathcal{F}$ . Si la pénétration à l'instant  $t$ , après convergence, est plus grande que la valeur maximale autorisée  $g_{max}$ , alors la solution n'est pas optimale (Figure 3.3). Pour réduire cette pénétration, il faut donc augmenter le paramètre de pénalité. Autrement dit :

$$|{}^t g_n^k| \geq g_{max} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^k \geq {}^t \varepsilon_n^k \quad (3.7)$$

Dans le cas où la pénétration est acceptable (Figures 3.4 et 3.5), le paramètre de pénalité peut être conservé ou diminué :

$$|{}^t g_n^k| \leq g_{min} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^k \leq {}^t \varepsilon_n^k \quad (3.8)$$

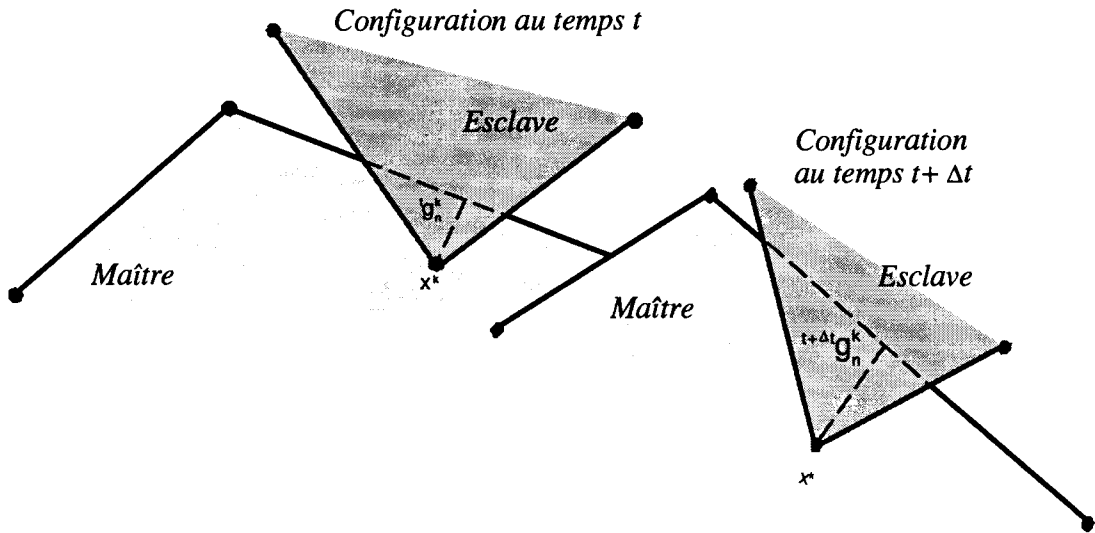


Fig. 3.2 – Situation

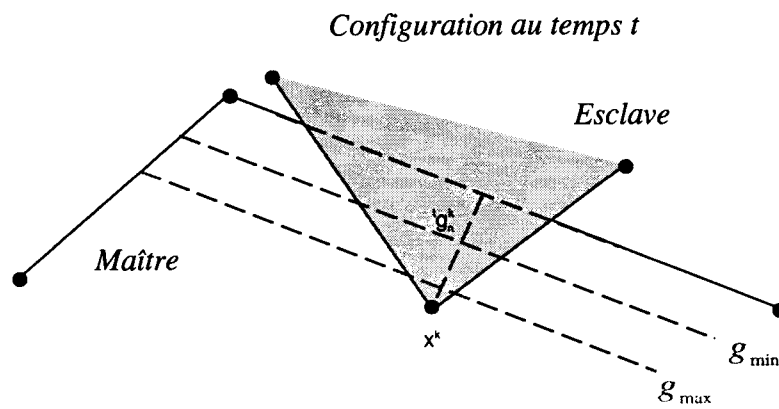


Fig. 3.3 – Augmentation du paramètre de pénalité

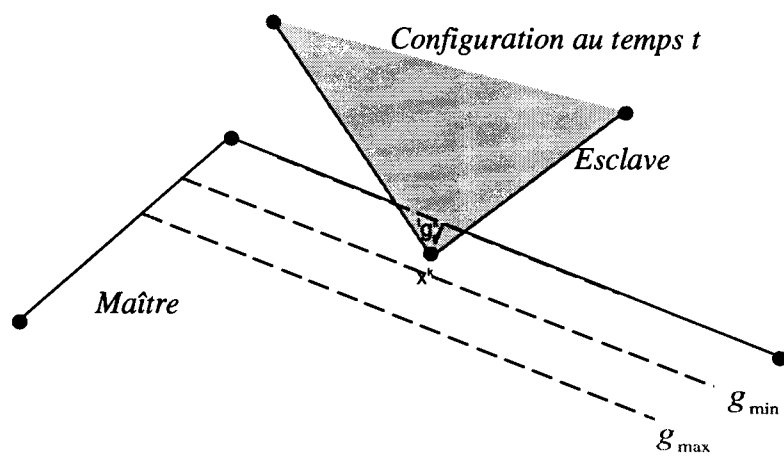


Fig. 3.4 – Diminution du paramètre de pénalité

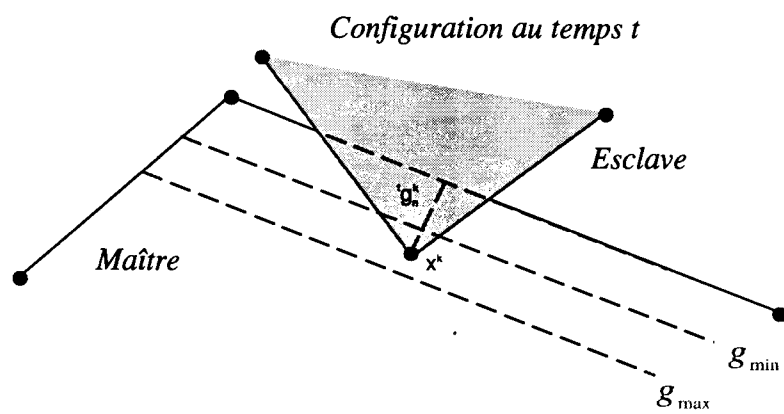


Fig. 3.5 – Stabilité du paramètre de pénalité

Finalement, nous avons l'expression de  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}(|^t g_n^k|, g_{min}, g_{max}) = \begin{cases} \frac{|^t g_n^k|}{g_{max}} & \text{si } |^t g_n^k| > g_{max} \\ \frac{|^t g_n^k|}{g_{min}} & \text{si } |^t g_n^k| < g_{min} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

La stratégie établie, il apparaît indispensable de voir comment elle s'insère dans un algorithme de contact.

### 3.2.3 Algorithme détaillé de la méthode de pénalité avec paramètre ajustable

L'algorithme détaillé de la méthode de pénalité avec l'ajustement automatique est présenté dans le tableau 3.1. Il est important de noter que nous ne présentons ici que l'ajustement du paramètre lié à la force normale de contact. En effet, l'extension à la force de frottement ne pose aucun problème.

L'algorithme présenté détermine à la première itération de Newton du premier incrément de chargement, un paramètre de pénalité de référence noté  $\varepsilon_n^k$ . Ce paramètre est déterminé à partir du terme maximal de la matrice de rigidité. Il est clair que l'ajustement ne peut commencer qu'à partir du deuxième incrément de chargement.

Cette partie a été consacrée à la présentation de techniques utilisées pour tenter de réduire les difficultés liées à une mauvaise pénalité. L'algorithme d'ajustement automatique est basé sur des considérations empiriques. Nous avons choisi d'ajuster la pénalité en contrôlant la pénétration. Ce choix peut être expliqué en considérant le critère de convergence de la méthode de Newton. L'idée est d'imposer une précision de convergence pour la pénétration.

## 3.3 Ajustement du pas de temps

Les non-linéarités du contact, qui plus est en grandes déformations, conduisent inévitablement à l'utilisation d'une approche incrémentale. L'état mécanique d'un système sera donc défini pour un chemin de chargement donné. Il faut alors déterminer le chemin le plus efficace possible d'un point de vue numérique. Dans le cas des problèmes de contact, les difficultés sont étroitement liées aux changements de statut de contact au cours du processus. L'idée de base est de parvenir à ajuster l'incrément de chargement en fonction des changements de statuts de contact et plus particulièrement des entrées en contact. La méthode que nous mettons en œuvre dans ces travaux va s'appuyer sur cette considération.

[1]. Boucle sur les incréments de chargements  $t \geq t_{max}$

[2]. Boucle sur les itérations d'équilibre  $i \leq i_{max}$

► Boucle sur tous les éléments

Détermination des matrices tangentes élémentaires et des résidus  ${}^t_i K_e, {}^t_i R_e$

► Boucle sur tous les éléments de contact

Détermination de l'état de contact du nœud contacteur  $x^k$

Calcul de la force normale de contact  $T_n^k$

(a) Evaluation du paramètre de pénalité  ${}^t_i \varepsilon_n^k$

$${}^t_i \varepsilon_n^k = \begin{cases} {}^t_i \varepsilon_n^k & \text{si } i = 0 \text{ et } t = 1 \\ {}^t_{i-1} \varepsilon_n^k & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Détermination de la condition de contact en utilisant le gap  ${}^t_i g_n^k$

$$\text{Si } {}^t_i g_n^k > 0 \text{ goto (e)}$$

(c) Expression de la force de contact

$${}^t_i T_n^k = {}^t_i \varepsilon_n^k \quad {}^t_i g_n^k$$

(d) Expression du résidu de contact et de la matrice de contact  ${}^t_i K_c, {}^t_i R_c$

(e) Continue

► Résolution des équations d'équilibre

$$[{}^t_i K_c + {}^t_i K_t] \quad {}^t_i \delta u = {}^t_i R_c + {}^t_i R_t$$

► Test de convergence

$$\| {}^t_i R_c + {}^t_i R_t \| \begin{cases} > Prec & \text{alors goto [2]} \\ \leq Prec & \text{alors goto [3]} \end{cases}$$

[3] Fin des itérations d'équilibre

► Ajustement du paramètre de pénalité

$$\begin{aligned} {}^t_i \varepsilon_n^k &= \frac{{}^t_i g_n^k}{g_{max}} {}^t_i \varepsilon_n^k & \text{si } {}^t_i g_n^k > g_{max} \\ {}^t_i \varepsilon_n^k &= \frac{{}^t_i g_n^k}{g_{min}} {}^t_i \varepsilon_n^k & \text{si } {}^t_i g_n^k < g_{min} \\ {}^t_i \varepsilon_n^k &= {}^t_i \varepsilon_n^k & \text{sinon} \end{aligned}$$

► Actualisation de la solution

[4]. Fin de boucle sur les incréments de chargement

Tab. 3.1 – Algorithme de la méthode de pénalisation avec ajustement du paramètre

### 3.3.1 Description de la stratégie

Lorsqu'un problème de contact est résolu, l'entrée en contact d'un trop grand nombre de nœuds simultanément peut perturber fortement le processus itératif de Newton. Ainsi, semble-t-il intéressant d'ajuster automatiquement le pas de temps comme ceci a été fait dans [1, 29, 77]. L'idée de la méthode que nous proposons ici, est de limiter le nombre d'entrées en contact pour un incrément de chargement donné à un nombre  $N_c$  spécifié par l'utilisateur. Nous considérons  $\Delta t$  l'incrément de chargement courant. De manière générale, cet incrément de chargement et l'incrément corrigé  $\Delta t_{cor}$  sont liés par une relation de la forme :

$$\Delta t_{cor} = \beta \Delta t \quad (3.10)$$

où  $\beta$  est un facteur multiplicatif qui doit être déterminé. Ce facteur  $\beta$  va être construit de sorte que le nombre d'entrées en contact sur le pas de temps corrigé  $\Delta t_{cor}$  soit limité au nombre  $N_c$ . Une des quantités qui permet la détermination de l'état de contact est la distance normale de contact. De ce fait, le facteur  $\beta$  va s'exprimer à partir de considérations géométriques comme suit :

$$\beta = \mathcal{P}(g_n^k, {}^{t+\Delta t}g_n^k) \quad (3.11)$$

où  $k = 1, \dots, N_{pc}$ ,  $N_{pc}$  est le nombre de nœuds qui sont susceptibles d'entrer en contact. La quantité  $g_n^k$  (resp.  ${}^{t+\Delta t}g_n^k$ ) représente la distance normale de contact du nœud  $\mathbf{x}^k$  au temps  $t$  (resp.  $t + \Delta t$ ).

### 3.3.2 Détermination de $\beta$

Considérons un nœud esclave  $\mathbf{x}^k$  susceptible d'entrer en contact avec une facette maître. Nous ne présentons pas ici l'association nœud-facette. Dans un souci de clarté et de simplicité, nous supposons que la facette de référence est stationnaire entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$  et que le nœud reste en contact avec la même facette. Deux situations peuvent se produire : le nœud  $\mathbf{x}^k$  considéré n'est pas en contact à l'instant  $t$  et il n'est toujours pas en contact à l'instant  $t + \Delta t$  (Figure 3.6(a)); le nœud étudié peut ne pas être en contact à l'instant  $t$  et être en contact à l'instant  $t + \Delta t$  (Figure 3.6(b)). Pour chaque nœud  $\mathbf{x}^k$ , un scalaire  $\beta_k$  est introduit. Ce scalaire est déterminé de sorte que le nœud  $\mathbf{x}^k$  soit exactement en contact à l'instant  $t + \Delta t_{cor}$  (Figure 3.7).

#### Expression de $\beta_k$ pour un nœud donné $\mathbf{x}^k$

Nous cherchons le nouveau pas de temps  $\Delta t_{cor}$  tel que le nœud  $\mathbf{x}^k$  considéré entre exactement en contact. Pour ce faire, nous allons utiliser de simples considérations géométriques. Nous introduisons la normale  $\mathbf{n}$  à la facette de référence. Nous notons  $\Delta^t u$  le déplacement du nœud  $\mathbf{x}^k$  entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ . La composante normale



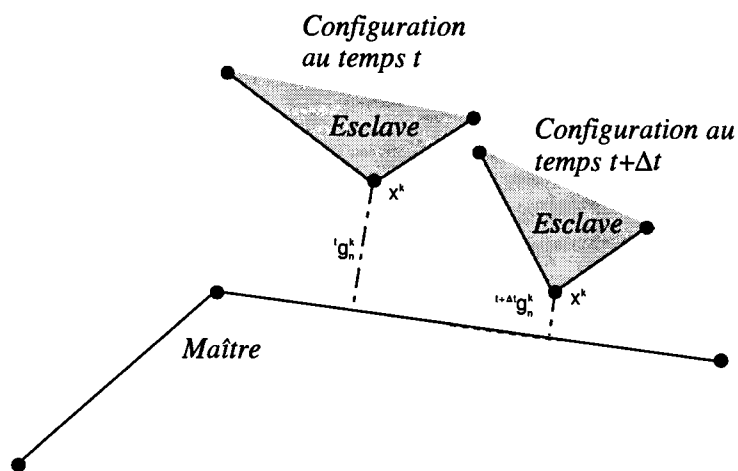
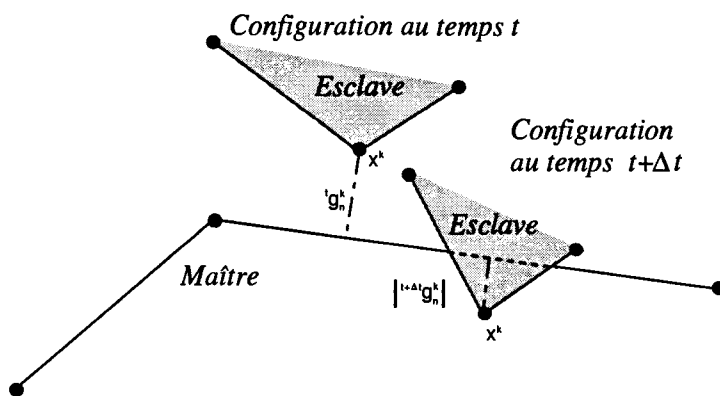
(a) Pas de contact entre  $t$  et  $t + \Delta t$ (b) Entrée en contact entre  $t$  et  $t + \Delta t$ 

Fig. 3.6 – Nœud potentiellement en contact

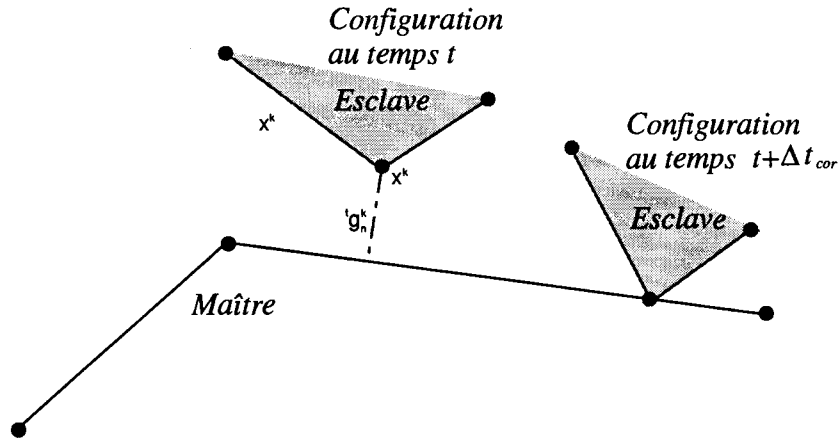


Fig. 3.7 – Situation désirée

de ce déplacement est en fait exactement la différence entre les distances normales à  $t$  et  $t + \Delta t$ , i.e. :

$$\Delta t u_n^k = {}^t g_n^k - {}^{t+\Delta t} g_n^k \quad (3.12)$$

L'incrément de chargement corrigé doit faire en sorte que le point  $x^k$  soit en contact. De ce fait, la distance normale  ${}^{t+\Delta t_{cor}} g_n^k$  doit être nulle :

$${}^{t+\Delta t_{cor}} g_n^k = 0 \quad (3.13)$$

La composante normale  $\Delta t_{cor} u_n^k$  se réduit donc à :

$$\Delta t_{cor} u_n^k = {}^t g_n^k \quad (3.14)$$

Nous pouvons alors établir une relation empirique entre les incréments de chargement comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta t &\rightarrow {}^t g_n^k - {}^{t+\Delta t} g_n^k \\ \Delta t_{cor} &\rightarrow {}^t g_n^k \end{aligned} \quad (3.15)$$

En conséquence, les deux incréments de chargement sont liés par :

$$\Delta t_{cor} = \beta_k \Delta t \quad (3.16)$$

où le coefficient  $\beta_k$  est défini pour un nœud spécifique,

$$\beta_k = \frac{{}^t g_n^k}{{}^t g_n^k - {}^{t+\Delta t} g_n^k} \quad (3.17)$$

### Généralisation

Le coefficient  $\beta$  est calculé en considérant tous les nœuds susceptibles d'entrer en contact. Tous les termes  $\beta_k$  sont évalués et classés dans l'ordre croissant :

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{N_{pc}} \quad (3.18)$$

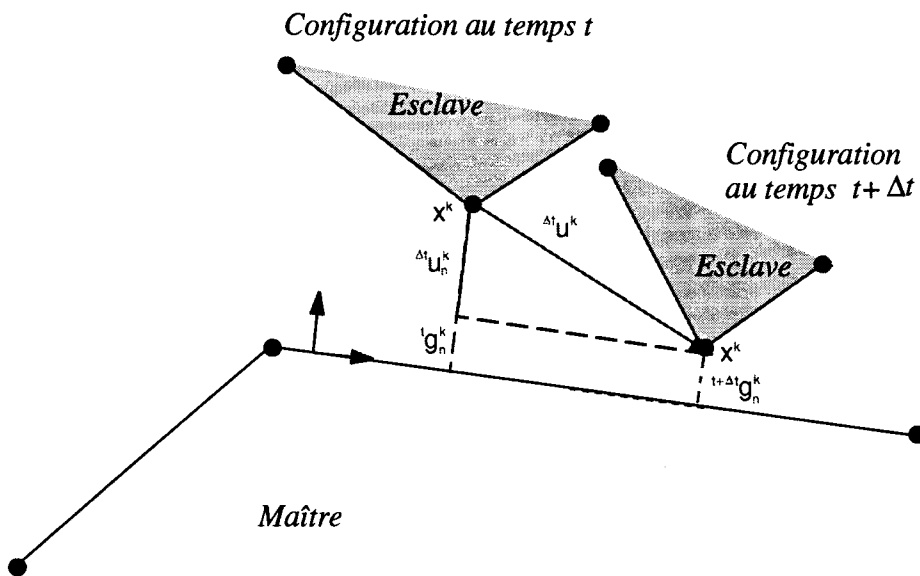


Fig. 3.8 – Déplacement

où  $N_{pc}$  est le nombre de nœuds potentiellement en contact.

L'objectif de l'approche proposée est de limiter le nombre de nœuds entrant en contact entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$  à un nombre  $N_c$  spécifié par l'utilisateur.  $\beta$  est en fait choisi comme le  $N_c^{\text{ième}}$  terme de la suite des coefficients  $\beta_k$  :

$$\beta = \beta_{N_c} \quad (3.19)$$

Après des considérations théoriques, nous allons présenter le détail de l'algorithme avec son implémentation.

### 3.3.3 Algorithme détaillé de l'ajustement automatique du pas

Cette partie est dédiée à la présentation complète de l'algorithme d'ajustement automatique de l'incrément de chargement. L'utilisateur doit donner un entier  $N_c$  qui est en fait le nombre d'entrées en contact maximum souhaitées sur un incrément. Nous considérons que la configuration à l'instant  $t$  a été évaluée et nous voulons déterminer la configuration à l'instant  $t + \Delta t$  avec éventuellement un ajustement automatique de l'incrément de chargement. Dans un premier temps, une prédiction de la situation à  $t + \Delta t$  est effectuée. Pour ce faire, nous laissons le processus itérer une seule fois. Pour chaque nœud en contact potentiel  $x^k$ , le coefficient  $\beta_k$  est calculé à la première itération de Newton du temps  $t + \Delta t$ . En réalisant une boucle sur tous les nœuds du corps esclave,  $\beta$  est évalué. Une fois cette quantité connue, le processus itératif de Newton au temps  $t + \Delta t$  est donc interrompu. L'incrément de chargement est diminué ou augmenté en utilisant le facteur  $\beta$ . Le nouvel incrément  $\Delta t_{cor}$  de chargement est alors évalué par la relation (3.10). Cependant, il se peut que

ce nouvel incrément de chargement soit trop petit, ce qui nous a conduit à introduire un pas de temps minimum spécifié par l'utilisateur  $\Delta t_{min}$ . Il en est de même pour un incrément de chargement trop grand avec l'introduction d'un incrément de chargement maximum  $\Delta t_{max}$ . Le calcul est alors repris avec ce nouveau pas  $\Delta t_{cor}$ . Le schéma de l'algorithme est détaillé par le tableau 3.2.

## 3.4 Exemples

L'efficacité des deux algorithmes proposés est mise en évidence dans cette partie par différents exemples. Les améliorations constatées avec l'utilisation de l'algorithme d'ajustement du paramètre de pénalité sont de deux natures complètement différentes. D'une part, la mise en œuvre de cette stratégie peut considérablement améliorer la convergence. En effet, dans certaines situations un coefficient de pénalité trop grand conduit à des matrices mal conditionnées et ceci peut provoquer la non-convergence du problème étudié. Dans ce cas l'algorithme diminue le paramètre, ainsi les problèmes numériques disparaissent et la convergence est obtenue. D'autre part, certains problèmes peuvent converger mais il se peut alors que la pénétration ne soit pas forcément "bonne". L'algorithme proposé va alors de par le choix des valeurs  $g_{max}$  et  $g_{min}$  conduire à des valeurs de la pénétration que désire l'utilisateur. Nous pouvons parler de convergence en pénétration.

Les apports de l'ajustement automatique du pas sont d'ordres distincts. En effet, cet algorithme peut être efficace dans des situations où l'incrément de chargement préalablement défini est trop grand, créant ainsi des problèmes de convergence. Dans ce cas précis, la diminution du pas s'avère d'une grande utilité. Dans d'autres situations, le pas choisi au départ peut être sous-dimensionné par rapport au problème traité. Ce pas trop petit engendre un coût numérique qui n'a pas lieu d'être et une augmentation de l'incrément de chargement peut s'avérer intéressante.

### 3.4.1 Aplatissage d'une calotte sphérique

La structure étudiée est une sphère de rayon moyen  $100mm$  et d'épaisseur  $2mm$ . Cette sphère est soumise à une pression interne qui la fait grossir et s'aplatir contre une structure infiniment rigide. Pour des raisons de symétrie, la structure est seulement modélisée sur un secteur de  $45$  degrés. Les caractéristiques de la sphère sont  $E = 50000MPa$  et  $\nu = 0.3$ . Un modèle bidimensionnel axisymétrique est utilisé. La pression interne est appliquée jusqu'à  $P = 200MPa$  par pas de  $5MPa$ . La géométrie et le chargement sont donnés sur la figure 3.9. Ce test a été réalisé avec et sans frottement. Dans le cas du contact glissant, le problème peut être mené à son terme sans soucis. L'évolution de la configuration déformée est visible sur la figure 3.11. Dans ce cas, notre choix d'incrément initial conduit à  $40$  pas pour atteindre le chargement imposé. L'algorithme d'ajustement automatique de l'incrément de chargement s'avère très efficace pour augmenter l'incrément et donc réduire le coût au

- [0]. Décodage des données
- [1]. Boucle sur les incréments de chargements  $t \geq t_{max}$
- ▶ Initialisation de  $I_{pas}$
- [2]. Boucle sur les itérations d'équilibre  $i \leq i_{max}$
- ▶ Boucle sur tous les éléments
    - Détermination des matrices tangentes élémentaires et des résidus  ${}^t K_e, {}^t R_e$
  - ▶ Algorithme de recherche du contact
    - Formation des associations nœud esclave facette maître:  $\mathbf{x}^k - f_c$
  - ▶ Boucle sur tous les éléments de contact
    - (a) Détermination du gap  ${}^{t+\Delta t} g_n^k$
    - (b) Si  $i = 1$  et  $I_{pas} = 0$  alors
      - Evaluation de  $\beta_k$
      - Evaluation de  $\beta$
    - (c) Si non contact, ie  ${}^{t+\Delta t} g_n^k > 0$  alors goto(e)
    - (d) Expression de la force de contact
    - (d) Expression du résidu de contact et de la matrice de contact  ${}^{t+\Delta t} K_c, {}^{t+\Delta t} R_c$
    - (e) Continue
  - ▶ Interruption du processus itératif pour ajustement du pas
    - Si  $I_{pas} = 0$  et  $i = 1$  alors goto [3]
  - ▶ Résolution des équations d'équilibre
  - ▶ Test de convergence
- [3]. Fin des itérations d'équilibre
- ▶ Si  $I_{pas} = 0$ 
    - (a) Calcul du nouvel incrément  $\Delta t_{cor} = \beta \delta t$
    - (b) Si  $\Delta t_{cor} < \Delta t_{min}$  alors  $\Delta t_{cor} = \Delta t_{min}$
    - (c) Si  $\Delta t_{cor} > \Delta t_{max}$  alors  $\Delta t_{cor} = \Delta t_{max}$
    - (d) Actualisation  $I_{pas} = 1$
    - (e) Reprise du calcul avec  $\Delta t = \Delta t_{cor}$

goto [2] avec  $\Delta t = \Delta_{cor}$
  - ▶ Actualisation de la solution
- [4]. Fin de boucle sur les incréments de chargement

Tab. 3.2 – Algorithme de l'ajustement automatique du pas de temps

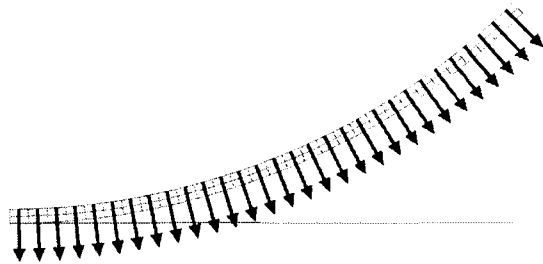


Fig. 3.9 – *Aplatissement d'une calotte sphérique: modèle éléments finis*

cours du processus. L'exemple a alors été traité avec ajustement automatique du pas avec les données suivantes :

- $N_c = 1$
- $\Delta t_{min} = 1MPa$
- $\Delta t_{max} = 30MPa$

Dans cette situation, nous notons une très forte augmentation du pas comme le souligne la figure 3.10. Seuls 12 incréments sont utiles pour atteindre le chargement imposé. Il apparaît clairement que l'évolution du pas de temps n'est pas linéaire. Dans le cas d'un contact frottant,  $\nu = 0.30$ , nous constatons un arrêt du calcul après 5 incréments de chargement pour  $P=25MPa$ . Avec ajustement, le calcul est mené à son terme en 14 incréments. Les difficultés dues à un mauvais choix de la taille de l'incrément sont atténuées. La figure 3.10 met en évidence l'évolution de la taille de l'incrément de chargement pendant le processus. La présence de frottement modifie les statuts de contact au niveau des entrées en contact. Ceci est visible sur la figure 3.10. En effet, pour l'incrément 5, dans le cas glissant la taille de cet incrément est augmentée; dans le cas frottant, c'est le contraire, il est diminué traduisant une entrée en contact.

### 3.4.2 Test d'indentation

Nous étudions ici l'indentation d'un échantillon par un indenteur sphérique supposé infiniment rigide par rapport à l'échantillon [25]. Le problème étudié possédant un axe de révolution, l'étude porte sur une géométrie axisymétrique (Figure 3.12). L'échantillon considéré est un élastomère destiné à la fabrication des pneumatiques automobiles ce qui lui confère un module d'Young un peu plus élevé que les élastomères classiques qui est d'environ  $2MPa$ . Les caractéristiques de l'échantillon sont  $E = 10MPa$  et  $\nu = 0.5$ . La bille est en acier :  $E = 210000MPa$  et  $\nu = 0.3$ . Elle a un rayon de  $r = 12.7mm$ . Les dimensions de l'échantillon sont mises en évidence sur la figure 3.12. Le chargement appliqué à la bille consiste en un déplacement imposé

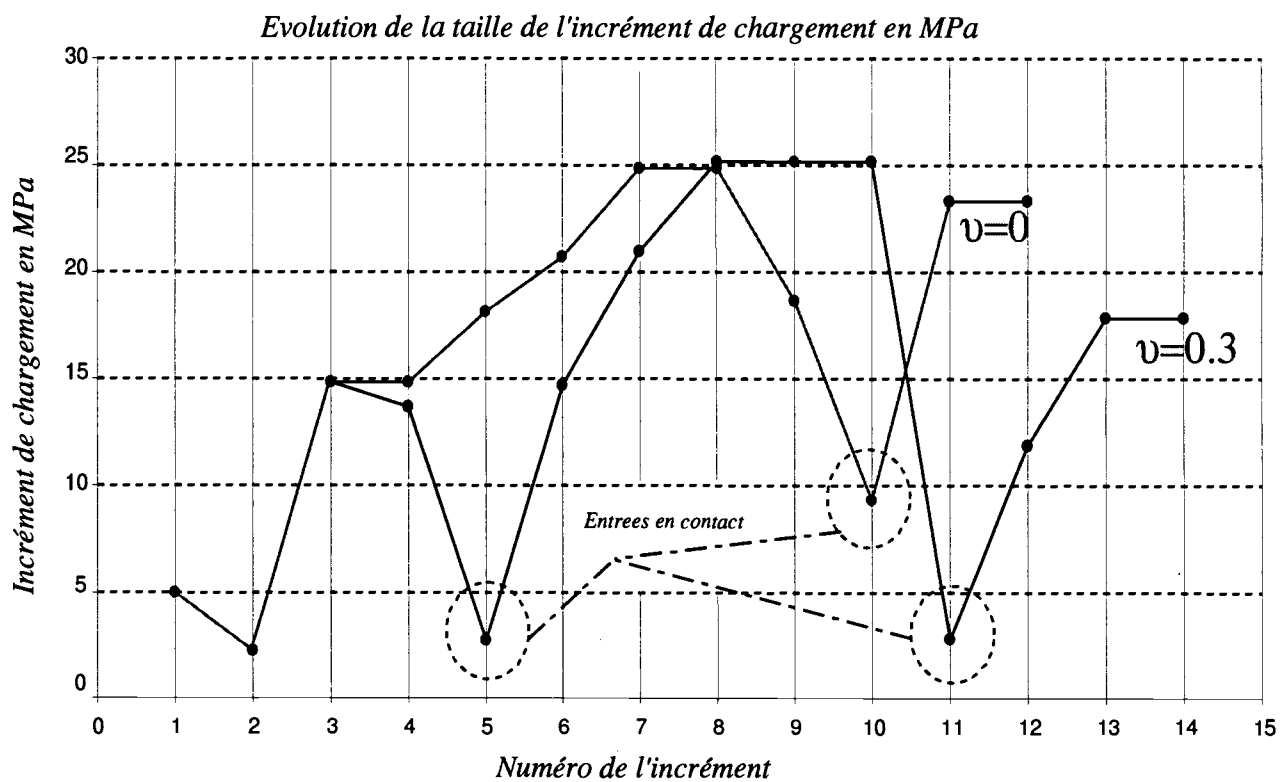
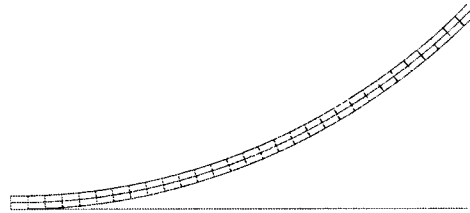
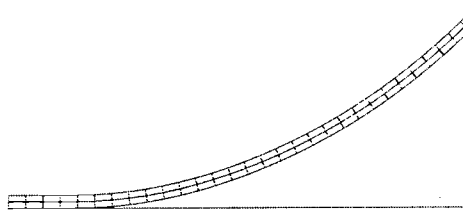


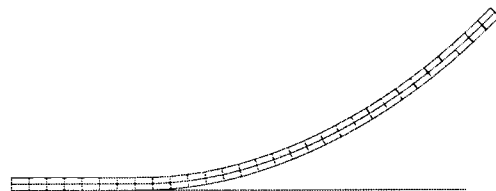
Fig. 3.10 – Aplatissement d'une calotte sphérique



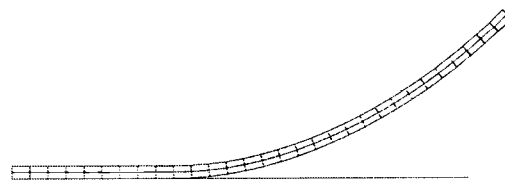
(a) Carte 2



(b) Carte 6



(c) Carte 10



(d) Carte 12

Fig. 3.11 – *Evolution de la configuration déformée*



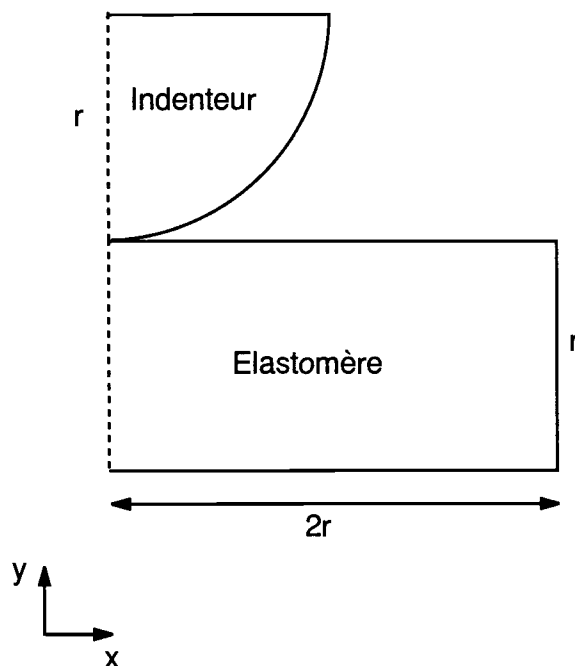


Fig. 3.12 – Modélisation 2D d'un test d'indentation

de  $4mm$  par pas de  $0.5mm$ . Le calcul prend en compte les grandes déformations en restant dans le domaine élastique. Le choix d'un modèle axisymétrique nécessite la prise en compte de conditions aux limites particulières. En effet, il est nécessaire de bloquer les modes de corps rigides de l'élastomère. Il faut aussi bloquer les déplacements dans la direction  $x$  le long de l'axe de révolution. Le modèle éléments finis ainsi que les conditions aux limites sont présentés sur la figure 3.13.

### Avec ajustement de la pénalité

Ce test est réalisé en utilisant une méthode dite classique sans ajustement du paramètre de pénalité et dans ce cas des problèmes de convergence surgissent au dernier incrément de chargement pour  $U_y = 4mm$ . La précision requise n'est pas atteinte et donc le problème diverge. Nous réalisons alors le même test avec un ajustement automatique de la pénalité. La précision requise en déplacements est de  $10^{-4}mm$ . Les valeurs de  $g_{min}$  et  $g_{max}$  sont donc choisies proches de cette valeur  $0.5 * 10^{-3}mm$  et  $5 * 10^{-3}mm$ . Dans ce cas là, les problèmes de convergence disparaissent et le calcul converge normalement. L'évolution de la configuration déformée est présentée sur la figure 3.14. Si nous regardons l'évolution du paramètre de pénalité sans ajustement automatique pour des nœuds particuliers de contact (Figures 3.15(a) et 3.16(a)), ce paramètre subit une forte augmentation durant le processus de résolution. Les difficultés semblent liées à un paramètre de pénalité trop élevé. L'évolution du paramètre de pénalité avec ajustement automatique confirme cette

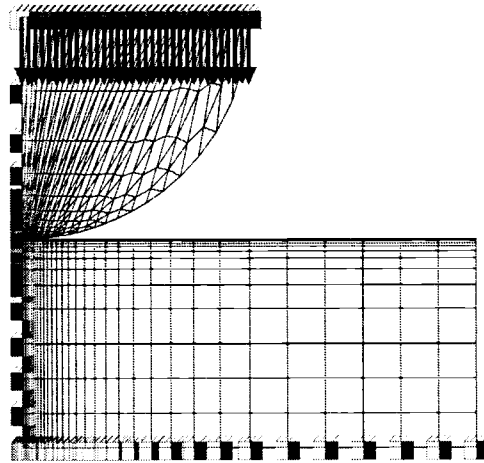


Fig. 3.13 – *Modélisation éléments finis*

hypothèse. Il apparaît clairement sur les graphiques 3.15(b) et 3.16(b) une très nette diminution de la pénalité. Il est aussi visible que la pénétration se rapproche de la précision requise avec l'évolution du paramètre.

#### **Avec ajustement de l'incrément de chargement**

Nous venons de voir que les difficultés numériques de cet exemple peuvent être réduites en utilisant l'algorithme d'ajustement de la pénalité. Nous avons réalisé ce test en utilisant l'ajustement de l'incrément de chargement indépendamment de l'ajustement de la pénalité. Nous constatons alors que les problèmes étaient fortement réduits. Les données relatives à l'incrément de chargement sont les suivantes :

- $N_c = 1$
- $\Delta t_{max} = 2mm$
- $\Delta t_{min} = 0.125mm$

Le graphique 3.17 présente l'évolution de l'incrément de chargement. Il met en évidence deux points importants. Avec notre choix initial et sans l'algorithme d'ajustement de l'incrément de chargement, 8 incréments sont utilisés pour atteindre le chargement imposé. Avec l'algorithme proposé, ce nombre est réduit à 6. L'incrément de chargement est très nettement augmenté. Ceci permet de plus, de réduire les difficultés puisque le calcul peut être mené à son terme.

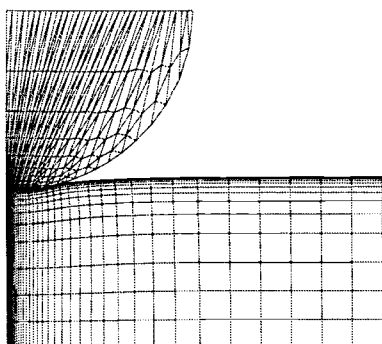
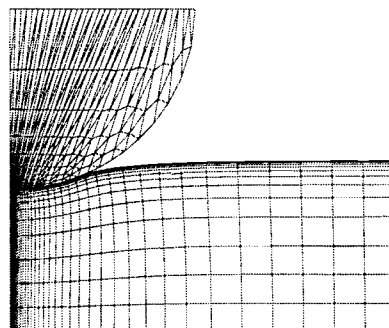
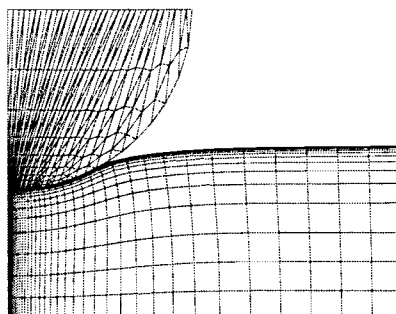
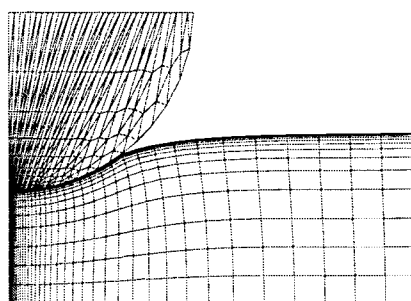
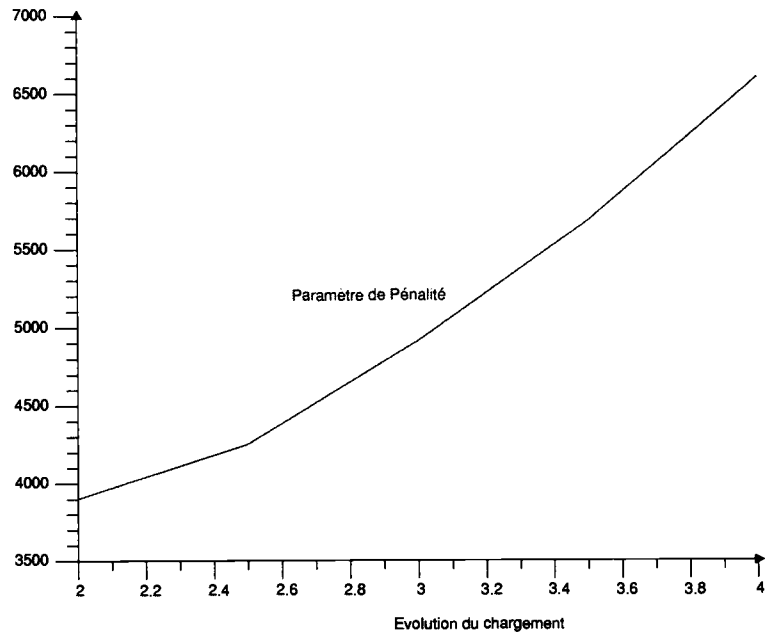
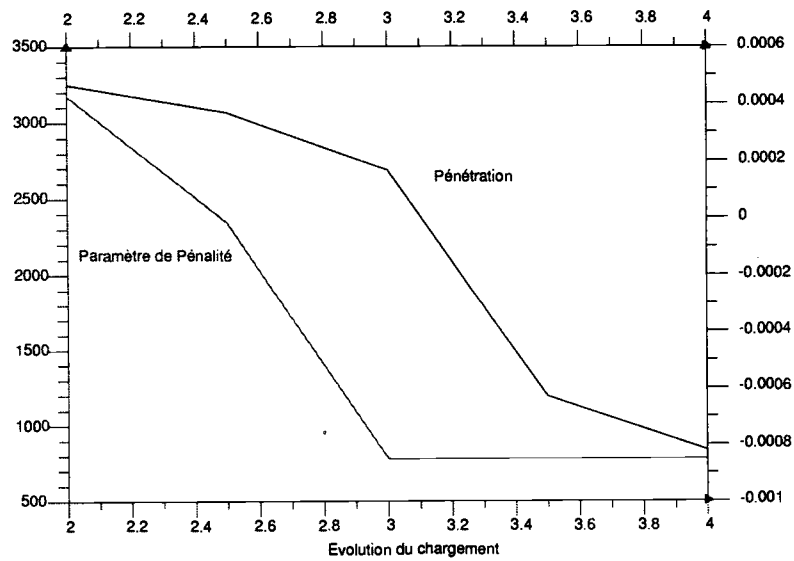
(a)  $U_y = 1mm$ (b)  $U_y = 2mm$ (c)  $U_y = 3mm$ (d)  $U_y = 4mm$ 

Fig. 3.14 – Evolution de la configuration déformée

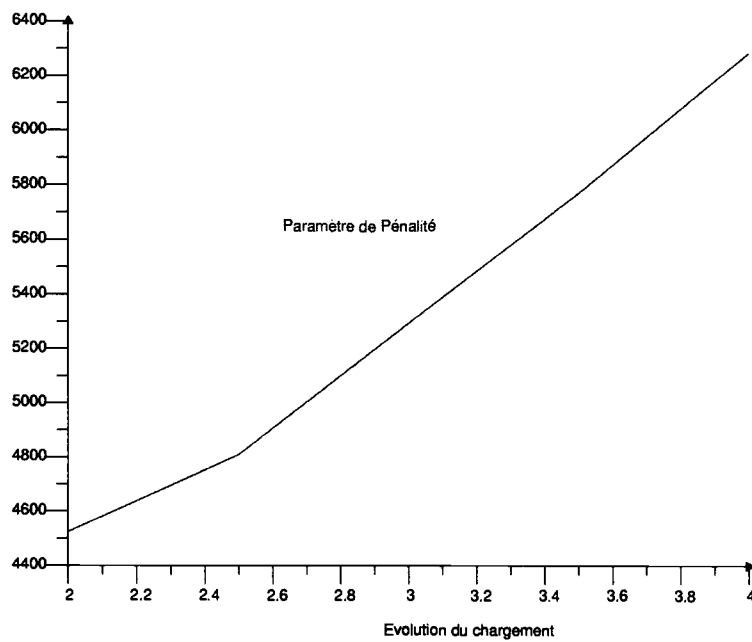


(a) Pénalité sans ajustement

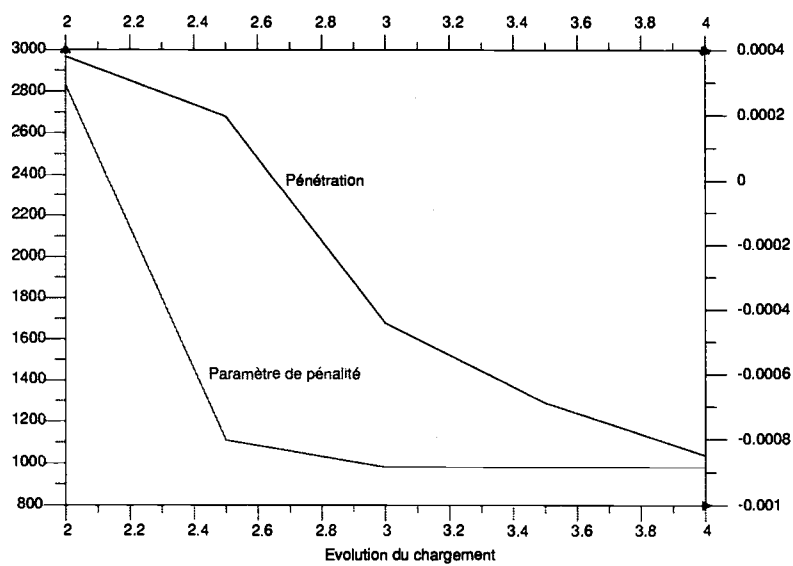


(b) Pénalité et pénétration avec ajustement

Fig. 3.15 – Evolution du paramètre de pénalité



(a) Pénalité sans ajustement



(b) Pénalité et pénétration avec ajustement

Fig. 3.16 – Test d'indentation: évolution du paramètre de pénalité

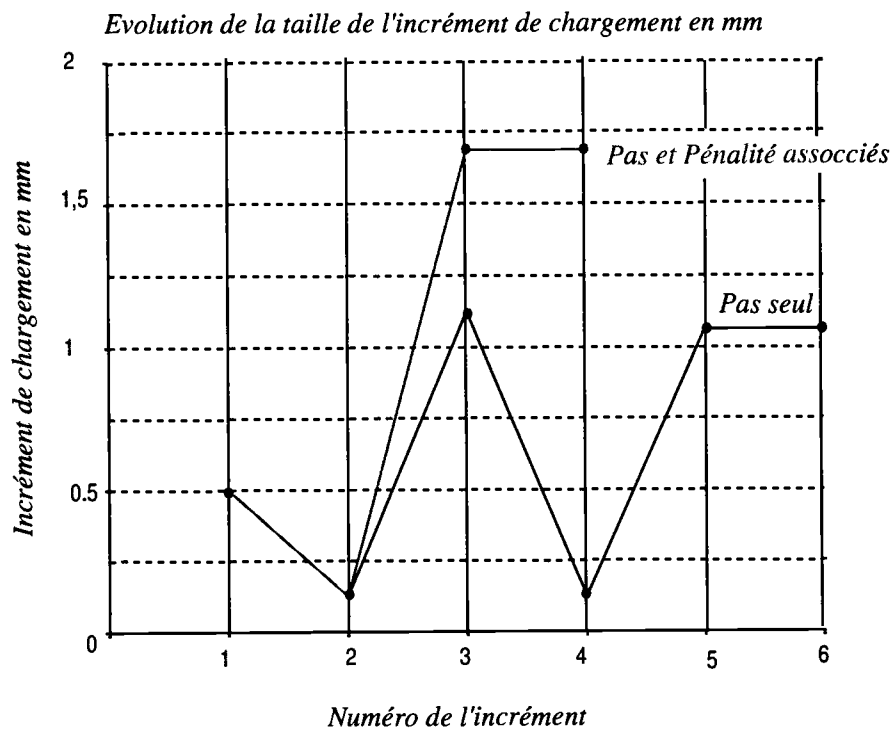


Fig. 3.17 – Indentation

### Ajustement de l'incrément de chargement et de la pénalité associés

Nous avons repris ce test en associant l'ajustement de la pénalité à l'ajustement de l'incrément de chargement. Le graphe 3.17, met en évidence une influence de l'ajustement automatique de la pénalité sur l'ajustement de l'incrément. En effet, l'ajustement de la pénalité contrôle la pénétration. Or, c'est cette quantité qui nous donne les statuts de contact et c'est elle qui est utilisée pour calculer  $\beta$ . De ce fait, la valeur de  $\beta$  ne peut être la même avec ajustement de la pénalité et sans ajustement. Ceci explique les différences observées sur le graphe 3.17 entre la courbe "pas et pénalité associés" et la courbe pas seulement. Ceci influence fortement le processus puisque nous constatons une amélioration des calculs avec une convergence obtenue en 4 incréments de chargement.

### 3.4.3 Contact entre une plaque et un cylindre rigide

Nous considérons le contact entre une plaque élastique et un cylindre rigide. Dans l'exemple proposé ici, la plaque est soumise à une pression imposée sur une partie  $S_p$  (Figure 3.18(a)) de sa frontière. La partie  $S_e$  est encastree. Les caractéristiques de la plaque sont :

$$- E = 200000 \text{ MPa}$$

- $\nu = 0.3$

Le chargement est appliqué par pas de  $20MPa$ . Le contact entre la plaque et le cylindre est supposé sans frottement. Les dimensions de la plaque sont les suivantes :

- $L = 70mm$
- $e = 4mm$
- $l = 20mm$

Le modèle éléments finis est visible sur la figure 3.18(b). La figure 3.19 propose une vue 3D du problème. La précision absolue requise en déplacements est  $10^{-6}mm$ . Cet exemple est traité avec l'algorithme d'ajustement de la pénalité. Les valeurs de  $g_{min}$  et  $g_{max}$  sont choisies de l'ordre de grandeur de la précision requise en déplacement :

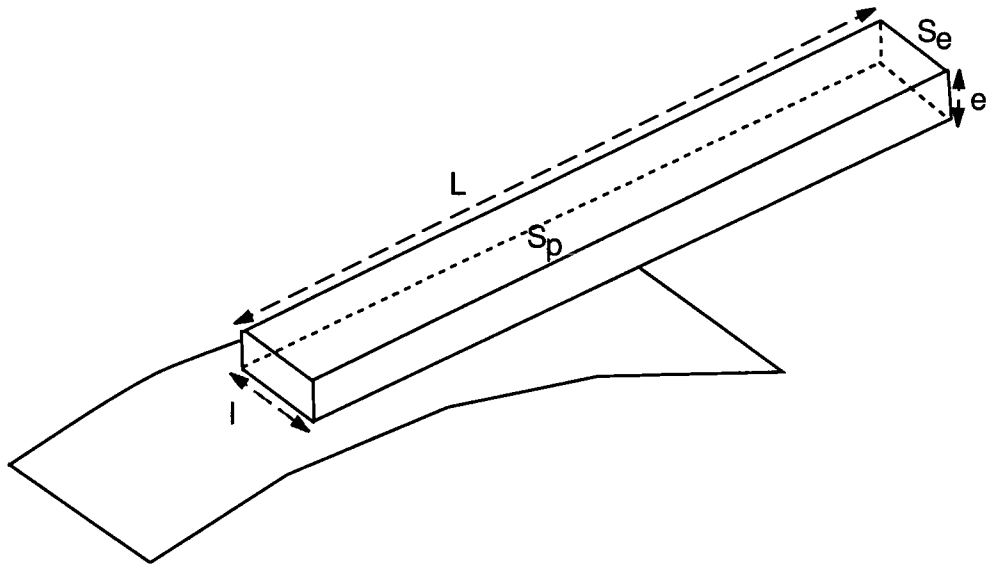
- $g_{min} = 10^{-6}mm$
- $g_{max} = 10^{-5}mm$

Les graphiques suivants mettent en évidence l'évolution du paramètre de pénalité et de la pénétration pour des nœuds de contact particuliers. Sans ajustement de la pénalité, des difficultés numériques apparaissent et la précision requise n'est pas atteinte pour un chargement de  $120MPa$ . Ces difficultés sont réduites en considérant l'ajustement. Les graphiques 3.21(a), 3.22(a), 3.23(a) représentent l'évolution de la pénalité et de la pénétration. Il est important de noter que la pénalité a tendance à fortement décroître, ce qui explique la forte augmentation de la pénétration. Le phénomène observé avec ajustement de la pénalité est complètement opposé. En effet, la pénalité étant très largement supérieure à la valeur critique  $g_{max}$ , le paramètre de pénalité est augmenté pour tenter de rétablir une situation acceptable. Une fois la valeur de la pénétration stabilisée entre  $g_{min}$  et  $g_{max}$ , la pénalité est constante (cf. graphiques 3.21(b), 3.22(b), 3.23(b)).

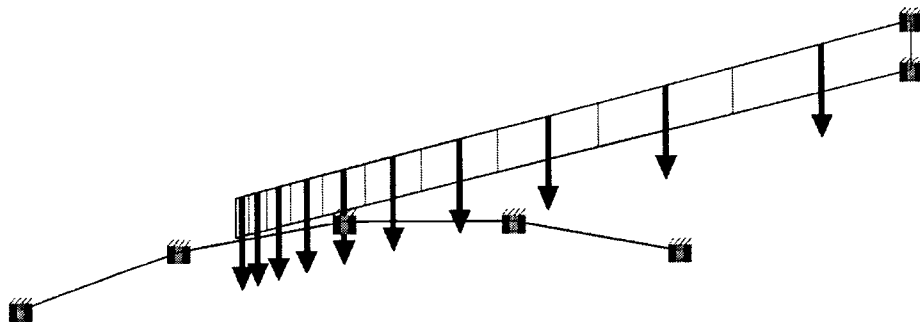
### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux algorithmes empiriques pour tenter de réduire deux types de difficultés. Les conditions de contact conduisent à des inégalités variationnelles et plusieurs méthodes numériques ont été développées pour prendre en considération les contraintes de contact. Les méthodes telles que les méthodes des multiplicateurs de Lagrange ou de lagrangien augmenté sont efficaces mais peuvent s'avérer plus coûteuses. C'est une des raisons pour laquelle nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalité. Cependant, le choix de paramètre de pénalité se révèle délicat. C'est pourquoi un ajustement de la pénalité a été proposé. L'idée principale est d'imposer une précision de convergence en pénétration. Ceci est effectué en introduisant deux grandeurs qui sont en fait la borne supérieure et inférieure de la pénétration.

La seconde difficulté est purement numérique. Elle est liée à l'utilisation d'une



(a) Géométrie



(b) Conditions aux limites et chargement

Fig. 3.18 – *Contact entre une plaque et un cylindre rigide*



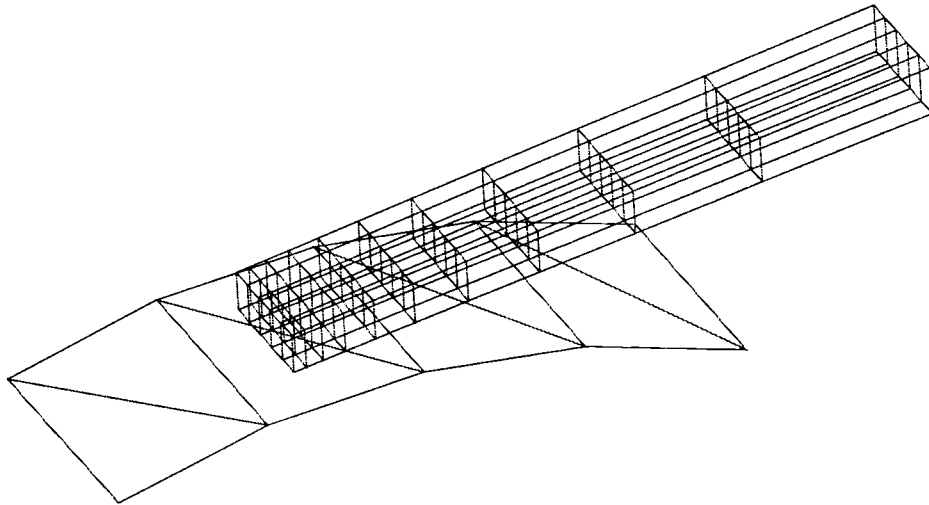
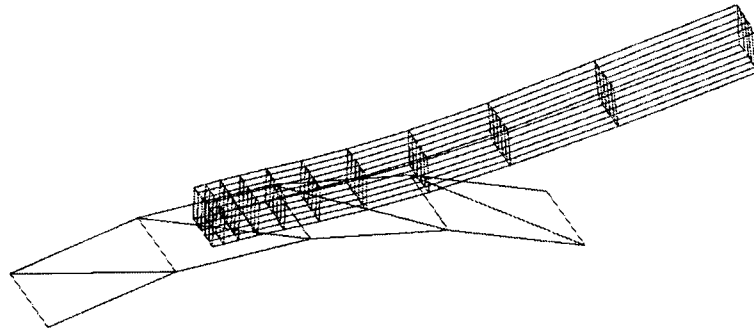
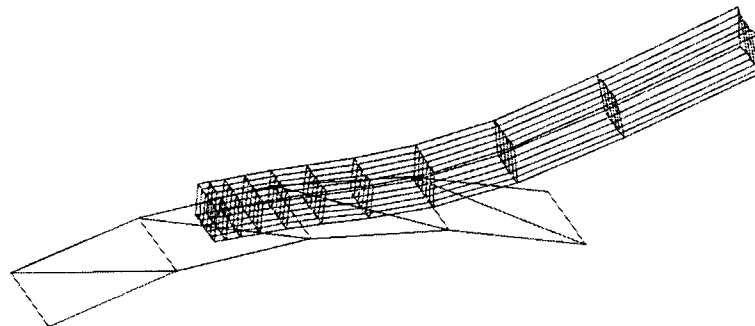
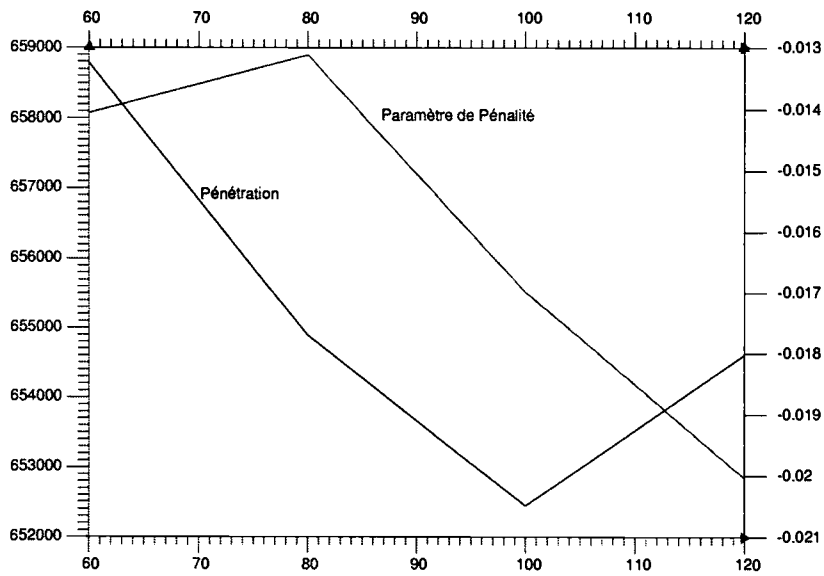


Fig. 3.19 – *Contact entre une plaque et un cylindre rigide: vue 3D*

méthode incrémentale associée à un algorithme de type Newton. En effet, dans ce cas, l'état mécanique du système est défini pour un chemin de chargement donné. Pour des problèmes de contact frottant ou glissant, le changement de statut "non contact-contact" perturbe fortement le processus itératif. Dans ce contexte, nous avons proposé un ajustement automatique de l'incrément de chargement. L'idée de base est de limiter le nombre d'entrée en contact à un nombre imposé  $N_c$ . Au moment de la rédaction de ce rapport, seul le cas  $N_c = 1$  a été testé.

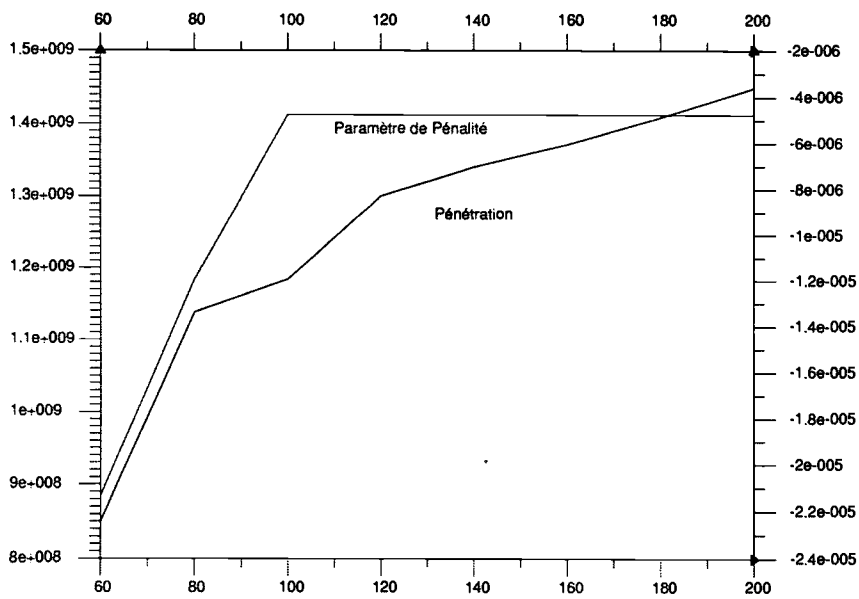
L'ajustement de la pénalité peut améliorer le processus mais le choix des valeurs de  $g_{min}$  et  $g_{max}$  est crucial et peut jouer dans un sens comme dans l'autre. Sur les méthodes proposées, l'ajustement automatique de l'incrément de chargement semble être l'approche la plus efficace.

(a)  $P=60\text{MPa}$ (b)  $P=200\text{MPa}$ Fig. 3.20 – *Contact entre une plaque et un cylindre rigide: configuration déformée*



Evolution du chargement

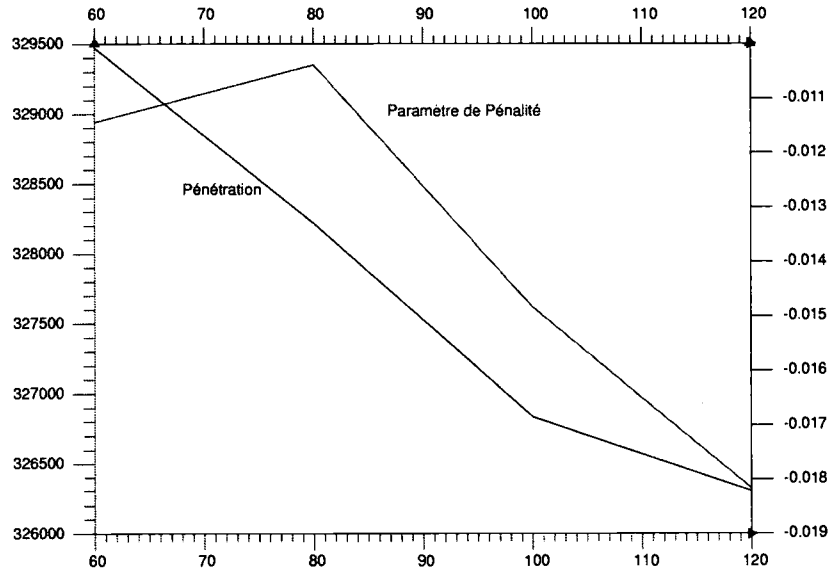
(a) Pénalité et pénétration sans ajustement



Evolution du chargement

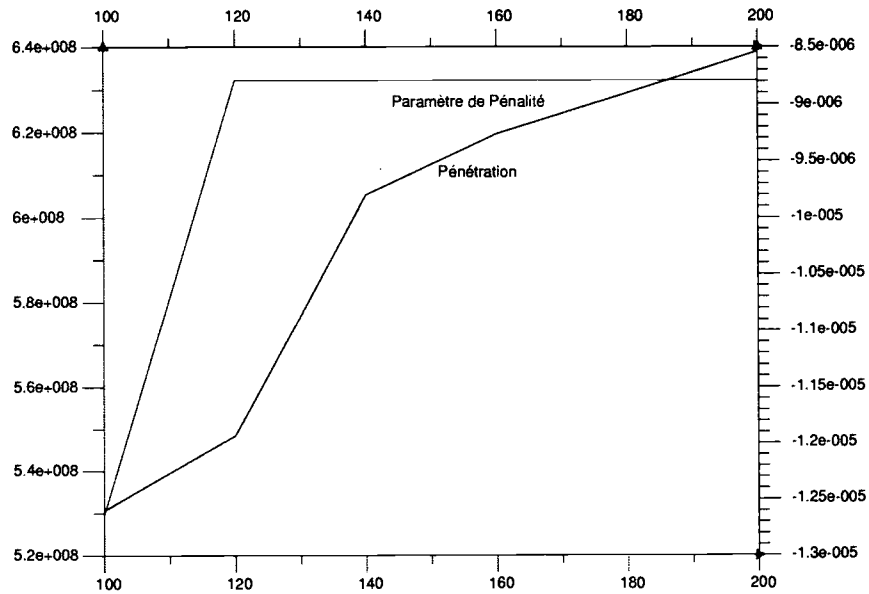
(b) Pénalité et pénétration avec ajustement

Fig. 3.21 – Evolution du paramètre de pénalité



Evolution du chargement en MPa

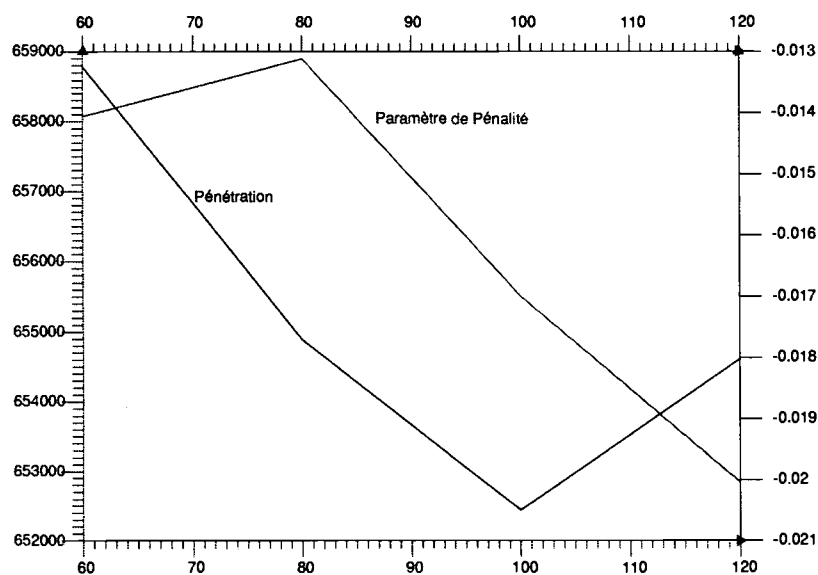
(a) Pénalité et pénétration sans ajustement



Evolution du chargement

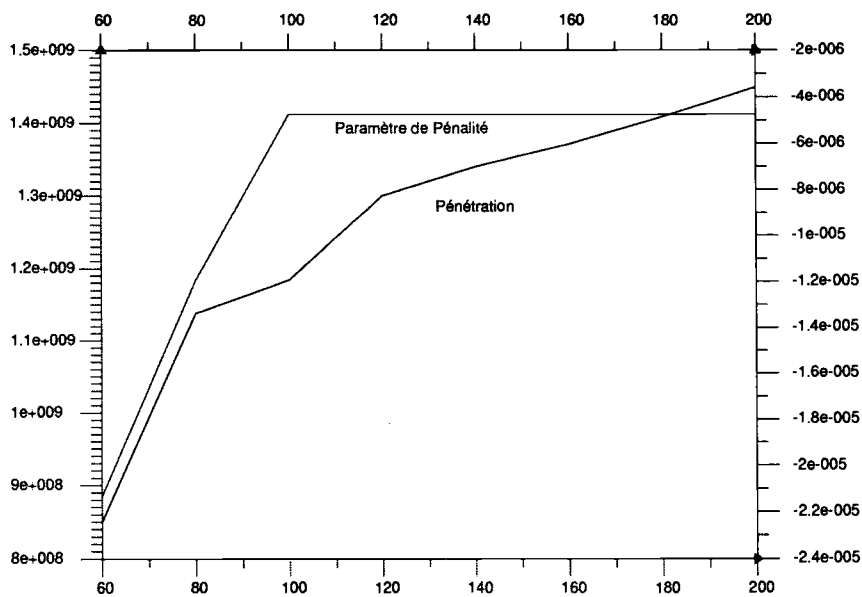
(b) Pénalité et pénétration avec ajustement

Fig. 3.22 – Evolution du paramètre de pénalité



Evolution du chargement

(a) Pénalité et pénétration sans ajustement



Evolution du chargement

(b) Pénalité et pénétration avec ajustement

Fig. 3.23 – Evolution du paramètre de pénalité

---

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons deux exigences, développer des méthodes pour faciliter le traitement numérique du contact et assurer leur insertion dans le logiciel de simulation par éléments finis SYSTUS. Nos conclusions portent sur l'efficacité des méthodes développées mais aussi sur les difficultés rencontrées pour leur implémentation et sur les voies d'amélioration.

Le premier chapitre est une présentation de la théorie du contact et des méthodes qui sont les plus couramment utilisées pour faire face à ce genre de problèmes. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalisation pour sa simplicité de mise en œuvre. Nos travaux devant nous conduire à l'implémentation d'un algorithme de contact dans un code de calculs par éléments finis, il est apparu fondamental de décrire complètement la construction d'un élément de contact "nœud-facette". Notre étude s'est toutefois limitée au cas d'une facette triangulaire à trois nœuds dans le cas du contact glissant. Ceci nous a permis de souligner les difficultés qui pouvaient être rencontrées notamment pour le calcul des variations de la distance normale de contact.

Le chapitre 2 est la première stratégie que nous avons mise en œuvre pour tenter de réduire les difficultés numériques du contact. Elle concerne un aspect purement géométrique à savoir la régularisation d'une surface de contact issue d'un maillage éléments finis. Cette technique de régularisation apporte des améliorations dans la robustesse de l'algorithme de contact. L'originalité de cette approche réside dans l'utilisation des techniques d'approximation diffuse pour régulariser. Après le développement de l'approximation diffuse appliquée au cas de la gestion d'une surface de contact, toutes les grandeurs nécessaires à la modélisation du contact glissant ont été définies. En effet, la prise en compte du contact frottant nécessite la connaissance de coordonnées matérielles. Or, l'écriture de la surface de contact établie ne nous permet pas d'avoir ces coordonnées. Ces nouvelles quantités dépendent des propriétés de la surface de contact régularisée. La méthode des éléments finis a ensuite été associée à la régularisation pour construire l'élément de contact 3D diffus. Contrairement aux approches classiques, l'élément de contact proposé n'est pas constitué par les nœuds d'une seule facette mais par un ensemble de nœuds. Deux stratégies ont été développées pour déterminer ces nœuds. La première "oublie" complètement le maillage, nous pouvons alors parler de contact "meshless". Les nœuds utilisés dans l'approximation appartiennent à une zone de contact potentiel. L'avantage principal de cette approche réside dans le fait que l'étape de gestion du contact n'est plus nécessaire. Le coût lié au tri ou à la recherche est fortement réduit. Cependant, à l'heure actuelle, nous avons constaté qu'un trop grand nombre de nœuds dans les

zones cible et esclave pouvait fortement augmenter le coût numérique. En effet, les matrices tangentes de contact générées par cette approche ont une taille considérable, ce qui semble être préjudiciable. Ainsi, la seconde approche, dite *INTP*, se révèle pour l'instant la plus efficace.

Le chapitre 3 propose deux algorithmes empiriques concernant l'ajustement automatique de la pénalisation et de l'incrément de chargement. La méthode de pénalisation est très simple à implémenter dans un code élément finis. C'est une des raisons pour laquelle nous avons décidé de l'utiliser. Cependant, le choix d'un paramètre de pénalisation optimal est un exercice délicat. C'est pourquoi, il nous est apparu essentiel de tenter de déterminer ce coefficient de façon automatique. L'originalité de l'algorithme programmé vient de l'introduction de la notion de convergence en pénétration. Les difficultés de la méthode de Newton à converger avec des problèmes de contact sont liées aux changements de statuts de contact durant le processus. Ainsi, il nous est apparu intéressant de limiter ce nombre de changements de statuts de contact sur un incrément de chargement. C'est pourquoi nous avons introduit un nombre d'entrées en contact maximum autorisées sur un incrément de chargement. L'ajustement de la pénalisation dépend des valeurs  $g_{min}$  et  $g_{max}$  et une mauvaise donnée de ces valeurs peut s'avérer catastrophique pour la convergence. Ces deux algorithmes, *a priori*, peu complexes, s'avèrent très efficaces. Nous avons cependant constaté que l'ajustement automatique du pas de temps améliore plus nettement la robustesse que l'ajustement de la pénalisation.

Une poursuite du présent travail consisterait, dans un premier temps, à améliorer le choix et plus exactement la détection des nœuds utilisés dans l'approximation. Une possibilité serait d'avoir recours à une stratégie de recherche des nœuds voisins basée sur la détermination du polynôme convexe. Dans un second temps, il faudrait traiter le contact frottant par approximation diffuse. Ceci serait possible en utilisant la notion de dérivée convective. Du point de vue de l'ajustement du pas, on pourrait envisager de raisonner non plus sur les entrées en contact mais sur les pertes de contact en déterminant le nouveau pas par la force de contact. En ce qui concerne la gestion du contact frottant, il serait intéressant de raisonner sur le passage du statut de contact glissant au statut adhérent. Malgré les recherches menées, le traitement numérique du contact reste un problème ouvert et bien d'autres voies d'investigations peuvent être envisagées.



# Annexes





## Élément de contact

Nous présentons dans cette annexe toutes les grandeurs qui interviennent dans la construction d'un élément de contact "nœud-facette". Cependant, cette présentation se limite au cas d'une facette plane à trois nœuds. La position du vecteur  $\mathbf{x}^m$  s'écrit :

$$\mathbf{x}^m = \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\xi}) \mathbf{x}_i \quad (\text{A.1})$$

L'expression des fonctions de forme est classique :

$$\begin{aligned} N_1(\bar{\xi}) &= 1 - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \\ N_2(\bar{\xi}) &= \bar{\xi}_1 \\ N_3(\bar{\xi}) &= \bar{\xi}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les vecteurs tangents s'écrivent simplement :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1^m &= \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \\ \boldsymbol{\tau}_2^m &= \mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### A.1 Calcul de $\bar{\xi}_1$ et $\bar{\xi}_2$

Ces quantités sont déterminées en partant du fait que le vecteur séparant  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$  est orthogonal aux deux vecteurs tangents, c'est à dire :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^m &= 0 \\ (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Il faut donc résoudre le système :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\tau}_1^m &= \mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_1^m \\ \mathbf{x}^m \cdot \boldsymbol{\tau}_2^m &= \mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_2^m \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

La résolution du système (A.5) conduit alors aux relations :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{1}{\det M} (m_{12} \boldsymbol{\tau}_1^m - m_{11} \boldsymbol{\tau}_2^m) \cdot (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}_1) \\ \bar{\xi}_2 &= \frac{1}{\det M} (m_{21} \boldsymbol{\tau}_2^m - m_{22} \boldsymbol{\tau}_1^m) \cdot (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

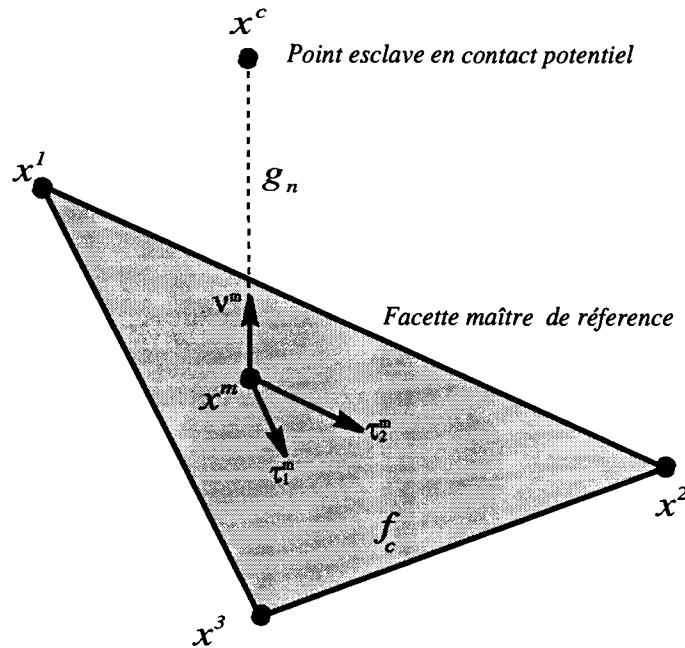


Fig. A.1 – Grandeurs du contact

Dans cette expression, nous avons noté :

$$m_{ij} = \tau_i^m \cdot \tau_j^m \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{A.7})$$

$$\det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Détermination de $\delta\bar{\xi}_1$ et $\delta\bar{\xi}_2$

Les relations (A.4) sont différenciées pour obtenir :

$$0 = \delta(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^m + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_1^m \quad (\text{A.9})$$

$$0 = \delta(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^m + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_2^m \quad (\text{A.10})$$

En utilisant les règles habituelles de calcul, nous avons :

$$0 = \{ \delta\mathbf{x}^c - \boldsymbol{\tau}_1^m \delta\bar{\xi}_1 - \boldsymbol{\tau}_2^m \delta\bar{\xi}_2 - N_1(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_1 - N_2(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_2 - N_3(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_3 \} \cdot \boldsymbol{\tau}_1^m + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_1^m$$

$$0 = \{ \delta\mathbf{x}^c - \boldsymbol{\tau}_1^m \delta\bar{\xi}_1 - \boldsymbol{\tau}_2^m \delta\bar{\xi}_2 - N_1(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_1 - N_2(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_2 - N_3(\bar{\xi})\delta\mathbf{x}_3 \} \cdot \boldsymbol{\tau}_2^m + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m) \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_2^m$$

Il apparaît alors indispensable de calculer la première variation des vecteurs tangents. Cette quantité s'obtient très simplement en reprenant la définition de ces vecteurs

et nous avons :

$$\begin{aligned}\delta\tau_1^m &= \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1\xi_1}(\bar{\xi}) \delta\bar{\xi}_1 \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1\xi_2}(\bar{\xi}) \delta\bar{\xi}_2 \mathbf{x}_i \\ \delta\tau_2^m &= \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2\xi_2}(\bar{\xi}) \delta\bar{\xi}_2 \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2\xi_1}(\bar{\xi}) \delta\bar{\xi}_1 \mathbf{x}_i\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Dans le cas particulier traité, les dérivées secondes des fonctions de forme sont nulles,

$$\begin{aligned}\delta\tau_1^m &= \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i \\ \delta\tau_2^m &= \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

On arrive à la résolution du système suivant :

$$\begin{aligned}(\tau_1^m \cdot \tau_1^m) \delta\bar{\xi}_1 + \{\tau_1^m \cdot \tau_2^m\} \delta\bar{\xi}_2 &= \left\{ \delta\mathbf{x}^c - \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}^i \right\} \cdot \tau_1^m \\ &+ g_n \nu^m \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_1}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i \right\} \\ \{\tau_1^m \cdot \tau_2^m\} \delta\bar{\xi}_1 + \{\tau_2^m \cdot \tau_2^m\} \delta\bar{\xi}_2 &= \left\{ \delta\mathbf{x}^c - \sum_{i=1}^{i=3} N_i(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}^i \right\} \cdot \tau_2^m \\ &+ g_n \nu^m \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} N_{i,\xi_2}(\bar{\xi}) \delta\mathbf{x}_i \right\}\end{aligned}$$

Nous introduisons alors les différents vecteurs à 12 composantes suivants :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \tau_1^m \\ -N_1(\bar{\xi}) \tau_1^m \\ -N_2(\bar{\xi}) \tau_1^m \\ -N_3(\bar{\xi}) \tau_1^m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi_1}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{2,\xi_1}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{3,\xi_1}(\bar{\xi}) \nu^m \end{bmatrix}\quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \tau_2^m \\ -N_1(\bar{\xi}) \tau_2^m \\ -N_2(\bar{\xi}) \tau_2^m \\ -N_3(\bar{\xi}) \tau_2^m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi_2}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{2,\xi_2}(\bar{\xi}) \nu^m \\ N_{3,\xi_2}(\bar{\xi}) \nu^m \end{bmatrix}\quad (\text{A.14})$$

Le système (A.2) s'écrit alors simplement:

$$\begin{aligned}m_{11} \delta\bar{\xi}_1 + m_{12} \delta\bar{\xi}_2 &= \delta\mathbf{u}^T \{\mathbf{T}_1 + g_n \mathbf{N}_2\} \\ m_{12} \delta\bar{\xi}_1 + m_{22} \delta\bar{\xi}_2 &= \delta\mathbf{u}^T \{\mathbf{T}_2 + g_n \mathbf{N}_1\}\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\delta\bar{\xi}_1 &= \frac{\delta\mathbf{u}^T}{\det M} [m_{22}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2)] \\ \delta\bar{\xi}_2 &= \frac{\delta\mathbf{u}^T}{\det M} [m_{11}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1)]\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Ces expressions sont notées plus simplement :

$$\delta\bar{\xi}_1 = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{S}_1 \quad (\text{A.17})$$

$$\delta\bar{\xi}_2 = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{S}_2 \quad (\text{A.18})$$

Les vecteurs  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont des vecteurs à 12 composantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_1 &= \frac{1}{\det M} [m_{22}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2)] \\ \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{\det M} [m_{11}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1)]\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

### A.3 Expression de $\delta\boldsymbol{\nu}^m$

Cette variation est calculée à partir du fait que le produit scalaire entre ce vecteur et les vecteurs tangents est nul :

$$\boldsymbol{\nu}^m \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha^m = 0 \quad \text{avec } \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.20})$$

Cette relation est ensuite différenciée pour obtenir :

$$\delta\boldsymbol{\nu}^m \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha^m + \boldsymbol{\nu}^m \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_\alpha^m = 0 \quad \text{avec } \alpha = 1, 2 \quad (\text{A.21})$$

Nous pouvons affirmer que  $\delta\boldsymbol{\nu}^m$  est dans le plan  $(\boldsymbol{\tau}_1^m, \boldsymbol{\tau}_2^m)$

$$\delta\boldsymbol{\nu}^m = [\delta\boldsymbol{\nu}^m \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha^m] \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \quad (\text{A.22})$$

En reprenant (A.21), cette expression devient :

$$\delta\boldsymbol{\nu}^m = - [\boldsymbol{\nu}^m \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_\alpha^m] \boldsymbol{\tau}_\alpha^m \quad (\text{A.23})$$

En passant dans la base duale  $(\boldsymbol{\tau}_1^{m*}, \boldsymbol{\tau}_2^{m*})$ , nous avons :

$$\delta\boldsymbol{\nu}^m = m_{\alpha\beta}^{m*} [\boldsymbol{\nu}^m \cdot \delta\boldsymbol{\tau}_\alpha^m] \boldsymbol{\tau}_\beta^{m*} \quad (\text{A.24})$$

Le produit scalaire  $\delta\boldsymbol{\nu}^m \cdot \Delta\boldsymbol{\nu}^m$  peut alors être évalué :

$$\delta\mathbf{u}^T \{ m_{11}^{m*} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + m_{12}^{m*} (\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2^T) + m_{22}^{m*} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T \} \Delta\mathbf{u}^T \quad (\text{A.25})$$

## A.4 Résumé

**Résidu élémentaire de contact**

$$R_c = T_n \mathcal{N}_c$$

$$\mathcal{N}_c = \begin{bmatrix} \nu^m \\ -(1 - \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2) \nu^m \\ -\bar{\xi}_1 \nu^m \\ -\bar{\xi}_2 \nu^m \end{bmatrix}$$

**Matrice élémentaire de contact**

$$K_c = \varepsilon_n H(g_n) \mathcal{N}_c \mathcal{N}_c^T + \varepsilon_n g_n \mathcal{M}_c$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c = & g_n [m_{11}^{m*} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + m_{12}^{m*} (\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2^T) + m_{22}^{m*} \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T] \\ & - [\mathbf{S}_2 \mathbf{N}_2^T + \mathbf{S}_1 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_2 \mathbf{S}_2^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{S}_1^T] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \tau_1^m \\ -(1 - \xi_1 - \xi_2) \tau_1^m \\ -\xi_1 \tau_1^m \\ -\xi_2 \tau_1^m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\nu^m \\ \nu^m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \tau_2^m \\ -(1 - \xi_1 - \xi_2) \tau_2^m \\ -\xi_1 \tau_2^m \\ -\xi_2 \tau_2^m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\nu^m \\ 0 \\ \nu^m \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{\det M} [m_{22}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2)] \\ \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{\det M} [m_{11}(g_n \mathbf{N}_2 + \mathbf{T}_2) - m_{12}(g_n \mathbf{N}_1 + \mathbf{T}_1)] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$



## Calcul des grandeurs diffuses

Un nœud esclave  $\mathbf{x}^c$  est en contact potentiel avec un ensemble de nœuds de la surface maître. La projection du nœud esclave sur l'approximation locale est notée  $\mathbf{x}^d$ .

### B.1 Quelques vecteurs “importants” ...

#### B.1.1 Variation de $\delta \mathbf{x}^d$

La première variation de cette quantité est donnée par :

$$\delta \mathbf{x}^d = \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + d\bar{F}$$

avec

$$d\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \mathbf{u}^{dT} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F} \end{bmatrix}$$

#### B.1.2 Variation de $\boldsymbol{\tau}_1^d$ et $\boldsymbol{\tau}_2^d$

$$\delta \boldsymbol{\tau}_1^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\tau}_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta \boldsymbol{\tau}_2^d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{D}_{\boldsymbol{\tau}_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\tau}_1} = \bar{F}_{,X_1 X_1} \mathcal{S}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \mathcal{S}_2 + \mathcal{T}_1$$

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{\tau}_2} = \bar{F}_{,X_2 X_1} \mathcal{S}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \mathcal{S}_2 + \mathcal{T}_2$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_1} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_1} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F}_{,X_2} \\ \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F}_{,X_2} \\ \dots \\ \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F}_{,X_2} \end{bmatrix}$$



## B.2 Calcul de $\delta\bar{X}_1$ et $\delta\bar{X}_2$

Pour ce faire, nous partons du fait que le vecteur séparant  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^d$  est colinéaire au vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^d$  et de ce fait son produit scalaire avec les vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}_1^d$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^d$  est nul :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d &= 0 \\ (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Ces relations sont différenciées,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta [(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d] \\ &= \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \delta \boldsymbol{\tau}_1^d \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d - d\bar{F}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d + g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\tau}_1^d \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d - d\bar{F}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d + \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \left( \bar{F}_{,X_1 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{T}_1 \right) \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \mathbf{u}^{dT} \bar{F}_{,X_1} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \\ &\quad + \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \left( \bar{F}_{,X_1 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{T}_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta [(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d] \\ &= \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d + (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \delta \boldsymbol{\tau}_2^d \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d - d\bar{F}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d + g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\tau}_2^d \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d - d\bar{F}) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d + \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \left( \bar{F}_{,X_2 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{T}_2 \right) \\ &= (\delta \mathbf{x}^c - \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d - \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d - \delta \mathbf{u}^{dT} \bar{F}_{,X_2} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \\ &\quad + \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \left( \bar{F}_{,X_1 X_1} \delta \bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \delta \bar{X}_2 + \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{T}_2 \right) \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre le système :

$$S_1 \left\{ \begin{aligned} &\left( \boldsymbol{\tau}_1^d \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d - \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \bar{F}_{,X_1 X_1} \right) \delta \bar{X}_1 + \left( \boldsymbol{\tau}_2^d \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d - \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \bar{F}_{,X_1 X_2} \right) \delta \bar{X}_2 = \\ &\quad \delta \mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta \mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \mathcal{T}_1 - \bar{F}_{,X_1} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \\ &\left( \boldsymbol{\tau}_1^d \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d - \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \bar{F}_{,X_2 X_1} \right) \delta \bar{X}_1 + \left( \boldsymbol{\tau}_2^d \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d - \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \bar{F}_{,X_2 X_2} \right) \delta \bar{X}_2 = \\ &\quad \delta \mathbf{x}^c \cdot \boldsymbol{\tau}_2^d + \delta \mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \mathcal{T}_2 - \bar{F}_{,X_2} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \end{aligned} \right.$$

Nous introduisons alors la matrice  $M^d \in \mathbb{M}_{2,2}$  définie par :

$$m_{ij} = \tau_i^d \cdot \tau_j^d - \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} \bar{F}_{,X_i X_j}$$

Le système  $S_1$  est équivalent à :

$$S_1 \begin{cases} m_{11}^d \delta \bar{X}_1 + m_{12}^d \delta \bar{X}_2 = \delta \mathbf{x}^c \cdot \tau_1^d + \delta \mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} \mathcal{T}_1 - \bar{F}_{,X_1} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \\ m_{21}^d \delta \bar{X}_1 + m_{22}^d \delta \bar{X}_2 = \delta \mathbf{x}^c \cdot \tau_2^d + \delta \mathbf{u}^{dT} \left( \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} \mathcal{T}_2 - \bar{F}_{,X_2} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \right) \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit finalement à :

$$\begin{aligned} \delta \bar{X}_1 &= \frac{\delta \mathbf{u}^{dT}}{\det M} \left[ \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} (m_{22}^d \mathcal{T}_1 - m_{12}^d \mathcal{T}_2) - \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} (m_{22}^d \bar{F}_{,X_1} - m_{12}^d \bar{F}_{,X_2}) + \boldsymbol{\chi}_1 \right] \\ \delta \bar{X}_2 &= \frac{\delta \mathbf{u}^{dT}}{\det M} \left[ \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} (m_{11}^d \mathcal{T}_2 - m_{21}^d \mathcal{T}_1) - \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} (m_{11}^d \bar{F}_{,X_2} - m_{21}^d \bar{F}_{,X_1}) + \boldsymbol{\chi}_2 \right] \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\boldsymbol{\chi}_1$  et  $\boldsymbol{\chi}_2$  sont des vecteurs à  $3(n+1)$  composantes. Ils prennent en considération la contribution du point  $\mathbf{x}^c$  : Ces expressions sont notées simplement :

$$\begin{aligned} \delta \bar{X}_1 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \mathbf{S}_1 \\ \delta \bar{X}_2 &= \delta \mathbf{u}^{dT} \mathbf{S}_2 \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{\det M} \left[ \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} (m_{22}^d \mathcal{T}_1 - m_{12}^d \mathcal{T}_2) - \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} (m_{22}^d \bar{F}_{,X_1} - m_{12}^d \bar{F}_{,X_2}) + \boldsymbol{\chi}_1 \right] \\ \mathbf{S}_2 &= \frac{1}{\det M} \left[ \frac{g_n^d}{\|\tau_1^d \wedge \tau_2^d\|} (m_{11}^d \mathcal{T}_2 - m_{21}^d \mathcal{T}_1) - \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} (m_{11}^d \bar{F}_{,X_2} - m_{21}^d \bar{F}_{,X_1}) + \boldsymbol{\chi}_2 \right] \end{aligned}$$

## B.3 Calcul de $\delta\nu^d$

Le produit vectoriel  $[\tau_1^d \wedge \tau_2^d]$  est un vecteur dont les coordonnées s'expriment simplement :

$$[\tau_1^d \wedge \tau_2^d] = \begin{bmatrix} -\bar{F}_{,X_1} \\ -\bar{F}_{,X_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

La variation de ce vecteur est de la forme :

$$\delta [\tau_1^d \wedge \tau_2^d] = \begin{bmatrix} -\delta \bar{F}_{,X_1} \\ -\delta \bar{F}_{,X_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Les quantités  $\delta\bar{F}_{,X_1}$  et  $\delta\bar{F}_{,X_2}$  sont donnée par :

$$\begin{aligned}\delta\bar{F}_{,X_1} &= \bar{F}_{,X_1X_1}\delta\bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_1X_2}\delta\bar{X}_2 + \delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{T}_1 \\ \delta\bar{F}_{,X_2} &= \bar{F}_{,X_2X_1}\delta\bar{X}_1 + \bar{F}_{,X_2X_2}\delta\bar{X}_2 + \delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{T}_2\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

En reprenant les notations précédemment introduites, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\delta\bar{F}_{,X_1} &= \delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{D}_{\tau_1} \\ \delta\bar{F}_{,X_2} &= \delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{D}_{\tau_2}\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Finalement,

$$\delta[\boldsymbol{\tau}_1^d \wedge \boldsymbol{\tau}_2^d] = \begin{bmatrix} -\delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{D}_{\tau_1} \\ -\delta\mathbf{u}^{dT}\mathcal{D}_{\tau_2} \\ 0 \end{bmatrix}\quad (\text{B.6})$$

La première variation du vecteur normal  $\boldsymbol{\nu}^d$  s'écrit donc :

$$\delta\boldsymbol{\nu}^d = \mathcal{U}\delta\mathbf{u}^d\quad (\text{B.7})$$

où nous avons introduit  $\mathcal{U}$ , matrice appartenant à  $\mathbb{M}_{3,3(n+1)}$  :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \wedge \boldsymbol{\tau}_2\|} \left\{ I_{3 \times 3} - \boldsymbol{\nu}^d \boldsymbol{\nu}^{dT} \right\} \begin{bmatrix} -\mathcal{D}_{\tau_1}^T \\ -\mathcal{D}_{\tau_2}^T \\ 0 \end{bmatrix}\quad (\text{B.8})$$

# Publications

## Revues

- [1] D. Chamoret, A. Rassineux, P. Villon, and J.-M. Bergheau. Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse. *Revue européenne des éléments finis*, 11:431–445, 2002.
- [2] D. Chamoret, P. Saillard, A. Rassineux, and J.-M. Bergheau. A brief review of computational methods in contact mechanics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002. Article sélectionné suite à la conférence ACOMEN 2002 pour publication.

## Conférences avec actes

- [1] D. Chamoret, J.-M. Bergheau, A. Rassineux, and P. Villon. Modelling of contact surface by local hermite diffuse interpolation. In *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International ESAFORM Conference on Material Forming*, volume 1, pages 179–182, University of Liège, Belgium, April 23-25, 2001.
- [2] D. Chamoret, J.-M. Bergheau, Patrick Saillard, and Alain Rassineux. Some considerations to smooth contact. In *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Contact Mechanics International Symposium*, Praia da Consolação, Peniche, Portugal, June 17-21 2001.
- [3] D. Chamoret, A. Rassineux, J.-M. Bergheau, and P. Villon. Modélisation d'une surface de contact par interpolation diffuse. In Teknea, editor, *Actes du 5<sup>ième</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, pages 555–562, Giens, France, 15-21 Mai 2001.
- [4] D. Chamoret, P. Saillard, and J.-M. Bergheau. Automatic adjustment of the load step for contact problems. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna, Austria, July 7-12 2002. Vienna University of Technology, Austria. ISBN 3-9501554-0-6.
- [5] D. Chamoret, P. Saillard, and J.-M. Bergheau. Two algorithms to improve the numerical treatment of contact. In M. Pietrzyk, Z. Mitura, and J. Kaczmar, editors, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International ESAFORM Conference on Material Forming*, pages 87–90, Cracov, Poland, April 14-17, 2002.

- [6] D. Chamoret, P. Saillard, A. Rassineux, and J.-M. Bergheau. A brief review of computational methods in contact mechanics. In *Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, University of Liège, Belgium, May 28-31, 2002.
- [7] H. Hamdi, D. Chamoret, and M. Dursapt. Contact model applied to a rough surface crushing. In *Euromech 435, Friction and Wear in Metal Forming*, pages 71–77, Valenciennes, France, June 18-20, 2002.

## Bibliographie

- [1] A.J. Abbo and W. Sloan. An automatic load stepping algorithm with error control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:1737–1759, 1996.
- [2] P. Alart. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 76:83–108, 1997.
- [3] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92:353–375, 1991.
- [4] J.S. Arosa, A.I. Chahande, and J.k. Paeng. Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1485–1525, 1991.
- [5] M. Barboteu. *Contact, frottement et techniques de calcul parallele*. Thèse, Université Montpellier II, 1999.
- [6] K.J. Bathe. *Finite element procedure*. Prentice-Hall, 1996.
- [7] K.J. Bathe and P.A. Bouzinov. On the constraint function method for contact problems. *Computers & Structures*, 64(5-6):1069–1085, 1997.
- [8] T. Belytschko, W. Kam Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [9] T. Belytschko and M. O. Neal. Contact-impact by the piball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:547–572, 1991.
- [10] D.J. Benson and J.O. Hallquist. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78:141–163, 1990.
- [11] P. Breitkopf, A. Rassineux, and P. Villon. An introduction to moving least squares meshfree methods. *Revue européenne des éléments finis*, (7-8):1–50, 2002.
- [12] P. Chabrand, O. Chertier, and F. Dubois. Complementarity methods for multibody frictional contact problems in finite deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(5):553–578, 2001.
- [13] P. Chabrand and F. Dubois. Complementarity methods for multibody frictional contact problems in finite deformations. In *The 4<sup>th</sup> international ESAFORM conference on MATERIAL FORMING*, volume 1, pages 199–202, University of Liège, Belgium, april 23-25, 2001.

- [14] P. Chabrand, F. Dubois, and M. Raous. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical Computer and Modelling*, 28(4–8):97–108, 1998.
- [15] Z. Changming and J. Yongjie. The solution of frictional contact problems using a finite element-mathematical programming method. *Computers & Structures*, 52(1):149–155, 1994.
- [16] A. B. Chaudhary and K.J. Bathe. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. *Computers & Structures*, 24(6):855–873, 1986.
- [17] O. Chertier. *Contact et frottement entre solides déformables en grandes déformations*. Thèse, Université de la Méditerranée, 1997.
- [18] P. W. Christensen, A. Klarbring, J. S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(1):145–173, 1998.
- [19] P.G. Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle*. Masson, 1985.
- [20] P.G. Ciarlet. *Three dimensional elasticity*, volume 1 of *Mathematical elasticity*. North-Holland, 1988.
- [21] A. Curnier, Q.C. He, and A. Klarbring. Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. In M. Raous, M. Jean, and J.J Moreau, editors, *Contact mechanics*, pages 145–158. Plenum Press, 1995.
- [22] R. Diekmann, J. Hungershö, M. Lux, L. Taenzer, and J.M.Wierum. Efficient contact search for finite element analysis. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, Spain, september 11-14, 2000.
- [23] N. El-Abbasi, S. A. Meguid, and A. Czekanski. On the modelling of smooth contact surfaces using cubic splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4):953–967, 2001.
- [24] ZH.Q. Feng. 2d or 3d frictional contact algorithms and applications in a large deformation contact. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:409–416, 1995.
- [25] E. Feulvarch and R. Voltaire. Modélisation 3d d’un essai de frottement sur un élastomère. Rapport de projet de Spécialité, Ecole Nationale d’Ingenieurs de Saint-Etienne, Janvier 2002.
- [26] R. Fortunier. Mécanique des milieux continus. ENSM, centre SMS, juillet 2000.
- [27] L. Fourment, J. L. Chenot, and K. Mocellin. Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(9):1435–1462, 1999.
- [28] A.E. Giannakopoulos. The return mapping method for the integration of friction constitutive relations. *Computers & Structures*, 32(1):157–167, 1989.
- [29] B. Häggblad and G. Nordgren. Automatic load incrementation for rubber-like bodies in contact. *Computers & Structures*, 32(3/4):899–909, 1989.
- [30] A. Heege and P. Alart. A frictional contact element for strongly curved

- contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(1):165–184, 1996.
- [31] M.W. Heinstejn and T.A. Laursen. An algorithm for the matrix-free solution of quasistatic frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9):1205–1226, 1999.
- [32] Se Bin Im and Byung Man Kwak. Sensitivity analysis for automatic loading in frictional contact formulated by complementary. *Computers & Structures*, 46(2):355–364, 1993.
- [33] A. Klarbring. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:175–200, 1986.
- [34] A. Klarbring. Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 14(2):237–253, 1995.
- [35] A. Klarbring and G. Björkman. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers & Structures*, 50(3):1185–1198, 1988.
- [36] A. Klarbring and G. Björkman. Solution of large displacement contact problems with friction using newton’s method for generalised equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34:249–269, 1992.
- [37] G. Kloosterman, A.H. Van Den Boogaard, and J. Huétink. A variational regularisation approach to contact algorithms. In *The 4<sup>th</sup> international ESAFORM conference on MATERIAL FORMING*, volume 1, pages 195–198, University of Liège, Belgium, april 23-25, 2001.
- [38] G. Kloosterman, R. M. J. Van Damme, A. H. Van Den Boogaard, and J. Huétink. A geometrical-based contact algorithm using a barrier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(7):865–882, 2001.
- [39] G. Kloosterman, A.H. van den Boogaard, and J. Huetink. An efficient contact search algorithm. In M. Pietrzyk, Z. Mitura, and J. Kaczmar, editors, *The 5<sup>th</sup> international ESAFORM conference on MATERIAL FORMING*, pages 99–102, Cracow, Poland, april 14-17, 2002.
- [40] L. Krstulovic-Opara and P. Wriggers. Convergence studies for 2d smooth contact elements. In *European Conference Computational Mechanics*, Cracow, Poland, june 26-29, 2001.
- [41] L. Krstulovic-Opara, P. Wriggers, and J. Korelc. A  $c^1$ -continuous formulation for 3d finite deformation frictional contact. *Computational Mechanics*, 29(1):27–42, July 2002.
- [42] L. Krstulovic-Opara and Peter Wriggers. Convergence studies for 3d smooth frictional contact elements based on the quartic bézier surfaces. In *3<sup>d</sup> Contact Mechanics International Symposium*, Praia da Consolação, Peniche, Portugal, june 17-21, 2001.
- [43] L. Krstulovic-Opara, Peter Wriggers, and J. Korelc. Symbolically generated 3d smooth polynomial frictional contact element based on the quartic bézier



- surfaces. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, Spain, september 11-14, 2000.
- [44] B. M. Kwak and S. S. Lee. A complementarity problem formulation for two-dimensional frictional contact problems. *Computers & Structures*, 28(4), 1988.
- [45] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer Verlag, 2002.
- [46] T.A. Laursen and B.N. Maker. An augmented lagrangian quasi-newton solver for constrained non linear finite element applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3571–3590, 1995.
- [47] T.A. Laursen and V.G. Oancea. Automation and assessment of augmented lagrangian algorithms for frictional contact problems. *Journal of Applied Mechanics*, 61:956–963, 1994.
- [48] T.A. Laursen and J.C. Simo. Algorithmic symetrisation of coulomb frictional problems using augmented lagrangians. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108:133–146, 1993.
- [49] T.A. Laursen and J.C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3451–3485, 1993.
- [50] S.H. Lee. Rudimentary consideration for adaptive gap/friction element based on the penalty method. *Computers & Structures*, 47(6):1043–1056, 1993.
- [51] W.N. Liu, G. Metschke, and H.A. Mang. A note on the algorithmic stabilization of 2d contact analyses. In L. Gaul and C.A. Brebbia, editors, *Computational Methods in Contact Mechanics*, pages 231–240. Wessex Institute of Technology, WITpress, 1999.
- [52] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. L’approximation diffuse. *C.R. Acad. Sci. Paris , Série II*, 313:293–296, 1991.
- [53] B. Noor-Omid and P. Wriggers. A note on the optimum choice for the penalty parameters. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 3:581–585, 1986.
- [54] M. Oldenburg and L. Nilsson. The position code algorithm for contact searching. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:359–386, 1994.
- [55] J. Oudin, J.-M. Rigaut, J.-C. Gelin, and Y. Ravalard. Lois de contact et de frottement. Modèles et méthodes numériques en grandes déformations plastiques, Applications à la mise en forme des métaux et au calcul des structure, Institut pour la Promotion des Sciences de l’Ingénieur, 25–27 avril 1989.
- [56] V. Padmanabhan and T.A. Laursen. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37(3):173–198, 2001.
- [57] P. Papadopoulos, R. E. Jones, and J. Solberg. A novel finite element formulation for frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:2603–2617, 1995.

- [58] P. Papadopoulos and R. L. Taylor. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94:373–389, 1992.
- [59] P. Papadopoulos and R.L. Taylor. A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems. *Computers & Structures*, 46:1107–1118, 1993.
- [60] H. Parisch. A consistent tangent stiffness matrix for three dimensional non linear contact analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(1803–1812), 1989.
- [61] D. Peric and D.R.J. Owen. Computational model for 3d contact problems with friction based on the penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1289–1309, 1992.
- [62] G. Pietrzak. *Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems*. Thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [63] G. Pietrzak and A. Curnier. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangian treatment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177:351–381, 1999.
- [64] M. Raous. Applications, comparaison de méthodes et extension à un modèle adhésif/frottant. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 15–18 novembre 1999.
- [65] M. Raous. Modèles constitutifs pour le contact et le frottement. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 15–18 novembre 1999.
- [66] M. Raous. Méthodes de résolution numérique. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 15–18 novembre 1999.
- [67] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177:383–399, 1999.
- [68] M. Raous, P. Chabrand, and F. Lebon. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 7(1):111–128, 1988.
- [69] A. Rassineux. Maillage, sans maillage. Université de Technologie de Compiègne, Habilitation à diriger des recherches, 2002.
- [70] A. Rassineux, J.-M. Savignat, O. Stab, and P. Villon. Remaillage de surfaces par interpolation diffuse locale de type hermite. In *Actes du 4<sup>ième</sup> colloque national en calcul des structures*, pages 291–296, Giens, Mai 1999. Teknea.
- [71] A. Rassineux, P. Villon, J.-M. Savignat, and O. Stab. Surface remeshing by local

- hermite diffuse interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1):31–49, 2000.
- [72] F. Sidoroff. Mécanique et thermodynamique des milieux continus. Cours de tronc commun de l'école doctorale MEGA, Ecole centrale de Lyon, 2000.
- [73] J.C. Simo and T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42(1):97–116, 1992.
- [74] C. Staub. *Modélisation dynamique des procédés de forgeage*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998.
- [75] SYSTUS. User's manual. Technical report, ESI Software, 2000.
- [76] R. L. Taylor and P. Papadopoulos. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:2123–2140, 1993.
- [77] Bo R. Torstenfelt. An automatic incrementation technique for contact problems with friction. *Computers & Structures*, 19(3):393–400, 1994.
- [78] Sheng Ping Wang and Eiji Nakamachi. The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(19):3665–3685, 1997.
- [79] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(4):1–49, 1995.
- [80] P. Wriggers, L. Krstulovic-Opara, and J. Korelc. Smooth  $c^1$ -interpolations for two-dimensional frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(12):1469–1495, 2001.
- [81] P. Wriggers, T. Vu Van, and E. Stein. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures*, 37(3):319–331, 1990.
- [82] G. Zavarise and P. Wriggers. A segment-to-segment contact strategy. *Mathematical computer and modelling*, 28(4-8):497–515, 1998.
- [83] G. Zavarise, P. Wriggers, and B.A. Schrefler. A method for solving contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3):473–498, 1998.
- [84] Z.H. Zhong. *Finite element procedures for contact-impact problems*. Oxford Sciences Publications, 1993.
- [85] Z.H. Zhong and L. Nilsson. A contact searching algorithm for general contact-impact problems. *Computers & Structures*, 33(1), 1989.
- [86] Z.H. Zhong and L. Nilsson. A contact searching algorithm for general 3-d contact-impact problems. *Computers & Structures*, 34(2), 1990.
- [87] Z.H. Zhong and L. Nilsson. Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. *Computers & Structures*, 52(2), 1994.

## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur J.M. BERGHEAU

et les rapports de

Monsieur P. CHABRAND

Professeur des Universités - Laboratoire d'Aérodynamique et de Biomécanique du Mouvement LABM -  
UMSR 2164 du CNRS et de l'Université de la Méditerranée - Parc Scientifique et Technologique de  
Luminy - 163, av. de Luminy - Case Postale 918 - 13288 MARSEILLE Cedex 09

et de

Monsieur J.M. ROELANDT

Professeur des Universités - Laboratoire ROBERVAL - LMR/UMR6066 - Université de Technologie de  
Compiègne - Centre de Recherches de Royallieu - BP 20529 - 60205 COMPIEGNE Cedex

**Mademoiselle CHAMORET Dominique**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL et ACOUSTIQUE (MEGA)**

Fait à Ecully, le 28 novembre 2002

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
Le Directeur des Etudes



F. LEBOEUF



## Résumé

**Mots clés** : contact, méthode des éléments finis, méthode implicite, régularisation de surface, approximation diffuse, élément de contact 3D diffus, méthode de pénalité, incrément de chargement, ajustement automatique.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (UMR 5513 CNRS/ECL/ENISE) et la société ESI Software avec pour objectif de développer, dans une approche implicite, des algorithmes de contact susceptibles de s'adapter à la plupart de situations rencontrées dans l'industrie. Pour ce faire nous proposons trois nouveaux algorithmes concernant la régularisation des surfaces de contact, l'adaptation du paramètre de pénalité et l'ajustement de l'incrément de chargement. Le traitement numérique des problèmes de contact engendre de nombreuses difficultés. Ces problèmes viennent des fortes non-linéarités géométriques et matérielles. En utilisant la méthode des éléments finis, l'interface de contact est représentée par une surface seulement différentiable par morceaux. L'approche que nous proposons consiste à régulariser la surface de contact en utilisant la technique d'approximation diffuse. Pour ce qui concerne le traitement du contact normal, nous avons choisi d'utiliser la méthode de pénalité pour son efficacité et sa simplicité de mise en œuvre. Nous proposons une stratégie originale de détermination d'un paramètre optimal qui repose sur une notion d'interpénétration admissible entre les corps en contact. Le dernier algorithme proposé concerne l'ajustement de l'incrément de chargement. L'idée principale de la stratégie que nous proposons est de limiter le nombre de changements de statuts de contact sur un pas de chargement.

## Abstract

**Key words** : Contact, Finite Element Method, Implicit Method, Smooth Contact Surface, Diffuse Approximation, Penalty Method, Load Step, Automatic Adjustment.

This work has been done in collaboration between the Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (UMR 5513 CNRS/ECL/ENISE) and the company ESI Software. The aim is to develop the modelling of 3D contact in an implicit approach and to implement algorithms likely to adapt to most of situations met in industry. With this intention we propose three new algorithms concerning the regularization of contact surfaces, the adaptation of the penalty parameter and the adjustment of the load step.

The numerical treatment of contact problems generates many difficulties. These problems come from strong geometric and material nonlinearities. Using the finite element method, the contact interface is represented by a surface only piecewise differentiable. The strategy we develop determines a smooth contact surface by using only the data of the nodes of the initial finite element mesh thanks to the technique of diffuse approximation.

We have chosen to use the penalty method to take into account contact constraints but the optimum choice of the penalty parameter is often very difficult because it depends on the local rigidity of the structure. We propose an original strategy to determine an optimal parameter based on the notion of acceptable interpenetration between bodies in contact.

The last algorithm proposed relates to the adjustment of the load step. The main idea of the method we develop is to limit the number of changes of contact status in each load step.

