

Thèse de l'Université de Lyon

délivrée par l'École Centrale de Lyon

Spécialité : Mécanique des fluides

Soutenue publiquement le 07/11/2014

À l'École Centrale de Beijing par

Mr. Pascal ZILLE

Titre de la thèse :

Modèles multi-échelles pour l'analyse d'images : application à la turbulence

École Doctorale de Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Composition du jury

Ronan	FABLET	Pr. Télécom Bretagne, Brest	- <i>Rapporteur</i>
GuiXiang	CUI	Pr. Tsinghua University, Beijing	- <i>Rapporteur</i>
Étienne	MÉMIN	DR INRIA, Rennes	- <i>Examineur</i>
Serge	SIMOENS	DR CNRS, LMFA, Lyon	- <i>Examineur</i>
Le	FANG	Pr. assistant, Ecole Centrale, Beijing	- <i>Examineur</i>
Liang	SHAO	DR CNRS, LMFA, Lyon	- <i>Directeur de thèse</i>
Thomas	CORPETTI	DR CNRS, OSUR LETG, Rennes	- <i>Co-directeur de thèse</i>

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Ronan Fablet et Guixiang Cui pour avoir apporté leurs analyses approfondies et constructives sur ce travail de thèse en acceptant d'en être les rapporteurs. Je tiens également à remercier de manière chaleureuse Serge Simoens pour avoir accepté de présider ce jury de thèse, ainsi qu'Etienne Mémin et Le Fang pour s'être penchés avec tant d'attention sur ces travaux.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Liang Shao pour son soutien, son enthousiasme et le grand intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Un énorme merci à Thomas Corpetti pour ces trois années qui ont été un réel plaisir. Son enthousiasme, son engagement, et son très haut niveau au babyfoot me laissent penser qu'il aurait été difficile d'être mieux encadré.

Je remercie par la même occasion toutes les personnes avec qui j'ai pu travailler au cours de cette thèse, qu'ils soient issus du LMFA, du LIAMA ou encore du COSTEL. Par peur de manquer de place, je ne citerai pas explicitement tous les prénoms, mais ils se reconnaîtront sans peine.

Viennent ensuite les remerciements plus personnels. Un grand merci à mes parents pour leur soutien continu tout au long de ces (nombreuses) années d'étude. Je remercie également mes grands parents, frères et soeurs et leurs conjoints, le petit Adrien, et le reste des familles Zille et Desindes.

Enfin, merci à tous les autres qui m'ont entouré et aidé durant ces trois dernières années. Merci pour ces moments passés ensemble, pour ces voyages, ces expériences.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Introduction	1
1 Généralités sur les mouvements turbulents	4
1.1 Introduction	4
1.2 Représentation du mouvement fluide	4
1.2.1 Niveaux de description	4
1.2.2 Représentation Eulérienne/Lagrangienne	5
1.2.3 Equations fondamentales pour un écoulement incompressible	7
L'équation de continuité :	7
Les équations de Navier-Stokes :	8
L'équation de transport scalaire :	9
Adimensionnement des équations :	10
1.3 Physique de la turbulence	11
1.3.1 Notion d'échelle	11
1.3.2 Caractérisation de la turbulence	12
1.3.3 Turbulence homogène isotrope	13
1.3.4 Cascade énergétique	13
1.4 Mécanique des fluides numérique	17
1.4.1 Contexte	17
1.4.2 Echelle de temps et d'espace	18
1.4.3 Simulation Numérique Directe (DNS)	19
1.4.4 Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)	20
1.4.5 Simulation des grandes échelles (LES)	22
Séparation des échelles :	22
Équations LES :	24
Modèles de sous maille :	24
1.5 Discussion	25
2 Analyse d'images et prise en compte d'a priori physiques	27
2.1 Contexte	27
2.2 Problèmes inverses	28

2.2.1	Introduction	28
2.2.2	Formalisme	29
	Cas général :	29
	Ajout d'une contrainte de régularité :	30
	Cas non linéaire :	31
2.3	Approches Multi-échelles/Multi-résolution	32
2.3.1	Terminologie	32
2.3.2	Méthodes multi-résolution	34
2.3.3	Exemple d'application en présence d'opérateurs non linéaires	35
2.4	Assimilation de données variationnelle	36
2.4.1	Introduction	36
2.4.2	Formalisme	38
2.4.3	Consistance des fines échelles	39
2.5	Discussion	39
3	Estimation du flot optique : état de l'art	40
3.1	Estimation du mouvement pour la vision par ordinateur	40
3.1.1	L'équation du flot optique	42
	Conservation de la luminance :	42
	Le problème de l'ouverture :	43
3.1.2	Approches locales	45
	Approche par corrélation :	45
	Approche de Lucas Kanade :	46
3.1.3	Approches globales	47
	Approche fondatrice de Horn et Schunck :	47
	Préservation des discontinuités :	48
3.1.4	Approches multi-échelles	50
3.1.5	Approches multi-échelles pour l'estimation incrémentale du flot optique	51
3.1.6	Discussion	52
3.2	Estimation du mouvement pour la physique	53
3.2.1	Position du problème	53
3.2.2	Termes d'observation	54
3.2.3	Termes de régularisations adaptés aux fluides	56
	Formulations de type divergence-rotationnel :	56
	Modèle dynamique :	58
3.3	Discussion	59
4	Termes d'observations basés sur les interactions entre échelles pour l'estimation du flot optique	60
4.1	Introduction	60
4.2	Approche multi-échelle pour l'estimation du flot optique	61
4.2.1	Motivations	61
4.2.2	Estimation multi-échelles du mouvement	62
4.3	Formulation sous maille de l'OFCE	64

4.4	Extension de l'OFCE au cas multi-échelles	67
4.4.1	Un nouveau terme de données basé sur les interactions inter- échelles	67
4.5	Application à l'estimation de mouvement	69
4.5.1	Pas d'a priori sur les liens inter-échelles : procédure two-steps	69
4.5.2	Existence d'a priori pour modéliser les liens inter-échelles . .	70
	Terme de sous maille basé sur la diffusion isotropique :	70
	Terme de sous maille de type Smagorinsky :	73
4.6	Résultats expérimentaux	75
4.6.1	Conditions expérimentales	75
	Notations :	76
	Mesures d'erreur :	76
4.6.2	Aucune connaissance a priori des liens inter-échelles	76
4.6.3	Connaissance a priori des liens inter-échelles	81
	Images PIV :	82
	Images de scalaires passifs :	86
4.7	Discussion et conclusion	88
5	Super résolution d'images : contexte et principes	90
5.1	Introduction	90
5.2	Résolution d'une image	91
5.3	Principe général	92
5.3.1	Approches principales	92
5.3.2	Modèle d'observation image	93
5.4	Quelques méthodes de super-résolution	94
5.4.1	Approche fréquentielle	94
5.4.2	Approche spatiale	96
5.4.3	Interpolation et déconvolution	97
5.4.4	Autres méthodes	98
5.5	Discussion	98
6	Super résolution d'images de scalaire passif	100
6.1	Introduction	100
6.2	Cadre général de super-résolution avec a priori physiques	102
6.2.1	Equation LES pour le transport d'un scalaire passif	102
6.2.2	Relation entre le niveaux d'échelle et résolution de la grille pixelique	103
	Idée générale :	104
	Formalisme :	104
6.3	Modèles d'estimation des fines échelles	107
6.3.1	Estimation des échelles représentées	107
6.3.2	Estimation des échelles <i>non-représentées</i>	108
	Modèle de similarité d'échelle :	108
	Modèle de production par advection :	109

	Cas de séquences d'images : intégration d'a priori temporels.	111
6.4	Résultats Expérimentaux	112
6.4.1	Conditions expérimentales	113
6.4.2	Séquence synthétique (DNS)	113
	Erreur de reconstruction relative :	114
	Histogramme des incréments :	115
	Comparaison des fonctions de structure :	115
	Utilisation des données reconstruites pour l'estimation du mouvement :	117
	Bilan des expériences :	118
6.4.3	Images réelles	118
6.5	Conclusion	119
7	Approche multi-résolution	122
7.1	Introduction	122
7.2	Contributions de ce chapitre	124
7.3	Assimilation de données variationnelle : combiner différentes sources d'informations	125
	7.3.1 Principes et notations	125
	7.3.2 Minimisation de la fonction de coût	127
7.4	Contrôle optimal pour l'estimation multi-résolution	128
	7.4.1 Opérateurs de transferts inter-grilles et modèle dynamique	128
	7.4.2 L'estimation multi-résolution comme un problème d'assimilation de données	130
	7.4.3 Approche pyramidale dans un formalisme 4DVAR	131
	7.4.4 Matrice de covariance des erreurs a priori	132
7.5	Application à l'estimation multi-résolution du mouvement	132
	7.5.1 Modèle d'observations	133
	7.5.2 Matrices de covariance	134
	7.5.3 Modèles de relation inter-résolutions	136
7.6	Résultats expérimentaux	137
	7.6.1 Conditions expérimentales	137
	7.6.2 Résultats & commentaires	139
7.7	Conclusion	142
8	Conclusions et perspectives	143
	Modèles avancés pour l'approximation des fines échelles :	145
	Modèles de régularisation sous maille :	145
	Adaptation de la méthode à la composante de mouvement :	146
	Combinaison des deux méthodes :	147
	Vers des modèles dynamiques avancés :	147
	Incorporation de modèles multi-échelles :	148
	Quelques mots pour conclure	149

A Présentation de l'algorithme 4DVAR	150
A.1 Formalisme	150
A.2 Formulation adjointe	152
Bibliographie	154

Introduction

Ce chapitre d'introduction générale positionne ce travail de thèse qui a pour cadre l'analyse d'images d'écoulements fluides, en se focalisant notamment sur les interactions multi-échelles. Nous commencerons par brièvement présenter le contexte de ces travaux, puis nous détaillerons dans un deuxième temps l'organisation générale de ce document.

Contexte

L'analyse et la compréhension des phénomènes turbulents constitue un problème important du domaine de la physique. On observe des écoulements turbulents dans nombre de domaines d'étude : sciences atmosphériques, aéronautique, hydraulique, ingénierie chimique ou nucléaire, sciences environnementales, océanographie, astrophysique etc. En réalité, la majorité des écoulements fluides rencontrés dans la nature sont turbulents. Cependant, le « problème de la turbulence », i.e. la description détaillée des phénomènes turbulents en présence d'écoulements fluides, reste à ce jour un des problèmes majeurs non résolus de la physique. Celui-ci a été étudié depuis plusieurs siècles par la communauté scientifique, or il est toujours impossible de prévoir avec fiabilité le comportement de nombre d'écoulements turbulents, parfois même pour des configurations qui paraissent simples a priori. Ainsi, l'étude de la turbulence représente un véritable défi intellectuel dont le champ d'application possède une portée gigantesque.

Les écoulements fluides turbulents possèdent un fort caractère multi-échelles : on y observe la présence d'une gamme étendue d'échelles spatiales et temporelles fortement couplées les unes avec les autres. La simulation de tels écoulements à travers l'utilisation de méthodes numériques se révèle ainsi rapidement prohibitive

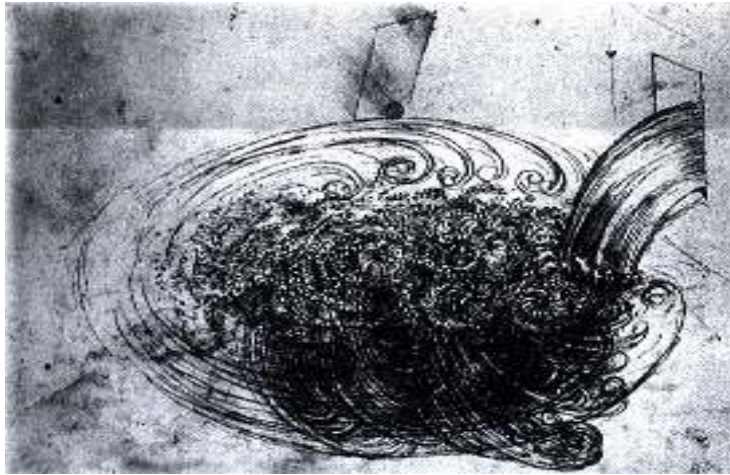


FIGURE 1: **Croquis** de Da Vinci représentant un écoulement turbulent.

en termes de volume de calculs car un niveau de précision particulièrement élevé est alors nécessaire pour capturer de manière satisfaisante la totalité des phénomènes en présence. Pour cette raison, de nombreux modèles approximant le comportement des plus fines échelles et permettant ainsi de réduire de manière significative la complexité globale du problème ont été proposés par la communauté scientifique. Ce caractère multi-échelles et les modèles associés seront, comme nous le verrons par la suite, particulièrement utiles dans un contexte d'analyse d'images.

L'acquisition d'images (numériques, satellites, *Particle Image Velocimetry*, infrarouge, etc.) permet l'obtention de champs de données denses associés à un écoulement donné. En conséquence, un grand nombre de méthodes ont été proposées afin d'utiliser ce type d'information pour l'analyse d'écoulements fluides par la communauté du traitement d'images. Bien souvent, ces méthodes se basent sur des approches multi-résolution et/ou multi-échelles qui sont pour la plupart propres au domaine de la vision par ordinateur. Une problématique intéressante est alors de combiner les différentes approches multi-échelles issues des deux communautés de la mécanique des fluides turbulents et du traitement d'image.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons ainsi à l'étude d'écoulements turbulents à partir de données images dans un contexte multi-échelles : notre but est de combiner de manière optimale la donnée image avec des modèles physiques issus de la littérature afin de construire de nouvelles méthodes d'estimation. Deux problèmes classiques ont été traités dans ces travaux : l'estimation de champs de mouvements dans les séquences d'images, et l'amélioration de la qualité d'images associées à un champ scalaire passif. Pour chacune de ces problématiques, nous proposons une méthode d'estimation dont le but est d'améliorer la prise en compte des fines

échelles de la solution généralement négligées ou inconnues.

Organisation du document

Ce travail de thèse se divise en 8 chapitres. Le **chapitre 1** introduit les éléments de *description et d'analyse des écoulements turbulents*, ainsi que les principales approches proposées par la communauté scientifique pour leur étude. Ce chapitre introduit ainsi les bases nécessaires de mécanique des fluides pour la compréhension de ce document. Le **chapitre 2** introduit brièvement *le contexte de l'analyse d'images pour les phénomènes physiques* à travers deux problématiques complémentaires : la résolution des problèmes dits « inverses » à partir d'observations images, puis l'inclusion de contraintes temporelles au sein de ces derniers. Nous y discuterons de manière plus détaillée du cadre de ce travail de thèse et de sa place au sein d'une telle problématique.

Nous présentons dans le **chapitre 3** *le formalisme et les méthodes pour l'estimation du mouvement dans les séquences d'images*, et donnerons certains détails en ce qui concerne l'estimation de mouvements fluides. Nous proposerons ensuite au sein du **chapitre 4** plusieurs *modèles d'observation* permettant l'estimation de champs de mouvements dans un *cadre multi-échelles*. Ces modèles ont pour but de généraliser les approches classiques en permettant la prise en compte, à chaque niveau d'échelle, d'informations correspondant aux échelles plus fines habituellement négligées.

Nous tournerons ensuite notre attention vers le problème de *la super-résolution d'images fluides*, et plus particulièrement de champs scalaires passifs. Ainsi, dans le **chapitre 5**, nous discutons de ce problème de *la super-résolution en vision par ordinateur* et introduisons certaines *méthodes de reconstruction* associées. Puis, nous proposons au **chapitre 6** une méthode originale visant à améliorer la qualité d'images de scalaire passif transporté par un champ de mouvement turbulent.

Dans le **chapitre 7**, nous proposons d'explorer certains aspects de *l'estimation multi-résolution* à partir de séquence d'images : nous y introduisons une nouvelle méthode de résolution permettant de *généraliser l'approche pyramidale classique* et dont le but est de contrôler l'échange d'information entre les différents niveaux d'échelles.

Enfin, les conclusions et perspectives de ces travaux seront présentés au **chapitre 8**.

Chapitre 1

Généralités sur les mouvements turbulents

1.1 Introduction

Ce chapitre introduit les éléments de description et d'analyse du mouvement d'une particule fluide transportée par un champ de vitesse. Nous présenterons dans un deuxième temps les équations fondamentales de la mécanique des fluides qui permettent de décrire l'évolution temporelle de ces particules. Enfin, nous aborderons de manière succincte les propriétés physiques de la turbulence puis les différents modèles de simulation proposés par la communauté scientifique pour l'analyse des écoulements turbulents.

1.2 Représentation du mouvement fluide

1.2.1 Niveaux de description

L'étude d'un fluide, que celui-ci soit à l'état gazeux ou liquide, peut être réalisée à plusieurs niveaux de description. Bien souvent, sa dynamique est décrite en utilisant une approche du type mécanique continue : le fluide en question est caractérisé par les propriétés d'un agrégat local de molécules individuelles. L'échelle de représentation de ces molécules individuelles est de l'ordre de $L_{micro} \approx 10^{-20}m$: à de tels niveaux, celles-ci sont perpétuellement en mouvement, qui est lui même

soit avec il est désigné comme un mouvement Brownien. Lorsque l'on parle dans la suite de « particule fluide », nous faisons donc référence à un volume infinitésimally petit du fluide en question, mais qui reste cependant grand comparé à l'espace inter-moléculaire. On définit ainsi une échelle macroscopique $L_{macro} \gg 10^{-6}m$ à partir de laquelle les quantités physiques d'un écoulement peuvent être considérées comme continues. Ces différents niveaux d'échelles sont illustrés en Fig. 1.1.

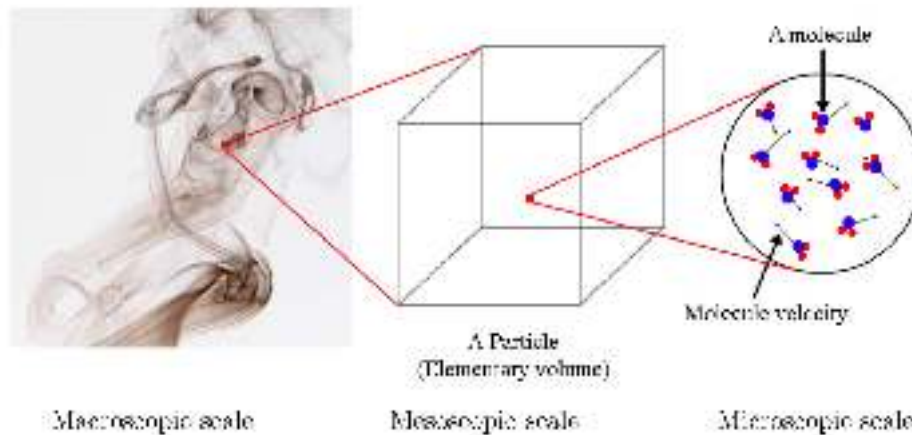


FIGURE 1.1. Echelles de représentation d'un fluide en mouvement.

Dans la suite, nous introduisons les équations fondamentales décrivant la dynamique temporelle de ces particules fluides dans un contexte Eulerien.

1.2.2 Représentation Eulerienne/Lagrangienne

Il existe deux principales approches permettant de représenter un fluide en mouvement. La première est connue sous le nom d'approche **Lagrangienne**, dans laquelle chaque particule est suivie de manière individuelle. Pour un écoulement (x_0, y_0, z_0) au temps t_0 , on s'intéresse donc à l'évolution de ses trois fonctions de coordonnées au cours du temps :

$$\begin{cases} x(t) = f(x_0, y_0, z_0, t) \\ y(t) = g(x_0, y_0, z_0, t) \\ z(t) = h(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

f , g et h décrivent l'évolution de chacune des composantes spatiales x , y et z . Cette situation est illustrée en Fig. 1.2

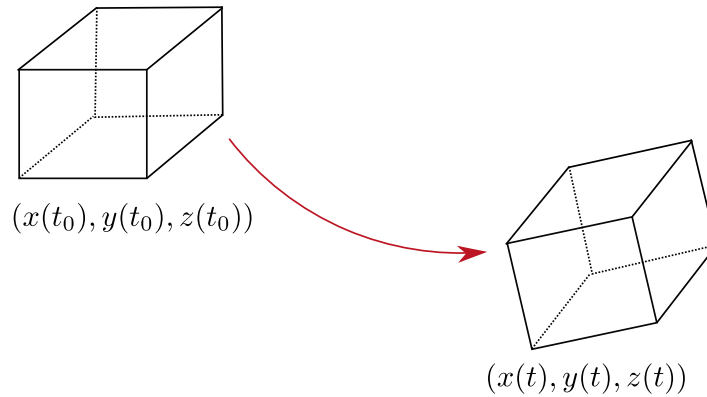


FIGURE 1.2: **L'approche Lagrangienne** revient à suivre le déplacement d'une particule individuelle donnée (représentée par un pavé) au cours du temps.

La seconde approche est qualifiée d'**Eulerienne** : on ne suit plus une particule de manière individuelle mais l'observateur conserve une position fixe et décrit l'évolution du fluide en chaque point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ appartenant à un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ préalablement établi. C'est cette approche qui sera utilisée dans ce document car elle convient très bien à l'étude de données images. Elle permet en effet d'analyser l'évolution d'un champ de vitesses \mathbf{V} pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ tel que :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

où u, v et w sont les trois composantes de \mathbf{V} . Cette situation est illustrée ci dessous (voir Fig. 1.3).

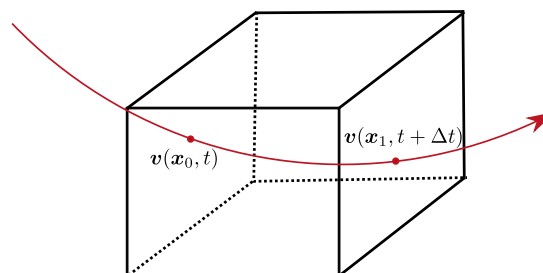


FIGURE 1.3: **L'approche Eulerienne** se concentre sur un voisinage fixe du domaine (ici représenté par un pavé) que les particules fluides traversent au cours du temps

1.2.3 Equations fondamentales pour un écoulement incompressible

Dans cette partie nous nous focalisons sur les lois de la mécanique des fluides représentées par des équations aux dérivées partielles dans le cadre d'une approche Eulérienne. Des formulations équivalentes dans le cadre Lagrangien existent, mais étant donné notre domaine d'étude basé sur l'analyse d'images, nous ne les abordons pas ici. Le lecteur pourra trouver dans l'ouvrage de Batchelor [1] une dérivation détaillée de ces équations.

L'équation de continuité : L'équation de continuité est la conséquence d'un principe physique bien connu : si la forme d'un volume fluide élémentaire peut varier entre deux moments proches t et $t + dt$, sa quantité de matière reste inchangée. À l'instant t , la masse m d'un fluide de densité ρ est telle que :

$$m(t) = \int_{\tau(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} ,$$

où $\tau(t)$ est un volume de contrôle donné au temps t . L'hypothèse de conservation de la masse pouvant s'exprimer par $\frac{dm}{dt} = 0$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0 .$$

En utilisant le théorème de transport de Reynolds et l'expression de la divergence d'un champ, on obtient :

$$\int_{\tau(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \right] d\mathbf{x} = 0 , \quad (1.3)$$

où ∇ est l'opérateur de gradient. L'expression (1.3) étant valable pour tout volume de contrôle $\tau(t)$, celle-ci doit être vérifiée en chaque point du domaine. On a donc, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) est appelée l'équation de continuité. Dans le cas où l'écoulement étudié est incompressible, i.e. si sa masse volumique est constante au cours du temps, la relation (1.4) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.5)$$

Les équations de Navier-Stokes : Le modèle le plus complet permettant de décrire l'évolution temporelle d'un écoulement fluide incompressible s'appuie sur les équations de Navier-Stokes. Ces dernières sont établies à partir des lois Newtoniennes du mouvement et relient, en chaque point de l'écoulement, la vitesse \mathbf{V} et la pression p . On obtient dans le cas général un système avec quatre inconnues : les trois composantes du vecteur vitesse $\mathbf{V} = (u, v, w)$ et la composante de pression p . Ces équations ne sont pas linéaires (elles présentent en effet un terme quadratique), et on ne peut, dans la plupart des cas, trouver de solution analytique. Pour un écoulement incompressible, on ajoute la contrainte de conservation de masse (1.5). Le système complet est donc de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

ρ étant la densité du fluide et ν son coefficient de viscosité dynamique. Deux types de termes relatifs à la vitesse du fluide interviennent dans les équations de Navier-Stokes :

- le terme d'**inertie** $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$, non linéaire, est responsable de la création d'interactions pouvant générer des phénomènes tels que la turbulence aux différentes échelles spatiales. Plus la vitesse de l'écoulement est élevée, plus ce terme aura d'importance dans l'équation d'évolution ;
- le terme de **diffusion** $\Delta \mathbf{V}$, linéaire, modélise la viscosité du fluide au sein de l'écoulement étudié.

Le comportement d'un écoulement fluide dépend du rapport entre sa vitesse et sa viscosité. De manière équivalente, il dépend du rapport entre le terme d'inertie et le terme de diffusion. Si ce dernier est prépondérant, l'écoulement sera laminaire, c'est-à-dire que deux particules voisines auront un mouvement similaire et resteront proches l'une de l'autre au fil du temps. A contrario, si le terme d'advection domine, des structures tourbillonnaires turbulentes apparaîtront au fil du temps. Comme nous le verrons dans la suite, l'étude du nombre de Reynolds d'un écoulement permet de caractériser ces différents comportements.

L'équation de transport scalaire : On s'intéresse dans cette section au transport d'une quantité scalaire passive par un champ turbulent. On appelle scalaire passif une substance transportée par un écoulement et n'ayant aucun effet dynamique sur ce dernier. Un colorant dans de l'eau, un polluant dans une rivière, de la fumée s'échappant d'une cigarette sont des exemples de scalaires passifs. Lors du transport d'une telle substance, un phénomène de diffusion apparaît bien souvent. Le principe de diffusion a été formulé empiriquement par Fourier (en lien avec ses travaux sur l'équation de la chaleur) puis prouvé au 20ème siècle par Einstein. Celui-ci se résume simplement de la manière suivante : les particules des zones à forte concentration ont tendance à migrer vers les zones à plus faible concentration. Ainsi, un champ scalaire passif ϕ transporté par un champ turbulent \mathbf{V} est soumis à un phénomène d'advection-diffusion suivant l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\phi(\mathbf{x}, t)\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) - D\Delta\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.7)$$

où D est le coefficient de diffusion moléculaire (d'unité $m^2.s^{-1}$). Dans le cas incompressible, la relation (1.7) devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t) - D\Delta\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.8)$$

Par analogie avec l'équation de Navier-Stokes (1.6), on distingue deux types d'effets :

- un effet advectif issu du terme $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}, t)$: le champ scalaire est transporté par \mathbf{V} ;

— un effet diffusif venant du terme de laplacien $-D\Delta\phi(\mathbf{x}, t)$.

Dans la prochaine section, nous discutons de la manière d'adimensionner ces différentes équations : cela permet de s'affranchir d'un choix d'unités, et facilite la comparaison de deux systèmes de tailles différentes.

Adimensionnement des équations : Lors de l'étude d'une équation physique, il est souvent préférable de procéder à son adimensionnement. Il est ainsi possible d'adimensionner les équations (1.5), (1.6) et (1.8) en introduisant trois échelles caractéristiques de vitesse V_c , de longueur L_c et de temps T_c qui dépendent de l'écoulement étudié¹. On peut alors définir de nouvelles variables adimensionnées comme suit :

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_c}, \quad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{V_c}, \quad t^* = \frac{t}{T_c}. \quad (1.9)$$

Réinjecter ces changements de variables permet d'obtenir, pour la conservation de la masse (1.5), la relation suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.10)$$

Pour l'équation de Navier-Stokes incompressible (1.6), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p^*(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) + f^*(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où $Re = \frac{V_c^* L_c^*}{\nu}$ est le nombre de Reynolds. C'est un paramètre adimensionnel qui traduit le rapport entre les forces d'inertie et les effets de viscosité. Si ce nombre est petit, alors les effets visqueux sont prédominants et on est dans un régime de Stokes, i.e. un régime « lent ». À l'inverse, si le nombre de Reynolds est grand, les forces

1. A titre d'exemple, lors de l'étude d'un écoulement au sein d'un cylindre, on peut prendre comme échelle caractéristique de longueur le diamètre du cylindre en question.

d'inertie sont prépondérantes et on pourra observer l'apparition de turbulence. Pour l'équation de transport scalaire (1.8), l'adimensionnement devient :

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi^*(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{ReSc} \Delta \phi^*(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.12)$$

où Sc est le nombre de Schmidt, i.e. le ratio entre les coefficients de viscosité et de diffusivité. Dans la suite, nous considèrerons toujours ces équations adimensionnées et omettrons le symbole « * » pour plus de clarté. Intéressons-nous à présent à certaines caractéristiques physiques des écoulements turbulents.

1.3 Physique de la turbulence

Dans cette section, nous introduisons certains concepts généraux permettant de décrire la turbulence : nous aborderons tout d'abord la notion d'échelle puis introduirons certaines descriptions fondamentales qui sont la base de la plupart des modèles de simulation de turbulence actuels.

1.3.1 Notion d'échelle

On peut se représenter un champ de mouvement turbulent comme la superposition d'un écoulement d'ensemble (ou moyen) et de tourbillons ou perturbations (filaments, etc.) dont les géométries peuvent être complexes et les comportements instables (voir Fig. 1.4). Ces structures tourbillonnaires ont des diamètres et des durées de vie parfois très hétérogènes. On qualifiera de **grandes échelles** les structures correspondant à de gros tourbillons dont la durée de vie et le diamètre sont respectivement plus grands que l'échelle de temps et la taille caractéristique du phénomène étudié. À l'inverse, on parlera de **petites échelles** pour qualifier les petits tourbillons dont la durée de vie est courte et le diamètre est petit. Cela sera formalisé dans la suite lorsque nous présenterons l'approche LES (*Large Eddy Simulation*, cf. section 1.4.5).

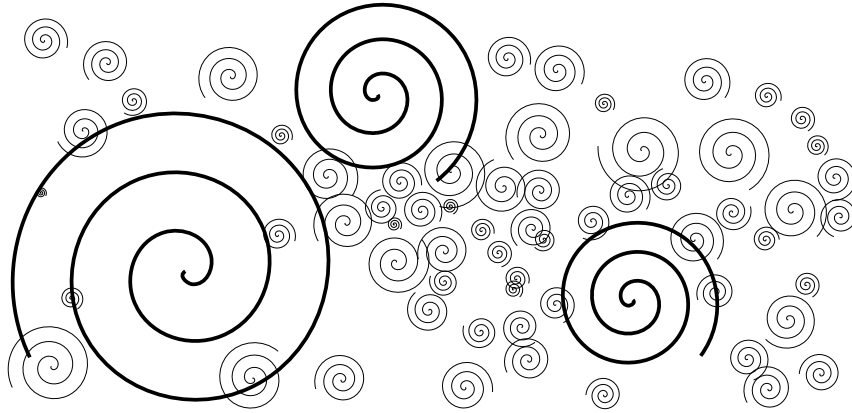


FIGURE 1.4: **Illustration schématique** d'un écoulement turbulent. On observe la présence d'une multitude de tourbillons (représentés par des spirales) de tailles variables.

1.3.2 Caractérisation de la turbulence

La majorité des écoulements présents dans la nature sont à caractère turbulent : flot sanguin dans les artères, courants atmosphériques et océaniques, écoulement autour d'une aile d'avion, etc. Comprendre les mécanismes les gouvernant est en conséquence de première importance, et constitue encore de nos jours un véritable défi pour la communauté scientifique. Bien que de nombreux travaux dédiés à leur étude aient permis d'obtenir un certain nombre de résultats très intéressants, certains aspects de la turbulence restent hors de portée de la communauté scientifique dans de nombreuses situations. Il est difficile de donner une définition exacte de la turbulence, on peut cependant définir certaines de ses caractéristiques principales :

- écoulement imprévisible d'un point de vue déterministe ;
- dispersion plus forte que la simple diffusion moléculaire (i.e. l'effet de mélange induit par la simple agitation thermique des particules) ;
- présence de vorticité tri-dimensionnelle (i.e. structures tourbillonnaires) ;
- phénomène continu dans l'espace et le temps ( chelle plus grande que l'échelle moléculaire) ;
- une gamme étendue d'échelles en présence.

Malgré l'impossibilité d'aborder la turbulence de manière déterministe, il est possible d'extraire un certain nombre de propriétés dont la connaissance permet de faciliter l'analyse de nombre d'écoulements.

1.3.3 Turbulence homogène isotrope

Nous nous concentrons ici sur la turbulence homogène isotrope, qui sera principalement étudiée dans ce document.

- On parle de turbulence **homogène** lorsque ses propriétés statistiques sont invariantes par translation spatiale : quel que soit le point \mathbf{x} considéré dans Ω , ces dernières sont donc considérées comme identiques. Prenons l'exemple de la première composante u de la vitesse \mathbf{V} , et notons $\bar{u}(\mathbf{x})$ la moyenne spatiale sur un voisinage donné de $\mathbf{x} \in \Omega$. Si l'écoulement est homogène, on aura donc pour tout vecteur $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ la relation $\bar{u}^2(\mathbf{x}) = \bar{u}^2(\mathbf{x} + \vec{d})$. Bien souvent, on caractérise d'homogènes les fines échelles de l'écoulement, i.e. les composantes associées aux hautes fréquences en présence (de manière équivalente, les « détails »). Cette propriété d'homogénéité peut aussi n'être vérifiée que pour un nombre réduit de directions de l'espace. A contrario, un écoulement fluide présente en général un caractère inhomogène en ce qui concerne ses grandes échelles, i.e. les grosses structures le composant ;
- On parle de turbulence **isotrope** lorsque ses propriétés statistiques sont invariantes par rotation/symétrie. L'isotropie est une contrainte plus forte que l'homogénéité : dans ce cas les statistiques de chacune des composantes de vitesses u, v et w sont identiques. Un écoulement peut donc être homogène mais anisotrope. En réalité, la majorité des écoulements sont inhomogènes et anisotropes. Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie sont néanmoins considérées comme raisonnables dans un voisinage des plus fines échelles. Celles-ci facilitent grandement la mise au point de modèles de simulation, comme nous le verrons dans la suite.

Dans la prochaine section, nous nous intéresserons au phénomène dit de « cascade énergétique », caractéristique des écoulements turbulents.

1.3.4 Cascade énergétique

On représente souvent la turbulence comme une cascade de tourbillons : un gros tourbillon se forme et est ensuite divisé en plusieurs tourbillons de tailles réduites et ainsi de suite jusqu'à ce que ceux-ci disparaissent par viscosité du fluide. Le principal socle théorique permettant de formaliser une telle observation empirique est la théorie dite « K41 » de Kolmogorov [2]. Celle-ci se base sur des outils statistiques pour formuler le phénomène de **cascade énergétique**. L'injection d'énergie à

l'origine de la turbulence est réalisée aux grandes échelles de l'écoulement. Les gros tourbillons correspondant ont un diamètre de l'ordre d'une certaine valeur L dépendant de la géométrie de l'écoulement. L'énergie du système est ensuite transmise de proche en proche (voir Fig. 1.5) vers les échelles plus fines sans subir de dissipation (on parle de zone inertielle). Une fois atteinte les plus petites échelles de taille caractéristique η (dite *échelle de Kolmogorov*), l'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Les deux échelles caractéristiques L et η sont reliées par l'expression suivante [3] :

$$\frac{L}{\eta} \approx Re^{\frac{3}{4}} .$$

On voit donc que la gamme d'échelles en présence, i.e. le rapport entre les plus grosses et les plus fines échelles, est directement liée au nombre de Reynolds. Pour un fluide turbulent à nombre de Reynolds élevé, cette gamme d'échelle peut donc être particulièrement étendue.

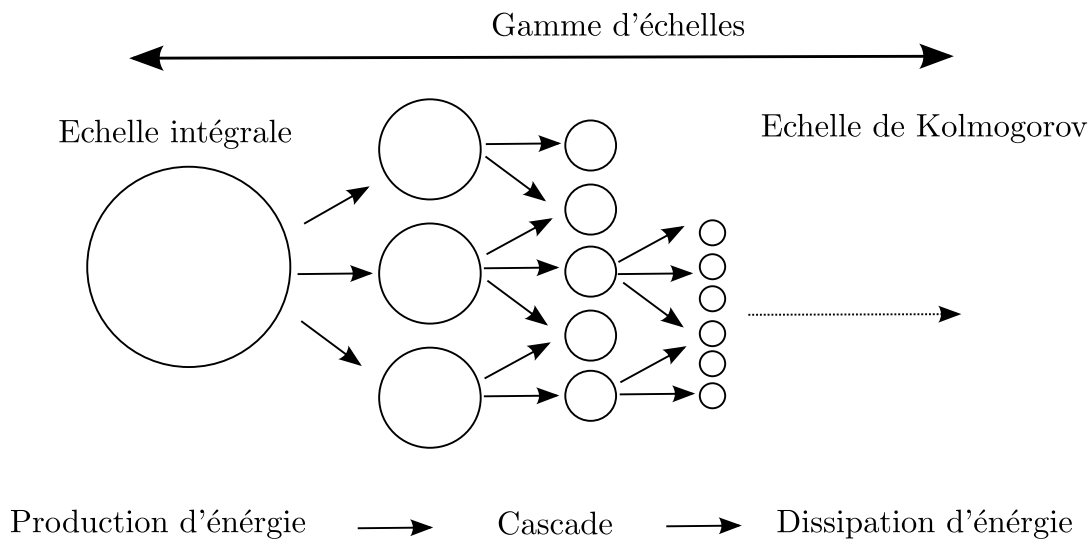


FIGURE 1.5: Illustration du mécanisme de cascade énergétique : les grosses structures se séparent en tourbillons de taille plus petite et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'échelle de Kolmogorov pour disparaître par viscosité.

L'étude des mécanismes d'échanges énergétiques entre les échelles peut être réalisée dans l'espace spectral. Décomposons le champ dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \sum_k^{\infty} \hat{\mathbf{V}}(k, t) e^{ik\mathbf{x}} , \quad (1.13)$$

où k désigne le nombre d'onde. On peut alors s'intéresser à la spectre de puissance de l'énergie cinétique turbulente. Notons $E(k)$ l'énergie cinétique moyenne contenue au voisinage du nombre d'onde k . La théorie K41 montre que dans le cas incompressible pour de la turbulence homogène isotrope, il existe une gamme d'échelles l telles que $L \gg l \gg \eta$ pour lesquelles on a l'expression suivante :

$$E(k) = c_\epsilon \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (1.14)$$

où ϵ est le taux de dissipation de l'énergie cinétique (i.e. le taux de transfert d'énergie d'une échelle à l'autre) et c_ϵ est une constante dont la valeur est empiriquement fixée à $c_\epsilon \approx 1.5$. La forme typique de E est illustrée en Fig. 1.6. Ce spectre d'énergie atteint un maximum pour une échelle L_L correspondant aux grandes échelles productrices d'énergie. Il décroît ensuite linéairement (de coefficient directeur $-5/3$) tout au long de la zone inertielle puis décroît très vite une fois la zone dissipative atteinte sous l'effet de la viscosité.

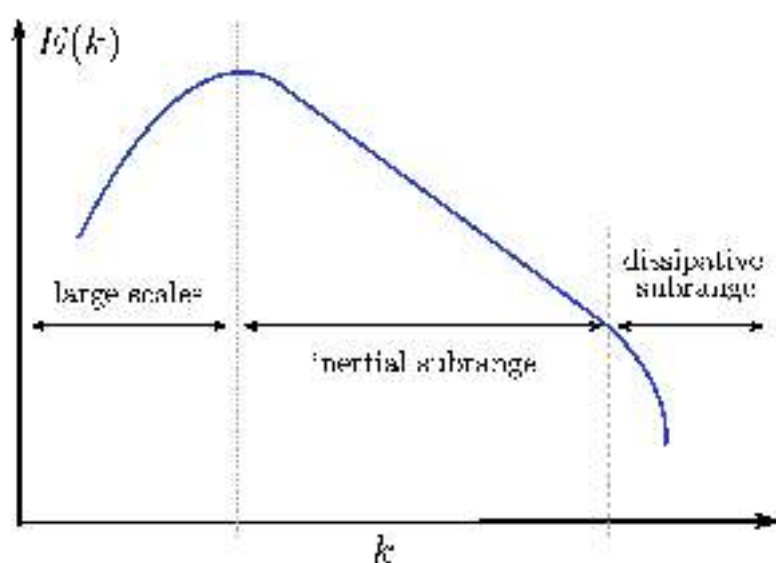


FIGURE 1.6: Spectre d'énergie théorique d'un champ de mouvement turbulent. Ce qui est illustré ici est le phénomène de cascade énergétique : l'énergie globale du système est fournie par les grandes échelles puis transmise de proche en proche jusqu'à atteindre l'échelle de Kolmogorov η à partir de laquelle elle est dissipée par viscosité.

Il est intéressant de noter que dans le cas d'un scalaire passif transporté par un champ de mouvement turbulent, un phénomène similaire est observé pour le

champ de concentration scalaire. La forme du spectre associé à la concentration du champ scalaire est dans ce cas dépendante du nombre de Schmidt (ou Prandtl) défini comme nous l'avons vu par $Sc = \nu/\kappa$. Différents cas sont alors possibles, une explication détaillée étant fournie en [3], au chapitre 15.

1.4 Mécanique des fluides numérique

1.4.1 Contexte

La mécanique des fluides numérique (souvent appelée CFD pour *Computational Fluid Dynamic*) consiste en l'étude des fluides en mouvement à l'aide des outils de la simulation numérique. L'idée principale est d'utiliser des méthodes algorithmiques appropriées pour déterminer une solution d'une équation décrivant le mouvement du fluide étudié. Elle est particulièrement utilisée dans deux domaines d'étude :

- L'accompagnement de la recherche fondamentale, notamment à travers la description des principes physiques de base qui gouvernent la mécanique des fluides. Simuler des écoulements fluides dans un cadre entièrement maîtrisé (condition initiale, conditions aux bords, vitesses limites, ...) permet une meilleure compréhension des phénomènes en présence : on peut ainsi les modéliser de manière plus efficace. Pour ce genre d'études, les données générées doivent atteindre un haut niveau de précision, ce qui implique que le modèle physique utilisé soit pertinent, et il en va de même pour la méthode de résolution mathématique à employer. Notons que la précision obtenue dépend aussi du niveau d'échelle considéré. Dans le cas idéal, la simulation doit prendre en compte toutes les échelles spatio-temporelles qui influencent la dynamique du fluide étudié. Lorsque ce nombre d'échelles devient très grand, comme par exemple en présence de turbulence, un tel problème devient alors extrêmement compliqué ;
- Les simulations numériques sont aussi particulièrement utilisées dans le domaine des sciences de l'ingénieur, notamment pour connaître les caractéristiques d'un écoulement dans de nombreux domaines industriels (aérodynamique, automobile, urbanisme, ...). Ici le but n'est plus de générer des données avec un degré de précision le plus élevé possible, mais plutôt de prédire certaines caractéristiques de l'écoulement étudié.

Dans le premier cas, on cherche à résoudre de manière directe avec la plus haute précision possible les équations de Navier-Stokes (cf. section 1.2.3), alors que dans le deuxième cas on tente de mettre au point un outil de simulation efficace en fonction des conditions de l'écoulement (cf section 1.4.5).

1.4.2 Echelle de temps et d'espace

Un modèle mathématique dont le but est de décrire un phénomène physique ne peut être mis au point sans avoir choisi au préalable le niveau d'échelle auquel on souhaite travailler, ainsi que la complexité mathématique que l'on autorise à ce modèle.

Considérons tout d'abord le **niveau de résolution spatio-temporel** : il s'agit ici de déterminer les caractéristiques temporelles et spatiales de notre système pour un niveau d'échelle considéré. La plus petite échelle (spatiale et temporelle) pertinente est définie comme la résolution de référence permettant de capturer toutes les dynamiques au sein du système étudié. On peut ajouter à cela le **niveau de complexité** d'un modèle, c'est-à-dire la diversité des forces influençant le système considéré ainsi que leurs importances respectives. Dans le cadre de la mécanique continue, le modèle le plus complet est celui de Navier-Stokes.

Les différents choix effectués pour chacun de ces niveaux de description vont permettre de développer un modèle mathématique afin de décrire le système physique étudié. Résoudre les équations de Navier-Stokes nécessite la prise en compte de la totalité des échelles spatio-temporelles de la solution, si nous voulons une simulation de qualité optimale. En conséquence, les pas de discrétisation Δx en espace et Δt en temps doivent être respectivement plus petits que la longueur caractéristique et le temps caractéristique associés à la plus petite échelle dynamique active de la solution exacte. Ce critère de qualité d'approximation peut très vite devenir impossible à respecter quand cette solution exacte contient des échelles de tailles très différentes, comme c'est le cas pour des écoulements turbulents. Néanmoins, on peut espérer trouver une bonne approximation de cette solution exacte en réduisant le nombre d'échelles considérées. Pour cela nous devons introduire un nouveau niveau de description plus grossier, qui permettra de résoudre numériquement uniquement un certain nombre d'échelles. Cependant, la non linéarité des équations de Navier-Stokes reflétant un couplage très fort entre les différents niveaux d'échelles, cela implique que ces dernières ne peuvent être résolues de manière indépendante. On peut donc rajouter un terme additionnel dans les équations qui cherchera à modéliser au mieux les interactions entre les fines échelles non résolues et celles que l'on détermine numériquement.

1.4.3 Simulation Numérique Directe (DNS)

Les équations de Navier-Stokes modélisent l'évolution de la vitesse d'un fluide donné en chaque point de l'espace. Dans un contexte de simulation, une première idée, la plus naturelle sans doute, serait de résoudre ces dernières de manière directe afin d'obtenir la solution souhaitée. Cependant en pratique, cette méthode est inenvisageable, sauf peut-être pour certains cas particulièrement simples. Rappelons qu'un écoulement turbulent est constitué d'un ensemble de structures tourbillonnantes d'échelles et de durées de vie différentes. Résoudre de manière directe l'équation (1.6) nécessite donc la prise en compte de toutes ces échelles contribuant au spectre d'énergie turbulente. Ceci implique l'utilisation de pas de discrétisation temporel Δt et spatiaux $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ particulièrement fins puisque, comme mentionné ci-dessus, ceux-ci doivent être respectivement plus petits que le pas de temps caractéristique et la longueur caractéristique de la plus fine échelle présente au sein de l'écoulement. D'après la théorie de Kolmogorov, on peut estimer le ratio entre les plus grandes et les plus petites échelles actives comme proportionnel à $Re^{\frac{3}{4}}$. Afin de prendre en compte la totalité des échelles, on doit donc utiliser un nombre de points dans chaque direction de l'espace proportionnel à cette valeur, i.e. pour un domaine 3D, $Re^{\frac{9}{4}}$ points. Lorsque le nombre de Reynolds devient élevé comme c'est le cas pour des écoulements turbulents, on obtient vite des valeurs rendant impossible cette méthode de calcul direct. En effet à titre d'exemple, voici certaines valeurs du nombre de Reynolds de l'air en fonction du type d'écoulement :

- voiture $Re \approx 10^6$
- aile d'avion $Re \approx 10^8$
- écoulement atmosphérique $Re \approx 10^{10}$

Aujourd'hui, malgré l'accroissement progressif de la puissance des calculateurs, de telles simulations ne sont donc possibles que pour des configurations très simples et il est ainsi nécessaire d'avoir recours à des modèles. Cependant, la DNS reste un moyen très utile pour valider certains modèles de turbulence. Dans la suite, nous allons introduire deux classes de méthodes dont le but est d'approximer les résultats fournis par la DNS en réduisant la complexité numérique du problème associé. Ces méthodes sont essentiellement basées sur une décomposition des variables d'intérêt (champ de vitesses, de concentration,...) afin de faciliter la résolution numérique des équations dynamiques dans lesquelles celles-ci interviennent. Les deux types de décompositions que nous présenterons dans ce manuscrit sont la décomposition de Reynolds et la décomposition LES (*Large Eddy Simulation*).

1.4.4 Reynolds Average Navier-Stokes (RANS)

Dans cette section, nous expliquons brièvement le principe des approches RANS basées sur la décomposition de Reynolds. Nous verrons que celles-ci peuvent être vues comme « l'opposé » d'un calcul DNS, puisque dans ce cas toutes les échelles de la solution doivent être modélisées. En effet, les équations RANS sont dérivées grâce à l'application d'un filtre temporel qui permet uniquement de capturer le flot moyen (selon l'axe temporel). Considérons un signal temporel $f(t)$ défini pour $t \in \mathbb{R}^+$. La décomposition de Reynolds de f est définie par :

$$f(t) = \bar{f}(t) + f'(t) \quad (1.15)$$

où $\bar{f}(t)$ est la moyenne temporelle de f définie par

$$\bar{f}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (1.16)$$

et $f'(t)$ représente les fluctuations autour de cette moyenne. Il est important de noter que la valeur de $\bar{f}(t)$ est indépendante du temps². Cette situation est illustrée Fig. 1.7 : on observe que dans un tel cas, la décomposition de Reynolds ne permet pas de représenter de manière satisfaisante le signal original. En effet, on observe que la partie fluctuante f' porte l'essentiel de l'information. Ceci est une des limitations majeures de la décomposition de Reynolds. Considérons à présent une séparation du champ de vitesse solution \mathbf{V} ainsi que du champ de pression p de la manière suivante :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}'(\mathbf{x}, t) \quad (1.17)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (1.18)$$

2. on fait l'hypothèse que la période d'intégration T est supérieure à la plus grande échelle temporelle caractéristique de l'écoulement.

avec $\bar{\mathbf{V}}$ (resp. \bar{p}) le champ de vitesse moyen et \mathbf{V}' (resp. p') la perturbation qui lui est associée. Si l'on réinjecte cette décomposition dans l'équation de Navier-Stokes (1.6), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{V}} + \nabla \cdot \overline{\tau_{Re}}, \quad (1.19)$$

où l'on a défini le **tenseur de Reynolds** par la relation :

$$\overline{\tau_{Re}} = \overline{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad (1.20)$$

$$= \overline{(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}') \cdot (\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}')} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}}. \quad (1.21)$$

L'équation (1.19) dépend de la vitesse moyenne mais également des fluctuations. Le dernier terme $\overline{\tau_{Re}}$ représente le transport des fluctuations de vitesses par elles mêmes. Il est responsable de l'aspect « chaotique » de la turbulence qui traduit bien le fait que notre solution est sujette à des variations autour d'une solution moyenne. Ces variations sont dues à des structures tourbillonnaires venant d'échelles plus fines.

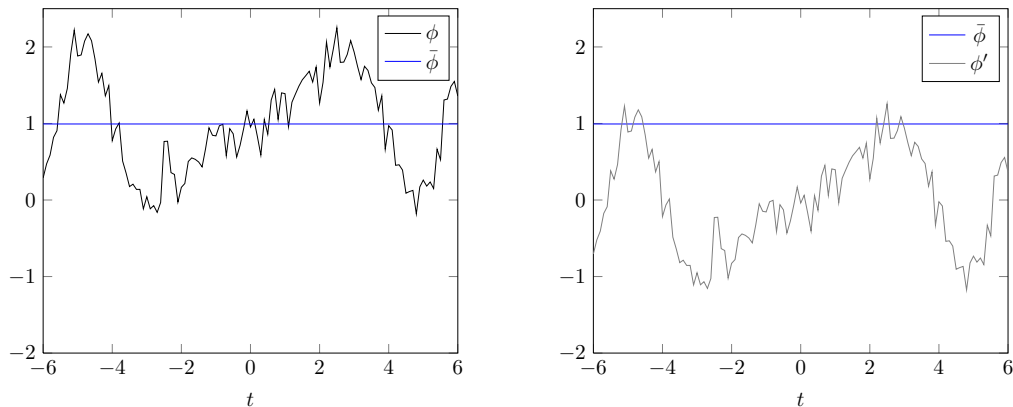


FIGURE 1.7: **Illustration de l'approche RANS** sur un signal 1D. gauche : signal original et partie filtrée. droite : partie filtrée et fluctuations

Dans la section suivante, nous allons présenter une approche alternative aux équations RANS qui se base cette fois sur un filtre spatial pour décomposer les variables d'intérêt.

1.4.5 Simulation des grandes échelles (LES)

Séparation des échelles : La Simulation des Grandes Echelles (ou LES pour Large Eddy Simulation en anglais) est une seconde approche qui repose elle aussi sur une décomposition des variables d'intérêt. Elle fut initialement introduite par Deardorff [4] puis appliquée aux équations de Navier-Stokes par Leonard [5]. Durant les dernières décennies, la simulation des grandes échelles s'est énormément développée au sein de la communauté scientifique et est à présent pleinement reconnue comme un domaine à part entière de la mécanique des fluides numérique. De plus en plus de résultats obtenus par LES ont été validés expérimentalement, et elle s'est naturellement imposée comme un moyen prometteur pour analyser des écoulements fluides non stationnaires sur des géométries potentiellement complexes. L'idée de base est la décomposition d'une variable en deux composantes :

- une composante dite **résolue** constituée des basses fréquences de la variable considérée, qui sera directement calculée lors de la simulation ;
- une composante de **sous-maille** rassemblant les hautes fréquences restantes et dont les effets sur les grandes échelles seront modélisés. La modélisation de l'influence des fines échelles est donc un point crucial en LES.

Cette séparation entre basses et hautes fréquences est tout naturellement réalisée par l'introduction d'un filtre passe bas G . Considérons un signal $f(\mathbf{x}, t)$ défini sur $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. La décomposition LES de f est

$$f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}, t) + f'(\mathbf{x}, t) \quad (1.22)$$

où $\bar{f}(\mathbf{x}, t)$ est la moyenne spatiale de f définie par

$$\bar{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (1.23)$$

Une telle décomposition est illustrée en Fig. 1.8 pour un signal 1D.

La particularité de l'approche LES est d'être capable de capturer les composantes non-stationnaires de manière bien plus précise que l'approche RANS. En effet, on peut voir en (1.22) que la composante résolue ainsi que la composante sous maille

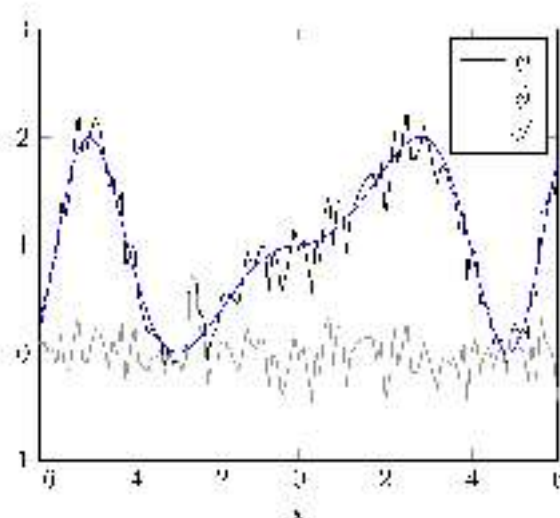


FIGURE 1.8: Illustration de la décomposition LES d'un signal (10).

dépendent toutes les deux de la variable spatiale k , ce qui est une distinction majeure par rapport à la décomposition de Reynolds. La LES permet aussi de réduire significativement la complexité numérique d'une étude comparée à la simulation numérique directe.

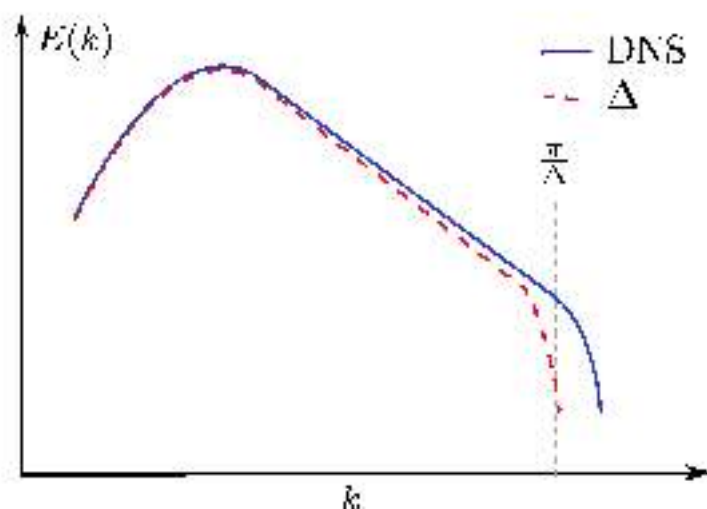


FIGURE 1.9: Application d'un filtre passe bas sur le spectre du champ de vitesses dans l'espace de Fourier

Il est aussi intéressant d'illustrer l'effet d'un filtre passe bas G sur le spectre d'énergie cinétique (voir Fig. 1.9) pour de la turbulence isotrope. Les quantités correspondant à des nombres d'ondes inférieurs à la fréquence de coupure³ sont globalement conservés (cela dépend en pratique du filtre utilisé), alors que celles

³ En pratique, cette fréquence de coupure n'est pas comme le modèle exacte. De même, le filtre réel doit être approché.

au-dessus de cette fréquence de coupure disparaissent à travers le processus de filtrage.

Équations LES : Il est possible d'obtenir une version filtrée des équations (1.5), (1.6) et (1.8) définies précédemment. Pour cela, il suffit de filtrer les deux membres de chaque équation et d'utiliser les propriétés de commutation entre les filtres LES classiques et les opérateurs de dérivation spatio-temporelle. On obtient donc pour l'équation de Navier-Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{Re} \Delta \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \tau \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

et pour l'équation de transport d'un scalaire passif :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{ReSc} \Delta \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \tau_\phi = 0 \quad (1.25)$$

dans lesquels deux nouveaux termes $\tau = \overline{(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}') \cdot (\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}')} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{V}}$ et $\tau_\phi = \overline{(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}')(\bar{\phi} + \phi')} - \bar{\mathbf{V}} \bar{\phi}$ apparaissent. Ceux-ci regroupent toutes les interactions entre quantités résolues et sous mailles, et ne sont pas directement calculables. La difficulté réside dans leur modélisation. On introduit ci-dessous certains des principaux modèles usuellement employés.

Modèles de sous maille : Un problème crucial est à présent de définir le modèle utilisé pour approximer les tenseurs τ et τ_ϕ , i.e. la contribution des fines échelles. De nombreux modèles ont été proposés dans le cas d'écoulements turbulents [6–8], ainsi que certaines techniques pour l'estimation des paramètres [9, 10] associés. Dans cette section, nous présentons certains d'entre eux pour l'étude du transport de scalaires passifs. Commençons tout d'abord par une adaptation du modèle de Smagorinsky [11] dans le cas de scalaires passifs :

$$\tau_\phi = -(C_r \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{\nabla} \bar{\phi}, \quad (1.26)$$

où l'on a

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

avec $|\bar{S}|$ la norme euclidienne de \bar{S} et C_r une constante dont la valeur est souvent fixée autour de 0.1. Un tel modèle est purement dissipatif, puisque l'on a dans ce cas $\nabla \cdot \tau_\phi \propto \Delta \bar{\phi}$. On autorise ainsi uniquement le transfert d'énergie des grandes échelles vers les fines échelles. Un autre terme basé sur la connaissance des gradients des quantités résolues [12], est défini par :

$$\tau_\phi = (C_r \bar{\Delta})^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Ce modèle fait l'hypothèse que les quantités sous maille sont alignées avec le gradient des quantités résolues. Un autre modèle qualifié de « dynamique » et se basant sur plusieurs niveaux de filtrage a été proposé par Germano [13] afin de permettre la détermination de la constante C_r des modèles précédents. Celle-ci est considérée comme une fonction dépendant du temps et de l'espace, i.e. $C_r = C_r(x, t)$.

1.5 Discussion

Dans ce chapitre, les principaux concepts permettant la description des écoulements fluides ont été présentés. En particulier, nous avons insisté sur le caractère multi-échelles de tels phénomènes en présence de turbulence : un écoulement fluide turbulent est composé d'une gamme continue d'échelles (ou structures tourbillonnaires) fortement couplées les unes aux autres. Les grandes échelles sont responsables de la forme générale de l'écoulement et anisotropes, alors qu'on considère en général le comportement des plus fines échelles comme isotrope. Lorsque la gamme d'échelles en présence est étendue, la résolution directe des équations de Navier-Stokes devient impossible. On modélise alors le comportement des plus fines échelles, réduisant ainsi significativement la complexité numérique du problème. Les deux types d'approches les plus utilisés sont les modélisations RANS ou LES. Dans ce travail, nous

nous intéresserons plus particulièrement aux approches LES qui reposent sur une séparation des échelles spatiales de la solution à travers une procédure de filtrage. Le but du chapitre suivant est d'introduire et formaliser les méthodes issues de la vision par ordinateur pour l'étude de phénomènes physiques.

Chapitre 2

Analyse d'images et prise en compte d'a priori physiques

Dans ce chapitre, nous débuterons par introduire brièvement le contexte de l'analyse d'images pour la physique. Nous verrons qu'émergent de ce domaine de nombreux problèmes dits « inverses », et introduirons succinctement le formalisme classique qui leur est associé. Nous évoquerons ensuite l'assimilation de données et plus précisément l'algorithme 4DVAR, qui permet de combiner de manière efficace les modèles théoriques issus de la physique et les informations provenant de données images sur une fenêtre temporelle. Enfin, nous discuterons du cadre de ce travail de thèse et de sa place au sein d'une telle problématique.

2.1 Contexte

L'analyse d'images consiste à extraire l'information pertinente à partir d'observations qui sont des mesures issues de capteurs (CCD, infrarouge, etc.). Cette discipline s'est énormément développée peu après la Seconde Guerre mondiale. Elle est le résultat de l'amélioration des instruments de mesure due aux ingénieurs électroniciens, ainsi que des apports venant des mathématiques appliquées qui ont permis le développement d'outils efficaces pour analyser la donnée image.

L'information captée dans une image est bien souvent bruitée (en raison des conditions d'acquisition), l'information réelle observée pouvant parfois être déformée voir manquante. De plus, celle-ci peut dépendre de paramètres a priori inconnus

et pourtant cruciaux : indice de diffraction, mouvement moyen du dispositif d'acquisition, pré-traitement dû au capteur, etc. De nombreuses méthodes ont donc pour but d'améliorer la qualité de ces données images ou encore de reconstruire certaines quantités/informations n'apparaissant pas explicitement. On est alors amené à la fois à étudier théoriquement les propriétés du phénomène observé à partir d'images (bornes d'estimations, régularités temporelles/spatiales, équations d'évolution, ...) mais aussi à analyser ce qu'il est possible de faire d'un côté pratique, i.e les aspects numériques et algorithmiques de l'implémentation des méthodes permettant l'estimation de la solution. Le développement de stratégies de contrôle permettant l'amélioration d'un système physique à partir d'images représente un défi important pour la communauté scientifique et dont les domaines d'application sont nombreux.

2.2 Problèmes inverses

2.2.1 Introduction

De nombreux problèmes concernant l'étude de phénomènes physiques à partir de données images font partie de la famille des *problèmes inverses* : on essaye d'estimer la cause d'un phénomène à partir de l'observation de ses effets. Bien souvent le phénomène n'est observé que de manière indirecte : c'est le cas pour l'estimation de mouvement par exemple, où l'on essaye de reconstruire un champ de vitesses à partir d'informations sur la luminance. Afin de résoudre de tels problèmes, il est nécessaire de procéder en premier lieu à une étape de modélisation. Bien souvent, cela consiste à modéliser le problème direct associé, c'est-à-dire déterminer la manière dont les observations disponibles sont reliées à la quantité inconnue. Malheureusement, les problèmes étudiés sont en général mal posés et les observations disponibles sont très souvent insuffisantes pour déterminer une solution convenable. L'introduction de contraintes a priori est alors nécessaire, permettant ainsi de réduire l'espace des solutions admissibles.

On rencontre des problèmes inverses dans une multitude de domaines : l'étude de l'univers en cosmologie, analyse de signaux en ingénierie pétrolière, tomographie ou étude des tissus organiques en médecine, déconvolution, détermination de constantes d'une réaction chimique, reconstruction radar etc. Dans cette section,

nous présenterons brièvement le formalisme de ces problèmes inverses et discuterons de certaines de leurs caractéristiques.

2.2.2 Formalisme

Cas général : Supposons que l'on dispose d'images (ou observations) $\mathcal{Y}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, où m est le nombre de pixels. À partir de ces images, nous chercherons à estimer une variable d'état notée $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)$. Par souci de simplicité, et puisque c'est souvent le cas en analyse d'images, on suppose que $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$: on étudie donc une version discrétisée des variables continues associées au phénomène étudié. Notons que la variable d'état peut appartenir à un espace différent de celui des observations $\mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)$, i.e. $m \neq n$. Une première étape consiste à définir/construire une contrainte (ou encore un modèle direct) de type $\mathbb{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et permettant, comme nous l'avons dit ci-dessus, de relier \mathcal{X} et les observations par une relation du type :

$$\mathbb{H}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) = \mathcal{Y}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

Idéalement, on aimerait pouvoir inverser \mathbb{H} afin d'obtenir la valeur de \mathcal{X} . En pratique bien sur, cela n'est souvent pas possible et des méthodes de résolution approchées doivent être employées. Dans le cas où \mathbb{H} est linéaire, on le notera H et on cherchera à résoudre notre problème par la minimisation d'une fonctionnelle de type :

$$E(\mathcal{X}) = \|H\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|^2 \quad (2.2)$$

La minimisation de E est en général réalisée par une approche itérative du type descente de gradient. Bien souvent, nous sommes face à des observations bruitées ou manquantes : il peut donc être judicieux de pondérer le terme $(H(\mathcal{X})(\mathbf{x}) - \mathcal{Y}(\mathbf{x}))$ afin de réduire son influence lorsque \mathbf{x} correspond à des zones pour lesquelles l'incertitude est forte. En effet, une pénalisation de type \mathcal{L}_2 telle que celle choisie en (2.2) aura tendance à donner beaucoup d'importance à certains points aberrants

correspondants à des zones de bruit. Supposons que l'on puisse, en chaque point \mathbf{x} du domaine Ω , approximer a priori certaines statistiques d'erreurs relatives aux observations $\varepsilon^{obs} = \mathcal{Y}(\mathbf{x}) - H\mathcal{X}(\mathbf{x})$. En particulier, on s'intéressera à leurs moments d'ordre 2, i.e. leurs valeurs de covariances :

$$\text{Cov}(\varepsilon^{obs}) = E((\varepsilon^{obs} - \bar{\varepsilon}^{obs})^2)$$

où $\bar{\varepsilon}^{obs}$ dénote la moyenne. On peut alors évaluer la matrice de covariance des erreurs d'observations R définie par :

$$R = \mathbb{E} [(H\mathcal{X} - \mathcal{Y})(H\mathcal{X} - \mathcal{Y})^T] \quad (2.3)$$

On peut ensuite utiliser la distance de Mahalanobis qui consiste à pondérer la norme \mathcal{L}_2 de (2.2) par la valeur de covariance associée.

$$E(\mathcal{X}) = \|H\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_{R^{-1}}^2 \quad (2.4)$$

$$= (H\mathcal{X} - \mathcal{Y})^T R^{-1} (H\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \quad (2.5)$$

Pour l'instant, nous nous sommes limités à la considération des observations issues des données images. Le plus souvent, l'information de luminance ne suffit pas à elle seule à recouvrer la variable inconnue. En effet, de nombreuses difficultés se posent dans les zones homogènes (où l'information est faible), bruitées, manquantes, ... On parle alors de problème mal-posé : l'espace des solutions possibles est trop important pour résoudre le problème. Pour pallier cette difficulté, on rajoute souvent des contraintes sur la forme de la solution attendue. C'est ce qu'on appelle la contrainte de régularité (ou encore de régularisation ou de lissage), dont le principe est présenté dans la section suivante.

Ajout d'une contrainte de régularité : Il est souvent possible, à partir d'arguments théoriques, de formuler a priori un certain nombre de contraintes sur la solution que l'on cherche à estimer. Les plus basiques d'entre elles sont les

contraintes de régularité de type Tikhonov : soit $\mathcal{D}^{(d)}$ la matrice de dérivation d'ordre d de la variable \mathcal{X} . On cherche alors à minimiser la fonctionnelle « régularisée »

$$E(\mathcal{X}) = \|\mathbb{H}\mathcal{X} - \mathcal{Y}\|_{R^{-1}}^2 + \lambda\|\mathcal{D}^{(d)}\mathcal{X}\| \quad (2.6)$$

où λ est un paramètre de pondération à définir. On peut voir dans l'équation (2.6) que l'on cherche à minimiser E sur tout le domaine image Ω : une telle contrainte de régularité privilégiera les solutions lisses et atténuera les erreurs dues à la présence de bruit. Pour certaines applications, il est possible d'introduire des contraintes physiques plus spécifiques dans le terme de régularité. Par exemple, lors de l'estimation de mouvement d'un fluide à partir d'images pour lequel on suppose que la composante de divergence est négligeable, on peut introduire une contrainte de la forme $\|M_{\nabla}^T\mathcal{X}\|$ où M_{∇}^T désigne l'opérateur de gradient spatial sous forme matricielle et \mathcal{X} le champ de mouvement. En fonction de la contrainte de régularité introduite, et de la linéarité ou non de l'opérateur \mathbb{H} , la minimisation de la fonctionnelle définie par la relation (2.6) peut conduire à un problème d'optimisation non linéaire.

Cas non linéaire : On s'intéressera dans cette section à la situation pour laquelle l'opérateur d'observation \mathbb{H} est non linéaire. Notons cependant qu'un raisonnement similaire peut s'appliquer dans le cas où le terme de régularité de la relation (2.6) est lui aussi non linéaire. Dans ce cas, on peut alors étudier son modèle tangent en linéarisant le problème. Supposons que l'on dispose d'une solution approchée $\tilde{\mathcal{X}}$, on peut alors linéariser notre problème au voisinage de $\tilde{\mathcal{X}}$. On obtient ainsi

$$\mathbb{H}(\tilde{\mathcal{X}} + d\mathcal{X}) = \mathbb{H}(\tilde{\mathcal{X}}) + \left[\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial\tilde{\mathcal{X}}}\right]d\mathcal{X} + \frac{1}{2}d\mathcal{X}^T \left[\frac{\partial^2\mathbb{H}}{\partial\tilde{\mathcal{X}}^2}\right]d\mathcal{X} + \dots \quad (2.7)$$

On peut alors chercher à résoudre le problème auxiliaire consistant à estimer l'incrément $d\mathcal{X}$ en prenant comme modèle direct l'opérateur linéaire $H = \frac{\partial\mathbb{H}}{\partial\tilde{\mathcal{X}}}$ (on réalise dans ce cas une approximation au premier ordre) et en définissant un nouveau vecteur d'observations $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} - \mathbb{H}(\tilde{\mathcal{X}})$. Le problème se posant à présent est

celui du choix de la solution approchée $\tilde{\mathcal{X}}$: si celle-ci est très éloignée de la solution réelle ou entachée d'erreurs, cela peut empêcher l'algorithme de converger vers un minimum local satisfaisant. C'est un comportement bien connu des approches itératives bien souvent utilisée face à de tels problèmes. Ainsi, il existe un certain nombre de stratégies plus ou moins avancées dont le but est de minimiser ce risque d'erreur dû à une mauvaise initialisation. Citons entre autres les approches multi-échelles que nous introduisons dans la section suivante.

2.3 Approches Multi-échelles/Multi-résolution

Dans cette section, nous aborderons les deux notions clefs de l'analyse d'images que sont le niveau de résolution et les niveaux d'échelles associés à une image donnée. Bien que distinctes, nous verrons que ces deux notions sont étroitement reliées et souvent associées dans la littérature.

2.3.1 Terminologie

Commençons tout d'abord par introduire deux définitions permettant de caractériser une image donnée :

- la **résolution** d'une image est donnée par le nombre de pixels la composant par rapport à la taille du domaine que celle-ci représente. De manière équivalente, c'est l'aire de l'unité de surface représentée par un pixel ;
- la notion **d'échelle** peut être vue comme une mesure abstraite liée à la taille des différentes structures (objets, contours, régions, etc.) présentes au sein d'une image. Il existe en général plusieurs niveaux d'échelles d'étude pour une image donnée. La gamme des échelles possibles (ou représentables) au sein d'une image est bornée, et ces bornes dépendent directement de la résolution de celle-ci. En effet, l'échelle minimale représentée ne pourra être plus petite que la taille d'un pixel. L'échelle maximale, quant à elle, est conditionnée par le nombre de ces pixels. À taille de pixel égale, plus ces derniers sont nombreux (et donc plus l'image est grande), plus l'échelle maximale « potentielle » est élevée.

Il est facile de confondre ces deux notions, mais la Fig. 2.1 ci dessous illustre la différence.

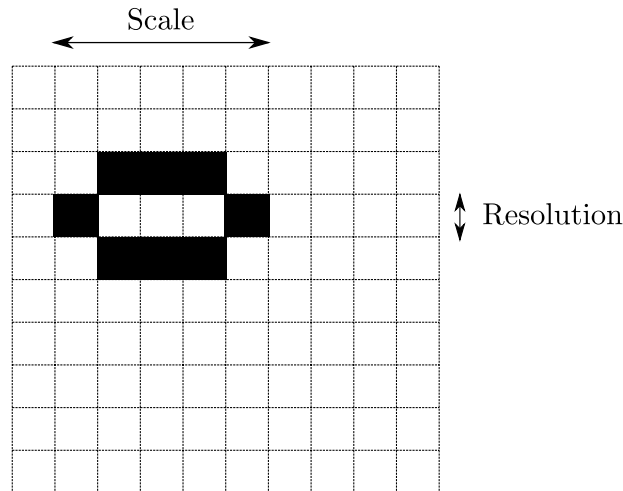


FIGURE 2.1: **Différences entre résolution et échelle** : un niveau d'échelle est associé à une taille d'un objet donné, représenté par un ensemble de pixels noirs ci-dessus. Il existe ainsi de nombreux niveaux d'échelles différents au sein d'une image quelconque. Le niveau de résolution, quant à lui, est directement lié à la taille des pixels constituant l'image.

La présence de plusieurs échelles au sein d'un phénomène étudié rend nécessaire l'adaptation des méthodes d'estimation associées. Bien souvent, on essaye de traiter de manière séparée, au moins dans un premier temps, les grosses et les fines échelles. Des phénomènes multi-échelles apparaissent dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides (cf. chapitre 1), la physique nucléaire, la chimie etc. Dans le cas de l'analyse de ces phénomènes à partir d'images, il n'est pas surprenant de retrouver un tel aspect multi-échelles dont la prise en compte est cruciale pour obtenir des résultats satisfaisants. Finalement, on peut formuler les remarques suivantes :

- le niveau de résolution est dépendant du matériel utilisé pour capturer une scène donnée. Il intervient aussi lors de la mise en oeuvre de méthodes numériques pour l'analyse d'images, comme nous le verrons dans la section suivante lors de l'introduction des méthodes dites *multi-grilles*.
- le niveau d'échelle est relié au phénomène physique étudié, ou encore à la taille des structures présentes au sein de l'image étudiée.
- ces deux notions, bien que différentes, sont fortement liées en pratique.

Dans la section suivante, nous présentons la manière dont niveaux de résolution et niveaux d'échelles se révèlent complémentaires au sein des méthodes d'estimation.

2.3.2 Méthodes multi-résolution

Comme nous l'avons vu précédemment, un phénomène physique peut être discrétisé sur des grilles de niveaux de résolution différents et analysé à chacun de ces niveaux par un algorithme. Les méthodes multi-résolution ou multi-échelles ont pour but :

- l'amélioration de la prise en compte/calcul des phénomènes ou structures de longue portée ;
- réduire la complexité numérique générale du problème. L'algorithme peut ainsi travailler de manière successive sur les grandes et fines échelles du phénomène étudié, plutôt que d'attendre que les interactions entre pixels aux fines échelles se répercutent aux grosses échelles ;
- l'amélioration de la robustesse de l'estimation en réduisant le conditionnement du problème associé ;
- la simplification de l'algorithme, en traitant de manière séparée et successive les différents niveaux d'échelles du problème. L'analyse d'un phénomène à différentes échelles permet une analyse plus précise et détaillée de ce dernier.

Ainsi, on combine très souvent les approches dites multi-résolution, qui consistent à travailler sur des grilles de différentes résolutions, et des méthodes dites multi-échelles dont le but est de fournir une description approximative du phénomène à un niveau d'échelle donné. Il existe ainsi une multitude d'approches multi-résolution et multi-échelles, qui peuvent être grossièrement classifiées en trois groupes :

- les méthodes basées sur la décomposition en ondelettes. Celles-ci reposent sur la décomposition d'une image en plusieurs niveaux d'échelles et l'utilisation des coefficients d'ondelette associés pour des tâches telles que le débruitage, la segmentation, la classification, ... ;
- les modèles hiérarchiques : un modèle multi-échelle est utilisé permettant la prise en compte de différents modèles simples pour chaque niveau d'échelle. Cela évite ainsi la définition souvent complexe d'un modèle unique devant prendre en charge toutes les échelles du problème et gérer les différents comportements associés de manière simultanée ;
- les algorithmes hiérarchiques : les méthodes multi-grilles sont sans aucun doute l'exemple le plus connu. L'image initiale est décomposée en un ensemble d'images de niveaux de résolution croissants. Ainsi, les grandes échelles sont calculées sur une grille à résolution grossière et les fines échelles

sur une grille haute résolution, l'échange d'information entre différents niveaux étant assuré par des opérateurs de transfert.

Dans la section suivante, nous illustrons l'utilité des méthodes hiérarchiques lors de la résolution de certains problèmes inverses en analyse d'images.

2.3.3 Exemple d'application en présence d'opérateurs non linéaires

Si l'opérateur d'observation \mathbb{H} est non linéaire, nous avons vu qu'il était possible de linéariser le problème autour d'une valeur approchée $\tilde{\mathcal{X}}$: on peut alors chercher à estimer un incrément $d\mathcal{X}$ permettant d'améliorer la solution courante. On effectue dans ce cas une estimation dite « incrémentale » de la solution. En pratique, une telle estimation incrémentale est souvent couplée à une approche hiérarchique multi-résolution : on décompose tout d'abord le problème de base en plusieurs sous-problèmes, chacun associé à un niveau de grille particulier $\ell \in [\ell_0, \ell_f]$. Ainsi on commence l'estimation au niveau le plus grossier ℓ_f pour estimer les composantes correspondant aux basses fréquences de \mathcal{X} , pour ensuite descendre dans les échelles plus fines afin d'y ajouter progressivement des détails, jusqu'à atteindre le niveau le plus fin ℓ_0 .

Par exemple, supposons qu'au niveau $\ell + 1$, on puisse estimer $\mathcal{X}^{\ell+1}$ par minimisation d'une fonctionnelle linéaire de type (2.6). On peut ensuite descendre au niveau suivant (plus fin) ℓ et utiliser $\mathcal{X}^{\ell+1}$ comme valeur approchée. Cela nous permet, au niveau ℓ , de linéariser l'opérateur d'observation associé \mathbb{H}^ℓ au voisinage de $\mathcal{X}^{\ell+1}$ en utilisant l'équation (2.7). On s'intéressera donc à la nouvelle fonctionnelle

$$E^\ell(d\mathcal{X}^\ell) = \|H^\ell d\mathcal{X}^\ell - (\mathcal{Y}^\ell - \mathbb{H}^\ell(\mathcal{X}^{\ell+1}))\|^2 \quad (2.8)$$

$$= \|H^\ell d\mathcal{X}^\ell - \tilde{\mathcal{Y}}^\ell\|^2 \quad (2.9)$$

qui est une fonctionnelle linéaire, l'estimation de l'incrément $d\mathcal{X}^\ell$ est donc facilitée. On procède ainsi de suite jusqu'au niveau d'échelles le plus fin. Cette approche permet d'obtenir, dans de nombreuses situations, des résultats satisfaisants. Cependant, la relation (2.9) nous permet de faire l'observation suivante : pour un niveau ℓ donné, aucune information à propos des échelles plus fines (issues de niveaux

$\ell' < \ell$) n'est prise en compte. Cela peut être problématique si il y'a de fortes interactions inter-échelles comme dans le cas de la mécanique des fluides turbulents par exemple. Dans ce cas, il serait intéressant d'inclure ces connaissances « sous maille » permettant la prise en compte de l'action des fines échelles. C'est ce que nous ferons dans le chapitre 4 dans un contexte d'estimation du mouvement dans les séquences d'images.

Dans la prochaine section, nous nous intéressons aux méthodes de régularisation des problèmes inverses dans le cas de contraintes définie selon l'axe temporelle.

2.4 Assimilation de données variationnelle

Dans certaines applications, comme en mécanique des fluides par exemple, il est intéressant d'étudier un phénomène donné sur une fenêtre temporelle $[t_0, t_f]$. On peut alors chercher à résoudre une succession de problèmes inverses de manière indépendante pour chaque pas de temps $t \in [t_0, t_f]$ et estimer à chaque fois une valeur $\mathcal{X}(t)$. Si on connaît en plus (en se basant sur des arguments théoriques) une loi d'évolution temporelle sur \mathcal{X} , on peut chercher à imposer une cohérence temporelle aux solutions $\mathcal{X}(t)$ estimées. Pour cela, certaines techniques issues de l'assimilation de données peuvent être utilisées. Nous présentons ici plus en détails l'algorithme 4DVAR [14], qui a été utilisé dans ce travail de thèse. Bien évidemment, d'autres méthodes d'assimilation de données existent : estimateurs Bayésiens, filtrage de Kalman [15], filtres particulaires [16], méthodes de Kalman d'ensemble [17, 18], etc. Un panorama des différentes méthodes de filtrage est disponible en [19].

2.4.1 Introduction

Les méthodes d'assimilation de données ont comme objectif de combiner de manière optimale (dans un sens à définir) différentes sources d'informations pour estimer une variable d'état : celles-ci peuvent être issues de modèles mathématiques d'évolution temporelle, d'équations modélisant le phénomène, mais aussi d'observations/statistiques provenant de mesures in situ ou encore de dispositifs d'acquisition d'images/signaux. In fine, on cherchera à reconstituer l'état du système étudié, ou encore certains paramètres qui lui sont propres. C'est un domaine très actif dans de nombreuses disciplines de la géophysiques tels que la météorologie ou

l'océanographie pour lesquels les problèmes de prévisions ou de reconstruction de mesures temporelles sont d'une importance cruciale.

De nos jours, de nombreux modèles de simulation ainsi que d'importants volumes de données images sont disponibles pour un grand nombre de phénomènes physiques. Ces deux sources d'informations peuvent être vues comme des descriptions complémentaires d'un même processus complexe. Un algorithme particulièrement utilisé dans le domaine des sciences environnementales est le 4DVAR, qui ajuste globalement un modèle dynamique en fonction d'observations associées sur une fenêtre de temps donnée. Ainsi, un grand nombre d'auteurs ont combiné cette approche assimilation de données avec des informations issues d'images. Les problèmes de définition d'opérateurs d'observation d'images adaptés ainsi que d'utilisation optimale du modèle de simulation sont d'un grand intérêt pour la communauté scientifique. De telles idées ont été initialement formulées dans [20] et appliquées dans [21, 22] à des problèmes de suivi de courbes et dans [23, 24] pour l'estimation du flot optique (i.e. le mouvement apparent au sein des séquences d'images). Dans [21] les auteurs proposent deux modèles d'évolution dynamique : le premier, dédié aux fluides, se base sur l'équation de transport de la vorticité, alors que le deuxième décrit le transport du mouvement par lui même dans le cas d'images vid es. Une description de mouvement atmosphérique basé sur un modèle d'eaux peu profondes (*shallow water*) est proposée dans [24]. Dans [25], est présentée une méthode d'estimation de la circulation en surface des océans à partir d'images SST (*Sea Surface Temperature*). Enfin, dans [26, 27], les auteurs appliquent des méthodes d'assimilation de données pour l'estimation de mouvement à partir d'images satellites de la mer Noire.

Comme nous l'avons vu, les écoulements fluides turbulents sont fondamentalement non linéaires. Ces derniers présentent en effet de fortes interactions entre les différentes échelles spatio-temporelles en présence. La résolution numérique des équations les régissant (conservation de masse, de l'énergie, ...) nécessite souvent une troncature de la gamme des échelles considérées, comme par exemple dans l'approche LES. Les fines échelles disparaissant ainsi nécessitent alors un effort de modélisation. La mise au point de tels modèles requiert souvent la définition de paramètres dont la valeur est a priori inconnue : il est alors nécessaire de s'appuyer sur des informations supplémentaires telles qu'une condition initiale, des conditions aux bords ou des valeurs observées/mesurées pour les approximer. On comprend donc bien l'intérêt de méthodes permettant de combiner ces différentes sources d'informations afin de réaliser une estimation globale.

2.4.2 Formalisme

Supposons que l'on cherche à assimiler une quantité $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$ dont la dynamique temporelle est décrite par la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (2.10)$$

Des observations \mathcal{Y} et un opérateur d'observation \mathbb{H} permettent de construire un système similaire à celui décrit par la relation (2.1). Si l'on suppose enfin que l'on connaît une première approximation \mathcal{X}_0 de $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)$, il est possible de définir une fonctionnelle à minimiser de la forme :

$$\begin{aligned} J(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbb{H}\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)\|_{R^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0) - \mathcal{X}_0\|_{B^{-1}}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\| \frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) \right\|_{Q^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où R est la matrice associée aux erreurs d'observations, B la matrice des erreurs sur la condition initiale et Q la matrice des erreurs sur le modèle dynamique : celles-ci permettent de prendre en compte le fait que chaque contrainte de J n'est pas forcément vérifiée de manière exacte. Pour minimiser la fonction de coût (2.11), il est nécessaire de calculer son gradient. Numériquement, une telle situation est problématique car il faudrait évaluer la fonctionnelle J le long de toutes les perturbations infinitésimales possibles de \mathcal{X} (i.e. sur chacune de ses n dimensions) : si \mathcal{X} appartient à un espace de grande dimension, ce qui est souvent le cas lorsque l'on traite des images, le nombre de perturbations est très grand. De plus, il faudrait, pour chaque perturbation, intégrer le modèle dynamique (2.10), ce qui est en général très coûteux. Pour pallier ces difficultés, on s'appuie alors sur une formulation adjointe [14] (dont les détails sont donnés en annexe A) qui permet, à travers une intégration directe puis inverse du modèle dynamique (2.10), de calculer explicitement la quantité $\nabla J(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0))$. La solution finale est donc un compromis entre les différents éléments constituant la fonction de coût (2.11) et est obtenue par descente de gradient.

2.4.3 Consistance des fines échelles

Revenons à notre problème d'estimation multi-échelles d'une variable \mathcal{X} : on s'intéresse donc dans un premier temps à l'estimation de la variable d'état \mathcal{X}^ℓ à une échelle ℓ donnée. On peut ensuite chercher à estimer la composante de \mathcal{X} correspondant aux échelles plus fines que ℓ , que l'on notera $d\mathcal{X}^{\ell'}$ avec $\ell' < \ell$ et telle que

$$\mathcal{X} \approx \mathcal{X}^\ell + d\mathcal{X}^{\ell'}.$$

C'est un problème inverse classique en traitement d'images ainsi qu'en LES, que l'on appelle super-résolution : à partir de la connaissance des composantes basses fréquences d'une quantité, on cherche à estimer certaines hautes fréquences a priori inconnues. Dans le chapitre 6 de cette thèse, nous utiliserons l'algorithme 4DVAR pour contraindre ces incréments de super-résolution à respecter un modèle dynamique issu de considérations théoriques.

2.5 Discussion

Ce chapitre a proposé un panorama non exhaustif du principe des méthodes existant pour analyser des phénomènes physiques à partir de données images. Nous avons présenté le formalisme basique des problèmes inverses, puis certaines extensions permettant la prise en compte de statistiques d'erreurs, d'a priori spatiaux issus des lois de la physique, ou encore d'opérateurs non linéaires. Nous avons souligné l'intérêt des méthodes multi-échelles mais aussi certaines de leurs limitations intrinsèques, notamment le manque de prise en compte des fines échelles au début de la procédure d'estimation. Nous avons ensuite porté notre attention sur l'introduction de contraintes temporelles sur la variable d'état étudiée, et présenté l'algorithme 4DVAR issu de l'assimilation de données variationnelle. Celui-ci permet une estimation globale sur une fenêtre temporelle prédéfinie et prenant en compte la dynamique qu'est censée suivre la variable d'état. De telles considérations démontrent bien l'intérêt de combiner la connaissance de modèles physiques avec des données issues d'images.

Chapitre 3

Estimation du flot optique : état de l'art

L'estimation du mouvement dans les séquences d'image est un vaste domaine d'étude particulièrement actif depuis les années 80. De très nombreuses méthodes ont été proposées afin de reconstruire un champ de déplacement au sein d'une séquence d'images, et ce dans des domaines aussi variés que l'analyse vidéo, la robotique, la physique expérimentale, l'imagerie médicale, etc. Dans ce chapitre, nous présenterons le contexte ainsi que des méthodes classiques de l'estimation du flot optique. Nous nous intéresserons ensuite à l'étude de mouvements fluides qui nécessite le développement de méthodes adaptées. Nous finirons enfin par une brève discussion des problèmes soulevés.

3.1 Estimation du mouvement pour la vision par ordinateur

Le flot optique est un champ de déplacement associé aux variations d'intensité lumineuse au sein d'une séquence d'images. Il reflète le mouvement apparent des pixels au sein de cette séquence. Son estimation consiste donc en la reconstruction d'un champ de vecteurs décrivant le déplacement de différents objets au sein d'une scène, et ce pour chaque image de la séquence étudiée. Le flot optique n'est pas nécessairement lié au mouvement réel des objets visualisés : une séquence d'images n'est après tout que la projection bidimensionnelle d'un phénomène se

déroulant dans l'espace physique en 3 dimensions (voir Fig. 3.1), à laquelle il faut éventuellement ajouter le mouvement du système d'acquisition numérique. Cela signifie que le champ de vitesse estimé n'est que la projection 2D du mouvement réel qui est en général 3D : c'est ce que l'on appelle le mouvement apparent. En pratique, malgré tout, ce mouvement fournit une quantité d'information importante permettant son utilisation pour de nombreuses applications dans des domaines variés.

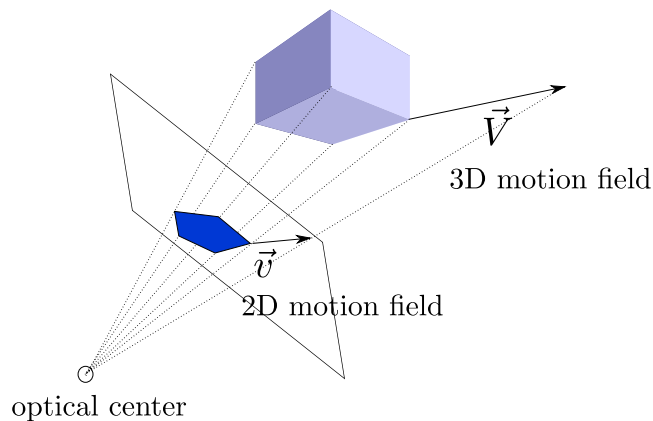


FIGURE 3.1: Mouvement d'un objet 3D (cube bleu clair) et projection de la scène sur un écran 2D (pentagone bleu foncé)

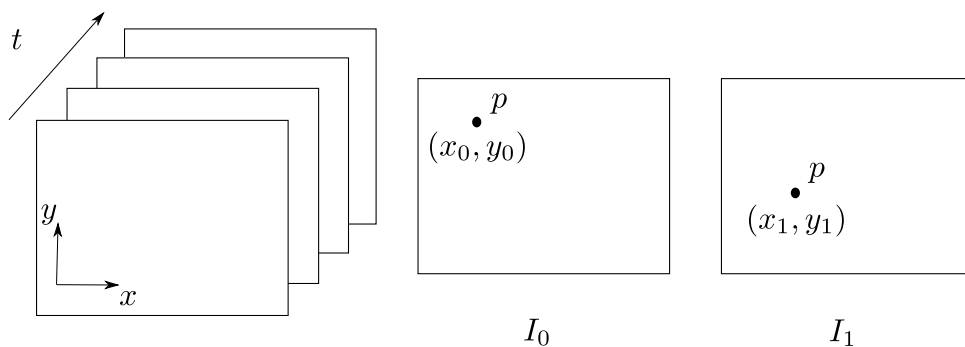


FIGURE 3.2: Illustration d'une séquence d'image (gauche). A droite, deux images successives I_0 et I_1 de la séquence et la position d'un pixel p donné dans chacune de ces images. On cherche ici à estimer le mouvement de p entre chaque image.

L'estimation du flot optique est un problème clef du domaine de la vision par ordinateur, qui débouche sur de multiples applications telles que l'analyse de scènes [28, 29], la segmentation [30], la compression vidéo [31], l'analyse de mouvements fluides en physique expérimentale [32, 33], etc. Le terme de *flot optique* a été introduit par le psychologue James Jerome Gibson lors de travaux sur la vision humaine.

Son cadre d'étude a été développé à partir de l'article fondateur de Horn and Schunck [34] au début des années 80, qui donna suite à de nombreuses contributions de la part de la communauté de la vision par ordinateur. La connaissance du flot optique nous fournit un certain nombre d'informations cruciales sur l'arrangement spatial des objets dans la scène, ainsi que le déplacement de ces derniers.

3.1.1 L'équation du flot optique

Conservation de la luminance : Le modèle mathématique standard permettant de définir le problème du flot optique sous la forme d'équations est basé sur une hypothèse très largement employée : l'hypothèse de conservation de la luminance présentée ci-dessous. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le plan de l'image, $(x, y) \in \Omega$ les coordonnées cartésiennes des pixels de cette image et $[t_0; t_f] \subset \mathbb{R}^+$. Durant un incrément de temps δt , chaque pixel (x, y) subit un déplacement $(\delta x, \delta y)$. Sous certaines conditions que nous détaillerons ci-dessous, $I(x, y, t)$ et $I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t)$ correspondent donc au même pixel et représentent le même détail au sein de la séquence d'images. On a donc :

$$I(x, y, t) \approx I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) \quad (3.1)$$

On fait ainsi l'hypothèse que la luminance reste constante le long du champ de mouvement. Si la variation de luminance lors de l'acquisition des images est négligeable et le déplacement de chaque pixel relativement faible d'une image à la suivante (i.e. le temps d'acquisition entre deux images δt est suffisamment court), cette hypothèse est en général correcte. Il est alors possible d'effectuer un développement de Taylor au premier ordre du terme de droite de (3.1) :

$$I(x + u, y + v, t + \delta t) \approx I(x, y, t + \delta t) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y \quad (3.2)$$

On peut alors injecter l'expression (3.2) dans la relation (3.1), puis l'homogénéiser en divisant par le pas de temps δt . Si l'on note $u = \frac{\delta x}{\delta t}$ et $v = \frac{\delta y}{\delta t}$ et que l'on fait l'approximation $\frac{\partial I}{\partial t} \approx \frac{I(x, y, t + \delta t) - I(x, y, t)}{\delta t}$, on obtient alors l'équation :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v = 0 \quad (3.3)$$

que l'on trouve aussi sous une forme plus compacte :

$$I_t + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0 \quad (3.4)$$

où $\mathbf{v} = (u, v)^T$. C'est cette contrainte de flot optique (ou OFCE pour *Optical Flow Constraint Equation*) que l'on cherche à vérifier en chaque pixel de Ω . Elle est le point de départ de nombreuses méthodes d'estimation du flot optique. Notons cependant qu'un certain nombre de travaux utilisent la version non linéarisée de (3.3), souvent appelée différence inter-images déplacée (DID) dont la forme est la suivante :

$$I(x + u, y + v, t + 1) - I(x, y, t) = 0 \quad (3.5)$$

Comme nous le verrons dans la suite, les équations (3.3) ou (3.5) ne permettent pas à elles seules une estimation correcte du flot optique. Pour cela, d'autres hypothèses sont nécessaires pour restreindre le nombre de solutions.

Le problème de l'ouverture : Le flot optique ne peut être calculé en se basant uniquement sur l'OFCE (3.3) ou la DID (3.5). En effet, le nombre d'inconnues en chaque pixel est supérieur au nombre de contraintes. Ajoutons à cela le fait qu'en présence de zones homogènes au sein de l'image, l'OFCE est nulle quasiment partout, on est donc face à un problème indéterminé. C'est ce que l'on appelle le *problème de l'ouverture* : on ne possède pas assez d'information pour estimer le mouvement local si l'on ne se base que sur la connaissance de l'OFCE. Il est donc nécessaire de rajouter des contraintes supplémentaires à notre problème afin de réduire l'espace des solutions possibles.

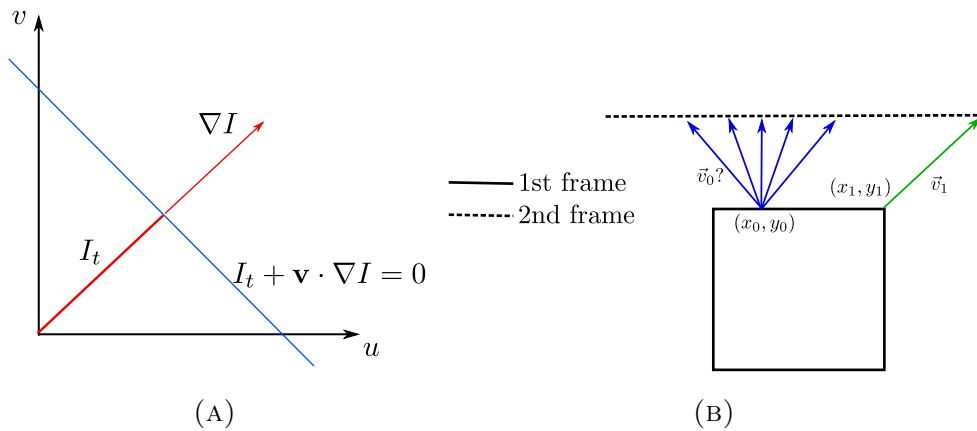


FIGURE 3.3: (a) illustration géométrique de l'OFCE (b) en x_0 , on observe qu'il existe un nombre infini de vecteurs satisfaisant l'OFCE. Pour certains points comme x_1 , la solution est par contre unique.

Géométriquement parlant, on peut voir l'OFCE comme la projection de la solution sur la normale à ∇I (voir Fig. 3.3(a)) : sans autres hypothèses, il est donc uniquement possible d'estimer l'amplitude du mouvement dans la direction du gradient de l'image :

$$\mathbf{v} = -I_t \frac{\nabla I}{|\nabla I|^2}, \quad (3.6)$$

qui est le vecteur de vitesse de plus faible amplitude vérifiant l'OFCE. En présence de zones uniformes ou fortement bruitées, il est facile de voir qu'aucun mouvement fiable ne peut être calculé. Pour pallier ce problème de l'ouverture, de nombreuses méthodes ont été proposées. Elles permettent, le plus souvent sous certaines hypothèses de régularité du champ de vitesse \mathbf{v} , d'obtenir assez de contraintes linéairement indépendantes, assurant ainsi la détermination d'un mouvement local. Celles-ci peuvent être divisées en deux grandes familles qui diffèrent principalement sur la manière dont on introduit l'hypothèse de régularité :

- les méthodes locales
- les méthodes globales

Elles sont présentées en détail dans la suite.

3.1.2 Approches locales

Cette classe de méthodes consiste à considérer, autour d'un pixel donné, un voisinage sur lequel un champ paramétrique (constant, affine, etc.) sera estimé. En faisant par la suite glisser la fenêtre de proche en proche, on peut obtenir sous certaines conditions un champ de mouvement en chaque pixel de l'image.

Approche par corrélation : L'idée des méthodes par corrélation [35] est d'estimer localement un champ constant en s'appuyant sur des mesures de corrélation entre régions de deux images successives. On explore, sur un espace d'état discret, la valeur de la mesure de corrélation définie par :

$$E_c(I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1), I(\mathbf{x}, t)) = -I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1)I(\mathbf{x}, t) \quad (3.7)$$

Cette mesure peut être rendue plus robuste en considérant sa version centrée normalisée :

$$E_c(I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1), I(\mathbf{x}, t)) = \frac{(I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1) - \bar{I}(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1)) (I(\mathbf{x}, t) - \bar{I}(\mathbf{x}, t))}{\sigma_I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1)\sigma_I(\mathbf{x}, t)}$$

où \bar{I} est la moyenne spatiale de I sur Ω et σ_I son écart type. En pratique, pour un pixel donné \mathbf{x}_0 , la mesure E_c est évaluée sur un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ centré en \mathbf{x}_0 . Le vecteur de déplacement local est finalement donné par :

$$\mathbf{v}^* = \underset{\mathbf{v} \in \{-u, \dots, u\} \times \{-v, \dots, v\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)} E_c(I(\mathbf{x} + \mathbf{v}, t + 1), I(\mathbf{x}, t)) \quad (3.8)$$

Notons que le calcul direct de cette fonction de corrélation en chaque pixel et pour chaque valeur discrète de mouvement étant consommateur de temps de calcul, des implémentations très efficaces sont possibles dans le domaine de Fourier.

Approche de Lucas Kanade : Introduite au début des années 1980, la méthode de Lucas et Kanade [36] fait elle aussi l'hypothèse que le mouvement est constant au voisinage d'un pixel donné. Il est ainsi possible de construire une fonctionnelle quadratique de type moindres carrés dont la minimisation produira (sous certaines conditions) un vecteur de déplacement \mathbf{v} . Cette fonctionnelle, en un pixel $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ donné, est de la forme :

$$E(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)) = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)} (I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} \quad (3.9)$$

où $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ est un voisinage centré en \mathbf{x}_0 . Il est possible d'affiner la formulation (3.9) en introduisant une fenêtre de pondération \mathbf{w} accordant plus de poids aux pixels centraux de \mathcal{V}

$$E(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)) = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)} \mathbf{w}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \left(I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} I(\mathbf{x}, t) \right)^2 d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

En chaque pixel, la minimisation de (3.10) revient à résoudre le système linéaire 2×2 suivant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w} * I_x^2 & \mathbf{w} * (I_x I_y) \\ \mathbf{w} * (I_x I_y) & \mathbf{w} * I_y^2 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{w} * (I_x I_t) \\ \mathbf{w} * (I_y I_t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où I_\bullet est la dérivée de I par rapport à \bullet et $*$ le produit de convolution de deux fonctions. On remarque que l'obtention du champ \mathbf{v} nécessite l'inversion de la matrice S qui est en fait le tenseur de structure image. Celui-ci permet d'obtenir un certain nombre d'informations concernant les directions privilégiées par le gradient au voisinage d'un pixel. Très souvent, la fenêtre \mathbf{w} est définie comme une gaussienne d'écart type σ . On cherche dans ce cas à inverser S_σ , le tenseur de structure à l'échelle σ . Si le gradient local est informatif, ce dernier est alors une matrice symétrique définie positive. Sa décomposition en vecteurs propres (\vec{v}_1, \vec{v}_2) et valeurs

propres (λ_1, λ_2) , λ_1 étant fixée comme la valeur propre de plus grande valeur, permet de définir une mesure de confiance C définie telle que :

$$C = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 \quad (3.12)$$

Si $C \approx 1$, alors on peut raisonnablement penser que le mouvement estimé sera localement cohérent. A contrario, si $C \approx 0$, il est probable que l'estimation soit de mauvaise qualité. De telles méthodes sont considérées comme robustes à la présence de bruit, mais ne permettent pas un contrôle très poussé de la cohérence spatiale des vecteurs vitesse, comme nous le verrons par la suite avec les méthodes globales.

3.1.3 Approches globales

Approche fondatrice de Horn et Schunck : L'approche de Horn et Schunck [34] consiste elle aussi à formuler le problème d'estimation du flot optique comme un problème variationnel (cf. section 2.2.2). Cette fois-ci, la fonctionnelle E est séparée en deux termes distincts. Tout d'abord, un terme E_d d'attache aux données, souvent basé sur l'OFCE (3.3) :

$$E_d(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

et un terme E_r de régularité contraignant le champ \mathbf{v} à respecter certaines contraintes de régularité spatiale (cf. section 2.2.2), tel que par exemple :

$$E_r(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (|\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla v(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x}. \quad (3.14)$$

Ainsi la fonctionnelle originelle E de [34] est de la forme :

$$E(\mathbf{v}) = E_d(\mathbf{v}) + \lambda E_r(\mathbf{v}), \quad (3.15)$$

où λ est un paramètre permettant de contrôler l'influence du terme de régularité par rapport au terme de données : lorsque ce dernier prend une valeur trop faible par rapport à la valeur de λ , il sera considéré comme du bruit. Minimiser (3.15) revient à résoudre les équations d'Euler Lagrange associées :

$$\begin{cases} I_x^2 u + I_x I_y v &= \lambda \Delta u - I_x I_t \\ I_x I_y u + I_y^2 v &= \lambda \Delta v - I_y I_t \end{cases} \quad (3.16)$$

où Δ est l'opérateur laplacien. Une discrétisation judicieuse de ce dernier permet de résoudre le système (3.16) en suivant le schéma itératif de type Jacobi ci-dessous :

$$\begin{cases} u^{n+1} &= u^n - I_x \frac{I_x u^n + I_y v^n + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2} \\ v^{n+1} &= v^n - I_y \frac{I_x u^n + I_y v^n + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Les approches globales ont, en comparaison aux approches locales, l'avantage de produire un champ de mouvement dense sur tout le domaine image Ω . Dans les zones de luminosité homogène (à gradient nul), aucune information image n'est en effet disponible pour permettre l'estimation du mouvement. Dans ce cas, le terme de régularité des méthodes globales permet de combler les trous et propage progressivement l'information à partir des zones dans lesquelles le gradient image est informatif. Cependant, cela peut aussi avoir certains effets indésirables, notamment un lissage trop important du champ dans les zones où celui-ci est discontinu (bords d'objets par exemple). Pour cela, de nombreux travaux se sont portés sur la définition de termes de régularité alternatifs.

Préservation des discontinuités : Une formulation variationnelle comprenant un terme de régularisation de type (3.14) est intéressante car elle permet d'inclure de manière explicite une contrainte de cohérence spatiale sur la solution. Cependant, une régularisation telle que $|\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla v(\mathbf{x}, t)|^2$ peut poser un certain nombre de problèmes si le profil du champ de vitesse est discontinu : celle-ci aura en effet tendance à lisser le champ solution de manière exagérée, ce qui peut se révéler préjudiciable en pratique. De nombreux travaux se sont donc portés sur

l'amélioration de ce terme de régularité. Notons que la formulation classique de Horn et Schunck de la partie 3.1.3 se base sur la norme L_2 pour pénaliser les valeurs de gradients du mouvement. Il est possible de généraliser cette approche en utilisant dans un premier temps une fonction générique de régularité Φ (dans le cas de Horn et Schunck, on a $\Phi(x) = \|x\|^2$). Le choix d'une telle fonction à caractère homogène isotrope¹ peut poser problème dans les situations suivantes : fortes discontinuités du champ solution, structures d'intérêt tel que les tourbillons en mécanique des fluides, etc. Certains auteurs ont donc cherché à définir Φ comme une fonction anisotrope permettant de mieux respecter les structures d'intérêt du champ de mouvement. Celles-ci peuvent se ranger dans deux catégories distinctes [37] : régularisation orientée par la donnée image, et régularisation orientée par le champ de vitesses. Les régulariseurs appartenant à la première catégorie sont de la forme :

$$E_r(\nabla I, \nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \Phi(\nabla I) (|\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla v(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

où Φ , dépendant des gradients de l'image, peut être isotropique ou anisotropique. Un tel modèle fait l'hypothèse que les discontinuités du mouvement sont fortement corrélées avec les discontinuités au sein de l'image. Cela est souvent correct dans le cas de mouvements rigides associés à des objets distincts au sein d'une image, mais est moins intéressant lorsque l'on étudie des images fluides. Il peut alors être plus intéressant de choisir un régulariseur du deuxième type, i.e. ceux portant sur les variations locales du champ de mouvement (le comportement est donc orienté par ces dernières). Ils peuvent s'exprimer sous la forme :

$$E_r(\nabla I, \nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \Phi(\nabla u(\mathbf{x}, t)) + \Phi(\nabla v(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \quad (3.19)$$

où Φ , dépendant des gradients du champ de mouvement, peut être isotropique ou anisotropique. Il est possible de formaliser et analyser de telles fonctions dans le cadre des processus de diffusion [37]. Ces fonctions sont très performantes en pratique, et sont en particulier très robustes à la présence d'*outliers* (points de données aberrant). Cependant, la minimisation de fonctionnelles basées sur de telles

1. Elle pénalise de la même manière les deux composantes u et v .

régularisations n'est pas triviale. Une alternative est d'utiliser une classe de fonctions appelées semi-quadratiques [38, 39] qui bénéficient des avantages des fonctions robustes décrites au-dessus tout en permettant une méthode de minimisation simple et rapide. Celles-ci sont à présent utilisées dans toutes les méthodes les plus performantes de la littérature. De nombreux choix de régularisateurs robustes sont possibles [40, 41], et la question de savoir lequel est le plus efficace reste ouverte.

3.1.4 Approches multi-échelles

De nos jours, la majorité des méthodes de l'état de l'art [42–44] utilisent des techniques multi-échelles [45] d'estimation du mouvement. Cela permet la réduction de la complexité du calcul en accélérant la convergence des schémas itératifs, ainsi qu'une augmentation de la gamme de déplacements mesurables. Dans cette section, nous allons nous intéresser à ce deuxième aspect. En raison de sa nature différentielle, l'OFCE telle que définie en (3.4) est valide en présence de mouvements de faible amplitude et si le gradient de l'image est suffisamment informatif. Si l'on est en présence de grands déplacements, il peut alors être intéressant de s'appuyer sur une approche multi-échelles. Pour des raisons de simplicité, on fera l'hypothèse que l'on cherche à estimer le mouvement au sein d'une séquence composée de deux images seulement. L'idée principale des méthodes multi-échelles est de créer une séquence d'images de plus en plus grossières à partir de la paire d'images initiales. Deux techniques sont souvent utilisées pour la construction de séquence grossière : la première [46] consiste à réduire progressivement la résolution de l'image (cf. Fig. 3.4a), et la seconde repose sur sa dérivation en espaces d'échelles [47] (cf. Fig. 3.4b, on travaille donc à résolution constante). Ces deux approches sont en théorie équivalentes, la première étant souvent préférée car elle permet une réduction significative du coût de calcul.

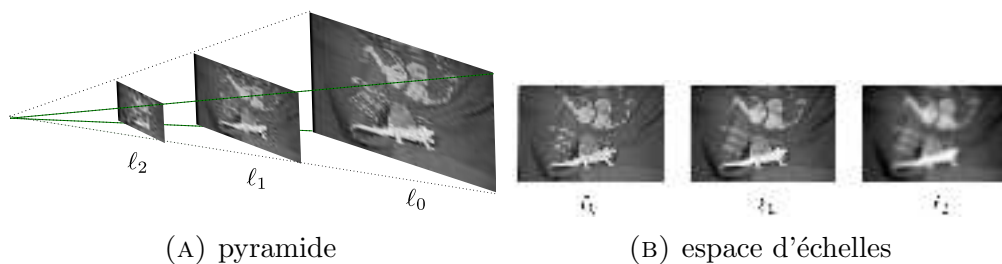


FIGURE 3.4: Illustration des deux approches principales pour l'estimation multi-échelles

Prenons l'exemple de l'approche pyramidale [46], et supposons que l'on considère un nombre d'échelles suffisant pour qu'à l'échelle la plus grossière, les mouvements de plus grande amplitude soient de l'ordre du pixel. Il est donc dans ce cas possible de s'appuyer sur l'OFCE (3.4) pour estimer les grandes structures du champ de déplacement. On estimera dans ce cas les composantes de mouvement correspondant aux basses fréquences du champ final. Cette solution sera progressivement raffinée en descendant dans les niveaux de plus en plus fins, jusqu'au niveau final correspondant à l'image initiale. En pratique, la pyramide est construite en réduisant les images d'un facteur $\theta \in]0, 1[$. Avant chaque étape de réduction, il est important d'appliquer un filtre passe bas pour éviter tout problème d'aliasing. Les images sont ensuite réduites en utilisant une procédure d'interpolation. En ce qui concerne l'approche par espaces d'échelles, c'est le filtre passe bas (souvent gaussien) utilisé pour la construction de l'espace d'échelles qui va augmenter la portée des opérateurs de dérivation et ainsi permettre d'estimer les déplacements de grande amplitude. Dans la prochaine section, nous verrons comment les schémas multi-échelles sont exploités en pratique pour l'estimation du flot optique.

3.1.5 Approches multi-échelles pour l'estimation incrémentale du flot optique

Revenons à la situation décrite précédemment en section 3.1.4 : si l'on considère un nombre suffisant d'échelles pour que les plus grands déplacements soient de l'ordre du pixel au niveau ℓ , il est alors possible de calculer un champ de mouvement \mathbf{v}^ℓ car l'équation (3.4) est valide à cette échelle. On peut ensuite propager ce champ au niveau inférieur $\ell - 1$ en utilisant une procédure d'interpolation. On a alors :

$$\tilde{\mathbf{v}}^\ell(\mathbf{x}) = \frac{1}{\theta} \mathbf{v}^\ell(\theta \mathbf{x}) \quad (3.20)$$

où, rappelons-le, θ est le ratio de taille entre deux niveaux d'échelles adjacents. Au niveau $\ell - 1$, on va donc chercher à estimer l'incrément de champ restant $d\mathbf{v}_r^{\ell-1} = \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}^\ell$. On peut donc remplacer l'estimation du mouvement au niveau $\ell - 1$ entre $I(\mathbf{x}, t)$ et $I(\mathbf{x}, t + dt)$ par celle du mouvement entre $I(\mathbf{x}, t)$ et l'image « recalée » $I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}^\ell, t + dt)$. Cette dernière, facilement calculable à l'aide d'une procédure d'interpolation, est plus « proche » de la première image : l'estimation du

mouvement restant est donc plus aisée. Cette procédure de recalage est également appelée *warping*. Le terme d'attache aux données recalé s'écrira donc

$$E_d(d\mathbf{v}_r^{\ell-1}) = \int_{\Omega} (I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}^\ell, t + 1) - I(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{v}_r^{\ell-1} \cdot \nabla I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}^\ell, t + 1))^2 d\mathbf{x}.$$

Ce terme reste linéaire par rapport à l'incrément $d\mathbf{v}_r^{\ell-1}$ que l'on souhaite estimer au niveau $\ell - 1$. Une fois ce dernier estimé, on calcule le champ de mouvement au niveau $\ell - 1$ comme la somme des deux composantes $\mathbf{v}^{\ell-1} = \tilde{\mathbf{v}}^\ell + d\mathbf{v}_r^{\ell-1}$ et on répète le processus jusqu'à atteindre le niveau le plus fin. Le processus complet est illustré en Table 3.1.

Approche multi-échelle unidirectionnelle
1) Initialisation :
(a) définir un ensemble d'échelles $L = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_N\}$
(b) calculer $I^\ell, \forall \ell \in L$
(c) définir $\mathbf{v}^{\ell_{N+1}} := 0$
(d) définir $\ell = \ell_N$
2) Estimation incrémentale pour le niveau ℓ :
(a) initialisation au niveau ℓ : $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\theta} \mathbf{v}^{\ell+1}(\theta \mathbf{x})$
(b) calculer l'image recalée $I^\ell(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$
(c) estimer l'incrément de vitesse $d\mathbf{v}_r^\ell$ à l'aide d'une méthode d'estimation quelconque
(d) ajout de l'incrément $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}} + d\mathbf{v}_r^\ell$
(e) goto à b) jusqu'à convergence ($ d\mathbf{v}_r^\ell < \epsilon$)
(f) $\mathbf{v}^\ell = \tilde{\mathbf{v}}$
3) augmenter la résolution $\ell := \ell - 1$
4) goto 2) jusqu'à $\ell = \ell_0$
Note : en général, l'estimation de $d\mathbf{v}_r^\ell$ à l'étape 2)-(c) est effectuée par une méthode itérative.

TABLE 3.1: Approche multi-échelles pour l'estimation incrémentale du flot optique

3.1.6 Discussion

Estimer de manière précise le champ de déplacement au sein d'une séquence d'images est un problème clef de la vision par ordinateur. Ce mouvement est lié au déplacement des pixels d'une image à l'autre et résulte souvent de la projection bidimensionnelle d'un phénomène en trois dimensions. De nombreux travaux ont

été proposés par la communauté scientifique, mais les approches variationnelles globales sont reconnues comme étant les plus efficaces. Celles-ci permettent, à travers un formalisme clair et détaillé, d'imposer un certain nombre de contraintes à la solution finale grâce au terme de régularité constituant la fonctionnelle. En présence de grands déplacements, il est nécessaire de définir le terme d'attache aux données dans un cadre multi-échelles pour accroître la gamme de mouvements mesurables. Afin d'évaluer les performances des différentes méthodes proposées par la communauté scientifique, des jeux de données en ligne sont proposés, le plus connu étant sans doute celui du Middlebury College [48]. Des travaux intéressants [42, 49] comparant les différentes méthodes de la littérature permettent aussi de se faire une idée des avantages et défauts de chacune d'entre elles. Ajoutons enfin que des termes alternatifs d'attache aux données ont été proposés : en particulier, certains auteurs s'appuient sur une contrainte de conservation des gradients de l'image [50] (utilisée en plus de l'OFCE). Dans la suite, nous nous intéresserons aux méthodes d'estimation du flot optique dédiées aux mouvements fluides.

3.2 Estimation du mouvement pour la physique

3.2.1 Position du problème

L'analyse de champs de mouvements à partir de séquences d'images permet de fournir une quantité d'informations dans de nombreux domaines de la physique. En météorologie, le volume grandissant d'images satellites et leur utilisation pour la reconstruction de champs de vents suscite l'intérêt d'un grand nombre de scientifiques. Une telle approche permet par exemple l'initialisation de modèles de prédiction météorologique. En imagerie médicale, l'étude du flot sanguin peut être grandement facilitée à travers l'acquisition de séquences d'images couplée à une étape d'estimation du mouvement. Dans le domaine de la physique expérimentale, les techniques PIV (*Particle Image Velocimetry*) permettent l'étude et l'analyse de mouvements fluides tout en limitant l'intrusion de capteurs (fils chauds par exemple) dans le dispositif expérimental. Enfin, dans le domaine des sciences géophysiques, comme par exemple l'océanographie, on s'intéresse au suivi de courants marins ou à la dispersion de polluants, notamment à travers le suivi de traceurs lagrangiens. Les approches introduites précédemment sont essentiellement des estimateurs de champs de mouvements génériques. Dans ce contexte, une attention particulière

est portée aux mouvements d'objets solides en s'appuyant sur des hypothèses de conservation de la luminance ou de continuité par morceaux de la solution. De tels modèles, bien qu'efficaces, ne permettent pas en général d'estimer précisément des mouvements physiques, en particulier des mouvements fluides. Dans cette section, nous commencerons par introduire des termes d'observations adaptés aux images fluides, puis nous tournerons notre attention vers certains termes de régularité basés sur des hypothèses issues de la mécanique des fluides.

3.2.2 Termes d'observation

Afin d'améliorer l'estimation de mouvements fluides, des termes spécifiques d'attache aux données images ont été introduits pour mieux rendre compte des lois physiques régissant ces derniers. Les travaux brièvement présentés ci-dessous proposent ainsi des alternatives à l'OFCE (3.4) :

- Plusieurs estimateurs dédiés aux mouvements fluides se basent sur l'équation de continuité [51–53] afin d'en dériver un terme de données adéquat. Pour rappel, celle-ci a pour expression :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.21)$$

où $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$ et ρ la densité du fluide. Dans le cas de l'analyse d'images atmosphériques pour lequel on visualise une quantité 2D intégrée delon la verticale, il est possible de projeter l'équation (3.21) selon l'axe z correspondant, et de définir les quantités suivantes :

$$\tilde{u} = \frac{\int \rho u dz}{\int \rho dz}, \quad \tilde{v} = \frac{\int \rho v dz}{\int \rho dz}, \quad I \approx \int \rho dz \quad (3.22)$$

pour finalement obtenir le terme de données suivant

$$I_t + \nabla \cdot (I \mathbf{v}) = 0 \quad (3.23)$$

où $\mathbf{v} = (\tilde{u}, \tilde{v})^T$. Notons que dans le cas d'un écoulement incompressible, (3.23) devient identique à l'OFCE (3.4).

- dans [53], est proposée une version intégrée de l'équation de continuité (3.21). En considérant le mouvement constant entre deux images consécutives puis en intégrant (3.21) selon les trajectoires de chaque particule fluide, on obtient

le terme ICE (pour *Integrated Continuity Equation*) suivant :

$$I(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}), t + 1)e^{\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})} + I(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.24)$$

Le terme exponentiel fonction de la divergence permet d'une part de modéliser la perte de densité le long de la dilatation ($\nabla \cdot \mathbf{v}(x) \geq 0 \Rightarrow e^{\nabla \cdot \mathbf{v}(x)} \geq 1$ dans ce cas), mais aussi de compenser le gain de densité en présence de compression (on a alors $\nabla \cdot \mathbf{v}(x) \leq 0 \Rightarrow e^{\nabla \cdot \mathbf{v}(x)} \leq 1$). La non-linéarité de (3.24) nécessite l'utilisation d'une approche multi-résolution.

- dans [54, 55], Su et Dahm adaptent l'équation de transport scalaire pour l'étude du mouvement à l'aide d'images PLIF (*Planar Laser-Induced Fluorescence*). En assimilant le champ de concentration scalaire à la luminance de l'image, le terme de données suivant est obtenu :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I - \frac{1}{ReSc} \Delta I = 0 \quad (3.25)$$

Comme nous l'avons vu en section 1.2.3, le terme de laplacien $\frac{1}{ReSc} \Delta I$ a pour effet de diffuser les valeurs du champs scalaire I au cours du temps.

- dans [56], une extension de (3.25) est dérivée dans le cas de fluides turbulents. Celle ci se base sur une approche de type LES et l'utilisation d'un filtre passe bas dont la taille est liée à la précision de la grille pixellique. Le terme de données est finalement de la forme :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I - \frac{1}{ReSc} \Delta I + \nabla \cdot \tau_I = 0 \quad (3.26)$$

où

$$\tau_I = -D_t \nabla I \quad (3.27)$$

et D_t une constante à déterminer. On modélise donc l'effet des fines échelles du champ de concentration scalaire par une hypothèse de viscosité turbulente. Finalement, on utilise comme contrainte d'attache aux données image l'expression suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I - \left(\frac{1}{ReSc} + D_t \right) \Delta I = 0 \quad (3.28)$$

Dans la section suivante, nous présentons certains travaux relatifs à l'adaptation du terme de régularité pour l'étude de mouvements fluides.

3.2.3 Termes de régularisations adaptés aux fluides

Comme nous l'avons dit précédemment, une régularisation classique de type Horn et Shunck (3.14) est trop restrictive et ne permet pas, dans de nombreuses situations, de respecter la distribution spatiale réelle des composantes de vitesse. Certaines contraintes basées sur des principes physiques ont donc été proposées par la communauté scientifique.

Formulations de type divergence-rotationnel : Il est possible de décomposer un champ de vecteurs \mathbf{v} en trois composantes : laminaire, solénoïdale (à divergence nulle) et irrotationnelle (rotationnel nul). On a ainsi :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{lam} + \mathbf{v}_{sol} + \mathbf{v}_{irr} \quad (3.29)$$

où, par définition, on a les relations suivantes

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}_{sol} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{v}_{irr} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Une décomposition de type équation (3.29) porte le nom de décomposition de Helmholtz, et permet de séparer clairement les composantes du champ correspondant à certaines caractéristiques spécifiques : \mathbf{v}_{lam} représentera la partie laminaire du champ, \mathbf{v}_{sol} les composantes tourbillonnaires et \mathbf{v}_{irr} les zones de « puits » ou « sources ». Nous allons à présent montrer que le terme de régularisation proposé par Horn and Shunck (voir (3.14)) a tendance à favoriser la composante laminaire \mathbf{v}_{lam} du champ estimé, au détriment de \mathbf{v}_{sol} et \mathbf{v}_{irr} . Rappelons ici l'expression de ce terme de régularisation :

$$E_r(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (|\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla v(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

Les équations de Euler Lagrange associées s'expriment sous la forme de deux équations de Laplace :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

où la notation $f_{x_1x_2}$ désigne la dérivée seconde de f par rapport à x_1 et x_2 . Considérons à présent un terme pénalisant explicitement les composantes solénoïdales et irrotationnelles, de type :

$$E_r(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\alpha |\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 + \beta |\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2) d\mathbf{x} \quad (3.33)$$

où α et β sont deux termes de pondération. Les équations de Euler Lagrange associées à (3.33) sont :

$$\begin{cases} \alpha u_{xx} + \beta u_{yy} + (\alpha - \beta)v_{xy} = 0 \\ \beta v_{xx} + \alpha v_{yy} + (\alpha - \beta)u_{xy} = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Il est aisé de voir que si $\alpha = \beta$, alors les termes de lissage (3.31) et (3.33) sont équivalents. Un lissage de type Horn and Shunck aura donc tendance à pénaliser les composantes de vorticité et de divergence, favorisant ainsi les solutions laminaires. Dans le cas de mouvements turbulents, pour lesquels la composante de vorticité peut être très importante, il peut alors être intéressant de se tourner vers un lissage de type (3.33) en fixant $\alpha \gg \beta$.   l'inverse, pour certaines situations dans le domaine de la météorologie, certaines zones à forte divergence sont cruciales pour la compréhension des phénomènes particuliers tels que les effets convectifs générant d'importants mouvements verticaux, se traduisant par des divergences bidimensionnelles importantes dans l'image. Une approche distinguant les composantes de vorticité et divergence est donc plus souple et permet une meilleure estimation des mouvements fluides en général. Une idée intéressante serait ensuite de réaliser un lissage de type div/curl au second ordre, i.e. se baser sur un terme de type :

$$E_r(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\alpha |\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))|^2 + \beta |\nabla(\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))|^2) d\mathbf{x} \quad (3.35)$$

Cependant, les équations d'Euler Lagrange associées [33, 53] conduisent à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 4 entraînant des instabilités numériques. Ainsi, une alternative proposée dans [53] est d'utiliser un lissage régularisé de type :

$$E_r(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (|\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \xi|^2 + \alpha |\nabla \xi|^2) d\mathbf{x} \quad (3.36)$$

$$+ \int_{\Omega} (|\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \zeta|^2 + \beta |\nabla \zeta|^2) d\mathbf{x} \quad (3.37)$$

où ξ et ζ sont respectivement des quantités approximant les composantes de vorticité et de divergence de \mathbf{v} . Un schéma de minimisation alternée entre les couples (u, v) et (ξ, ζ) est alors utilisé. Notons enfin que dans [57], les auteurs s'appuient sur des fonctions de potentiels qui sont des versions intégrées des composantes solénoïdale et irrotationnelle.

Modèle dynamique : Dans [58], les auteurs se basent sur la formulation vorticité/divergence des équations de Navier-Stokes dans le cas 2D. L'utilisation d'un noyau de Green $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x}|)$ permet de décomposer le champ solution \mathbf{v} selon :

$$\mathbf{v} = \nabla G * \xi + \nabla^\perp G * \zeta \quad (3.38)$$

où ξ et ζ sont respectivement les composantes de vorticité et de divergence de \mathbf{v} . Le système ci-dessous fournit ensuite une contrainte d'évolution temporelle de ces deux quantités :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \cdot \nabla \xi(t) + \xi(t)\zeta(t) - \nu_\xi \Delta \xi(t) \\ -\nu_\zeta \Delta \zeta(t) \end{bmatrix} = \nu(t) \quad (3.39)$$

où $\nu(t)$ modélise les déviations de ce modèle approché par rapport à l'évolution temporelle réelle de la solution. On combine ensuite le système décrit en (3.39) avec des observations issues des images basées sur l'OFCE. La solution finale est obtenue par utilisation d'une méthode d'assimilation de données variationnelle introduite en section 2.4. Elle représente le « meilleur » compromis entre la loi d'évolution temporelle (3.39) et les données provenant des images. Une telle minimisation permet de plus de pallier un éventuel manque de données ou la présence de bruit.

3.3 Discussion

On a introduit dans cette partie certaines méthodes constituant la base de l'estimation de mouvements fluides à partir de séquences d'images. Celles-ci peuvent se séparer en deux axes principaux :

- un certain nombre de travaux proposent d'utiliser différents termes de données image : l'adaptation d'équations physiques afin de remplacer l'OFCE permet souvent d'améliorer l'estimation globale ;
- certains auteurs ont cherché à modifier le terme de régularisation afin de respecter au mieux certaines contraintes physiques. On peut par exemple s'appuyer sur la décomposition de Helmholtz ou encore avoir recours à des méthodes d'assimilation de données.

Dans le prochain chapitre, nous introduisons de nouveaux termes de données pour l'estimation du mouvement dans un cadre multi-échelles. Pour un niveau d'échelle donné, ces termes d'observations introduisent de manière explicite des informations relatives aux niveaux plus fins habituellement négligés dans les approches classiques.

Chapitre 4

Termes d'observations basés sur les interactions entre échelles pour l'estimation du flot optique

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, presque toutes les méthodes d'estimation du mouvement possèdent une déclinaison multi-échelles couplée à une approche incrémentale. Cela permet une meilleure estimation des mouvements de grande amplitude par estimations successives aux différents niveaux d'échelles, et améliore bien souvent de manière significative les résultats. Cependant, chaque niveau d'échelle est en général considéré de manière indépendante des autres et les interactions entre échelles sont complètement ignorées (notamment l'influence des fines échelles sur les plus grandes). Cela ne nous semble pas optimal, car comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 dans le cas des mouvements turbulents, cette influence n'est pas négligeable. Dans cette partie, nous allons introduire un certain nombre de termes d'observations dérivés de l'OFCE (3.4). Ces derniers, inspirés de l'approche LES en mécanique des fluides, ont pour but d'assurer un meilleur lien inter-échelles. À chaque niveau d'échelle, nous filtrerons l'OFCE et séparerons les variables d'intérêts en composantes résolues (i.e. à la résolution considérée) et sous-maille (i.e. correspondant à des échelles plus fines). Une telle approche amène à dériver de nouveaux termes de données permettant la prise en compte, pour un niveau d'échelle donné, de l'influence de fines échelles habituellement négligées

car éliminées par le processus de filtrage. Nous proposons ensuite deux méthodes d'estimation : une approche générale pour laquelle aucun a priori particulier sur les interactions entre échelles n'est supposé connu, et un modèle plus spécifique permettant la prise en compte d'éventuels a prioris. Pour finir, plusieurs expériences seront réalisées afin d'évaluer les performances d'un tel terme d'observation en l'incluant dans un estimateur de type Lucas-Kanade (4.26).

4.2 Approche multi-échelle pour l'estimation du flot optique

4.2.1 Motivations

Rappelons que pour estimer le mouvement au sein d'une séquence d'images, il est nécessaire de définir un terme d'*observation* (ou encore terme d'attache aux données) $E_d(\mathbf{v}, I)$ reliant le champ de mouvement $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$, $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et le champ scalaire de luminance $I(\mathbf{x}, t)$. Un des termes d'observations les plus utilisés est l'OFCE (3.4) dont l'expression est rappelée ci-dessous :

$$E_d(\mathbf{v}, I) = \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t) \approx 0. \quad (4.1)$$

Bien souvent, $E_d(\mathbf{v}, I)$ est combiné avec un terme de régularisation $E_r(\mathbf{v}, I)$ contraignant la solution selon certaines hypothèses a priori : régularité du champs, présence d'occlusions, discontinuités, modèles physiques, etc. (cf. le chapitre précédent pour une présentation générale de ces approches). nous avons vu précédemment q'un certain nombre de difficultés se posent lors de l'estimation de \mathbf{v} à l'aide de $E_d(\mathbf{v}, I)$ et $E_r(\mathbf{v}, I)$ en présence de grands déplacements (grandes valeurs de $|\mathbf{v}(\mathbf{x})|$). Ces derniers sont en effet difficiles à estimer lorsque l'on travaille uniquement à la résolution initiale de l'image : la portée des opérateurs de dérivation ne permettant pas dans certains cas de relier le gradient image ∇I au mouvement qui lui est associé. Nous avons vu également que les approches multi-échelles (voir [45, 46] et section 3.1.4) représentent une famille de méthodes permettant de résoudre partiellement ce problème. Elles sont rappelées dans la suite pour le cadre de l'estimation du flot optique.

4.2.2 Estimation multi-échelles du mouvement

Les méthodes multi-échelles consistent à redéfinir le problème d'estimation du mouvement en une série de problèmes auxiliaires, chacun d'entre eux étant associé à un certain niveau de résolution. On commence donc par décomposer l'image (dans le cas du flot optique, la séquence d'images) initiale en un ensemble d'images plus grossières indexées par $\ell \in L = \{\ell_0, \dots, \ell_N\}$ (ℓ_0 correspondant au niveau le plus fin (i.e. le niveau du pixel) et ℓ_N au plus grossier). La dérivation d'une telle structure « coarse to fine » est traditionnellement réalisée par une décomposition pyramidale ou une décomposition de type espaces d'échelles.

Deux approches de minimisation sont possibles afin de parcourir la structure de données : minimisation *unidirectionnelle* (coarse to fine) ou *bi-directionnelle*. Pour les approches unidirectionnelles, l'estimation démarre au niveau le plus grossier ℓ_N , pour lequel on fait l'hypothèse qu'uniquement de petits mouvements (par rapport à l'échelle d'intérêt) apparaissent. Dans ce cas, l'OFCE (4.1) peut être considérée comme valide. Le champs basse résolution ainsi estimé \mathbf{v}^{ℓ_N} peut alors servir d'initialisation au niveau (plus fin) suivant ℓ_{N-1} où un autre incrément de vitesse sera estimé en utilisant l'OFCE compensée définie à la résolution adéquate. Un tel processus est ensuite itéré jusqu'à atteindre l'échelle la plus fine correspondant à la grille de pixels initiale. Les techniques bi-directionnelles [59, 60] (aussi appelées *full multigrid*) se basent elles aussi sur une hiérarchie d'équations à résoudre de manière successive. Elles représentent une généralisation des méthodes unidirectionnelles puisqu'elles permettent d'explorer de manière ascendante et descendante les différents niveaux d'échelles : en propageant l'erreur résiduelle de la solution courante aux différents niveaux (plus grossier ou plus fin), elles essayent d'améliorer l'échange d'informations entre les hautes et les basses fréquences de cette dernière. Dans ce chapitre, nous nous sommes limités aux méthodes uni-directionnelles. Un nombre conséquent de contributions concernant les méthodes multi-échelles ont été proposées par la communauté scientifique. Cependant, malgré leur estimation toujours plus précise des grands déplacements, les stratégies multi-échelles classiques auront tendance à considérer les différentes estimations à chaque niveau d'échelle comme des problèmes totalement indépendants. En effet, aux niveaux les plus grossiers, on ne tient absolument pas compte de l'information issue des niveaux d'échelles plus fins : cela peut détériorer la qualité des résultats, et favoriser la répercussion incontrôlée des erreurs faites aux grandes échelles lors de l'estimation

des fines structures.

De nombreux auteurs ont mis au point des stratégies afin de contrôler ou minimiser cette propagation des erreurs qui apparaît dans les méthodes multi-échelles. Par exemple dans [61], Sizintsev et al. introduisent une approche adaptive utilisant des fenêtres de corrélation inter-échelles. Cela permet de réduire l'erreur de propagation, notamment au niveau des frontières du champ. Avec le même objectif, les auteurs de [62] utilisent une sur-segmentation multi-niveau couplée à des méthodes de programmation dynamique afin de permettre une meilleure régularisation du champ de mouvement selon les échelles. Récemment, Brox et Malik [63] ont étudié les liens entre les différentes structures au sein d'une image donnée et leur mouvement associé. Une attention particulière est donnée aux mouvements du corps humain ainsi qu'aux petits objets à vitesse rapide. Leur approche se base sur l'intégration d'un riche ensemble de descripteurs adaptés au niveau de résolution considéré au sein de la fonctionnelle à minimiser. Enfin, dans [64], les auteurs cherchent à réduire l'influence sur l'estimation finale du champ estimé aux échelles grossière. Leur méthode multi-échelle se base sur la sélection, entre chaque niveau, du meilleur candidat pour le propager aux niveaux plus fins. En général, toutes ces méthodes cherchent à minimiser l'erreur de propagation à chaque niveau d'échelle considéré, mais aucune d'entre elles n'essaye de formaliser clairement l'influence des fines échelles sur les échelles de plus grandes tailles.

Dans ce chapitre, nous formalisons de manière explicite de telles interactions entre les différents niveaux d'échelles. Considérons une échelle donnée ℓ : la plupart des méthodes multi-échelles se basent sur un terme d'attache au données E_d^ℓ qui est en fait une simple adaptation de E_d défini sur l'image au niveau considéré I^ℓ (cf. équation (4.14) ci dessous pour plus de détails dans le cas de l'OFCE). Nous proposons d'enrichir E_d^ℓ en incluant certaines informations venant de niveaux d'échelles plus fins $\ell' < \ell$. Pour cela, nous redéfinissons l'équation de conservation (4.1) en décomposant le champ de mouvement et la composante de luminance en quantités résolues (i.e. à l'échelle considérée) et sous maille (échelles plus fines). Une telle approche est grandement inspirée de l'approche LES en mécanique des fluides. Cela débouche sur la définition d'un nouveau terme de données E_{IS} (IS signifiant *Interaction between Scales*).

4.3 Formulation sous maille de l'OFCE

Pour le reste de ce chapitre, nous utiliserons le terme *sous-maille* pour définir des quantités dont l'échelle correspondante est plus petite que l'échelle à laquelle on effectue l'estimation. Une telle taxonomie est directement inspirée du domaine de la simulation des grandes échelles (LES, cf. [3, 11]) en mécanique des fluides (voir section 1.4.5). L'idée principale des méthodes LES est de définir une équation à une échelle donnée grâce à l'introduction d'un filtre spatial ainsi qu'en décomposant les variables d'intérêt de la manière suivante : considérons une fonction quelconque ϕ que l'on sépare en deux composantes $\bar{\phi}$ et ϕ' tel que : $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ (voir illustration 1D en Fig. 4.1). Le terme $\bar{\phi}$ correspond à la partie dite *résolue* de ϕ à une certaine échelle : l'opérateur $\bar{(\cdot)}$ peut être modélisé comme un filtre passe bas, par exemple gaussien. Le second terme ϕ' , appelé composante *sous maille*, est constitué de toutes les hautes fréquences restantes de ϕ . On peut donc voir $\bar{\phi}$ comme l'information à un certain niveau d'échelle ℓ (défini par le filtre passe bas $\bar{(\cdot)}$) et ϕ' comme l'information correspondant à des niveaux d'échelles $\ell' < \ell$ qui sont habituellement négligés au niveau ℓ . Un tel formalisme permet de séparer clairement les contributions des différentes échelles de la solution lors de la résolution d'équations d'évolution, de transport, etc.

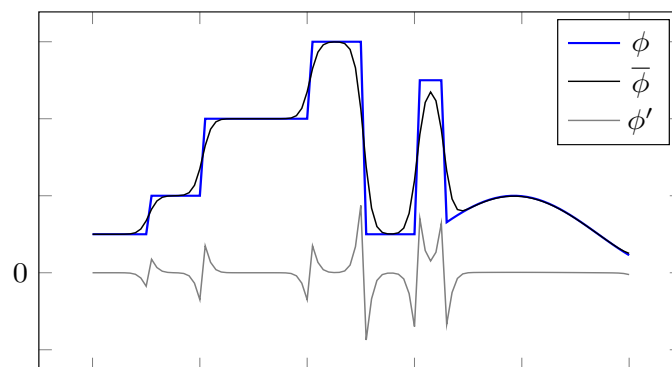


FIGURE 4.1: **Décomposition d'une variable 1D ϕ** en composantes résolue et sous maille

Nous proposons d'appliquer un formalisme similaire à l'OFCE (4.1) qui est tout simplement une équation de transport de la luminance. Il est établi que s'appuyer sur l'OFCE à la simple résolution initiale de l'image permet uniquement de lier les mouvements de faible amplitude au gradient de l'image. C'est pour cela que dans le cas de l'approche multi-échelle par espaces d'échelles, on utilise plutôt l'OFCE filtrée, ce qui permet d'accroître la portée des opérateurs de gradient et

d'estimer ainsi une gamme de mouvements plus large. Dans la suite, plutôt que de considérer directement l'OFCE définie sur des variables filtrées, nous suivrons le même principe que les méthodes LES pour filtrer l'OFCE. L'application d'un opérateur de type filtrage passe bas permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\overline{E_d(\mathbf{v}, I)} = \overline{\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I \right)}. \quad (4.2)$$

Sous l'hypothèse que $\overline{(\cdot)}$ commute avec les opérateurs différentiels (celle-ci est vérifiée pour les filtres classiques tels que les filtres gaussiens, top-hat, etc.) et est distributif par rapport à l'opérateur d'addition [3], on a :

$$\overline{\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I \right)} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla I}. \quad (4.3)$$

On décompose ensuite \mathbf{v} et I en parties résolues et sous maille, i.e. :

$$\begin{cases} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \\ I &= \bar{I} + I' \end{cases} \quad (4.4)$$

obtenant ainsi pour le deuxième terme de droite de l'équation (4.3) :

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \nabla I} = \overline{(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')(\nabla \bar{I} + \nabla I')} \quad (4.5)$$

$$= \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I}} + \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla I'} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{I}} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla I'}. \quad (4.6)$$

Si l'on revient à (4.3), on a donc

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla I} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I}} + \underbrace{\overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla I'} - \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{I}}}_{\text{ajoute/retranche}} \quad (4.7)$$

$$= \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I}} + \tau_{\text{sg}}, \quad (4.8)$$

avec τ_{sg} ayant pour expression :

$$\tau_{sg} = \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla \bar{I}} - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} \quad (4.9)$$

$$= \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I}} - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} + \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla I'} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{I}} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla I'}. \quad (4.10)$$

On peut analyser plus en profondeur la composition du tenseur τ_{sg} et en dériver les trois composantes suivantes :

$$\tau_{sg} = L + R + C, \quad (4.11)$$

où

$$\begin{cases} L = \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I}} - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} \\ R = \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla I'} \\ C = \overline{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla I'} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{I}} \end{cases} \quad (4.12)$$

L est souvent appelé tenseur des contributions résolues, R est la contribution des termes de sous maille et C est le tenseur des contributions croisées. En pratique en mécanique des fluides, on peut modéliser de manière spécifique chacune de ces composantes.

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\overline{E_d(\mathbf{v}, I)} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} + \tau_{sg} \quad (4.13)$$

L'expression (4.13) peut se diviser en deux parties : la première est exactement l'OFCE définie sur des variables filtrées, tandis que la seconde partie (le tenseur τ_{sg}) regroupe des combinaisons filtrées de composantes sous maille et résolues. Les méthodes d'estimation du mouvement classiques ne prennent en compte que la première partie, et le tenseur τ_{sg} est souvent négligé. L'approche que nous proposons dans la suite, basée sur l'expression (4.13), permet d'inclure pour chaque niveau d'échelle la contribution des composantes correspondant aux échelles plus fines. En

effet, des termes tels que $\nabla I'$ apparaissent de manière explicite dans la définition de τ_{sg} , et peuvent avoir une influence significative dans les zones de fort gradient image. Nous nous appuyerons donc dans la suite sur cette expression afin de construire un terme de données multi-échelle.

4.4 Extension de l'OFCE au cas multi-échelles

Nous allons nous intéresser ici aux schémas de résolution multi-échelles basés sur la théorie des espaces d'échelles gaussiens : leur approche est plus proche de la LES (on applique un filtre aux variables d'intérêt) et nous n'aurons dans ce cas pas besoin de formaliser l'opérateur de décimation apparaissant dans l'approche pyramidale. Nous commencerons par rappeler brièvement quelques détails techniques de l'estimation multi-échelles par espace d'échelles, puis introduirons ensuite le nouveau terme de données.

4.4.1 Un nouveau terme de données basé sur les interactions inter-échelles

Les méthodes multi-échelles classiques utilisent comme terme de données l'OFCE définie sur des variables filtrées. L'expression de ce dernier est la suivante :

$$E_d^\ell(\mathbf{v}^\ell, I^\ell) = \frac{\partial I^\ell}{\partial t} + \mathbf{v}^\ell \cdot \nabla I^\ell. \quad (4.14)$$

où :

- \mathbf{v}^ℓ est l'incrément de mouvement que l'on cherche à estimer à l'échelle ℓ . En pratique, si ℓ correspond à de grandes échelles, celui-ci sera majoritairement composé de basses fréquences. À l'inverse, si ℓ correspond à un fin niveau d'échelles, on estimera surtout des hautes fréquences ou détails ;
- I^ℓ est la seconde image compensée et filtrée par un filtre passe bas, en général gaussien $I^\ell = g_{\sigma_\ell} * I(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}), t + dt)$ où les variances σ_ℓ correspondent aux niveaux d'échelles et sont choisies par l'utilisateur.

Rappelons à présent l'expression de la version sous maille de l'OFCE dérivée en section 4.3 :

$$\overline{E_d(\mathbf{v}, I)} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} + \tau_{\text{sg}}(\bar{I}, I', \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}'). \quad (4.15)$$

Jusqu'à présent, l'opérateur de filtrage $\overline{(\cdot)}$ de la relation (4.15) n'a pas été défini, alors que pour (4.14) on utilise très souvent un filtre linéaire gaussien. Définir $\overline{(\cdot)} = g_{\sigma_\ell} *$ apparaît comme un choix rationnel de filtre passe bas et il est alors aisé d'identifier $\bar{I} = I^\ell$. En ce qui concerne le champ de vitesse \mathbf{v}^ℓ , précisons que celui-ci peut raisonnablement être vu comme une version lissée/filtrée du vrai incrément de champ restant. Si l'on approxime ce filtre par celui utilisé pour la construction de l'espace d'échelles, on peut donc faire l'hypothèse que $\bar{\mathbf{v}} \approx \mathbf{v}^\ell$. Ainsi, on peut définir un terme de données dans lequel le tenseur sous-maille τ_{sg} apparaît explicitement en définissant :

$$E_{IS}^\ell(\mathbf{v}^\ell, I^\ell) = \frac{\partial I^\ell}{\partial t} + \mathbf{v}^\ell \cdot \nabla I^\ell + \tau_{\text{sg}}(I^\ell, I', \mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}'), \quad (4.16)$$

où $\tau_{\text{sg}}(I^\ell, I', \mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}')$ est défini d'après la relation (4.10). Ce nouveau terme $E_{IS}^\ell(\mathbf{v}^\ell, I^\ell)$ diffère de l'approche classique (4.14) de par le tenseur τ_{sg} qui résulte de la contribution des fines échelles $\ell' < \ell$. On a en effet :

$$E_{IS}^\ell(\mathbf{v}^\ell, I^\ell) = \underbrace{D^\ell(\mathbf{v}^\ell, I^\ell)}_{\text{OFCE à l'échelle } \ell} + \underbrace{\tau_{\text{sg}}(I^\ell, I', \mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}')}_{\text{interactions entre échelles}}. \quad (4.17)$$

On observe donc bien que la formulation classique revient à considérer que le terme de sous maille τ_{sg} est nul en chaque pixel. Cela n'est évidemment pas vrai dans de nombreuses situations, tel que par exemple en présence de fortes discontinuités ou bien pour de nombreux phénomènes physiques pour lesquels on sait que les fines échelles influencent directement les plus grandes. Dans le domaine de la mécanique des fluides, de nombreux modèles ont été définis pour modéliser les effets du tenseur sous maille τ_{sg} : celui-ci prend alors la forme d'un terme de diffusion de type laplacien (Smagorinsky) [11] ou est évalué par mesures statistiques [65].

En pratique, les composantes résolues et sous maille de la luminance peuvent être calculées de manière exacte dès que le filtre de construction de l'espace d'échelle est

défini, puisque $I' = I - I^\ell$. En ce qui concerne les composantes de τ_{sg} impliquant les termes $\overline{\mathbf{v}^\ell \cdot \nabla \bar{I}}$, $\overline{\mathbf{v}^\ell \cdot \nabla I}$, $\overline{\mathbf{v}^\ell \cdot \nabla I'}$, $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{I}}$ et $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla I'}$, elles ne sont pas directement calculables puisqu'elles nécessitent d'évaluer des versions filtrées de quantités composées des termes \mathbf{v}^ℓ et \mathbf{v}' que l'on cherche à estimer. Dans ce travail, nous proposons deux manières différentes pour aborder ce problème : une approche générale pour laquelle aucune connaissance a priori sur la nature des interactions entre échelles n'est disponible, et un autre cas pour lequel ces interactions peuvent être modélisées (comme pour la mécanique des fluides).

4.5 Application à l'estimation de mouvement

Dans cette section, nous proposons deux stratégies pour l'estimation du flot optique en se basant sur le terme de données E_{IS} défini en (4.16). La première peut être vue comme une heuristique et est applicable à des problèmes très généraux. La seconde repose sur certaines hypothèses a priori et est principalement destinée aux problèmes d'analyse d'images pour la physique.

4.5.1 Pas d'a priori sur les liens inter-échelles : procédure two-steps

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la difficulté ici réside dans l'approximation des valeurs filtrées des composantes de mouvement résolue et sous maille \mathbf{v}^ℓ et \mathbf{v}' pour chaque niveau d'échelle. Un moyen simple de résoudre un tel problème est l'utilisation d'un champ externe \mathbf{v}_{app} . En pratique, un tel champ peut être fourni par n'importe quelle technique permettant l'obtention d'informations sur le champ solution (mesures in-situ, simulations numériques, connaissances a priori, autre méthode de flot optique, ...) et peut fortement dépendre du problème étudié. Ainsi, supposons que l'on dispose, durant l'estimation à une échelle ℓ , d'un tel champ approximant la solution \mathbf{v}_{app} . Pour une itération donnée, on cherche à mettre à jour la valeur de \mathbf{v}^ℓ dont on dispose. On introduit alors la composante de champ « restante¹ » définie par :

$$\mathbf{v}_r^\ell := \mathbf{v}_{app} - \mathbf{v}^\ell.$$

1. cette composante est une approximation grossière de la solution à la résolution la plus fine.

L'évaluation du tenseur τ_{sg} sera donc réalisée en utilisant cette valeur \mathbf{v}_r^ℓ . La procédure complète est indiquée en Table 4.1. Dans cette approche, le rôle de τ_{sg} et \mathbf{v}_{app} est de guider l'algorithme tout au long de l'estimation : aux grandes échelles, on apporte à ce dernier de l'information approchée à propos des fréquences « moyennes » qui peuvent être considérées comme robustes à la propagation d'erreur.

Comme nous le montrerons plus tard expérimentalement, un champ de vitesse externe \mathbf{v}_{app} de qualité modeste peut tout de même permettre d'obtenir des résultats intéressants. Bien sûr, l'utilisation d'un champ manifestement de mauvaise qualité est à proscrire. Ainsi, pour un problème générique de vision par ordinateur pour lequel on ne sait pas formuler d'hypothèses a priori au sujet de \mathbf{v}_{app} , ce dernier peut être obtenu par estimateur classique basé sur l'OFCE (par exemple de type Lucas-Kanade décrit en section 3.1.2) pour obtenir un champ approximé \mathbf{v}_{app} qui permettra d'estimer les valeurs filtrées de \mathbf{v}^ℓ et \mathbf{v}' .

Pour le reste de ce chapitre, cette approche sera qualifiée de *two-step* puisque deux étapes distinctes (estimation avec et sans terme de sous maille) sont nécessaires. Elle peut être vue comme une approche générique et une bonne première heuristique, mais des modèles plus avancés qui sont à la fois plus intuitifs et théoriquement validés sont nécessaires. Pour cela, nous introduisons dans la suite deux modèles basés sur des processus de déconvolution et diffusion.

4.5.2 Existence d'a priori pour modéliser les liens inter-échelles

Dans certaines situations, selon le type de champ de mouvement à estimer, il est possible de trouver dans la littérature un certain nombre de modèles pour définir τ_{sg} de l'équation (4.16). Dans cette partie, nous allons présenter deux de ces modèles : le premier s'appuie sur une hypothèse de diffusion isotropique pour modéliser les liens inter-échelles, et nécessite l'utilisation d'une procédure de déconvolution afin d'estimer les composantes sous maille. Le second, dans le cas de l'étude d'un scalaire passif, s'appuie sur l'effet diffusif induit par les petites échelles sur les plus grosses et se résume à l'ajout d'un terme de laplacien à l'OFCE.

Terme de sous maille basé sur la diffusion isotropique : dans cette approche, on considère qu'à un niveau d'échelle donné, la composante résolue \mathbf{v}^ℓ

Procédure two-step

- I) **Première étape : Estimation classique sans terme de sous maille**
 - 1) estimer un champ \mathbf{v} à l'aide d'une méthode quelconque de la littérature
 - 2) définir $\mathbf{v}_{app} = \mathbf{v}$
- II) **Deuxième étape : Estimation avec termes sous maille**
 - 1) Initialisation :
 - (a) définir un ensemble d'échelles $L = \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_N\}$
 - (b) calculer $I^\ell, \forall \ell \in L$
 - (c) définir $\mathbf{v}^{\ell_{N+1}} := 0$
 - (d) définir $\ell = \ell_N$
 - 2) estimation incrémentale pour le niveau ℓ :
 - (a) initialisation pour le niveau ℓ : $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\theta} \mathbf{v}^{\ell+1}(\theta \mathbf{x})$
 - (b) calculer l'image recalée $I^\ell(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}))$
 - (c) estimer l'incrément de vitesse $d\mathbf{v}_r^\ell$ en utilisant le terme multi-échelles (4.16) où :
 - I^ℓ est l'image filtrée à l'échelle ℓ
 - $I' = I - I^\ell$ est sa composante sous maille
 - approximation de l'incrément restant $d\mathbf{v}_r^\ell := \mathbf{v}_{app} - \mathbf{v}$
 - $g_{\sigma_\ell} * d\mathbf{v}_r^\ell$ est la composante de vitesse résolue
 - $d\mathbf{v}_r^\ell - g_{\sigma_\ell} * d\mathbf{v}_r^\ell$ est la composante de vitesse sous maille
 - (d) ajout de l'incrément $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}} + d\mathbf{v}_r^\ell$
 - (e) **goto b** jusqu'à convergence ($|d\mathbf{v}_r^\ell| < \epsilon$)
 - (f) $\mathbf{v}^\ell = \tilde{\mathbf{v}}$
 - 3) augmenter la résolution $\ell := \ell - 1$:
 - 4) **goto 2**) jusqu'à $\ell = \ell_0$

TABLE 4.1: Détail de l'implémentation de la procédure two-step. La première étape consiste en une estimation classique du flot optique. On réutilise ensuite le champ obtenu \mathbf{v}_{app} dans la deuxième étape pour approximer l'incrément de champ restant.

correspond à une version filtrée de la solution réelle. Cette hypothèse est valide pour de nombreux écoulements fluides, et constitue une approximation raisonnable pour la plupart des images générales. Cela signifie que pour obtenir les quantités sous maille inconnues, il faut inverser un opérateur de diffusion que l'on considèrera dans un premier temps comme isotrope. Notons que pour des images générales, et notamment le suivi d'objets rigides, certains modèles avancés de diffusion anisotrope sont sûrement plus adaptés, mais cela dépasse le cadre de ce travail. Si l'on se cantonne au cas de la diffusion isotrope, il est alors possible d'approximer la composante sous maille grâce à l'aide d'un opérateur de déconvolution. Avant d'entrer plus en détail dans la définition du terme de données, nous allons introduire

brèvement le processus de déconvolution d'une fonction scalaire $\bar{\phi} = G_\sigma * \phi$ où G_σ est un filtre gaussien de variance σ . Pour une approche plus détaillée au sujet de la déconvolution, nous renvoyons le lecteur vers [3]. Un filtre gaussien peut s'exprimer comme une somme d'opérateurs différentiels grâce à sa décomposition en série de Taylor. En effet, il existe une suite de coefficients $(M_k)_{k=0}^\infty$ tels que

$$\bar{\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \bar{\Delta}^k M_k \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k},$$

où $\bar{\Delta}$ est la taille du support spatial du filtre. En théorie, les filtres gaussiens ont un support de taille infinie, mais si pour des raisons évidentes d'efficacité numérique on considère ce support de taille finie, $\bar{\Delta}$ et σ (la variance du filtre) sont en général reliées par la relation $\bar{\Delta} = 3\sqrt{\sigma}$. Les coefficients M_k sont facilement calculables, et leurs valeurs peuvent être trouvées dans des ouvrages de la littérature pour les filtres gaussiens, box, etc..[3]. Par exemple, les premiers coefficients pour le filtre gaussien sont $\{1, 0, \frac{1}{12}, 0, \frac{1}{48}, \dots\}$. Si l'on tronque cette série, la fonction défiltrée peut être approchée par la résolution du problème inverse suivant :

$$\phi \approx \left(\underbrace{\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \bar{\Delta}^k M_k \frac{\partial^k}{\partial x^k}}_{\text{Opérateur de convolution}} \right)^{-1} \bar{\phi}. \quad (4.18)$$

Il est possible de résoudre directement ce problème par inversion de la matrice associée à l'opérateur de convolution. Cependant, pour des raisons numériques, on peut aussi approximer explicitement cette inverse en utilisant à nouveau un développement de Taylor. En effet, si l'on considère la taille du filtre $\bar{\Delta}$ comme suffisamment petite, un développement de Taylor de la relation (4.18) permet d'obtenir l'expression suivante (cf. [3] pour plus de détails) :

$$\phi \approx \left(Id - \frac{1}{2} \bar{\Delta}^2 M_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right) \bar{\phi}. \quad (4.19)$$

Cette relation est très intéressante lorsqu'il s'agit d'estimer les composantes sous maille. Pour un signal ϕ filtré donné, ces dernières sont directement calculables à travers l'expression suivante :

$$\phi' = \frac{1}{2} \overline{\Delta}^2 M_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{\phi} + \mathcal{O}(\overline{\Delta}^4). \quad (4.20)$$

Dans la suite, pour plus de clarté, nous écrirons \mathcal{D}_Δ l'opérateur de déconvolution du premier ordre suivant :

$$\mathcal{D}_\Delta = \frac{1}{2} \overline{\Delta}^2 M_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (4.21)$$

Si l'on revient au problème initial d'estimation du mouvement, l'opérateur \mathcal{D}_Δ peut être utilisé pour évaluer les composantes sous maille \mathbf{v}' apparaissant dans la définition de τ_{sg} dans (4.10). Un tel processus peut être appliqué à n'importe quel type de données pour lesquelles un processus de diffusion isotropique est une approximation correcte des relations inter-échelles. Etudions à présent la définition d'un terme τ_{sg} alternatif dédié à l'étude des images de scalaires passifs.

Terme de sous maille de type Smagorinsky : ici nous nous focalisons sur les images de scalaires passifs pour l'analyse des fluides. Rappelons qu'un scalaire passif est une substance diffusive au sein d'un écoulement et n'ayant aucun effet dynamique sur ce dernier (par exemple un colorant, un polluant, ...). L'analyse du mouvement de telles substances est de première importance dans de nombreux domaines d'application tels que les sciences expérimentales, l'imagerie biomédicale etc. Lorsque l'écoulement est turbulent, c'est-à-dire dans la majorité des cas, on observe l'apparition d'un fort phénomène de mélange à différentes échelles. Si l'on note $C(\mathbf{x}, t)$ le champ de concentration du scalaire passif, ce dernier suit la loi d'évolution suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C - \frac{1}{ReSc} \Delta C = 0. \quad (4.22)$$

où Re et Sc sont respectivement les nombres de Reynolds et Schmidt associés à l'écoulement. De nombreux auteurs (cf. [54–56]) ont utilisé l'équation (4.22) pour l'analyse d'images 2D en s'appuyant sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre la concentration C et la luminosité ($I = \gamma C$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ est une constante). En

insérant cette dernière dans (4.22) puis en appliquant le processus de filtrage et décomposition des approches LES, on obtient le terme de données suivant :

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{I} - \frac{1}{ReSc} \Delta \bar{I} + \tau_{sg}(\bar{I}, I', \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}') = 0. \quad (4.23)$$

L'utilisation de cette expression comme terme d'attache aux données est aisée, celle-ci ne différant de (4.16) que par le terme de diffusion. Cette situation est intéressante car une grande variété de modèles issus de l'analyse d'écoulements turbulents sont disponibles. Par exemple, une hypothèse de base est que la contribution des fines échelles est assimilable à un terme de diffusion. Un des premiers modèles, développé par Smagorinsky[11], est ainsi de la forme :

$$\tau_{sg} = -(C_r \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \Delta \bar{I}, \quad (4.24)$$

où C_r est une constante dont la valeur est souvent fixée proche de 0.1 – 0.2, $\bar{\Delta}$ est la taille physique du filtre LES considéré, Δ est l'opérateur de laplacien et $|\bar{S}|$ est la norme Euclidienne du tenseur \bar{S} dont l'expression est la suivante :

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Un tel modèle est purement dissipatif et modélise la perte d'énergie cinétique induite par les fines échelles. C'est un modèle similaire à celui utilisé par [56] pour pallier le manque de résolution du capteur d'acquisition image. Dans notre cas, nous souhaitons l'étendre à un cas multi-échelles. Dans la section suivante, nous validerons l'utilisation du terme de données multi-échelles E_{IS} à l'aide d'expériences réalisées sur des images synthétiques et photométriques.

Nous avons introduit différents termes d'observation multi-échelles pour l'estimation du flot optique. Dans la section suivante, nous évaluons les performances de ces derniers à travers plusieurs séries d'expériences.

4.6 Résultats expérimentaux

Cette section présente un certain nombre de résultats d'expériences réalisées afin d'évaluer les performances des termes de données multi-échelles proposés. Pour cela, nous avons inclus ces derniers dans un estimateur de mouvement de type Lucas-Kanade multi-échelles [36] (cf. section 3.1.2) et comparé les résultats obtenus par rapport à un terme classique basé sur l'OFCE. Cette section est organisée de la manière suivante :

- la section 4.6.1 rappelle quelques notations au sujet de la méthode de Lucas Kanade utilisée pour évaluer et comparer les résultats obtenus ;
- la section 4.6.2 illustre les performances de notre terme de données sur des images générales pour lesquelles aucune hypothèse a priori n'est disponible. Les images testées sont issues de séquences synthétiques ou encore de la base de données du Middlebury College² ;
- enfin, la section 4.6.3 présente les résultats obtenus en utilisant les modèles plus avancés introduits en section 4.5.2. Ces derniers ont été testés sur des images fluides mais aussi des images générales.

Il est important de souligner que le but de cette section est d'évaluer en détail les performances du terme de données proposé. À l'évidence, un estimateur de type Lucas Kanade est un estimateur local aux performances limitées. Nous sommes donc ici dans l'optique de valider, comparer et quantifier les résultats d'un terme se basant sur des interactions multi-échelles par rapport à l'OFCE classique.

4.6.1 Conditions expérimentales

Commençons par rappeler quelques détails/notations quant à la méthode de Lucas Kanade. Celle-ci est une approche locale : pour un pixel donné \mathbf{x}_0 , on fait l'hypothèse que le champ solution est localement constant dans un voisinage $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$. Bien souvent, ce voisinage est défini comme une fonction de pondération gaussienne G_σ de variance σ centrée en \mathbf{x}_0 . Ainsi, pour chaque niveau d'échelle, \mathbf{v}^ℓ est estimé par la minimisation de :

$$\min_{\mathbf{v}^\ell} \int_{\Omega} G_\sigma(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \mathcal{E}^2(I^\ell(\mathbf{x}), I'(\mathbf{x}), \mathbf{v}^\ell(\mathbf{x}), \mathbf{v}'(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (4.26)$$

2. <http://vision.middlebury.edu/flow/>

où $\mathcal{E} = E_d$ (relation (4.14)) ou $\mathcal{E} = E_{IS}$ (relation (4.17)) est une expression linéaire par rapport \mathbf{v}^ℓ .

Notations : Dans le reste de ce chapitre, on notera LK_{OFCE} l'estimateur classique de Lucas-Kanade basé sur l'OFCE et LK_{IS} celui basé sur le terme multi-échelles proposé E_{IS} . La prochaine section présente quelques résultats obtenus sur des images pour lesquelles nous n'avons aucune idée du contenu ni du lien inter-échelles existant. Avant cela nous présentons les critères d'erreur retenus.

Mesures d'erreur : Dans ce travail, on utilise entre autres deux mesures d'erreur classiques en flot optique pour mesurer la qualité d'un champ de mouvement estimé \mathbf{v} connaissant la solution réelle \mathbf{v}^* . La première, appelée « EPE » (pour *End-Point Error*), est telle que :

$$\text{EPE}(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{1}{\text{card}(\Omega)} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^*(\mathbf{x})\|}. \quad (4.27)$$

La seconde, souvent considérée comme plus robuste, est notée « AAE » (pour *Average Angular Error*) ou erreur angulaire. Si l'on ajoute une troisième composante fixée à 1 aux deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{v}^* , celle-ci est définie par la relation suivante :

$$\text{AAE}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} \arccos \left(\frac{\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\|} \right). \quad (4.28)$$

L'utilisation des deux métriques (4.27) et (4.28) permettra aussi par la suite de comparer plusieurs méthodes d'estimation du flot optique.

4.6.2 Aucune connaissance a priori des liens inter-échelles

Dans un premier temps, nous souhaitons déterminer si l'utilisation du terme E_{IS} proposé permet, sur des séquences d'images dont le champ de déplacement associé est relativement simple, d'améliorer un estimateur classique basé sur l'OFCE. Nous

caractérisons donc à comparer les deux approches d'estimations $LK_{div-tree}$ et LK_{TS} . Nous avons ainsi évalué ces dernières sur les séquences *div-tree* et *trans-tree* [49] qui caractérisent des mouvements respectivement de divergence et de translation. Un exemple d'image de la séquence est fourni en 4.2 ainsi qu'une illustration des champs de vitesse associés. Pour ce genre de situation générale, la technique *two step* décrite en 4.5.1 est utilisée. En pratique, le champ externe nécessaire lors de l'estimation est estimé à l'aide de la technique classique LK_{OFCE} .

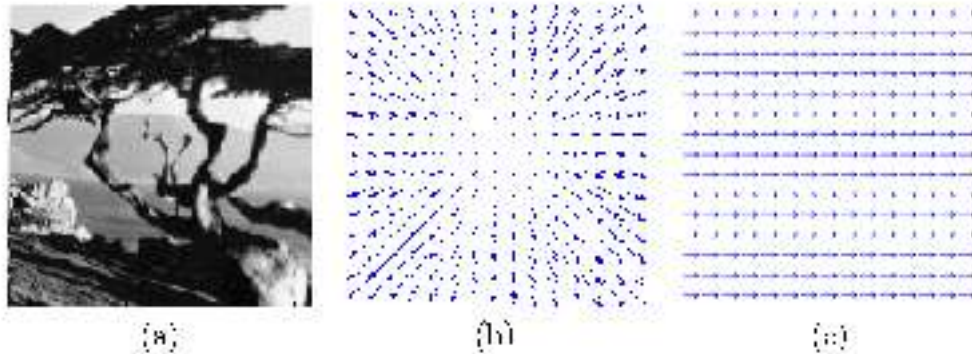


FIGURE 4.2: Séquences *div/tree*. (a) : image d'entrée. (b-c) : champs de vitesse synthétique appliqués pour générer les séquences *div-tree* (b) et *trans-tree* (c).

Nous avons testé les estimateurs LK_{OFCE} et LK_{TS} sur 5 paires d'images de ces deux séquences. Les valeurs d'erreur angulaire (4.28) ainsi que le pourcentage d'amélioration (c'est LK_{TS} par rapport à LK_{OFCE}) sont indiquées en table 4.2. Les champs estimés avec ces deux estimateurs ainsi que la solution réelle pour une paire d'images de chacune des deux séquences sont aussi visibles en 4.3 et 4.4.

pair	<i>div-tree</i>			<i>trans-tree</i>		
	LK_{OFCE}	LK_{TS}	gain	LK_{OFCE}	LK_{TS}	gain
1	3.53	2.85	20%	4.8	3.18	34%
2	3.75	2.9	22.5%	3.08	2.35	23.5%
3	3.63	3.17	12.5%	3.1	2.34	24.5%
4	4.0	3.25	32.4%	1.95	1.31	31%
5	3.59	3.93	54%	3.17	1.29	40.5%

TABLE 4.2: Erreur angulaire pour les séquences *div-tree* et *trans-tree* en utilisant LK_{OFCE} et LK_{TS} .

On peut observer que l'utilisation du terme multi-échelles E_{TS} permet d'améliorer l'estimation (parfois jusqu'à un gain de 50%) du champ de vitesse, ce qui nous permet de penser que l'introduction d'un opérateur *low-inter-scales* peut avoir une

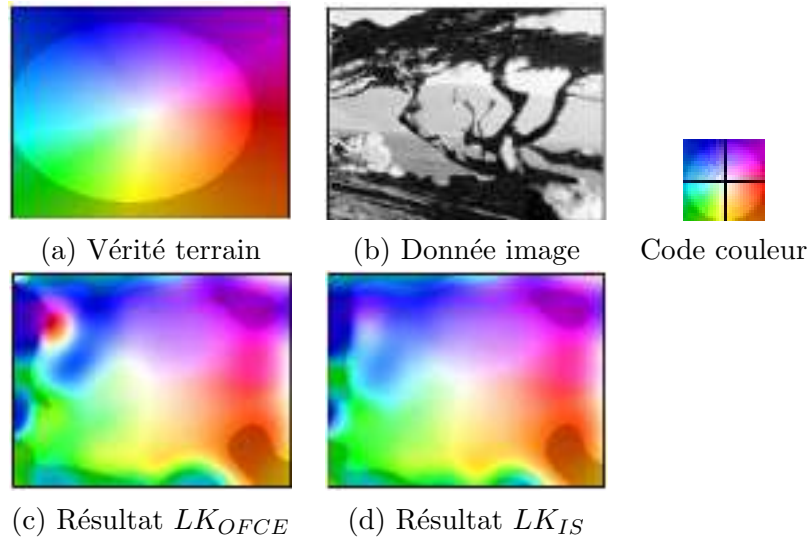


FIGURE 4.3: **Comparaison séquence *divTree*** . Le code couleur (cf. roue à droite) est celui de la base middlebury. La zone d'erreur en haut à gauche produite par LK_{OFCE} est significativement atténuée par LK_{IS} .

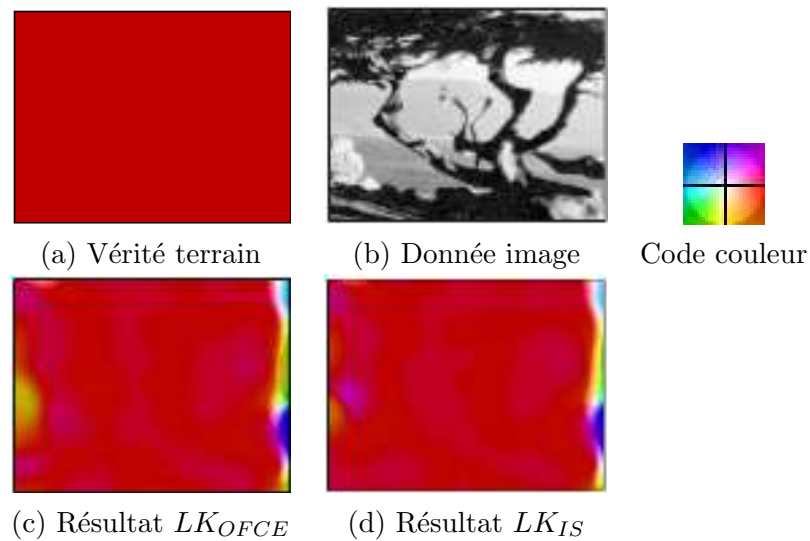


FIGURE 4.4: **Comparaison séquence *transTree*** . Le code couleur (cf. roue à droite) est celui de la base middlebury. On observe visuellement une amélioration de l'estimation fournie par LK_{IS} à la frontière gauche du domaine.

influence positive sur le résultat final.

Puisque les séquences *div-tree* et *trans-tree* ne contiennent qu'un seul type de mouvement, il peut être intéressant, dans un deuxième temps, d'évaluer l'estimateur LK_{IS} sur des jeux de données plus complexes. Pour cela, nous avons aussi réalisé

un certain nombre de tests sur la base de données du Middlebury College. Celle-ci est composée de 12 séquences (synthétiques et photométriques) et fut créée pour évaluer et comparer les différentes méthodes d'estimation du mouvement à travers un certain nombre de situations délicates. Durant ces tests, nous avons utilisé le même jeu de paramètres pour chaque séquence d'images : 3 niveaux d'échelles $\ell = \{1, 5, 10\}$ ont été considérés (correspondant à des filtres gaussiens de support spatial égal à ℓ) et, pour chacun de ces niveaux, 10 itérations d'estimation incrémentale sont effectuées. Après chaque itération, un filtre médian 5×5 est appliqué au champ estimé. Dans [42], les auteurs démontrent expérimentalement l'intérêt de cette étape intermédiaire afin de contrôler l'apparition de bruit durant l'estimation. Les résultats sont visibles dans la table Fig. 4.5 qui compare plusieurs approches, notre méthode portant le nom SILK pour *Scale Interactions Lucas Kanade*.

Average angle error	avg. rank	Army (Hidden texture)			Mequon (Hidden texture)			Schefflera (Hidden texture)			Wooden (Hidden texture)			Grove (Synthetic)			Urban (Synthetic)			Yosemite (Synthetic)			Teddy (Stereo)																										
		GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1	GT	im0	im1																								
		all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt	all	disc	untxt																								
SILK[87]	75.7	9.34	79	20.4	79	10.5	79	10.4	77	21.9	78	10.3	76	16.0	78	27.5	80	14.5	76	10.3	76	29.0	78	8.54	76	4.81	81	5.65	79	5.56	80	9.41	82	25.4	84	8.74	80	2.79	47	3.68	32	4.62	73	10.9	82	17.8	82	12.3	82
TI-DOFE [24]	77.8	13.4	85	23.2	83	16.5	85	16.5	83	24.1	83	18.2	85	20.2	86	31.1	86	20.6	85	19.9	84	32.9	83	20.8	85	4.89	82	5.90	82	5.54	79	8.04	78	23.9	81	8.81	81	2.97	54	4.34	55	1.88	18	10.9	82	17.7	81	11.9	80
SLK [47]	80.6	11.6	82	26.0	86	14.6	84	15.3	82	25.0	85	17.5	83	17.8	83	30.1	84	18.1	83	25.4	87	33.6	84	28.0	87	5.25	83	5.90	82	7.03	84	10.3	84	27.4	86	10.6	84	2.89	51	4.47	60	2.94	56	14.9	85	20.7	85	18.8	84
Adaptive flow [45]	81.8	13.2	84	20.8	80	14.0	83	17.1	84	22.0	79	17.9	84	18.1	84	27.1	78	22.8	87	11.8	77	31.1	80	10.5	77	6.35	86	7.13	86	6.25	82	9.87	83	21.8	78	9.44	82	12.6	87	11.4	87	20.0	87	7.75	78	13.6	75	7.73	75
PGAM+LK [55]	82.6	11.8	83	25.6	84	13.9	82	14.8	81	24.4	84	16.7	82	13.2	73	24.0	73	15.0	78	16.2	83	41.2	87	15.3	82	5.40	84	5.45	77	8.10	85	12.3	86	26.5	85	12.1	85	7.42	86	8.24	86	7.87	83	13.2	84	18.3	84	19.4	85
FOLKI [16]	83.8	10.5	81	25.6	84	11.9	81	20.9	86	26.2	86	26.1	86	17.6	81	31.1	86	16.5	80	15.4	82	32.6	82	16.0	83	6.16	85	6.53	85	9.07	86	12.2	85	29.7	87	13.0	86	4.67	80	5.83	78	9.41	84	18.2	86	22.8	86	25.1	86
Pyramid LK [2]	85.6	13.9	86	20.9	81	21.4	87	24.1	87	23.1	80	30.2	87	20.9	87	29.5	83	21.9	86	22.2	86	34.6	85	25.0	86	18.7	87	23.1	87	20.2	87	21.2	87	24.5	83	21.0	87	6.41	85	7.02	84	10.8	85	25.6	87	31.5	87	34.5	87

FIGURE 4.5: **Erreur angulaire** pour la base middlebury à paramètres constants. Notre méthode (SILK) améliore les résultats comparée à d'autres méthodes locales similaires (SLK, Pyramid LK et FOLKI).

Même si notre méthode basée sur un simple estimateur de type Lucas-Kanade est loin de présenter les résultats les plus compétitifs comparée aux meilleures méthodes, il est intéressant de noter que les champs obtenus sont de meilleure qualité que des méthodes similaires basées sur des estimateurs locaux (voir Fig. 4.5). Si l'on rentre un peu plus en détail, la Fig. 4.6 illustre, pour 3 séquences, les différences entre les champs obtenus par LK_{OFCE} et LK_{IS} . On évalue ainsi l'influence du terme d'interaction proposé dans ce travail sur trois zones spécifiquement choisies :

- le couple de soldats de la séquence Army (voir Fig. 4.6(a)) : cette zone présente de très petites structures dont les mouvements associés sont difficiles à estimer ;
- le coin d'un bâtiment de la séquence Urban (voir Fig. 4.6(b)) : cette région correspond à une zone de fort gradient des champs de luminance et de vitesse ;

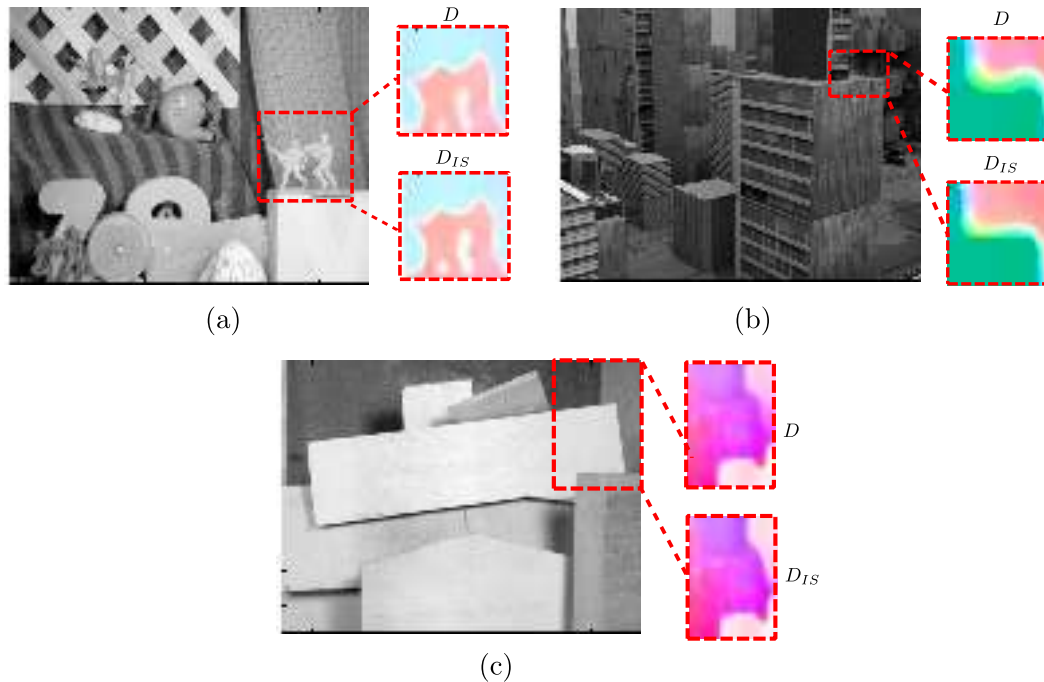


FIGURE 4.6: **Comparaison des résultats issus du terme de données classique D et du terme proposé E_{IS} pour certaines régions d'intérêt :** (a) l'espace entre les soldats dans la séquence « Army » est moins lisse avec LK_{IS} ; (b) le mouvement du coin du bâtiment est mieux estimé avec LK_{IS} pour la séquence « Urban »; (c) le mouvement du morceau en haut à droite est mieux estimé dans la séquence « Wooden »

- une structure de petite taille au bord de l'image de la séquence Wooden (voir Fig. 4.6(b)) : le mouvement de cette dernière est relativement mal estimé par la simple utilisation de l'OFCE, car gommé par celui de la structure voisine ;

On observe que le terme de données E_{IS} améliore sensiblement la solution comparé à l'OFCE classique. Cela peut s'expliquer par le fait que le tenseur de sous maille τ_{sg} dépend de termes tels que le gradient de la luminance $\nabla I'$, particulièrement élevé en présence de contours. Ainsi, la considération du terme de sous maille peut aider l'algorithme à converger vers un meilleur minimum local, permettant d'estimer de meilleures discontinuités (séquences Army, Urban) ou un meilleur déplacement de certaines structures (séquence Wooden). Rappelons que dans cette partie nous utilisons la méthode two-step (présentée en section 4.5.1) qui nécessite la connaissance d'un champ de mouvement initial. Comme nous l'avons précisé précédemment, celui ci est estimé à l'aide d'une technique de type LK_{OFCE} . Afin de tester l'influence de ce dernier, nous avons évalué notre approche avec, comme

champ initial, un champ de mouvement externe \mathbf{v}_{app} très lisse³ dont la précision est inférieure à celle obtenue avec LK_{OFCE} . Les résultats, sur deux paires d'images (Urban2 et Urban3) de la base de données Middlebury, sont indiqués dans la Table 4.3, ainsi que les valeurs d'erreur angulaire issues de trois autres méthodes d'estimation : un estimateur local classique de Black & Anandan [39] et deux estimateurs avancés basés sur des méthodes de régularisation globales et dont le but est aussi de résoudre certaines difficultés posées par les approches multi-échelles [63, 64].

	LK_{OFCE}	LK_{IS}	gain	Black Anandan(96)	Brox Malik (2010)	Li Xu (2012)
Urban2	4.19	3.58 (4.63)	15%	4.06	2.64 - 3.15	2.15 - 3.61
Urban3	7.5	5.66 (7.7)	25%	11.18	5.07 - 5.76	3.15 - 5.23

TABLE 4.3: **Erreur angulaire** pour les séquences Urban2 et Urban3. Cinq méthodes (LK_{OFCE} , LK_{IS} et trois méthodes tirées de l'état de l'art) sont comparées. La valeur en bleu correspond à l'erreur angulaire initiale du champ externe \mathbf{v}_{app}

Le choix des paires d'images Urban2 et Urban3 a été motivé par les importantes discontinuités et grandes valeurs prises par les champs de vitesse associées. Il est intéressant d'observer que malgré une initialisation relativement grossière \mathbf{v}_{app} , notre méthode est capable d'obtenir des résultats convenables. La qualité de ces derniers est d'ailleurs comparable avec certaines méthodes avancées (méthodes [63, 64]) alors que notre estimateur est, rappelons-le, basé sur une simple approche locale de type Lucas-Kanade. Afin de comparer visuellement les résultats obtenus pour la paire Urban3, on peut observer en Fig. 4.7 les champs obtenus par LK_{IS} (Fig. 4.7(c)) et LK_{OFCE} (Fig. 4.7(a)) ainsi que le champ initial \mathbf{v}_{app} utilisé (Fig. 4.7(b)).

Cette série d'expériences montre l'intérêt que peut avoir, pour des images générales, le nouveau terme multi-échelles proposé. Nous allons dans la suite nous intéresser à des séquences d'images fluides.

4.6.3 Connaissance a priori des liens inter-échelles

Dans cette partie, nous évaluons le nouveau terme d'observation E_{IS} lorsqu'il est possible de formuler des modèles pour τ_{sg} issus des lois de la physique. Nous étudions tout d'abord la procédure décrite en 4.5.2 basée sur un opérateur de déconvolution.

3. En pratique, on utilise un champ obtenu par une méthode de type Horn & Schunk dont le poids du terme de régularité est arbitrairement fixé très grand.

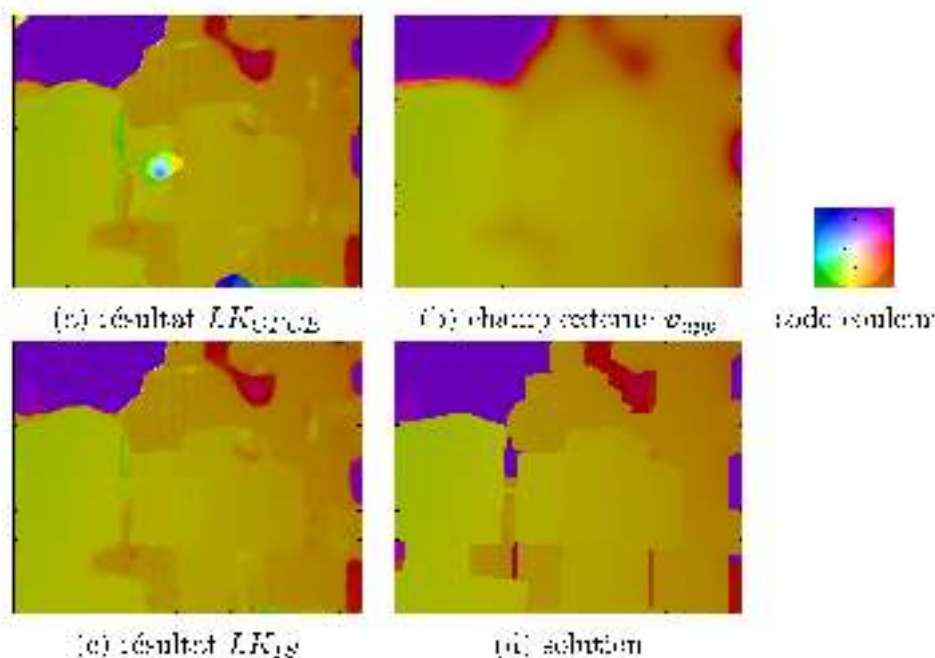


FIGURE 4.7: Comparaison des champs estimés pour la séquence Urban3. Le code couleur est celui de la base middlebury.

Pour cela, nous utilisons ces images-synthétiques issues de la simulation numérique des équations de Navier-Stokes et disponibles sur internet⁴. Celles-ci sont visibles en Fig. 4.8 et Fig. 4.13. La séquence initiale ne présentant que des mouvements de relativement faible amplitude, nous n'avons considéré qu'une image sur 3 au sein de celles-ci. Cela permet de justifier pleinement l'adoption d'une approche multi-échelle et de ainsi d'utiliser notre terrain de données. Les champs de mouvement associés représentent un certain défi tant au niveau des amplitudes présentes (jusqu'à 10 pixels dans ce cas) qu'à celui des structures non uniformes telles que les tourbillons. Deux situations ont été testées : des images de particules (PIV) et des images de éclairage passif.

Images PIV : Cette série de tests s'intéresse aux images PIV (Particle Image Velocimetry, voir illustration Fig. 4.8(a)), une méthode de visualisation classique de l'analyse de fluide expérimentale. Des particules sont placées au sein d'un écoulement turbulent (2D dans notre cas) et flashées à l'aide d'un laser. On obtient ainsi une image dans laquelle apparaissent les boîtes lumineuses correspondants aux particules flashées. On fait ici l'hypothèse que le lien inter-échelles est au préalable de diffusion isotropique. L'évaluation de la composante fines échelles nécessite une

⁴ <http://fluid.berkeley.edu/urban3.htm>

étape de déconvolution appliquée aux grandes échelles connues (cf. section 4.5.2). Avant d'analyser les résultats obtenus, commençons par fournir quelques détails sur l'évaluation en pratique du terme de sous maille basé sur une procédure de déconvolution. Pour un niveau d'échelle ℓ et une itération k donnés, on dispose d'une solution courante $\mathbf{v} = \sum_{k,\ell=\ell+1}^{N+1} \mathbf{v}_{\ell,k}$. A l'itération suivante, on souhaite estimer un incrément $\mathbf{v}_{\ell,k+1}$ à l'aide du terme d'attache aux données (4.17), mais on ne dispose pas à cette étape de l'information permettant le calcul de $\mathbf{v}'_{\ell,k+1}$. L'estimation du terme de sous maille peut cependant être approximée à travers les étapes suivantes :

— Pour une échelle ℓ , à l'itération k :

(a) Initialisation de $\mathbf{v} = \sum_{k,\ell=\ell+1}^{N+1} \mathbf{v}_{\ell,k}$;

(b) Estimation d'un incrément temporaire $\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,k+1}$ à l'aide de l'équation 4.14 ;

(c) Définir $\mathbf{v}'_{\ell,k+1} = \mathcal{D}_{\Delta}(\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,k+1})$;

(d) Estimer l'incrément « final » $\mathbf{v}_{\ell,k+1}$ à l'aide du terme (4.17) et $\mathbf{v}'_{\ell,k+1}$ obtenu à l'étape (b).

— Aller à l'itération suivante.

TABLE 4.4: **Processus d'estimation** du terme inter-échelles à l'aide d'un opérateur de déconvolution.

Puisque l'étape de déconvolution peut se révéler numériquement instable, le calcul de la quantité $\mathbf{v}'_{\ell,k+1} = \mathcal{D}_{\Delta}(\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,k+1})$ peut être régularisé en évaluant à la place l'expression :

$$\mathbf{v}'_{\ell,k+1} \approx \mathcal{D}_{\Delta}((1 - \alpha)\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,k+1} + \alpha m(\mathbf{v})), \quad (4.29)$$

où $m(\mathbf{v})$ est une moyenne mobile des incréments de vitesse précédemment estimés, et α un paramètre de pondération (fixé à 0.5 durant nos tests). Ainsi, nous disposons de tous les éléments pour utiliser le modèle de terme inter-échelles associé.

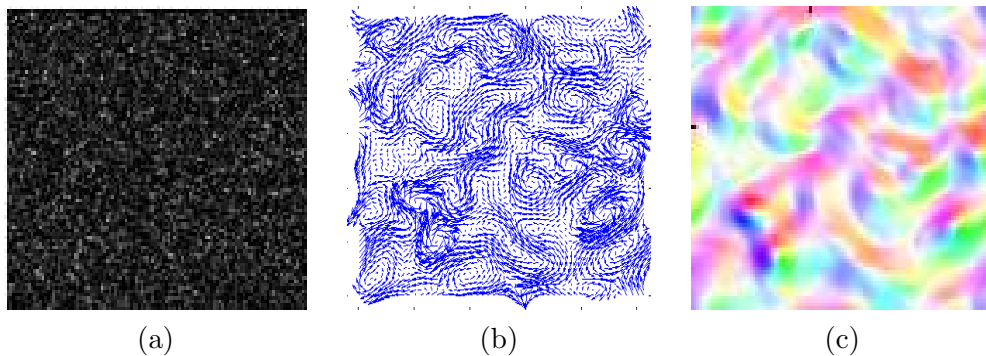


FIGURE 4.8: **séquence PIV** : (a) : une image de la séquence ; (b-c) : vérité terrain (le code couleur est le même que pour la Fig. 4.7)

Nous avons testé les estimateurs LK_{OFCE} et LK_{IS} sur une sous-séquence de 6 images. Sont indiquées en Fig. 4.9 les valeurs d'erreur angulaire entre chaque paire d'images (5 au total) pour le terme classique D et le terme proposé E_{IS} : il est clair que ce dernier améliore l'estimation dans tous les cas. Si l'on procède à une analyse un peu plus fine, la Fig. 4.10 montre l'évolution de l'erreur angulaire au fil des itérations pour la première paire d'images. On observe que le terme E_{IS} réduit de manière importante l'erreur dans les grands niveaux d'échelles (ℓ_3 et ℓ_2). Une fois les niveaux plus fins atteints, la différence entre les deux techniques se réduit mais le terme E_{IS} fournit systématiquement des résultats meilleurs que celui basé sur l'OFCE. Cela semble justifier l'idée qu'une estimation plus fine aux grandes échelles peut avoir une certaine influence sur le résultat final.

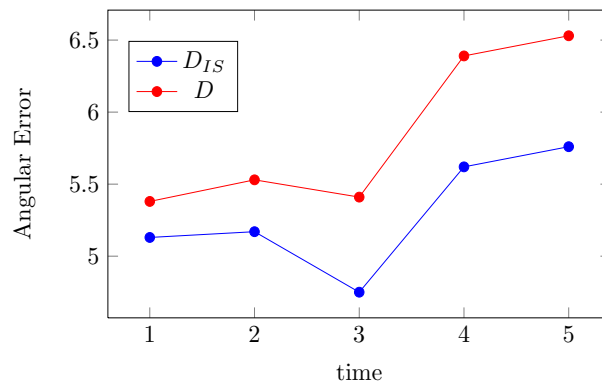


FIGURE 4.9: **Erreur angulaire pour cinq paires d'images successives** obtenues avec le terme de données classique D et le terme multi-échelles proposé E_{IS} .

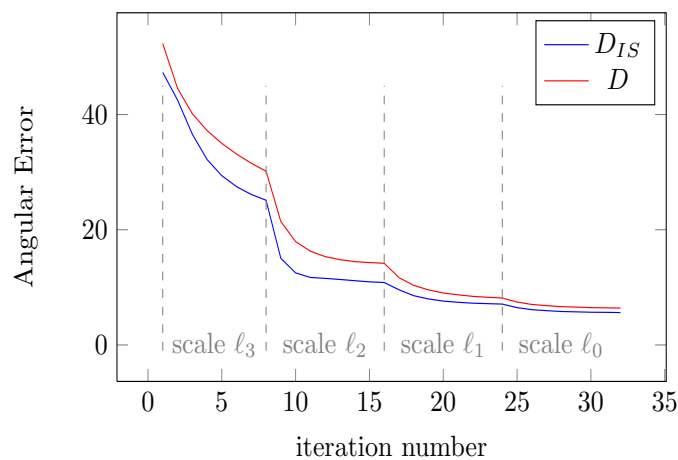


FIGURE 4.10: **Evolution de l'erreur angulaire au fil des itérations** pour la première paire d'images. Les différents niveaux d'échelles considérés pendant l'estimation sont aussi indiqués

Afin de visualiser l'influence du terme proposé, la figure Fig. 4.11(b-c) permet d'observer les cartes d'erreurs End-Point (EP) (i.e. la norme locale de l'erreur entre le champ estimé v_{est} et la solution v_{gt} : $\|v_{est} - v_{gt}\|^2$) obtenues avec les deux techniques. Il est aussi possible de voir la carte d'amplitude du champ solution en (Fig. 4.11(a)) et la différence entre les deux cartes d'erreur EP en (Fig. 4.11(d)) afin de montrer clairement quelles sont les zones pour lesquelles τ_{sg} a une influence. On observe que quel que soit l'estimateur, les zones pour lesquelles l'estimation est de qualité médiocre correspondent à des zones de grande amplitude du champ solution (zones rouges de Fig. 4.11(a)). Cependant, on note bien que E_{IS} permet une meilleure estimation de ces grands mouvements, comme le montre la figure Fig. 4.11(d)). Dans les zones pour lesquelles l'amplitude du champ est faible, aucune différence notable n'est observée.

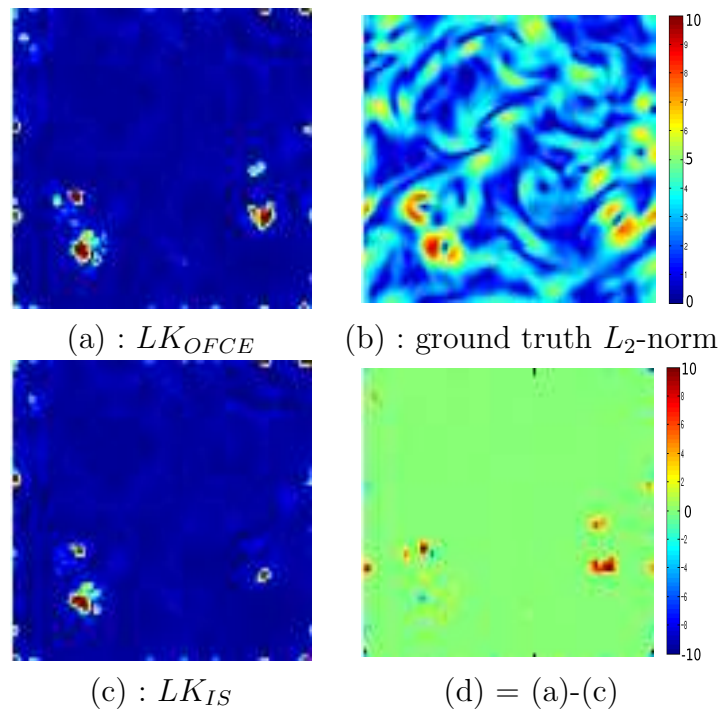


FIGURE 4.11: **Carte d'erreur end-point** pour une paire d'images avec LK_{OFCE} (a), amplitude du champ solution (b), avec LK_{IS} (c) et la différence des deux cartes EPE (d).

Enfin, on illustre de manière détaillée en Fig. 4.12 les vecteurs de déplacement estimés dans une petite région d'intérêt (correspondant à un tourbillon). On peut observer 3 champs superposés correspondant :

- au champ solution (DNS) ;
- à la solution estimée par LK_{IS} ;
- à la solution estimée par LK_{OFCE} .

Il est évident que dans cette région, le champ local estimé à l'aide de LK_{IS} est bien plus proche de la solution que celui estimé par LK_{OFCE} .

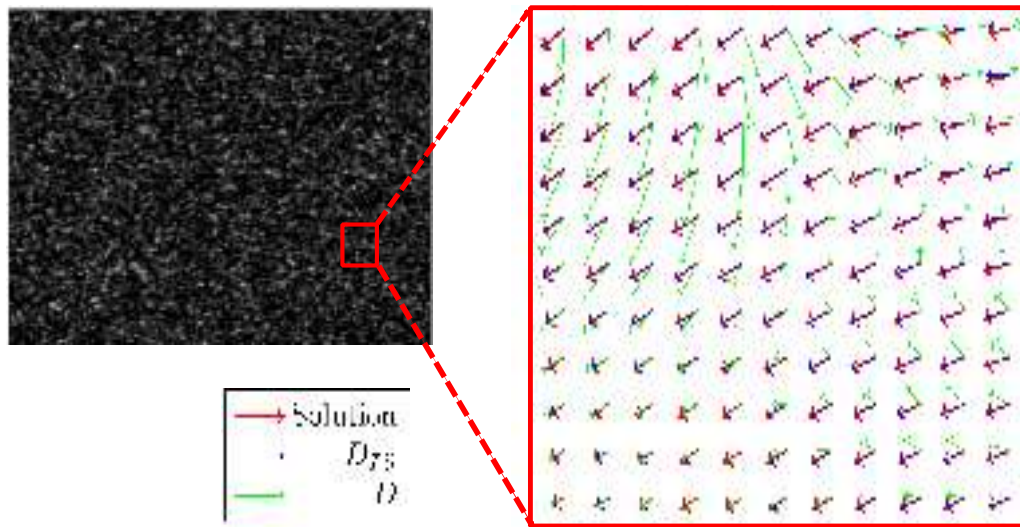


FIGURE 4.12: **Comparaison des champs estimés pour une petite zone.** Au sein de la zone d'intérêt (carré rouge), sont représentés la solution ainsi que les deux champs obtenus avec LK_{OFCE} et LK_{IS}

Cette seconde série d'expériences permet de démontrer l'habilité de notre nouveau terme quand il s'agit d'estimer des champs de mouvement pour lesquels les liens inter-échelles sont assimilables à une diffusion isotrope. Nous nous intéressons ensuite aux images de scalaires passifs.

Images de scalaires passifs : Pour conclure cette série d'expériences, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'images de scalaires passifs transportés par un écoulement turbulent. La séquence étudiée a été générée à partir de champs DNS identiques à ceux de la séquence PIV de la section précédente. Cependant, comme il est possible de le voir en Fig. 4.13, les données images sont très différentes des images PIV. Dans cette situation, la nature des interactions inter-échelles peut être modélisée par un processus de diffusion représentant la perte d'énergie cinétique due aux fines échelles du champ de vitesse (cf. section 4.5.2).

Nous utilisons un estimateur de type Lucas Kanade au sein duquel nous chercherons à comparer les trois termes de données suivants :

1. D : l'OFCE classique (cf. équation 4.14);
2. D_{deconv} : le terme de données pour lequel les contributions sous mailles sont calculées par déconvolution (cf. équation 4.21);

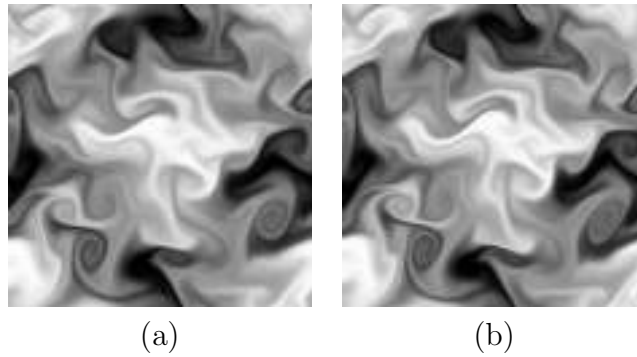


FIGURE 4.13: **Séquence de scalaire passif** (a-b) : deux images issues de la séquence étudiée

3. $D_{diffuse}$: le terme de données pour lequel la contribution des fines échelles est modélisée par un terme de sous maille de type Smagorinsky (cf. équation 4.24).

Les valeurs d'erreur angulaire au cours du temps et pour chacun de ces trois termes sont indiquées en Fig. 4.14. On observe que la meilleure approche est celle basée sur un modèle de type Smagorinsky : alors que D_{deconv} réduit l'erreur moyenne d'environ 5% par rapport à l'OFCE, $D_{diffuse}$ permet d'atteindre un gain global moyen de 15 – 20%. Cela confirme le fait que l'apport d'informations sur les fines échelles permet une meilleure estimation globale.

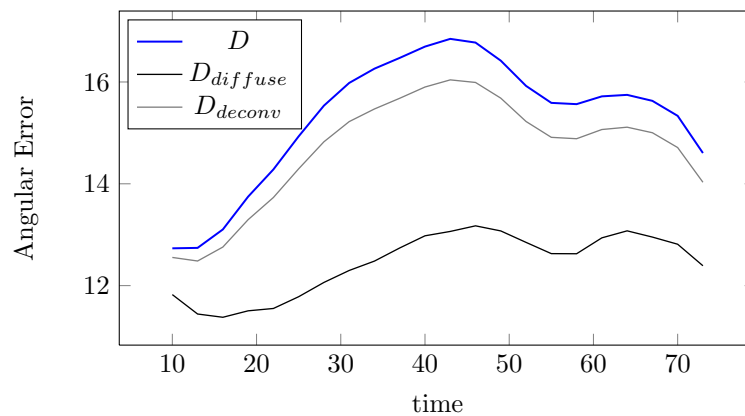


FIGURE 4.14: **Erreur angulaire** pour un temps donné de la séquence de diffusion scalaire

Nous nous intéressons ensuite à la fidélité des solutions obtenues en terme de spectre d'énergie cinétique (cf. section 1.3.4). En Fig. 4.15, nous observons 3 spectres pour un même pas de temps au sein de la séquence :

1. le spectre de la solution DNS ;

2. le spectre de la solution obtenue grâce au terme de données basé sur l'OFCE D ;
3. le spectre de la solution obtenue grâce au terme de données basé sur un terme de sous maille de type Smagorinsky $D_{diffuse}$.

Le spectre obtenu grâce à $D_{diffuse}$ est plus proche de la solution, notamment au niveau des fines échelles (droite du spectre). Puisque c'est la contribution de ces fines échelles que l'on cherche à modéliser, cela semble justifier l'utilisation du modèle choisi. Notons que la sur-estimation de l'énergie aux fines échelles est un phénomène commun aux différentes méthodes d'estimation de mouvement (voir illustration dans [56], partie expérimentale).

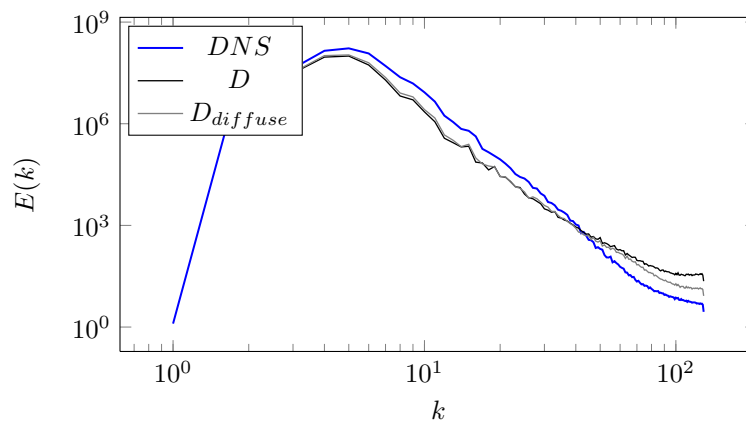


FIGURE 4.15: Comparaison des spectres

4.7 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un nouveau terme d'attache aux données pour l'estimation multi-échelles du flot optique. Ce dernier cherche à prendre en compte les interactions entre échelles. Contrairement aux méthodes classiques se basant sur une version filtrée de l'OFCE à une résolution donnée, nous avons montré qu'un terme plus précis impliquant la définition de quantités résolues et sous maille peut être utilisé. Une telle formulation est grandement inspirée de l'approche LES en mécanique des fluides.

Plusieurs modèles de sous maille ont été proposés en fonction de la connaissance ou non d'a priori sur les liens inter-échelles. Les résultats expérimentaux montrent, à travers l'utilisation d'un estimateur de type Lucas-Kanade, que notre terme multi-échelles E_{IS} améliore systématiquement les résultats comparé au terme classique basé sur l'OFCE. Nous avons pour cela considéré différents types d'images :

- des séquences synthétiques « classiques » permettant de montrer le potentiel d'une telle approche pour certains types de mouvements particuliers ;
- l'ensemble des séquences de la base middlebury, facilitant ainsi la comparaison avec d'autres méthodes locales basées sur des formulations similaires ;
- une séquence d'images PIV pour laquelle une procédure de déconvolution permet un calcul simple du terme de sous maille associé ;
- une paire d'images de transport de scalaire passif validant l'approximation, dans ce cas précis, du terme de sous maille par un terme de diffusion.

Nous sommes en conséquence confiants dans le fait qu'une telle approche basée sur la modification du terme d'attache aux données permet d'obtenir de meilleures estimations de champs de déplacement dans les séquences d'images.

Chapitre 5

Super résolution d'images : contexte et principes

Dans ce chapitre, nous discutons du problème de la super-résolution en vision par ordinateur et introduisons certaines méthodes de reconstruction associées. Le but n'est pas de fournir un état de l'art exhaustif des approches de super-résolution : nous présentons les idées fondatrices permettant de mieux décrire le contexte des travaux présentés dans le chapitre suivant.

5.1 Introduction

Malgré l'accroissement continu du volume de données images et l'amélioration significative de la précision des capteurs, il est intéressant dans certains cas de disposer de version haute résolution (HR) de telles images, c'est-à-dire une version dont le niveau de détails est plus élevé. Disposer d'une image HR peut se révéler particulièrement intéressant pour certaines applications telles que l'amélioration du rendu pour la perception humaine ou afin de faciliter les processus d'interprétation automatique par des algorithmes de vision par ordinateur.

La « super-résolution » (SR) est le terme généralement employé pour décrire le processus d'amélioration de la qualité d'une image à l'aide d'une méthode de traitement par ordinateur. Les algorithmes de super-résolution ont pour but, à partir d'une ou plusieurs images de faible résolution, la reconstruction d'une image haute résolution dont la qualité a été dégradée par les limitations du système d'acquisition numérique. C'est un domaine de la vision par ordinateur particulièrement actif

depuis les travaux fondateurs de Tsai & Huang [66]. De telles méthodes fournissent une alternative à l'augmentation coûteuse et techniquement complexe du nombre de capteurs au sein des dispositifs d'acquisition. Ses domaines d'application sont variés, on citera entre autres :

- le traitement de signal vidéo [67], notamment la surveillance, lorsqu'il s'agit par exemple d'étudier en détail certaines zones spécifiques de l'image (visages, plaques d'immatriculation [68]) ;
- la télédétection [69], pour laquelle la résolution des capteurs installés sur les satellites est cruciale. Un exemple pratique consiste à estimer une image HR à partir de plusieurs images BR d'une même zone ;
- l'imagerie médicale : les méthodes SR peuvent être utilisées pour augmenter la résolution d'images IRM [70, 71] (Imagerie par Résonance Magnétique) ou CT [72, 73] (*Computer Tomography*) dont l'acquisition est longue et coûteuse ;
- pour certains formats de conversion/compression vidéo ;
- le domaine des sciences géophysiques [74].

Dans ce chapitre, nous commencerons par discuter de certains aspects concernant le niveau de résolution d'une image. Nous procéderons ensuite à une brève introduction des méthodes classiques de la littérature.

5.2 Résolution d'une image

Une caractéristique clef d'une image est son niveau de résolution. Celle-ci peut prendre plusieurs formes : résolution spatiale, temporelle, spectrale, etc. A l'heure actuelle, une majorité de travaux se concentre sur l'aspect spatial. Une image étant simplement une grille de petits éléments carrés appelés pixels, sa résolution spatiale est la densité de ces pixels par unité d'aire, comme nous l'avons vu au chapitre 2. Cette dernière est évidemment directement liée à la précision du capteur CCD (Charge-Coupled Device, ou en français « dispositif à transfert de charge » (DTC)), qui est lui même un assemblage bidimensionnel de capteurs de taille réduite. C'est la taille (ou, de manière équivalente, la densité) de ces capteurs « élémentaires » qui déterminera la résolution spatiale de l'image. Une manière simple d'augmenter la résolution des images produites est donc d'augmenter le nombre de capteurs par

unité d'aire. Cependant, cette solution en apparence simple se heurte à plusieurs limitations :

- une réduction de la taille des capteurs diminue la quantité de lumière incidente arrivant sur chacun d'entre eux, favorisant ainsi l'apparition de *shot noise* (bruit de grenaille en Français) ;
- le coût associé à l'augmentation du nombre de capteurs peut très vite devenir prohibitif, notamment en ce qui concerne les systèmes d'acquisition complexes tels que ceux placés sur des satellites.

Ainsi, une première difficulté concernant la résolution spatiale d'une image provient du matériel utilisé. Le niveau de détails est aussi limité par des effets d'optique, notamment les effets de flous dus à la lentille ou à des mouvements, aux effets de diffraction etc. D'autres problèmes peuvent enfin apparaître, comme par exemple dans le domaine de la sécurité vidéo, au niveau de la vitesse de déplacement de la caméra ou du volume de stockage des données. Pour toutes ces raisons, il est parfois préférable d'accepter des images de plus faible résolution et recourir en post-traitement à des méthodes de super-résolution. Celles-ci permettent alors, au prix d'un certain volume de calculs numériques, de réduire le coût d'acquisition des images.

5.3 Principe général

5.3.1 Approches principales

Les méthodes de super-résolution ont, comme nous l'avons vu, pour but de reconstruire une image haute résolution à partir d'une (ou plusieurs) image(s) de résolution réduite. Le but est donc d'estimer au mieux certaines hautes fréquences perdues lors de l'acquisition des images BR, mais aussi d'inverser la dégradation occasionnée par le matériel d'acquisition. Pour cela, on peut distinguer deux types d'approches :

- la première, appelée **super-résolution multi-images**, consiste à combiner les différentes informations non-redondantes issues de plusieurs images basse résolution d'une même scène. Cette non-redondance provient souvent d'un décalage sub-pixellique entre les différentes images BR, souvent dû à des mouvements de caméra/objets au sein de la scène. Il est ainsi possible de régulariser le problème initialement mal posé de la super-résolution. C'est

- la situation illustrée en Fig. 5.1 (gauche), où plusieurs images d'une même scène mais légèrement décalées les unes par rapport aux autres permettent l'estimation d'une image de plus haute résolution. Dans ce cas, il est souvent nécessaire d'estimer le mouvement ou décalage entre les différentes images ;
- une seconde approche, que l'on appellera ici **super-résolution mono-image** (*single image super-resolution* en anglais), nécessite une seule image basse résolution dont on cherche à améliorer la qualité. Un tel problème nécessite évidemment l'ajout d'un certain nombre de contraintes.

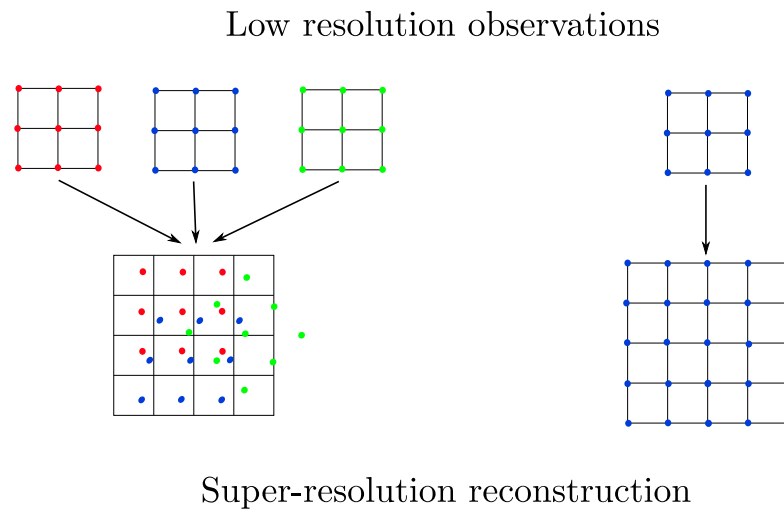


FIGURE 5.1: **Deux types de super-résolution** : (gauche) super-résolution multiple (droite) super-résolution unique. Pour ces deux cas, les images BR en entrée sont en haut. On utilise ensuite l'information que celles-ci contiennent (représentée par des point colorés) pour construire une image HR (en bas).

Dans la suite, nous introduirons un modèle linéaire classique permettant de modéliser le processus de formation d'une image BR à partir de sa version HR.

5.3.2 Modèle d'observation image

Commençons par introduire un modèle reliant les images BR observées à leur version HR. Notons \mathcal{X} cette image idéale HR que l'on cherche à reconstruire. On suppose que celle-ci est échantillonnée à un niveau plus fin que le taux de Nyquist associé à l'échelle d'analyse (ce taux stipule que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois supérieure à la plus haute fréquence à laquelle on s'intéresse). Nous dénoterons $(\mathcal{Y}_k)_{k=1}^N$ la k -ième observation basse résolution de \mathcal{X}

dont on dispose. Ces dernières sont reliées par l'expression suivante :

$$\mathcal{Y}_k = M_k \mathcal{X} + B_k, \quad (5.1)$$

où B_k est un terme de bruit et M_k est un opérateur modélisant les effets suivants :

- l'application d'un filtre passe bas représentant le moyennage spatial réalisé par le capteur basse-résolution, appelé aussi PSF (*Point Spread Function*);
- un opérateur de décimation (*sub-sampling*) générant l'image BR observée;
- éventuellement une composante de mouvement.

Il est possible de concaténer les N équations (5.1) en un unique système linéaire de type

$$\mathcal{Y} = M \mathcal{X} + B. \quad (5.2)$$

Il est important de noter que l'on ne connaît pas en général le contenu de l'opérateur M , il faut donc l'approximer. Il apparaît donc clairement que le problème de la super-résolution d'images est mal-posé et nécessite l'introduction d'hypothèses supplémentaires afin de réduire l'espace des solutions admissibles.

5.4 Quelques méthodes de super-résolution

Depuis le séminaire de Tsai & Huang [66] dans les années 80 et leur approche basée sur l'étude du décalage inter-images dans le domaine fréquentiel (cf. section 5.4.1 ci-dessous), de nombreuses avancées ont été proposées par la communauté [75–78] : méthodes fréquentielles, spatiales, statistiques ou issues du domaine de l'apprentissage statistique. Dans cette partie, nous introduirons quelques-unes de ces approches classiques.

5.4.1 Approche fréquentielle

L'approche originelle de Tsai & Huang [66] repose sur la dérivation d'une équation reliant les images BR et l'image HR solution en se basant sur la composante de mouvement sous-pixellique due aux capteurs d'acquisition entre les images BR. Les auteurs se basent sur les trois principes suivants : (a) les propriétés de décalage de la transformée de Fourier ; (b) la relation d'aliasing entre la transformée de Fourier

continue (TFC) de l'image HR et les transformées de Fourier discrètes (TFD) des images BR et (c) : l'hypothèse qu'une image HR est à bande limitée¹. Cela rend possible la formulation d'équations reliant les coefficients de la TFD des images observées avec une version échantillonnée de la TFC de l'image HR.

Soit $\mathcal{X}(x, y)$ un signal continu haute résolution, et N images correspondantes translatées $\mathcal{X}_k(x, y) = \mathcal{X}(x + \Delta_{k_x}, y + \Delta_{k_y})$, $k = 1..N$. Leurs TFC sont respectivement notées $\hat{\mathcal{X}}(\nu_1, \nu_2)$ et $\hat{\mathcal{X}}_k(\nu_1, \nu_2)$. En utilisant les propriétés de décalage de la TFC, on a

$$\hat{\mathcal{X}}_k(\nu_1, \nu_2) = \exp(j2\pi(\nu_1\Delta_{k_x} + \nu_2\Delta_{k_y})) \hat{\mathcal{X}}(\nu_1, \nu_2). \quad (5.3)$$

On échantillonne ces versions décalées \mathcal{X}_k avec deux périodes T_1 et T_2 pour obtenir une collection d'images basse résolution $\mathcal{Y}_k[n_1, n_2] = \mathcal{X}_k(n_1T_1 + \Delta_{k_x}, n_2T_2 + \Delta_{k_y})$ où n_1, n_2 correspondent aux valeurs discrètes d'échantillonnage. Notons $\hat{\mathcal{Y}}_k[r_1, r_2]$ la TFD de l'image BR \mathcal{Y}_k . Celle-ci est liée à la TFC des images décalées \mathcal{X}_k par la relation d'aliasing suivante :

$$\hat{\mathcal{Y}}_k[r_1, r_2] = \frac{1}{T_1T_2} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{X}}_k \left(\frac{2\pi}{T_1} \left(\frac{r_1}{N_1} - m_1 \right), \frac{2\pi}{T_2} \left(\frac{r_2}{N_2} - m_2 \right) \right). \quad (5.4)$$

Sous l'hypothèse que $\hat{\mathcal{X}}(\nu_1, \nu_2)$ est à bande limitée, on a $|\hat{\mathcal{X}}(\nu_1, \nu_2)| = 0$ pour $|\nu_1| \geq N_1\pi/T_1$, $|\nu_2| \geq N_2\pi/T_2$. On peut donc construire un système linéaire de type $\underline{\hat{\mathcal{Y}}} = A\underline{\hat{\mathcal{X}}}$ où $\underline{\hat{\mathcal{Y}}}$ résulte de la concaténation des $\hat{\mathcal{Y}}_k$ et A est la matrice dont les éléments sont détaillés dans (5.4). L'inversion d'un tel système suivie d'un calcul de TFD inverse permet de reconstruire une image HR associée. Un tel modèle néglige la présence de bruit au sein des images BR et modélise le processus de décimation comme un simple échantillonnage, sans présence de flou. Ainsi, plusieurs extensions ont ensuite été introduites ultérieurement pour prendre en compte le terme de bruit ou le flou temporel [79], ou s'appuyant sur une régularisation de type Tikhonov [80]. Cependant, de telles approches basées sur le domaine fréquentiel sont rapidement limitées dans le cas de dégradations complexes et ne permettent

1. un signal f est dit à bande limitée si son spectre \hat{f} n'a pas de fréquence supérieure à une fréquence limite ν_{lim} .

pas facilement d'inclure des hypothèses a priori. Pour cela, les travaux récents en super-résolution se concentrent dans le domaine spatial.

5.4.2 Approche spatiale

Comme nous l'avons dit précédemment, la super-résolution d'images est un problème inverse dans lequel la solution (ou source) est estimée à partir d'un certain nombre d'images basse résolution observées. Ces quantités sont liées par l'équation (5.2). On peut alors définir une fonctionnelle $E(\mathcal{X})$ à minimiser [81] et qui encouragera la solution à respecter certaines contraintes relatives aux données BR observées. Une telle fonctionnelle est classiquement définie à l'aide d'arguments algébriques ou statistiques, et la plus connue d'entre elles est sûrement celle se basant sur la norme L_2 des résidus, i.e.

$$E(\mathcal{X}) = \|\mathcal{Y} - M\mathcal{X}\|^2. \quad (5.5)$$

La solution finale \mathcal{X}^* est alors obtenue par la résolution du problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{X}^* = \arg \min_{\mathcal{X}} E(\mathcal{X}). \quad (5.6)$$

Une des principales limitations de cette formulation est la possible amplification de la composante de bruit [76] lors de l'inversion de l'opérateur M . Ce dernier peut aussi être singulier, et sa « pseudo-inversion »² peut se révéler très compliquée. Pour pallier ce problème, des méthodes de régularisation [82, 83] ont été introduites. La fonctionnelle (5.5) prend alors la forme suivante :

$$E(\mathcal{X}) = \|\mathcal{Y} - M\mathcal{X}\|^2 + \alpha\|R(\mathcal{X})\|^2, \quad (5.7)$$

2. on définit la pseudo-inverse d'une matrice non forcément carrée $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang n comme la matrice $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

où α est un paramètre de pondération et R un terme de régularité de type Tikhonov. Des méthodes plus récentes s'appuient sur une régularisation adaptative de la solution respectant les gradients/structures de l'image qui permettent de préserver certaines hautes fréquences de la solution [76, 84].

5.4.3 Interpolation et déconvolution

Les méthodes d'interpolation permettent d'approximer une fonction continue à partir de la connaissance d'un échantillonnage de cette dernière sur une grille discrète. Elles sont présentes dans un grand nombre de méthodes de super-résolution, puisqu'elles permettent de définir un signal 2D sur une grille de résolution plus élevée que celle de la grille initiale. Le lecteur intéressé pourra trouver un aperçu complet des méthodes d'interpolation en se reportant à [85, 86]. Les approches de super-résolution basées sur deux étapes successives d'interpolation et déconvolution [87–89] sont sans aucun doute les plus intuitives. Comme nous l'avons dit ci-dessus, une image à faible résolution est aisément redéfinie sur une grille HR à travers une procédure d'interpolation. Toutefois, cette opération n'apporte aucune nouvelle information sur l'image : on se retrouve alors dans une situation de sur-échantillonnage. Pour cela, on applique dans un second temps une procédure de restauration : le but est de reconstruire l'image haute résolution dont on possède une version lissée/floutée. Il s'agit alors d'un problème de déconvolution en présence d'une composante de bruit.

Dans [90], Ur et Gross considèrent un ensemble d'images BR décalées qu'ils interpolent à l'aide d'une procédure non linéaire basée sur le théorème d'échantillonnage multi-canal généralisé³ [91, 92], pour ensuite appliquer une étape de déconvolution. Komatsu et al. [93] proposent d'estimer une image HR à partir de plusieurs images prises simultanément avec différentes caméras en s'appuyant sur l'algorithme de Landweber [94]. Pour cela, ils utilisent une technique de corrélation pour estimer les décalages inter-images. Dans [95], Alam et al. ont développé une méthode de super-résolution en temps réel à partir d'images infrarouges en s'appuyant sur un algorithme de recalage du gradient pour l'estimation des décalages ainsi qu'une interpolation au plus proche voisin pondéré. Ils appliquent ensuite une étape de filtrage de type Wiener pour atténuer les composantes de flou et de bruit. Nguyen

3. Ce théorème stipule qu'un signal f défini sur une bande de fréquences $[-\nu, \nu]$ peut être décomposé en utilisant N filtres linéaires mutuellement indépendants dont on échantillonne les sorties à une fréquence correspondant à N fois à la fréquence de Nyquist.

et Milanfar [83] ont proposé un algorithme de reconstruction par interpolation en utilisant une base d'ondelettes pour exploiter les propriétés d'entrelacement des données aux résolutions les plus grossières.

L'avantage de telles approches est leur facilité d'implémentation et leur faible coût en puissance de calcul. Elles permettent notamment des traitements en temps réel. Cependant, les modèles de dégradation et de bruits que ces algorithmes peuvent gérer sont en général limités.

5.4.4 Autres méthodes

De nombreuses méthodes adoptent une approche statistique et se basent sur les estimateurs de maximum a posteriori et de maximum de vraisemblance [76, 96]. Dans [97], Fattal applique de tels modèles en portant une attention particulière aux discontinuités au sein des images. Depuis une dizaine d'années, un nombre croissant de méthodes s'appuient sur des techniques de fouille de données, pour lesquelles les contraintes de régularité imposées à la solution sont dérivées d'un ensemble d'images générales utilisé comme base d'apprentissage [98–100]. Ces informations « apprises » sont utilisées dans un second temps pour estimer certaines hautes fréquences n'apparaissant pas explicitement dans les images BR. Dans [101], les auteurs s'intéressent à la reconstruction de données océanographiques : un modèle d'apprentissage de type SVR (*Support Vector Regression*) est appris en chaque pixel à partir d'images à basse résolution, de sorties de modèles et de quelques images à haute résolution. L'algorithme s'adapte ainsi à plusieurs types de liens (offshore, zones côtières,...). Il est évident que pour de telles méthodes, la richesse de la base d'apprentissage est cruciale, ce qui restreint leur utilisation à des situations spécifiques, lorsque de telles bases peuvent être construites (e.g. amélioration de visages humains, texte, etc.).

5.5 Discussion

Les méthodes de super-résolution ont pour objectif l'amélioration d'une ou plusieurs images basse résolution en augmentant la précision des détails visibles au sein de celles-ci. Pour cela, de nombreuses méthodes ont été proposées par la communauté de la vision par ordinateur : les premiers travaux sur le sujet ont montré qu'il était possible de réduire l'effet d'aliasing dans le cas où l'on dispose de plusieurs images

d'une même scène décalées par un mouvement de faible amplitude. L'ensemble des travaux actuels peut se découper en plusieurs catégories, en fonction de la méthode de reconstruction et du modèle d'observation employés : méthodes d'interpolation, méthodes statistiques, méthodes d'apprentissage statistique, approches fréquentielles, classification de pixels, etc.

Le prochain chapitre a pour but d'apporter une contribution aux méthodes de super-résolution dans le cas de l'analyse d'images d'un scalaire passif turbulent : cette méthode s'appuie sur une formulation de type LES ainsi que sur certain nombre d'arguments théoriques issus de la littérature pour estimer les composantes haute résolution inconnues.

Chapitre 6

Super résolution d'images de scalaire passif

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode visant à améliorer la qualité d'images d'un champ scalaire passif transporté par un champ de mouvement turbulent. Nous commencerons par formaliser le problème de super-résolution pour un tel champ d'application, puis exploiterons un certain nombre de modèles issus de la mécanique des fluides permettant sa résolution. Enfin, nous détaillerons plusieurs expériences permettant d'évaluer la qualité de la méthode proposée.

6.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le problème de super-résolution d'images est bien connu au sein de la communauté de la vision par ordinateur. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de travaux dédiés spécifiquement à l'amélioration de la qualité d'images d'écoulements fluides. L'étude d'un scalaire passif transporté par un champ turbulent à partir d'une séquence d'images est pourtant de première importance dans de nombreux domaines des sciences environnementales (météorologie, climatologie, océanographie, etc.), des sciences de la vie (biologie, médecine) ou encore de mécanique des fluides expérimentale. Comme mentionné dans les chapitres précédents, des exemples typiques de scalaires passifs rencontrés dans la nature sont : un polluant dans une rivière, les tempêtes de sable, la circulation sanguine, de la fumée s'échappant d'une cigarette, etc. Dans cette thèse, nous nous sommes donc intéressés au développement d'une méthode

de super-résolution d'images fluides capable de respecter les deux contraintes suivantes :

- une complexité réduite ;
- une production de solutions respectant les lois physiques régissant de tels phénomènes.

L'originalité de l'approche proposée dans ce chapitre est d'exploiter les fortes interactions entre échelles présentes au sein des phénomènes de transport de scalaires passifs. Cela permet, à partir de considérations théoriques, de dériver un système complet de super-résolution d'images associées à de tels phénomènes.

Rappelons brièvement le formalisme de base de la super-résolution introduit au chapitre précédent dans le cas mono-image. Soit \mathcal{Y} une image basse résolution donnée et \mathcal{X} sa version haute résolution que l'on cherche à estimer. Une hypothèse très utilisée est celle consistant à dire que celles-ci sont reliées par l'expression suivante :

$$\mathcal{Y} = M\mathcal{X} + B, \quad (6.1)$$

où B est une composante de bruit et M est la composition de plusieurs effets :

- un processus de filtrage dont le but est de modéliser le moyennage spatial effectué lors de l'acquisition de l'image basse résolution par le dispositif d'acquisition ;
- un opérateur de décimation (*sub-sampling* en anglais) qui permet de générer l'image basse résolution.

Pour le reste de ce chapitre, nous ferons l'hypothèse que la plus petite échelle physique capturée par le dispositif d'acquisition correspond à la résolution spatiale de l'image. De plus, nous négligerons la présence du bruit B . Le but est de modéliser puis d'inverser l'opérateur M en augmentant la résolution de l'image BR (typiquement par un facteur de 2^N avec $N \in \mathbb{N}^+$) pour enfin appliquer une procédure de déconvolution. Nous illustrons cette situation en Fig. 6.1.

Dans ce chapitre, nous proposons de relier le processus de super-résolution au formalisme de la simulation des grandes échelles (LES, voir section 1.4.5). Cela nous permettra d'utiliser la multitude de modèles proposés dans la littérature LES dont le but est de modéliser explicitement les fines échelles d'un champ scalaire.

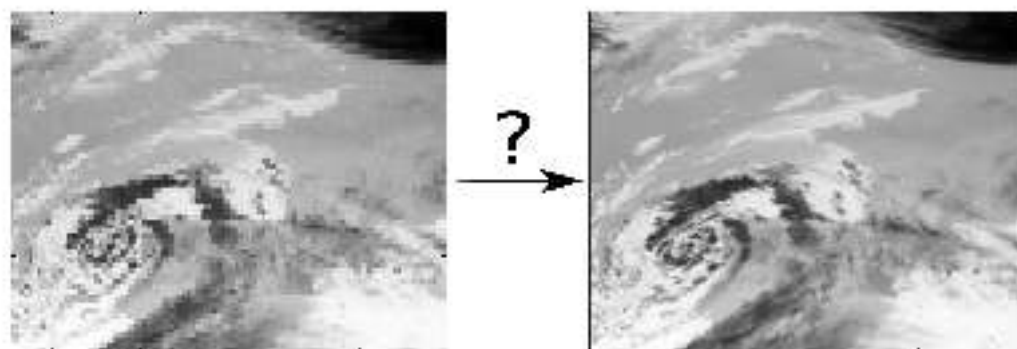


FIGURE 6.1: Illustration de la super-résolution : à partir d'une image basse résolution (gauche), on cherche à estimer sa version haute-résolution dont la taille est plus grande (à droite).

Nous transposerons ces modèles et les utiliserons pour estimer certaines hautes fréquences manquantes au sein des images BR fournies en entrée. Afin d'assurer la consistance temporelle de ces composantes haute fréquence, nous expliquerons aussi comment intégrer, pour une telle situation, un algorithme d'assimilation de données variationnelle. Nous évaluons ensuite la méthode proposée sur des images synthétiques mais aussi des images issues d'expériences réelles. Enfin, nous nous intéresserons à l'utilisation des images haute résolution ainsi estimées pour effectuer des estimations *a posteriori*, par exemple de champs de vitesses.

6.2 Cadre général de super-résolution avec *a priori* physiques

Dans cette section, nous proposons de relier le processus de super-résolution aux approches LES multi-échelles [3, 112]. Comme nous le verrons brièvement, rappeler l'approche LES pour l'équation de transport scalaire.

6.2.1 Equation LES pour le transport d'un scalaire passif

Nous ons θ un champ scalaire passif : nous verrons dans la suite comment relier à ce dernier les valeurs de luminosité L obtenues grâce aux données images. L'idée principale des approches LES (cf section 1.1.3) est de séparer le champ scalaire θ étudié en deux composantes :

- une composante résolue (ou encore grandes échelles), composée des basses fréquences de l'écoulement. Celle-ci est considérée anisotropique et est responsable de la forme globale du champ ;
- une composante sous maille (ou encore fines échelles), considérée comme isotropique, et constituée des hautes fréquences restantes.

Le but est alors de résoudre numériquement le comportement des grandes échelles tout en simulant le comportement des fines échelles sur celles-ci. Cette séparation des échelles est réalisée grâce à l'introduction d'un filtre passe bas noté G dont le support est de taille $\bar{\Delta}$ (i.e. $\forall \mathbf{x}$ t.q. $|\mathbf{x}| > \bar{\Delta}, G(\mathbf{x}) = 0$). On décompose alors $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ où $\bar{\phi} = G * \phi$ correspond aux échelles résolues et ϕ' aux échelles sous maille. Il est possible d'insérer une telle décomposition au sein des équations régissant la dynamique temporelle d'un scalaire passif. Rappelons l'expression de cette dernière ci-dessous :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{ReSc} \Delta \phi = 0. \quad (6.2)$$

Filtrer l'équation (6.2) à l'aide de G tout en insérant la décomposition LES du champ scalaire ϕ et de celui de la vitesse \mathbf{v} permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla} \bar{\phi} - \frac{1}{ReSc} \Delta \bar{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_\phi = 0, \quad (6.3)$$

où $\vec{\tau}_\phi$ modélise l'effet des composantes sous maille (ϕ', \mathbf{v}') sur la dynamique globale. Il est ainsi possible, pour une équation d'évolution, de séparer clairement les contributions des différentes gammes d'échelles. Dans la suite, nous verrons en quoi cela peut se révéler très utile dans le contexte de la super-résolution d'images fluides. Avant cela, nous discutons dans la section suivante des relations entre niveaux d'échelle et résolution de la grille pixellique.

6.2.2 Relation entre le niveaux d'échelle et résolution de la grille pixellique

Nous nous intéressons à la problématique suivante : supposons que l'on dispose d'une image d'un scalaire passif, i.e. une version échantillonnée de ce dernier

sur une grille discrète : comment traduire cette situation en terme d'approche LES ? De plus, comment qualifier les composantes hautes fréquences dont l'échelle correspondante est trop fine pour que celles-ci soient représentables sur la grille de pixels de l'image ?

Idée générale : Il est bien connu que les écoulements turbulents sont des phénomènes à caractère multi-échelles. Ainsi, une multitude de travaux en LES [3, 102] ont proposé de décrire l'évolution temporelle d'un champ scalaire ou un champ de vitesses à différents niveaux d'échelles. Un point crucial est alors d'approximer au mieux les fines échelles (ou leur contribution) d'un écoulement à partir de la connaissance des échelles résolues.

Si l'on considère à présent le cas de la super-résolution pour l'analyse d'images de scalaire passif, nous connaissons¹ initialement les valeurs prises par le champ scalaire sur une grille discrète fixe, i.e. la grille de pixels de l'image. Cette image peut être vue comme une version filtrée $\bar{\phi}$ (filtre de taille supérieure ou égale à celle de la grille de pixels) du champ scalaire réel ϕ . Le but de la super-résolution est d'augmenter la résolution de la grille sur laquelle on travaille tout en estimant certaines hautes fréquences disparues lors de l'acquisition de l'image. Cet objectif est donc en tout point similaire à la modélisation nécessaire des fines échelles lors d'une approche LES.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, notre méthode est basée sur l'idée qu'une image donnée en entrée est équivalente à une version filtrée (le filtre en question devant être défini) de la solution réelle : nous allons à présent formaliser la relation entre la résolution d'une grille et le niveau d'échelle associé, afin d'analyser de manière claire les composantes fine résolution que l'on cherche à approximer à travers le processus de super-résolution.

Formalisme : En pratique, on considère en entrée une image $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ représentant un champ scalaire passif noté ϕ . Dans certaines situations, il est possible de faire l'hypothèse [56] que la luminance I et la concentration ϕ sont reliées par une relation du type $I \approx \alpha\phi$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante. Ainsi, l'équation de transport filtrée (6.3) ci-dessus est aussi valable pour le champ de luminance I . La connaissance d'une image 2D revient à visualiser un champ scalaire sur une grille discrète \mathcal{H}_0 (de distance inter-pixels uniforme h_0) : ainsi l'image disponible

1. sous certaines conditions dont nous parlerons dans les sections suivantes

est implicitement une version filtrée de la solution réelle puisque les structures plus fines que l'échelle associée à h_0 ont disparu lors de l'acquisition de l'image. Il est en effet impossible de représenter sur \mathcal{H}_0 des structures dont le nombre d'ondes associé k est plus élevé que le nombre de Nyquist $k_{h_0}^* = \frac{L}{h_0}$, où L est la taille du domaine image. Ainsi en pratique, si l'on note I^{DNS} l'image idéale à pleine résolution, on travaille en réalité avec une version filtrée $I_0 = G_0 * I^{DNS}$ où G_0 peut être approximé par un filtre passe bas « projetant » I^{DNS} sur \mathcal{H}_0 . Si la résolution de l'image est grossière (de manière équivalente, \mathcal{H}_0), il peut alors être intéressant de re-définir I_0 sur une grille plus fine \mathcal{H}_1 (avec, par exemple, $h_1 = \frac{h_0}{2}$) et essayer d'estimer certaines des hautes fréquences perdues suite à l'application de G_0 et pouvant être représentées sur \mathcal{H}_1 . Notons \tilde{I}_0 la version de I_0 interpolée sur la grille plus fine \mathcal{H}_1 , comme illustré en Fig. 6.2 ci-dessous.

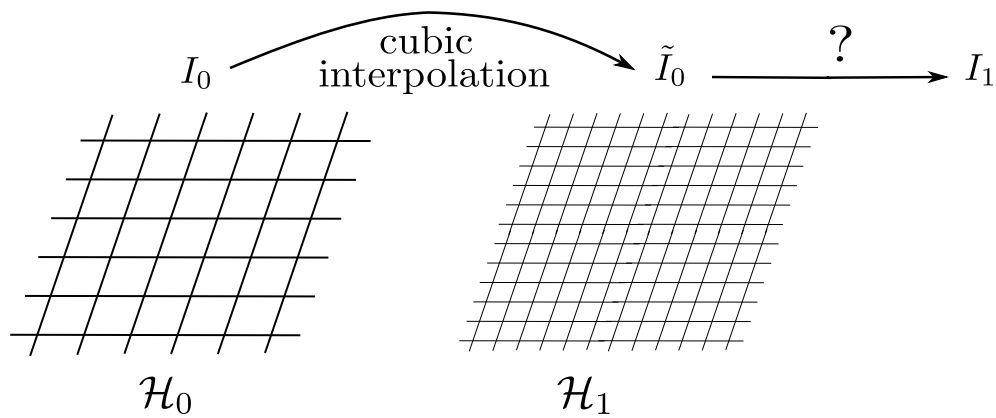


FIGURE 6.2: **Illustration de super-résolution** : en terme de précision de la grille pixelique. A droite, la grille \mathcal{H}_1 est deux fois plus fine que \mathcal{H}_0 dans chaque direction. On cherchera donc à reconstruire l'image HR sur \mathcal{H}_1 .

L'objectif est alors d'estimer une image « plus détaillée » I_1 définie sur \mathcal{H}_1 et approximant plus fidèlement le champ I^{DNS} . De manière équivalente, il s'agit d'estimer un incrément δI_1 tel que

$$I_1 = \tilde{I}_0 + \delta I_1. \quad (6.4)$$

Ce processus de super-résolution sur \mathcal{H}_1 peut être relié à la solution I^{DNS} à travers la décomposition ci-dessous :

$$I^{LES} = \underbrace{I_0 + \delta I}_{\text{modèle sur } \mathcal{H}_1} - \underbrace{I'_1}_{\text{modèle sur } \mathcal{H}_2} = I_1 - I'_1. \quad (6.5)$$

où I'_1 correspond aux fréquences de I^{LES} qui ne peuvent être représentées sur \mathcal{H}_1 , i.e. dont le nombre d'onde associé est plus grand que $k_{h_1}^* = \frac{1}{h_1}$. Une telle décomposition est illustrée d'un point de vue spectral en Fig. 6.3.

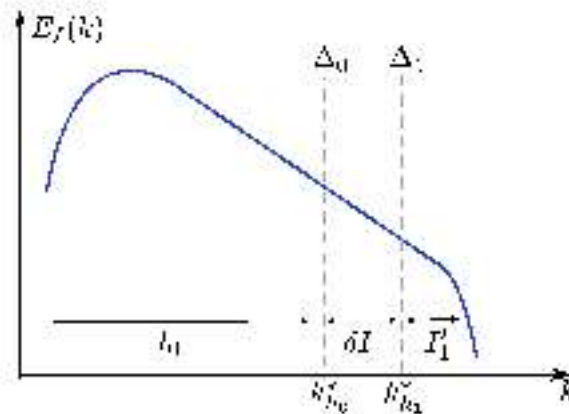


FIG. 6.3. Illustration d'un point de vue spectral de la décomposition LES : l'image obtenue en entrée I_0 est associée à une taille de filtre Δ_0 et la courbe est d'approximer l'image I_1 à l'échelle h_1 associée au niveau de filtrage $\overline{\Delta}_1$.

Deux catégories de structures peuvent être reconstruites sur \mathcal{H}_2 :

- les échelles représentées, i.e. qui étaient déjà en partie présentes sur \mathcal{H}_1 mais ayant été atténuées par le filtrage implicite lors de l'acquisition de l'image ;
- les échelles non représentées qui ont complètement disparu lors l'acquisition de l'image. Leur nombre d'onde correspondant k est tel que $k > k_{h_1}^*$ et elles ne peuvent ni être pas être reconstruites à partir de l'image originale I_0 . Afin de les estimer, il est nécessaire de faire appel à des hypothèses issues des lois de la physique.

Le problème d'estimation de la première catégorie est souvent appelé *soft deconvolution*, alors que pour le second on est face à un problème de modélisation. Dans la section suivante, nous proposons de résoudre ces deux problématiques.

6.3 Modèles d'estimation des fines échelles

Dans cette section, nous introduisons plusieurs méthodes pour estimer, sur la grille \mathcal{H}_1 , les échelles *représentées* et *non-représentées* définies ci-dessus. Les échelles *représentées* seront estimées à travers une étape de déconvolution, alors que des modèles physiques seront utilisés pour les échelles *non-représentées*. Nous exposerons ensuite, dans le cas où la séquence d'image étudiée est composée de plus de deux images, une méthode pour renforcer la consistance temporelle des incréments $\delta\phi_1$ ainsi estimés. Ces différentes approches peuvent en effet être combinées, comme nous le verrons dans la section des résultats expérimentaux.

6.3.1 Estimation des échelles représentées

Lorsque l'on s'intéresse à l'estimation des échelles *représentées*, il est important de considérer le ratio entre les deux grilles \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 . Pour des raisons de simplicité, nous émettons l'hypothèse que \mathcal{H}_1 est deux fois plus fine que \mathcal{H}_0 dans les deux directions x et y . On cherche alors à estimer un champ scalaire ϕ_1 tel que :

$$G * \phi_1 = \tilde{\phi}_0, \quad (6.6)$$

où G est un filtre passe bas, souvent approché par un filtre gaussien ou box, de taille $\bar{\Delta} = 2h_1$. Les filtres gaussiens ou box sont ce que l'on appelle des filtres différentiels : ils peuvent être exprimés comme la somme d'opérateurs différentiels via l'utilisation de séries de Taylor. En effet, il existe des coefficients M_k tels que :

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \bar{\Delta}^k M_k \frac{\partial^k}{\partial x^k}. \quad (6.7)$$

En conséquence, en tronquant l'expression (6.7) puis en discrétisant les opérateurs différentiels associés, il est possible de construire un système linéaire dont la résolution permet d'obtenir une estimation ϕ_1^d de ϕ_1 où l'on a :

$$\phi_1^d = (G_m)^{-1} \tilde{\phi}_0, \quad (6.8)$$

où :

$$G_m = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k M_k \frac{\partial^k}{\partial x^k}.$$

Cela permet d'estimer les échelles *représentées* sur la grille \mathcal{H}_0 . Cependant, pour l'instant, aucune fréquence plus petite que celles initialement présentes n'a été incluse. Le processus de super-résolution « exact » (i.e. estimer ϕ_1) est seulement envisageable si $\tilde{\phi}_0$ et ϕ_1 ont le même support spectral : $\forall k$ tel que $\hat{\phi}_1 > 0$, alors on a $\hat{\tilde{\phi}}_0 > 0$ où « $\hat{}$ » dénote la transformée de Fourier d'une variable donnée. Ainsi, il est nécessaire d'introduire des modèles supplémentaires afin de produire des échelles *non-représentées*. Ceux-ci sont introduits dans la section ci-dessous.

6.3.2 Estimation des échelles *non-représentées*

Cette section introduit deux approches permettant d'estimer des échelles *non-représentées* à partir de modèles physiques. Nous commençons par introduire un modèle dit de similarité d'échelle qui peut être appliqué dans toute situation ; nous présentons ensuite un modèle basé sur le mécanisme de production de fines échelles à travers le phénomène d'advection subi par le champ scalaire ϕ . Enfin, une méthode permettant de s'assurer de la consistance temporelle de ces composantes sous maille estimées est introduite.

Modèle de similarité d'échelle : en présence de turbulence, on fait souvent l'hypothèse que le comportement des plus grosses échelles *non-représentées* est similaire à celui des plus fines échelles *représentées*. Une telle hypothèse est dite de similarité d'échelle, et est parfaitement justifiée au sein de la zone inertielle. Une illustration est fournie en Fig. 6.4 dans le domaine fréquentiel.

Ainsi, il est possible d'approximer certaines échelles *non-représentées* sur la base d'un modèle de similarité d'échelle à travers l'expression suivante :

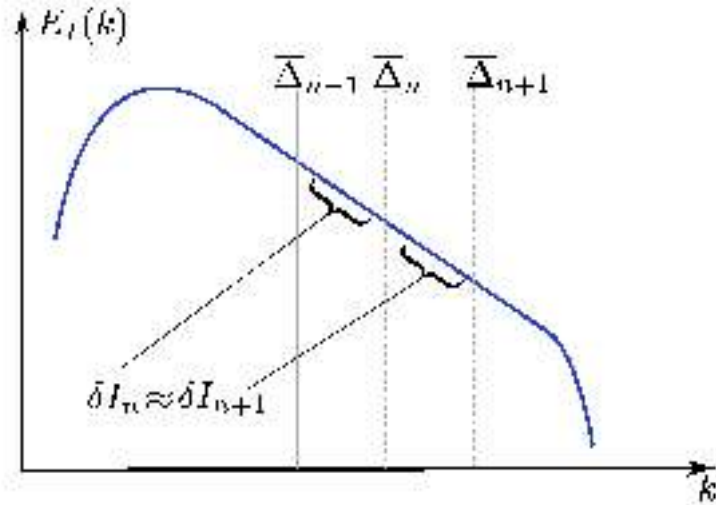


FIGURE 6.4: Similarité d'échelle : point de vue spectral.

$$\delta \phi_n \approx (M - G) * \phi_n^c, \quad (6.9)$$

où M est l'opérateur identité, ϕ_n^c est le champ scalaire décorrélé obtenu grâce à la relation (6.8) et G est un filtre passe-bas à définir. Il est aussi possible de construire des modèles de similarité étendue à des ordres plus élevés :

$$\delta \phi_n \approx \left(\sum_{i=0}^N (M - G)^i \right) * \phi_n^c. \quad (6.10)$$

Dans la section suivante, nous nous intéressons à la production d'échelles non-représentées et se basent sur le processus d'advection du champ scalaire par le champ de vitesse \mathbf{v} .

Modèle de production par advection : Domaradzki et Salihi [103] ont proposé de s'appuyer sur le terme d'advection \mathcal{P}_{adv} de l'équation de transport scalaire (6.2) afin d'estimer les lignes échelles inconnues :

$$\mathcal{P}_{adv} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \phi, \quad (6.11)$$

Si l'on adapte ce terme à ϕ_1^d , l'approximation obtenue par déconvolution décrite en section 6.3.1, on peut alors approximer le terme de production sur \mathcal{H}_1 par :

$$\mathcal{P}_{adv}^1 = -\mathbf{v}_1 \cdot \nabla \phi_1^d. \quad (6.12)$$

On observe la présence de la composante de mouvement \mathbf{v}_1 dans la définition de \mathcal{P}_{adv}^1 . Si celle-ci n'est pas connue au préalable, et que l'on dispose d'au moins deux images, on peut utiliser une méthode d'estimation du flot optique (cf. chapitre 3). Dans ce cas on approximera \mathbf{v}_1 par le champ de mouvement estimé. Puisque l'on ne s'intéresse ici qu'aux plus fines échelles sur \mathcal{H}_1 , les contributions des grandes échelles dans le terme de production \mathcal{P}_{adv}^1 doivent être éliminées. Pour cela, on commence par retrancher la contribution du terme d'advection des grandes échelles, obtenant alors le terme intermédiaire suivant :

$$\mathcal{P}_{adv}^{1,*} = -(\mathbf{v}_1 - G * \mathbf{v}_1) \cdot \nabla \phi_1^d. \quad (6.13)$$

Afin de restreindre les effets du terme (6.13) aux plus fines échelles, sa contribution filtrée doit aussi être éliminée. Finalement, le terme de production des fines structures est le suivant :

$$\mathcal{P}_{adv}^{1,*} = -(Id - G) * ((\mathbf{v}_1 - G * \mathbf{v}_1) \cdot \nabla \phi_1^d). \quad (6.14)$$

Le terme (6.14), de dimension ρt^{-1} produit des quantités de scalaire passif par unité de temps. Il est donc nécessaire de définir un « temps de production » θ durant lequel $\mathcal{P}_{adv}^{1,*}$ sera appliqué. Pour cela, les auteurs de [103] s'appuient sur l'hypothèse suivante : l'énergie cinétique des fines échelles générées par $\mathcal{P}_{adv}^{1,*}$ pendant θ équivaut à une fraction $R^2 \in [0, 1]$ de l'énergie cinétique des plus petites échelles *représentées*, i.e. :

$$(\theta \times \mathcal{P}_{adv}^{1,*})^2 \approx R^2 (\phi_1^d - G * \phi_1^d)^2, \quad (6.15)$$

signifiant que la valeur de θ est obtenue par l'expression suivante :

$$\theta = R \sqrt{\frac{(\phi_1^d - G * \phi_1^d)^2}{\mathcal{P}_{adv}^{1,*}}}. \quad (6.16)$$

En pratique, la valeur de R est choisie autour de 0.5 [103]. Finalement, l'incrément produit par le terme d'advection est tel que :

$$\delta\phi_1 = \theta \mathcal{P}_{adv}^{1,*}. \quad (6.17)$$

La production de quantités sous maille sera donc localement dépendante du comportement du champ de vitesse. Si l'on dispose de plus de deux images, la section suivante introduit une manière d'assurer une consistance temporelle aux fines échelles ainsi estimées.

Cas de séquences d'images : intégration d'a priori temporels. Le cadre de la LES permet de définir une équation dynamique à un niveau d'échelle donné (ou, de manière équivalente, une résolution de grille). Considérons les deux équations de transport scalaire sur les grilles \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 ci-dessous :

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \vec{\nabla}\phi_0 - \frac{1}{ReSc} \Delta\phi_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{\phi_0} = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \vec{\nabla}\phi_1 - \frac{1}{ReSc} \Delta\phi_1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{\phi_1} = 0. \quad (6.19)$$

En soustrayant (6.18) à (6.19), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial\delta\phi_1}{\partial t} = \underbrace{-\mathbf{v}_0 \cdot \vec{\nabla}\delta\phi_1 - \delta\mathbf{v}_1 \cdot \vec{\nabla}\phi_1 + \frac{1}{ReSc} \Delta\delta\phi_1 - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau}_{\phi_1} - \vec{\tau}_{\phi_0})}_{ST_{\Delta t}(\delta\phi_1(t))}, \quad (6.20)$$

où l'on note $\mathcal{ST}_{\Delta t}(\delta\phi_1(t))$ l'équation de transport (6.20) des incréments appliquée à $\delta\phi_1$. Les quantités $\vec{\tau}_{\phi_0}$ et $\vec{\tau}_{\phi_1}$ modélisent la contribution des fines échelles (relativement au niveau de grille considéré) et sont approximées par un modèle classique de viscosité dynamique [104] de la forme $\vec{\tau}_{\phi} = -C\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\nabla\bar{\phi}$. L'équation d'évolution (6.20) décrit la dynamique temporelle de l'incrément de super-résolution $\delta\phi_1$: il serait ainsi intéressant d'inclure dans notre modèle de super-résolution une telle information afin de renforcer la consistance temporelle des incréments $\delta\phi_1$. Ainsi, notons $\delta\phi^{com}(t)$ l'estimation de $\delta\phi_1$ au temps t obtenue à l'aide des méthodes de similarité d'échelles ou de production par advection (combinaison des équations (6.8)-(6.9) ou (6.8)-(6.17)). On souhaite estimer un incrément $\delta\phi_1$ qui est à la fois suffisamment proche des ces valeurs $\delta\phi^{com}(t)$ mais dont la dynamique temporelle respecte l'équation dynamique (6.20). On peut formaliser cela en cherchant la séquence d'incrément $\delta\phi_1(t)$ minimisant, sur une fenêtre temporelle $[t_0, T]$, la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(\delta\phi_1(t_0)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \|\mathcal{ST}_t(\delta\phi_1(t_0)) - \delta\phi^{com}(t)\|^2 dt. \quad (6.21)$$

La minimisation de la fonctionnelle définie en (6.21) permet d'obtenir une série d'estimations $\delta\phi_1(t) \forall t \in [t_0, T]$ qui sont un compromis entre l'équation dynamique (6.20) et les approximations $\delta\phi^{com}(t)$ calculées au préalable. En pratique, cette minimisation n'est pas triviale. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre 2 ou en annexe A, certaines méthodes issues de l'assimilation de données variationnelle [105, 106] permettent d'évaluer la quantité $\nabla\mathcal{J}(\delta\phi_1(t_0))$ pour un coût algorithmique raisonnable. On peut alors procéder à une descente de gradient afin d'estimer un champ $\delta\phi_1(t)$ minimisant l'expression 6.21.

6.4 Résultats Expérimentaux

Cette section propose une étude comparative de plusieurs techniques de super-résolution incorporant les différents modèles introduits dans la section précédente. Ces derniers seront évalués sur différents types d'images de scalaire passif, synthétiques et réelles.

6.4.1 Conditions expérimentales

Pour chacune des séquences utilisées, nous adoptons une méthode originale pour générer des données de synthèse afin de pouvoir comparer ces différentes méthodes avec précision. Les images haute résolution de référence fournies en entrées sont utilisées pour générer des données basse résolution grâce à l'application d'un filtre anti-aliasing puis d'une étape de décimation d'un facteur 2. Les images basse résolution sont donc deux fois moins résolues que leurs équivalents haute résolution. Un tel cadre nous permet de quantifier de manière précise la qualité des différents modèles considérés dans ce travail, puisque l'on connaît alors avec exactitude l'image haute résolution solution du problème. Afin d'évaluer la contribution de chacun d'entre eux, nous définissons ci-dessous 4 méthodes de super-résolution :

1. \mathcal{U}_{geo} correspond à une simple procédure de déconvolution (cf Sec. 6.3.1) basée sur le ratio inter-grille r ($r = 2$ ici). Nous faisons l'hypothèse que le filtre que nous cherchons à estimer est un filtre « box » de taille r ;
2. \mathcal{U}_{prod} est une combinaison de \mathcal{U}_{geo} avec le modèle de production par advection décrit en section 6.3.2 ;
3. \mathcal{U}_{ss} est une combinaison de \mathcal{U}_{geo} avec la méthode basée sur la similarité d'échelle (cf. section 6.3.2) afin d'estimer les échelles non représentées ;
4. \mathcal{U}_{cons} est une procédure basée sur l'algorithme 4DVAR (cf. section A) afin d'assurer la cohérence temporelle globale des incréments $\delta\phi_1$. Les observations $\delta\phi^{com}$ sont ici calculées par la procédure \mathcal{U}_{ss} .

Deux séquences d'images seront considérées : la première est issue d'une simulation DNS des équations de Navier-Stokes dans le cas 2D et la seconde est tirée d'une expérience de mélange d'un volume de fluorescéine dans de l'eau [107].

6.4.2 Séquence synthétique (DNS)

Cette séquence, utilisée auparavant dans ce travail (cf. 4.6), représente un écoulement turbulent transportant un champ scalaire en deux dimensions. Elle est constituée de 100 images, dont deux sont visibles en Fig. 6.5.

Afin d'évaluer la qualité des incréments $\delta\phi$ estimés, nous utilisons les critères suivants :

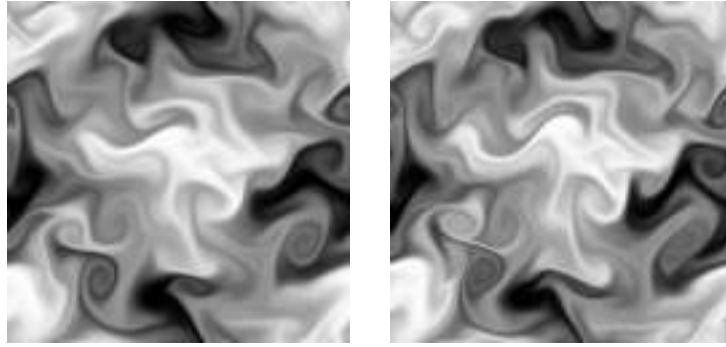


FIGURE 6.5: **Paire d'images de la séquence scalaire (DNS 2D)** : aux temps $t = 41\Delta t$ (gauche) et $t = 51\Delta t$ (droite) où $\Delta t = 10^{-2}s$.

1. Nous mesurons l'erreur de reconstruction relative :

$$Error(\delta\phi) = \frac{\sum |\delta\phi - \delta\phi^*|}{\sum |\delta\phi^*|} \times 100,$$

où $\delta\phi^*$ est la solution ;

2. Nous évaluons les distributions statistiques des $\delta\phi$;
3. Nous comparons les fonctions de structure des champs scalaires reconstruits ;
4. Nous utilisons les images haute résolution estimées pour procéder à une estimation du flot optique a posteriori.

Erreur de reconstruction relative : Les valeurs d'erreur au cours du temps pour chaque technique de super-résolution sont visibles en Fig. 6.6. On observe que la technique \mathcal{U}_{geo} basée uniquement sur une procédure de déconvolution permet d'estimer environ 25% des hautes fréquences manquantes. Cependant, cette méthode ne permet pas d'estimer les fréquences non représentées dans l'image basse résolution initiale. L'ajout du terme de production (méthode \mathcal{U}_{prod}) ou de l'hypothèse de similarité d'échelle (méthode \mathcal{U}_{ss}) permet d'améliorer significativement l'estimation. Ces trois techniques ont été appliquées sur chaque image de manière indépendante. Lorsqu'une séquence de plusieurs images est disponible, tel que dans cette situation, il est possible d'appliquer la méthode essayant de contraindre la dynamique temporelle des incréments \mathcal{U}_{cons} . On remarque que cette dernière améliore significativement la qualité de la reconstruction : elle permet d'estimer environ 50% des hautes fréquences manquantes.

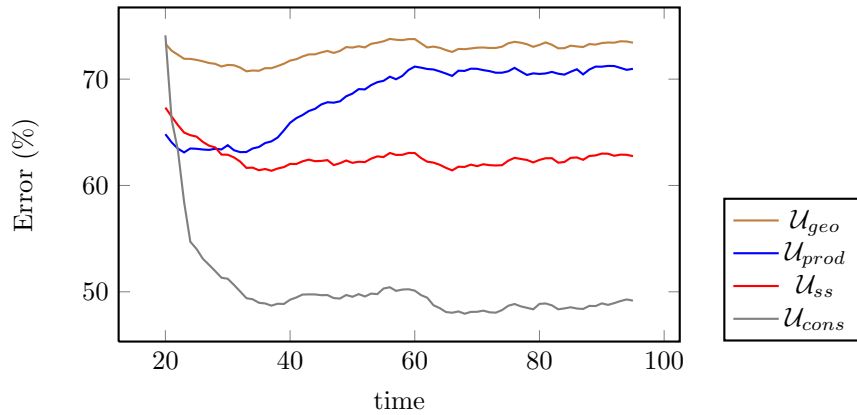


FIGURE 6.6: **Erreur de reconstruction relative** pour chaque modèle SR : si $\delta\phi_1$ est le résultat du processus SR et $\delta\phi_1^*$ la solution, on évalue la quantité $\frac{|\delta\phi_1 - \delta\phi_1^*|}{|\delta\phi_1^*|}$.

L'erreur de reconstruction relative représente un critère global de performance. Nous allons à présent nous intéresser aux histogrammes de distribution des incréments, ceux-ci étant en effet caractéristiques de la turbulence.

Histogramme des incréments : nous avons tracé en figure 6.7 les distributions statistiques des incréments de champ scalaire $\delta\phi$ pour un pas de temps donné de la séquence DNS. La solution est aussi visible en vert. Il est facile de voir que la méthode \mathcal{U}_{cons} produit la distribution la plus proche de cette solution. Si l'on compare les méthodes \mathcal{U}_{cons} et \mathcal{U}_{ss} , on remarque que cette dernière a tendance à surestimer (voir zoom) certaines hautes fréquences. Puisque les incréments estimés par \mathcal{U}_{ss} sont ensuite utilisés au sein de la méthode \mathcal{U}_{cons} , cela suggère que l'utilisation d'une contrainte temporelle permet de lisser certaines de ces valeurs surestimées. Enfin, si l'on compare la courbe brune, produite uniquement par la méthode de déconvolution \mathcal{U}_{geo} , avec les autres, il est évident que l'introduction de modèles physiques pour estimer les échelles *non-représentées* est cruciale pour l'estimation des fines échelles.

Comparaison des fonctions de structure : Un autre moyen d'évaluer la qualité des reconstructions est de calculer les fonctions de structure $S_n(r) = \langle (\phi(x+r) - \phi(x))^n \rangle$ pour différentes valeurs de n et r : en pratique nous avons considéré les valeurs $n \in \{2, 4, 8\}$ et $r \in [1, 32]$. L'évaluation des fonctions de structure permet de vérifier si la solution vérifie une loi d'échelle et éventuellement de calculer l'exposant de cette dernière. Celles-ci sont visibles en Fig. 6.8 pour

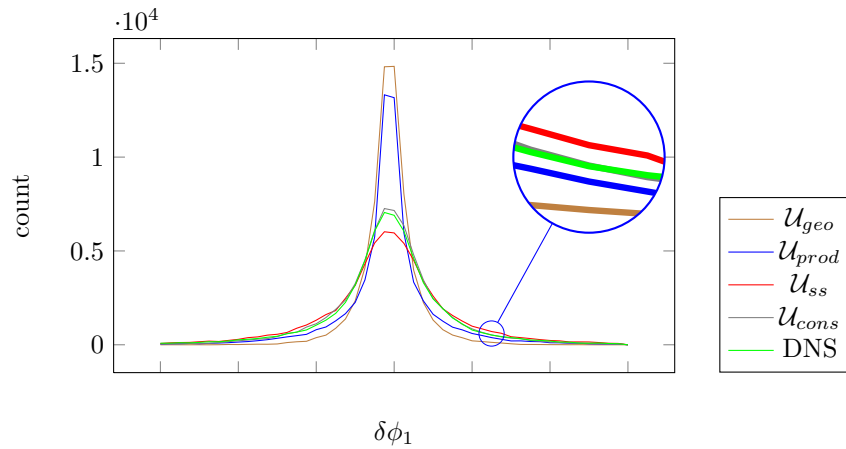


FIGURE 6.7: **Histogrammes des incréments estimés** $\delta\phi_1$ pour $t = 35\Delta t$. Celui de la solution $\delta\phi_1^*$ est aussi visible (courbe grise).

un pas de temps donné et pour chacune des trois séquences d'images définies ci-dessous :

1. la séquence originale DNS I_{DNS} ;
2. la séquence basse résolution I_{LR} simplement définie sur la grille haute résolution par une procédure d'interpolation cubique : aucune haute fréquence n'a été ajoutée ;
3. la séquence haute résolution I reconstruite à l'aide de la méthode \mathcal{U}_{cons} .

L'analyse de la figure Fig. 6.8 montre que la procédure de super-résolution permet de reconstruire les composantes hautes fréquences de manière à retrouver au moins partiellement la loi d'échelle vérifiée par la solution.

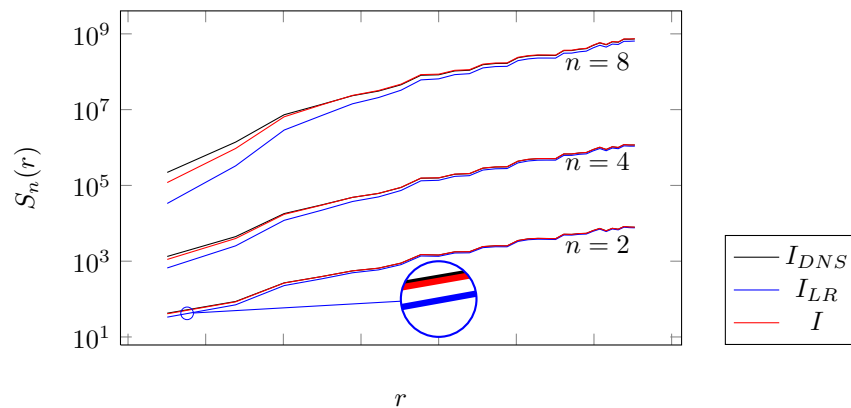


FIGURE 6.8: **Comparaison des fonctions de structure** à l'aide de 3 versions d'une même séquence d'images : la séquence DNS originale I_{DNS} , la séquence basse résolution artificielle interpolée sur la grille fine I_{LR} , et la version haute résolution I reconstruite grâce à \mathcal{U}_{cons} .

Ces différentes expériences nous ont permis de valider les différents processus de super-résolution, en particulier \mathcal{U}_{cons} qui semble produire les meilleurs résultats. Dans la section suivante, nous utilisons les données reconstruites afin d'estimer les champs de vitesse associés.

Utilisation des données reconstruites pour l'estimation du mouvement :

Afin de mettre en évidence l'intérêt d'un tel processus de super-résolution pour l'analyse d'images de scalaire passif, nous avons appliqué une procédure de flot optique sur les trois séquences d'images définies ci-dessus (I_{DNS} , I_{LR} et I). Comme nous l'avons vu en chapitre 3, les méthodes de flot optique visent à estimer le champ de déplacement au sein d'une paire (ou séquence) d'images. Un grand nombre de techniques sont disponibles (voir [32] ou section 3.2 pour une vision d'ensemble des différentes méthodes) et nous avons utilisé une méthode similaire à [53] en adoptant une approche de régularisation de type div/curl. Afin de comparer les résultats obtenus à partir des différentes séquences d'images, nous utilisons les valeurs d'erreur angulaire (AAE) au cours du temps indiquées en Fig. 6.9. Il est clair que la séquence I reconstruite grâce à la procédure proposée permet d'estimer un champ de vitesse presque aussi précis que celui obtenu avec la séquence haute résolution.

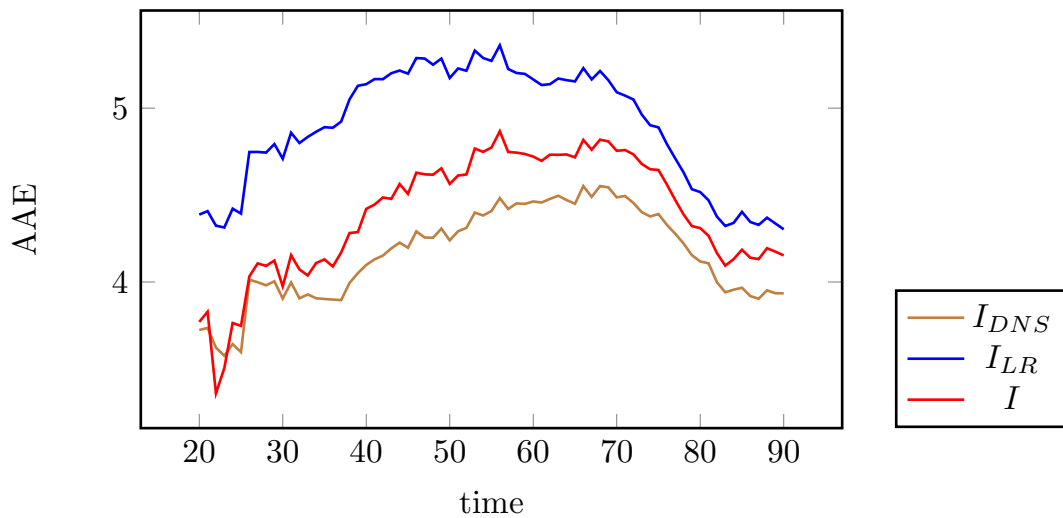


FIGURE 6.9: Valeurs d'erreur AAE pour l'estimation de mouvement à l'aide de 3 versions d'une même séquence d'images : la séquence DNS originale I_{DNS} , la séquence basse résolution artificielle interpolée sur la grille fine I_{LR} , et la version haute résolution I reconstruite grâce à \mathcal{U}_{cons} .

Bilan des expériences : dans cette section, nous avons évalué, à travers différents critères (erreur relative, histogrammes des incréments, fonctions de structure, estimation de mouvement) les bénéfices obtenus grâce à l'utilisation des méthodes de super-résolution proposées afin de reconstruire des images haute résolution à partir de données basse résolution. Ces tests ont montré que, même si une simple procédure de déconvolution permet de retrouver certaines hautes fréquences manquantes, l'ajout de modèles tirés de la littérature LES pour l'estimation explicite des composantes sous maille peut grandement améliorer la qualité des résultats de manière globale. De plus, lorsqu'une séquence d'images est disponible, l'introduction d'une contrainte de consistance dynamique sur les incréments haute résolution permet de générer une reconstruction de bonne qualité. Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'analyse d'images issues d'une expérience réelle.

6.4.3 Images réelles

Pour cette seconde série d'expériences, nous avons considéré une séquence de 10 images issues d'un mélange de fluorescéine et d'eau (cf. [107]) de densité ρ et de diffusivité κ connues. Celles-ci sont téléchargeables en ligne² et deux images de cette séquence sont observables en Fig. 6.10. Le champ de concentration ϕ est capturé par un capteur CCD de taille 512×512 après illumination par rayons ultra-violet. Le processus d'acquisition a été pensé de manière à ce que l'intensité lumineuse des images soit proportionnelle à la concentration du champ scalaire en chaque pixel. Le champ de concentration suit un régime libre amorti, quant au champ de vitesse associé, celui-ci est statistiquement stationnaire. De manière similaire à la section 6.4.2 ci-dessus, nous avons créé, à partir de la séquence initiale haute résolution, une séquence basse résolution correspondante par filtrage et décimation.

Les valeurs d'erreur de reconstruction associées à cette séquence sont visibles en Fig. 6.11. Cette fois encore, on peut en tirer des conclusions similaires à celles de l'expérience précédente de la section 6.4.2 : la procédure de consistance temporelle améliore de manière drastique la solution. On peut observer qu'environ 65% de la composante sous maille est correctement estimée, ce qui est très encourageant. Notons toutefois que dans ce cas, la méthode \mathcal{U}_{prod} basée sur un terme de production ne permet pas d'améliorer les résultats obtenus par la procédure de déconvolution simple \mathcal{U}_{geo} . Cela peut être dû au fait que dans ce cas, le champ de mouvement

2. <https://www.sites.google.com/site/julienmariecaroline/research/turbulence>

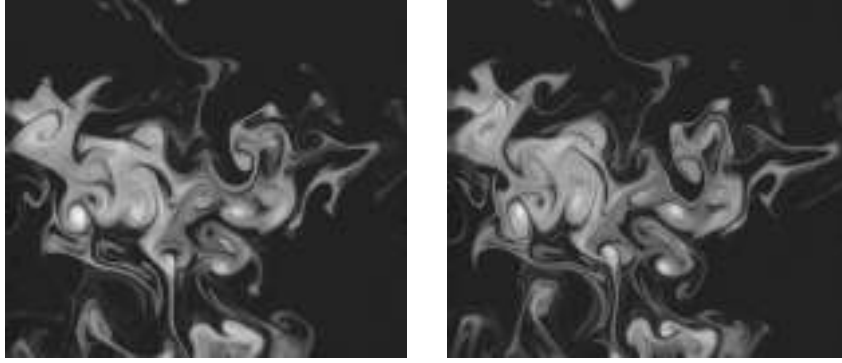


FIGURE 6.10: **Exemple de données réelles utilisées** pour deux pas de temps de la séquence ($t = 3$ and $t = 10$)

estimé au préalable est plus sujet à des erreurs d'estimation, puisque la solution présente des valeurs assez grandes. Etant donné que le calcul de \mathcal{U}_{prod} s'appuie sur les valeurs instantanées du champ de vitesses, celui-ci est très sensible aux erreurs associées à ce dernier.

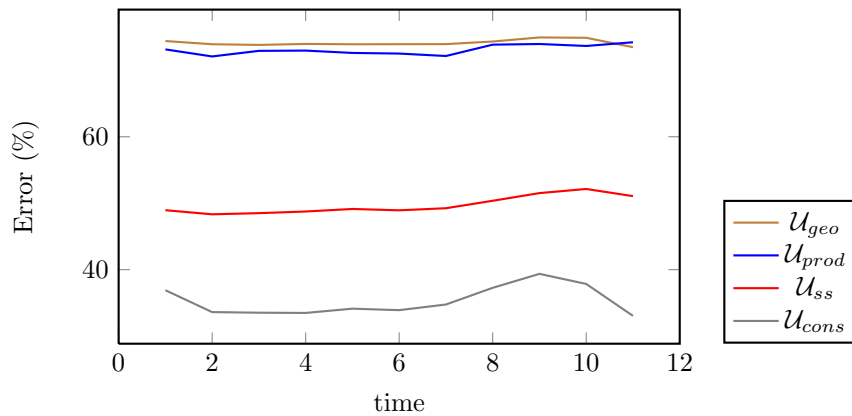


FIGURE 6.11: **Erreur de reconstruction** pour chaque stratégie sur la séquence réelle.

La figure Fig. 6.12 permet d'analyser les distributions statistiques des incréments haute résolution. Encore une fois, on observe que les statistiques obtenues grâce aux méthodes \mathcal{U}_{ss} et \mathcal{U}_{cons} sont globalement cohérentes par rapport à la solution réelle : cette dernière permet cependant une estimation plus fidèle. Enfin, les fonctions de structure sont indiquées en Fig. 6.13.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour la super-résolution d'images de scalaires passifs en se basant sur différents modèles issus de la littérature

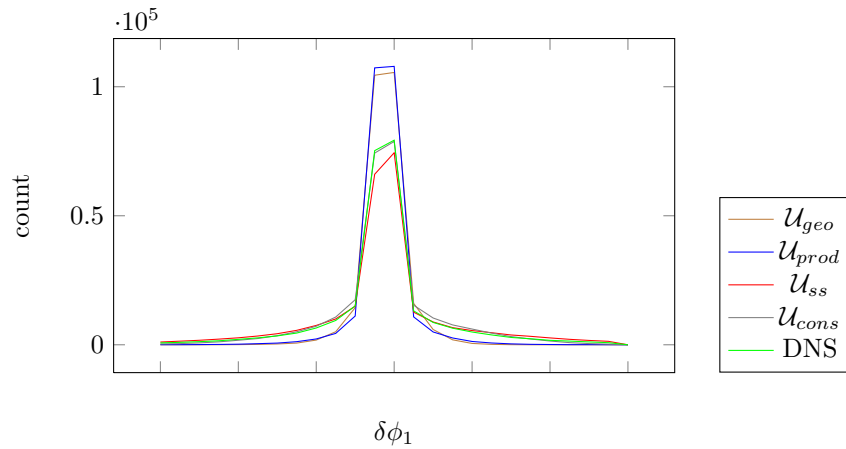


FIGURE 6.12: **Histogrammes des incréments** pour $t = 11$. La distribution obtenue par la méthode basée sur l'algorithme 4DVAR \mathcal{U}_{cons} est la plus proche de celle de la DNS.

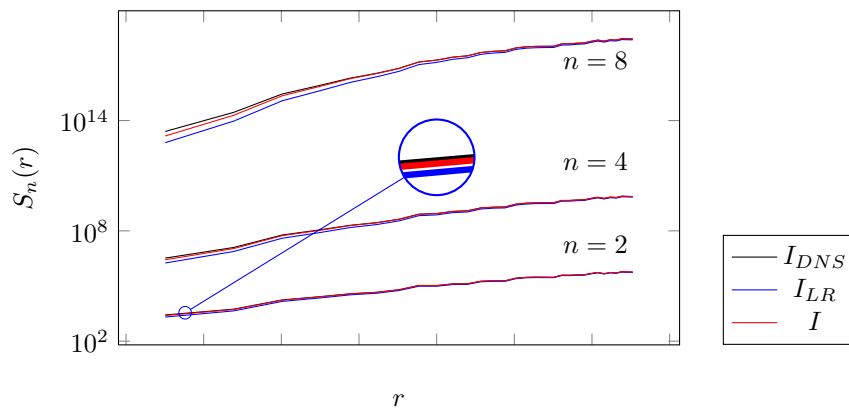


FIGURE 6.13: **Comparaison des fonctions de structure** à l'aide de 3 versions d'une même séquence d'images : la séquence DNS originale I_{DNS} , la séquence basse résolution artificielle interpolée sur la grille fine I_{LR} , et la version haute résolution I reconstruite grâce à \mathcal{U}_{cons} .

du domaine de la mécanique des fluides. Pour cela, nous relient de manière naturelle le processus de super-résolution à la formulation LES afin d'établir une base de travail cohérente. Trois techniques de génération de composantes hautes fréquences issues de la littérature LES sont détaillées et évaluées sur deux séquences d'images. Nous proposons aussi de contraindre ces incréments à suivre un modèle dynamique donné à l'aide d'un post-traitement basé sur l'algorithme 4DVAR issu de l'assimilation de données variationnelle. Les résultats expérimentaux montrent l'efficacité d'une telle approche, et justifient l'utilisation des images haute-résolution obtenues en sortie pour d'éventuelles analyses a posteriori, comme par exemple l'estimation de champ de mouvement.

Le couplage de super-résolution associée à des modèles LES constitue, en notre opinion, un thème de recherche prometteur. Dans le chapitre suivant, nous présentons une approche alternative dans le but de résoudre des problèmes variationnels à partir de données images dans un contexte multi-résolution.

Chapitre 7

Approche multi-résolution

Dans ce chapitre, nous proposons d'explorer certains aspects de l'estimation multi-résolution pour l'analyse d'images. Plus spécifiquement, nous introduisons une nouvelle méthode d'estimation permettant de généraliser l'approche pyramidale classique (cf section 3.1.4). Celle-ci s'appuie sur une utilisation simultanée des informations issues des différents niveaux de résolution, et aboutit à la définition d'une nouvelle fonctionnelle à minimiser de manière globale (i.e. sur toutes les résolutions à la fois). Nous introduisons ensuite un certain nombre d'opérateurs dont le but est de contrôler l'échange d'information entre les différents niveaux. La minimisation de la fonctionnelle peut alors être interprétée comme la résolution d'un problème dynamique le long des niveaux de grille, que nous résolvons par l'utilisation de méthodes d'assimilation de données variationnelle.

7.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, de nombreux problèmes d'analyse d'images se basent sur des formulations variationnelles. C'est le cas, par exemple, de l'estimation de champs de mouvements dans une séquence d'image (cf. chapitre 3). Nous illustrerons d'ailleurs la méthode de ce chapitre par la question du flot optique, sachant que tout problème variationnel d'analyse d'image peut être approché par la technique proposée. Rappelons brièvement le formalisme associé à l'estimation du flot optique : on note $I(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [t_0; t_f]$ le champ de luminance où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de définition image et $[t_0; t_f] \subset \mathbb{R}^+$ la fenêtre temporelle d'étude. Le but est d'estimer le champ de mouvement apparent $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$, $\mathbf{x} = (x, y) \in$

Ω entre chaque paire d'images successives $I(\mathbf{x}, t)$ et $I(\mathbf{x}, t + dt)$. La résolution d'un tel problème est classiquement effectuée à travers la minimisation d'une fonctionnelle E de la forme :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} + \lambda E_r(\mathbf{v}). \quad (7.1)$$

Celle-ci est composée de deux termes distincts : un terme d'attache aux données reliant les valeurs de luminance au champ de mouvement associé, et un terme de régularité contraignant l'aspect spatial de la solution, celui-ci étant pondéré par un paramètre λ .

La minimisation de la fonctionnelle 7.1 est souvent réalisée dans un contexte multi-résolution : cela permet d'accélérer la convergence des algorithmes itératifs utilisés, mais aussi une meilleure estimation des mouvements de grande amplitude (cf. section 3.1.4). Les approches multi-résolution consistent à redéfinir le problème initial sur plusieurs niveaux de grilles $\ell \in \{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_N\}$ et à résoudre successivement (du niveau le plus grossier vers le plus fin) des fonctionnelles auxiliaires $E^\ell(\mathbf{v}^\ell)$ adaptées à chaque niveau en utilisant comme initialisation l'estimation du niveau précédent. Ce processus est illustré en Fig. 7.1 ci-dessous.

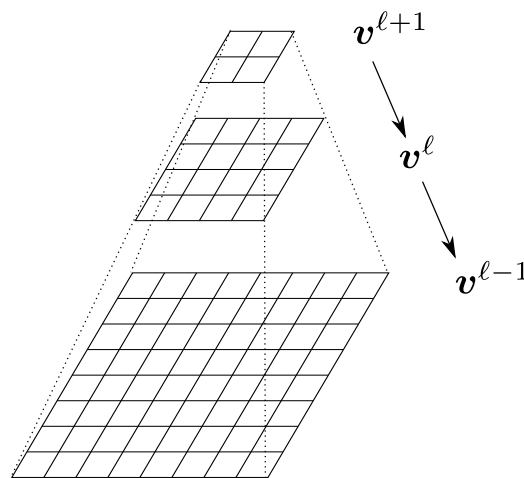


FIGURE 7.1: **Illustration de résolution pyramidale** : on s'appuie sur une hiérarchie de grilles obtenues par filtrage et sous échantillonnage. On commence alors par résoudre le problème au sommet de la pyramide, et ce résultat sert à initialiser la résolution sur le niveau suivant. On itère ensuite ce processus jusqu'au niveau le plus fin.

Ces approches multi-résolution permettent en pratique l'estimation de minima locaux satisfaisants [43, 108], mais souffrent de certaines limitations inhérentes aux approches « *coarse-to-fine* » : comme nous l'avons dit ci-dessus, pour chaque niveau ℓ , la minimisation de E^ℓ se base sur la connaissance de $\mathbf{v}^{\ell+1}$ comme initialisation. Cela implique un lien très fort entre les estimations aux différents niveaux dans un sens « descendant ». Une fois calculées, les structures correspondant aux basses fréquences de la solution sont considérées comme étant bien estimées et ne seront pas modifiées par la suite. Ainsi, l'estimation au niveau ℓ est fortement contrainte par la qualité de celles estimées aux niveaux $\ell' > \ell$, et les erreurs potentielles entachant $\mathbf{v}^{\ell'}$ seront propagées le long du processus d'estimation. L'algorithme estimera en effet à ce moment les composantes du champ de mouvement associées au niveau d'échelle ℓ , et corrigera difficilement les erreurs éventuelles des composantes basses fréquences estimées aux niveaux $\ell' > \ell$. De plus, comme nous l'avons expliqué précédemment en section 4.2, aucune information issue des niveaux inférieurs $\ell' < \ell$ n'est prise en compte, ce qui peut se révéler problématique dans certains cas. Pour pallier ces problèmes, nous proposons une méthode originale dont le but est de réaliser une estimation globale sur plusieurs niveaux de résolution afin d'éviter en partie les problèmes susmentionnés.

7.2 Contributions de ce chapitre

Le but de ce chapitre est d'étudier certains aspects fondamentaux des techniques d'analyse d'images en général et d'estimation du flot optique en particulier dans un cadre multi-résolution. Nous commencerons par généraliser l'approche pyramidale classique (au sein de laquelle plusieurs niveaux de grilles sont considérés de manière successive et indépendante) à travers la reformulation du problème initial dans le cadre de l'assimilation de données variationnelle. Cela nous permet d'adapter l'approche pyramidale afin de combiner les informations issues de plusieurs résolutions et ce de manière simultanée : l'estimation est ainsi réalisée de manière globale sur tous les niveaux. Dans une deuxième étape, nous nous intéressons à la modélisation des processus d'échanges d'information inter-résolution, en particulier à travers les processus de diffusion. Nous proposons un cadre de travail original permettant de coupler les observations inter-résolutions avec ces modèles d'échanges : cela est réalisé grâce à l'utilisation de l'algorithme 4DVAR introduit en section 2.4 et décrit en annexe A.

Nous commençons par introduire brièvement les outils relatifs à l'assimilation de données variationnelle et l'algorithme 4DVAR dans le cas « discret », et adaptons ensuite cette formulation dans le cas de l'estimation multi-résolution du flot optique. Enfin, la section 7.6 présente certains résultats expérimentaux.

7.3 Assimilation de données variationnelle : combiner différentes sources d'informations

Nous commençons par présenter l'algorithme 4DVAR dans le cas où le domaine spatial et la fenêtre temporelle d'étude sont tous les deux des espaces discrets pour ensuite expliquer la manière dont on adapte son cadre d'étude aux problèmes multi-résolution.

7.3.1 Principes et notations

L'algorithme 4DVAR fait partie du domaine de l'assimilation de données variationnelle [105, 109] et permet de combiner des informations de différentes natures afin d'estimer une variable d'état. Plus précisément, on cherche à produire une estimation (ou analyse) \mathcal{X}^a d'une quantité \mathcal{X}^t sur une fenêtre temporelle donnée : \mathcal{X}^t peut être un champ scalaire, un champ de mouvement, une courbe, ... Puisque l'analyse est réalisée sur une fenêtre temporelle, on notera \mathcal{X}_i la valeur de la variable d'état au pas de temps i . Des observations \mathcal{Y}^{obs} de \mathcal{X}^t sont supposées disponibles, ainsi qu'une estimation à priori \mathcal{X}^b de \mathcal{X}_0 . Nous faisons de plus l'hypothèse que l'évolution dynamique de \mathcal{X}^t au cours du temps est définie par un opérateur M tel que

$$\begin{cases} \mathcal{X}_i^t &= M_0^i \mathcal{X}_0^t \quad (\text{où } M_0^0 = Id) \\ M_0^i &= \prod_{k=0}^{i-1} M_k^{k+1} \end{cases}$$

On notera pour le reste de ce chapitre :

- \mathcal{X} le vecteur d'état ;
- \mathcal{Y}^{obs} le vecteur des observations ;

- H l'opérateur d'observation reliant \mathcal{X} et \mathcal{Y}^{obs} (ces derniers n'appartiennent pas forcément au même espace mathématique) ;
- B la matrice de covariance associée aux erreurs a priori $\epsilon^b = \mathcal{X}^t - \mathcal{X}^b$;
- R_i la matrice de covariance associée aux erreurs d'observations au temps i ,
 $\epsilon^{obs} = \mathcal{Y}_i^{obs} - H_i \mathcal{X}_i$.

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle

$$J(\mathcal{X}_0) = (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b)^T B^{-1} (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b) + \sum_{i=0}^n (\mathcal{Y}_i^{obs} - H_i M_0^i \mathcal{X}_0)^T R_i^{-1} (\mathcal{Y}_i^{obs} - H_i M_0^i \mathcal{X}_0), \quad (7.2)$$

qui est un compromis entre une adéquation au terme d'ébauche (estimation a priori de \mathcal{X}_0) et les observations. Cette relation peut s'écrire de manière légèrement plus compacte :

$$J(\mathcal{X}_0) = (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b)^T B^{-1} (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b) + \sum_{i=0}^n (\mathcal{Y}_i^{obs} - H_i \mathcal{X}_i)^T R_i^{-1} (\mathcal{Y}_i^{obs} - H_i \mathcal{X}_i), \quad (7.3)$$

et peut aussi être trouvée dans la littérature sous la forme suivante :

$$J(\mathcal{X}_0) = \|\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b\|_B^2 + \sum_{i=0}^n \|\mathcal{Y}_i^{obs} - H_i \mathcal{X}_i\|_{R_i}^2, \quad (7.4)$$

où on a introduit la distance Mahalanobis d'un vecteur x définie par : $\|x\|_A = x^T A^{-1} x$. Un minimiseur de J réalise un compromis entre les différentes observations \mathcal{Y}_i^{obs} et la contrainte dynamique (décrite par l'opérateur M) que \mathcal{X} est censée respecter. Le rôle des matrices de covariance $B, (R_i)_{i=1}^n$ est crucial car ces dernières façonnent la fonctionnelle J .

7.3.2 Minimisation de la fonction de coût

Malgré son expression en apparence compliquée, comme nous l'avons indiqué précédemment, il est possible d'évaluer le gradient de J grâce à l'intégration rétrograde du modèle dynamique adjoint (cf. annexe A). Notons $d_i = \mathcal{Y}_i^{obs} - H_i M_i \mathcal{X}$, on a alors :

$$\nabla J(\mathcal{X}) = 2B^{-1}(\mathcal{X} - \mathcal{X}^b) + \sum_{i=0}^n M_i^0 H_i^T R_i^{-1} d_i, \quad (7.5)$$

où $M_i^0 = (M_0^i)^T$. L'expression (7.5) permet ensuite de minimiser J à travers une méthode de descente de gradient. Le processus complet de l'algorithme 4DVAR est décrit ci-dessous en table 7.1.

Algorithme 4DVAR

1. Initialisation : $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}^b$, $n = 0$
2. Tant que $\|\nabla J\| > \epsilon$ ou $n \leq n_{max}$, do :
 - (a) Calculer J grâce à l'équation (7.3)
 - (b) Calculer les vecteurs d'innovation $d_i = \mathcal{Y}_i^{obs} - H_i \mathcal{X}_i$ pour chaque pas de temps i
 - (c) Calculer ∇J grâce à une intégration rétrograde du modèle dynamique adjoint

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n^* &= H_n^T R_n^{-1} d_n \\ \mathcal{X}_k^* &= M_{k+1}^k \mathcal{X}_{k+1}^* + H_k^T R_k^{-1} d_k \quad k = n-1, \dots, 0 \\ \nabla J(\mathcal{X}) &= 2B^{-1}(\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b) - 2\mathcal{X}_0^* \end{cases}$$

- (d) Descente et mise à jour de \mathcal{X}_0 par annulation de $\nabla J(\mathcal{X})$
- (e) Mise à jour des \mathcal{X}_i par intégration « forward » du système :

$$\mathcal{X}_i = M_i \mathcal{X}_0 \quad \forall i = 1..n$$

- (f) $n = n + 1$

TABLE 7.1: **Minimisation de la fonctionnelle** basée sur des intégrations directes et rétrogrades (« forward/backward ») successives. Si l'on observe l'expression formelle de $\nabla J(\mathcal{X})$, on peut voir que la minimisation est réalisée de manière globale puisque \mathcal{X}_0^* contient des informations issues de chaque pas de temps. Les corrections sont ensuite propagées à chaque pas de temps à travers l'étape (e).

Une propriété intéressante de l'algorithme 4DVAR est qu'il permet une minimisation globale de J sur toute la fenêtre temporelle. Les valeurs de \mathcal{X} aux différents pas de temps s'influencent mutuellement à travers les intégrations « forward/backward » successives, permettant ainsi de produire une solution consistante en temps. Cette propriété sera importante pour la suite de ce chapitre dans le cadre de l'estimation multi-résolution du mouvement.

7.4 Contrôle optimal pour l'estimation multi-résolution

Comme nous l'avons vu en section 2.4, un grand nombre de travaux utilisent l'algorithme 4DVAR afin d'estimer une variable d'état donnée au fil du temps [23, 58] à partir de séquences d'images. Dans ce travail, nous nous intéressons aux approches d'estimation multi-grilles : notre intérêt ne se porte plus sur l'évolution de la variable d'état « au fil du temps », mais plutôt « au fil des niveaux de résolution ». Dans la suite, nous exposons donc un formalisme revenant à interpréter les différents niveaux de grille comme des pas de temps artificiels : en assimilant les opérateurs de transfert inter-grilles classiques comme des modèles dynamiques entre les différents niveaux de grille, cela nous permet d'exprimer le problème d'estimation multi-résolution sous forme d'un problème d'assimilation de données.

7.4.1 Opérateurs de transferts inter-grilles et modèle dynamique

Le but des méthodes multi-résolution est de permettre un meilleur échange de l'information entre les différents niveaux de grille. La propagation de l'information est assurée par des opérateurs de transfert : dans la majorité des stratégies multi-grilles, de tels opérateurs propagent un champ scalaire ou un champ de vecteurs d'une grille donnée à une grille plus fine (resp. plus grossière) à travers une étape d'interpolation ainsi que des opérateurs d'expansion (resp. de réduction). Si l'on note \mathcal{H}^ℓ et $\mathcal{H}^{\ell-1}$ deux niveaux de grille adjacents, l'opérateur de transfert coarse-to-fine $M_\ell^{\ell-1}$ est linéaire de $\mathcal{H}^{\ell-1}$ à \mathcal{H}^ℓ . Son adjoint, l'opérateur « fine-to-coarse » $M_{\ell-1}^\ell$ est lui aussi linéaire de \mathcal{H}^ℓ vers $\mathcal{H}^{\ell-1}$ et on a :

$$\langle M_\ell^{\ell-1} \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, (M_\ell^{\ell-1})^T \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, M_{\ell-1}^\ell \mathcal{Y} \rangle, \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{H}^\ell, \mathcal{Y} \in \mathcal{H}^{\ell-1}.$$

Si l'on considère les niveaux de grille comme des pas de temps artificiels, de tels opérateurs peuvent être vus comme des opérateurs dynamiques « canoniques » d'un niveau à l'autre : on s'intéresse alors à l'estimation d'une variable d'état au fil des résolutions. La figure 7.2 illustre cette situation.

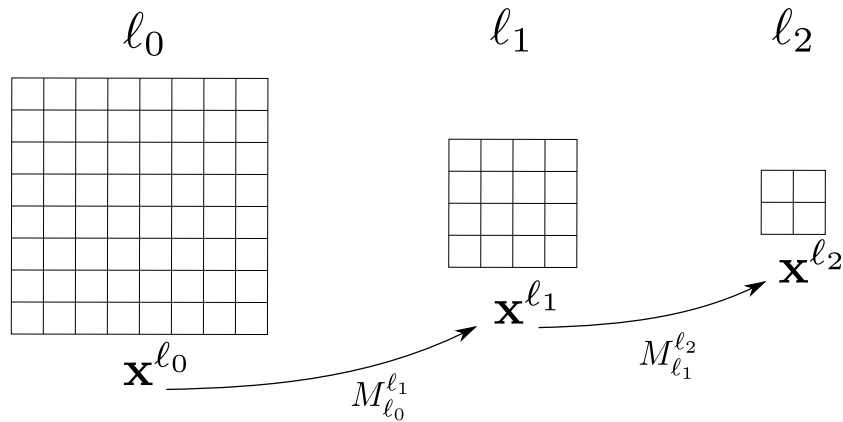


FIGURE 7.2: **Evolution de la variable d'état au fil des résolutions.** Pour chaque paire de grilles consécutives, un opérateur M propage la solution du niveau grossier vers le niveau le plus fin. Au sein de notre cadre de travail, nous considérons M comme un opérateur dynamique le long des grilles, celles-ci étant à présent vues comme des pas de temps artificiels.

L'approche présentée dans ce chapitre est inspirée par la propriété de l'algorithme 4DVAR décrit ci-dessus : ce dernier minimise la fonctionnelle donnée de manière globale sur l'ensemble de la fenêtre temporelle (et non de manière séquentielle). Une stratégie identique appliquée pour un problème d'estimation multi-résolution permet ainsi une optimisation de la fonction de coût associée sur toutes les résolutions. Cela permet d'améliorer l'échange d'information inter-grilles et d'éviter le phénomène de propagation des erreurs au fil des résolutions. L'échange local d'information entre deux inconnues non couplées (par exemple deux composantes (u, v) d'un champ de vitesse) est également meilleur par une telle approche.

En effet, considérons deux points distants de la grille pixellique. Une approche pyramidale classique ne permettra de « relier » ces deux points qu'à un niveau de résolution assez grossier pour que la distance les séparant soit de l'ordre du pixel. Ce couplage sera ensuite perdu lorsque l'on réalisera l'estimation aux niveaux les plus fins : ce sont alors majoritairement les hautes fréquences de la solution qui seront estimées et les méthodes itératives classiques seront incapables de repropager les corrections associées aux points de la grille éloignés. Grâce au cadre de travail global proposé dans ce chapitre, deux pixels seront toujours reliés à un niveau de grille donné puisque nous considérons l'ensemble des niveaux de résolution tout au

long de l'estimation. Un tel formalisme va nous permettre d'intégrer un processus d'estimation multi-résolution au sein d'un cadre de type 4DVAR de manière toute à fait naturelle. Avant d'introduire certains modèles dynamiques plus avancés en section 7.5, nous présentons ci-dessous la manière dont nous écrivons ce nouveau schéma multi-résolution en s'appuyant sur l'assimilation de données. Ensuite, les approches classiques seront réécrites en exploitant ce nouveau schéma en section 7.4.3.

7.4.2 L'estimation multi-résolution comme un problème d'assimilation de données

Notons \mathcal{X}_ℓ la variable d'état pour un niveau donné $\ell = \{\ell_0, \dots, \ell_N\}$ et \mathcal{X}_0 l'estimation finale (i.e. à la résolution la plus fine) que l'on cherche à déterminer. Supposons que l'on puisse définir, pour chaque niveau de grille, les composantes suivantes :

- vecteurs d'observation \mathcal{Y}_ℓ^{obs} ;
- opérateurs d'observation H_ℓ ;
- matrices de covariance des observations R_ℓ .

Si l'on fait l'hypothèse qu'un modèle dynamique permettant de relier les différentes valeurs $\mathcal{X}_\ell = M_\ell \mathcal{X}_0$ au fil des résolutions est connu, ainsi qu'une approximation \mathcal{X}^b de \mathcal{X}_0 , la fonctionnelle multi-résolution J est définie par :

$$J(\mathcal{X}_0) = (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b)^T B^{-1} (\mathcal{X}_0 - \mathcal{X}^b) + \sum_{\ell=0}^{\ell_N} (y_\ell^{obs} - H_\ell \mathcal{X}_\ell)^T R_\ell^{-1} (y_\ell^{obs} - H_\ell \mathcal{X}_\ell). \quad (7.6)$$

La minimisation de J permet d'extraire une solution \mathcal{X}_0 à la résolution la plus fine ℓ_0 qui minimise la différence entre les observations et la valeur courante de la solution selon chaque niveau de résolution. Cela généralise les approches multi-résolution classiques. Ainsi l'algorithme décrit en table 7.1 peut être utilisé pour estimer \mathcal{X}_0 . Un tel cadre de travail sera qualifié de « global », comparé aux approches pyramidales, que l'on pourra qualifier de « séquentielles ». Il permet une meilleure flexibilité en ce qui concerne les interactions entre les différents niveaux de grille. Comme on peut l'observer en (7.6), un modèle dynamique M intervient de manière explicite

(puisque $\mathcal{X}_\ell = M_\ell \mathcal{X}_0$). Cela nous permet de généraliser l'expression des approches descendantes (ou « coarse-to-fine ») classiques et éventuellement de pallier certaines difficultés évoquées ci-dessus. En considérant les niveaux de résolution comme des pas de temps artificiels, il est alors possible de formaliser l'évolution du champ de vitesse au fil des niveaux et d'assurer ainsi une meilleure consistance entre les grandes et fines échelles de la solution.

7.4.3 Approche pyramidale dans un formalisme 4DVAR

En manipulant judicieusement les matrices d'erreur d'observation R , le processus pyramidal standard peut être reproduit avec une approche globale. Puisque dans un premier temps, on ne veut considérer que les informations issues du niveau le plus grossier $\ell = L$, on peut fixer :

$$\begin{cases} R_\ell = 0 & \forall \ell < L \\ R_L = Id \end{cases}$$

et procéder à une descente de gradient. Cela permet d'obtenir une première estimation $\mathcal{X}_\ell \forall \ell = 0..L$ obtenue uniquement grâce aux plus grandes échelles et qui est équivalente à celle obtenue avec l'approche pyramidale classique. Dans un second temps, on peut alors répéter le processus de manière successive de $\ell = L - 1$ à $\ell = 0$ en définissant :

$$\begin{cases} R_{\ell'} = 0 & \forall \ell' \neq \ell \\ R_\ell = Id \end{cases}$$

On retombe alors bel et bien sur le processus pyramidal classique consistant à estimer la solution de manière successive sur les différents niveaux de grille. Il est évident qu'une telle approche est un cas particulier de l'approche globale proposée ci-dessus. Dans la section suivante, nous discuterons des matrices de covariance d'erreur a priori.

7.4.4 Matrice de covariance des erreurs a priori

Intéressons-nous à présent à la définition de la matrice de covariance des erreurs a priori, c'est-à-dire associées à \mathcal{X}^b . Si aucune connaissance ne nous permet d'établir une relation explicite, une procédure basée sur les méthodes d'ensemble peut être utilisée. Ces méthodes utilisent une collection de vecteurs d'états considérés comme des réalisations aléatoires de la variable à estimer. On peut ensuite chercher à approcher la matrice de covariance d'erreur de cette variable par la matrice de covariance calculable à partir de la collection. Pour plus de détails sur les méthodes d'ensemble et leur lien avec l'assimilation de données, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages [114, 115].

Commençons par rappeler que B est associée aux erreurs d'a priori $\epsilon^b = \mathcal{X}^t - \mathcal{X}^b$. Supposons que l'on dispose de N réalisations aléatoires $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_N$ de \mathcal{X} : en se basant sur la loi des grands nombres, un estimateur de $E(\mathcal{X})$ est

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \mathcal{X}_i.$$

Si ces réalisations aléatoires sont suffisamment proches de la solution réelle \mathcal{X}^t , on peut alors approximer B par

$$B \approx \hat{B} = \sum_{i=1}^M (\mathcal{X}_i - \hat{\mathcal{X}})(\mathcal{X}_i - \hat{\mathcal{X}})^T. \quad (7.7)$$

Plus de détails seront donnés dans la suite à propos de l'utilisation d'une telle méthode en pratique. Dans la section suivante, nous appliquons un tel formalisme d'estimation globale au problème de l'estimation de champs de vitesse dans les séquences d'images.

7.5 Application à l'estimation multi-résolution du mouvement

Nous allons à présent détailler la manière d'adapter la technique d'estimation multi-résolution globale présentée dans les sections précédentes à des problèmes d'estimation du flot optique. Il est intéressant de noter que des travaux similaires

[110] introduisant des régularisations multi-résolution du champ de mouvement solution ont été proposés. Dans ces travaux, Luetgen et al. se basent sur des méthodes Bayésiennes afin d'estimer un champ de mouvement globalement consistant selon les différents niveaux de grille avec pour but principal l'accélération de la convergence du processus itératif d'estimation de la solution. La finalité de l'approche proposée dans ce chapitre est légèrement différente, puisque celle-ci a pour but de renforcer la consistance inter-grilles de la solution. Commençons par rappeler la formulation initiale de Horn & Schunck [34] :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2 + \lambda \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x}. \quad (7.8)$$

où λ est un paramètre fixé par l'utilisateur. Nous verrons dans la section suivante qu'il est possible d'exprimer cette fonctionnelle sous la forme d'un système d'observations (ou équations) linéaires pouvant s'intégrer naturellement dans un cadre 4DVAR.

7.5.1 Modèle d'observations

En partant de l'équation de contrainte du flot optique : $\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0$ et en considérant des observations bruitées, il est possible de relier le champ de mouvement aux données images par la relation :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(x, y, t) = -\nabla I(x, y, t) \cdot \mathbf{v}(x, y, t) + \sigma_{obs}(x, y, t), \quad (7.9)$$

où σ_{obs} est un bruit gaussien. L'équation ci-dessus souffre du problème d'ouverture (cf. section 3.1.1) : dans les zones de gradient image homogène, tous les termes de cette équation sont nuls et celle-ci admet une infinité de solutions. On ajoute ainsi souvent des contraintes de régularité du type :

$$\begin{cases} \nabla u(x, y, t) + \sigma_u(x, y, t) = 0 \\ \nabla v(x, y, t) + \sigma_v(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

où σ_u, σ_v sont des bruits gaussiens. On définit alors le système d'observation suivant :

$$\mathbf{y}^{obs} = H\mathbf{v} + \sigma, \quad (7.11)$$

où :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \partial I / \partial t \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} -\partial I / \partial x & -\partial I / \partial y \\ G_{\nabla} & \\ G_{\nabla} & \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ and } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{obs} \\ \sigma_u \\ \sigma_v \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

et

$$G_{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \end{pmatrix}$$

correspond aux opérateurs de gradient dans les directions x et y sous forme matricielle et $\mathbf{0} = [0, 0]^T$. Ce terme d'observation est défini sur tout le domaine image Ω . Le système 7.11 regroupe donc bien tous les éléments présents dans la définition de la fonctionnelle 7.8. Dans la section suivante, nous nous intéressons à la modélisation des matrices de covariance d'erreurs.

7.5.2 Matrices de covariance

Dans cette section, nous proposons des modèles pour définir les matrices de covariance d'erreur a priori B et d'observation R_ℓ (une pour chaque niveau de grille). Afin d'approximer la matrice B , nous nous appuyons sur une méthode d'ensemble décrite précédemment en section 7.4.4. Afin d'estimer des réalisations aléatoires de \mathcal{X}_i (cf. relation (7.7)), nous effectuons tout d'abord un petit nombre d'estimations (autour de 20 en pratique) du flot optique à la résolution la plus grossière pour laquelle la taille des images est très réduite. Pour chaque estimation, on perturbe le paramètre de poids du terme de régularité λ de la manière suivante :

$$\lambda = (1 + z)\lambda_0,$$

où λ_0 est une constante définie par l'utilisateur et z une variable pseudo-aléatoire suivant une loi Gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et telle que $(1 + z) > 0$. Il est ainsi possible d'estimer, pour un coût numérique négligeable, un ensemble de champs de mouvement que l'on propagera (à l'aide d'une procédure d'interpolation) à la résolution initiale des images. On utilise ensuite la relation (7.7) pour approximer B . En pratique, cette méthode très basique et heuristique s'est révélée efficace durant nos tests.

En ce qui concerne les matrices de covariance d'erreur d'observation, nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation spécifique entre deux pixels voisins. En conséquence, R_ℓ est diagonale pour tout niveau ℓ . Si l'on regarde l'équation (7.12), on observe que les matrices d'observation R_ℓ peuvent être divisées en trois blocs de la manière suivante :

$$R_\ell = \left(\begin{array}{c|cc} R_{ofce}^\ell & 0 & 0 \\ \hline 0 & R_u^\ell & 0 \\ 0 & 0 & R_v^\ell \end{array} \right). \quad (7.13)$$

La matrice R_{ofce}^ℓ est associée à l'équation (7.9) et modélise la confiance que l'on porte localement en l'OFCE. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que cette dernière est plus informative en présence de fortes valeurs de gradient. Chaque élément diagonal est alors calculé selon la relation suivante (en omettant les indices spatiaux pour plus de clarté) :

$$R_{ofce}^\ell = R^{obs} \exp\left(-\frac{\|\nabla I^\ell\|^2}{\sigma_{ofce}^2}\right),$$

où typiquement $\sigma_{ofce} \approx 10$ (en lien avec la variation moyenne du terme $\|\nabla I^\ell\|$) et $R^{obs} = 100$ (l'intervalle $[0, 100]$ correspond aux valeurs possibles du carré de l'OFCE). En ce qui concerne les second et troisième blocs associés à la contrainte de régularité (7.10) sur les composantes u et v du champ de vitesse, aucun a priori n'a été introduit durant nos tests et ceux-ci sont supposés constants. On a ainsi :

$$R_u^\ell = R_v^\ell = R^{reg} Id, \quad (7.14)$$

où Id est la matrice identité et $R^{reg} \approx 5$ (valeur moyenne du gradient de vitesse). Dans la section suivante, nous introduisons plusieurs modèles de relations inter-résolutions pouvant être utilisés au sein de la méthode.

7.5.3 Modèles de relation inter-résolutions

D'après notre formalisme au sein duquel le temps est associé à un niveau de grille, le modèle dynamique définit le moyen de propager le champ de vitesse d'une échelle à l'autre. Il permet de contrôler l'échange d'information le long des niveaux de résolution puisqu'il apparaît lors de l'intégration rétrograde du système dynamique adjoint nécessaire à la minimisation de la fonctionnelle. Afin de tester l'influence de ce dernier, nous avons défini plusieurs modèles présentés ci-dessous :

- **Modèle « identité »** : dans ce cas nous faisons l'hypothèse que le champ de vitesse est identique pour chaque niveau (à une constante multiplicative près relative au ratio de réduction de la grille). Il est évident que ce modèle n'est pas optimal, il est cependant utilisé de manière implicite dans la majorité des approches multi-résolution classiques. En pratique, lors d'une procédure pyramidale, d'un niveau ℓ au plus grossier adjacent $\ell + 1$, on effectue une étape de filtrage anti-aliasing suivie d'une étape de réduction par un facteur γ_ℓ (souvent $1 \leq \gamma_\ell \leq 2$). En suivant les notations de la section 7.3, un tel modèle peut s'exprimer sous la forme $\frac{\partial}{\partial \ell} \mathbf{v}(x, y, \ell) = 0$ et on a ainsi :

$$\mathcal{X}_{\ell_{i+1}} = M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} \mathcal{X}_{\ell_i} \quad \text{où} \quad M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} = Id; \quad (7.15)$$

- **Modèle de « diffusion isotrope »** : de manière similaire à la décomposition en espace d'échelles d'un champ de mouvement [111], ce modèle consiste à décrire l'évolution du champ de vitesse au fil des niveaux de grille par un processus de diffusion gaussien isotropique contrôlée par un paramètre constant $\alpha \in \mathbb{R}$, i.e. :

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \mathbf{v}(x, y, \ell) = \text{div}(\alpha \nabla \mathbf{v}(x, y, \ell)) = \alpha \Delta \mathbf{v}(x, y, \ell).$$

On a alors

$$\mathcal{X}_{\ell_{i+1}} = M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} \mathcal{X}_{\ell_i} \text{ avec } M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} = \alpha M_{\Delta}, \quad (7.16)$$

où M_{Δ} est la matrice associée à l'opérateur de laplacien en deux dimensions ;

- **Modèle de « diffusion guidée par l'image »** : un modèle un peu plus avancé peut aussi être défini en permettant à α de varier sur le domaine Ω . Par exemple, sa valeur peut dépendre de celle du gradient local : l'information sera ainsi plus fortement diffusée dans les zones de gradient homogène et à l'inverse faiblement diffusée dans les zones correspondant à des fortes valeurs de gradient : on fait dans ce cas l'hypothèse que les discontinuités du champ de mouvement coïncident avec celles de l'image. Notons β, K deux paramètres réels, on définit la carte de diffusion α par la relation suivante :

$$\alpha(x, y, \ell) = \beta \exp\left(-\frac{\|\nabla I^{\ell}\|^2}{K^2}\right).$$

On a alors :

$$\mathcal{X}_{\ell_{i+1}} = M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} \mathcal{X}_{\ell_i} \text{ avec } M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} = A(\ell) M_{\Delta}, \quad (7.17)$$

où $A(\ell)$ est la matrice diagonale composée des éléments $\alpha(x, y, \ell)$.

Les trois modèles introduits ci-dessus sont linéaires par rapport au champ de mouvement \mathbf{v} . En combinant les techniques d'assimilation de données des sections précédentes avec le modèle d'observation (7.11), les matrices de covariance et les modèles dynamiques, nous disposons à présent de tous les éléments permettant une estimation multi-résolution du mouvement. Le processus complet est résumé en table 7.2. Dans la section suivante, nous présentons des résultats expérimentaux.

7.6 Résultats expérimentaux

7.6.1 Conditions expérimentales

Le but de cette section est de déterminer si le renforcement des transferts inter-grilles durant le processus d'estimation permet d'obtenir une meilleure estimation comparée à l'approche pyramidale qui considère de manière successive les différents niveaux de résolution. De la même manière que pour le chapitre 4, l'objectif n'est ainsi pas de définir la méthode de flot optique la plus compétitive de la littérature, mais plutôt d'étudier une approche alternative afin de procéder à une estimation

Estimation du flot optique avec contrôle optimal(I) Initialisation :

- (a) La variable d'état est le champ de vitesse : $\mathcal{X} = \mathbf{v}$
- (b) Initialisation de $\mathcal{X}_{\ell_0} = 0$
- (c) Construction de la pyramide d'images aux différents niveaux $\{\ell_0, \dots, \ell_N\}$

(II) Estimation de l'incrément multi-résolution $d\mathbf{v}$

- (a) Fixer $d\mathcal{X}_{\ell_0} = d\mathbf{v}^b$ (si ébauche disponible, sinon $d\mathcal{X}_{\ell_0} = 0$), $n = 0$
- (b) Tant que $\|\nabla J\| > \epsilon$ où $n \leq n_{max}$, faire :
 - Evaluer la fonctionnelle J (cf relation (7.3));
 - Calculer les vecteurs d'innovation $d_{\ell_i} = y_{\ell_i}^{obs} - H_{\ell_i} \mathcal{X}_{\ell_i}$ pour chaque échelle/pas de temps $i = \{1, \dots, N\}$
 - Calculer ∇J grâce à l'intégration du système adjoint suivant

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n^* &= H_n^T R_n^{-1} d_n \\ \mathcal{X}_k^* &= M_{k+1}^k \mathcal{X}_{k+1}^* + H_k^T R_k^{-1} d_k \quad k = \ell_{n-1}, \dots, \ell_0 \\ \nabla J(\mathcal{X}) &= 2B^{-1}(\mathcal{X}_{\ell_0} - \mathcal{X}^b) - 2\mathcal{X}_{\ell_0}^* \end{cases}$$

- Descente et m.a.j de \mathcal{X}_{ℓ_0} en annulant $\nabla J(\mathcal{X})$
- Mise à jour du système \mathcal{X} grâce à l'intégration du système dynamique :

$$\mathcal{X}_{\ell_{i+1}} = M_{\ell_i}^{\ell_{i+1}} \mathcal{X}_{\ell_i} \quad \forall i = \{1, \dots, N\}$$

- $n = n + 1$

TABLE 7.2: **Algorithme général** d'estimation du flot optique multi-résolution par 4DVAR

dans un cadre multi-résolution. Ainsi, certaines techniques sophistiquées telles que les pénalisations robustes, procédures de *warping* avancées, consistance temporelle etc. n'ont pas été considérées. La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est celle issue de Horn & Schunck présentée en équation 7.8. Nous comparons dans ces tests l'approche pyramidale classique avec 3 déclinaisons de l'approche globale présentée précédemment dans ce chapitre. Nous noterons ainsi :

- l'approche **pyramidale** (notée PYR pour le reste de ce chapitre) : approche coarse-to-fine classique ;
- modèle **identité** (noté ID pour le reste de ce chapitre) : celui-ci correspond à l'approche globale associée à la relation (7.15) pour laquelle aucun transfert spécifique entre les différents niveaux de grille n'est supposé ;
- modèle de **diffusion isotropique** (noté ISO pour le reste de ce chapitre) :

approche globale associée à la relation (7.16) pour laquelle une diffusion gaussienne isotropique est supposée entre les niveaux de résolution ;

- modèle de **diffusion guidée par l'image** (noté Im-ISO pour le reste de ce chapitre) : approche globale associée à la relation (7.17) pour laquelle une diffusion gaussienne dépendant des gradients de l'image est supposée.

Présentons à présent les séquences d'images utilisées durant les tests.

Données image : nous avons évalué les 4 approches introduites ci-dessus sur trois séquences d'images disponibles sur internet et pour lesquelles le champ solution est connu. Chacune de ces séquences présente un champ de mouvement solution particulier :

- séquence **Transtree** : cette séquence est composée de 40 images et simule le déplacement horizontal d'une caméra par rapport à une image texturée. Une image de cette séquence est visible en figure 7.3a ainsi que le champ solution correspondant en figure Fig. 7.3b ;
- séquence **Yosemite** : le champ de mouvement correspondant présente un caractère divergent. Cette séquence est très utilisée pour effectuer des évaluations qualitatives et quantitatives. Une image et son champ de vitesse associé sont visibles en figure 7.5f ;
- séquence **Venus** : le champ de vitesses associé à cette séquence présente de fortes discontinuités qui peuvent se révéler difficiles à estimer avec certaines approches. Les données correspondantes sont visibles en figure 7.6f ;

7.6.2 Résultats & commentaires

La première série d'expériences utilise la séquence « Transtree » en estimant, de manière indépendante, et pour chaque paire d'images (39 au sein de la séquence complète), les champs de vitesses associés. Les valeurs d'erreurs angulaire correspondantes au fil du temps pour les 4 stratégies (PYR, ID, ISO, Im-ISO) sont visibles en figure 7.4

On constate d'après la figure 7.4 que les approches basées sur l'assimilation de données (ID, ISO and Im-ISO) permettent d'obtenir de meilleurs résultats comparées à l'approche pyramidale classique. Un tel constat est très intéressant car il permet de penser que la minimisation globale sur tous les niveaux de grilles est plus efficace que la stratégie consistant à considérer les différentes résolutions de

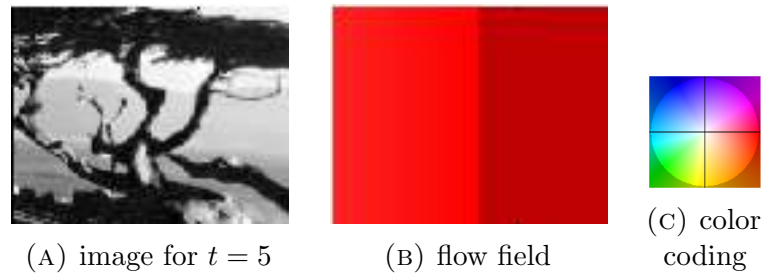


FIGURE 7.3: **Séquence Transtree** : une image de la séquence et le champ de vitesse associé.

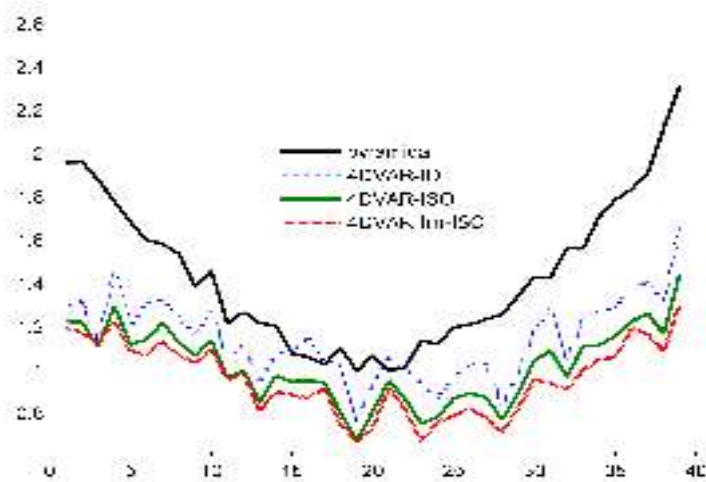


FIGURE 7.4: **Erreur angulaire moyenne** pour la séquence Transtree pour chacune des méthodes d'estimation.

manière indépendante. Même si l'hypothèse d'homogénéité du champ de vitesse entre les grilles (méthode ID) permet déjà d'améliorer l'estimation par rapport à PYR, il est intéressant d'observer que l'introduction de liens plus avancés de diffusion inter-grilles permettent de perfectionner l'estimation. Ces tests sont un premier pas dans la mise en évidence des bénéfices que l'on peut tirer de la stratégie multi-résolution proposée.

Afin de valider les résultats obtenus ci-dessus, nous nous sommes ensuite intéressés aux paires d'images Yosemite et Venus. On peut observer en figure Fig. 7.5 et Fig. 7.6 les champs de vitesse estimés par les techniques PYR (Fig. 7.5a – Fig. 7.6a), ID (Fig. 7.5b – Fig. 7.6b), ISO (Fig. 7.5c – Fig. 7.6c) et Im-ISO (Fig. 7.5d – Fig. 7.6d). Par ailleurs, les valeurs d'erreur angulaire correspondantes sont visibles en Table 7.3 et Table 7.4. L'analyse de ces différents résultats permet de confirmer le fait que l'introduction de meilleurs liens inter-grilles lors de l'estimation permet une estimation globale plus fine. Ajoutons que l'utilisation de modèles de diffusion afin

de caractériser les transferts inter-grilles permet d'affiner encore cette estimation, puisque la méthode Im-ISO permet une réduction d'environ 15% de l'erreur angulaire moyenne par rapport à PYR. Il est aussi possible de comparer les différentes méthodes de manière visuelle : les champs de mouvement obtenus par l'approche PYR (Fig. 7.5a – Fig. 7.6a) sont globalement entâchés par la présence de bruit (coin en haut à droite dans Fig. 7.5a, partie inférieure de Fig. 7.6a). L'introduction de liens inter-grilles permet une meilleure capture des discontinuités ainsi qu'une meilleure régularisation du champ, comme on l'observe avec l'utilisation de Im-ISO (voir Fig. 7.5d – Fig. 7.6d). Nous pouvons conclure grâce à ces expériences de l'intérêt d'introduire des liens spécifiques entre les niveaux de résolution.

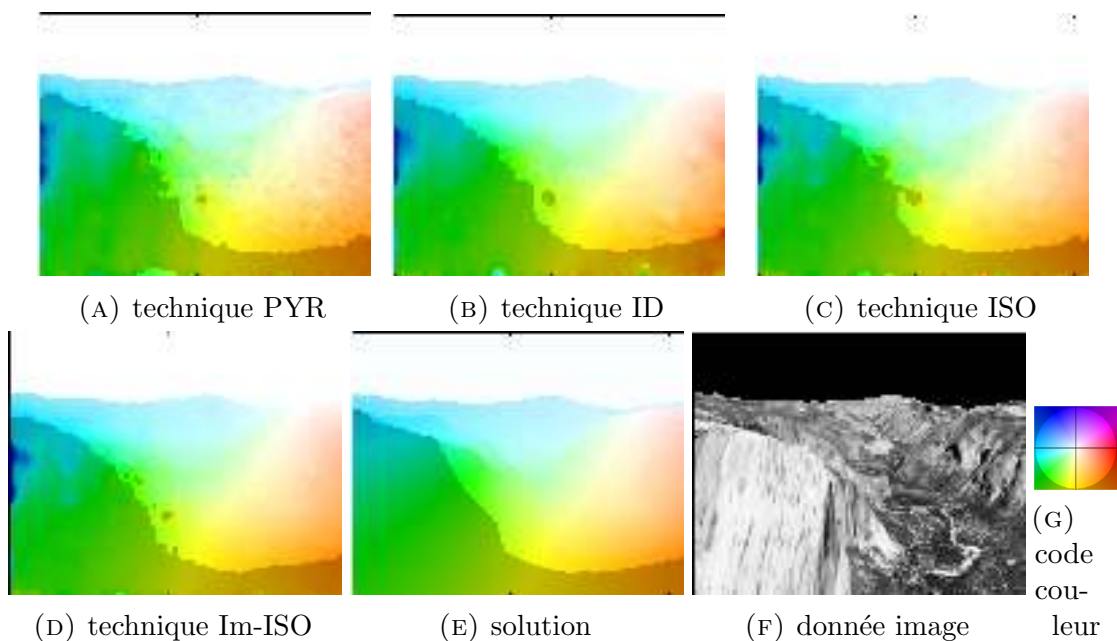


FIGURE 7.5: **Visualisation des champs estimés** pour les différentes techniques pour la séquence Yosemite.

Method	PYR	IS	ISO	Im-ISO
AAE	2.90	2.83	2.54	2.45

TABLE 7.3: **Erreur angulaire moyenne** pour chacune des techniques d'estimation pour la séquence Yosemite.

Method	PYR	IS	ISO	Im-ISO
AAE	6.08	5.45	5.25	5.09

TABLE 7.4: **Erreur angulaire moyenne** pour chacune des techniques d'estimation pour la séquence Venus.

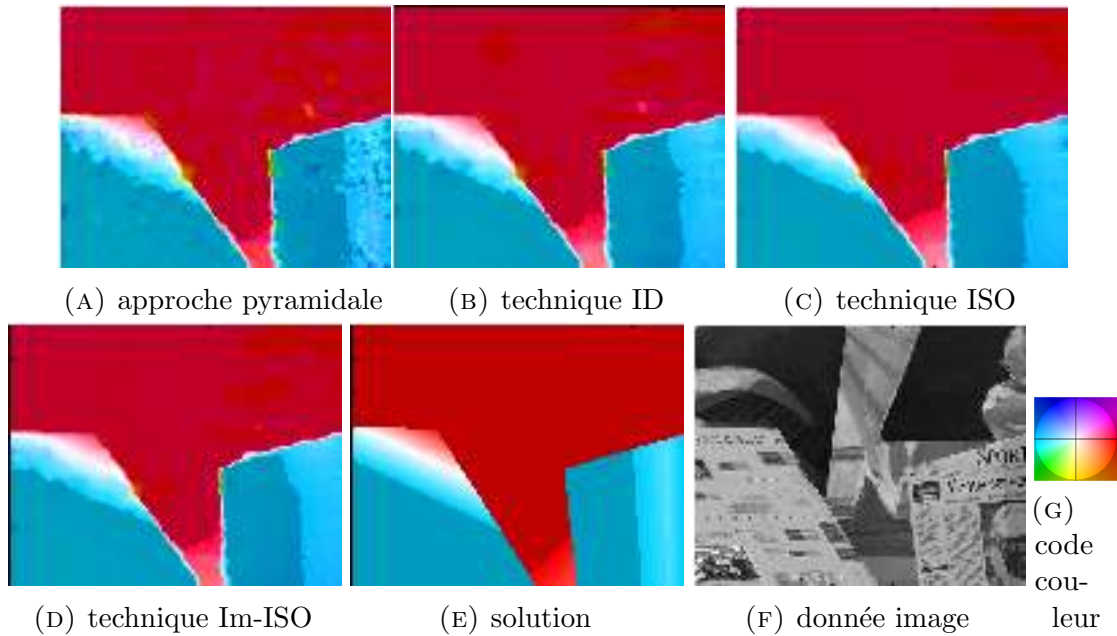


FIGURE 7.6: **Visualisation des champs estimés** pour les différentes techniques pour la séquence Venus.

7.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté une approche originale et alternative aux méthodes *coarse-to-fine* classiques pour l'analyse d'images. Celle-ci est basée sur l'utilisation de l'algorithme 4DVAR dans lequel le temps physique habituellement considéré est remplacé par les différents niveaux de résolution. Une nouvelle fonctionnelle multi-grille est introduite et optimisée de manière globale sur toute la gamme des résolutions. Cette approche a été appliquée au problème d'estimation du flot optique dans un cadre multi-résolution. Afin de mieux contrôler l'échange d'informations entre les différents niveaux de grilles, nous avons introduit des opérateurs de transfert jouant ici le rôle de modèles dynamiques selon les niveaux de résolution. Ceux-ci sont basés sur les opérateurs classiques de diffusion homogène ou dépendante des structures au sein du champ de luminance. La validation expérimentale de cette modélisation alternative a été réalisée sur plusieurs séquences d'images, démontrant les avantages que l'on peut tirer d'une formulation multi-résolution globale.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

Conclusion générale

Dans ces travaux, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'images (fluides mais aussi générales) dans un contexte multi-échelles. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur le formalisme de la simulation des grandes échelles en mécanique des fluides pour définir des méthodes de traitement d'images adaptées aux phénomènes fluides. Certaines de ces méthodes peuvent par ailleurs être appliquées aux images plus générales. Plus particulièrement, les problématiques abordées ont été les suivantes :

- **L'estimation de champ de mouvement dans les séquences d'images :** il est courant, en présence de mouvements de grande amplitude, d'adopter une approche multi-échelles pour l'estimation du flot optique à partir d'une paire d'images. Dans les approches classiques, pour un niveau d'échelle donné, la solution estimée au niveau précédent est utilisée pour initialiser le problème. Dans de telles situations, on néglige en général les informations issues des échelles inférieures bien que dans certain cas celles-ci ont une influence non négligeable. Pour pallier cette limitation, nous avons proposé un nouveau terme d'attache aux données multi-échelles permettant la prise en compte de ces fines échelles. Celui-ci repose sur la formulation de l'OFCE filtrée à un niveau d'échelle donné, le filtre en question étant identifié à celui utilisé pour la construction de la structure multi-échelles. La contribution des fines échelles est alors représentée par l'ajout d'un tenseur dit de « sous

maille » dont le but est d'approximer la contribution des fines échelles à la dynamique générale. Plusieurs modèles ont été proposés et évalués expérimentalement en fonction du type d'image considéré.

- **La super-résolution d'images de champ scalaire passif** : l'amélioration de la qualité visuelle d'images basse résolution est un problème classique du domaine du traitement des images. Durant cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'images de transport de champs scalaires passifs. Dans un premier temps, nous avons adapté des méthodes issues de la littérature LES afin de générer les composantes fines échelles manquantes au sein des images basse résolution. Dans ce cas, contrairement à la problématique d'estimation de mouvement au sein de laquelle nous cherchions à estimer la contribution des fines échelles, nous souhaitons ici estimer ces dernières de manière explicite. Pour aborder un tel problème, nous avons classé les différentes échelles que l'on cherche à reconstruire afin de définir une méthode adaptée pour chacune de ces catégories. Une deuxième étape a consisté à s'intéresser à la dynamique temporelle que respectent ces fines échelles inconnues. Une telle connaissance peut ensuite aisément être combinée avec les estimations précédentes à travers l'utilisation de l'algorithme 4DVAR : nous proposons finalement un processus complet et physiquement consistant permettant l'amélioration de la qualité visuelle d'images fluides.
- **L'estimation multi-résolution globale de champ de vitesse** : de nombreuses problématiques issues de l'analyse d'images nécessitent l'utilisation d'une approche multi-résolution. En s'appuyant sur une hiérarchie de grilles de résolution décroissante, on peut résoudre le problème de manière itérative : on commence par estimer les grandes échelles de la solution pour ensuite progressivement raffiner l'estimation sur les grilles plus fines. Habituellement, les différents niveaux de grilles sont considérés de manière séquentielle du niveau le plus grossier vers le niveau le plus fin. Dans cette thèse nous avons proposé un formalisme permettant de réaliser l'estimation sur plusieurs niveaux de manière simultanée. Pour cela, nous commençons par définir une fonctionnelle multi-résolution en formulant le problème d'estimation du flot optique dans le cadre de l'assimilation variationnelle de données. Afin de contrôler l'échange d'informations inter-grilles, nous avons proposé un certain nombre d'opérateurs de transferts qui sont assimilés, au sein de ce formalisme, à des modèles dynamiques le long des niveaux de grille.

Ces différentes problématiques ont permis de mettre en évidence l'importance de combiner différents niveaux d'information (i.e d'échelle ou de résolution) afin d'analyser un phénomène donné à partir de séquences d'images. Cela est particulièrement vrai lors de l'étude de phénomènes essentiellement multi-échelles, tels que les écoulements turbulents.

Perspectives

Un certain nombre de perspectives découlent de ces travaux. Celles-ci sont présentées ci-dessous.

Modèles d'interaction inter-échelles pour l'estimation du mouvement

Modèles avancés pour l'approximation des fines échelles : Trois modèles pour l'approximation des composantes fines échelles ont été proposés au chapitre 4. Il existe dans la littérature une multitude de modèles alternatifs dont la pertinence peut varier selon les configurations. Un travail exploratoire permettant une catégorisation de ces principaux types de modèles et leur influence dans le cas de l'analyse d'images est donc d'un grand intérêt.

Modèles de régularisation sous maille : Dans cette thèse, nous nous sommes concentrés sur la définition d'un terme d'attache aux données prenant en compte la contribution des échelles plus fines que l'échelle d'étude. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, de nombreux termes de régularisation adaptés aux écoulements fluides ont été proposés, notamment ceux reposant sur une formulation de type vorticit divergence du champ solution. Il apparaît alors intéressant d'inclure certains modèles de sous maille issus de la mécanique des fluides dans de tels termes de régularisation. Cela permettrait la définition d'une fonctionnelle « entièrement » multi-échelles dont on peut espérer l'obtention de meilleurs résultats.

Super-résolution d'images fluides

Adaptation de la méthode à la composante de mouvement : au chapitre 6, nous nous sommes intéressés à la super-résolution d'images d'un scalaire passif ϕ transporté par un champ turbulent \mathbf{v} . On peut dès lors chercher à adapter cette méthode pour l'amélioration de la qualité du champ de vecteurs \mathbf{v} lui même. En effet, lors de l'estimation de mouvement à partir d'images fortement bruitées, on est contraints de donner un poids assez fort au terme de régularité de la fonctionnelle¹. En conséquence, on estime en priorité la composante laminaire du champ de mouvement associé. Assurer la consistance temporelle du champ de vitesse peut se révéler problématique de par la manipulation non triviale des équations de Navier-Stokes. Celles-ci présentent en effet un caractère fortement non linéaire, et nécessitent la connaissance de la composante de pression p , qui dans la plupart des situations en analyse d'images est indisponible. Cependant, une alternative consisterait à améliorer a posteriori l'estimation de la composante rotationnelle ω du champ \mathbf{v} . Pour rappel, celle-ci a pour expression :

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (8.1)$$

La loi d'évolution temporelle de cette composante de vortacité est donnée ci-dessous :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (8.2)$$

L'équation 8.2 ci-dessus ne pose pas de problème particulier, et peut être appréhendée avec les mêmes outils que ceux utilisés lors de l'analyse d'un champ scalaire passif. Si l'on fait l'hypothèse que l'on a estimé dans un premier temps une version filtrée de cette composante de vortacité réelle, on peut alors chercher à approximer certaines composantes hautes fréquences manquantes, que l'on qualifera de composantes de vortacité sous maille, définies par :

1. Pour rappel, l'estimation du mouvement est réalisée à travers la minimisation d'une fonctionnelle du type : $E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (I_t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2 + \lambda \|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x}$.

$$\omega' = \nabla \times \mathbf{v}'. \quad (8.3)$$

Par analogie à la modélisation de la composante sous maille du champ de vitesse \mathbf{v} , certains auteurs [112, 113] proposent une méthode permettant d'évaluer de manière explicite la vorticité sous maille à l'aide d'une représentation multi-fractale de cette dernière. On peut ensuite retrouver la composante générale du mouvement à partir de la vorticité sous maille par la loi de Bio-Savart indiquée ci-dessous :

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi} \omega'(\xi, t) \times \frac{|\mathbf{x} - \xi|}{|\mathbf{x} - \xi|^2} d\xi^2 \quad (8.4)$$

On voit donc qu'une procédure très similaire à celle décrite au chapitre 6 peut être mise en place pour l'analyse de champs de mouvement.

Combinaison des deux méthodes : On peut ensuite imaginer la combinaison des deux méthodes utilisées de manière alternative pour l'analyse d'images scalaires : en commençant par estimer un champ de vitesse , on peut ensuite améliorer la qualité des images scalaires. Une fois ces nouvelles images haute résolution obtenues, on peut alors corriger le champ de vitesse ainsi que sa composante de vorticité et itérer ainsi jusqu'à convergence.

Estimation multi-résolution globale

Vers des modèles dynamiques avancés : comme nous l'avons vu au chapitre 7, la définition de modèles de transferts inter-échelles basés sur des modèles de diffusion peut sensiblement améliorer l'estimation globale. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes limités à des modèles linéaires dont l'utilisation au sein de la méthode ne pose pas de problème particulier. Il est cependant envisageable de définir certains modèles non linéaires afin de mieux respecter les spécificités du champ étudié. Par exemple, citons des modèles de diffusion guidée par les structures du champ de vitesse. Ceux-ci permettraient, de mieux s'adapter à certaines configurations telles que les bords d'objets solides ou encore aux frontières

d'un domaine lors de l'analyse d'écoulements fluides. De tels modèles rendraient nécessaire une approche incrémentale de l'estimation et notamment la définition des opérateurs tangents linéaires associés. Ceux-ci n'étant pas toujours facilement calculables, il est aussi possible de se tourner vers d'autres méthodes d'assimilation de données alternatives à l'algorithme 4DVAR. Citons par exemple les méthodes de filtrage de Kalman d'ensemble [114] : cette approche permet l'estimation d'une variable d'état de grande dimension [115] dont la dynamique est non linéaire. De manière similaire aux travaux décrits dans [110], on peut alors définir deux modèles de propagation selon les niveaux de résolution : le premier traduisant la dynamique des niveaux grossiers vers les niveaux plus fins, et le second traduisant la dynamique inverse. Une telle approche fournirait une plus grande liberté quant à la définition d'opérateurs dynamiques.

Incorporation de modèles multi-échelles : L'incorporation de modèles multi-échelles tels que ceux proposés au chapitre 4 constitue un autre axe de recherche potentiel. Ceux-ci peuvent en effet être intégrés au sein d'une méthode multi-résolution globale et ainsi renforcer encore l'influence des informations issues des niveaux de résolution les plus fins.

Applications

L'étude de la dispersion de polluants, d'agents chimiques ou de fumée repose bien souvent sur l'analyse d'images dont la qualité et les champs de mouvement associés sont d'une importance cruciale. Les méthodes proposées dans cette thèse peuvent permettre d'aider certains scientifiques en fournissant des données plus précises dans le cas de la super-résolution ou encore des informations associées (e.g. champ de vitesse) dans le cas des approches multi-échelles/multi-résolution.

Dans le domaine de la météorologie, d'importants volumes de données images sont fournis par les satellites. Ces derniers emportent des capteurs dont la précision et la fréquence d'acquisition sont de plus en plus importantes. Cependant, de tels phénomènes étant associés à des nombres de Reynolds élevés, l'inclusion de modèles de sous maille reste une solution intéressante afin d'obtenir des estimations toujours plus précises. Ce travail de thèse ouvre une perspective sur l'inclusion de ces modèles sous maille lors de l'estimation multi-échelles du mouvement. L'extension de ces

méthodes pour prendre en compte l'intégration verticale de l'information effectuée par les satellites peut se révéler intéressante dans un tel cadre de travail.

Quelques mots pour conclure Ce travail de thèse est le résultat d'une collaboration entre différentes communautés : on y retrouve l'association des deux communautés scientifiques issues des domaines de la mécanique des fluides et du traitement d'image, mais aussi un dialogue entre deux pays que sont la France et la Chine. Ce fut une expérience extrêmement intéressante tant au niveau professionnel que personnel, et je remercie chaleureusement l'intégralité des personnes y ayant contribué.

Annexe A

Présentation de l'algorithme 4DVAR

Dans cette section, nous présenterons brièvement les principes et la mise en pratique de l'assimilation de données variationnelle dans le cas de l'utilisation de l'algorithme 4DVAR. Le lecteur intéressé trouvera en [105, 106, 116] une méthodologie complète et détaillée de l'assimilation de données appliquée à des problèmes géophysiques.

A.1 Formalisme

Considérons une variable d'état $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que l'on cherche à estimer sur une fenêtre temporelle $t \in [t_0, t_f]$. Supposons de plus que l'on dispose des informations suivantes :

- une approximation de la condition initiale $\mathcal{X}_0 \approx \mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)$;
- des observations $\mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)$ (mesures in situ, données images, etc.) de \mathcal{X} au cours du temps. Ces deux quantités sont reliées par un opérateur d'observation noté \mathbb{H} ;
- son équation dynamique associée.

Un tel cas de figure peut être formalisé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) = \nu_q(\mathbf{x}) \\ \mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0) = \mathcal{X}_0 + \nu_b(\mathbf{x}) \\ \mathcal{Y}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{H}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) + \nu_r(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où \mathbb{M} est l'opérateur dynamique de la variable \mathcal{X} , \mathcal{X}_0 est la condition initiale (connue) au temps t_0 et (ν_q, ν_b) sont des variables de contrôle modélisant les composantes de bruit respectivement associées à la dynamique temporelle et à la condition initiale. Les observations \mathcal{Y} sont potentiellement incomplètes ou bruitées, la composante de bruit associée étant modélisée par ν_r . Finalement, l'estimation de \mathcal{X} est réalisée par minimisation de la fonction de coût J définie ci-dessous :

$$\begin{aligned} J(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbb{H}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) - \mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)\|_{R^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0) - \mathcal{X}_0\|_{B^{-1}}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\| \frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) \right\|_{Q^{-1}}^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où R est la matrice associée aux erreurs d'observations, B la matrice des erreurs sur la condition initiale et Q la matrice des erreurs sur le modèle dynamique. Leurs influences respectives interviennent à travers l'utilisation de la distance de Mahalanobis définie, pour une matrice A donnée, par $\|X\|_{A^{-1}} = X^T A^{-1} X$. La minimisation de (A.2) peut être réalisée à travers l'annulation de son gradient :

$$\nabla J(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\mathcal{X} + \alpha \delta \mathcal{X}) - J(\mathcal{X})}{\alpha}.$$

Numériquement, l'évaluation de ce gradient est problématique car il faudrait évaluer la fonctionnelle J le long de toutes les perturbations infinitésimales possibles $\delta \mathcal{X}$: si \mathcal{X} est de grande dimension, ce qui est souvent le cas lorsque l'on traite des images, le nombre de perturbations est très grand. De plus, il faudrait, pour chaque perturbation, intégrer le modèle dynamique (A.1), ce qui est en général très coûteux.

Pour pallier ces difficultés, on s'appuie alors sur une formulation adjointe [14] présentée ci-dessous.

A.2 Formulation adjointe

Malgré l'expression en apparence compliquée de la fonctionnelle (A.2), son gradient est aisément calculable par l'introduction d'une variable dite « adjointe » $\lambda(\mathbf{x}, t)$ associée aux erreurs du modèle dynamique, i.e :

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = Q^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)) \right) \quad (\text{A.3})$$

Tout d'abord, introduisons quelques notations. Nous noterons :

- $\partial_{\mathcal{X}} \mathbb{M} = \frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \mathcal{X}}$ et $\partial_{\mathcal{X}} \mathbb{H} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \mathcal{X}}$ les opérateurs tangents linéaires de \mathbb{M} et \mathbb{H} respectivement. Si \mathbb{A} est un opérateur donné, son opérateur tangent linéaire (ou dérivée de Gâteaux) est défini par :

$$\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathcal{X}}(\delta \mathcal{X}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(\mathcal{X} + \alpha \delta \mathcal{X}) - \mathbb{A}(\mathcal{X})}{\alpha};$$

- $(\partial_{\mathcal{X}} \mathbb{M})^*$ et $(\partial_{\mathcal{X}} \mathbb{H})^*$ leurs opérateurs adjoints. L'adjoint \mathbb{A}^* d'un opérateur \mathbb{A} dans un espace donné \mathcal{D} est tel que :

$$\forall \mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \mathcal{D} \quad , \quad \langle \mathbb{A} \mathcal{X}, \mathcal{X}' \rangle = \langle \mathcal{X}, \mathbb{A}^* \mathcal{X}' \rangle.$$

On démontre [105, 106] que le calcul du gradient de J par rapport à λ peut être effectué à travers une intégration rétrograde du modèle dynamique adjoint de (A.1) auquel on ajoute un terme relatif aux observations. Une fois cette valeur de λ annulant le gradient calculée, il est possible de retrouver les valeurs de \mathcal{X} correspondantes grâce à la relation (A.3). Finalement, l'estimation globale est réalisée par l'algorithme incrémental [117] décrit en table A.1.

La variable adjointe λ combine les erreurs commises pour chaque pas de temps par rapport aux observations et au modèle dynamique. Celle-ci est calculée à partir d'une solution courante approchée $\tilde{\mathcal{X}}$ grâce à une intégration rétrograde dans laquelle interviennent les termes d'observations et l'opérateur dynamique. Elle permet ensuite de mettre à jour la condition initiale (step (c)) $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0)$.

Algorithme 4DVAR

1. Initialisation : $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0) = \mathcal{X}_0$, $n = 0$
2. calcul de $J(\mathcal{X})$
3. Tant que $\|\nabla J\| > \epsilon$ ou $n \leq n_{max}$
 - (a) Intégration « forward » de $\frac{\partial \mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) = 0$
 - (b) Utilisation des valeurs disponibles $\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)$ pour le calcul de λ par résolution rétrograde de :

$$\begin{cases} \lambda(t_f) & = 0 \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) + (\partial_{\mathcal{X}}\mathbb{M})^*\lambda(t) & = (\partial_{\mathcal{X}}\mathbb{H})^*R^{-1}(\mathcal{Y} - \mathbb{H}(\mathcal{X}))(t) \end{cases}$$

- (c) Annulation du gradient et calcul de l'incrément au temps initial :

$$d\mathcal{X}(\mathbf{x}, t_0) = B\lambda(t_0)$$

- (d) Propagation de la correction \mathcal{X} par intégration « forward » de l'équation dynamique :

$$\frac{\partial d\mathcal{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\partial_{\mathcal{X}}\mathbb{M})d\mathcal{X}(\mathbf{x}, t) = 0$$

- (e) mise à jour $\mathcal{X} = \mathcal{X} + d\mathcal{X}$
- (f) calcul de $J(\mathcal{X})$
- (g) $n = n + 1$

TABLE A.1: **Minimisation de la fonctionnelle** se basant sur des intégrations « forward/backward » successives du modèle dynamique \mathbb{M} et de son adjoint. La correction apportée par la descente de gradient est ensuite propagée sur toute la fenêtre temporelle à l'étape (d).

Bibliographie

- [1] G. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library, 3rd ed. edition, 1967.
- [2] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Akademiia Nauk SSSR*, 30, 1941.
- [3] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, An Introduction*. Springer, 3rd ed. edition, 2006.
- [4] J. Deardorff. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 41, 1970.
- [5] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. Geophys.*, 237, 1974.
- [6] S. G. Chumakov and C. J. Rutland. Dynamic structure subgrid-scale models for large eddy simulation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47, 2005.
- [7] R. A. Clark, J. H. Ferziger, and W. C. Reynolds. Evaluation of subgrid-scale models using accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 91, 1979.
- [8] B. Debusschere and C. J. Rutland. Turbulent scalar transport mechanisms in plane channel and couette flows. *International Journal of heat and mass transfer*, 47, 2004.
- [9] A. W. Cook. Determination of the constant coefficient in scale similarity models of turbulence. *Phys. Fluids*, 9, 1997.
- [10] D. K. Lilly. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids*, 4, 1992.

- [11] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 93, 1963.
- [12] N. Okong'o and J. Bellan. A priori subgrid analysis of temporal mixing layers with evaporating droplets. *Phys. Fluids*, 12, 2000.
- [13] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, 3, 1991.
- [14] F. X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : Theoretical aspects. *Tellus*, 1986.
- [15] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45, 1960.
- [16] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation*. Radar and Signal Processing, IEEE Proceedings F, 1993.
- [17] G. Evensen. Sampling strategies and square root analysis schemes for the EnKF. *Ocean Dynamics*, 54(6) :539–560, dec 2004.
- [18] N. Papadakis, E. Mémin, A. Cuzol, and N. Gengembre. Data assimilation with the Weighted Ensemble Kalman Filter. *Tellus Series A : Dynamic meteorology and oceanography*, 62(5) :673–697, 2010.
- [19] B. Bonan. *Assimilation de données pour l'initialisation et l'estimation de paramètres d'un modèle d'évolution de calotte polaire*. Manuscript de thèse. INRIA Grenoble Rhône-Alpes, 2013.
- [20] I. Herlin, F.-X. Le Dimet, E. Huot, and J.-P. Berroir. Coupling models and data : which possibilities for remotely-sensed images? *e-Environment : Progress and Challenge*, 11 :365–383, 2004.
- [21] N. Papadakis and E. Mémin. Variational optimal control technique for the tracking of deformable objects. In *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 1–8, Rio de Janeiro, Brésil, Oct 2007.

- [22] N. Papadakis, E. Mémin, and F. Cao. A variational approach for object contour tracking. In *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 259–270, Beijing, Chine, Oct 2005.
- [23] N. Papadakis, T. Corpetti, and E. Mémin. Dynamically consistent optical flow estimation. In *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'07)*, pages 1–7, Rio de Janeiro, Brazil, Oct 2007.
- [24] N. Papadakis, P.H Héas, and E. Mémin. Image assimilation for motion estimation of atmospheric layers with shallow-water model. In *Proceedings of Asian Conference on Computer Vision*, page 864–874, Tokyo, Japan, November 2007.
- [25] E. Huot, I. Herlin, and G.K. Korotaev. Assimilation of SST Satellite Images for Estimation of Ocean Circulation Velocity. In *IGARSS - Proceedings of IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, volume II, pages 847–850, 2008.
- [26] I. Herlin, D. Béréziat, and E. Huot. Image Assimilation and Motion Estimation of Geophysical Fluids. In *International Environmental Modelling and Software Society (iEMSs) 2012 International Congress on Environmental Modelling and Software Managing Resources of a Limited Planet : Pathways and Visions under Uncertainty*, pages 2325–2332, Leipzig, Allemagne, Jul 2012. iEMSs.
- [27] E. Huot, I. Herlin, G. Papari, and K. Drifi. Surface Circulation from Satellite Images : Reduced Model of the Black Sea. In *Integrated system of the Black and Azov seas' monitoring international conference*, Kiev, Ukraine, Sep 2013. National Academy of Science of Ukraine.
- [28] M.J. Black and Y. Yacoob. Recognizing facial expressions in image sequences using local parameterized models of image motion. *Int. J. Comput. Vision*, 25(1) :23–48, oct 1997.
- [29] Y. Yacoob and L.S. Davis. Recognizing human facial expressions from long image sequences using optical flow. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 18(6) :636–642, jun 1996. ISSN 0162-8828.
- [30] E. Mémin and P. Perez. Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(5) :703–719, may 1998. ISSN 10577149.

- [31] S. Belfiore, M. Grangetto, E. Magli, and G. Olmo. Concealment of whole-frame losses for wireless low bit-rate video based on multiframe optical flow estimation. *IEEE Transactions on Multimedia*, 7(2) :316–329, 2005.
- [32] D. Heitz, E. Mémin, and C. Schnoerr. Variational fluid flow measurements from image sequences : Synopsis and perspectives. *Experiments in Fluids*, 2008.
- [33] T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Menin, and A. Santa-Cruz. Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp Fluids*, 40 :80–97, 2005.
- [34] B.K.P. Horn and B.G. Schunck. ”determining optical flow”. *Artificial Intelligence*, 17 :Pages 185–203, August 1981.
- [35] J. Luo and E.E. Konofagou. A fast normalized cross-correlation calculation method for motion estimation. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 57, june 2010.
- [36] B.D. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proceedings of Imaging Understanding Workshop*, pages 121–130, 1981.
- [37] J. Weickert and C. Schnorr. ”a theoretical framework for convex regularizers in pde-based computation of image motion”. *International Journal of Computer Vision*, Volume 45 :Pages 245–264, 2001.
- [38] M. J. Black and P. Anandan. Robust dynamic motion estimation over time. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, page 292–302, June 1991.
- [39] M.J. Black and P. Anandan. The robust estimation of multiple motions : parametric and piecewise smooth flow fields. *Computer Vision and Image Understanding*, 63 :75–104, January 1996.
- [40] D. Sun, S. Roth, J. Lewis, and M. J. Black. Learning optical flow. *ECCV*, 3 :83–97, 2008.
- [41] V. Lempitsky, S. Roth, and C. Rother. Fusionflow : Discrete-continuous optimization for optical flow estimation. *CVPR*, 2008.

- [42] D. Sun and S. Roth. Secrets of optical flow estimation and their principles. In *Proc. 2010 IEEE Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 2432 - 2439, 2010.
- [43] N. Papenberg, A. Bruhn, T. Brox, and J. Weickert. Numerical justification for multiresolution optical flow computation. *8th European Conference on Computer Vision*, May 2004.
- [44] D. Sun, S. Roth, and M.J. Black. Secrets of optical flow estimation and their principles. *The Twenty-Third IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, June 2010.
- [45] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [46] P.J. Burt. *The Pyramid As A Structure For Efficient Computation*. Springer-Verlag, 1984.
- [47] A. Witkin. Scale-space filtering : A new approach to multi-scale description. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE*, Mar 1984.
- [48] S. Baker, D. Scharstein, J. Lewis, S. Roth, M. J. Black, and R. Szeliski. A database and evaluation methodology for optical flow. In *ICCV*, 2007.
- [49] J.L. Barron, D.J. Fleet, and S.S. Beauchemin. "performance of optical flow techniques". *International Journal of Computer Vision*, volume 12 :Pages 43–77, 1994.
- [50] T. Brox, A. Bruhn, N. Papenberg, and J. Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume 3024 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 25–36. Springer, May 2004.
- [51] D. Béréziat, I. Herlin, and L. Younes. A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. In *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec*, pages 487–492, 2000.
- [52] J. Fitzpatrick. The existence of geometrical density-image transformations corresponding to object motion. In *Comput. Vision, Graphics, Image Proc.*, volume 44 of *Lecture Notes in Computer Science*, page 155–174, 1988.

- [53] T. Corpetti, E. Mémin, and P. Perez. Dense estimation of fluid flows. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24 :365–380, 2002.
- [54] L.K. Su and W.J.A Dahm. Scalar imaging velocimetry measurements of the velocity gradient tensor field in turbulent flows. i. assessment of errors. *Phys. Fluids*, 8, july 1996.
- [55] L.K. Su and W.J.A Dahm. Scalar imaging velocimetry measurements of the velocity gradient tensor field in turbulent flows. ii. experimental results. *Phys. Fluids*, 8, july 1996.
- [56] C.Cassisa, S. Simoens, V. Prinet, and L. Shao. Subgrid scale formulation of optical flow for the study of turbulent flow. *Experiments in Fluids*, 51(6) : 1739–1754, 2011.
- [57] T. Kohlberger, E. Mémin, and C. Schnörr. Variational dense motion estimation using the helmholtz decomposition. In *Scale Space Methods in Computer Vision*, volume 2695 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 432–448. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [58] N. Papadakis and E. Mémin. Variational assimilation of fluid motion from image sequence. *SIAM J. Imaging Sciences*, 1(4) :343–363, 2008.
- [59] W. Briggs. A multigrid tutorial. In *SIAM*, 2000.
- [60] A. Bruhn, J. Weickert, T. Kohlberger, and C. Schnoerr. A multigrid platform for real-time motion computation with discontinuity-preserving variational methods. *Int. J. Com. Vis.*, 70(3) :257–277, 2006.
- [61] M. Sizintsev and R. P. Wildes. Efficient stereo with accurate 3-d boundaries. In *BMVC*, 1996.
- [62] C. Lei and Y. Yang. Optical flow estimation on coarse-to-fine region-trees using discrete optimization. In *ICCV*, 2009.
- [63] T. Brox and J. Malik. Large displacement optical flow : Descriptor matching in variational motion estimation. In *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, volume 143, 2010.
- [64] L. Xu, J. Jia, and Y. Matsushita. Motion detail preserving optical flow estimation. In *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012.

- [65] G.X. Cui, Z. Haibing, Z. Zhaoshun, and S. Liang. Dynamic subgrid eddy viscosity model with application to turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 8 : 2835–2842, july 2004.
- [66] R.Y. Tsai and T.S. Huang. Multipleframe image restoration and registration. *Advances in Computer Vision and Image Processing*, page 317–339, 1984.
- [67] P. Krämer, O. Hadar, J. Benois-Pineau, and J.-P. Domenger. Super-resolution mosaicing from mpeg compressed video. In *ICIP (1)*, pages 893–896. IEEE, 2005.
- [68] K.. Suresh, G.M. Kumar, and A.N. Rajagopalan. Superresolution of license plates in real traffic videos. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 8(2) :321–331, 2007.
- [69] M.T. Merino and J. Núñez. Super-resolution of remotely sensed images with variable-pixel linear reconstruction. *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing*, 45(5-2) :1446–1457, 2007.
- [70] R.R. Peeters, P. Kornprobst, M. Nikolova, S. Sunaert, T. Vieville, G. Ma-landain, R. Deriche, O. Faugeras, M. Ng, and P. Van Hecke. The use of superresolution techniques to reduce slice thickness in functional MRI. *International Journal of Imaging Systems and Technology (IJIST), Special issue on High Resolution Image Reconstruction*, 14(3) :131–138, 2004.
- [71] S. Peled and Y. Yeshurun. Superresolution in MRI : application to human white matter fiber tract visualization by diffusion tensor imaging. *Magn Reson Med*, 45(1) :29–35, 2001.
- [72] J.A. Kennedy, O. Israel, A. Frenkel, R. Bar-Shalom, and H. Azhari. Super-resolution in pet imaging. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 25(2) :137–147, 2006.
- [73] J.A. Kennedy, O. Israel, A. Frenkel, R. Bar-Shalom, and H. Azhari. Improved image fusion in pet/ct using hybrid image reconstruction and super-resolution. *Int. J. Biomedical Imaging*, 2007, 2007.
- [74] L. He-Guelton. *Emulation statistique de champs de vent à haute-résolution*. Manuscript de thèse, Telecom Bretagne, Juin 2014.
- [75] S. Borman and R.L. Stevenson. Super-resolution from image sequences - a review. In *Proceedings of the 1998 Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 20(3) :374–378, 1998.

- [76] S. Farsiu M.D., Robinson, M. Elad, and P. Milanfar. Fast and robust multiframe super-resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13 : 1327–1344, 2004.
- [77] M.G. Kang and S. Chaudhuri. Super-resolution image reconstruction. *IEEE Signal Process Mag*, 2003.
- [78] S.C. Park, M.K. Park, and M.G. Kang. Super-resolution image reconstruction : a technical overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 20(3) :21–36, 2003.
- [79] S. P. Kim, N. K. Bose, and H. M. Valenzuela. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990.
- [80] N.K. Bose, H.C. Kim, and H.M. Valenzuela. Recursive implementation of total least squares algorithm for image reconstruction from noisy, undersampled multiframes. *In Proceedings of the IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1993.
- [81] A.K. Katsaggelos. Digital image restoration. *Springer-Verlag. Springer*, 1991.
- [82] P.C. Hansen and D.P. O’Leary. The use of the l-curve in the regularization of ill-posed problems. *SIAM J Sci Comput*, 1993.
- [83] N. Nguyen and P. Milanfar. An efficient wavelet-based algorithm for image superresolution. *IEEE International Conference in Image Processing*, 2001.
- [84] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1998.
- [85] E. Meijering. A chronology of interpolation : From ancient astronomy to modern signal and image processing. *In Proceedings of the IEEE*, pages 319–342, 2002.
- [86] K.A. Neena, R. Aiswriya, and C.R. Rajesh. Article : Image enhancement based on stationary wavelet transform, integer wavelet transform and singular value decomposition. *International Journal of Computer Applications*, 58 (11) :30–35, November 2012.
- [87] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner. Interpolation and decimation of digital signals—a tutorial review. *Proc. IEEE*, 1981.

-
- [88] I.J. Schoenberg. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory*, 1969.
- [89] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. Enlargement or reduction of digital images with minimum loss of information. *IEEE Trans. Image Processing*, 1995.
- [90] H. Ur and D. Gross. Improved resolution from sub-pixel shifted pictures. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 1992.
- [91] J.L. Brown. Multi-channel sampling of low pass signals. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1981.
- [92] A. Papoulis. Generalized sampling theorem. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1977.
- [93] T. Komatsu, K. Aizawa, T. Igarashi, and T. Saito. Signal-processing based method for acquiring very high resolution image with multiple cameras and its theoretical analysis. *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 1993.
- [94] L. Landweber. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *Amer. J. Math.*, 1951.
- [95] M.S. Alam, J.G. Bogner, R.C. Hardie, and B.J. Yasuda. Infrared image registration and high-resolution reconstruction using multiple translationally shifted aliased video frames. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2000.
- [96] D. Capel and A. Zisserman. Super-resolution enhancement of text image sequences. *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, 2000.
- [97] R. Fattal. Image upsampling via imposed edge statistics. *ACM Transactions on Graphics*, 2007.
- [98] S. Baker and T. Kanade . Limits on super-resolution and how to break them ? *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 24(9) :1167–1183, 2002.
- [99] E. Haber and L. Tenorio. Learning regularization functionals-a supervised training approach. *Inverse Problems*, 2003.
- [100] S.C. Zhu and D. Mumford. Prior learning and gibbs reaction-diffusion. *IEEE Trans Pattern Analy Machine Intelligence*, 1997.

- [101] L. He-Guelton, B. Chapron, J. Tournade, and R. Fablet. Statistical emulation of high resolution sar wind fields from low-resolution model predictions. *IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS'2014*, 2014.
- [102] P. Sagaut. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence, 2006. Imperial College Press.
- [103] J. Domaradzki and E. Saiki. A subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence. *Phys. Fluids*, 9(7) :2148–2164, 1997.
- [104] P. Moin, K. Squires, W.H. Cabot, and S. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Physics of Fluids*, 3(11) : 2746–2757, 1991.
- [105] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38A : 97–110, 1986.
- [106] J.L. Lions. *Optimal control of systems governed by PDEs*. Springer-Verlag, 1971.
- [107] M. Julien. Intermittency of a passive tracer in the inverse energy cascade. *Physical Review*, 64, 2001.
- [108] L. Alvarez, J. Weickert, and X. Sanchez. Reliable estimation of dense optical flow fields with large displacements. *IJCV*, 39(1) :41–56, 2000.
- [109] B. Sportisse and F.-X. Le Dimet. *Data Assimilation for Geophysical Flows*. Springer, 2002.
- [110] M. Luetzgen, W. Karl, and A. Willsky. *Optical Flow Computation Via Multiscale Regularization*. PhD Thesis, MIT Dept. of EECS, Sep 1992.
- [111] O. Demetz, J. Weickert, A. Bruhn, and H. Zimmer . Optic flow scale space. *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, pages 713–724, 2011.
- [112] G. Burton and W. Dahm. Multifractal subgrid-scale modeling for large eddy simulation. i model development and a priori testing. *Phys. Fluids*, 17 : 2835–2842, july 2005.

-
- [113] G. Burton and W. Dahm. Multifractal subgrid-scale modeling for large eddy simulation. ii backscatter limiting and a posteriori evaluation. *Phys. Fluids*, 17 :2835–2842, july 2005.
- [114] G. Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res*, 99 :10143–10162, 1994.
- [115] S. Gillijns, O.B. Mendoza, J. Chandrasekar, B.L.R De Moor, D.S. Bernstein, and A. Ridley. What is the ensemble kalman filter and how well does it work? In *American Control Conference, 2006*, pages 6 pp.–, June 2006. doi : 10.1109/ACC.2006.1657419.
- [116] N. Papadakis. *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs. Manuscrit de thèse*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Nov 2007.
- [117] A. F. Bennett. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, 1992.

Résumé

Cette étude a pour cadre l'analyse d'images dans un contexte multi-échelles, une attention particulière étant portée sur les images fluides dans un contexte turbulent.

Nous traitons en premier lieu le problème de l'estimation de mouvement. Dans un contexte multi-échelles, on néglige bien souvent dans un premier temps la contribution des fines échelles du problème. Nous proposons, pour pallier ce problème, plusieurs termes d'attache aux données dérivant de l'OFCE. Ceux-ci permettent, à chaque niveau d'échelle, la prise en compte de ces composantes fines échelles. Les performances de ces termes sont expérimentalement démontrées sur des images générales et fluides.

Nous abordons en second lieu le problème de super-résolution d'images de scalaires passifs : nous souhaitons reconstruire, de manière explicite, certains détails manquants au sein d'images basse résolution données. Pour cela, nous utilisons plusieurs modèles issus de la simulation des grandes échelles ainsi que des méthodes d'assimilation de données permettant d'assurer une certaine cohérence temporelle de la solution. Les approches présentées sont expérimentalement étudiées sur différentes séquences d'images.

Enfin, nous proposons une méthode d'estimation multi-résolution permettant de combiner de manière simultanée les informations issues des différents niveaux de résolution.

Mots clés : Approches multi-échelles, Estimation du mouvement, LES, Super-résolution, Assimilation de données.

Abstract

This thesis is concerned with image analysis within a multi-scale framework. Specific attention is given to fluid images in the presence of turbulence.

In a first part, we address the problem of multi-scale motion estimation from image sequences. Starting from OFCE equation, we derive several image data terms allowing to take into account, while estimating the solution coarse scales, the contribution of the finer scales components usually neglected in classic approaches. The performances of the resulting estimators is demonstrated on both general and fluid images.

The second step of this study is concerned with the problem of passive scalar images super-resolution : starting from low resolution input images, we aim at recovering some of the missing high frequencies. We proposed several methods inspired by the LES framework, as well as data assimilation techniques, in order to ensure the solution consistency over time. Such approaches are experimented and compared over various image sequences.

Finally, we propose a multi-resolution estimation method simultaneously combining informations from different grid levels.

Keywords : Multi-scale approaches, Motion estimation, LES, Super-resolution, Data assimilation.