Numéro d'ordre : 2015-36 Année : 2015

THÈSE DE DOCTORAT DE
l'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Spécialité : **Mécanique**

École doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique (Lyon)

Présentée par :

Pierre GARAMBOIS

Ingénieur de l'INSA Lyon, spécialité Génie Mécanique Conception

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Sujet de la thèse :

Modèles éléments-finis mixtes réduits pour l'optimisation en dynamique des structures

Soutenue publiquement le 17 novembre 2015 devant le jury composé de :

M. Pierre Argoul	MCf HDR, ENPC, Paris Laboratoire Navier	Rapporteur
M. Sébastien Besset	MCf HDR, École Centrale de Lyon - LTDS	Co-encadrant
M. Louis Jézéquel	Professeur, École Centrale de Lyon - LTDS	Directeur de thèse
M. Morvan Ouisse	Professeur, ENSMM, Besançon Institut FEMTO-ST	Rapporteur
M. Olivier Sauvage	Docteur, PSA Peugeot Citroën Vélizy-Villacoublay	Examinateur
M. Jean-Jacques Sinou	Professeur, École Centrale de Lyon - LTDS	Examinateur

Remerciements

On dit souvent que le “chapitre” des remerciements est le seul où l'on peut laisser un bout de soi, et montrer un visage plus authentique de sa personnalité. Pourtant, c'est le seul qui soit complètement dédié aux autres, et en cela, c'est peut-être le plus important de ce manuscrit. Je vais donc essayer de rendre hommage à toutes les personnes marquantes de cette aventure, en essayant d'oublier personne...

Je voudrais tout d'abord remercier les membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail, et de s'être rendus disponible le jour de la soutenance. Merci pour vos analyses pertinentes et vos relectures détaillées.

J'aimerais rendre hommage à mon directeur de thèse, Louis Jézéquel, qui m'a accueilli dans son équipe pendant ces trois années. Je te remercie de m'avoir fait confiance et de m'avoir confié un sujet qui te tenait tant à coeur depuis des années. J'aimerais également remercier mon autre encadrant, Sébastien Besset, pour son implication et son aide permanente tout au long de ces trois années. Merci pour ton aide scientifique et technique, ta pédagogie, ta joie de vivre, mais aussi pour le soutien moral et le recul que tu as su prendre sur le travail que l'on a fait ensemble. Ta vision à la fois globale et détaillée de nos recherches a été un atout important dans notre réussite commune, et tu as su faire de ces trois années une expérience riche, tant scientifiquement que humainement. Je suis très heureux d'avoir eu la chance de travailler avec quelqu'un comme toi.
Je voudrais aussi remercier une personne de l'ombre qui n'est pas officiellement dans mon encadrement mais qui a toujours agi comme tel : Olivier Dessombz. A plusieurs reprises, tu es venu à mon secours sur des points généralement très délicats. Tes immenses connaissances scientifiques, ta pédagogie et ton esprit critique permettent toujours de s'en sortir. Beaucoup d'entre nous te considèrent comme le dernier espoir de résoudre un problème lorsque les choses se compliquent sérieusement. Merci également pour toute la bonne humeur et le soutien que tu m'as apporté pendant ces trois années.

Je tiens également à adresser mes remerciements à tous les membres de l'équipe pédagogique du département Mécanique des Solides-Génie Mécanique-Génie Civile, qui m'ont fait confiance en me laissant effectuer une charge d'enseignement. Ce monitorat et les échanges qui y sont liés constituent le complément idéal à mon travail de recherche, et me motivent d'autant plus à poursuivre une carrière universitaire.

Je souhaite également saluer tous les techniciens, maîtres de conférences, person-

nels administratifs, doctorants et post-doctorants de l'équipe Dysco/D2S pour la bonne ambiance qui m'a donné le sourire chaque matin en arrivant au labo.

J'aimerais bien sûr remercier tous mes copains du LTDS, tous ceux qui ont fait du labo un lieu où j'avais plaisir à venir aussi pour y retrouver des gens que j'aime beaucoup et qui ont égayé mes journées pendant ces trois années. Merci pour tous ces sourires, ces vannes à deux balles et ces chambrages partagés. Merci pour toutes ces pauses et moments "extra-work", agrémentés de discussions plus ou moins philosophiques, d'analyses sportives aiguisées, et de débats enflammés où personne n'a raison, mais tout le monde a le dernier mot. Merci pour ces barbecues qui n'en finissent pas, ces conférences toujours bien animées et ces soirées parfois mouvementées. Ces moments font partie intégrante de ces trois dernières années, c'est pourquoi je tiens à embrasser chaleureusement Kevin S., Colin L., Colas J., Clara O., Patricio A., Jérôme L., Mélodie M., Antoine M., Adrien M., Xavier L., Josselin P., Stéphane L., Lyes N., David L., Jean-Jacques S., Antoine G., Alexa D., Nicolas G., Lionel S., Antony B., Sandra D., Benjamin C., Antoine G., Mathieu B., Diane H., Chang-Wei Z., Stéphane F., Jerôme D., Marie-Océane P., Shyam S., Jorge M. et Obi-Wan K.
Un remerciement tout particulier à Kevin. Merci pour ta gentillesse, ton aide quotidienne et pour le temps que tu m'as consacré pendant de longues heures (sous Matlab ou Latex), sans jamais rien attendre en retour. Tu as été un modèle de réussite dans le milieu de la recherche, et je suis vraiment content d'avoir pû évoluer à côté d'un grand bonhomme comme toi.
Comment ne pas m'attarder sur Colin, mon ami "multi-taches", aussi bien présent à mes côtés sur une planche-à-voile au fin fond du Sri Lanka avec un masque de cheval, que soutien et moteur tout au long de ma thèse. Tu as été un grand-frère pendant ces trois années, et je tiens à t'en remercier profondément.
Un remerciement tout particulier également à Colas. Merci pour toute ton implication, notamment le jour de ma soutenance : cette journée a été un grand moment pour moi, et tu y es pour beaucoup.

Merci à ma famille de m'avoir soutenu ces trois années, et d'être toujours là pour moi, quels que soient les choix que je fais dans ma vie. Je suis fier de ma famille, de nos valeurs, et je ne pourrais rêver meilleur environnement pour construire ma vie.

Enfin, je tiens à exprimer ma tendresse la plus profonde à celle qui partage ma vie et qui aura été la plus importante dans cette aventure : Alexandra. Tu as su m'épauler et me supporter pendant tous ces moments, avec tes mots justes, ton calme, ton sourire, ta bonne humeur et ta joie de vivre que tu me communiques chaque jour. Merci du fond du coeur d'être là à mes côtés, tout simplement.

Résumé

L'utilisation de structures fines est croissante dans bon nombre d'industries. En ce sens, leur représentation mécanique et optimisation est un enjeu majeur de la recherche actuelle. De façon classique, l'optimisation s'effectue avec un critère de contrainte, obtenue à partir d'une modélisation Éléments-Finis en déplacements. L'idée de ces travaux est de construire un modèle Éléments-Finis mixte déplacements-contraintes et de développer des méthodes de réduction adaptées, de façon à améliorer l'efficacité des méthodes d'optimisation existantes.

On construit d'une part deux modèles élément-finis mixtes déplacements-contraintes généralisées, pour des analyses dynamiques de structures "plaque" fines et épaisses. Ces derniers présentent l'avantage de donner des résultats identiques aux modèles classiques en déplacements, avec un meilleur temps de reconstruction des champs de contraintes. Cependant, ils s'avèrent être délicats pour plusieurs raisons : la taille des matrices associées, la difficulté de faire une analyse modale rapide, et un temps d'assemblage accru.

C'est la raison pour laquelle nous développons par la suite des méthodes de sous-structuration et de double synthèse modale spécifiquement dédiées aux modèles mixtes. L'idée est d'utiliser des bases modales tirées du modèle équivalent en déplacements pour composer une nouvelle base mixte réduite. Dix méthodes sont implémentées, basées sur des modes encastrés, libres et de branche, parmi lesquelles certaines s'avèrent très efficaces pour réduire le nombre de degrés de liberté du système mixte, sans passer par ses modes propres.

Enfin, nous intégrons les modèles mixtes sous-structurés sous forme de Super-Éléments Mixtes dans un algorithme génétique, dans le but de mener une optimisation multi-objectif de structures "plaque" académiques sous chargement dynamique, avec critères de contrainte et paramètres d'épaisseur. Les modèles précédemment définis sont ainsi paramétrés en épaisseur, et ne nécessitent plus d'être ré-assemblés pour chaque configuration. Nous disposons désormais d'un modèle mixte "plaque", qui conserve les avantages d'un accès direct aux contraintes, tout en étant affranchi de sa taille importante par le biais des méthodes de réduction, et de son assemblage grâce au paramétrage. Il en résulte des modèles mécaniques originaux et efficaces, permettant de réduire les coûts de calcul des algorithmes d'optimisation classiques. Ce type de méthode, couplé à de puissants algorithmes génétiques, permet d'avoir une bonne vue d'ensemble des solutions optimales, et laissent augurer des perspectives intéressantes pour une utilisation industrielle.

Abstract

The use of thin structures is increasing in many industries. Their mechanical representation and optimization is therefore a major challenge in modern research. Usually, the optimization is done with a stress criterion which is determined through displacements finite-element model. The idea of this work is to build a mixed displacements-stresses finite-element model and to develop adapted reduction procedures, in order to improve the efficiency of existing optimization methods.

On the one hand, we build two mixed displacements-generalized stresses finite element models, for thin and thick dynamic plate structures analysis. They afford the advantage of giving identical results as classical displacements models with a better computational time to re-build the stress fields. Nevertheless, they turn out to be tricky for some reasons : the bigger matrices size, the difficulty of modal analysis and an assembling time higher.

That is the reason why we develop afterwards some sub-structuring methods and double modal synthesis specifically dedicated to mixed models. The idea is to use modal basis taken from the equivalent displacement model so as to build a new mixed reduced basis. Ten methods are implemented, based on fixed modes, free modes, and branch modes. Some of them turn out to be very efficient to drastically reduce the amount of degrees of freedom of the mixed model, without using its eigenmodes.

Finally, we embed the sub-structured mixed model in the form of Mixed Super-Element in a genetic algorithm, with the aim of conducting a multi-objective optimization of academic plate structures under dynamic loads, with stresses criterion and thicknesses parameters. The models previously defined are configured with thicknesses as parameters, and therefore don't need to be re-assembled for each configuration. We now dispose of a powerful thickness-parametrized mixed reduced plate finite element model : it keeps the advantages of an easy access to the stresses and is free of its important size thanks to the reduction method and of its assembling thanks to the parametrization. The result is an original and efficient mechanical model that reduces the computational cost of classical optimization algorithms. That type of model, coupled with powerful genetic algorithms, permits a global optimization with a good overview of the solutions and promises interesting perspectives for industrial uses.

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé **iii**

Abstract **v**

Table des figures **xiii**

Liste des tableaux **xvii**

Introduction générale **1**

1 Formulation mixte déplacement-contraintes en dynamique **5**
1.1 Introduction 5
1.1.1 Historique des formulations multi-champs 5
1.1.2 Intérêts et utilisations 7
1.1.3 Choix d'orientations 10
1.2 Formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner 11
1.3 Éléments-finis mixtes déplacements-contraintes pour plaques de Kirchhoff-Love 11
1.3.1 Définition de la théorie de plaque 11
1.3.2 Interpolation des déplacements 13
1.3.3 Interpolation des contraintes 13
1.3.4 Formulation matricielle 14
1.3.5 Assemblage 15
1.3.6 Modèle Éléments-Finis primal équivalent 15
1.4 Éléments-finis mixtes déplacements-contraintes pour plaques de Reissner-Mindlin 16
1.4.1 Définition de la théorie de plaque 16
1.4.2 Interpolation des déplacements 18
1.4.3 Interpolation des contraintes 19
1.4.4 Formulation matricielle 19
1.4.5 Assemblage 20
1.4.6 Modèle Éléments-Finis primal équivalent 20
1.5 Conclusions 20

2 Convergence et caractéristiques des modèles mixtes 23
2.1 Convergence du modèle primal en déplacements . . . 23
2.1.1 Méthode . . . 24
2.1.2 Plaques épaisses de Reissner-Mindlin . . . 24
2.1.3 Plaques fines de Kirchhoff-Love . . . 25
2.2 Convergence en déplacements du modèle mixte vers le modèle primal . 25
2.2.1 Plaques épaisses de Reissner-Mindlin . . . 27
2.2.2 Plaques fines de Kirchhoff-Love . . . 31
2.3 Convergence en contraintes du modèle mixte vers le modèle primal . . 36
2.3.1 Calcul des contraintes en un nœud du maillage pour la théorie de Kirchhoff-Love . . . 36
2.3.2 Critère "MAC-like" en contrainte de Von Mises . . . 37
2.3.3 Plaques fines de Kirchhoff-Love . . . 38
2.3.4 Conclusions sur les plaques fines de Kirchhoff-Love . . . 41
2.4 Avantages du modèle . . . 41
2.5 Spécificités et inconvénients du modèle . . . 42
2.5.1 Nombre de degrés de liberté élevé . . . 42
2.5.2 Matrices singulières . . . 42
2.6 Conclusions . . . 44

3 Méthodes de sous-structurations modales 47
3.1 Introduction . . . 47
3.2 Réduction des paramètres de déplacements de la frontière . . . 50
3.2.1 Modes statiques de liaison . . . 50
3.2.2 Modes de branche . . . 51
3.3 Réduction des paramètres de déplacements des sous-structures . . . 52
3.3.1 Méthodes à interfaces fixes ou "de modes encastrés" . . . 52
3.3.2 Méthodes à interfaces libres ou "de modes libres" . . . 53
3.4 Projection des réductions sur les paramètres de contraintes . . . 53
3.4.1 Méthodes à interfaces fixes ou "de modes encastrés" . . . 54
3.4.2 Méthodes à interfaces libres ou "de modes libres" . . . 54
3.5 Application des réductions aux modèles éléments-finis mixtes . . . 54
3.5.1 Méthode Fix-Fix-1(-br) . . . 55
3.5.2 Méthode Fix-Fix-2(-br) . . . 56
3.5.3 Méthode Fre-Fix-2(-br) . . . 56
3.5.4 Méthode Fre-Fre-1(-br) . . . 57
3.5.5 Méthode Fre-Fre-2(-br) . . . 57
3.5.6 Synthèse . . . 58
3.6 Assemblage des sous-structures . . . 58
3.6.1 Méthodes d'assemblage . . . 58
3.6.2 Méthode Fix-Fix-1(-br) . . . 60
3.6.3 Méthode Fix-Fix-2(-br) . . . 61
3.6.4 Méthode Fre-Fix-2(-br) . . . 61
3.6.5 Méthode Fre-Fre-1(-br) . . . 62

3.6.6 Méthode Fre-Fre-2(-br) 63
3.7 Procédure globale de réduction 63
3.8 Conclusions 65

4 Convergence des méthodes de réduction 67
4.1 Structure “exemple” composée de deux sous-structures 67
4.2 Méthode d’étude de convergence 68
4.2.1 Critères 68
4.2.2 Représentation des résultats 70
4.3 Troncature des modes propres 71
4.3.1 Méthode Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2 71
4.3.2 Méthode Fre-Fix-2 77
4.3.3 Méthode Fre-Fre-1 77
4.3.4 Méthode Fre-Fre-2 82
4.4 Troncature des modes de branche 82
4.4.1 Méthode Fix-Fix-1-br et Fix-Fix-2-br 85
4.4.2 Méthode Fre-Fre-2-br 86
4.5 Conclusions 88

5 Optimisation d’épaisseurs de structures “plaque” sous critère de contrainte 91
5.1 Introduction 91
5.1.1 Présentation générale 91
5.1.2 Historique de l’optimisation de forme 92
5.1.3 Intégration de nos modèles dans un Algorithme Génétique . . . 95
5.2 Présentation du type de problème d’optimisation 96
5.3 Optimisation Multi-Objectifs et Algorithme génétique 97
5.3.1 Formulation déterministe d’un problème Multi-Objectif 98
5.3.2 Notion de dominance et optimalité au sens de Pareto 98
5.3.3 Algorithmes évolutionnaires ou Algorithmes génétiques 99
5.3.4 Fonctionnement des Algorithmes Génétiques 100
5.4 Modèles éléments-finis mixtes paramétrés en épaisseurs pour plaques fines 102
5.4.1 Modèle mixte paramétré 103
5.4.2 Modèle primal équivalent paramétré 104
5.4.3 Méthodologie/Intégrations dans l’Algorithme Génétique 105
5.5 Modèle éléments-finis mixtes sous-structurés paramétrés en épaisseurs 107
5.5.1 Modèle et Super-Élément Mixte 110
5.5.2 Méthodologie/Intégrations dans l’Algorithme Génétique 112
5.6 Temps de calcul et bénéfices 114
5.6.1 Étape (2.a) et (2.b) : construction du modèle 116
5.6.2 Étape (2.c) : calcul de la réponse et du champ de contraintes . 116
5.6.3 Étape (2) globale : évaluation d’un individu 118

5.7 Cas d'étude et représentation des résultats . . . 119
5.7.1 Cas d'étude . . . 119
5.7.2 Excitation . . . 119
5.7.3 Introduction de l'amortissement . . . 121
5.7.4 Représentation sous forme de Front de Pareto et épaisseurs . . . 123
5.8 Principaux résultats significatifs . . . 126
5.8.1 Synthèse des calculs effectués . . . 126
5.8.2 Excitation localisée sur une fréquence propre et validation qualitative des méthodes . . . 128
5.8.3 Excitation sur une bande fréquentielle . . . 135
5.8.4 Cas spécifiques de typage . . . 138
5.9 Conclusions . . . 142

Conclusions et perspectives **145**

A Développement variationnel de la formulation mixte **149**
A.1 Définition des espaces fonctionnels . . . 149
A.2 Définition de la fonctionnelle . . . 149
A.3 Équations de la mécanique des milieux continus élastiques à vérifier . 150
A.4 Dérivées directionnelles et vérification du théorème . . . 150
A.4.1 Calcul de la dérivée directionnelle en déplacements $\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi$ . . . 151
A.4.2 Calcul de la dérivée directionnelle en déplacements $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Pi$ . . . 152

B Développement des matrices paramétriques des Super-Éléments **155**
B.1 Définitions de la base de réduction . . . 155
B.2 Paramétrages i/j et w/θ . . . 155
B.3 Paramétrages dans la basé réduite . . . 156

C Résultats de l'optimisation d'une plaque simple **159**
C.1 Mode 1 . . . 160
C.1.1 4 zones . . . 160
C.1.2 6 zones . . . 161
C.1.3 8 zones . . . 162
C.1.4 10 zones . . . 163
C.2 Mode 2 . . . 164
C.2.1 4 zones . . . 164
C.2.2 4 zones + symétrie . . . 165
C.2.3 6 zones . . . 166
C.2.4 6 zones + symétrie . . . 167
C.2.5 8 zones . . . 168
C.2.6 9 zones + symétrie . . . 169
C.2.7 12 zones . . . 170
C.2.8 16 zones . . . 171

C.3 Mode 3 . . . 172
C.3.1 6 zones . . . 172
C.3.2 8 zones . . . 173
C.3.3 12 zones . . . 174
C.4 Mode 4 . . . 175
C.4.1 4 zones . . . 175
C.4.2 4 zones + symétrie . . . 176
C.4.3 6 zones . . . 177
C.4.4 6 zones + symétrie . . . 178
C.4.5 8 zones . . . 179
C.4.6 9 zones + symétrie . . . 180
C.4.7 12 zones . . . 181
C.4.8 16 zones . . . 182
C.5 Mode 5 . . . 183
C.5.1 6 zones . . . 183
C.5.2 8 zones . . . 184
C.5.3 10 zones . . . 185
C.5.4 12 zones . . . 186

D Résultats de l'optimisation d'une plaque double 187
D.1 Mode 3 . . . 188
D.1.1 7 zones . . . 188
D.1.2 10 zones . . . 189
D.1.3 14 zones . . . 190

E Résultats de l'optimisation d'une plaque triple 193
E.1 Mode 1 . . . 194
E.2 Mode 2 . . . 195
E.3 Mode 3 . . . 196
E.4 Mode 4 . . . 197
E.5 Mode 5 . . . 198
E.6 Mode 6 . . . 199
E.7 Mode 7 . . . 200
E.8 Mode 8 . . . 201
E.9 Mode 9 . . . 202
E.10 Mode 10 . . . 203
E.11 Mode 11 . . . 204
E.12 Mode 12 . . . 205
E.13 Mode 13 . . . 206
E.14 Mode 14 . . . 207
E.15 Bande 0-20 Hz, 0-40 Hz et 0-70 Hz . . . 208
E.16 Bande 10-30 Hz . . . 209
E.17 Bande 30-70 Hz . . . 211
E.18 Bande 50-100 Hz . . . 212

E.19 Bande 70-100 Hz 214

Bibliographie **217**

Publications personnelles **229**

Table des figures

1.1 Théorie de Kirchhoff-Love : (a) Déplacements, (b) Contraintes généralisées : moments de flexions $(M_x, M_y)^T$ et moment de torsion M_{xy} 12
1.2 Théorie de Kirchhoff-Love : (a) Déplacements, (b) Contraintes généralisées : moments de flexions $(M_x, M_y)^T$, moment de torsions M_{xy} et efforts de cisaillements transverses $(Q_x, Q_y)^T$ 17
1.3 Schéma entrées/sorties global de la Toolbox de construction du modéle 21

2.1 Plaque rectangulaire plane (en m) 24
2.2 Erreur relative sur les fréquences propres $\epsilon_{\text{i,mix/pri}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode, pour $t = 1\,\text{cm}$ (a : 100 éléments, b : 400, c : 900, d : 1600, e : 2500, f : 4900) 30
2.3 Erreur relative sur les fréquences propres $\epsilon_{\text{i,mix/pri}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode, pour $t = 5\,\text{cm}$ (a : 100 éléments, b : 400, c : 900, d : 1600, e : 2500, f : 4900) 32
2.4 Excitation sur une plaque rectangulaire plane 33
2.5 Erreur relative ϵ_{FRF} entre les FRF co-localisées des modèles primaux et mixtes pour la théorie de KL, pour $t = 1mm$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024, f : 4096) 34
2.6 Erreur relative ϵ_{FRF} entre les FRF co-localisées des modèles primaux et mixtes pour la théorie de KL, pour $t = 1cm$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024, f : 4096) 35
2.7 Critère de MAC en contraintes $MAC_{stress}(i, j)$, pour $t = 1\,\text{mm}$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024) 39
2.8 Critère de MAC en contraintes $MAC_{stress}(i, j)$, pour $t = 1\,\text{cm}$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024) 40

3.1 Schéma de principe d'une sous-structuration avec deux sous-structures et des degrés de libertés de liaison dans le cadre d'un MEF 47
3.2 Calcul de la réponse dynamique d'une structure globale à l'aide de nos méthodes de sous-structuration modales (niveau de la structure globale en noir, niveau de la sous-structure (s) en gris). Chaque bloc a besoin de toutes ses entrées pour être compilé 64
3.3 Schéma entrées/sorties global de la Toolbox de réduction mise en place 65

4.1 Structure "double" en théorie des plaques de Kirchhoff-Love (en m) . 68

4.2 Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{\text{i,red/mix}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-1 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80) 73
4.3 Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-1 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80) 74
4.4 Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{\text{i,red/mix}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-2 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80) 75
4.5 Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-2 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80) 76
4.6 Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{\text{i,red/mix}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fix-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 150-150, f : 200-200) 78
4.7 Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fix-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 150-150, f : 200-200) 79
4.8 Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{\text{i,red/mix}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-1 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100) . . . 80
4.9 Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-1 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100) 81
4.10 Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{\text{i,red/mix}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100, f : 150-150) 83
4.11 Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100, f : 150-150) 84
4.12 Densité de modes singuliers en fonction des modes de branche conservés dans les méthodes Fix-Fix-1-br ou Fix-Fix-2-br 86
4.13 Densité de modes singuliers en fonction des modes de branche conservés dans les méthodes Fre-Fre-2 86

5.1 Exemple d'optimisation pour 3 sous-structures 97
5.2 Notion de dominance au sens de Pareto, solutions dominées et Pareto-Optimales 99
5.3 Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (blocs gris : apport de notre travail) 100
5.4 Étape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation du modèle mixte dans un cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes . . 104
5.5 Étape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation du modèle primal dans un cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes . . 106
5.6 Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un "MEF mixte paramétré" dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes 108

5.7 Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un "MEF primal paramétré" dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes 109
5.8 Etape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation des MSE dans un cas de (q) zones/MSE d'épaisseurs indépendantes 113
5.9 Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un MEF mixte sous-structuré réduit dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes 115
5.10 Schéma des trois structures académiques à optimiser (en m) 120
5.11 Évolution de l'amortissement global de Rayleigh en fonction de la pulsation d'excitation. 122
5.12 Exemple de présentation des résultats : (a) Front de Pareto et évolution d'épaisseurs, (b) Répartition des zones d'épaisseurs sur la structure concernée, (c) forme du mode optimisé 124
5.13 Optimisation de la structure "simple" pour le mode 1 : (a) Front de Pareto & épaisseurs, (b) zone d'épaisseurs indépendantes, (c) Champ de contraintes pour le mode 1 129
5.14 Optimisation de la structure "double" pour le mode 3 : (a) Front de Pareto & épaisseurs, (b) zones d'épaisseurs indépendantes, (c) Champ de contraintes pour le mode 3 130
5.15 Optimisation de la structure "simple" pour le mode 5 : (a) Front de Pareto & épaisseurs, (b) zones d'épaisseurs indépendante, (c) Champ de contraintes pour le mode 5 131
5.16 Optimisation de la structure "simple" pour le mode 4 : (a) Front de Pareto & épaisseur pour la configuration (b), (b) zones d'épaisseurs indépendante du front (a), (c) et (f) Champ de contraintes pour le mode 4, (d) Front de Pareto & épaisseurs pour la configuration (e), (e) zones d'épaisseurs indépendantes du front (d) 133
5.17 Optimisation de la structure "triple" pour la bande fréquentielle $70 - 100$ Hz : Front de Pareto & épaisseurs pour chaque Pareto-solution . . 136
5.18 Optimisation de la structure "triple" pour le mode 7 : (a) Front de Pareto & épaisseurs), (b) zones d'épaisseurs indépendante, (c) Champ de contraintes pour le mode 7 139

C.1 Schéma de la structure "simple" (en m) à optimiser (exemple à 8 zones d'épaisseur) 159

D.1 Schéma de la structure "double" (en m) à optimiser (exemple à 7 zones d'épaisseur) 187

E.1 Schéma de la structure "triple" (en m) à optimiser 193

Liste des tableaux

1.1 Les fonctionnelles de la mécanique linéaire des milieux continus 6

2.1 Caractéristiques de l'acier utilisé pour les applications numériques . . 24
2.2 Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1b pour $t = 5\,\text{cm}$ ($\frac{R}{t} = 8$) et la théorie de RM 25
2.3 Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1b pour $t = 1\,\text{cm}$ ($\frac{R}{t} = 40$) et la théorie de RM 26
2.4 Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1a pour $t = 1\,\text{cm}$ ($\frac{R}{t} = 40$) et la théorie de KL 26
2.5 Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1a pour $t = 1\,\text{mm}$ ($\frac{R}{t} = 400$) et la théorie de KL 27
2.6 Nombre d'éléments composant les maillages de RM et tailles caractéristiques des éléments t_e 28
2.7 Gain en temps de calcul pour la reconstruction du champ de contraintes de Von Mises de la structure "plaque" (figure 2.4) avec le MEF mixte par rapport au MEF primal 42
2.8 Résumé des convergences, avantages et contraintes du MEF mixtes par rapport au MEF primal 45

3.1 Méthodes de synthèse modale implémentées, types de modes utilisés et sections associées pour la réduction et l'assemblage 50
3.2 Méthodes de synthèses modales implémentées, types de modes utilisés et section associées pour la réduction et l'assemblage 59

4.1 Caractéristiques de la structure exemple 68
4.2 Différentes troncatures implémentées pour chaque synthèse modale et nombre de modes par champ associé 69
4.3 Synthèse des résultats pour les différents méthodes de synthèses modales et troncatures des modes internes (pas de modes de branche) . . 72
4.4 Résultats pour différentes troncatures de modes de branche de la méthode Fix-Fix-1 ou Fix-Fix-2 87
4.5 Performances générales des méthodes implémentées dans le chapitre 3 pour notre cas d'étude 89

5.1 Temps de calcul de l'étape 2 d'évaluation du GA pour 1 individu et 1 calcul de contraintes avec les modèles paramétrés primaux, mixtes et mixte réduits (MSE), et un modèle primal classique avec remaillage . 117

5.2 Modes optimisés pour les structures plaques “simples” et “doubles” avec la méthode d’optimisation du modèle mixte paramétrée (section 5.4.1) avec différentes configurations de zones d’épaisseurs. Se référer aux annexes pour voir les résultats 127
5.3 Modes et bandes fréquentielles optimisés pour la structure triple avec la méthode d’optimisation des Super-Éléments Mixtes (section 5.5.1) et 3 sous-structures. Se référer aux annexes pour voir les résultats . . . 128

Introduction

L'objet général de la thèse est de mettre en place des méthodes d'optimisation multi-objectifs de structures "plaque" soumises à des chargements dynamiques, sous critère(s) de contrainte(s), et paramètres d'épaisseur.
Les structures fines de type "plaque", coque et composite sont caractérisées par des propriétés mécaniques intéressantes pour un encombrement et un poids réduits. En ce sens, elles sont très largement utilisées dans les industries automobiles et aéronautiques, et leur modélisation revêt d'une grande importance. La majeure partie du temps, elle est basée sur des modèles Éléments-Finis discrétisant une formulation dite "primale", c'est-à-dire exprimée en fonction des déplacements. Cette modélisation est très largement utilisée, simple et efficace, mais elle nécessite un calcul supplémentaire pour obtenir les contraintes, critère dimensionnant de toute étude. Bien que rapide, cette particularité peut s'avérer plus importante qu'il n'y paraît si l'on intègre ce type de modèle dans un algorithme d'optimisation itératif où le calcul du champ de contraintes s'effectue un grand nombre de fois. En effet, la majeure partie des méthodes d'optimisation existantes dans la littérature, qu'elles soient "mono-objectif" ou "multi-objectifs", intégrant un critère de rupture en tant que contrainte de l'algorithme ou objectif, nécessite, à juste titre, le calcul du champ de contraintes de la structure pour chaque nouvelle configuration de paramètres. En ce sens, les calculs supplémentaires que nécessite la formulation en déplacements s'avèrent couteux.

D'autres types de formulation de mécanique des milieux continus sont moins utilisés dans la littérature, mais présentent la particularité de discrétiser d'autres champs que ceux des déplacements. Par exemple, le formulation d'Hellinger-Reissner exprime les énergies constitutives du système en fonction des champs de déplacements et de contraintes. Elle est parfois utilisée en statique pour modéliser des structures "plaques épaisses" et résoudre des problèmes de blocage liés à cette théorie. Les modèles Éléments-Finis utilisant cette formulation sont dit "mixtes déplacements-contraintes" (ou "mixte" par souci de concision). Un autre avantage de ces modèles réside donc dans l'accès privilégié aux paramètres des champs de contraintes. Dans ce travail, nous implémentons une ToolBox Matlab qui permet de construire des modèles Éléments-Finis dynamiques mixtes déplacements-contraintes généralisées, à la fois pour des théories de plaques fines et épaisses (chapitre 1). Nous montrons ainsi que le temps de reconstruction du champ de contraintes est plus intéressant que pour un modèle en déplacements pour des résultats équivalents (chapitre 2). Cet aspect est relativement peut abordé dans la littérature, en raison des inconvénients liés à ce type de représentation :

- les matrices qui constituent le système sont plus grandes que pour une formulation primale, donc le calcul de réponse est plus long ;
- elles sont singulières, ce qui implique des difficultés dans l'analyse modale de la structure ;
- les temps d'assemblage, si nécessaire, sont également plus longs.

Beaucoup de chercheurs considèrent que ces problèmes éclipsent complètement les avantages liés aux accès contraintes. Cependant, peu de pistes ont été étudiées pour contourner ou déjouer ces inconvénients. En ce sens, le deuxième grand thème de ce travail est l'utilisation de méthodes de sous-structuration et de synthèse modale, de façon à réduire la taille de nos modèles mixtes. Ce type de méthode, très utilisé en théorie primale, est basé sur une division de la structure globale en plusieurs sous-structures plus petites. Il s'agit de représenter chaque sous-structure par une famille de modes propres bien choisis. Les sous-structures réduites sont ensuite assemblées par leur jonction, et forment la structure globale réduite. Ces méthodes ont prouvé une grande efficacité dans la représentation, surtout basses fréquences, du comportement dynamique. Néanmoins, elles sont difficilement applicables à un modèle mixte, puisqu'elles nécessitent un calcul modal rendu impossible par la singularité des matrices. En ce sens, l'objet de ce deuxième thème est d'adapter ces méthodes aux spécificités du modèle Éléments-Finis mixte. L'idée que nous développons est de construire, pour chaque sous-structure, une base réduite mixte à partir du modèle primal équivalent (avec les mêmes degrés de libertés), en séparant la projection des déplacements et des contraintes. Les déplacements sont ainsi réduit sur une base primale classique, et les contraintes sur une projection d'une base primale classique. On construit ainsi une base réduite pour nos modèles mixtes, à partir des modes du modèle primal, évitant ainsi les calcul modaux sur le modèle mixte. La mise en place de ces méthodes est décrite dans le chapitre 3. Certaines de ces méthodes s'avèrent particulièrement efficaces pour réduire drastiquement la taille des matrices des structures globales tout en conservant une bonne représentation modale basse fréquence (chapitre 4). Dès lors, les modèles mixtes réduits peuvent conserver un accès rapide aux contraintes, avec des modèles minimalistes qui n'ont pas nécessité de calcul modaux de la structure mixte. Subsiste malgré tout un inconvénient important : l'assemblage des matrices mixtes initiales, auquel il faut ajouter celui des matrices primales équivalentes nécessaires à la construction de la base de réduction.

C'est ici que l'implémentation de la théorie des plaques va prendre tout son sens. En effet, cette dernière offre la possibilité de construire des modèles mixtes et des méthodes de réduction adaptées, qui soient paramétrées en épaisseur. Pour un maillage donné, les matrices de masse et de raideur de la structure peuvent être assemblées, libres de tout paramètre d'épaisseur. Il en va de même pour les méthodes de synthèse modale qui, sous-certaines conditions, restent inchangées vis-à-vis de l'épaisseur considérée. Ces caractéristiques permettent ainsi de supprimer une étape coûteuse de remaillage suite à une modification de paramètre, et éliminent de ce fait le dernier inconvénient de nos modèles à deux champs. On peut donc implémenter des

méthodes d'optimisation itératives de structures "plaque" qui utilisent pour chaque sous-structure d'épaisseur donnée, des Super-Éléments mixtes réduits dont l'épaisseur est facilement modifiable sans re-maillage et qui donne un accès très rapide aux contraintes (chapitre 5). Cette modélisation peut être intégrée dans n'importe quel type d'algorithme d'optimisation itératif, dans la mesure où le calcul de la contrainte est nécessaire, et les paramètres de l'optimisation sont des épaisseurs.

La plupart des optimisations structurelles multi-objectifs sont conduites avec des méthodes de gradient. Elles sont très répandues et efficaces, mais nécessitent la construction d'une seule fonction objectif qui intègre nos différents objectifs en les pondérant. De plus, elles aboutissent à une seule et unique solution qui dépend fortement des choix initiaux de l'utilisateur : on parle d'optimisation locale, ou de minimum local. D'autres méthodes multi-objectifs telles que les algorithmes évolutifs (ou évolutionnaires), basées sur l'évolution des espèces, ne privilégient pas un objectif par rapport à un autre, et donnent plusieurs compromis à l'utilisateur. Elles permettent d'explorer tout l'espace de conception : on parle ici d'optimisation globale. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi un algorithme génétique (NSGA-II [SD94, DAPM00, DPAM02]). Nous considérons plusieurs cas de structures académiques soumises à des chargements harmoniques pour illustrer nos méthodes. Nos objectifs à minimiser sont la masse et la contrainte maximale de Von Mises, tandis que nos paramètres sont les épaisseurs de chacune des zones préalablement choisies par l'utilisateur. Pour présenter nos solutions, nous utilisons la représentation sous forme de front de Pareto, qui permet de donner un ensemble de solutions qui sont autant de compromis vis-à-vis des critères considérés. Cette représentation est très répandue dans des cas multi-objectifs, mais assez rarement utilisée avec la contrainte en temps que critère à minimiser. Nous constatons au chapitre 5 qu'elle permet de cette façon, de donner une bonne vue d'ensemble du comportement de la structure vis-à-vis des changements de paramètres, et offre, a posteriori, une réflexion sur les choix à effectuer.

Ce travail se structure en 5 chapitres.

Dans le chapitre 1, nous présentons les modèles Éléments-Finis mixtes pour problèmes dynamiques de plaques fines de Kirchhoff-Love, et épaisses de Reissner-Mindlin. Nous décrivons également la mis en place des modèles primaux équivalents.

Le chapitre 2 est dédié à l'étude de convergence modale de ce type de modèle, à l'aide de critères de MAC et MAC-like, et d'erreurs relatives en réponse et en fréquences propres. Nous décrivons également les principaux avantages et inconvénients.

Le chapitre 4 dévoile les nouvelles méthodes de double synthèse modale et sous-structuration développées spécifiquement pour des modèles Éléments-Finis mixtes déplacements-contraintes. Nous présentons d'une part les méthodes primales existantes puis nous les intégrons dans un processus de réduction mixte.

Une étude de convergence modale de nos méthodes de réduction est ensuite développée dans le chapitre 3. Nous utilisons dans ce cadre une structure Éléments-

Finis divisée en deux sous-structures, et nous étudions d'une part l'influence de la troncature des modes propres des sous-structures, et d'autre part l'influence d'une troncature de la jonction entre celles-ci.

Enfin, le chapitre 5 met en place les modèles paramétrés nécessaire à l'optimisation, décrit les méthodes implémentées et présentent quelques résultats significatifs. On note qu'il est plus conséquent que les chapitres précédents, mais il nous a paru plus logique de ne pas le scinder, afin de préserver l'unité de lecture.

Afin de faciliter la lecture, tous les développements et résultats ne figurent pas dans les 5 chapitres. Nous avons consigné l'ensemble de ces développements dans 5 annexes.

L'annexe A présente le développement variationnel de la formulation primale d'Hellinger-Reissner qui vérifie les équations de la mécanique des milieux continus linéaire.

L'annexe B donne le développement précis des matrices de masse et raideur des Super-Éléments mixtes.

Enfin, les annexes C, D et E donnent une large palette de résultats sous forme de front de Pareto, des optimisations respectivement des structures "simples", "doubles" et "triples" décrites dans le chapitre 5, pour différents cas d'excitation localisées sur un mode ou sur une bande fréquentielle. Le chapitre 5 se réfère régulièrement à ces 3 annexes pour donner plus d'exemples au lecteur assidu.

Chapitre 1

Formulation mixte déplacements-contraintes en dynamique des structures pour des problèmes de type “plaque”

Dans ce chapitre, nous utilisons la convention de sommation d'Einstein pour manipuler des équations avec coordonnées. Le système de coordonnées cartésiennes nous amène à utiliser les indices i correspondant aux axes x, y et z. Les exemples suivant illustrent le sens de cette convention dans notre cas :

$$\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{e}_{ij} \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{S}_{ijkl} \boldsymbol{\sigma}_{kl} =$$

$$\begin{Bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} & Q_x & Q_y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx\,xx} & S_{xx\,yy} & S_{xx\,xy} & S_{xx\,xz} & S_{xx\,yz} \\ S_{yy\,xx} & S_{yy\,yy} & S_{yy\,xy} & S_{yy\,xz} & S_{yy\,yz} \\ S_{xy\,xx} & S_{xy\,yy} & S_{xy\,xy} & S_{xy\,xz} & S_{xy\,yz} \\ S_{xz\,xx} & S_{xz\,yy} & S_{xz\,xy} & S_{xz\,xz} & S_{xz\,yz} \\ S_{yz\,xx} & S_{yz\,yy} & S_{yz\,xy} & S_{yz\,xz} & S_{yz\,yz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

1.1 Introduction

1.1.1 Historique des formulations multi-champs

Le choix d'une formulation de mécanique des milieux continus est primordial dès lors que l'on veut mettre en place un Modèle Éléments-Finis (MEF ou “*Finite Element Model*” (FEM)) pour étudier et prévoir le comportement d'une structure sou-

mise à son environnement extérieur. D'une manière générale, si l'on exclue les formulations hybrides qui utilisent des paramètres "non-physiques", on considère 3 champs principaux que l'on peut discrétiser et considérer comme champs "maîtres" : les déplacements $\boldsymbol{u}_i$, les déformations $\boldsymbol{e}_{ij}$ et les contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$. On distingue 7 différentes possibilités de formulations dans la mécanique linéaire des milieux continus, en fonction du nombre et du type de champs utilisés (voir le tableau 1.1). Les formulations (1), (2), (4), (5) et (7) sont toutes utilisées, à leur manière. Cependant, les formulation primales (1) et mixtes d'Hellinger-Reissner (4) sont de loin les plus largement employées. Les formulations (3) et (4) sont seulement des curiosités mathématiques.

	Nombre de champs	Type de champs	Nom
1	1	Déplacements	Formulation primale ou Energie Potentielle Totale
2	1	Contraintes	Formulation duale ou Energie Potentielle Complémentaire Totale
3	1	Déformations	Pas de nom
4	Mixte 2	Déplacements Contraintes	Formulation mixte d'Hellinger-Reissner
5	Mixte 2	Déplacements Déformations	Pas de nom officiel
6	Mixte 2	Déplacements Déformations	Pas de nom
7	Mixte 3	Déplacements Déformations Contraintes	Formulation de Veubeke-Hu-Washizu (VHW)

TABLE 1.1: Les fonctionnelles de la mécanique linéaire des milieux continus

La plupart des MEF utilisés dans l'industrie pour des problèmes de mécanique des structures sont basés sur une formulation dynamique en déplacements, aussi appelée Principe des Déplacements Virtuels (PDV) ou Energie Potentielle Totale (EPT). Cette approche dite "primale" dans les MEF, a été largement développée dans les années 60 [ZC67, CT65, Arg65]. Elle est rapide et efficace, mais nécessite des calculs et intégrations supplémentaires de façon à obtenir les champs de déformations et de contraintes, et peut aussi conduire à des difficultés de calcul dans le cas des théories des plaques et coques. Imaginer d'autres solutions numériques permettant d'accéder aux contraintes de façon directe et donnant une meilleure représentation des structures fines a toujours présenté un intérêt particulier en ingénierie mécanique. Une approche "en force", dite "duale", basée sur le calcul direct des contraintes, a été imaginée en premier lieu en Éléments-Finis (EF) par Fraejis de Veubeke [FdV65, FdVS68] puis par Pian et Tong [PT72, TP69].

Une autre méthode, appelée “formulation mixte” ou “Formulation Variationnelle Mixte de Reissner” (FVMR) ou “*Reissner Mixed Variationnal Theorem*” (RMVT), est basée sur la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner (HR) et définit ce que l'on peut considérer comme un Lagrangien mixte intégrant à la fois des paramètres de déplacements et de contraintes dans la même fonctionnelle (contrairement aux formulations primales dans lesquelles les termes dérivent des déplacements uniquement). Cette méthode a été initialement pensées par Hellinger [Hel14] et Prange [Pra16], et par la suite par Reissner [Rei50, Rei84, Rei86] et Arnold [AF88, ABD84], qui lui ont donné sa forme la plus répandue actuellement. Une large bibliographie des principes variationnels et des différentes formulations existantes est disponible dans le livre de Washizu [Was75]. Durant les quarante dernières années, plusieurs MEF mixtes ont été implémentés. Initialement, Herrmann [Her65, Her67] a mis en place l'un des premiers MEF mixtes plaque utilisant la FVMR et prenant en comptant les effets de cisaillements (“*First-order Shear Deformation Theory*” (FSDT)), rapidement suivi par d'autres chercheurs [BD72, CS72]. Beaucoup de MEF ont été imaginés ces dernières décennies pour différents types de théories de solides, tels que des problèmes de solides 3D [PCK83], d'arcs élastiques [GL76], de poutres de Timoshenko [SB86a, SB86b] (prenant en compte le cisaillement) et plus particulièrement pour des structures “plaque” [SB86a, SB86b, DMID99, dMU06, SC87]. Le livre de Wriggers [WC09] fournit un large éventail d'applications de MEF mixtes. La stabilité [Bab73, Bre74] et la convergence [AW03] en fonction de l'espace choisi pour les champs discrétisés dans les MEF mixtes ont également été abordées.

1.1.2 Intérêts et utilisations

Les modèles implémentés avec la FVMR présentent d'une manière générale, deux avantages principaux : ils permettent d'une part d'avoir un accès privilégié aux champs de contraintes, et d'autre part ils permettent une meilleure représentation de certaines théories 2D comme les plaques et coques.

Accès aux contraintes

En ce qui concerne l'accès aux contraintes, plusieurs types de recherches on été menées de façon à obtenir efficacement les champs de déformations et contraintes, à partir d'une formulation en déplacements. La méthode classique, utilisée par la plupart des logiciels de l'industrie, est la méthode des Points de Gauss, qui approxime l'intégrale d'une fonction par une somme pondérée des valeurs spécifiques de cette même fonction en certains points au sein de l'élément. D'autres méthodes de récupération des déformations et contraintes, appelées “*Strain & Stress recovery*” dans la littérature, ont été récemment développées par Tornabene et Fantuzzi dans le domaine des structures fines composites et matériaux stratifiés [FT14a, FT14b, FTVF14, TFVB15]. Ils ont mis en place une formulation EF forte (“*Strong Finite*

Element Model" (SFEM)) qui utilise la formulation forte du système d'équations différentielles au niveau de l'élément. Ces méthodes associent la généralité des MEF connus à la précision des Méthodes Spectrales (MS ou "*Spectral Methods*" (SM)). Leur méthode est basée sur l'utilisation de la "*Generalized Differantial Quadrature*" (GDQ) qui approxime des dérivées de fonctions de contraintes et/ou déplacements en un point par des sommes pondérées de valeurs spécifiques de ces fonctions le long du maillage de façon analogue à la méthode des Point de Gauss. La clé des méthodes de ce type est la détermination des coefficients de pondération. Cependant, comparées à des méthodes EF classiques, elles nécessitent peu de ressources de calculs et donnent une précision de résultats relativement bonne pour des maillages grossiers. Une fois que les conditions de continuité en déplacements et contraintes sont assurées, et que le SFEM est construit [FT14a], la récupération des déformations/contraintes peut se faire à l'aide de la méthode GDQ [FT14b]. Cette méthode donne une bonne représentation des contraintes dans le plan et hors plan, à la fois pour des analyses statiques [FT14a, FT14b, FTVF14, TFVB15] et dynamiques [FTVF14]. Par ailleurs, des comparaisons entre les méthodes d'approximations tels que la "*Radial Basis Function*" (RBF) et la GDQ ont aussi été étudiées par ces mêmes auteurs [FTVF14], de même que la récupération des déformations/contraintes pour des "*Functionnaly Graded Materials*" (FGMs) et des structures "coque multi-couches", à l'aide de la formulation Carrera ("*Carrera Unified Formulation*" (CUF)) et de la théorie du cisaillement à l'ordre élevé ("*High-order Shear Deformation Theory*" (HSDT)) [TFVB15]. Une autre façon d'accéder aux déformations/contraintes est de formuler le problème initial de façon mixte, en fonction à la fois des déplacements et des contraintes internes à la structure, à l'aide de la FVMR.

Domaines d'application et intérêt

L'utilisation des théories mixtes a été popularisée dans le contexte des analyses de structures "plaque" et "coque", dès lors que des descriptions tri-dimensionnelles sont obtenues avec des modèles bi-dimensionnels, du fait des avantages calculatoires de ces théories. Les structures "plaque" ont une multitude d'applications dans l'industrie, et ont attiré l'attention de beaucoup de chercheurs. La théorie des plaques fines de Kirchhoff-Love (KL), initialement développée par Love [Lov88], est facilement implémentable et prend en considération les moments de flexion et torsion, mais ne considère pas les phénomènes de cisaillement qui s'avèrent essentiels dans le cas des plaques modérément épaisses et épaisses. Ainsi, la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin (RM) est naturellement apparue [Rei45, Min51]. Bien que répandue, cette théorie souffre de problèmes de blocage ("*shear-locking problems*" qui se traduisent par une raideur trop importante pour des maillages grossiers) et sa représentation peut être difficile. De façon à éviter ces problèmes, de nombreuses solutions ont été imaginées au fil des ans, tels que les schémas d'intégrations réduites ("reduced integration scheme" [HCH78]), les méthodes d'interpolations de déformations ("*strains interpolation methods*" [BD85, BD86, LR86]), les approxi-

mations d'ordre élevé en déplacements ("*high order polynomial approximation for displacement*" [SB83]), les méthodes dites de "*Discrete Shear Gap*" (DSG) [BBR00, KBCB05] et les méthodes EF dites "*edge-based/node-based smoothed FEM*" [WLL$^+$14, NXLTHNT10]. D'autres méthodes de type "mixte" utilisant la FVMR ont montré des résultats probant dans ce domaine, avec des MEF de type hybride/mixte [SC87, dMU06], adaptatifs hybride/mixte [DMID99], mixtes avec méthode de décomposition de modes [SB86a, SB86b] ou encore mixtes à 3 champs [ADB98]. De part cet avantage, l'utilisation de théorie mixtes en EF justifie son utilisation répandue, en plus de l'accès privilégié aux champs de contraintes mentionné précédemment.

Les modèles mixtes sont également beaucoup utilisés dans le domaine des structures multi-couches et piézo-électriques multi-couches, en raison de l'emploi grandissant de composites dans les structures fines et épaisses. Sur ce terrain des matériaux hétérogènes, l'évaluation des contraintes normales et de cisaillement est cruciale. Certaines méthodes consistent à considérer le matériau multi-couches par une seule et unique plaque ("*Equivalent Single Layer models*" (ESL)) en utilisant une approche en déplacements. Elles présentent l'avantage d'un nombre d'inconnues indépendant du nombre de couches, mais ne satisfont pas les conditions de continuité requises, et le post-traitement nécessaire peut présenter des résultats imprécis dans le cas de plaques épaisses. De plus, le développement du cisaillement à ordre élevé "HSDT" [LCW77], développé par Cho et Parmerter [CP93], dans le cas des modèles ESL, bien que satisfaisant les conditions de continuité, connaît des difficultés dès lors que les contraintes hors-plan jouent un rôle important. Un autre modèle appelé "*LayerWise Model*" (LWM) considère chaque couches comme des plaques distinctes [Sri73, Red87]. Bien que les résultats se révèlent être meilleurs, les conditions de continuité inter-couches ne sont pas parfaitement satisfaites, et ce genre de modèle demande un grand nombre de Degrés De Liberté (DDL). Dans ce contexte, les modèles mixtes peuvent permettre de satisfaire a priori les conditions de continuité C_z^0 inter-couches et donnent une bonne description des contraintes transverses. Ainsi, une théorie mixte appelée "*mixed layerwise theory*", déterminant à la fois les déformations/contraintes dans le plan et hors plan de ces structures orthotropes a été implémentée par Carrera. Des analyses statiques sont disponibles [Car98, CD02a, CD02b], thermo-statiques [Car00], ainsi qu'une large bibliographie [Car01] des modèles ESL et LWM en modèles mixtes et primaux. Des développements EF sont également disponibles [CD02a, CD02b]. La comparaison des modèles en déplacements utilisant le PDV et des modèles mixtes basés sur la FVMR [Car98, Car01, CD02a, CD02b] donne un avantage certain aux formulations mixtes en terme de continuité inter-couches en déplacements et contraintes, ainsi qu'en terme de description des contraintes hors-plan.

En ce qui concerne les matériaux piézo-électriques, les formulations mixtes ont aussi prouvé leur efficacité. Bien que des modèles en déplacements soient utilisés [Ben00], et satisfassent parfois les continuités inter-couches [Car97], l'utilisation de la "*mixed layerwise theory*" (MLT) pour des structures piézo-électriques adaptatives a montré un grand intérêt en statique, analyse modale [GLMSMSR04a, GLMSMSR04b], et analyses thermo-dynamique [BA05]. Carrera et Boscolo [CB07] ont également montré des extensions des théories de Carrera sur les matériaux multi-couches précédemment

citées [CD02a, CD02b] pour des MEF mixtes et primaux pour structures piézo-électriques (théories ESL et LWM). Ces articles mettent également en avant les intérêts des modèles mixtes en mécanique des structures et analyses EF.

D'une manière générale, la plupart des méthodes citées précédemment sont utilisées en statique, mais assez rarement en dynamique [OK98]. La plupart du temps, lorsqu'elles sont formulées en dynamique, le problème est condensé sur les paramètres de déplacements : le principe est d'utiliser le lien constitutif entre les déplacements et les contraintes tirés du modèle mixte et de construire une matrice "équivalente" qui reprend les informations du modèle mixte complet, mais qui ne joue que sur les paramètres de déplacements. Cette méthode [OK98], décrite dans la section 2.5.2, fonctionne mais perd l'intérêt du modèle mixte, puisqu'elle nécessite, après obtention de la réponse en déplacements, un post-traitement pour obtenir les contraintes. De plus, elle ne résout pas le problème de calcul modale et diagonalisation qui est propre aux modèles mixtes (également décrit dans la section 2.5.2). Ces raisons nous ont amené à préférer la forme originale des approches EF mixtes tout au long de ce manuscrit, tout en imaginant des façons de compenser les inconvénients qui lui sont liés avec des méthodes de réductions décrites dans le chapitre 3.

1.1.3 Choix d'orientations

Dans notre cas d'étude, l'utilisation d'une formulation continue mixte présente principalement l'intérêt d'un accès privilégié aux champs de contraintes généralisées des structures fines que nous proposons d'étudier. Ainsi, le choix a été fait d'utiliser la formulation continue à 2 champs d'Hellinger-Reissner en dynamique (section 1.2), et de construire un MEF mixte "déplacements/contraintes généralisées" simple, pour les théories de plaques fines de KL (section 1.3) et de plaques épaisses de RM (section 1.4) prenant en compte les effets du cisaillement. Notre modèle répond aux conditions basiques de continuités aux nœuds en déplacements, et permet, comme nous l'expliquons dans le chapitre 2 d'obtenir une bonne convergence et un gain de temps en calcul de contraintes d'une structure globale. Les méthodes de réduction et d'optimisation développées dans les chapitres 3 et 5 pour ces deux modèles sont néanmoins applicables de façon générale à n'importe quel MEF mixte "déplacements/contraintes". Cependant, par souci de simplicité et de lisibilité, nous avons fait le choix de présenter et utiliser un modèle mixte qui n'a pas la prétention de résoudre des problèmes de blocage des plaques épaisses ou de continuité parfaites des tous les champs sur les nœuds et les bords.
De cette manière, nous avons mis en place un code MATLAB permettant, à partir d'un maillage plaques triangles et rectangles quelconque, d'assembler puis manipuler des structures EF mixtes de toutes tailles de maillage, pour les deux théories de plaques évoquées et différents types d'éléments. Les sections suivantes décrivent le processus de construction de MEF.
L'annexe A donne le développement variationnel qui permet de vérifier la validité de la formulation d'Hellinger-Reissner vis-à-vis des équations de la mécanique des milieux continus élastiques linéaires, en passant de la formulation faible à la formulation

forte par l'intermédiaire des dérivées directionnelles.

1.2 Formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner

La formulation continue mixte d'Hellinger-Reissner (HR) [Hel14, Rei50, Rei84, Rei86], exprimée pour des problèmes élastiques linéaires de dynamique des structures peut être considérée comme un Lagrangien classiquement utilisé en dynamique mais calculé avec des composantes mixtes. En pratique, cela veut dire que les énergies potentielles et cinétiques sont exprimées en fonction des champs de déplacements et de contraintes de la structure, dans la mesure du possible. Ainsi, la fonctionnelle de HR exprimée en dynamique est exprimée comme suit :

$$\Pi_{HRD} = \iiint_V -\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}(\boldsymbol{u}_i) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl} + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}_i^2 \,\mathrm{dV} \tag{1.4}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ le tenseur des champs de contraintes, $\boldsymbol{u}_i$ le vecteur des déplacements, $\boldsymbol{e}_{ij}(\boldsymbol{u}_i)$ le tenseur des champs de déformations, fonction des déplacements $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{b}_i$ les forces extérieures, ρ la masse volumique et $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ la matrice de souplesse élastique. Les équations d'Euler-Lagrange peuvent ainsi être appliquées de façon à résoudre, de façon conventionnelle, un problème de dynamique des structures. Cette fonctionnelle est composée de 3 principaux termes :

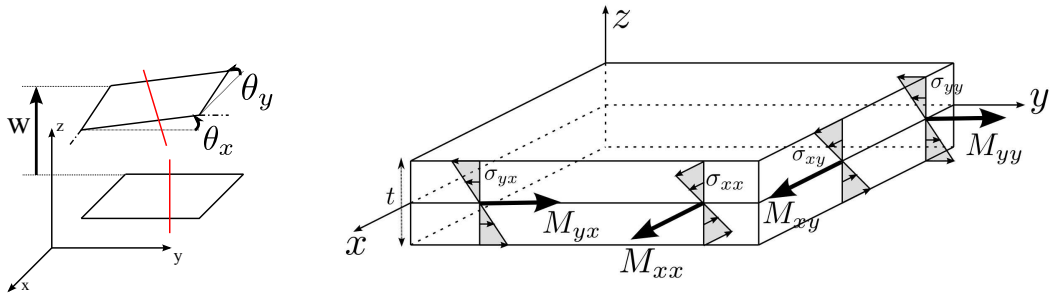
- l'énergie de déformation mixte : $\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl}$;
- le travail des forces extérieures : $\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{u}_i$;
- l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}_i^2$.

1.3 Éléments-finis mixtes déplacements-contraintes pour plaques de Kirchhoff-Love

Dans toute cette partie, on considère que l'élément que l'on traite est dans le plan (x, y) et l'épaisseur de l'élément dans la direction z.

1.3.1 Définition de la théorie de plaque

La théorie de Kirchhoff-Love (KL) est une théorie dite de "plaques fines", ou "plaques minces" [Red07], c'est-à-dire dont le rapport de la taille caractéristique R de la structure sur l'épaisseur t vérifie : $\frac{R}{t} \geqslant 10$. Elle prend en compte les phénomènes de flexion et torsion, mais considère l'influence du cisaillement comme négligeable, au contraire de la théorie de Reissner-Mindlin (RM, voir la section 1.4). Cette hypothèse dérive directement du fait que les déplacements $\boldsymbol{u_i}$ du plan moyen sont définis de la



(a) (b)

FIGURE 1.1: Théorie de Kirchhoff-Love : (a) Déplacements, (b) Contraintes généralisées : moments de flexions $(M_x, M_y)^T$ et moment de torsion M_{xy}

façon suivante (voir figure 1.1(a)) :

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

avec w le déplacement transverse, θ_x et θ_y les rotations de section autour des axes x et y. La dépendance des rotations de sections en fonction du déplacement transverse est la raison de la non-présence de cisaillement dans la théorie de KL.
Les déformations $\boldsymbol{e}_{ij}$ sont données par :

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}_i \tag{1.6}$$

avec $\boldsymbol{D}$ l'opérateur déplacements/déformations :

$$\boldsymbol{D} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

Les contraintes généralisées (voir figure 1.1(b)) sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

avec $\{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ représentant les 2 moments de flexion M_x et M_y et le moment de torsion M_{xy}.
La matrice de souplesse qui lie les déformations et les contraintes est donnée par :

$$\boldsymbol{S}_{ijkl} = \begin{Bmatrix} \frac{12}{Et^3} & -\frac{12\nu}{Et^3} & 0 \\ -\frac{12\nu}{Et^3} & \frac{12}{Et^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{Et^3} \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

avec E le module de Young, t l'épaisseur de l'élément considéré et ν le coefficient de Poisson. Cette matrice de souplesse définie la relation constitutive suivante :

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{ij} \tag{1.10}$$

1.3.2 Interpolation des déplacements

Les caractéristiques de la théorie de KL nous laissent le choix entre l'utilisation d'éléments triangles et quadrangles. Dans le cas d'un élément triangle à 3 nœuds, les conditions qui lient les champs de déplacements entre eux (voir l'équation 1.5) nous donnent 9 conditions/équations qui caractérisent chaque fonction de forme. Dans le cas d'un quadrangle à 4 nœuds, 12 conditions définissent chacune des fonctions de forme. Les rotations de section étant des dérivées spatiales du déplacement transverse, les conditions de continuités en déplacements sont dites "C^1" (continuité du déplacement transverse et de ses dérivées spatiales). Dans notre cas, l'option à 3 nœuds a été privilégiée par souci de simplicité. Nous interpolons ainsi w, θ_x et θ_y, en terme de déplacements nodaux $\{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}$ (i = 1,2,3) pour un élément triangle, de la façon suivante :

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) w_i \tag{1.11}$$

$$\theta_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i(x,y)}{\partial y} \theta_{x_i} \tag{1.12}$$

$$\theta_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} -\frac{\partial N_i(x,y)}{\partial x} \theta_{y_i} \tag{1.13}$$

où les $N_i(x,y)$ sont des polynomes à définir. De façon matricielle, nous avons ainsi :

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{NU} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & ... & N_9 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & ... & \frac{\partial N_9}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & ... & -\frac{\partial N_9}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ... \\ U_9 \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

Le choix d'éléments triangle à 3 nœuds impliquant 9 conditions sur chaque polynome. Ils sont ainsi au minimum de degré 3, comme suit :

$$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy + e_i x^2 + f_i y^2 + g_i x^3 + h_i y^3 + i_i(xy^2 + x^2 y) \tag{1.15}$$

1.3.3 Interpolation des contraintes

Nous supposons ici que les contraintes généralisées sont interpolées par des fonctions linéaires dans les deux directions x et y du plan. Contrairement aux discrétisations effectuées sur les paramètres de déplacements, nos choix d'interpolation ne

satisfont pas les conditions de continuité en contraintes. Chaque champ de contraintes est défini par 3 paramètres β_i dans chaque élément, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{P\beta} \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \begin{Bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_9 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Les choix effectués nous amènent à avoir des matrices élémentaires constituées de 9 paramètres de déplacements et 9 paramètres de contraintes, soit 18 paramètres au total.

1.3.4 Formulation matricielle

La formulation continue mixte d'Hellinger-Reissner présentée dans l'équation 1.4 peut être discrétisée grâce aux équations 1.14 et 1.16 :

$$\begin{aligned} \Pi_{RD} = \iint_S \frac{1}{2}(\boldsymbol{N\dot{U}})^T \boldsymbol{m}(\boldsymbol{N\dot{U}}) \; - \; (\boldsymbol{P\beta})^T(\boldsymbol{DNU}) \; + \; \frac{1}{2}(\boldsymbol{P\beta})^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P\beta})\,\mathrm{dS} \\ + \iint_V b_i \boldsymbol{U}\mathrm{dS} \end{aligned} \tag{1.17}$$

avec

$$\boldsymbol{m} \; = \; \rho \begin{Bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \end{Bmatrix} \tag{1.18}$$

et ρ la masse volumique du matériau. Le développement matriciel nous donne :

$$\Pi_{RD} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{M\dot{U}} \; - \; \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{GU} \; - \; \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{H\beta} \; + \; \boldsymbol{F}^T \mathbf{U} \tag{1.19}$$

avec :

$$\boldsymbol{M} = \iint_S \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{m} \boldsymbol{N}\mathrm{dS} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{G} = \iint_S \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{N}\mathrm{dS} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{H} = \iint_S -\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{P}\mathrm{dS} \tag{1.22}$$

et $\boldsymbol{F}$ le vecteur des forces extérieures appliquées aux nœuds du maillage. L'application des équations d'Euler-Lagrange nous donne le développement matriciel suivant pour

l'équilibre d'un élément :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{M}_{mix}} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^T \\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{K}_{mix}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{1.23}$$

1.3.5 Assemblage

On considère deux éléments (1) et (2) dont les degrés de libertés s'écrivent respectivement $\left\{\boldsymbol{U}_i^{(1)} \quad \boldsymbol{U}_j^{(1)} \quad \boldsymbol{\beta}^{(1)}\right\}^T$ et $\left\{\boldsymbol{U}_i^{(2)} \quad \boldsymbol{U}_j^{(2)} \quad \boldsymbol{\beta}^{(2)}\right\}^T$, avec $\boldsymbol{U}_i$ les paramètres de déplacements propres aux éléments, $\boldsymbol{U}_j$ les paramètres de déplacements communs aux deux éléments et $\boldsymbol{\beta}$ les paramètres de contraintes.
De la même façon que pour un MEF primal, l'assemblage des deux éléments (1) et (2) se fait explicitement en déplacements de la façon suivante :

$$\boldsymbol{U}_j^{(1)} = \boldsymbol{U}_j^{(2)} \tag{1.24}$$

L'assemblage en contraintes de ces deux éléments se fait implicitement par le biais de l'assemblage en déplacements, les paramètres de contraintes n'ayant pas, dans notre cas, un sens proprement physique correspondant à des valeurs nodales.

1.3.6 Modèle Éléments-Finis primal équivalent

Il convient ici de préciser la façon d'obtenir un MEF primal "équivalent" au MEF mixte décrit. D'une part, pour pouvoir comparer deux modèles avec les mêmes caractéristiques de théorie/maillage/discrétisation des déplacements, et vérifier la convergence de l'un par rapport à l'autre (voir chapitre 2), et d'autre part, parce que les méthodes de réduction implémentées se servent directement des résultats du MEF primal équivalent (voir section 3).

La formulation utilisée pour un modèle primal est celle du PDV. En découle directement le Lagrangien suivant, classiquement utilisé dans les MEF primaux pour mileux élastiques homogènes :

$$\Pi_{HRD} = \iiint_V -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{e}_{ij}(\boldsymbol{u}_i) + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}_i^2 \,\mathrm{dV} \tag{1.25}$$

Le terme d'énergie de déformation de la formulation d'Hellinger-Reissner 1.4 a été remplacé par : $-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{e}_{ij}(\boldsymbol{u}_i)$.

La définition de la théorie reste la même que pour le modèle mixte 1.3.1, à l'exception de l'apparition de la matrice de rigidité $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ (qui donne les contraintes en fonction des déformations), inverse de la matrice de souplesse $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ qu'elle remplace

(qui donnait les déformations à partir des contraintes). Elle est définie par :

$$\boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{S}^{-1}_{ijkl} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} & \frac{\nu t^3}{12} & 0 \\ \frac{\nu t^3}{12} & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\frac{t^3}{12} \end{Bmatrix} \tag{1.26}$$

Cette matrice de rigidité définie la relation constitutive suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{S}_{ijkl}\, \boldsymbol{e}_{ij} \tag{1.27}$$

L'interpolation des déplacements donnée dans la section 1.3.3 par l'équation 1.14 reste identique. En appliquant les équations de Lagrange de la même façon que dans la section précédent 1.3.4, on obtient le système matriciel classique suivant :

$$\boldsymbol{M}_{pri}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}_{pri}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{1.28}$$

avec :

$$\boldsymbol{M}_{pri} = \iint_S \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{m} \boldsymbol{N} \mathrm{dS} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{K}_{pri} = \iint_S (\boldsymbol{DN})^T \boldsymbol{C} (\boldsymbol{DN}) \mathrm{dS} \tag{1.30}$$

Il est important de noter que la matrice $\boldsymbol{M}_{pri}$ (équation 1.29) est exactement la même que la matrice $\boldsymbol{M}$ (équation 1.20) qui constitue la matrice $\boldsymbol{M}_{mix}$ (équation 1.23), à maillage et assemblage équivalent. De la même façon, les paramètres U du MEF mixte (équation 1.23) sont les mêmes que les paramètres U du MEF primal (équation 1.28). Cette dernière caractéristique va s'avérer cruciale dès lors que les informations du modèle primal nous serviront à réduire le modèle mixte (chapitre 3). L'assemblage des éléments se fait de la même façon que pour le modèle mixte (voir section 1.3.5), explicitement en déplacements.

1.4 Éléments-finis mixtes déplacements-contraintes pour plaques de Reissner-Mindlin

De la même façon que pour la section précédente, dans toute cette partie, on considère que l'élément que l'on traite est dans le plan (x, y) et l'épaisseur de l'élément dans la direction z.

1.4.1 Définition de la théorie de plaque

La théorie des plaques de Reissner-Mindlin [Min51] (RM) est dite de "plaques épaisses", c'est-à-dire dont le rapport de la taille caractéristique R de la structure sur l'épaisseur t vérifie : $5 \leqslant \frac{R}{t} \leqslant 10$. Elle prend en considération les phénomènes

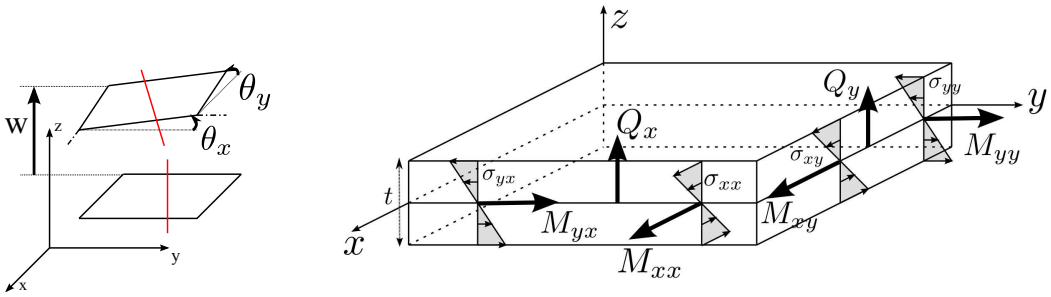


FIGURE 1.2: Théorie de Kirchhoff-Love : (a) Déplacements, (b) Contraintes généralisées : moments de flexions $(M_x, M_y)^T$, moment de torsions M_{xy} et efforts de cisaillements transverses $(Q_x, Q_y)^T$

de cisaillements qui ne sont pas prépondérants dans la théorie des plaques fines de KL (voir section 1.3.1). Cela provient de la différence d'hypothèse sur les champs de déplacements qui sont indépendants les uns des autres (voir figure 1.2(a)) :

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{1.31}$$

avec, de la même façon : w le déplacement transverse, θ_x et θ_y les rotations de section autour des axes x et y. Les rotations n'étant pas des dérivées spatiales du déplacement transverse, les déformations et contraintes hors-plan ne s'annulent pas et ne peuvent être négligées.
Dans ce cas, les déformations sont données par :

$$\boldsymbol{e}_{ij} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}_i \tag{1.32}$$

avec $\boldsymbol{D}$ l'opérateur/tenseur déplacements/déformations suivant :

$$\boldsymbol{D} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{Bmatrix} \tag{1.33}$$

Les contraintes généralisées sont ainsi définies comme suit (voir figure 1.2(b)) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \tag{1.34}$$

avec, une fois de plus, $\{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ qui représente les moments de flexion et de torsion déjà présents dans la théorie de KL (voir section 1.3.1). On note dans le cas plaques épaisses, l'apparition des efforts de cisaillement transverse $\{Q_x, Q_y\}^T$.
La matrice de souplesse élastique qui caractérise l'équation 1.10 dans le cas plaques épaisses est donnée par :

$$\boldsymbol{S}_{ijkl} = \begin{Bmatrix} \frac{12}{Et^3} & -\frac{12\nu}{Et^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12\nu}{Et^3} & \frac{12}{Et^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{Et^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2,4(1+\nu)}{Et} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2,4(1+\nu)}{Et} \end{Bmatrix} \tag{1.35}$$

1.4.2 Interpolation des déplacements

Dans le cas des plaques épaisses de RM, le déplacement transverse et les rotations de section autour des axes x et y ne sont pas liés par une dérivée spatiale (voir équation 1.31). Par conséquent, la continuité des déplacements ne se fait que sur les valeur primaires (et non sur les dérivées spatiales comme dans le cas KL, voir section 1.3.2). La continuité est dite C^0 en déplacement. Nous supposons que les champs w, θ_x et θ_y, pour un élément quadrangle à 4 nœuds, sont interpolés en terme de déplacements nodaux $\{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}$ (i = 1,2,3,4), de la façon suivante :

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x,y) w_i \tag{1.36}$$

$$\theta_x(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x,y) \theta_{x_i} \tag{1.37}$$

$$\theta_y(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i(x,y) \theta_{y_i} \tag{1.38}$$

Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.39}$$

Le choix des fonctions de forme, avec 4 conditions/équations caractéristiques (quadrangle choisis à 4 nœuds) nous mène à des fonctions quadratiques. Il est à noter que l'utilisation de triangles (uniquement 3 nœuds, donc 3 conditions et des fonctions linéaires dans les deux directions) est insuffisante pour observer des phénomènes de cisaillement, d'où le choix des éléments quadrangles. Les fonctions de forme en déplacement pour cette théorie sont définies comme suit :

$$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy \tag{1.40}$$

1.4.3 Interpolation des contraintes

De façon analogue à l'interpolation des contraintes dans la théorie des plaques fines 1.3.3, nous supposons que les champs sont interpolés par des fonctions linéaires dans les deux directions du plan, et qu'il n'y a pas de continuité sur les bords ou les nœuds des quadrangles. Chaque champ de contraintes (5 différents pour cette théorie) est défini par 3 paramètres β dans chaque élément, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{P\beta} \\
\boldsymbol{\sigma}_{ij} &= \begin{Bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_{15} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

En résulte de ce choix des matrices élémentaires de 27 paramètres par quadrangle (12 paramètres de déplacements U et 15 paramètres de contraintes généralisées β).

1.4.4 Formulation matricielle

La formulation continue mixte d'Hellinger-Reissner présentée dans l'équation 1.4 peut être discrétisée grâce aux équations 1.39 et 1.41. Il en résulte un système matriciel à l'équilibre identique à l'équation 1.23 définie dans la section 1.3.4 concernant la théorie de KL, à la différence près que les éléments constitutifs de ces matrices ont été modifiés et agrandis par l'ajout de cisaillement (voir sections 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3).
Les remarques concernant l'assemblage en déplacement sont également valables pour cette théorie de plaques.

1.4.5 Assemblage

De façon analogue à l'assemblage du MEF utilisant la théorie de KL, l'assemblage se fait de façon explicite en déplacements, et implicite en contraintes (voir section 1.3.5).

1.4.6 Modèle Éléments-Finis primal équivalent

De la même façon que dans la section 1.3.6, il convient de définir le modèle primal équivalent au modèle mixte pour la théorie de RM, pour les comparaisons de convergence des deux modèles (cf. chapitre 2) et l'utilisation du modèle primal pour réduire le modèle mixte (cf. chapitre 3).

Le Lagrangien 1.28 reste le même. En revanche, la matrice de rigidité $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ est légèrement modifiée par l'ajout des phénomènes de cisaillements :

$$\boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{S}_{ijkl}^{-1} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} & \frac{\nu t^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu t^3}{12} & \frac{t^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\frac{t^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5(1-\nu)t}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5(1-\nu)t}{12} \end{Bmatrix} \tag{1.42}$$

De façon analogue à la section 1.3.6, l'interpolation des déplacements donnée dans la section 1.4.3 par l'équation 1.39 reste la même. Le système matriciel primal obtenu après application des équations de Lagrange est identique à celui de l'équation 1.28, à la différence près que les éléments constitutifs de la matrice $\boldsymbol{K}_{mix}$ (que sont la matrice des fonctions de forme et la matrice de rigidité), prennent maintenant en compte le cisaillement (voir sections 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.6).

Les remarques de la section 1.3.6 concernant la correspondance des matrices $\boldsymbol{M}_{pri}$ et $\boldsymbol{M}$ sont toujours valables, de même que la correspondance des DDL de déplacements des modèles primaux et mixtes.

1.5 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de présenter le Modèle Éléments-Finis Mixte déplacement/contraintes généralisées que nous avons implémenté sous Matlab pour des problèmes plaques, à partir de la formulation mixte d'Hellinger-Reissner. Ce modèle est un développement sous la forme dynamique de MEF mixtes statiques présents dans la littérature (comme celui de [DMID99]). Nous avons développé cette formulation à la fois pour la théorie de Kirchhoff-Love des plaques fines et la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques modérément épaisses à épaisses. Pour chacun des deux modèles mixtes, nous avons également mis en place un modèle primal équivalent

basé sur un Lagrangien classique et les cacluls d'énergies cinétiques et potentielles.

Dans ce cadre, nous avons mis en place une ToolBox Matlab qui permet de construire les matrices constitutives mixtes d'une structure à partir de n'importe quel maillage complexe d'éléments plaques triangles et quadrangles, et des fonctions qui permettent d'utiliser et stocker les structures EF, de bloquer des nœuds, afficher le maillage et les déformations, et calculer les réponses statiques et dynamiques de nos modèles. Le schéma 1.3 donne le fonctionnement général de la Toolbox de construction du modèle.

Il s'agit maintenant de vérifier la convergence de nos modèles par rapport à des MEF classiques et d'en vérifier les caractéristiques principales, avantages et inconvénients.

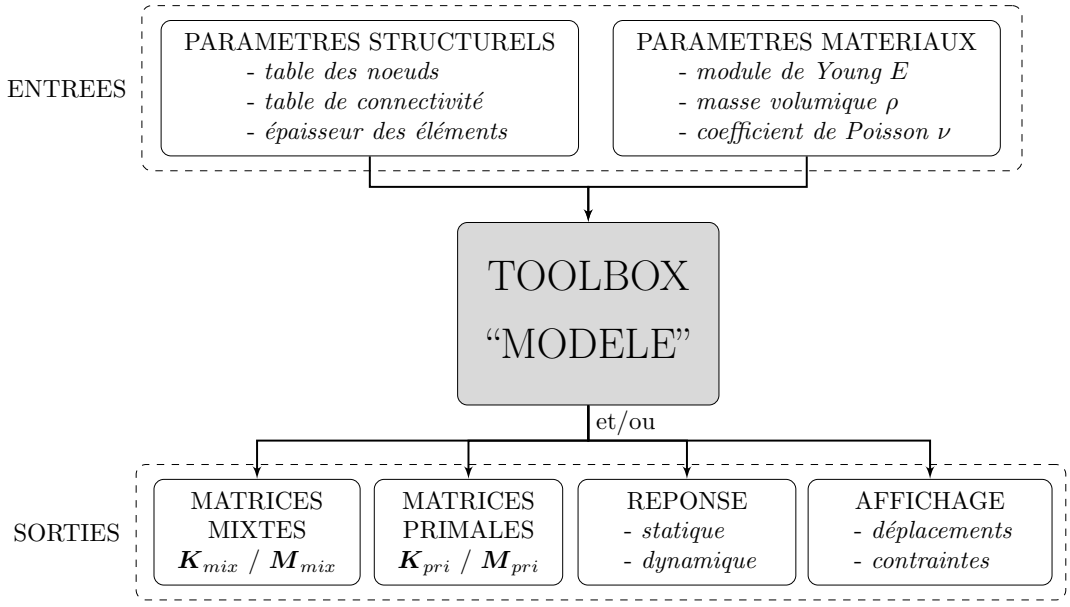


FIGURE 1.3: Schéma entrées/sorties global de la Toolbox de construction du modéle

Chapitre 2

Convergence et caractéristiques des modèles mixtes

Ce chapitre a pour but d'étudier la convergence dynamique en déplacements et en contraintes, et les caractéristiques, tant positives que négatives, de notre modèle, tel qu'il a été mis en place. Plusieurs études de convergence sont disponibles dans la littérature pour différents types de MEF mixtes dont les modèles plaques [AW03, Bab73, FdV65, FdVS68, GL76, HCH78, LR86, dMU06, PF00, SC87, SB86a, SB86b, WC09, WLL$^+$14]. La plupart du temps, ces analyses sont faites d'un point de vue statique pour des plaques épaisses car c'est un domaine dans lequel la formulation mixte s'avère intéressante en terme de continuité. Les analyses de convergence et descriptions de modèles mixtes en dynamique sont beaucoup plus rares [WC09, OK98]. De plus, les choix d'interpolation des deux champs, les espaces d'intégration et les types d'éléments font différer les convergences entre elles. Il apparaît donc essentiel de l'étudier d'un point de vue dynamique vibratoire, en déplacements et contraintes, pour le modèle développé dans le chapitre 1 et les deux théories de plaques associées.

La structure test sur laquelle on se propose d'étudier la convergence de nos modèles est une plaque simple rectangulaire encastrée sur un côté et libre sur les trois autres (voir figure 2.1). Elle est composée de d'EF quadrangles de RM (figure 2.1a) ou d'EF triangles de KL (2.1b). Le matériau qui est utilisé pour les applications numériques a les propriétés du tableau 2.1. On se propose de faire varier l'épaisseur t et la densité du maillage pour vérifier la validité du modèle.

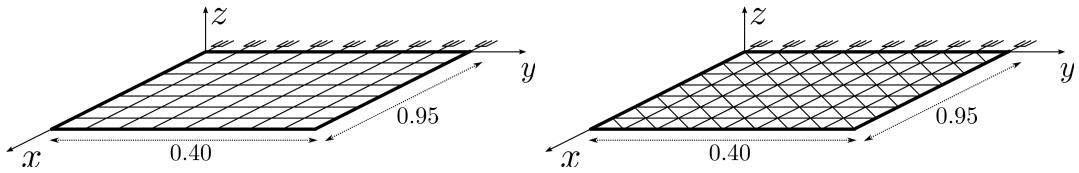
La formulation primale étant la plus répandue, on se concentre dans un premier temps sur la convergence des modèles primaux équivalents vers une référence choisie. On étudie ensuite la convergence en champs de déplacements des modèles mixtes des deux théories des plaques vers leurs modèles primaux équivalents respectifs. Enfin, nous traitons la convergence en champs de contraintes du modèle mixte de KL vers son modèle équivalent, pour enfin conclure sur les avantages et inconvénients computationnels de notre modèle.

2.1 Convergence du modèle primal en déplacements

Dans cette section, nous étudions la convergence des MEF primaux équivalents à nos modèles mixtes pour les deux théories de plaque choisies (sections 1.3 et 1.4), pour

Module de Young	2.1×10^{11} Pa
Coefficient de Poisson	0.33
Masse volumique	$7.5 \times 10^{3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$

TABLE 2.1: Caractéristiques de l'acier utilisé pour les applications numériques



(a) Éléments quadrangle de Reissner-Mindlin (b) Éléments triangle de Kirchhoff-Love

FIGURE 2.1: Plaque rectangulaire plane (en m)

deux épaisseurs différentes par théorie et plusieurs densités de maillage différentes.

2.1.1 Méthode

Le test de convergence dynamique se fait avec le calcul de l'erreur relative sur les valeurs des dix premières fréquences propres du modèle entre les modèles primaux équivalents (sections 1.3.6 et 1.4.6) et une référence choisie. Dans notre cas, la référence a été prise sur un MEF Comsol avec un maillage extrêmement dense. Le calcul de l'erreur relative $\epsilon_{\mathrm{i,pri/ref}}$ de la fréquence propre du mode i est donné par :

$$\epsilon_{\mathrm{i,pri/ref}} = \frac{abs(f_{\mathrm{i,primal}} - f_{\mathrm{i,reference}})}{f_{\mathrm{i,reference}}} \tag{2.1}$$

avec $f_{\mathrm{i,primal}}$ la fréquence propre du mode i du modèle primal et $f_{\mathrm{i,reference}}$ la fréquence propre du mode i de la référence.

2.1.2 Plaques épaisses de Reissner-Mindlin

Les résultats obtenus pour la convergence de la théorie de RM, telle que nous l'avons implémentée (section 1.4), pour deux épaisseurs différentes, sont résumés dans les tableaux 2.2 (épaisseur $t = 5\,\mathrm{cm}$, ratio "taille caractéristique de la plaque/épaisseur" $\frac{R}{t} = 8$) et 2.3 ($t = 1\,\mathrm{cm}$, $\frac{R}{t} = 40$). Nous constatons, en accord avec les problèmes de continuité, de représentation et de "*shear-locking*" des plaques épaisses (évoqués dans la section 1.1.2), que cette théorie nécessite un nombre élevé d'éléments, même pour un ratio taille caractéristique de la plaque/épaisseur conforme à la théorie ($5 \leqslant \frac{R}{t} \leqslant 10$, cf. section 1.4.1). L'erreur relative en fréquence ne descend en-dessous des 10% que si la taille caractéristique de l'élément t_e devient plus petite que

l'épaisseur ($t_e \leqslant t$), et il apparaît qu'il faut la diminuer encore plus pour atteindre des valeurs acceptables. Cela confirme les défauts de la théorie des plaques épaisses décrites dans la littérature [ADB98, BD86, BBR00, HCH78, dMU06, NXLTHNT10, SB83].

	Taille caractéristique élément t_e (cm)				
	9.5	4.8	3.2	2.4	1.9
Mode \ Élt	100	400	900	1600	2500
1	44.3	12.7	5.7	3.2	0.01
2	15.5	1.90	0.6	0.16	0.002
3	46.2	12.9	5.9	3.2	0.02
4	12.0	3.20	1.4	0.70	0.006
5	19.0	13.5	6.0	3.3	0.02
6	15.2	5.90	2.5	1.4	0.01
7	26.3	14.9	9.0	0.13	0.002
8	29.5	5.30	1.7	0.90	0.008
9	34.0	8.60	3.7	2.0	0.01
10	16.5	2.40	1.0	0.48	0.004

TABLE 2.2: Erreur relative $\epsilon_{\mathrm{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1b pour $t = 5\,\mathrm{cm}$ ($\frac{R}{t} = 8$) et la théorie de RM

2.1.3 Plaques fines de Kirchhoff-Love

Les résultats obtenus dans le cadre de la théorie de KL, telle que nous l'avons implémentée (section 1.3), pour deux épaisseurs différentes, sont résumés dans les tableaux 2.4 ($t = 1\,\mathrm{cm}$, $\frac{R}{t} = 40$) et 2.5 ($t = 1\,\mathrm{mm}$, $\frac{R}{t} = 400$). Les ratios "taille caractéristique de la plaque/épaisseur" correspondent à la théorie des plaques minces ($\frac{R}{t} \geqslant 10$, cf. section 1.3.1). Ces résultats montrent une très bonne convergence avec un nombre bien plus réduit d'éléments que pour la théorie de RM. Le ratio "taille caractéristique des éléments t_e/épaisseur t" ne semble pas influencer la convergence du modèle, c'est-à-dire qu'une plaque donnée a la même convergence en fonction du nombre d'éléments, quelque soit son épaisseur (vérifiant la théorie des plaques fines), contrairement à la théorie de RM.

2.2 Convergence en déplacements du modèle mixte vers le modèle primal

Dans cette section, nous étudions la convergence des MEF mixtes (sections 1.4 et 1.3) par rapport aux modèles primaux équivalents (sections 1.4.6 et 1.3.6) pour

	Taille caractéristique élément t_e (cm)					
	2.4	1.6	1.19	0.95	0.79	0.59
Mode \ Élt	1600	3600	6400	10000	14400	25600
1	64.2	32.4	19.1	12.9	8.83	2.67
2	8.10	4.05	2.30	1.44	0.81	0.403
3	100	32.4	19.3	12.7	8.88	2.78
4	24.9	7.32	4.20	2.62	1.77	0.728
5	100	32.2	19.0	12.5	8.78	1.98
6	44.5	12.7	7.40	4.67	3.17	1.39
7	35.8	17.2	13.2	10.6	7.50	2.79
8	45.6	19.3	8.70	4.45	2.70	0.822
9	46.9	8.58	3.01	1.89	1.28	0.463
10	59.6	18.0	10.4	6.65	4.57	1.67

TABLE 2.3: Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1b pour $t = 1\,\text{cm}$ ($\frac{R}{t} = 40$) et la théorie de RM

	Taille caractéristique élément t_e (cm)			
	47.5	32.9	23.8	5.9
Mode \ Élt	16	64	256	1024
1	2.94	1.47	0.53	0.21
2	8.13	1.90	0.42	0.10
3	6.80	1.19	0.40	0.13
4	-	7.58	1.6	0.33
5	-	2.87	0.24	0.066
6	-	11.6	2.3	0.41
7	-	1.72	0.015	0.01
8	-	4.90	0.27	0.0086
9	-	3.35	0.062	0.0021
10	-	20.4	3.3	0.43

TABLE 2.4: Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1a pour $t = 1\,\text{cm}$ ($\frac{R}{t} = 40$) et la théorie de KL

	Taille caractéristique élément t_e (cm)			
	47.5	32.9	23.8	5.9
Mode \ Élt	16	64	256	1024
1	3.16	2.11	1.05	0.00
2	8.14	1.67	0.421	0.0038
3	6.68	1.17	0.333	0.0021
4	43.2	7.55	1.63	0.3
5	24.8	2.86	0.244	0.2
6	-	11.6	2.26	0.4
7	-	1.77	0.0186	0.0053
8	-	4.85	0.268	0.0084
9	-	3.60	0.291	0.06
10	-	20.4	3.72	0.4

TABLE 2.5: Erreur relative $\epsilon_{\text{i,pri/ref}}$ pour les premières fréquences propres i de la structure 2.1a pour $t = 1\,\text{mm}$ ($\frac{R}{t} = 400$) et la théorie de KL

les deux théories de plaques choisies, pour deux épaisseurs différentes par théorie et plusieurs densités de maillage différentes (les mêmes que dans la section 2.1). Le choix de présenter la convergence des modèles primaux vers une référence avant de présenter la convergence des modèles mixtes vers les primaux résulte directement des résultats de cette section. En effet, nous montrons ici que les modèles mixtes tels que nous les avons implémentés donnent des résultats quasi identiques aux modèles primaux classiquement utilisés. D'où l'intérêt de présenter les résultats des modèles primaux au préalable.

2.2.1 Plaques épaisses de Reissner-Mindlin

Méthode

La procédure de vérification de convergence est composée de deux critères. Le premier des deux est l'erreur relative $\epsilon_{\text{i,mix/pri}}$ entre les fréquences propres du mode i du MEF mixte (section 1.4) et du MEF primal équivalent (section 1.4.6) pour la théorie de RM :

$$\epsilon_{\text{i,mix/pri}} = \frac{abs(f_{\text{i,mixed}} - f_{\text{i,primal}})}{f_{\text{i,primal}}} \tag{2.2}$$

avec $f_{i,mixed}$ la fréquence propre du mode i du MEF mixte de RM et $f_{i,primal}$ la fréquence propre du mode i du MEF primal équivalent. Le second critère concerne la forme des modes propre, symbolisé par un critère de MAC sur les paramètres de

déplacements :

$$MAC(i,j) = \frac{(\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{Y}_j)^2}{(\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{X}_i)(\boldsymbol{Y}_j^T \boldsymbol{Y}_j)} \tag{2.3}$$

avec $\boldsymbol{X}_i$ la forme du mode i du MEF primal équivalent et $\boldsymbol{Y}_j$ la forme du mode j du MEF mixte, en prenant en considération uniquement les paramètres de déplacements du MEF mixte. Le principe d'un critère de MAC est de comparer des vecteurs (en l'occurrence de déformées propres) entre eux. $MAC(i,j)$ est compris entre 0 et 1. Plus il est proche de 1, plus les deux modes $\boldsymbol{X}_j$ et $\boldsymbol{Y}_j$ se ressemblent. Par conséquent, si les deux modèles correspondent bien l'un à l'autre, le critère doit donner les résultats suivant :

$$\text{si } i = j \text{ alors } MAC(i,j) \simeq 1 \tag{2.4}$$

Il convient de noter que si $i \neq j$, nous n'avons pas nécessairement $MAC(i,j) = 0$. Le critère peut se rapprocher de la valeur 1 si les modes se ressemblent. L'étude de convergence se fait sur la bande fréquentielle la plus large possible, en fonction de la densité du maillage et de la fréquence du dernier mode n observable sur un maillage de n DDL. Nous choisissons toutefois de limiter l'étude à une bande de 0 à 20 kHz même si un donné maillage permet numériquement d'observer un mode de fréquence plus élevée.

Représentation des résultats

Les résultats sont présentés dans les figures 2.2 ($t = 1\,\text{cm}$) et 2.3 ($t = 5\,\text{cm}$). Ces graphiques donnent l'erreur relative $\epsilon_{\text{i,mix/pri}}$ (équation 2.2) sur les fréquences propres en fonction du mode i, et comparent cette courbe à une limite arbitraire fixée à 3%. Ajoutés à cela, des marqueurs sont affectés à chaque point de mode i, et donnent un aperçu du critère de MAC pour le mode i correspondant. Ces marqueurs sont définis de la façon suivante :

- marqueur noir : $MAC(i,i) \geqslant 0.8$ (critère "bon") ;
- marqueur gris : $0.5 \leqslant MAC(i,i) < 0.8$ (critère "moyen") ;
- marqueur blanc : $MAC(i,i) < 0.5$ (critère "mauvais").

Quand le graphique n'affiche pas de marqueur pour un mode i donné, cela veut dire que l'erreur relative associée à ce mode i est nulle et que le critère de MAC est bon. L'étude de convergence se fait sur différentes tailles de maillage, et le tableau 2.6 répertorie les tailles caractéristiques des éléments t_e en fonction du nombre d'éléments des maillages utilisés dans le cadre de la théorie de RM.

Nombre d'éléments	100	400	900	1600	2500	4900
Taille caractéristique élément t_e (cm)	9.5	4.8	3.2	2.4	1.9	1.35

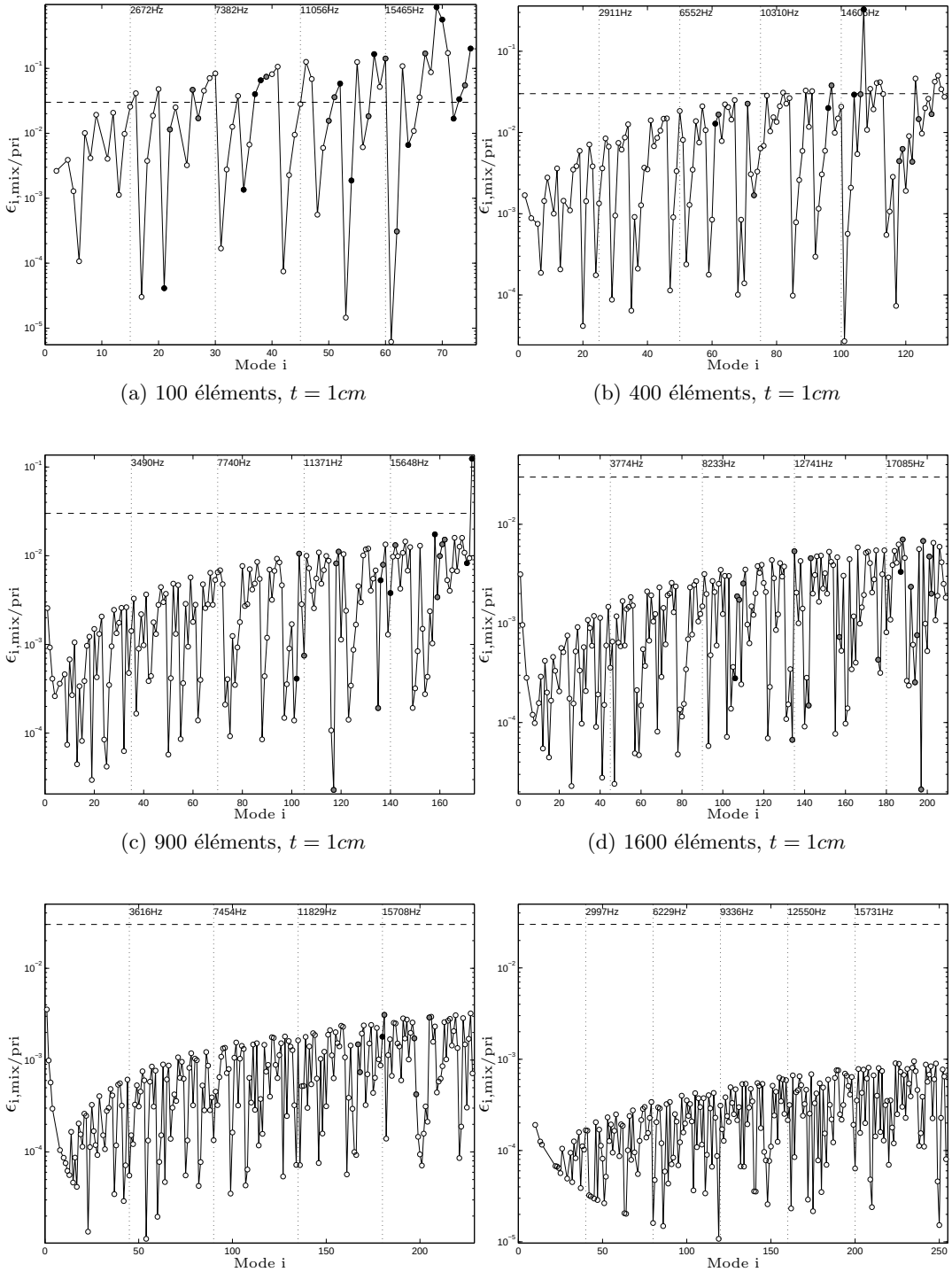
TABLE 2.6: Nombre d'éléments composant les maillages de RM et tailles caractéristiques des éléments t_e

Épaisseur t = 1 cm

Les résultats présentés pour cette épaisseur dans la figure 2.2 montrent des différences en fonction du nombre d'éléments du maillage. Pour 100 élements (2.2a) composant la structure test, plusieurs erreurs relatives sont supérieures à 3% et quelques critères de MAC sont moyens voire mauvais. Pour 400 et 900 éléments (2.2b et 2.2c), les résultats sont meilleurs, mais il persiste quelques erreurs relatives supérieures à 3% et des critères de MAC moyens et mauvais. Pour 1600 éléments (2.2d) et plus (2.2e et 2.2f), les erreurs relatives sur tous les modes observables sont inférieures à 3%. Néanmoins, quelques critères de MAC moyens ou mauvais subsistent pour 1600 et 2500 éléments. Enfin, pour 4900 éléments (2.2f), ce qui correspond à une taille caractéristique d'élément de $t_e = 1.35$cm, les critères de MAC moyens ont disparus et les deux critères de convergence sont excellents. On peut considérer, à partir de cette densité de maillage, que le modèle mixte a parfaitement convergé vers le modèle primal équivalent.
On peut aisément faire l'analogie de ces résultats avec ceux obtenus dans la section 2.1.2 : dès que le modèle primal converge vers la solution du problème, le modèle mixte converge vers le modèle primal équivalent et donc vers la même référence, ce qui veut donc dire que les deux formulations, telles qu'implémentées dans le chapitre 1, convergent au même moment, pour la même densité de maillage, et vers la même solution en déplacements.
Il semblerait même que la convergence mixte/primal soit légèrement meilleure que la convergence primal/référence, car les résultats sont bons dans le premier cas pour 4900 éléments dans le maillage, alors qu'ils peuvent varier de 25% dans le second cas. En d'autres termes, du moment qu'il y a convergence de l'un des deux modèles vers la référence (ou convergence de la théorie), on peut être certains que les deux formulations EF convergent de la même façon vers cette convergence, ce qui veut dire que les résultats de convergence de la section précédente 2.1.2, valables pour le modèle primal, le sont aussi pour le mixte.

Épaisseur t = 5 cm

Les résultats présentés dans la figure 2.3 dans le cas d'une épaisseur plus grande ($t = 5cm$) montrent une meilleure convergence. Le critère des fréquences propres est bon ($\epsilon_{\text{i}} < 3\%$) pour 100 éléments (2.3a) composant la plaque, et plus (2.3b, 2.3c, 2.3d, 2.3e et 2.3f). Il reste cependant quelques critères de MAC moyens pour 100 éléments (2.3a). En revanche, dès 400 éléments (2.3b, ce qui correspond à une taille caractéristique d'élément de $t_e = 4.8\,\text{cm}$) et pour les maillages plus denses (t_e plus petit), les deux critères sont excellents, et par conséquent les modèles mixtes et primaux convergent ensemble vers la même référence.
Ainsi, de la même façon que pour l'épaisseur $t = 1\,\text{cm}$, il semblerait que, du moment que le modèle primal a convergé, le modèle mixte converge de la même façon que ce dernier, et ces deux MEF donnent des résultats dynamiques identiques en déplacements. Nos résultats montrent également que la convergence mixte/primal



(a) 100 éléments, $t = 1cm$

(b) 400 éléments, $t = 1cm$

(c) 900 éléments, $t = 1cm$

(d) 1600 éléments, $t = 1cm$

(e) 2500 éléments, $t = 1cm$

(f) 4900 éléments, $t = 1cm$

FIGURE 2.2: Erreur relative sur les fréquences propres $\epsilon_{\mathrm{i,mix/pri}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode, pour $t = 1\,\mathrm{cm}$ (a : 100 éléments, b : 400, c : 900, d : 1600, e : 2500, f : 4900)

est meilleure que primal/référence, ce qui renforce l'idée que, avant même que la théorie ait convergé, les deux formulations s'accordent sur les mêmes résultats (ceux énoncés dans la section 2.1.2).

Conclusions sur les plaques épaisses de Reissner-Mindlin

Comme expliqué précédemment, les résultats de la section précédente concernant la convergence du modèle primal équivalent de RM peuvent être transposés au modèle mixte de RM. Ainsi, les problèmes de convergence et de "*shear-locking*" redondants dans la littérature sont les mêmes pour notre modèle mixte, avec les interpolations choisies. La convergence d'une telle théorie semble être hautement dépendante de l'épaisseur des éléments considérés, et demande une densité de maillage très élevée pour converger vers la solution. Il existe de nombreuses méthodes (voir section 1.1) qui permettent de compenser ces problèmes. Cependant, l'étude et l'application de ce genre de méthodes n'est pas l'objet de ce travail, c'est la raison pour laquelle nous faisons le choix de nous concentrer désormais uniquement sur l'utilisation du MEF mixte avec la théorie de KL.
Voyons maintenant ce qu'il en est de la convergence de ce dernier d'un point de vue dynamique sur les paramètres de déplacements.

2.2.2 Plaques fines de Kirchhoff-Love

Méthode

Les résultats obtenus en utilisant la même méthode (cf. section 2.2.1) que pour la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin ne dépendent pas des deux épaisseurs choisies ($t = 1\,\text{mm}$ et $t = 1\,\text{cm}$) et donnent des résultats excellents sur les deux critères pour tous les maillages testés (cf. tableau 2.4 et 2.5) :

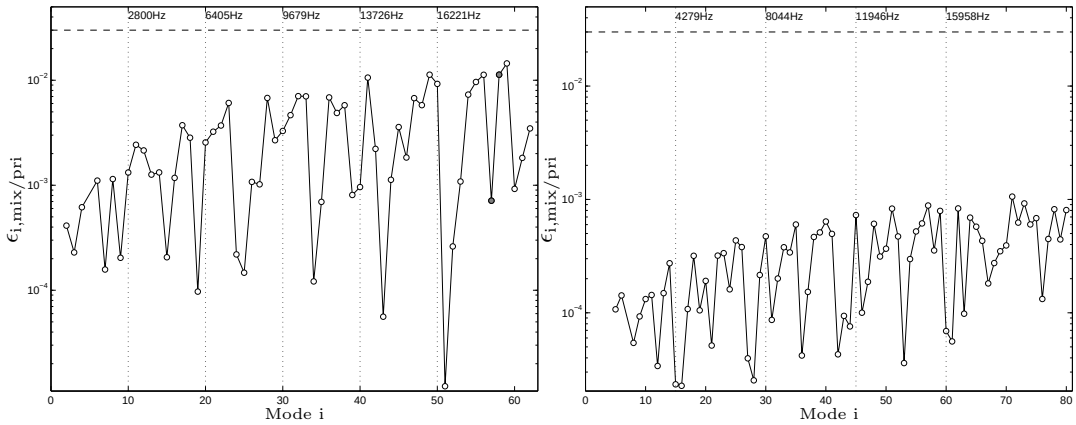
$$\epsilon_{\text{i,mix/pri}} < 10^{-5} \tag{2.5}$$

$$MAC(i,i) \simeq 1 \tag{2.6}$$

Ces résultats étant excellents, nous avons décidé d'aller plus loin en calculant l'erreur relative ϵ_{FRF} entre une FRF ("*Frequency Response Function*") co-localisée (réponse en fréquence du modèle à une excitation type figure 2.4) du MEF mixte de KL (section 1.3) et la même FRF du modèle primal équivalent (section 1.3.6), en accord avec l'excitation schématisée dans la figure 2.4. L'erreur ϵ_{FRF} est définie par :

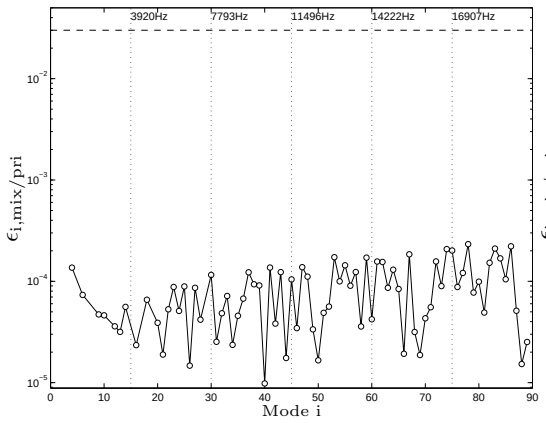
$$\epsilon_{\text{FRF,mix/pri}}(\omega) = \frac{abs(u_{\text{FRF,mix}}(\omega) - u_{\text{FRF,pri}}(\omega))}{u_{\text{FRF,pri}}(\omega)} \tag{2.7}$$

avec $u_{\text{FRF,mix}}(\omega)$ la réponse en déplacement dans la direction z du MEF mixte au niveau de l'excitation (voir figure 2.4) pour la pulsation ω, et $u_{\text{FRF,pri}}(\omega)$ la réponse en déplacement dans la direction z du MEF primal au niveau de l'excitation pour cette même pulsation ω.

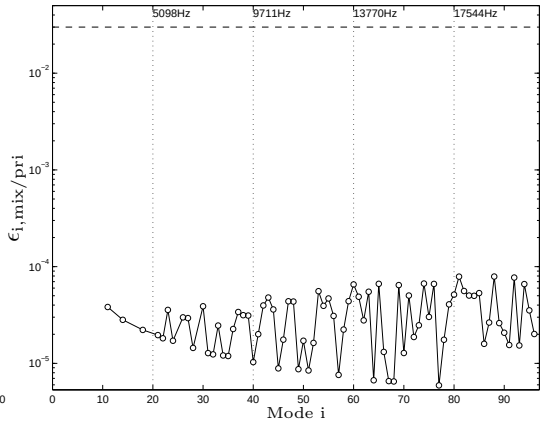


(a) 100 éléments, $t = 5cm$

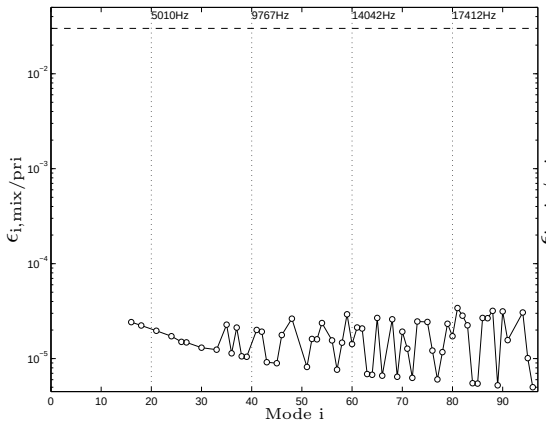
(b) 400 éléments, $t = 5cm$



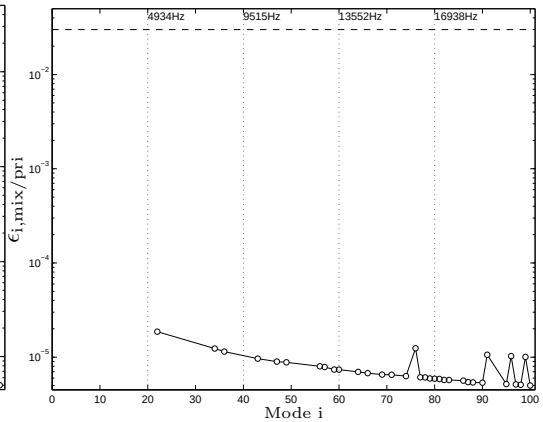
(c) 900 éléments, $t = 5cm$



(d) 1600 éléments, $t = 5cm$



(e) 2500 éléments, $t = 5cm$



(f) 4900 éléments, $t = 5cm$

FIGURE 2.3: Erreur relative sur les fréquences propres $\epsilon_{\mathrm{i,mix/pri}}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode, pour $t = 5\,\mathrm{cm}$ (a : 100 éléments, b : 400, c : 900, d : 1600, e : 2500, f : 4900)

Résultats

Les résultats sont résumés dans les figures 2.6 (épaisseur $t = 1\,\text{cm}$) et figure 2.5 (épaisseur $t = 0.1\,\text{cm}$). Les calculs ont été faits pour 6 maillages différents(16(a), 64(b), 256(c), 410(d), 1024(e) et 4096(f) éléments). La bande fréquentielle étudiée varie en fonction des maillages en raison de la convergence de ces derniers, d'où la fréquence maximale d'étude faible pour des maillages grossiers. En outre, plus l'épaisseur de la structure étudiée est faible, moins la plaque est rigide et plus les fréquences propres sont basses, ce qui explique que le mode le plus élevé observable soit parfois inférieur à 20 kHz.
Les résultats obtenus sont excellents, avec une erreur relative inférieure à 10^{-6}, pour les épaisseurs et maillages étudiés. Ils révèlent ainsi que, de façon analogue à la théorie de RM (voir section 2.2.1), les MEF mixtes et primaux équivalents implémentés dans les sections 1.3 et 1.3.6 pour la théorie de KL ont exactement les même convergences, et aboutissent, dans les mêmes conditions de maillage et d'épaisseur, à la même référence. Ainsi, les bons résultats de convergence du modèle primal de KL décris dans la section 2.1.3 sont transposables au modèle mixte correspondant.

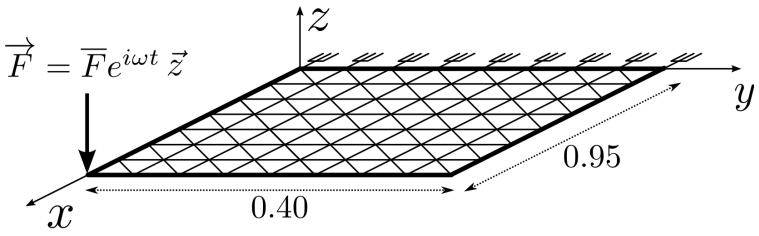
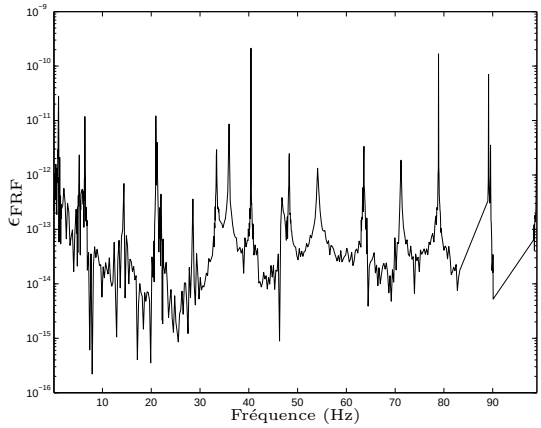


FIGURE 2.4: Excitation sur une plaque rectangulaire plane

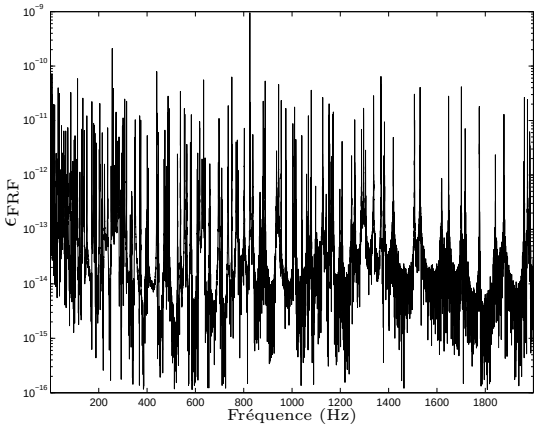
Conclusions sur les plaques fines de Kirchhoff-Love

Pour conclure sur les plaques fines de Kirchhoff-Love, la convergence dynamique des MEF utilisant cette théorie est très bonne (cf. section 2.1.3) et ne dépend pas de l'épaisseur de la structure, dans la mesure où l'on reste dans le cadre des plaques fines. De plus, le MEF mixte converge parfaitement vers le MEF primal, ce qui montre que ces deux modèles ont des résultats identiques en terme de déplacements et convergence modale en fréquence et déformées propres (même pour des hautes fréquences qui se situent au-delà du domaine de convergence du maillage).
Les résultats obtenus avec cette théorie étant bien meilleurs qu'avec la théorie de RM, nous nous concentrons désormais uniquement sur ce MEF mixte de KL pour le reste de notre travail sur les méthodes de réduction et d'optimisation.

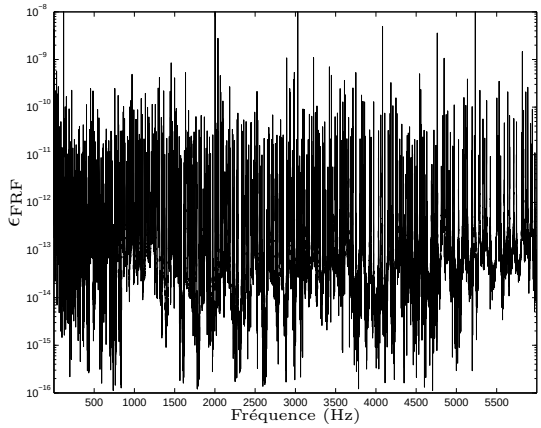
Il convient désormais de prêter attention à la partie contrainte du modèle, à savoir la convergence vis-à-vis de ce champ et l'accès privilégié offert par notre formulation.



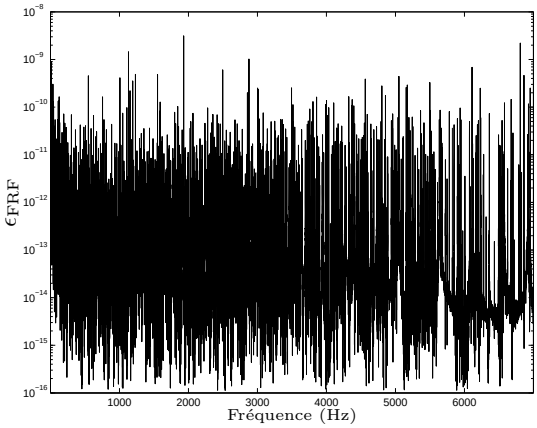
(a) 16 éléments, $t = 1mm$



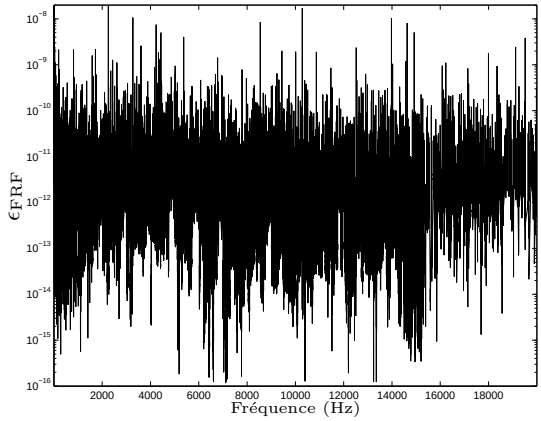
(b) 64 éléments, $t = 1mm$



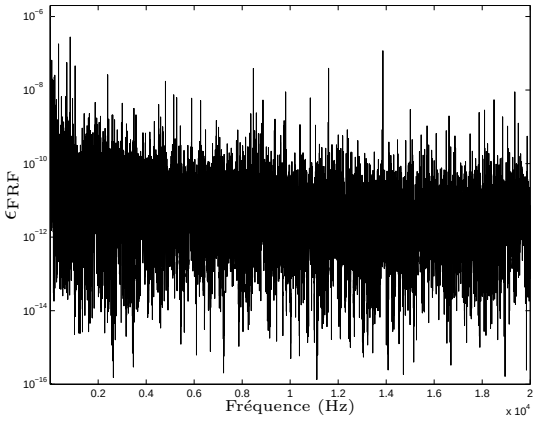
(c) 256 éléments, $t = 1mm$



(d) 410 éléments, $t = 1mm$

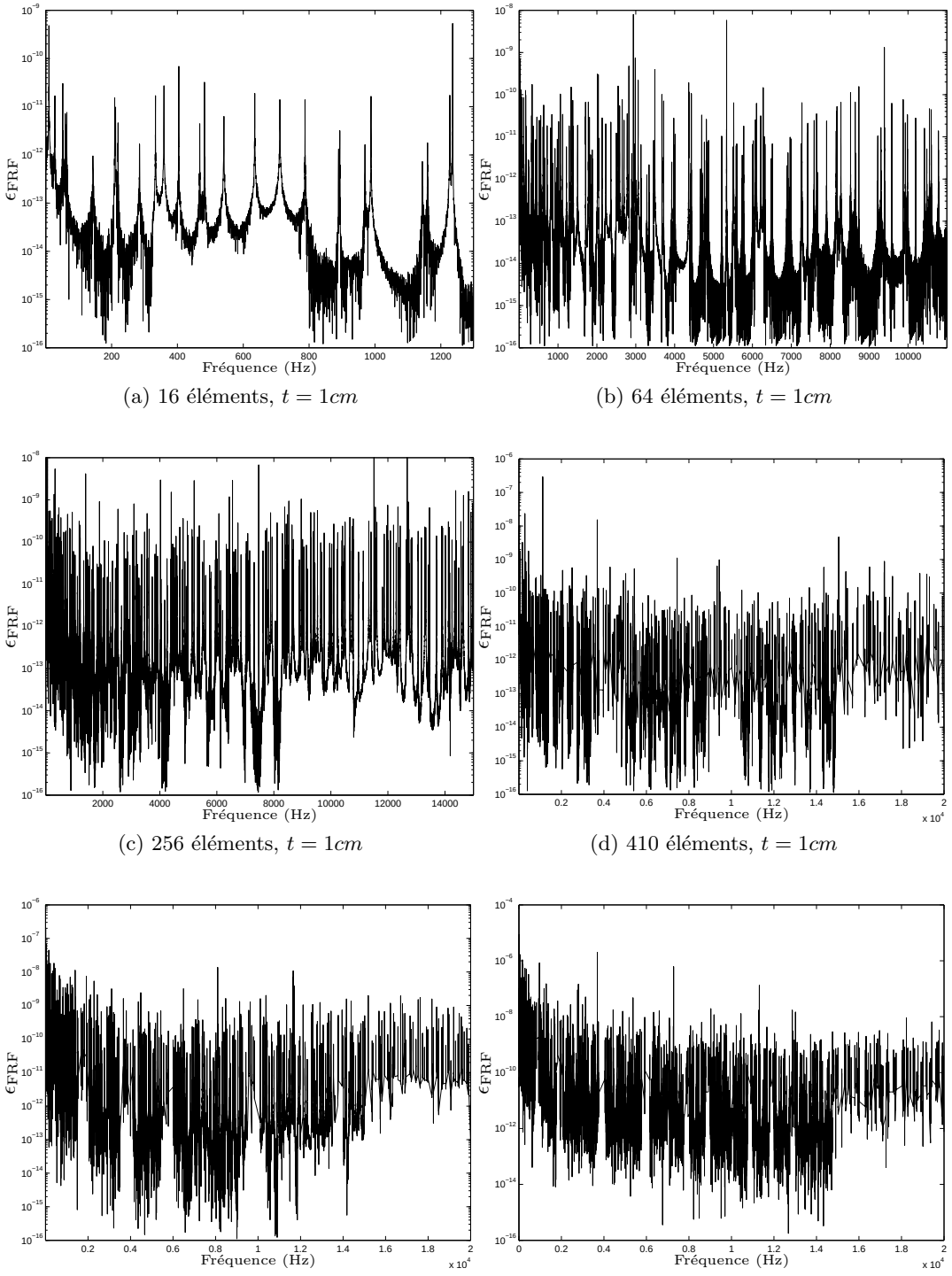


(e) 1024 éléments, $t = 1mm$



(f) 4096 éléments, $t = 1mm$

FIGURE 2.5: Erreur relative ϵ_{FRF} entre les FRF co-localisées des modèles primaux et mixtes pour la théorie de KL, pour $t = 1mm$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024, f : 4096)



(a) 16 éléments, $t = 1cm$

(b) 64 éléments, $t = 1cm$

(c) 256 éléments, $t = 1cm$

(d) 410 éléments, $t = 1cm$

(e) 1024 éléments, $t = 1cm$

(f) 4096 éléments, $t = 1cm$

FIGURE 2.6: Erreur relative ϵ_{FRF} entre les FRF co-localisées des modèles primaux et mixtes pour la théorie de KL, pour $t = 1cm$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024, f : 4096)

2.3 Convergence en contraintes du modèle mixte vers le modèle primal

L'idée de cette section est de vérifier la validité des paramètres de contraintes des modèles mixtes. En d'autres termes, après s'être assuré que les déplacements dynamiques du MEF mixte correspondent à ceux du MEF primal équivalent, on veut désormais vérifier que les champs de contraintes obtenus correspondent également. Compte-tenu de la section précédente, nous faisons le choix de nous concentrer uniquement sur le MEF des plaques fines de Kirchhoff-Love, que nous utilisons dans le reste de ce travail et de comparer les champs de contraintes des modes propres des MEF mixte et primaux. De façon analogue aux sections 2.1 et 2.2 précédentes, les calculs sont effectués pour 2 épaisseurs et plusieurs maillages différents.

2.3.1 Calcul des contraintes en un nœud du maillage pour la théorie de Kirchhoff-Love

Obtention du tenseur des contraintes à partir des contraintes généralisées

Les trois composantes du tenseur de contraintes $\sigma_{xx}(z)$, $\sigma_{yy}(z)$ et $\sigma_{xy}(z)$ dans l'épaisseur z de la structure en un point donné sont exprimées en fonction des contraintes généralisées M_x, M_y et M_{xy} du point au niveau du plan médian (voir figure 1.1), de la façon suivante :

$$\sigma_{xx}(z) = \frac{12M_x}{t^3}\, z \tag{2.8}$$

$$\sigma_{yy}(z) = \frac{12M_y}{t^3}\, z \tag{2.9}$$

$$\sigma_{xy}(z) = \frac{12M_{xy}}{t^3}\, z \tag{2.10}$$

La différence entre les MEF mixtes et primaux résident dans la façon d'obtenir les contraintes généralisées M_x, M_y et M_{xy}.

Récupération du champ de contraintes généralisées en formulation mixte

Si l'on utilise le MEF mixte, les contraintes généralisées M_x, M_y et M_{xy} (en un point (x, y) du repère local d'un élément) sont définies au sein de l'élément d'après l'équation 1.16, à savoir que :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_9 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

avec $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_9)^T$ les paramètres de contraintes de l'élément et (x, y, z) les coordonnées du point où l'ont veut les contraintes.

Récupération du champ de contraintes généralisées en formulation primal

Dans le cas du MEF primal, on choisit de reconstruire le champ de contraintes généralisées (en un point (x, y) du repère local d'un élément) d'après les équations constitutives 1.14, 1.6 et 1.27 de la théorie de KL, à savoir que :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{U}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} & \frac{\nu t^3}{12} & 0 \\ \frac{\nu t^3}{12} & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\frac{t^3}{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & ... & N_9 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & ... & \frac{\partial N_9}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & ... & -\frac{\partial N_9}{\partial x} \end{Bmatrix} \boldsymbol{U} \tag{2.12}$$

avec $U = \begin{Bmatrix} U_1 & U_2 & ... & U_9 \end{Bmatrix}^T$ les paramètres de l'élément et (x, y, z) les coordonnées du point où l'ont veut les contraintes.
Certains MEF primaux utilisés dans l'industrie utilisent la méthode des Points de Gauss pour reconstruire le champ de contraintes à partir du champ de déplacements. Néanmoins, cette méthode est basée sur des approximations, et nécessite également un post-traitement comme la méthode que nous utilisons.

Contraintes maximales dans l'épaisseur

Les contraintes maximales en un point donné (appartenant à un élément d'épaisseur t) sont calculées pour une des deux couches extérieures de la structure (cf. figure 1.1). Elles sont ainsi données par :

$$\sigma_{xx,max} = \frac{6M_x}{t^2} \tag{2.13}$$

$$\sigma_{yy,max} = \frac{6M_y}{t^2} \tag{2.14}$$

$$\sigma_{xy,max} = \frac{6M_{xy}}{t^2} \tag{2.15}$$

On notera ici que pour un point appartenant à plusieurs éléments en même temps (sur un bord ou un nœud), nous effectuons la moyenne des contraintes calculées à partir de chacun des éléments auxquels il appartient. Cette étape pourrait être supprimée si le modèle construit utilisait un assemblage explicite en contraintes à la fois aux noeuds et bords des éléments. Cette continuité étant implicite dans notre cas, nous préférons moyenner les valeurs des contraintes de chacun des éléments.

2.3.2 Critère "MAC-like" en contrainte de Von Mises

Le paramètre défini pour vérifier la convergence en contraintes est un critère que l'on appelle "MAC-like" en contrainte de Von Mises. Le principe est de calculer un critère de MAC qui compare les vecteurs des contraintes de Von Mises aux nœuds du

maillage des MEF mixtes et primaux équivalents, pour tous les modes observables, dans une bande maximale de 0 à 20 kHz. Il est défini comme suit :

$$MAC_{stress}(i,j) = \frac{(\boldsymbol{X}_{VM,i}^T \boldsymbol{Y}_{VM,j})^2}{(\boldsymbol{X}_{VM,i}^T \boldsymbol{X}_{VM,i})(\boldsymbol{X}_{VM,i}^T \boldsymbol{X}_{VM,i})} \tag{2.16}$$

avec respectivement $\boldsymbol{X}_{VM,i}$ et $\boldsymbol{Y}_{VM,j}$ les vecteurs des contraintes de Von Mises maximales aux nœuds du maillage, respectivement pour le mode i du MEF primal et le mode j du MEF mixte. De façon analogue à la section 2.2.1, le critère est compris entre 0 et 1, et plus il est proche de 1, plus les vecteurs $\boldsymbol{X}_{VM,i}$ et $\boldsymbol{Y}_{VM,j}$ sont proches. Le dénominateur du critère ne prend en compte volontairement que le MEF primal (contrairement au critère 2.3), de façon à vérifier non seulement les correspondances des champs de contraintes, mais aussi leurs amplitudes ($MAC_{stress} = 1$ uniquement si les valeurs des amplitudes correspondent). La contrainte de Von Mises maximale σ_{VM} aux nœuds du maillage est définie par :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx,max} - \sigma_{yy,max})^2 + \sigma_{yy,max}^2 + \sigma_{xx,max}^2 + 6\sigma_{xy,max}^2} \tag{2.17}$$

avec σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} les composantes du champ de contraintes maximales (en surface de la plaque), définies par les équations 2.13, 2.14 et 2.15.
De façon analogue à la première équation de 2.2.1, un critère “MAC-like” en contraintes est bon s'il est défini par :

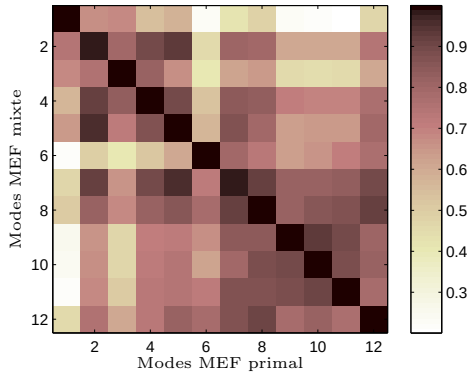
$$\text{si } i = j \text{ alors } MAC_{stress}(i,j) \simeq 1 \tag{2.18}$$

En d'autres termes, la propriété 2.18 se traduit par le fait que les champs de contraintes des MEF mixtes et primaux équivalents sont quasi-identiques pour le mode i considéré. En pratique, cela sous-entend que l'on veut dans la représentation graphique une diagonale égale à 1, peu importe le reste des valeurs (si les autres valeurs sont proches de 1, cela signifie just que 2 modes ont des champs de contraintes proches).

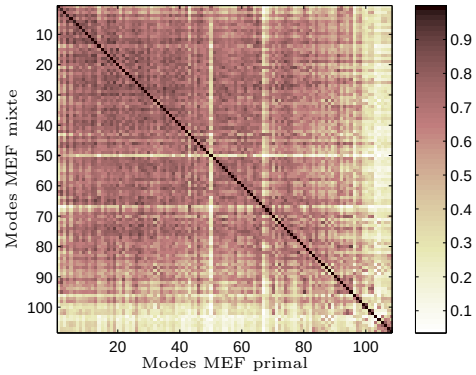
2.3.3 Plaques fines de Kirchhoff-Love

Les résultats obtenus sont résumés dans les figures 2.8 (épaisseur $t = 1\,\text{cm}$) et 2.7 (épaisseur $t = 0.1\,\text{cm}$), pour 5 des maillages cités précédemment dans le cadre de la théorie de KL (16, 64, 256, 410 et 1024 éléments, les résultats du maillage de 4096 éléments étant difficiles à présenter). Il s'agit ici de se concentrer principalement sur la diagonale qui donne les valeurs des critères $MAC_{stress}(i,i)$ pour tous les modes i observables dans la bande fréquentielle $0 - 20\,\text{kHz}$. On constate ainsi que les valeurs de ces critères de MAC sont très proches de 1 pour tous les maillages considérés et les 2 épaisseurs étudiées. En rentrant dans le détail des valeurs numériques, on observe :

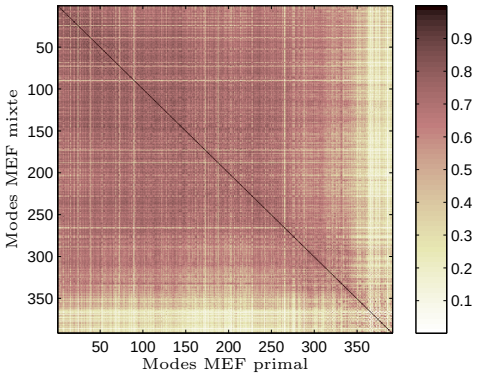
$$\text{pour } i = j,\ 0.97 \leqslant MAC_{stress}(i,j) \leqslant 1 \tag{2.19}$$



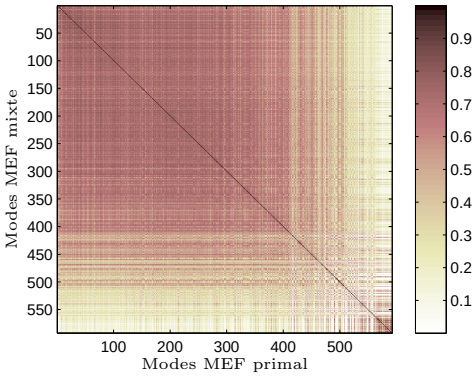
(a) 16 éléments, $t = 1mm$



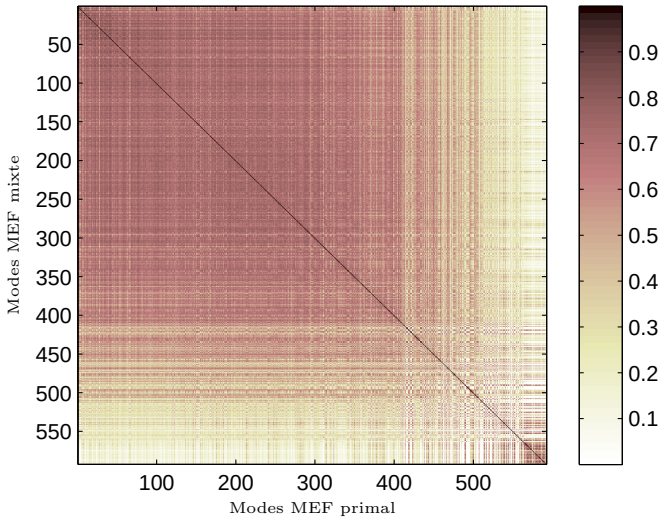
(b) 64 éléments, $t = 1mm$



(c) 256 éléments, $t = 1mm$

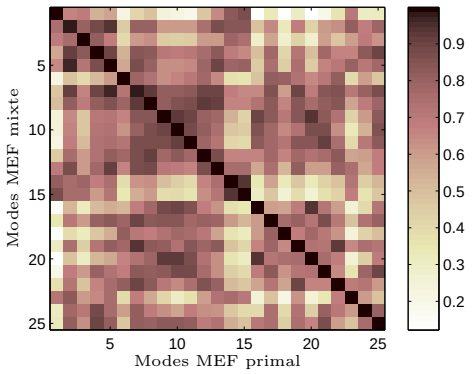


(d) 410 éléments, $t = 1mm$

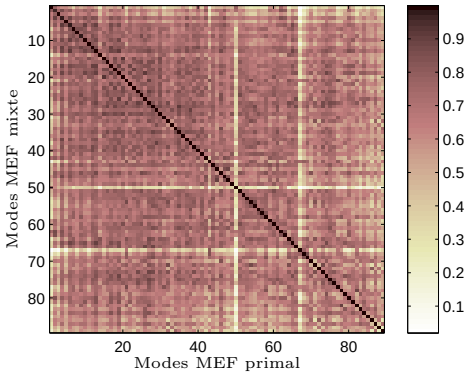


(e) 1024 éléments, $t = 1mm$

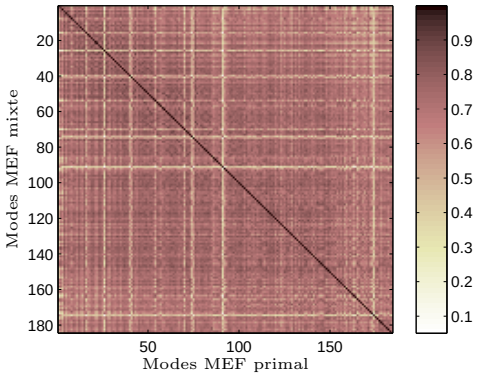
FIGURE 2.7: Critère de MAC en contraintes $MAC_{stress}(i, j)$, pour $t = 1\,\text{mm}$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024)



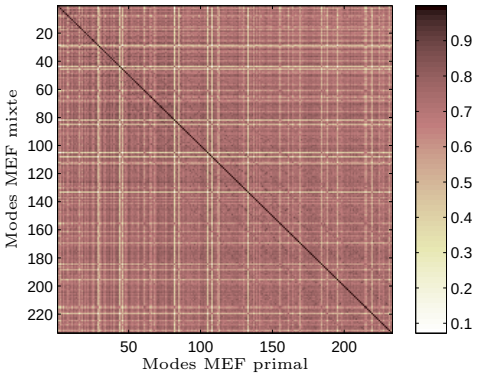
(a) 16 éléments, $t = 1cm$



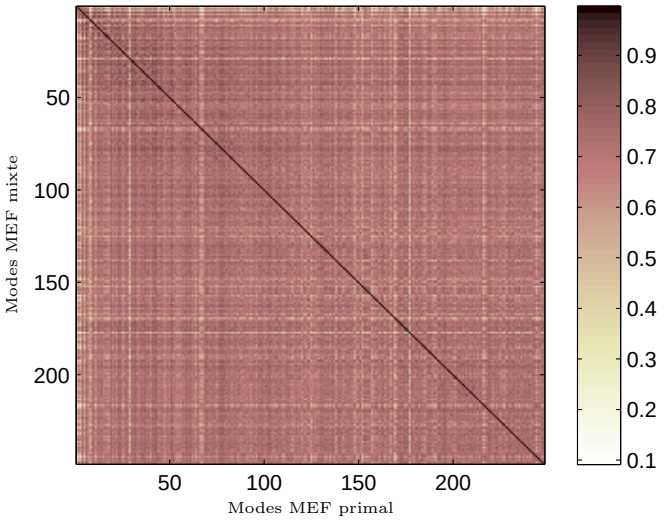
(b) 64 éléments, $t = 1cm$



(c) 256 éléments, $t = 1cm$



(d) 410 éléments, $t = 1cm$



(e) 1024 éléments, $t = 1cm$

FIGURE 2.8: Critère de MAC en contraintes $MAC_{stress}(i, j)$, pour $t = 1\,\text{cm}$ (a : 16 éléments, b : 64, c : 256, d : 410, e : 1024)

2.3.4 Conclusions sur les plaques fines de Kirchhoff-Love

Les résultats présentés dans cette partie sont analogues à ceux présentés dans la section 2.2.2 concernant la convergence en déplacements. Ils révèlent ainsi que la convergence mixte/primal en contraintes est aussi bonne que celle en déplacements, et que les deux modèles mixtes et primaux donnent, en plus de déplacements identiques, des valeurs de contrainte de Von Mises également identiques.

Ces observations permettent d'affirmer que les MEF mixtes et primaux de KL tels que nous les avons mis en place dans la section 1.3 du chapitre 1 donnent, à maillages et caractéristiques matériaux identiques, des contraintes et déplacements modaux identiques. On peut donc transposer toutes les données de convergence que l'on connaît à propos des modèles plaques primaux utilisant la théorie de KL à des modèles mixtes équivalents.

2.4 Avantages du modèle

Comme expliqué dans la section 1.1 du chapitre 1, la formulation mixte dans les MEF présente des avantages énormes quand il s'agit de représenter le comportement des plaques épaisses lorsque l'on prend en compte le cisaillement, en choisissant avec précautions les champs et leurs interpolations. Dans notre cas d'étude, nous n'avons pas cherché à bénéficier de cette caractéristique (voir section 2.2.1 et les problèmes de convergence de la théorie de RM), mais plutôt à profiter d'un autre attribut essentiel de cette formulation : l'accès privilégié aux contraintes avec les paramètres β de contraintes généralisées.
En effet, la plupart des MEF utilisés dans l'industrie sont basés sur une formulation primale, et n'obtiennent ainsi que le champ de déplacements en tant que résultat primaire. A partir de là, il faut remonter au champ de contrainte en utilisant les méthodes décrites dans la section 2.3.1, dans le cas primal ou mixte, suivant le cas. Comme on peut le constater aisément en comparant les équations 2.11 et 2.12, la formulation primale nécessite des calculs plus lourds, et cela se traduit nécessairement par des temps de calcul plus importants.
C'est ce que nous avons voulu vérifier en notant le temps de calcul nécessaire à la reconstruction du champ de contraintes de Von Mises pour les deux formulations et les différents maillages d'éléments triangles de KL (section 2.2.2), dans le cas de la structure "plaque" de la figure 2.4. Le tableau 2.7 résume les temps de calcul constatés. On peut voir que si les gains en temps de calculs diminuent lorsque la taille du maillage augmente, ils restent systématiquement supérieurs ou égaux à 10% et confirment l'intérêt d'utiliser ce type de modèles mixtes quand il s'agit de reconstruire le champ de contraintes rapidement, d'autant plus qu'ils donnent des résultats identiques en déplacements et en contraintes, comme montré précédemment (sections 2.2 et 2.3).

Nombre d'éléments	16	64	256	410	1024	4096
Nombre de DDL	222	822	3174	5118	12486	49542
Gain en temps de calcul (champ de contraintes sur toute la structure)	45%	25%	19 %	15%	11%	10%

TABLE 2.7: Gain en temps de calcul pour la reconstruction du champ de contraintes de Von Mises de la structure "plaque" (figure 2.4) avec le MEF mixte par rapport au MEF primal

2.5 Spécificités et inconvénients du modèle

Bien que meilleurs pour la description des contraintes, et plus rapides pour reconstruire ces champs, les modèles mixtes présentent quelques inconvénients.

2.5.1 Nombre de degrés de liberté élevé

Tout d'abord, le nombre de DDL des matrices élémentaires est plus grand que pour le MEF primal équivalent, classiquement utilisé dans l'industrie, en raison de l'addition des paramètres de contraintes. Dans le cas de la théorie de KL, les matrices élémentaires sont 2 fois plus grandes. De plus, étant donné que l'assemblage ne se fait que sur les déplacements, et non sur les paramètres de contraintes (cf. section 1.3.5), ce ratio ne fait qu'augmenter avec la taille de l'assemblage. Cet inconvénient implique des temps de calcul plus importants pour l'assemblage et la manipulation des matrices pour le calcul de réponses dynamiques.
En ce qui concerne l'assemblage des matrices, le temps de calcul peut difficilement être amélioré par rapport à un modèle primal, et toute amélioration a de grande chances de s'adapter à la fois aux modèles mixtes et primaux. Cependant, dans le cas d'applications où l'on travaille sur le même assemblage, ou encore dans le cas où l'on peut changer des paramètres structurels sans remaillage nécessaire (cf. méthodes d'optimisation chapitre 5), cet inconvénient n'a plus lieu d'être.
Pour ce qui est du calcul de la réponse de la structure, si l'on intègre ce temps de calcul dans les mesures de gain mixte/primal de la section 2.4 pour la reconstruction du champ de contraintes, on constate que la différence est infime, et que la formulation mixte reste avantageuse. En revanche, dans le cas où l'on doit répéter le calcul de la réponse un certain nombre de fois (et donc répéter une inversion de matrice de grande taille), cela peut devenir un inconvénient. D'où l'intérêt d'étudier différentes possibilités de méthodes de réduction des matrices mixtes dans le chapitre 3.

2.5.2 Matrices singulières

Un autre inconvénient des MEF mixtes réside dans la formulation matricielle de l'équation 1.23. En effet, les matrices de masses mixtes $\boldsymbol{M}_{mix}$ et de raideurs mixtes

$\boldsymbol{K}_{mix}$ sont singulières, ce qui implique que l'on ne peut pas aisément les diagonaliser, en trouver les valeurs propres et utiliser des méthodes de réduction et sous-structuration modale classiques. Il existe des méthodes qui consistent à condenser les DDL sur les DDL de contraintes [OK98] en utilisant la deuxième ligne de l'équation d'équilibre de base 1.23 de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = -(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G})\boldsymbol{U} \tag{2.20}$$

Cette équation donne une relation matriciellement linéaire entre les paramètres de contraintes et de déplacements, et permet de condenser le système matriciel 1.23 de la façon suivante :

$$\boldsymbol{M}_{eq}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}_{eq}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{2.21}$$

avec

$$\boldsymbol{K}_{eq} = -\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{G} \tag{2.22}$$

et

$$\boldsymbol{M}_{eq} = \boldsymbol{M} \tag{2.23}$$

Cette méthode permet de réduire le problème mais pas de régler le problème de singularité, la diagonalisation de $\boldsymbol{M}_{eq}$ et $\boldsymbol{K}_{eq}$ étant impossible. De plus, cette forme condensée nécessite l'inversion d'une grande matrice $\boldsymbol{H}$, donne une réponse uniquement en déplacements et nécessite un calcul supplémentaire avec l'équation 2.20. Nous souhaitons pour notre part conserver le modèle mixte dans sa forme primaire. Une conséquence directe de cette caractéristique : on ne peut pas obtenir une analyse modale rapide avec des vecteurs et fréquences propres. Nous choisissons ainsi de construire des FRF co-localisées pour obtenir les fréquences propres et les réponses dynamiques modales sur une bande fréquentielle choisie. Nous devons pour cela exciter la plaque sur un DDL choisi, comme sur l'exemple figure 2.4 et calculer la réponse d'après l'équilibre dynamique comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = (\boldsymbol{K}_{mix} - \omega^2\boldsymbol{M}_{mix})^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

avec ω la pulsation choisie de la force harmonique, $\overline{\boldsymbol{F}}$ la force appliquée sur le DDL choisi du maillage (cf. figure 2.4). Ce calcul nous donne ainsi la réponse dynamique mixte de la structure sous une excitation harmonique de pulsation ω sur le DDL choisi.
Si l'on souhaite reconstruire une FRF "complète" sur une bande choisie, il faut répéter cette opération autant de fois que l'on veut de points pour définir la courbe de la FRF (ce qui s'avère très coûteux, comme expliqué précédemment dans 2.5.1) et choisir un DDL à exciter/observer. De plus, nous avons le risque de manquer une fréquence propre à cause de la discrétisation du signal, et également du DDL choisi/observé.
On peut également, d'après les résultats montrés dans la section 2.2, calculer les fréquences propres du modèle primal et les utiliser pour les modèles mixtes en se plaçant dans un domaine qui a convergé.

2.6 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de mettre en place des méthodologies d'étude de convergence dynamiques pour des MEF mixtes, avec procédure de vérification de convergence modale en déplacements, et développement d'une méthode "MAC-like" pour la convergence en contraintes de Von Mises. Le tableau 2.8 récapitule les résultats et observations de ce chapitre. Pour résumer, les modèles mixtes implémentés dans le chapitre 1 donnent des résultats dynamiques identiques aux modèles primaux équivalents, à la fois en déplacements et en contraintes (même en hautes fréquences, lorsque le maillage n'est plus forcément représentatif). Par conséquent, les résultats usuels de convergence des modèles primaux équivalents pour les théories de KL et RM sont transposables à nos modèles mixtes à maillages et propriétés identiques. Ainsi, la théorie de RM présente des problèmes de convergence numérique ("*shear locking*") tandis que la théorie de KL présente une très bonne convergence. C'est la raison pour laquelle nous faisons le choix de conserver uniquement le modèle mixte de KL pour le reste de l'étude. Ce dernier montre des temps de calculs de reconstruction du champ de contraintes intéressants avec un gain entre et 45 et 10% par rapport aux modèles primaux équivalents pour les maillages considérés.

Néanmoins, cette étude nous a permis de mettre en lumière des inconvénients importants des formulations mixtes lorsqu'elles sont utilisées en EF. D'une part, la taille des matrices constitutives qui est importante, ce qui implique un temps d'assemblage plus important, ainsi qu'un temps de calcul de réponse de la structure accru. Cette dernière caractéristique nous a amené à imaginer des méthodes de réduction et de sous-structuration de façon à réduire numériquement les modèles. Cependant, un autre inconvénient réside dans la singularité des matrices qui ne permet pas une analyse modale simple, ni l'utilisation de méthodes de sous-structurations modales classiquement utilisées pour des MEF primaux. Partant de ces constatations, nous avons décidé d'imaginer des méthodes de réduction qui dispensent de calculer les modes propres du modèle mixte. Le chapitre 3 suivant décrit cette réflexion et les méthodes développées.

Critère	KL	RM
Convergence MEF primal		
Fréquences propres	Très bonne	Mauvaise
Influence épaisseur ?	Non	Oui
Convergence MEF mixte/primal en déplacements		
Fréquences propres	Excellente	Excellente
Déformées propres	Excellente	Excellente
FRF co-localisée	Excellente	-
Influence épaisseur ?	Non	Oui
En déplacements : Mixte = Primal		
Convergence MEF mixte/primal en contraintes		
MAC-like en contraintes	Excellente	-
Influence épaisseur ?	Non	-
En contraintes : Mixte = Primal		
Avantges		
Gain temps de calcul pour la reconstruction du champ	10-45 %	-
Inconvénients		
Taille numérique	- Assemblage plus lent - Calcul réponse plus lent (négligeable)	
Matrices singulières	- Analyse modale complexe - Réductions modales primales impossibles	

TABLE 2.8: Résumé des convergences, avantages et contraintes du MEF mixtes par rapport au MEF primal

Chapitre 3

Méthodes de sous-structurations modales

3.1 Introduction

Bien que présentant des avantages certains pour les raisons expliquées précédemment dans le chapitre 2, les modèles mixtes sont caractérisés par des tailles de matrices EF importantes. Certains chercheurs considèrent même que cet inconvénient prédomine sur les avantages possibles qu'ils peuvent offrir. Toutefois, il n'existe pas vraiment de recherches menées dans le but de les réduire, et ainsi d'éliminer ce problème. Il s'agit donc d'imaginer des méthodes de réduction adaptées à ce type de formulation. En ce qui concerne les MEF en déplacements, basés sur une formulation primale, des méthodes de sous-structuration existent et sont largement utilisées.

Les méthodes de sous-structuration basées sur la synthèse modale des structures considérées ont pour but de décrire le comportement, principalement en basses fréquences, d'une structure divisée en sous-structures (SS, voir les SS dans la figure 3.1 dans le cadre d'un MEF) à l'aide de modes propres et de modes de frontière des SS considérées. Les modes de frontière (voir les DDL de liaison dans la figure 3.1) permettant l'assemblage compensent la troncature modale effectuée sur les SS et améliorent ainsi ces méthodes.

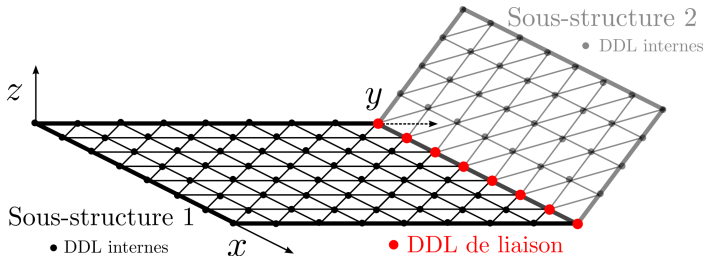


FIGURE 3.1: Schéma de principe d'une sous-structuration avec deux sous-structures et des degrés de libertés de liaison dans le cadre d'un MEF

Les méthodes de synthèse modale ont été initialement développées dans les années 60 et 70 dans un contexte de guerre froide et de conquête spatiale. La NASA a

notamment commencé à utiliser ces méthodes pour sa navette spatiale pour caractériser le comportement dynamique d'ensemble d'une structure à partir de celui des SS seules. On peut retrouver ces travaux dans des rapports techniques [Hur64, Bam66, GS72, CHK77, CC76, CC77] ou encore dans des articles [Hur65]. Par la suite, d'autres travaux de recherche se sont attachés à étudier les méthodes de synthèse modale sur des structures discrétisées [HM80, HM82, MH82], puis prenant en compte l'aspect non-conservatif des structures [Cra81, HB85, Cra89a].

On compte deux principaux types de synthèse modale. D'une part les méthodes à interface fixe, présentées pour la première fois par Craig et Bampton en 1968 [CB68]. Ces méthodes sont basées sur une représentation de chacune des SS par ses modes propres, avec l'interface considérée comme fixe, et par des modes statiques de liaison qui définissent la réaction en déplacements de la SS aux déplacements de la jonction, et correspondent à une sollicitation en déplacements de la frontière. D'autre part, on trouve les méthodes à interface libres, comme celle de "Mac Neal" [Mac71, Rub75, CC77]. Ces méthodes utilisent des modes propres des SS avec l'interface laissée libre, et des modes d'attaches qui correspondent à des sollicitations en force de la frontière. On trouve dans la littérature des revues détaillées de ces différentes méthodes de sous-structuration, ainsi que des vues d'ensembles plus synthétiques [Cra89b, Cra00, dKRV08]. On trouve également une approche duale des méthodes de sous-structuration par Rixen [Rix04], qui consiste à assembler les SS sur une formulation en force, toujours sur un MEF en déplacements.

Ces méthodes de sous-structuration permettent de réduire le nombre de DDL de chacune des SS par la troncature des modes propres, mais impliquent aussi la conservation des DDL "physiques" de jonction entre les SS. Si la modélisation EF présentent un grand nombre de DDL, ou encore si les interfaces sont surfaciques ou de grande taille, le nombre de DDL de frontière peut augmenter et ainsi limiter l'intérêt de la réduction opérée. Dans ce cadre, des méthodes modales visant à réduire également la frontière ont été imaginées, en opérant une synthèse supplémentaire sur les DDL concernés avec des "modes de branche" [Bal96, Tra01, Tra09] : la synthèse modale devient ainsi "Double". On parle de Double Synthèse Modale (DSM) ou Double Modal Synthesis (DMS) [JS94a, Bes06, BJ08, BJBT12]. D'autre part, Jézéquel [Jé85] a également présenté une méthode dite "développement en ω^2" qui permet de compenser la troncature des modes propres en prenant en compte la dynamique des modes statiques de liaison [JS94a, JS94b, Bes06, BJ08]. Il faut néanmoins prendre quelques précautions dans la réduction des paramètres de frontières, cette dernière impliquant nécessairement une disparition des DDL "physiques" et donc une complexité accrue pour appliquer des forces, le cas échéant.

Toutes ces méthodes sont développées pour et appliquées à des MEF primaux en déplacements. Il est tentant de les transposer simplement aux modèles mixtes, mais elles partent du principe que l'on peut facilement calculer les modes des SS. Dans notre cas, ces derniers sont très complexes à calculer, à cause des spécificités des MEF mixtes (voir section 2.5.2), et il est donc impossible d'utiliser ces méthodes telles qu'elles sont formulées dans la littérature. Par ailleurs, il n'existe pas dans la littérature de méthode générale de sous-structuration adaptées aux MEF mixtes.

L'idée développée dans ce chapitre consiste à imaginer de la sous-structuration et de la Double Synthèse Modale de MEF mixte en utilisant des modes propres du MEF primal équivalent. Les modèles mixtes présentant 2 champs distincts (déplacements et contraintes dans notre cas), il s'agit de créer, pour chaque SS, une base modale pour les déplacements (la même qui serait utilisée dans un cas primal), et une autre base pour les contraintes, qui serait une projection d'une base en déplacements sur les contraintes associées à ces déplacements. Ainsi apparaît la possibilité de choisir une méthode et une troncature différente pour chacun des deux champs considérés. On peut ainsi construire une base complète pour chacune des SS mixtes, les réduire de façon classique, et les assembler avec des modes statiques de liaison (assemblage primal) ou des modes de branche si l'on souhaite réduire leurs jonctions. Bien que développées dans le cadre de MEF mixtes déplacements-contraintes généralisées pour structures "plaque", nos méthodes s'adaptent à n'importe quel type de MEF mixte déplacements-contraintes.

Dans un premier temps, nous décrivons la représentation de la frontière et la possibilité de la réduire au moyen de modes de branche, de la même façon que sur un MEF primal. Ensuite, nous décrivons les méthodes primales de modes libres et encastrés qui sont appliquées aux paramètres de déplacement, puis la façon de projeter des méthodes sur les paramètres de contraintes. Par la suite, nous présentons les différentes méthodes développées et les assemblages qui leur sont liés, pour enfin décrire la procédure globale de réduction.

De manière à abréger les notations, nous donnons des noms spécifiques à nos méthodes de réductions. La première partie du nom définit la méthode de synthèse des déplacements, tandis que la deuxième partie définit la méthode de synthèse des contraintes (dans les deux cas, "Fix" pour "encastré" et "Fre" pour "libre"). La troisième partie est un chiffre : 1 pour les méthodes où les paramètres de déplacements et de contraintes sont les mêmes, et 2 pour les méthodes où ces paramètres sont dissociés. Enfin, un dernier attribut (-br) permet d'indiquer l'utilisation de modes de branche, le cas échéant. Ainsi, la méthode "Fre-Fix-2-br" indique des modes libres sur les déplacements (Fre), des modes encastrés sur les contraintes (Fix), des paramètres dissociés pour les deux champs réduits (2) et l'utilisation de modes de branche (br). Le tableau 3.2 résume les différentes méthodes que nous avons implémentées.

Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas d'une structure composée de 2 SS (ce qui ne restreint pas la méthode). Un exposant $.^{(s)}$ est ajouté pour faire la distinction entre chaque SS s. Les indices i et j permettent de faire la distinction entre respectivement les DDL Internes de chaque SS et les DDL de Jonction (ou "de liaison" ou "de frontière") entre elles. Les indices FI des matrices font référence à des modes propres à interface fixe, tandis que les indices FR font référence à des modes libres. Le cas échéant, nous ajoutons également les indices (U) et (β) pour faire la distinction entre les champs de déplacements et de contraintes respectivement.

Nom des méthodes	Synthèse des paramètres		Modes de branches
	Déplacements	Contraintes	
Fix-Fix-1(/-br)	modes fixes (paramètres identiques)		Non(/Oui)
Fix-Fix-2(/-br)	modes fixes	modes fixes	Non(/Oui)
Fre-Fix-2(/-br)	modes libres	modes fixes	Non(/Oui)
Fre-Fre-1(/-br)	modes libres (paramètres identiques)		Non(/Oui)
Fre-Fre-2(/-br)	modes libres	modes libres	Non(/Oui)

TABLE 3.1: Méthodes de synthèse modale implémentées, types de modes utilisés et sections associées pour la réduction et l'assemblage

3.2 Réduction des paramètres de déplacements de la frontière

La méthode de réduction de frontière est basée sur une formulation primale en déplacements et c'est dans cette approche que nous décidons de représenter la jonction. En effet, nous assemblons les SS mixtes uniquement par les paramètres de déplacements (tout comme les EF eux-mêmes) et les matrices qui nous permettent de construire la réduction de la jonction proviennent du modèle primal équivalent. C'est la raison pour laquelle cette partie décrit la méthode sur les paramètres de déplacements du modèle primal équivalent. Il faudra ensuite replacer ces matrices dans la réduction du MEF mixte global, sur les paramètres de déplacements. On rappelle ici que les DDL de déplacements sont les mêmes sur les modèles mixtes et primaux équivalents. Par conséquent le passage de l'un à l'autre se fait de façon automatique.

3.2.1 Modes statiques de liaison

Les modes statiques de liaison sont propres à la méthode de "Craig & Bampton", mais leur définition est nécessaire à la description des modes de branche utilisés par nos méthodes. Leur principe est de représenter le comportement en déplacements d'une structure en fonction du déplacement de la jonction considérée. Il convient tout d'abord de séparer les DDL de déplacements internes (indice i) des DDL de jonction (indices j) de la façon suivante :

$$\boldsymbol{K}_{pri} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}_{pri} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_{ii} & \boldsymbol{M}_{ij} \\ \boldsymbol{M}_{ji} & \boldsymbol{M}_{jj} \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

La figure 3.1 représente bien la distinction entre DDL Internes i et de Jonction j. Les déplacements internes $\boldsymbol{U}_i^{(a)}$ d'une SS (a) induits par les déplacements $\boldsymbol{U}_j$ de la

jonction sont donnés par :

$$\boldsymbol{U}_i^{(a)} = \underbrace{(-\boldsymbol{K}_{ii}^{(a)-1}\,\boldsymbol{K}_{ij}^{(a)})}_{\boldsymbol{\Psi}_i^{(a)}}\,\boldsymbol{U}_j \tag{3.2}$$

avec $\boldsymbol{\Psi}_i^{(a)}$ les modes statiques de liaison de la sous-structure (a) pour la jonction considérée par les DDL j. Ainsi, les modes statiques de liaison de la structure globale (composée des deux SS (a) et (b)) sont donnés par :

$$\boldsymbol{\Psi}_s = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{\Psi}_j \\ \boldsymbol{\Psi}_i^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{K}_{ii}^{(a)-1}\boldsymbol{K}_{ij}^{(a)} \\ \boldsymbol{I}_{ij} \\ -\boldsymbol{K}_{ii}^{(b)-1}\boldsymbol{K}_{ij}^{(b)} \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

3.2.2 Modes de branche

Si l'on souhaite réduire la taille numérique de la jonction, et donc la taille de la matrice des modes statiques de liaison (cf. équation 3.3), plusieurs chercheurs ont proposé de construire une base de valeurs propres de la structure globale projetée sur les modes statiques de liaison [Bal96, Tra01, Tra09, BJ08]. Ainsi, les modes de branche $\boldsymbol{x}_{Bj}$ sont définis, pour une jonction j, par les solutions du problème aux valeurs propres suivantes :

$$[\boldsymbol{\Psi}_s^T \boldsymbol{K}_{tot} \boldsymbol{\Psi}_s - \omega^2 \boldsymbol{\Psi}_s^T \boldsymbol{M}_{tot} \boldsymbol{\Psi}_s]\boldsymbol{x}_{Bj} = 0 \tag{3.4}$$

La base $\boldsymbol{X}_{Bj}$ des modes de branche $\boldsymbol{x}_{Bj}$ prend le même espace que l'ensemble complet des modes statiques de liaison $\boldsymbol{\Psi}_s$. Le principe de la DSM sur un modèle primal est de tronquer la base $\boldsymbol{X}_{Bj}$ et de garder les modes qui correspondent à la bande fréquentielle qui nous intéresse.
Les modes de branche, une fois projetés sur la sous-structure (s), s'écrivent :

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^{(s)} = \boldsymbol{\Psi}_i^{(s)} \boldsymbol{X}_{Bj} \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{X}_{Bj}^{(s)} = \boldsymbol{I}_{jj} \boldsymbol{X}_{Bj} = \boldsymbol{X}_{Bj} \tag{3.6}$$

Ainsi, la matrice des modes statiques de liaison 3.3 devient celle des modes de branche, à savoir :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{X}_{Bi}^{(b)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{\Psi}_i^{(b)} \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

3.3 Réduction des paramètres de déplacements des sous-structures

De la même façon que pour la section 3.2, la méthode présentée ici est une méthode basée sur un MEF primal, ce qui correspond à notre approche puisque nous souhaitons construire la réduction des déplacements du MEF mixte à partir du MEF primal équivalent, en utilisant la même base. C'est donc sur la base du modèle primal que nous présentons cette synthèse modale. Il faudra ensuite replacer ces matrices de réduction dans les matrices de réduction mixtes.

3.3.1 Méthodes à interfaces fixes ou "de modes encastrés"

Sans modes de branche

La méthode des modes encastrés est une méthode primale qui sépare, pour chaque sous-structure (a), les DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ et internes $\boldsymbol{U}_i^{(a)}$. Elle projette les DDL d'une sous-structure (a) sur une base réduite composée de DDL généralisés $\boldsymbol{\eta}_{FI}^{(a)}$ correspondant à des modes encastrés et des DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ conservés dans le cas où l'on utilise pas de modes de branche :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i}^{(a)} & \boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FI}^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

avec $\boldsymbol{\Phi}_{FI\,i}^{(a)}$ la matrice tronquée des modes propres encastrés de la sous-structure (a) et $\boldsymbol{\Psi}_i^{(a)}$ les modes statiques de liaison définis dans l'équation 3.3. Les modes $\boldsymbol{\Phi}_{FI\,i}^{(a)}$ sont dits "encastrés" ou "à interfaces fixes" car ils sont calculés en supposant les DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ fixes.
La méthode telle qu'elle est décrite dans l'équation 3.8 correspond à la méthode de réduction de MEF primaux de "Craig & Bampton" [CB68].

Avec modes de branche

Si l'on décide d'utiliser des modes de branche, les DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ de la sous-structure sont remplacés par des DDL de branche $\boldsymbol{\eta}_B^{(a)}$ et la réduction se fait de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FI}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

avec $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix}^T$ les modes de branche tronqués définis dans l'équation 3.7. Le nombre de DDL restant après réduction pour la sous-structure (a) considérée est ainsi la somme du nombre de modes encastrés et de modes de branche conservés dans la troncature (au lieu du nombre de DDL internes et de jonction initialement).

On présentera désormais toutes les réductions avec des modes de branche à la place des modes statiques de liaison. Si l'on veut connaître le comportement de la structure avec des modes statiques de liaison simples à la place des modes de branche, il suffit de mettre la matrice 3.7 complète non tronquée, ou de remplacer les modes de branche par les modes statiques de liaisons initiaux.

3.3.2 Méthodes à interfaces libres ou "de modes libres"

La méthode des modes libres est analogue à la méthode des modes encastrés présentés dans la section 3.3.1. Pour chaque sous-structure (a), on sépare les DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ et internes $\boldsymbol{U}_i^{(a)}$, que l'on projette sur une base réduite composée de DDL $\boldsymbol{\eta}_{FR}^{(a)}$ correspondant à des modes libres tronqués et de DDL $\boldsymbol{\eta}_B^{(a)}$ de modes de branche :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FRi}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FRj}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FR}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

avec $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FRi}^{(a)} & \boldsymbol{\Phi}_{FRj}^{(a)} \end{Bmatrix}^T$ la base tronquée des modes propres libres de la sous-structure (a) et $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix}^T$ les modes de branche tronqués définis dans l'équation 3.7. Les modes $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FRi}^{(a)} & \boldsymbol{\Phi}_{FRj}^{(a)} \end{Bmatrix}^T$ sont dits "libres" ou "à interfaces libres" car ils sont calculés avec les DDL de jonction $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ considérés libres.

On rappelle que, pour toutes les réductions présentées dans cette section, les matrices constitutives ont été obtenues à partir du modèle primal équivalent ayant le même maillage que le modèle mixte que l'on cherche à réduire.

3.4 Projection des réductions sur les paramètres de contraintes

Les projections sur des modes encastrés et modes libres étant définies, il convient maintenant de décrire la projection des paramètres β de contraintes qui n'étaient pas traités jusque là. L'équation 2.20 décrite dans la section 2.5.2 donne un lien simple entre les paramètres $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{U}$. Dans le cas d'une sous-structure, on a :

$$\boldsymbol{\beta}^{(a)} = -(\boldsymbol{H}^{(a)})^{-1}\boldsymbol{G}^{(a)}\boldsymbol{U}^{(a)} \tag{3.11}$$

L'idée ici est de se servir de cette équation pour projeter les bases décrites en déplacements $\boldsymbol{U}^{(a)}$ dans les équations 3.9 et 3.10 sur les paramètres de contraintes $\boldsymbol{\beta}^{(a)}$. Ainsi, la réduction des contraintes se fait sur une nouvelle base qui est une projection d'une base modale primale.

3.4.1 Méthodes à interfaces fixes ou "de modes encastrés"

Dans le cas où l'on décide de projeter les contraintes sur une base de modes encastrés, cela revient à projeter l'équation 3.9 de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\beta}^{(a)} = \left\{ \boldsymbol{P}^{(a)} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i} \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad \boldsymbol{P}^{(a)} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{matrix} \right\} \right\} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \end{matrix} \right\} \tag{3.12}$$

avec $\boldsymbol{P}^{(a)} = -(\boldsymbol{H}^{(a)})^{-1}\boldsymbol{G}^{(a)}$. Les paramètres $\left\{ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \quad \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \right\}$ peuvent être considérés comme les paramètres modaux de contraintes résultant de la projection des déplacements modaux. La projection sur des modes encastrés sans modes de branche aurait donné une équation similaire à 3.12, avec cependant des composantes de l'équation 3.8 au lieu de 3.9, et des DDL de jonction $\boldsymbol{U}^{(a)}_{j}$ à la place des DDL de modes de branche $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B}$.

3.4.2 Méthodes à interfaces libres ou "de modes libres"

De la même façon, si l'on choisit des modes libres pour la projection des contraintes, on obtient la réduction suivante :

$$\boldsymbol{\beta}^{(a)} = \left\{ \boldsymbol{P}^{(a)} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j} \end{matrix} \right\} \quad \boldsymbol{P}^{(a)} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{matrix} \right\} \right\} \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \end{matrix} \right\} \tag{3.13}$$

Une fois de plus, la troncature des modes choisie détermine l'ampleur de la réduction du nombre de DDL. Il convient de noter que les paramètres modaux $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI}$ et respectivement $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR}$ peuvent être choisis identiques à ceux des équations 3.9 et 3.10 respectivement si la méthode de réduction et la troncature des déplacements choisies dans la section 3.3 sont les mêmes que celles souhaitées en contraintes (méthodes de type "1"), ou indépendant de ces paramètres (méthodes de type "2").

3.5 Application des réductions aux modèles éléments-finis mixtes

Il s'agit maintenant de mixer les différentes possibilités de réduction pour chacun des deux champs et d'implémenter des méthodes pour chacune de ces combinaisons de synthèse modale. Nous avons mis en place 5 méthodes différentes, avec pour chacune, possibilité d'utiliser des modes de branche ou non. La notation utilisée pour dénommer les méthodes a été définie dans l'introduction du chapitre, section 3.1. Le tableau 3.2 synthétise les méthodes que nous avons codées. Nous présentons la méthode Fix-Fix-1 en version "avec" et "sans" modes de branche pour une bonne compréhension. Toutes les autres méthodes sont ensuite présentées avec modes de branche (version "-br"). Il convient de noter que, par abus de langage, les méthodes

utilisant des modes libres sans réduction de la jonction sont dites “sans modes de branche”, mais elles sont en fait implémentées avec des modes de branche non-tronqués (cf. sections 3.3.2 et 3.4.2).
La définition des indices (U) et (β) de l'introduction 3.1 prend son sens ici pour différencier les composantes modales représentant respectivement les déplacements, et les contraintes. Il convient ici de noter la séparation des DDL de déplacements Internes i et de Jonctions j dans les matrices mixtes, de façon analogue à l'équation 3.1 primale :

$$\boldsymbol{K}_{mix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_i^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_j^T \\ \boldsymbol{G}_i & \boldsymbol{G}_j & \boldsymbol{H}_i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{M}_{mix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_{ii} & \boldsymbol{M}_{ij} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{ji} & \boldsymbol{M}_{jj} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

La figure 3.1 représente bien la distinction entre DDL Internes i et de Jonction j.

3.5.1 Méthode Fix-Fix-1(-br)

Dans cette section, on projette les déplacements sur une base composée de modes encastrés (section 3.3.1) et les contraintes sur une base projetée de modes encastrés (section 3.4.1). Il est important de comprendre que les composantes modales $\boldsymbol{\eta}^a_{FI\,(U,\beta)}$ représentent à la fois les déplacements et les contraintes (d'où l'indice (U,β)). En d'autres termes, la base $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(U)}$ composée de modes fixes pour les déplacements dans l'équation 3.8 est la même que la base $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)}$ utilisée pour les contraintes dans l'équation 3.12, en type et en troncature. Elles sont toutes les deux représentées par les composantes $\boldsymbol{\eta}^a_{FI\,(U,\beta)}$ pour chaque mode.

Méthode Fix-Fix-1 sans modes de branche

Si l'on n'utilise pas de modes de branche, on se réfère à l'équation 3.8 et 3.12 sans modes de branche. La réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI\,(U,\beta)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

avec

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(U)} & \boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{I}_{ij} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

Méthode Fix-Fix-1-br avec modes de branche

Si l'on utilise des modes de branche, on se réfère à l'équation 3.9 et 3.12. La réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FI\,(U,\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

avec

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

3.5.2 Méthode Fix-Fix-2(-br)

Dans cette section, nous projetons aussi les déplacements sur une base composée de modes encastrés (section 3.3.1) et les contraintes sur une base projetée de modes encastrés (section 3.4.1). Néanmoins, la différence avec la méthode Fix-Fix-1 réside dans les composantes modales. Ici, les composantes représentant les déplacements $\boldsymbol{\eta}_{FI\,(U)}^{(a)}$ sont différentes de celles représentant les contraintes $\boldsymbol{\eta}_{FI\,(\beta)}^{(a)}$. Bien que le type de mode soit le même pour les deux bases $\boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(U)}^{(a)}$ et $\boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(\beta)}^{(a)}$, la troncature peut être différente et les composantes des déplacements et des contraintes sont respectivement séparées en $\boldsymbol{\eta}_{FI\,(U)}^{(a)}$ et $\boldsymbol{\eta}_{FI\,(\beta)}^{(a)}$.
Si l'on utilise des modes de branche, la réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FI\,(U)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_{FI\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

avec

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

3.5.3 Méthode Fre-Fix-2(-br)

Dans cette section, nous projetons aussi les déplacements sur une base composée de modes libres (section 3.3.2) et les contraintes sur une base projetée de modes encastrés (section 3.4.1). De la même façon que pour la méthode Fix-Fix-2, les composantes modales $\boldsymbol{\eta}_{FR\,(U)}^{(a)}$ représentant les déplacements et $\boldsymbol{\eta}_{FI\,(\beta)}^{(a)}$ représentant les contraintes

sont séparées, ce qui peut paraître plus logique pour cette méthode, puisque le type de mode utilisé pour les deux champs est différent. La troncature peut aussi être différente.
Si l'on utilise des modes de branche, la réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FR\,(U)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_{FI\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

avec

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FI\,i\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

3.5.4 Méthode Fre-Fre-1(-br)

Dans cette section, on projette les déplacements sur une base composée de modes libres (section 3.3.2) et les contraintes sur une base projetée de modes libres (section 3.4.2). De façon analogue à la méthode Fix-Fix-1, il est important de comprendre que les composantes modales $\boldsymbol{\eta}_{FR\,(U,\beta)}^{a}$ représentent à la fois les déplacements et les contraintes (d'où l'indice (U, β)). Ainsi, la base $\boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(U)}^{(a)}$ composée de modes libres pour les déplacements dans l'équation 3.10 est la même que la base $\boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(\beta)}^{(a)}$ utilisée pour les contraintes dans l'équation 3.13, en type et en troncature. Elles sont toutes les deux représentées par les composantes $\boldsymbol{\eta}_{FR\,(U,\beta)}^{a}$ pour chaque mode.
Si l'on utilise des modes de branche, la réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FR\,(U,\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

avec

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(\beta)}^{(a)} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

3.5.5 Méthode Fre-Fre-2(-br)

Dans cette section, nous projetons aussi les déplacements sur une base composée de modes libres (section 3.3.2) et les contraintes sur une base projetée de modes libres (section 3.4.2). Néanmoins, de façon analogue à la méthode Fix-Fix-2, la différence

avec la méthode Fre-Fre-1 réside dans les composantes modales. Ici, les composantes représentant les déplacements $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)}$ sont différentes de celles représentant les contraintes $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(\beta)}$. Bien que le type de mode soit le même pour les deux bases $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(U)}$ et $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(\beta)}$, la troncature peut être différente et les composantes des déplacements et des contraintes sont respectivement séparés en $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)}$ et $\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(\beta)}$.
Si l'on utilise des modes de branche, la réduction d'une sous-structure (a) est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

où

$$\boldsymbol{T}^{(a)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(U)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(U)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(\beta)} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

Il est important de noter ici que, nos méthodes de projection nécessitant l'utilisant de modes provenant du MEF primal équivalent, il faut assembler à la fois les modèles mixtes et primaux équivalents en même temps pour chacune des SS.

3.5.6 Synthèse

Le tableau 3.2 résume les différentes méthodes utilisées, les modes de réductions qui leur sont associés pour les déplacements et les contraintes, l'utilisation ou non de modes de branche, et les sections associées pour la méthodologie de réduction et d'assemblage

3.6 Assemblage des sous-structures

3.6.1 Méthodes d'assemblage

Après avoir réduit chacune des SS, il s'agit maintenant de les assembler pour reconstruire la structure globale réduite. Dans cette section, nous implémentons l'assemblage pour deux SS (a) et (b), ce qui ne restreint pas la méthode.
Il existe différentes méthodes d'assemblage, telles que les méthodes hybrides, implicites ou explicites, les connexions primales ou duales avec des liens en formulation forte ou faible.
Dans ce travail, nous assemblons les deux SS par une formulation forte explicite en déplacements. Nous utilisons la même liaison que celle utilisée pour l'assemblage des

Nom des Méthodes	Modes de réduction Déplacement	Contrainte	Modes de branche	Section Réduction	Assemblage
Fix-Fix-1	Fixes, mêmes composants		Non	3.5.1	3.6.2
Fix-Fix-1-br			Oui	3.5.1	3.6.2
Fix-Fix-2	Fixes	Fixes	Non	3.5.2	3.6.3
Fix-Fix-2-br			Oui		
Fre-Fix-2	Libres	Fixes	Non	3.5.3	3.6.4
Fre-Fix-2-br			Oui		
Fre-Fre-1	Libres, mêmes composants		Non	3.5.4	3.6.5
Fre-Fre-1-br			Oui		
Fre-Fre-2	Libres	Libres	Non	3.5.5	3.6.6
Fre-Fre-2-br			Oui		

TABLE 3.2: Méthodes de synthèses modales implémentées, types de modes utilisés et section associées pour la réduction et l'assemblage

EF (cf. sections 1.3.5 et 1.4.5) à savoir :

$$\boldsymbol{U}_j^{(a)} = \boldsymbol{U}_j^{(b)} = \boldsymbol{U}_j \tag{3.27}$$

La connexion en contraintes est implicite, et dérive de l'assemblage en déplacements par l'équation 2.20.
Dans le cas où l'on se passe de modes de branche, les DDL de l'équation 3.27 dits "physiques" sont conservés après réduction, et par conséquent l'assemblage est direct. En revanche l'utilisation de modes de branche mène à différentes formulations et complexifie l'équation 3.27, en fonction de la méthode de réduction des déplacements que l'on a choisie (modes fixes ou libres).

Avec des modes encastrés et des modes de branche

L'utilisation de modes encastrés pour la projection des déplacements se retrouve dans les méthodes Fix-Fix-1 (3.5.1) et Fix-Fix-2 (3.5.2). Dans ce cas, les équations 3.27 et 3.9 mènent à la forme suivante :

$$\boldsymbol{X}_{Bj}^{(a)}\boldsymbol{\eta}_B^{(a)} = \boldsymbol{X}_{Bj}^{(b)}\boldsymbol{\eta}_B^{(b)} \tag{3.28}$$

Or, pour chaque liaison entre deux SS, on a : $\boldsymbol{X}_{Bj}^{(a)} = \boldsymbol{X}_{Bj}^{(b)} = \boldsymbol{X}_{Bj}$. Ce qui revient donc à l'équation suivante

$$\boldsymbol{\eta}_B^{(b)} = \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \tag{3.29}$$

Donc l'égalité des déplacements d'interface devient une égalité des modes de branche de cette interface.

Avec des modes encastrés et des modes de branche

L'utilisation de modes libres pour la projection des déplacements se retrouve dans les méthodes Fre-Fix-2 (3.5.3), Fre-Fre-1 (3.5.4) et Fre-Fre-2 (3.5.5). Dans ce cas, les équations 3.27 et 3.10 mènent à la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(U)}\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)} + \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bj}\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} = \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,j\,(U)}\boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FR\,(U)} + \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bj}\boldsymbol{\eta}^{(b)}_{B} \tag{3.30}$$

Or, pour chaque liason entre deux sous-structures, on a : $\boldsymbol{X}^{(a)}_{Bj} = \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bj} = \boldsymbol{X}_{Bj}$. Ce qui revient donc à l'équation suivante

$$\boldsymbol{\eta}^{(b)}_{B} = (\boldsymbol{X}^{-1}_{Bj}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(U)})\,\boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)} + \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} + (-\boldsymbol{X}^{-1}_{Bj}\boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,j\,(U)})\,\boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FR\,(U)} \tag{3.31}$$

3.6.2 Méthode Fix-Fix-1(-br)

Méthode Fix-Fix-1 sans modes de branche

Pour la méthode Fix-Fix-1 sans utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.27 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{U}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI\,(U,\beta)} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(U,\beta)} \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(U)} & \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Psi}^{(b)}_{i} & \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(U)} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{I}_{ij} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{I}_{ij} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

Méthode Fix-Fix-1-br avec modes de branche

Pour la méthode Fix-Fix-1-br avec utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.29 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{U}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI\,(U,\beta)} \\ \boldsymbol{\eta}_{B} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(U,\beta)} \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(U)} & \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} & \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(U)} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

3.6.3 Méthode Fix-Fix-2(-br)

Pour la méthode Fix-Fix-2-br avec utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.29 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{U}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI\,(U)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\eta}_{B} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(U)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(\beta)} \end{Bmatrix} \tag{3.36}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(U)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} & \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(U)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

3.6.4 Méthode Fre-Fix-2(-br)

Pour la méthode Fre-Fix-2-br avec utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.31 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{U}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FR\,(U)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FI\,(\beta)} \end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(U)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(U)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} & \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,i\,(U)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FI\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

3.6.5 Méthode Fre-Fre-1(-br)

Pour la méthode Fre-Fre-1-br avec utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.31 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{(a)}_{i} \\ \boldsymbol{U}_{j} \\ \boldsymbol{U}^{(b)}_{i} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FR\,(U,\beta)} \\ \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{B} \\ \boldsymbol{\eta}^{(b)}_{FR\,(U,\beta)} \end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(U)} & \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(U)} & \boldsymbol{X}_{Bj} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} & \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,i\,(U)} \\ \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FR\,j\,(\beta)} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(a)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}^{(b)}_{Bi} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,i\,(\beta)} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(b)}_{FR\,j\,(\beta)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

3.6.6 Méthode Fre-Fre-2(-br)

Pour la méthode Fre-Fre-1-br avec utilisation de modes de branche, la réduction de l'assemblage des structures $(a+b)$, à l'aide de l'équation 3.31 est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_i^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j \\ \boldsymbol{U}_i^{(b)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \\ \boldsymbol{\beta}^{(b)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FR\,(U)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_{FR\,(\beta)}^{(b)} \\ \boldsymbol{\eta}_B^{(a)} \\ \boldsymbol{\eta}_{FR\,(U)}^{(b)} \\ \boldsymbol{\eta}_{FR\,(\beta)}^{(b)} \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

avec

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(U)}^{(a)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bj} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{Bi}^{(b)} & \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(U)}^{(b)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(\beta)}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(\beta)}^{(a)} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{P}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(a)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{Bi}^{(b)} \\ \boldsymbol{X}_{Bj} \end{Bmatrix} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}^{(b)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{FR\,i\,(\beta)}^{(b)} \\ \boldsymbol{\Phi}_{FR\,j\,(\beta)}^{(b)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

3.7 Procédure globale de réduction

La figure 3.2 synthétise la procédure globale de calcul de réponse d'une structure par l'utilisation préalable d'une de nos méthodes de sous-structuration modale. Les indices *pri*, *mix* et *red* représentent respectivement les MEF primaux, mixtes, et mixtes réduits.

Pour une meilleure compréhension du schéma 3.2, il convient de différencier les deux principaux axes de travail en partant du maillage. L'axe de gauche concerne le modèle primal, tandis que l'axe de droite concerne les actions sur le modèle mixte. Les différentes étapes peuvent s'expliquer de la façon suivante :

- il faut tout d'abord construire en parallèle les matrices $\boldsymbol{K}_{pri}$ / $\boldsymbol{M}_{pri}$ et $\boldsymbol{K}_{mix}$ / $\boldsymbol{M}_{mix}$ constitutives du maillage de la structure complète ;

- il faut ensuite effectuer la même chose pour les matrices $\boldsymbol{K}_{pri}^{(a)}$ / $\boldsymbol{M}_{pri}^{(a)}$ et $\boldsymbol{K}_{mix}^{(a)}$ / $\boldsymbol{M}_{mix}^{(a)}$ correspondant à chacune des SS ;

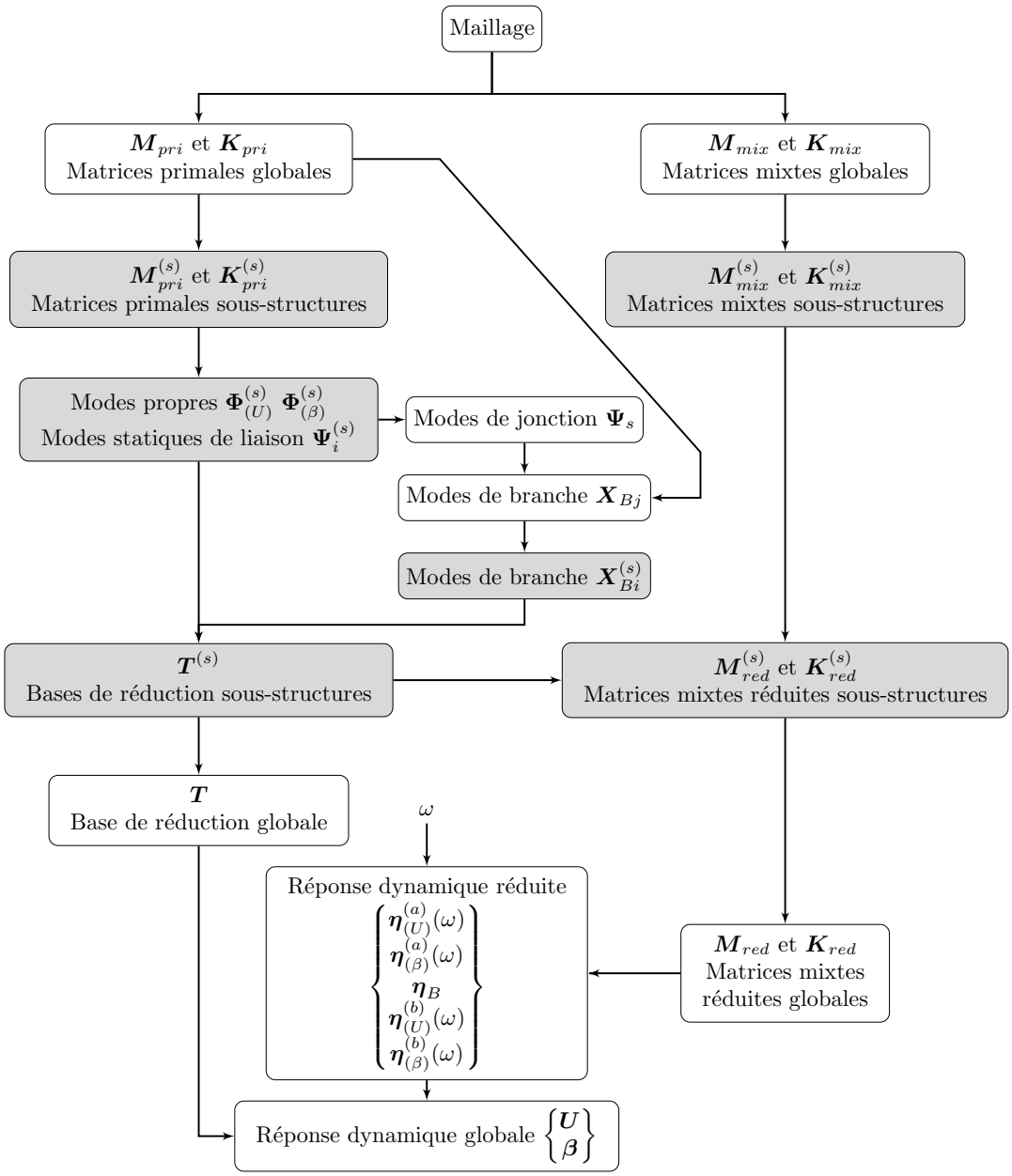


FIGURE 3.2: Calcul de la réponse dynamique d'une structure globale à l'aide de nos méthodes de sous-structuration modales (niveau de la structure globale en noir, niveau de la sous-structure (s) en gris). Chaque bloc a besoin de toutes ses entrées pour être compilé

– il s'agit ensuite d'utiliser les matrices primales des SS $\boldsymbol{K}_{pri}^{(a)}$ / $\boldsymbol{M}_{pri}^{(a)}$ de façon à construire les matrices $\boldsymbol{T}^{(a)}$ de réduction de chacune des SS ;

– une fois ces matrices obtenus, on peut réduire chacune des SS mixtes et ainsi obtenir les matrices $\boldsymbol{K}_{red}^{(a)}$ / $\boldsymbol{M}_{red}^{(a)}$;

– on obtient ainsi les matrices globales mixtes réduites du maillage complet $\boldsymbol{K}_{red}$ / $\boldsymbol{M}_{red}$, et on peut calculer la réponse dynamique de la structure globale réduite ;

– on peut remonter (si besoin est) à la réponse de la structure dans la base physique à l'aide de la matrice de réduction globale $\boldsymbol{T}$.

3.8 Conclusions

Le travail de ce chapitre nous a permis de mettre en place de nouvelles méthodes de sous-structuration modale spécifiquement adaptées aux MEF mixtes déplacements/contraintes. Ces méthodes sont basées sur une utilisation des modes propres tirés du MEF primal équivalent de chacune des sous-structures, et sont caractérisées par une séparation des synthèses des différents champs du modèle mixte. Dans ce cadre, nous avons implémenté 10 méthodes de sous-structuration (voir le tableau récapitulatif 3.2) sous Matlab. Les algorithmes et la Toolbox mis en place permettent, à partir du maillage de la structure et des sous-structures choisies et du type de réduction choisi, de réduire n'importe quelle structure EF mixte déplacements-contraintes, sur le principe de nos méthodes. Le schéma 3.3 donne le fonctionnement général de cette Toolbox de réduction. La formulation de ces méthodes les rend transposables à d'autres types de MEF multi-champs.

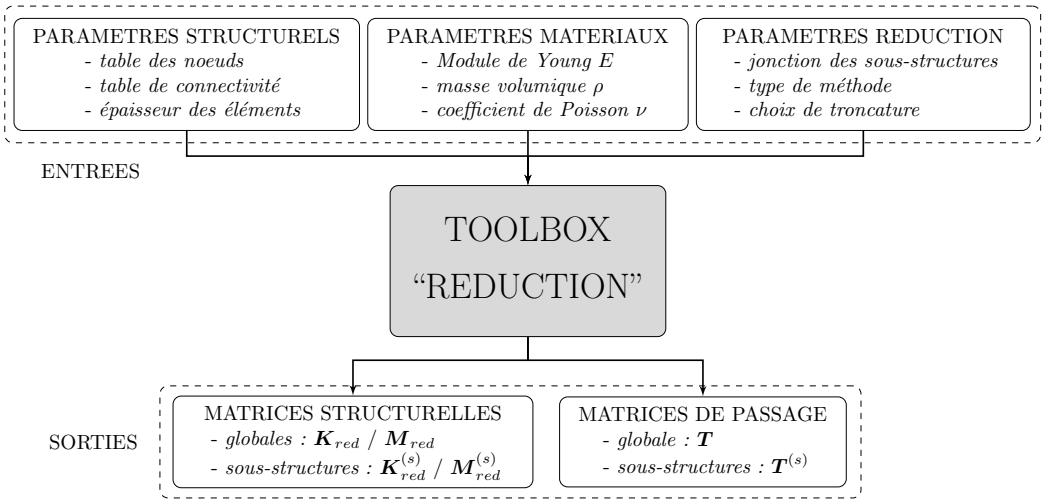


FIGURE 3.3: Schéma entrées/sorties global de la Toolbox de réduction mise en place

Chapitre 4

Convergence des méthodes de réduction

Le but de ce chapitre est de tester la convergence des méthodes de réduction définies dans le chapitre 3 sur une structure académique EF composée de deux Sous-Structures (SS), en fonction du nombre de modes gardés dans les troncatures des déplacements, des contraintes et des modes de branche. Pour cela, nous comparons les comportements dynamiques des structures mixtes réduites à l'aide de nos méthodes et ceux des structures mixtes non-réduites. Dans un premier temps, on définit les caractéristiques de la structure test et du MEF que l'on utilise pour la modéliser. Dans un second temps, nous décrivons la méthode d'étude de convergence. Ensuite nous étudions la convergence des méthodes en fonction de la troncature des modes propres seuls des SS, pour enfin analyser l'influence d'une troncature des modes de jonction sur ces dernières. Enfin, nous concluons sur l'intérêt de nos différentes méthodes.

4.1 Structure "exemple" composée de deux sous-structures

La structure exemple sur laquelle nous vérifions la convergence de nos méthodes de réduction est schématisée figure 4.1. Elle est encastrée sur un côté de façon à éviter tout phénomène de mode de corps rigide. Sa modélisation se fait avec le MEF mixte de la théorie de KL (voir la section 1.3). La structure est composée de 922 éléments et 11256 DDL, l'épaisseur choisie est de $1mm$ et les caractéristiques choisies pour l'application numérique sont indiquées dans le tableau 2.1. On se propose de la diviser en deux SS, composées respectivement de 414 et 922 éléments. La structure étudiée n'appartient pas à un système industriel réel, néanmoins, la modélisation EF rend la méthode transposable à n'importe quel MEF mixte de grande taille, moyennant une implémentation trop longue pour être effectuée dans le cadre de cette thèse.

Le tableau 4.1 synthétise les caractéristiques de nombre d'éléments et de DDL de la structure globale et des deux SS.
Les différentes troncatures de modes internes testées sont résumées dans le tableau 4.2. Nous appelons "$n-p$" une troncature de n modes en déplacements et p modes en contraintes, quelle que soit la méthode de synthèse modale.
On tronque ensuite les modes de branche sur les méthodes qui ont des résultats

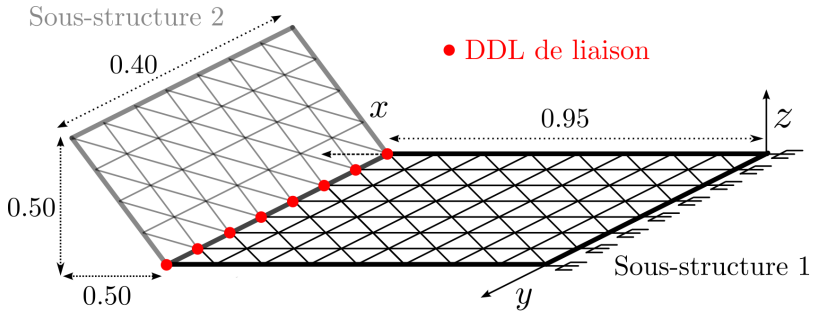


FIGURE 4.1: Structure "double" en théorie des plaques de Kirchhoff-Love (en m)

satisfaisants avec troncature des modes internes. Nous appelons ainsi "$n-p-k$" une troncature "$n-p$" avec k modes de branche.

Plate	Éléments	DDL	DDL de déplacements	DDL de contraintes	DDL de jonction
Struct totale	922	11256	2958	8298	/
Sous-struct 1	414	5064	1338	3726	102
Sous-struct 2	510	6294	1722	4572	102

TABLE 4.1: Caractéristiques de la structure exemple

4.2 Méthode d'étude de convergence

4.2.1 Critères

Il s'agit ici de trouver une méthode pour comparer la dynamique de la structure avec le MEF mixte non réduit, et celle des MEF mixtes réduits avec les méthodes décrites dans le chapitre 3. De façon analogue à la méthode de la section 2.2.1, la procédure de vérification de convergence est composée de deux critères. Le premier des deux est l'erreur relative 4.1 entre les fréquences propres $f_{\text{i,mixed}}$ du mode i du MEF mixte et les fréquences propres $f_{\text{i,mixed reduced}}$ du MEF mixte réduit avec la méthode choisie :

$$\epsilon_{\text{i,red/mix}} = \frac{abs(f_{\text{i,mixed reduced}} - f_{\text{i,mixed}})}{f_{\text{i,mixed}}} \tag{4.1}$$

Dans notre cas, on considère qu'un mode i a une fréquence propre "satisfaisante" si :

$$\epsilon_{\text{i,red/mix}} \leqslant 3\% \tag{4.2}$$

Méthode de sous-structuration	Nom	Modes U par SS	Modes β par SS	Modes de branche	DDL
Aucune		Modèle primal non-réduit			2958
Aucune		Modèle mixte non-réduit			11256
Fix-Fix-1	5-5	5	5	Non	112
Fix-Fix-1	10-10	10	10	Non	122
Fix-Fix-1	20-20	20	20	Non	142
Fix-Fix-1	40-40	40	40	Non	182
Fix-Fix-1	60-60	60	60	Non	222
Fix-Fix-1	80-80	80	80	Non	262
Fix-Fix-2	5-5	5	5	Non	122
Fix-Fix-2	10-10	10	10	Non	142
Fix-Fix-2	20-20	20	20	Non	182
Fix-Fix-2	40-40	40	40	Non	262
Fix-Fix-2	60-60	60	60	Non	342
Fix-Fix-2	80-80	80	80	Non	422
Fre-Fix-2	20-20	20	20	Non	182
Fre-Fix-2	40-40	40	40	Non	262
Fre-Fix-2	60-60	60	60	Non	342
Fre-Fix-2	80-80	80	80	Non	422
Fre-Fix-2	150-150	150	150	Non	702
Fre-Fix-2	200-200	200	200	Non	902
Fre-Fre-1	20-20	20	20	Non	142
Fre-Fre-1	40-40	40	40	Non	182
Fre-Fre-1	60-60	60	60	Non	222
Fre-Fre-1	80-80	80	80	Non	262
Fre-Fre-1	100-100	100	100	Non	302
Fre-Fre-2	20-20	20	20	Non	182
Fre-Fre-2	40-40	40	40	Non	262
Fre-Fre-2	60-60	60	60	Non	342
Fre-Fre-2	80-80	80	80	Non	422
Fre-Fre-2	100-100	100	100	Non	502
Fre-Fre-2	150-150	150	150	Non	02

TABLE 4.2: Différentes troncatures implémentées pour chaque synthèse modale et nombre de modes par champ associé

Le second critère est un critère de MAC qui compare les formes des modes propres du modèles mixtes et celles du modèle mixte réduit.

$$MAC(i,j) = \frac{(\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{Y}_j)^2}{(\boldsymbol{X}_i^T \boldsymbol{X}_i)(\boldsymbol{Y}_j^T \boldsymbol{Y}_j)} \tag{4.3}$$

avec X_i le vecteur propre du mode i du modèle mixte et Y_j le vecteur propre du mode j du modèle mixte réduit, en prenant tous les paramètres. De façon analogue au critère de MAC utilisé dans la section 2.2.1, les résultats sont bons si :

$$\text{si } i = j \text{ alors } MAC(i,j) \simeq 1 \tag{4.4}$$

Contrairement à l'étude de convergence du chapitre 2, il n'est pas nécessaire ici de différencier la convergence en déplacements et en contraintes, dans la mesure où les deux critères précédemment cités prennent en compte les paramètres des deux champs (contrairement au critère de MAC 2.3 de la section 2.2.1 qui ne considérait que les paramètres de déplacements).

4.2.2 Représentation des résultats

Troncature des modes internes

Les résultats se présentent sous la forme de deux graphiques par méthode (figures 4.2, 4.4, 4.6, 4.8 et 4.10, et figures 4.3, 4.5 4.7, 4.9 et 4.11). Chaque graphique contient des sous-graphiques pour chacune des troncatures étudiées. Le tableau 4.3 synthétise les résultats obtenus pour la troncature des modes internes (sans modes de branche).

Le premier graphique est analogue à ceux de la section 2.2.1 : il s'agit de l'erreur relative (équation 4.1) sur les fréquences propres en fonction du mode i, comparée à une limite arbitraire de 3%. Chaque marqueur donne un aperçu du critère de MAC (équation 4.3) du mode i, de la façon suivante :
- marqueur noir : $MAC(i,i) \geqslant 0.8$ (critère "bon") ;
- marqueur gris : $0.5 \leqslant MAC(i,i) < 0.8$ (critère "moyen") ;
- marqueur blanc : $MAC(i,i) < 0.5$ (critère "mauvais").

Le second graphique montre les matrices des critères de MAC comparant les modèles mixtes non-réduits et réduits. Il permet d'avoir une vue d'ensemble rapide des correspondances entre les modes pour les différentes troncatures.

Le tableau 4.3 résume les résultats pour chacune des méthodes pour les différentes troncatures étudiées.
Pour analyser ce tableau, il faut noter que la plupart des résultats donnent de bonnes représentations modales en fréquence et en forme pour de basses fréquences jusqu'à

une certaine limite en fréquence. Limite qui tend à augmenter à mesure que l'on augmente le nombre de modes conservés dans la troncature. C'est le sens des "limites" en "mode/fréquence" du tableau 4.3. Le lecteur notera qu'il est plus intéressant de s'attarder sur la limite en mode qu'en fréquence, dans la mesure où les résultats modaux restent les mêmes avec un changement d'épaisseur, alors que les fréquences associées à ces modes évoluent nécessairement.
Cependant, en fonction de la méthode et de la troncature, on note l'apparition, dans la bande fréquentielle convergée, de modes avec un des deux critères, ou les deux, déficients (voir section 4.2.1) à savoir une erreur relative qui n'est pas "satisfaisante" ($\epsilon_{\text{i,red/mix}} \geqslant 3\%$) et/ou un critère de MAC "moyen" ou "mauvais" (voir 4.4). Nous les appelons des "modes singuliers" (MS).
Le tableau 4.3 analyse donc les deux points clés suivant : la limite en fréquence et le nombre/la densité de MS dans la bande fréquentielle supposée convergée pour chacune des méthodes. En fonction de cette densité, la qualité de la méthode peut être détériorée même si la bande fréquentielle est bonne.

Troncature des modes de branche

Dans le cas où l'on cherche à étudier l'influence des modes de branche (section 4.4), l'analyse est différente. Il s'agit en fait d'étudier l'impact d'une troncature de ces DDL de jonction dans le cas des méthodes et troncatures des modes internes qui ont correctement fonctionné dans la section 4.3.
En pratique, on constate que la limite en fréquence ne varie pas avec la troncature des modes de branche, mais la densité de MS évolue. On trace, pour chaque méthode/troncature concluante de la section 4.3, l'évolution de la densité de MS en fonction du nombre de modes de branche conservés dans la jonction. Ces graphiques se retrouvent figures 4.12 et 4.13.

4.3 Troncature des modes propres

Cette section fait le point sur la convergence des méthodes de réduction décrites dans le chapitre 3, en se concentrant uniquement sur la troncature des modes internes à chaque SS pour les champs de déplacements et contraintes. Nous étudions dans la section suivante la troncature et l'utilisation des modes de branche.

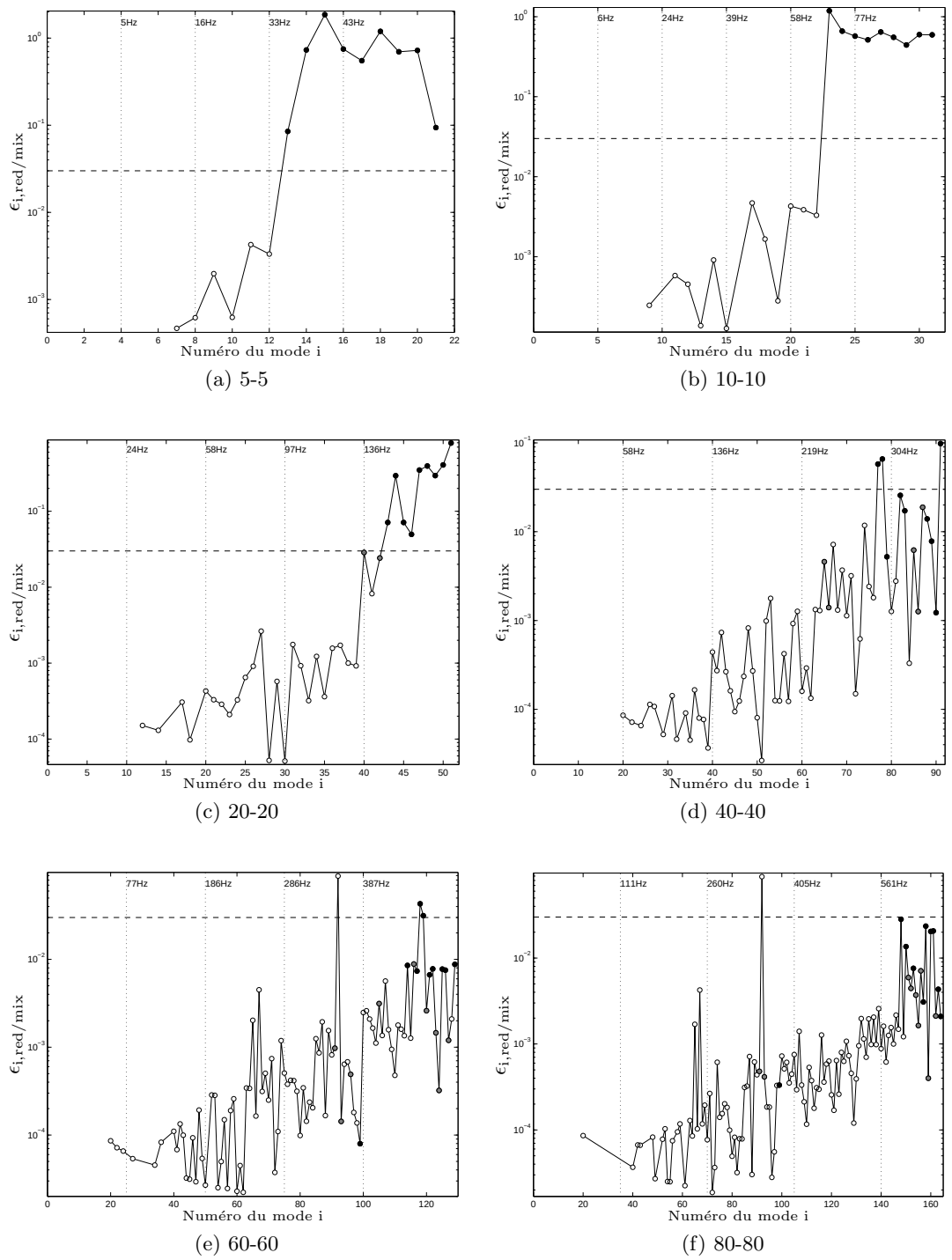
Pour une vue synthétique des résultats, le lecteur peut se reporter au tableau 4.3. La série de figures 4.2, 4.4, 4.6, 4.8 et 4.10, et les figures 4.3, 4.5 4.7, 4.9 et 4.11 permettent de rentrer dans le détail pour chacune des troncatures, en ce qui concerne respectivement les erreurs relatives et les critères de MAC.

4.3.1 Méthode Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2

Les résultats pour les méthodes Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2 sont montrés respectivement dans les figures 4.2 et 4.3 et les figures 4.4 et 4.5, et synthétisés dans le tableau 4.3.

Méthode	Nom	Figures		Limite		MS		DDL
		erreur	MAC	mode	freq(Hz)	nb	%	
		Modèle primal non-réduit						2958
		Modèle mixte non-réduit						11256
Fix-Fix-1	5-5	4.2a	4.3a	12	33	0	0%	112
Fix-Fix-1	10-10	4.2b	4.3b	22	70	0	0%	122
Fix-Fix-1	20-20	4.2c	4.3c	42	149	2	4.8%	142
Fix-Fix-1	40-40	4.2d	4.3d	76	290	2	2.6%	182
Fix-Fix-1	60-60	4.2e	4.3e	113	447	6	5.3%	222
Fix-Fix-1	80-80	4.2f	4.3f	147	580	4	2.7%	262
Fix-Fix-2	5-5	4.4a	4.5a	12	33	0	0%	122
Fix-Fix-2	10-10	4.4b	4.5b	22	70	0	0%	142
Fix-Fix-2	20-20	4.4c	4.5c	42	149	2	4.8%	182
Fix-Fix-2	40-40	4.4d	4.5d	76	290	2	2.6%	262
Fix-Fix-2	60-60	4.4e	4.5e	113	447	6	5.3%	342
Fix-Fix-2	80-80	4.4f	4.5f	147	580	4	2.7%	422
Fre-Fix-2	20-20	4.6a	4.7a	34	110	23	68%	182
Fre-Fix-2	40-40	4.6b	4.7b	66	242	42	64%	262
Fre-Fix-2	60-60	4.6c	4.7c	102	385	59	58%	342
Fre-Fix-2	80-80	4.6d	4.7d	136	530	68	50%	422
Fre-Fix-2	150-150	4.6e	4.7e	260	1100	148	57%	702
Fre-Fix-2	200-200	4.6f	4.7f	325	1500	201	62%	902
Fre-Fre-1	20-20	4.8a	4.9a	27	90	17	63%	142
Fre-Fre-1	40-40	4.8b	4.9b	65	241	29	45%	182
Fre-Fre-1	60-60	4.8c	4.9c	89	338	26	29%	222
Fre-Fre-1	80-80	4.8d	4.9d	131	518	52	40%	262
Fre-Fre-1	100-100	4.8e	4.9e	142	568	62	44%	302
Fre-Fre-2	20-20	4.10a	4.11a	27	90	21	78%	182
Fre-Fre-2	40-40	4.10b	4.11b	65	241	18	28%	262
Fre-Fre-2	60-60	4.10c	4.11c	89	338	7	8%	342
Fre-Fre-2	80-80	4.10d	4.11d	131	518	21	16%	422
Fre-Fre-2	100-100	4.10e	4.11e	165	661	22	13%	502
Fre-Fre-2	150-150	4.10f	4.11f	239	992	20	8%	702

TABLE 4.3: Synthèse des résultats pour les différents méthodes de synthèses modales et troncatures des modes internes (pas de modes de branche)

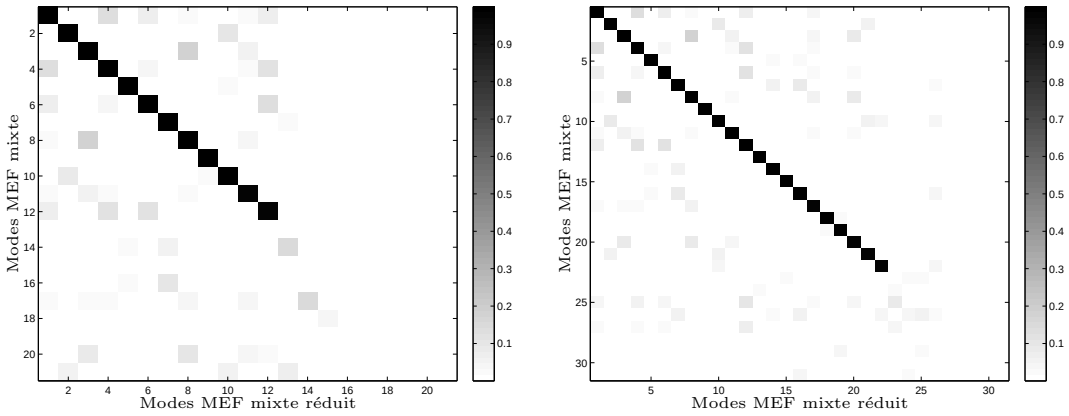


(a) 5-5 (b) 10-10

(c) 20-20 (d) 40-40

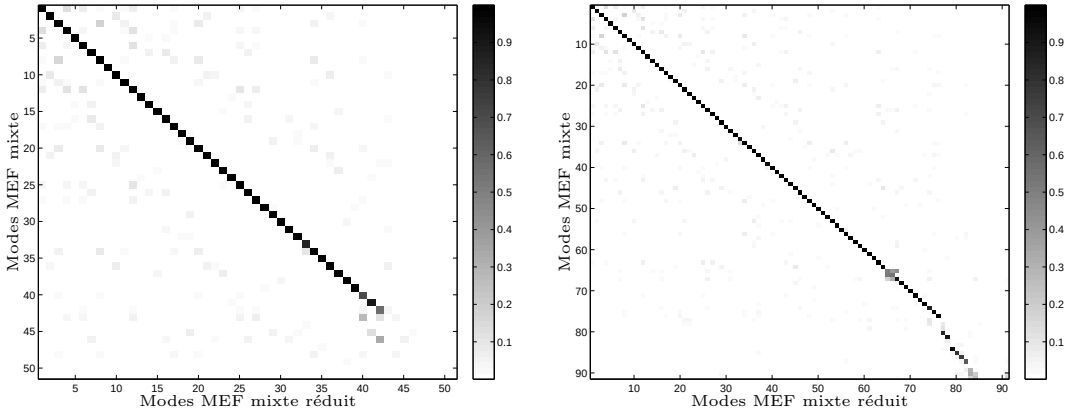
(e) 60-60 (f) 80-80

FIGURE 4.2: Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{i,red/mix}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-1 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80)



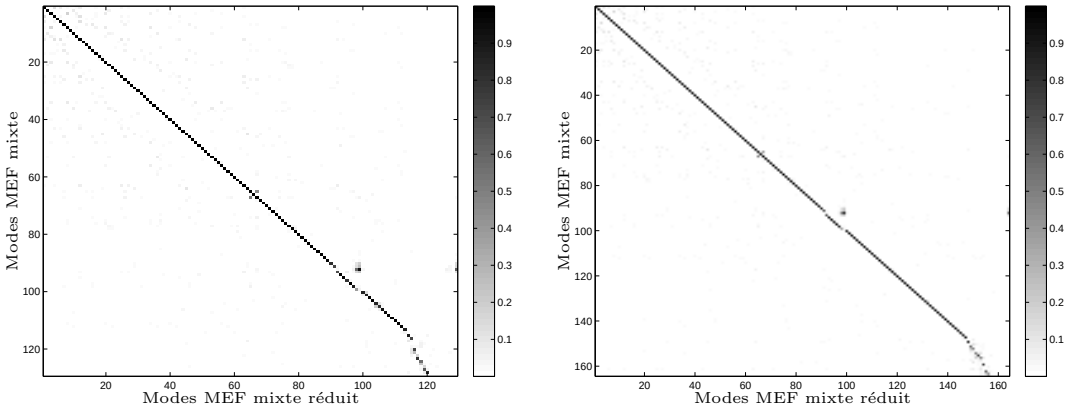
(a) 5-5

(b) 10-10



(c) 20-20

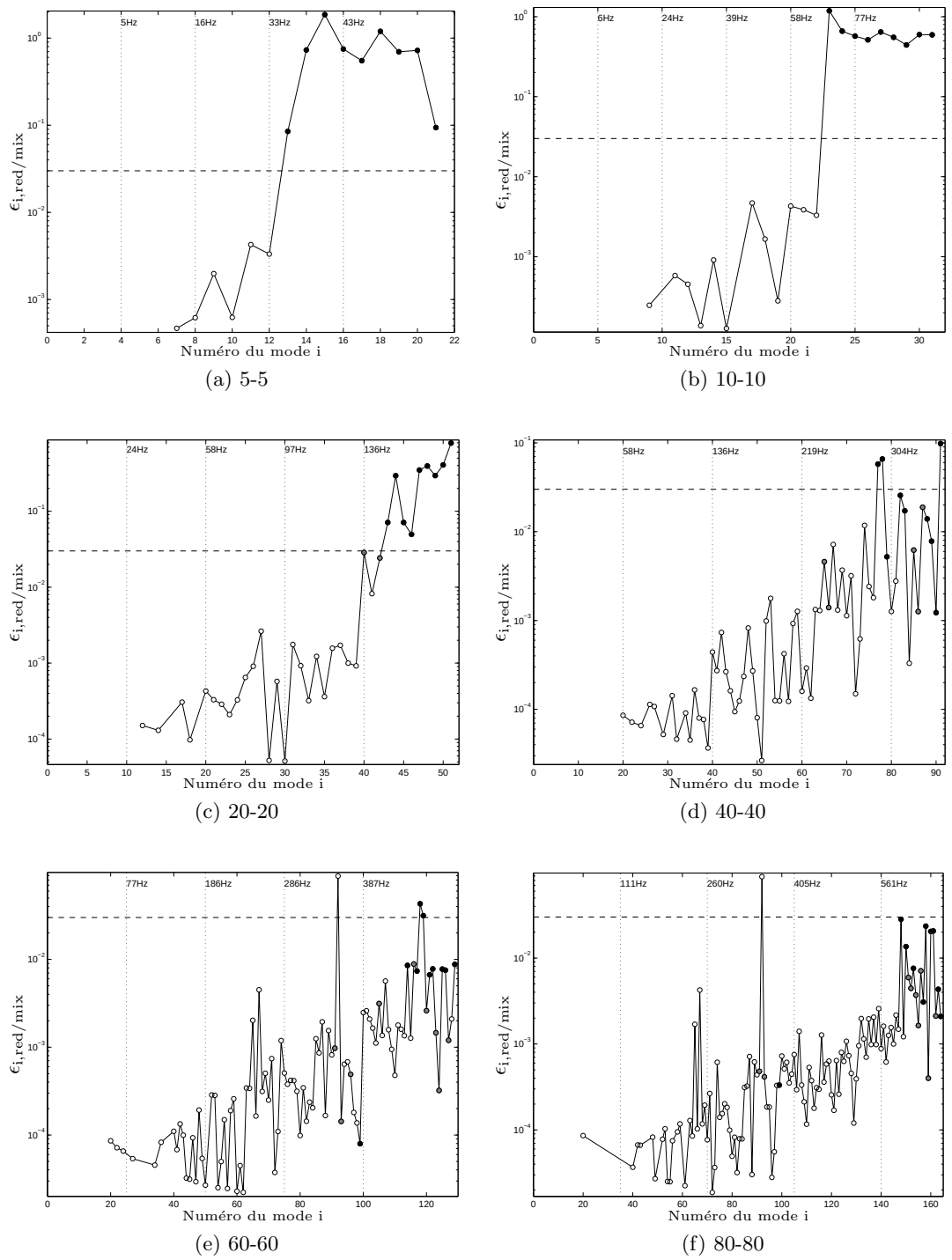
(d) 40-40



(e) 60-60

(f) 80-80

FIGURE 4.3: Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-1 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80)

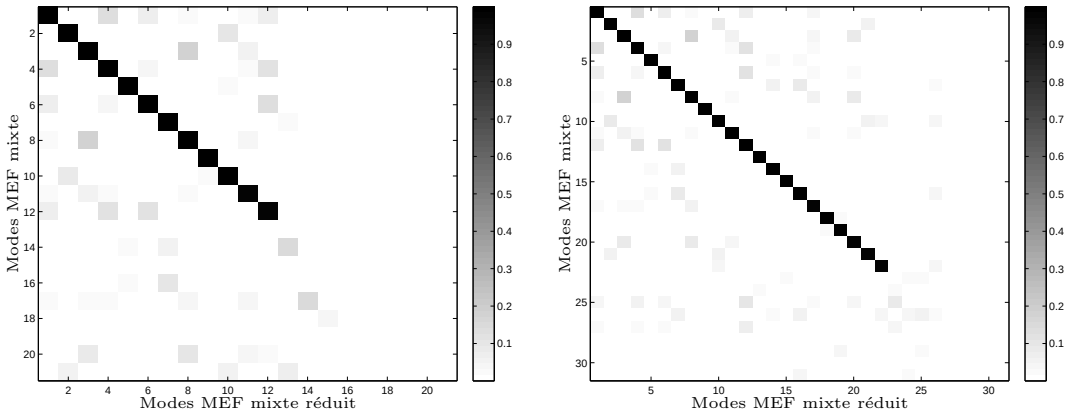


(a) 5-5 (b) 10-10

(c) 20-20 (d) 40-40

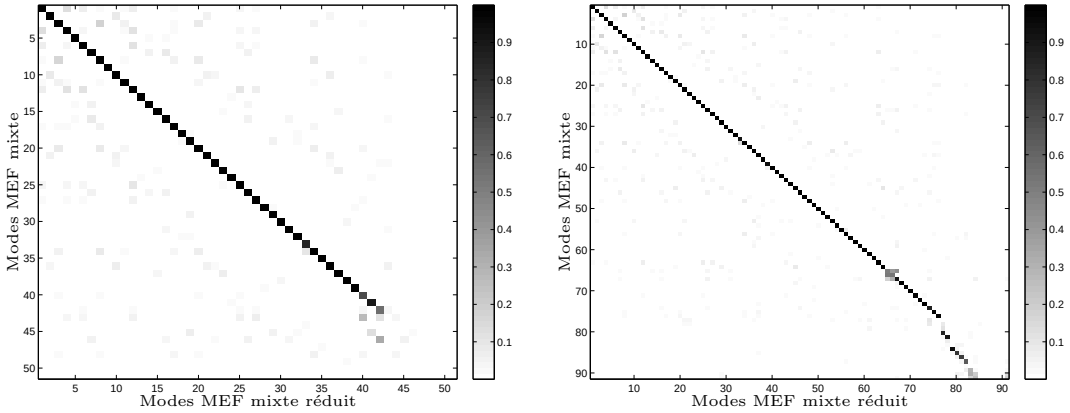
(e) 60-60 (f) 80-80

FIGURE 4.4: Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{i,red/mix}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-2 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80)



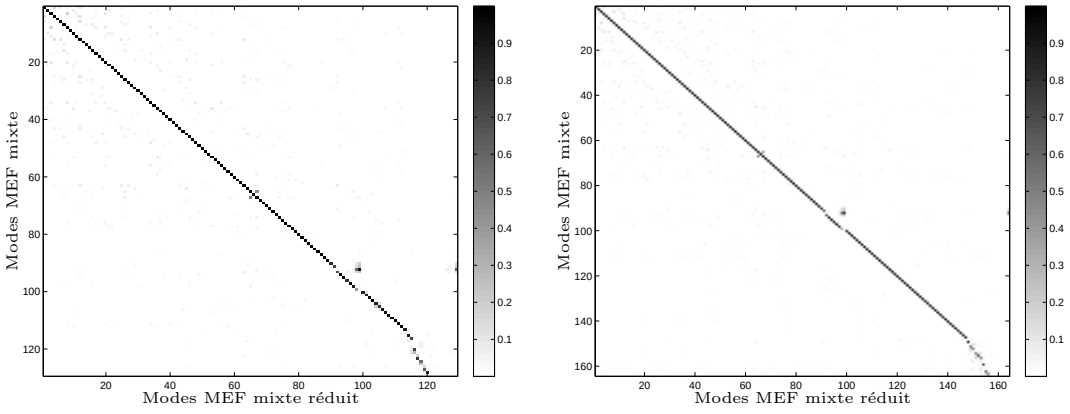
(a) 5-5

(b) 10-10



(c) 20-20

(d) 40-40



(e) 60-60

(f) 80-80

FIGURE 4.5: Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fix-Fix-2 : troncatures : a : 5-5, b : 10-10, c : 20-20, d : 40-40, e : 60-60, f : 80-80)

La méthode Fix-Fix-1, sans troncature des modes de branche donne de très bons résultats. La méthode Fix-Fix-2 qui utilise les mêmes méthodes de synthèse modale par champ mais sépare les paramètres de déplacements $\boldsymbol{\eta}_{FI(U)}^{(a,b)}$ et de contraintes $\boldsymbol{\eta}_{FI(\beta)}^{(a,b)}$ donne des résultats identiques à troncature équivalente. Sans rentrer dans le détail des erreurs relatives entre les résultats des deux méthodes, il apparaît que la différence est uniquement une erreur numérique résiduelle.
Les résultats synthétisés dans le tableau 4.3 sont très bons, et montrent qu'il est possible de tronquer fortement les modes internes et garder malgré tout une bonne représentation. Comme observé en sous-structuration primale [JS94a, JS94b, Bes06, BJ08, BJBT12], la représentation basse fréquence est bonne jusqu'à une limite fréquentielle donnée, et cette limite augmente avec le nombre de modes conservés dans la troncature. Cette méthode montre par ailleurs des résultats bien meilleurs que pour les autres méthodes étudiées, dans notre cas d'étude.
Sans parler de règle claire, nos résultats ont montré que ces deux méthodes donnent une bonne représentation pour un nombre proche de la somme des modes (de déplacements ou de contraintes dans notre cas, car ils sont identiques) utilisés pour les deux sous-structures (exemple : 12 modes pour 5 par SS, 22 modes pour 10 par SS, 42 modes pour 20 par SS, 76 modes pour 40 par SS, 113 modes pour 60 par SS, 147 modes pour 80 par SS).
Il convient de noter la présence de MS. Néanmoins, la densité reste constamment inférieure à 6% quelles que soient les troncatures effectuées. On peut donc considérer que la qualité de la bande fréquentielle convergée n'est pas détériorée, il s'agit uniquement de quelques rares modes isolés.
Ces méthodes permettent donc en prenant pour exemple les troncatures 10-10 et 40-40, de réduire le nombre de DDL de 11256 à respectivement 122 et 182, en gardant une représentation modale fidèle respectivement jusqu'au 22ème et 76ème mode.

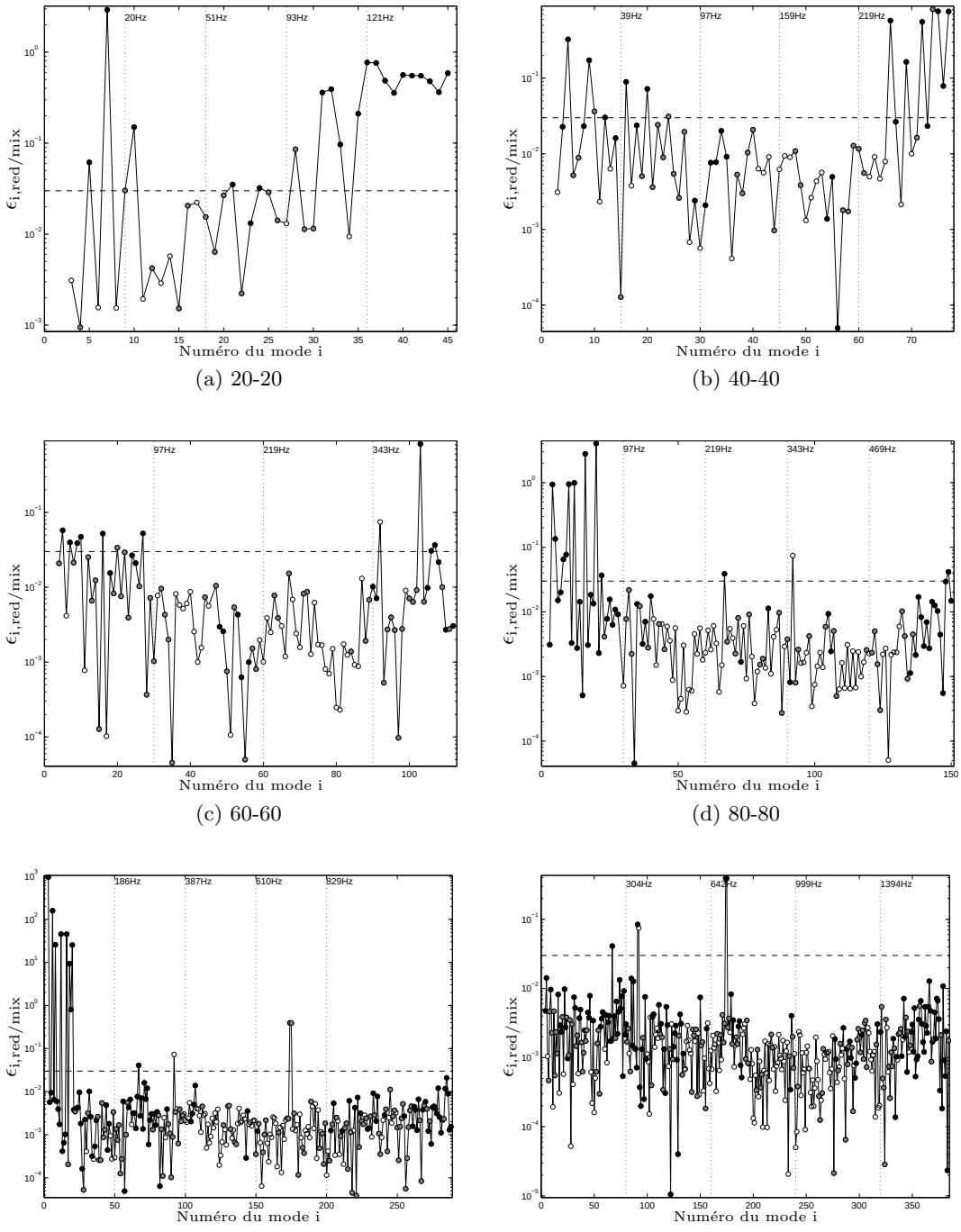
4.3.2 Méthode Fre-Fix-2

Les résultats pour la méthode Fre-Fix-2 sont montrés dans les figures 4.6 et 4.7, et synthétisés dans le tableau 4.3.

La méthode Fre-Fix-2 montre de gros problèmes d'efficacité. En effet, malgré une limite fréquentielle quasiment aussi élevée que les méthodes Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2, la densité de MS est supérieure à 50% pour chacune des troncatures étudiées, ce qui est bien trop élevé pour considérer que les résultats sont concluants. En réalite, la notion de fréquence limite n'a plus vraiment de sens dans ce cas, dans la mesure où plus de la moitié de la bande fréquentielle supposée convergée a au moins un de ses deux critères qui n'est pas considéré comme bon.

4.3.3 Méthode Fre-Fre-1

Les résultats pour la méthode Fre-Fre-1 sont montrés dans les figures 4.8 et 4.9, et synthétisés dans le tableau 4.3.

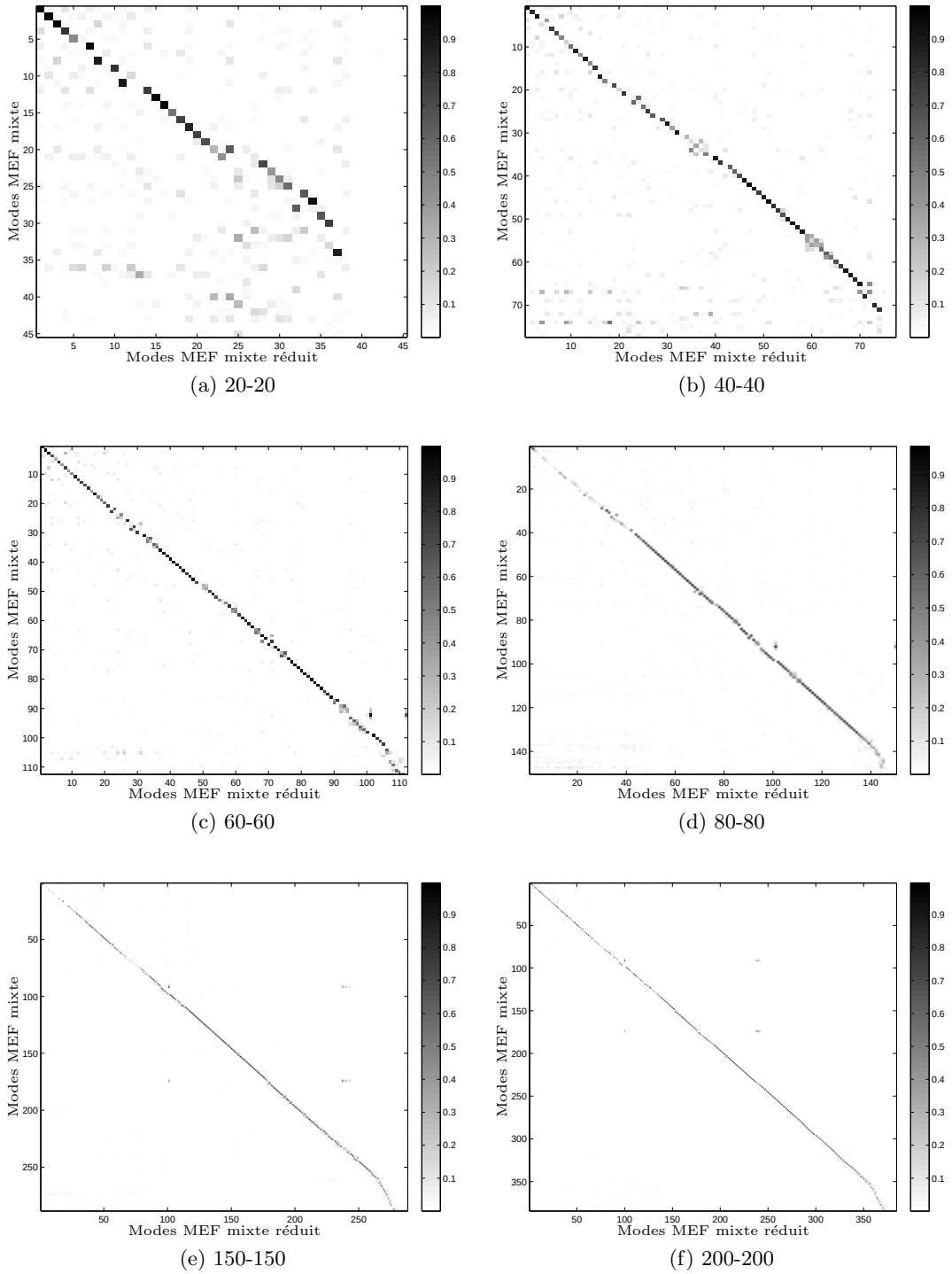


(a) 20-20 (b) 40-40

(c) 60-60 (d) 80-80

(e) 150-150 (f) 200-200

FIGURE 4.6: Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{i,red/mix}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fix-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 150-150, f : 200-200)

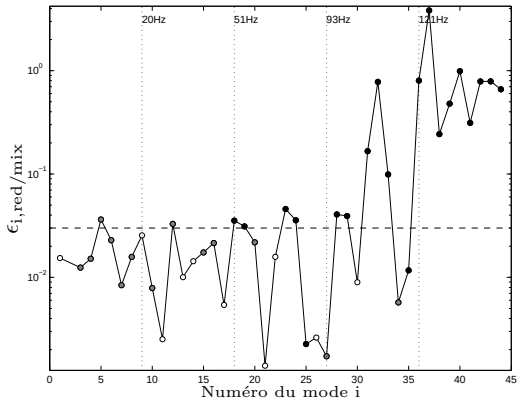


(a) 20-20 (b) 40-40

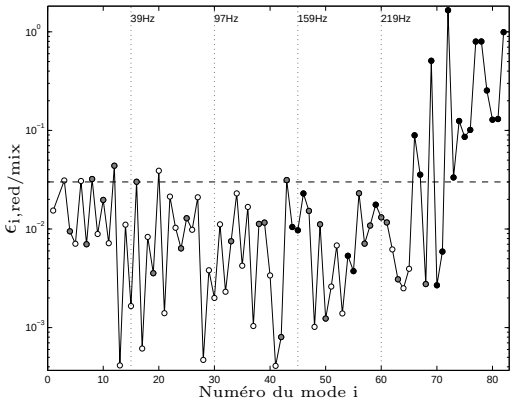
(c) 60-60 (d) 80-80

(e) 150-150 (f) 200-200

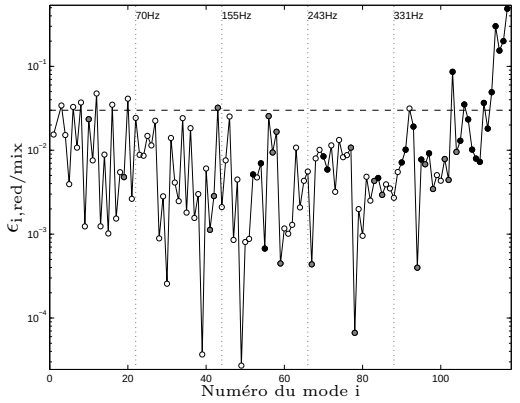
FIGURE 4.7: Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fix-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 150-150, f : 200-200)



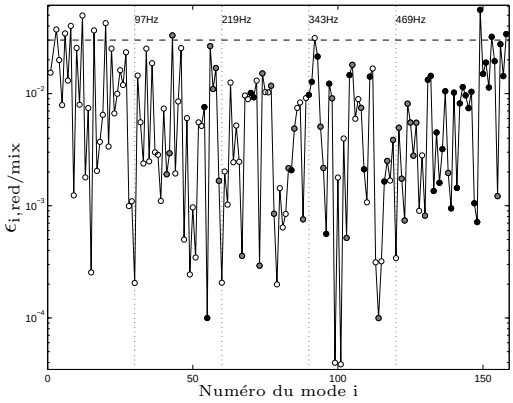
(a) 20-20



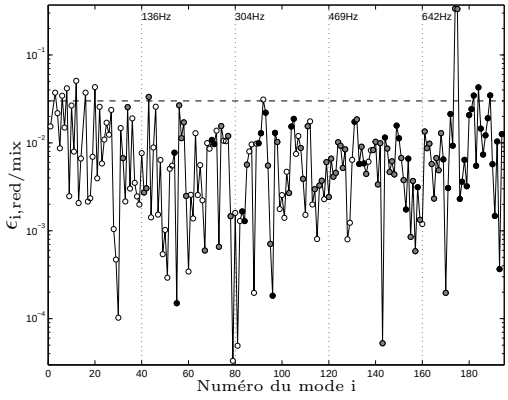
(b) 40-40



(c) 60-60

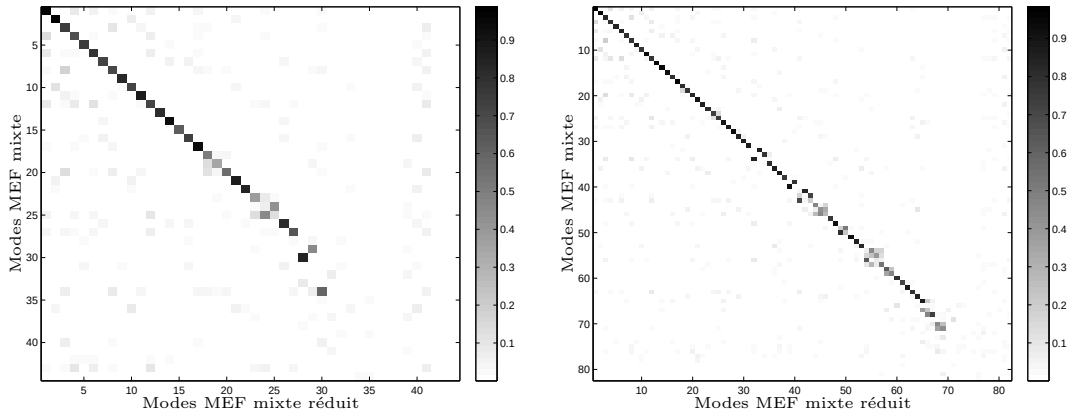


(d) 80-80



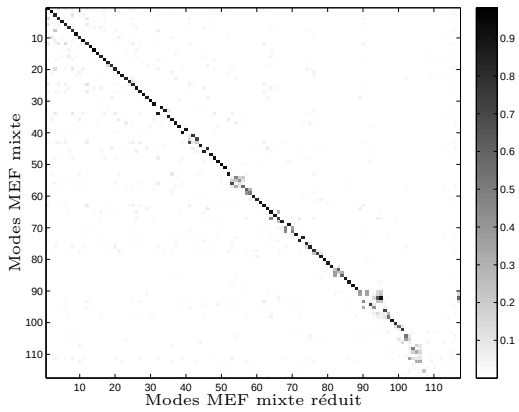
(e) 100-100

FIGURE 4.8: Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{i,red/mix}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-1 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100)

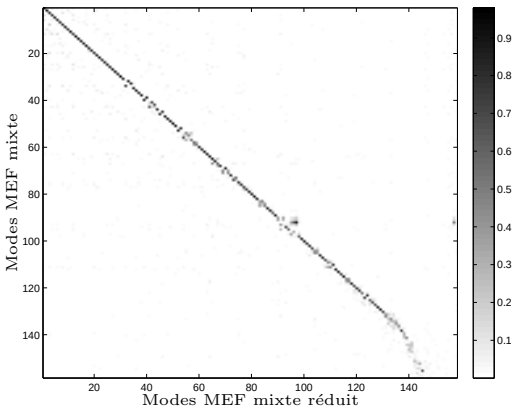


(a) 20-20

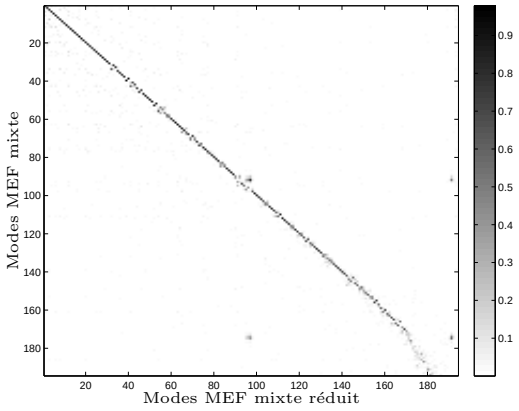
(b) 40-40



(c) 60-60



(d) 80-80



(e) 100-100

FIGURE 4.9: Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-1 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100)

La méthode Fre-Fre-1 montre des résultats assez moyens. La limite fréquentielle n'est pas aussi élevée que pour les méthodes Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2, et la densité de MS est également plus élevée. Il apparaît que, à l'exception des troncatures fortes (20-20 et plus petit), la densité de MS est d'environ 40%, ce qui est plus intéressant que les résultats de la méthode Fre-Fix-2. Un aperçu rapide de la figure 4.8 montre que les résultats ne sont pas aussi mauvais que ceux de la méthode Fre-Fix-2 (figure 4.6), notamment en ce qui concerne les MS. Tout bien pesé, l'intérêt de cette méthode est assez limité, bien que supérieur à celui de la méthode Fre-Fix-2.

4.3.4 Méthode Fre-Fre-2

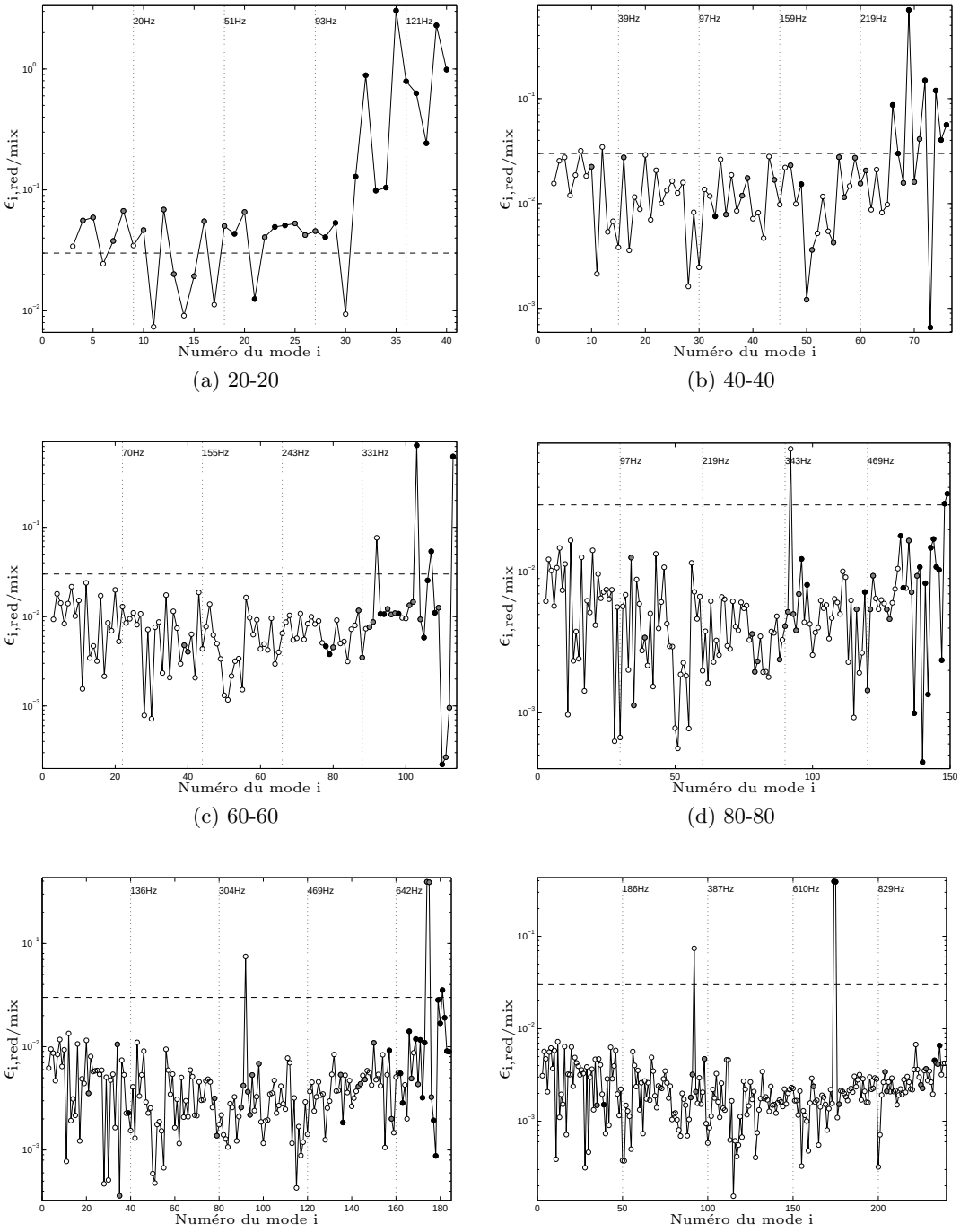
Les résultats pour la méthode Fre-Fre-2 sont montrés dans les figures 4.10 et 4.11, et synthétisés dans le tableau 4.3.

La méthode Fre-Fre-2 montre de bons résultats. En effet, alors que les méthodes Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2 montrent des résultats identiques malgré la dissociation des paramètres de déplacements et contraintes et des modes identiques pour les deux champs, les résultats de la méthode Fre-Fre-2 sont différents, et meilleurs que ceux de la méthode Fre-Fre-1 (section 4.3.3).
Pour les troncatures les plus fortes (20-20, 40-40, 60-60, 80-80), la limite fréquentielle est la même que pour la méthode Fre-Fre-1, à troncature équivalente. Néanmoins, quand la troncature est faible (100-100, 150-150), la bande fréquentielle convergée est plus large avec la méthode Fre-Fre-2.
La plus grosse amélioration, à comparer à la méthode Fre-Fre-1, concerne la densité de MS, qui est bien meilleure, du moment que la troncature globale n'est pas trop importante. Par exemple, les troncatures 60-60, 80-80 100-100, 150-150 montrent une densité inférieure à 16%, ce qui nous donne une qualité de bande fréquentielle convergée bien meilleure. Néanmoins, il est important de noter que la densité de modes singuliers est assez élevé si le nombre de modes gardés dans la troncature est faible, en plus d'avoir une bande fréquentielle moins large par définition (exemple : troncatures 20-20 et 40-40 avec respectivement 78% et 28% de MS).
La méthode Fre-Fre-2 montre ainsi des résultats très intéressants, dans la mesure où la troncature reste raisonnable.

4.4 Troncature des modes de branche

Cette section étudie l'influence de l'utilisation de modes de branche pour réduire la jonction, dans les méthodes décrites au chapitre 3. De façon pratique, il s'agit de vérifier, sur les méthodes qui fonctionnent bien en gardant la jonction (section précédente 4.3), l'impact d'une troncature des DDL représentant la jonction. La structure test est toujours la même (cf. figure 4.1).

Les méthodes que nous avons choisies de conserver dans cette section pour l'étude des modes de branche sont les méthodes Fix-Fix-1/2 et Fre-Fre-2. Les autres résultats n'étaient pas suffisamment pertinents pour aller plus loin. Pour chacune des trois méthodes, et pour chaque troncature effectuée dans la section précédente 4.3, nous

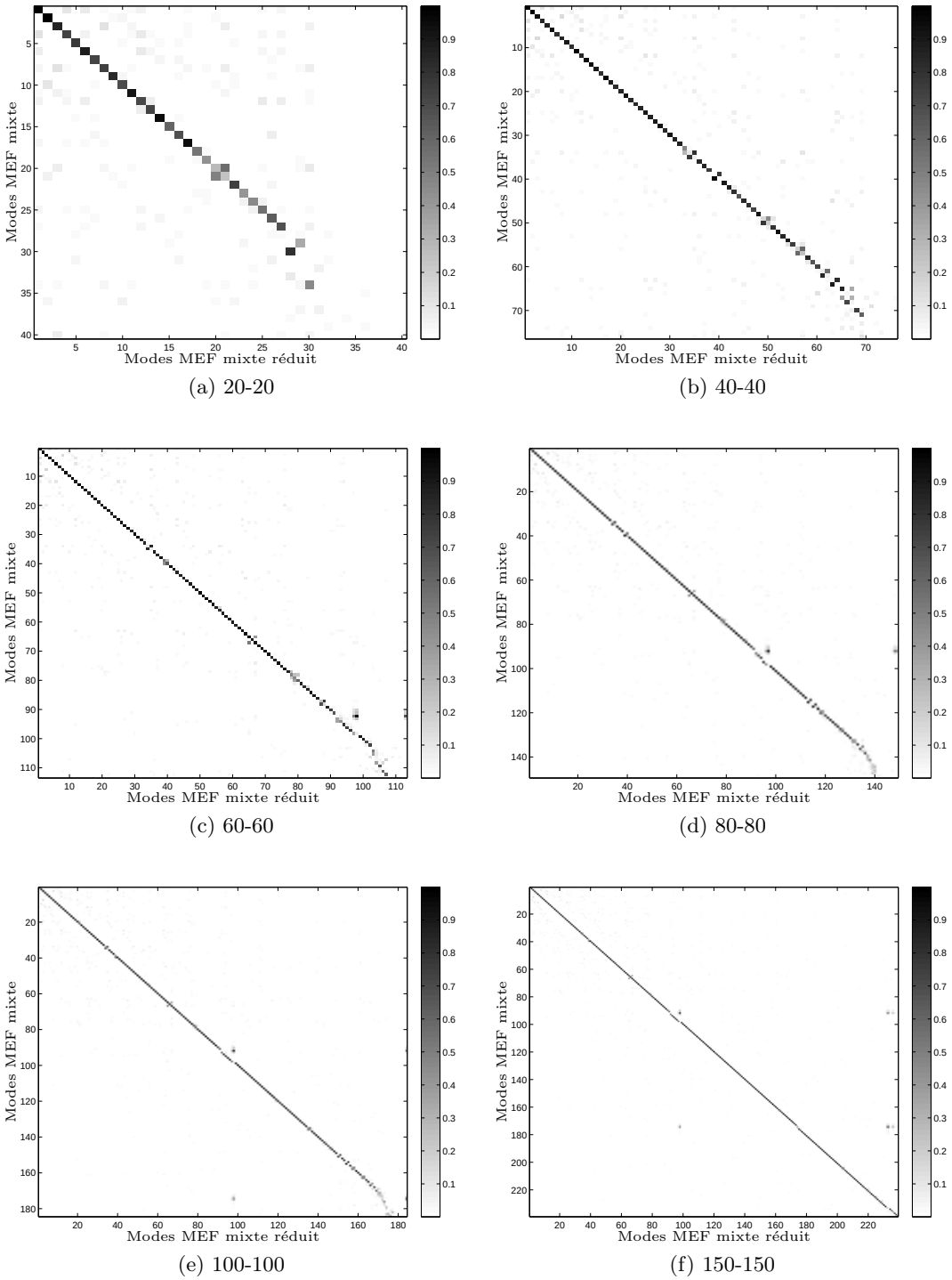


(a) 20-20 (b) 40-40

(c) 60-60 (d) 80-80

(e) 100-100 (f) 150-150

FIGURE 4.10: Erreur relative sur les fréquences $\epsilon_{i,red/mix}$ en fonction du mode i et aperçu du critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100, f : 150-150)



(a) 20-20 (b) 40-40

(c) 60-60 (d) 80-80

(e) 100-100 (f) 150-150

FIGURE 4.11: Critère de MAC pour chaque mode (méthode Fre-Fre-2 : troncatures : a : 20-20, b : 40-40, c : 60-60, d : 80-80, e : 100-100, f : 150-150)

diminuons progressivement le nombre de modes de branche (initialement autant que de DDL de jonction, soit 102, cf. tableau 4.1). Les critères utilisées restent ceux décrits section 4.2.1 et la représentation des résultats se fait comme expliqué section 4.2.2 : on trace l'évolution de la densité de MS en fonction du nombre de modes de branche conservés dans la troncature (la bande fréquentielle n'étant pas affectée par la troncature des modes de branche). Les résultats pour les méthodes Fix-Fix-1/2 sont synthétisés dans le tableau 4.4 et tracés dans le graphique 4.12. Les résultats concernant la méthode Fre-Fre-2 sont tracés dans la figure 4.13.

4.4.1 Méthode Fix-Fix-1-br et Fix-Fix-2-br

Le tableau 4.4 synthétise les résultats tracés dans la figure 4.12. Pour les six troncatures de la section 4.3.1 (5-5, 10-10, 20-20, 40-40, 60-60, 80-80), on étudie la dégradation de la densité de MS de la bande fréquentielle convergée en augmentant la troncature des modes de branche.

La figure 4.12 montre qu'un nombre précis de modes de branche est nécessaire de façon à garder le comportement dynamique inchangé. Utiliser moins de modes de branche dégrade fortement la représentation avec une densité de MS qui augmente fortement. D'autre part, conserver plus de modes de branche paraît inutile, dans la mesure où la densité de MS reste quasiment la même que si l'on prend tous les modes de branche (ou si l'on garde des modes statiques de liaisons à la place).

Une explication de ce phénomène est donnée dans le tableau 4.4, dans lequel sont listées les fréquences des derniers modes de branche tronqués, c'est-à-dire la plus basse fréquence de mode de branche qui n'est pas prise en compte dans la jonction du modèle réduit. Si l'on compare la bande fréquentielle convergée du modèle réduit sans mode de branche (par exemple $0 - 149\,\text{Hz}$ pour la troncature 20-20) et la valeur de la fréquence la plus basse tronquée dans les modes de branche ($203\,\text{Hz}$ pour 5 modes restant et $90\,\text{Hz}$ pour 4 modes restant dans le cas 20-20), nous constatons un comportement significatif (et récurrent pour chaque troncature de modes internes). En effet, dès lors que la fréquence d'un mode de branche appartient à la bande supposée convergée, sa troncature dégrade la réponse (20-20-4 a 33% de MS alors que 20-20-5 en a 6.5%). D'un autre côté, si l'on garde tous les modes de branche dont la fréquence est dans la bande convergée (si l'on rajoute un mode par rapport au choix précédent), il persiste une légère dégradation de la réponse dynamique par rapport au signal à la structure réduite à jonction complète (20-20-5 a 6.5% de MS alors que 20-20-102 en a 4.8%, ou encore 60-60-9 a 11.5% de MS alors que 60-60-102 en a 5.3%), mais le comportement dynamique reste extrêmement proche du modèle non réduit en jonction. Dans le tableau 4.4, la limite entre ces deux domaines est symbolisée par une ligne simple, tandis que les lignes doubles séparent les troncatures initiales de modes internes.

On constate également que, lorsque la fréquence du dernier mode tronqué est au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale de la bande convergée, la réponse réduite est la même qu'avec la jonction complète. Par conséquent, ce type de choix peut permettre d'assurer une troncature des DDL d'interface sans risque.

Il convient de noter que les résultats sont, comme dans la section 4.3.1, identiques pour les sections Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2, et donc très concluants.

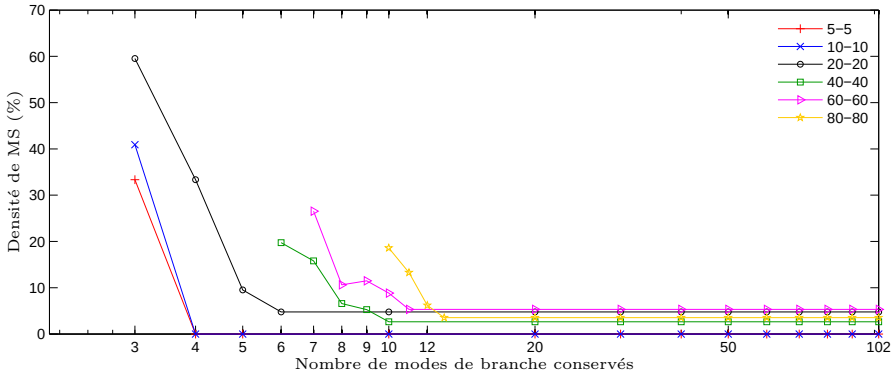


FIGURE 4.12: Densité de modes singuliers en fonction des modes de branche conservés dans les méthodes Fix-Fix-1-br ou Fix-Fix-2-br

4.4.2 Méthode Fre-Fre-2-br

La figure 4.13 montre l'évolution de la densité de MS en fonction du nombre de modes de branche gardés dans la troncature, pour la méthode Fre-Fre-2 et les six troncatures de la section 4.3.4 (40-40, 60-60, 80-80, 100-100 et 150-150).

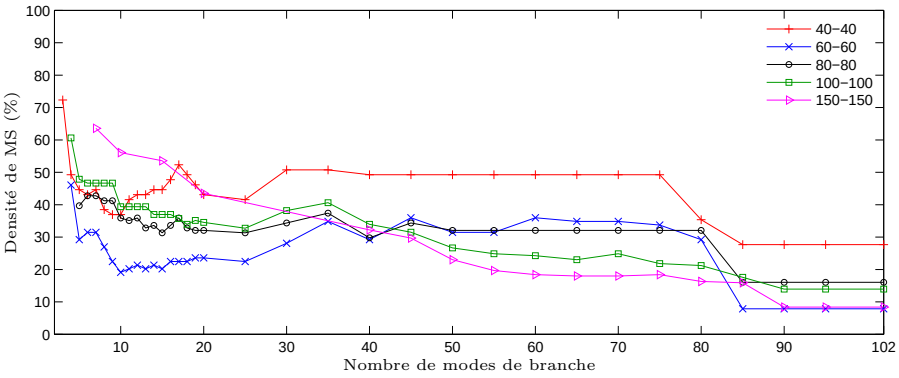


FIGURE 4.13: Densité de modes singuliers en fonction des modes de branche conservés dans les méthodes Fre-Fre-2

Les résultats ne sont pas très pertinents. La quantité de MS augmente même lorsque la troncature est faible, et son évolution ne suit aucune règle particulière. Il semblerait que, en gardant entre 85 et 90 des 102 modes de branche, la réponse dynamique

Nom de la troncature	Modes de branche	Limite mode	Limite freq(Hz)	MS nb	MS %	Freq la plus basse tronquée	DDL méthode 1	DDL méthode 2
Modèle primal non-réduit							2958	
Modèle mixte non-réduit							11256	
5-5-102	102	12	33	0	0%	Aucune	112	122
5-5-4	4	12	33	0	0%	90	14	24
5-5-3	3	12	33	4	33%	14	13	23
10-10-102	102	22	70	0	0%	Aucune	122	142
10-10-5	5	22	70	0	0%	203	25	45
10-10-4	4	22	70	2	9%	90	24	44
10-10-3	3	22	70	9	41%	14	23	43
20-20-102	102	42	149	2	4.8%	Aucune	142	182
20-20-6	6	42	149	2	4.8%	226	46	86
20-20-5	5	42	149	4	6.5%	203	45	85
20-20-4	4	42	149	14	33%	90	44	84
20-20-3	3	42	149	25	59%	13	43	83
40-40-102	102	76	290	2	2.6%	Aucune	182	262
40-40-10	10	76	290	2	2.6%	579	90	170
40-40-9	9	76	290	4	5.2%	502	89	169
40-40-8	8	76	290	5	6.5%	430	88	168
40-40-7	7	76	290	12	16%	287	87	167
40-40-6	6	76	290	15	20%	227	86	166
60-60-102	102	113	447	6	5.3%	Aucune	222	342
60-60-11	11	113	447	6	5.3%	914	131	251
60-60-10	10	113	447	10	9%	579	130	250
60-60-9	9	113	447	13	11.5%	502	129	249
60-60-8	8	113	447	12	10.6%	430	128	248
60-60-7	7	113	447	30	26.5%	287	127	247
80-80-102	102	147	580	4	2.7%	Aucune	262	422
80-80-13	13	147	580	4	2.7%	1102	173	333
80-80-12	12	147	580	7	4.8%	963	172	332
80-80-11	11	147	580	15	10.7%	914	171	331
80-80-10	10	147	580	21	14.3%	430	170	330

TABLE 4.4: Résultats pour différentes troncatures de modes de branche de la méthode Fix-Fix-1 ou Fix-Fix-2

n'est pas altérée, mais dès que la troncature est plus grande, la densité de MS grimpe. Entre 30 et 80 modes de branche, le nombre de MS est relativement stable et a l'air de diminuer entre 15 et 30 modes de branche. En tronquant de façon plus prononcée, la méthode suit la même règle que les méthodes Fix-Fix-1/2, en dégradant le comportement dynamique à mesure que l'on augmente la troncature.
Tout bien pesé, l'utilisation de modes de branche pour réduire l'interface n'est pas intéressante dans le cas de la méthode Fre-Fre-2, étant donné qu'il n'y pas a de règle particulière qui permette de dire si le procédé est bénéfique ou non, et la troncature des modes de branche peut vite devenir dégradante. Il paraît plus sûr d'utiliser la méthode Fre-Fre-2, le cas échéant, sans modes de branche.

4.5 Conclusions

Cette section avait pour but de tester la convergence des nouvelles méthodes de sous-structuration modale implémentées dans le chapitre 3 spécialement pour des MEF mixtes. Il s'agissait ici de prendre une structure simple composée de deux sous-structures, de la modéliser avec le MEF mixte déplacements/contraintes généralisées de Kirchhoff-Love (chapitre 1) et de tester la convergence dynamique modale du modèle réduit à l'aide de nos différentes méthodes. Le MEF non-réduit est composé de 11256 DDL.

Nous avons fait le choix de scinder ce chapitre en deux parties principales avec, d'une part, l'étude de l'influence d'une troncature des modes propres des sous-structures, puis d'autre part, une analyse de l'impact de l'utilisation de modes d'interface sur les méthodes qui ont fonctionné au préalable. Dans les deux cas, les deux critères choisis ont été l'erreur relative sur les fréquences propres des modes de la structure globale et un critère de MAC sur les formes des modes observables. Les méthodes de sous-structuration modale ont pour habitude, en primal, de converger à basse fréquence et de s'éloigner du modèle initial à haute fréquence si la troncature est forte. Ainsi, les points clés analysés ont été la bande fréquentielle sur laquelle le modèle réduit a, en apparence, convergé, et la densité de Modes Singuliers (modes ayant au moins un des deux critères négatifs) sur cette bande. Le tableau 4.5 résume les performances des différentes méthodes implémentées.

Le tableau 4.3 synthétise les résultats des deux points clés pour plusieurs troncatures de modes internes sur chacune des méthodes du chapitre 3. On constate de grandes différences d'efficacité entre les méthodes :

– Les méthodes Fix-Fix-1 et Fix-Fix-2 donnent des résultats excellents (et identiques). Ces deux méthodes permettent de réduire grandement le nombre de DDL en gardant malgré tout une très bonne représentation du comportement en basses fréquences de la structure globale avec le modèle réduit. En utilisant, par exemple, la troncature 40-40 (c'est-à-dire 40 modes de déplacements et 40

Méthodes	Fix-Fix-1/2-br	Fre-Fix-2-br	Fre-Fre-1-br	Fre-Fre-2-br
Taille bande fréquentielle	●●●●●	●●	●●●	●●●●
Densité de MS	●●●●●	●	●●	●●●
Avec modes de branche	●●●●●	Non testé		●●

TABLE 4.5: Performances générales des méthodes implémentées dans le chapitre 3 pour notre cas d'étude

modes de contraintes), nous réduisons la taille du MEF mixte de 11256 DDL à seulement 262 DDL, tout en gardant une excellente représentation des 76 premiers modes, en fréquence et en forme. Les autres troncatures montrent des résultats tout aussi intéressants (cf. tableau 4.3).

– La méthode Fre-Fre-2 montre des résultats relativement bons tant que la troncature reste raisonnable (60-60, 80-80, 100-100, 150-150). La bande fréquentielle est néanmoins plus petite que pour les précédentes méthodes, et la densité de MS plus significative, mais elle présente toujours des performance intéressantes.
– La méthode Fre-Fre-1 se distingue de la méthode Fre-Fre-2 (malgré l'utilisation des mêmes modes et mêmes troncatures) par des résultats moyens. Malgré une limite en fréquence relativement bonne, la densité de MS dégrade trop la méthode.
– Enfin, la méthode Fix-Fre-2 qui mixe modes libres et encastrés donne de mauvais résultats, avec une densité de MS rédhibitoire.

La seconde partie de ce chapitre concernait l'utilisation de modes de branche pour réduire le nombre de DDL de la jonction, et la convergence des méthodes concluantes de la première partie lorsque l'on décide de tronquer ses modes d'interface. Les méthodes que nous avons étudiées sont uniquement Fix-Fix-1, Fix-Fix-2 et Fre-Fre-2. la structure test est la même et les critères également. Il s'agit d'observer l'impact d'une réduction de l'interface sur les troncatures de la première partie.
Les résultats des méthodes Fix-Fix-1 et Fix-2 sont synthétisés dans le tableau 4.4 et tracés dans la figure 4.12. On montre ainsi que l'on peut réduire de façon très conséquente la quantité de DDL d'interface, tout en gardant une représentation dynamique aussi bonne que si la jonction n'avait pas été réduite. On constate ainsi qu'en gardant entre 4 et 12 modes (suivant les troncatures des modes internes) sur les 112 DDL initiaux, le comportement dynamique est intact. Dans notre cas d'étude, cela peut paraître insignifiant à côté de la réduction conséquente des DDL internes aux sous-structures, néanmoins, sur des structures plus grandes avec des interfaces importantes, cette caractéristique peut s'avérer cruciale. Si l'on prend l'exemple de

la méthode Fis-Fix-1 à troncature 20-20-5, on diminue le nombre de DDL de 11256 à 45 (soit 250 fois moins !), et l'on conserve un comportement dynamique fidèle sur les 42 premiers modes.
En revanche, l'utilisation de modes d'interfaces dans le cas de la méthode Fre-Fre-2 ne s'est pas avéré très concluant.

En conclusion, nous pouvons dire que, parmi les nouvelles méthodes de sous-structuration modales implémentées dans le chapitre 3, certaines présentent un grand intérêt dans la mesure où l'on peut réduire de façon drastique le nombre de DDL d'un modèle dont le principal inconvénient est la taille importante, tout en gardant un comportement dynamique fidèle au modèle de base. Nous pouvons prendre en exemple la méthode Fix-Fix-1-br qui permet de réduire le MEF mixte globale de 11256 DDL en un modèle réduit de respectivement 14, 25, 46, 90, 131 et 173 DDL, tout en conservant une représentation fidèle sur respectivement les 12, 22, 42, 76, 113 et 147 premiers modes.
Il convient de noter ici que ces résultats sont donnés à titre indicatif pour la structure test choisie avec une jonction mécaniquement raide, mais que l'utilisation de modes "libres" aurait été plus efficace dans le cas d'une jonction plus souple.

Chapitre 5

Optimisation de paramètres d'épaisseurs de structures plaques sous critère de contrainte

5.1 Introduction

5.1.1 Présentation générale

Ce chapitre a pour objectif de mettre en place une méthodologie d'optimisation de forme des structures de type "plaque" soumises à un chargement dynamique, sous critère(s) de contrainte(s) et paramètres d'épaisseurs. L'idée est d'utiliser les MEF mixtes dynamiques développés chapitre 1 ainsi que les méthodes de sous-structuration modales adaptées dans le chapitre 3, et de les intégrer dans un processus d'optimisation, dont l'un des objectifs au moins est la minimisation de la contrainte au sein de la structure et les épaisseurs sont modifiables. Nous mettons ainsi en avant :

- l'accès facile aux objectifs de contraintes grâce au MEF mixte ;
- la possibilité de jouer sur les épaisseurs sans avoir à remailler la structure EF complète ;
- la réduction de modèle offerte par les méthodes de sous-structuration ;
- l'indépendance des méthodes modales vis-à-vis de l'épaisseur pour des plaques planes ;
- le temps de calcul gagné par rapport à des méthodes classiques ;
- l'intérêt d'une représentation sous forme de front de Pareto lorsque la contrainte maximale subie par la structure est un objectif à minimiser (et non une contrainte à proprement parler).

Il s'agit de tester des méthodes d'optimisation Multi-Objectif (MO), basées sur nos MEF mixtes sous-structurés, sur des structures numériques académiques soumises à des chargements harmoniques, dans lesquelles les paramètres de l'optimisation sont les épaisseurs de différentes zones de la structure considérée, et la contrainte maximale de la plaque est un objectif à minimiser. Pour se placer dans un cas MO plus conforme à des considérations industrielles et éviter de converger vers une plaque infiniment épaisse, nous choisissons la masse de la plaque comme autre objectif de l'optimisation. La figure 5.1 représente le type de cas que l'on souhaite étudier avec une répartition d'épaisseurs donnée. Dans ce chapitre, nous mettons en place deux

méthodes différentes, toutes les deux utilisant un Algorithme Génétique (AG) usuel :
- une première méthode utilisant le MEF mixte défini chapitre 1 qui permet d'accéder plus rapidement aux objectifs de contraintes en bénéficiant de l'indépendance en épaisseur du modèle pour modifier les paramètres ;
- une seconde méthode plus performante se basant sur ce même MEF mixte, mais sous-structuré (voir les différentes méthodes chapitre 3), de façon à faire de chaque SS indépendante un Super-Élément Mixte (MSE) d'épaisseur constante que l'on peut modifier aisément à chaque itération.

5.1.2 Historique de l'optimisation de forme

Optimisation de forme en général

Trop souvent, le processus d'optimisation de paramètres de structure ou d'optimisation de forme se fait manuellement par expérience, de façon intuitive et empirique. La structure résultant est ensuite testée, numériquement ou expérimentalement, pour vérifier que le résultat est conforme aux objectifs et/ou aux contraintes fixées. Toutefois, beaucoup de chercheurs se sont consacrés à l'optimisation de forme pour la mécanique des structures [BFLW10, SDS10, HCC10, LBT11, RHX$^+$12, AFB12]. D'une manière générale, les méthodes développées pour aider à trouver la configuration optimale d'une structure visent à construire un modèle facilement modifiable représentant cette dernière. Ainsi, un choix judicieux des paramètres de l'optimisation est déterminant. Certains chercheurs se sont concentrés sur des métamodèles, ou modèles simplifiées [PD10, RHX$^+$12] qui permettent, de par leurs tailles réduites, de jouer sur des paramètres en changeant le modèle rapidement. Néanmoins, la majorité des recherches effectuées dans le domaine de l'optimisation de forme de structures sollicitées mécaniquement conservent une représentation EF classique [CFF$^+$04, LP06, AS07, PGF08, DGCZ08, AA09] qui permet, depuis plusieurs dizaines d'années, l'une des représentation du comportement mécanique des structures, notamment élastique linéaire, des plus rapides et fidèles qui soient. Dès lors, la question qui se pose est la suivante : comment agir rapidement sur les paramètres du MEF et comment bien choisir ces paramètres (géométriques ? matériaux ?) de façon à caractériser la modification géométrique de la structure numériquement, à moindre coût ? Le problème sous-jacent est celui du re-maillage et du temps de calcul associé.

On préfère ainsi, dans la mesure du possible, trouver des moyens détournés de modifier numériquement la structure EF sans la reconstruire.
Des méthodes appelées "*Grid Perturbation Method*" (GPM) permettent d'obtenir un champ de vitesse pour la détermination de modification de position nodale à la suite d'une perturbation [HG86, ZBF95, KHK05]. D'autres approches appelées "*mesh mapping*", "*Laplacian Morphing*" ou encore "*boundary nodal perturbation*" permettent également d'appliquer de petites modifications géométriques à une structure [YC89, CC94, LJ97, RFT04]. Ces méthodes sont basées sur l'idée que toute

modification de frontière se répercute localement sur un changement des formes des mailles, et non sur une modification des propriétés des matériaux qui les composent. D'autres possibilités de modifications locales se basent sur un maillage qui ne change pas. On parle de Fixed Grid (FG) representation [WTQS99]. Ce concept a été étendu à l'optimisation de forme dans [GS03]. L'idée est de définir un rectangle qui enveloppe la structure, rectangle qui lui-même est entièrement discrétisé en EF que l'on peut classifier comme, soit appartenant à la structure, en-dehors de celle-ci, ou à cheval entre les deux. La clé est la détermination des éléments qui traversent les deux milieux au niveau d'une jonction modifiée par l'optimisation. Souvent, on effectue une moyenne pondérée des propriétés matériaux en fonction de la fraction de l'EF qui est dans la structure, pour calculer la matrice de raideur. D'autres méthodes comme la "*Area-fraction weighted Fixed Grid*" (AFG) [DKM11] ont été récemment proposées pour améliorer ces démarches de pondération en utilisant la méthode des moindres carrés. Néanmoins, si l'approximation de la souplesse de la structure est intéressante, la convergence en contraintes de ces méthodes est assez limitée. Whang et Zhang ont également étendu le concept de "*Material Perturbation Method*" (MPM) en associant la FG method et une modification locale du maillage [XZZ02, WZ13].
Ces dernières années, d'autres méthodes d'optimisation en contraintes pour des maillages fixes ont vu le jour. García et Steven ont par exemple amélioré la précision en contraintes par une méthode FG globale/locale qui consiste à raffiner le maillage près des interfaces entre éléments en mouvement [GS00], tandis que Kim et Chang ont étudié la sensibilité en contraintes avec une représentation Eulérienne d'un maillage fixe [KC05]. Le développement d'EF enrichis, ou X-FEM [SMMB00, SCM$^+$01, VMD07, GZWW11] et d'éléments iso-géométriques [CH09] dans le cadre de l'optimisation de forme permettent également d'améliorer la précision en contraintes.

Les méthodes précédemment citées permettent une modification légère de la géométrie de la structure sans avoir à remailler, mais trouvent leurs limites dès lors que la transformation devient importante. C'est la raison pour laquelle bon nombre d'optimisations de forme font le lien entre la CAD (Computer-Aided Designs) et les algorithmes d'optimisation, et nécessitent un remaillage de la structure [CFF$^+$04, LP06, AS07, PGF08, DGCZ08, AA09]. Ces dernières années, on compte des études d'optimisation structurelle dans le domaine des plaques/coques [DGCZ08, PGF08, AA09], structures piézo-électrique [KDB09], et composites [WS03, AMMS$^+$09].

Mono-Objectif Vs Multi-Objectifs et Algorithme Génétique

Parmi tous les problèmes d'optimisation, on distingue les optimisations "Mo-no-Objectif" (ou "*Single-Objective*" (SO)) et "Multi-Objectifs" (ou "*Multi-Objectives*" (MO)). Le plus souvent dans l'industrie, une optimisation de forme se fait sous différents objectifs, ou du moins avec des contraintes de coût qui rendent nécessairement l'optimisation MO. De façon classique, on réunit les différents objectifs en une seule et unique fonction pondérée, ce qui permet d'utiliser des méthodes de gradient rapides et facilement implémentables [AMMS$^+$09, LP06]. On peut aussi garder

une unique fonction objectif et symboliser les autres objectifs par des contraintes à l'optimisation, ce qui permet également d'utiliser des méthodes de gradient. Cependant, ces méthodes aboutissent à un optimum local et peinent souvent à explorer l'intégralité de l'espace de conception.
D'autres méthodes d'optimisation MO utilisent des Algorithmes Evolutionnaires (GA pour "*Genetic Algorithms*", ou MOEA pour "*Multi-Objective Evolutionnary Algorithms*"), basés sur l'évolution des espèces [KDB09, PGF08]. Ils représentent chaque combinaison de paramètres par des individus d'une population, et font évoluer ces populations sur plusieurs générations de façon à les améliorer vis-à-vis des objectif fixés. Les GA permettent d'explorer la totalité de l'espace de conception et mènent ainsi à une optimisation globale du problème considéré. Un autre avantage des GA est qu'ils ne demandent pas à l'utilisateur de pondérer les critères, ce qui permet de converger vers un ensemble de solutions qui sont chacune des compromis entre les objectifs. On parle de "Pareto-Solution" (PS) et la représentation se fait sous forme de front de Pareto, dans lequel chacun des points est meilleur que les autres au sens d'au moins un objectif. L'utilisateur peut ensuite sélectionner les solutions qu'il veut en fonction du compromis qui l'intéresse et des paramètres qui lui sont associés.
On peut aussi citer une alternative aux MOEA avec les méthodes par essaim particulaire (ou "*Particle Swarm Optimization*" (PSO), [Cle04]) basées sur les mouvements globaux d'une population influencés par des mouvements locaux d'individus et de leurs voisinages.
Dans le domaines des MOEA, plusieurs types d'algorithmes sont disponibles tels que SPEA ("*Strength Pareto Evolutionary Algorithms*") [ZT99, ZDT99] et SPEA-II [ZLT01]), PAES ("*Pareto Archived Evolution Strategy*") [KC99]), NSGA ("*Non-dominated Sorting Genetic Algorithms*") [SD94, DAPM00] et NSGA-II [DPAM02, LZ09]) ou encore APA ("*Adaptative Pareto Algorithm*") [DGO01b, DGO01a]. Un review de ces différentes méthodes est disponible dans [GD02]. Tous ces algorithmes sont efficaces et convergent nécessairement vers un ensemble de compromis, mais ont le gros inconvénient de répéter un grand nombre de fois les opérations d'évaluation des objectifs et cela engendre un coût de calcul important. Dans ce manuscrit, l'idée n'est pas de travailler à proprement parler sur les algorithmes en essayant d'y apporter une modification mais plutôt d'améliorer la représentation mécanique utilisée pour l'optimisation et de l'intégrer dans un algorithme répétitif d'optimisation. Pour cela, parmi les MOEA, nous avons choisi la méthode d'algorithme NSGA-II, pour sa facilité d'implémentation et les ToolBox et descriptifs complets que l'ont peut trouver grâce à Deb [DAPM00, DPAM02]. L'idée de ce travail est d'utiliser le MEF mixte du chapitre 1 et les méthodes de sous-structuration modales développées dans le chapitre 3 de façon à améliorer l'étape d'évaluation des objectifs, et en particulier l'objectif de contrainte maximale.

5.1.3 Intégration de nos modèles dans un Algorithme Génétique

Comme expliqué précédemment, la plupart des optimisations de paramètres de structures fines, qui calculent des champs de contraintes, utilisent un MEF primal pour y accéder et nécessitent donc des calculs supplémentaires une fois la réponse de la structure calculée (voir section 2.3.1). En cela, l'utilisation du MEF mixte tel qu'implémenté chapitre 1 peut s'avérer intéressant, étant donné qu'il donne des résultats identiques en déplacements et contraintes (cf. chapitre 2) par rapport à un MEF primal avec un gain de temps non-négligeable pour reconstruire le champ (cf. section 2.4). De plus, ce type de modèle, lorsqu'il est construit pour une théorie des plaques, est caractérisé par une indépendance en épaisseur, c'est-à-dire que l'on peut intégrer dans l'élément et construire ses matrices élémentaires sans leur paramètre d'épaisseur. Cela permet de construire la structure EF entière sans caractéristiques d'épaisseurs, et d'attribuer ensuite les épaisseurs de façon linéaire scalaire pour chacun des éléments, ou chacune des zones choisis. Ainsi, la structure à optimiser est maillée une seule et unique fois, et chacune des zones, que l'utilisateur choisit à épaisseur constante, peut être modulée selon ce paramètre de façon quasi-instantanée. Ainsi, l'inconvénient majeur du temps d'assemblage par rapport à un MEF primal, cité dans la section 2.5, n'en est plus un, et la difficulté de modification des paramètres de l'optimisation citée précédemment est considérablement simplifiée. Nous présentons dans la section 5.5.1 l'intégration dans le GA du MEF mixte du chapitre 1.

A ce stade de l'étude, la méthode employée permet une modification rapide des paramètres de l'optimisation, et un meilleur accès à l'objectif de contrainte. Toutefois, on conserve la difficulté de manipuler et stocker des matrices de grande taille. C'est ici que les méthodes de sous-structuration modales jouent leur rôle. En effet, les méthodes développées dans le chapitre 3 présentent également une caractéristique d'indépendance en épaisseur : les éléments modaux composant les matrices de réduction restent inchangés, et la relation déplacements/contraintes qui contient un paramètre d'épaisseur peut, tout comme le modèle, être construite indépendamment de l'épaisseur de la zone concernée. On peut donc ainsi, pour chacune des zones choisies par l'utilisateur, construire un Super-Élément Mixte (MSE pour "*Mixed Super Element*") réduit qui n'est piloté que par son paramètre d'épaisseur et se manipule plus facilement que la matrice complète initiale. La performance de l'optimisation n'en est que plus grande. Nous présentons dans la section 5.5 l'intégration dans le GA du MEF mixte sous-structuré.

Une autre particularité de nos méthodes d'optimisation, en comparaison avec ce qui est fait dans la littérature, est l'utilisation de la contrainte en tant qu'objectif. En effet, la plupart du temps, la contrainte maximale subie par la structure est une "contrainte" du processus d'optimisation, en ce sens que l'utilisateur impose une valeur "seuil" qui doit être respectée pour la/les solutions de l'optimisation. Si un individu (dans le cas d'un GA) est au-dessus du seuil, il est automatiquement éliminé des potentielles solutions, mais on ne fait pas la différence entre un individu qui a

une contrainte maximale 2 fois, ou 10 fois inférieure à la limite fixée par l'utilisateur. Dans notre cas, la contrainte maximale est un objectif au sens propre, et elle tend ainsi à être minimisée, sans limite particulière. Ainsi, les solutions obtenues en sortie du GA qui se représentent sous forme de Front de Pareto sont définies, en partie, par leur contrainte maximale, et l'utilisateur peut choisir l'intensité maximale endurée par la structure au niveau qu'il le souhaite, après l'optimisation, en fonction des configurations paramétriques qui l'intéressent et des autres objectifs des compromis. Dans le cas de chargements cycliques ou de tout type de cas où la fatigue intervient, il peut être judicieux de choisir une valeur de contrainte intermédiaire qui n'est pas seulement inférieure à une maximale, mais qui est modérée, en fonction de l'utilisation prévue et de la répétition de la charge.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante : dans un premier temps nous présentons le type de problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre en précisant bien les cas, en terme de paramètres et d'objectifs, qui peuvent être traités avec nos méthodes. Ensuite, nous étudions plus en détail le fonctionnement d'un Algorithme Génétique dans le cadre d'une optimisation MO. Dans les deux parties suivantes, nous décrivons les méthodes d'optimisation, d'une part à l'aide du MEF mixte et ensuite à l'aide du MEF mixte sous-structuré. Enfin, nous présentons les principaux types de résultats que l'on peut obtenir en testant nos méthodes sur plusieurs cas académiques avec deux objectifs un nombre variable de paramètres d'épaisseurs.
On introduit dans ce chapitre les indices $_{\cdot pri}$ et $_{\cdot mix}$ qui renvoient respectivement à des matrices primales et mixtes.

5.2 Présentation du type de problème d'optimisation

Les méthodes d'optimisation présentées dans ce chapitre sont spécifiquement adaptées aux problèmes "plaque" dans lequels les paramètres variables sont des épaisseurs, et au moins un des objectifs est une contrainte. Dans ces conditions, nos MEF mixtes "plaque", les méthodes de sous-structuration modale et l'indépendance de ces techniques en épaisseur deviennent essentielles pour nos méthodologies.

Il s'agit pour l'utilisateur de définir différentes zones (ou sous-structures) qui sont chacune définie par une épaisseur (on choisit arbitrairement de diviser la structure en plusieurs sous-structures plus petites). Le nombre de paramètres de l'optimisation est donc égal au nombre de zones choisies. L'utilisateur définit également une plage de variation pour chacune des épaisseurs. On cherche à minimiser :

- la contrainte maximale de Von Mises (VM) au sein de la structure sous un chargement donné ;
- la masse de la plaque dans un souci de coût.

Ces deux objectifs étant antagonistes, nous sommes bien dans un cas MO. La figure 5.1 illustre ce type de problème, dans un cas d'une structure divisée en 3 sous-structures.

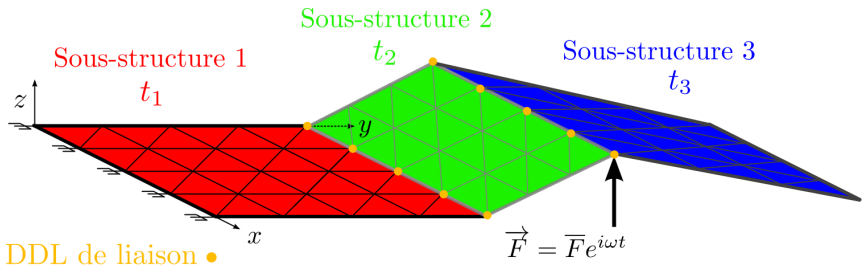


FIGURE 5.1: Exemple d'optimisation pour 3 sous-structures

La structure est optimisée dans le cas d'un chargement harmonique localisé (voir figure 5.1). La fréquence d'excitation peut être fixée sur un mode spécifique de la structure ou dans une bande fréquentielle qui contient des modes.

L'idée générale de cette partie est d'utiliser un Algorithme Génétique de façon à résoudre le problème MO précédemment décrit (voir section 5.3). Il s'agit d'utiliser les MEF mixtes déplacements/contraintes définis dans le chapitre 1 de façon à avoir un accès privilégié aux champs de contraintes, et les méthodes de sous-structuration du chapitre 3 dans le but de réduire chacune des sous-structures et d'en faire des MSE facilement manipulables. Ainsi nous implémentons deux méthodes : une basée sur le MEF mixte seul (voir section 5.4) et une seconde basée sur le MEF mixte sous-structuré 5.5. Plusieurs cas pratiques sont ensuite étudiés pour différentes structures, différents choix de sous-structures et pour les deux chargements définis (voir section 5.8).

5.3 Optimisation Multi-Objectifs et Algorithme génétique

Un processus d'optimisation de forme regroupe souvent plusieurs fonctions à maximiser ou à minimiser, dont les objectifs sont antagonistes. En réalité, comme évoqué brièvement dans l'introduction du chapitre 5.1, la notion de solution optimale n'existe pas dans un problème d'optimisation MO. Suivant les conditions d'utilisation, les limitations techniques de fabrication ou encore les contraintes évidentes de coût, une solution peut être préférée par rapport à une autre, sans savoir à l'avance le type de solution que l'on veut/va obtenir. On définit ainsi un point optimal si aucun autre point n'est meilleur sur tous les critères. L'ensemble de ces points fournis par l'algorithme d'optimisation constitue ainsi le front de Pareto optimal. Il est composé de plusieurs solutions qui sont chacune des compromis entre les différents objectifs, définis par une combinaison spécifique des paramètres d'entrée. Nous voyons dans cette section comment on peut formuler ce type de problème d'optimisation, et une méthode pour le résoudre.

5.3.1 Formulation déterministe d'un problème Multi-Objectif

Un problème d'optimisation MO nécessite la minimisation de plusieurs fonctions-objectif, potentiellement avec ou sans contraintes. Ce problème peut être formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } y = F(d) = [F_1(d), F_1(d), ..., F_N(d)]^T \\ g_j(d) \leq 0,\ j = 1, 2, ..., M \\ h_k(d) = 0,\ k = 1, 2, ..., l \\ d = (d_1, d_2, ..., d_p) \in \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $F_1, F_2, ..., F_N$ l'ensemble des N fonctions-objectif, g_j le vecteur des M contraintes d'inégalité, h_k le vecteur des l contraintes d'égalité et d les paramètres de l'optimisation (p paramètres) appartenant à l'espace de conception Ω.

La résolution d'un problème d'optimisation MO est plus complexe qu'un problème SO. Alors qu'un algorithme SO converge vers une seule et unique solution, le cas MO fournit un ensemble de solutions qui constitue le front de Pareto. Dans le cas d'un problème MO, une seule et unique solution ne peut, par définition, pas exister ou est difficile à trouver dû aux conflits entre les fonctions-objectif F. Une amélioration d'une fonction objectif f_{n1} induit souvent la détérioration d'une autre f_{n2}. Le problème MO essaye de résoudre le problème en trouvant une solution qui satisfait au mieux l'ensemble de ces fonctions en respectant les contraintes du problème.

Comme expliqué dans l'introduction (section 5.1.2), plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature permettant de résoudre ce type de problème MO. La méthode des GA sélectionnée permet de faire une optimisation globale en explorant la totalité de l'espace de conception, de ne pas privilégier un objectif par rapport à un autre, et de donner un set de solutions "Pareto-Optimales" qui sont autant de compromis pour notre problème. L'utilisation de ces méthodes nécessite la définition du concept de solutions dîtes "Pareto-optimales".

5.3.2 Notion de dominance et optimalité au sens de Pareto

Dans un problème d'optimisation MO, les solutions sont classées suivant le concept de dominance au sens de Pareto comme défini par Deb [DAPM00, DPAM02]. Ce concept se prononce comme ceci :

Notons par S l'espace de décision, une solution faisable $x^* \in S$ est connue sous Pareto optimale, dîte aussi solution efficace ou non-dominée, si et seulement si il n'existe pas une solution $x \in S$ tel que x domine x^*.

Une solution $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ domine une solution $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ dans le cas d'une minimisation des n fonctions-objectif f_i, si $\forall i \in [1, ..., n]$, $f_i(y) \leq f_i(z)$ et f_i, si $\forall i \in [1, ..., n]$, $f_i(y) < f_i(z)$.

La figure 5.2 illustre la notion de solution dominée et Pareto-Optimale dans le cas d'une minimisation de deux fonctions-objectif f_1 et f_2 par une représentation graphique 2D.

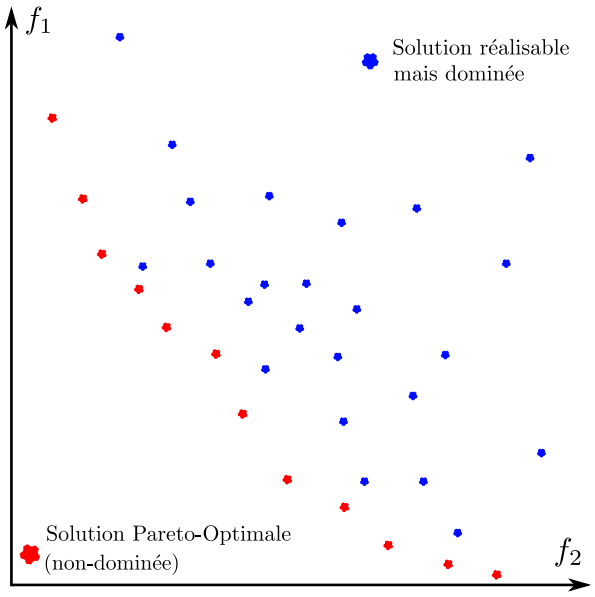


FIGURE 5.2: Notion de dominance au sens de Pareto, solutions dominées et Pareto-Optimales

5.3.3 Algorithmes évolutionnaires ou Algorithmes génétiques

Ces dernières années plusieurs types d'algorithmes ont été développés permettant l'optimisation MO, et notamment les MOEA (ou GA). Comme expliqué dans l'introduction (section 5.1.2), plusieurs types d'algorithme sont disponibles tels que SPEA, SPEA-II, PAES, NSGA, NSGA-II ou encore APA. Le principe de ces méthodes, basées sur l'évolution des espèces de façon aléatoire et la sélection naturelle, est expliqué plus en détail dans la section suivante. Par rapport aux méthodes classiques, les GA présentent de gros avantages :

- L'adaptation : le GA ne nécessite pas de formulation mathématique complexe ou de calculer des gradients pour trouver la direction de descente. Il peut manipuler n'importe quel type de fonction-objectif et de contraintes (linéaires ou non, continues ou discrètes) ainsi que des espaces de recherches mixtes.
- La robustesse : l'utilisation des opérateurs d'évolutions laisse l'algorithme génétique faire une recherche globale. Il a été démontré à travers plusieurs études que l'algorithme génétique localise au mieux l'optimum global et réduit énormément le temps de calcul.

– La flexibilité : l'algorithme génétique présente une bonne flexibilité si l'on souhaite le coupler avec des stratégies de recherche locale pour des problèmes complexes.

5.3.4 Fonctionnement des Algorithmes Génétiques

Définitions

Les méthodes de GA peuvent être comparées à l'évolution des espèces dans leur milieu naturel. Ils consistent à faire évoluer une population, dont les individus, solutions du problème, tendent à s'améliorer vis-à-vis de nos objectifs, au fil des générations. Dans ce contexte, les termes utilisés pour décrire son fonctionnement sont tirés de la biologie, à savoir :

– un "individu" est une solution du problème (dans notre cas, une combinaison de p épaisseurs (une par zone) qui donne un compromis entre les objectifs) ;
– une "population" est un groupe d'individus (dans notre cas, un ensemble de combinaisons d'épaisseurs, qui forment un Front de Pareto avec un compromis par individu/combinaison d'épaisseurs) ;
– une "génération" est une itération de l'algorithme et correspond à la population courante.

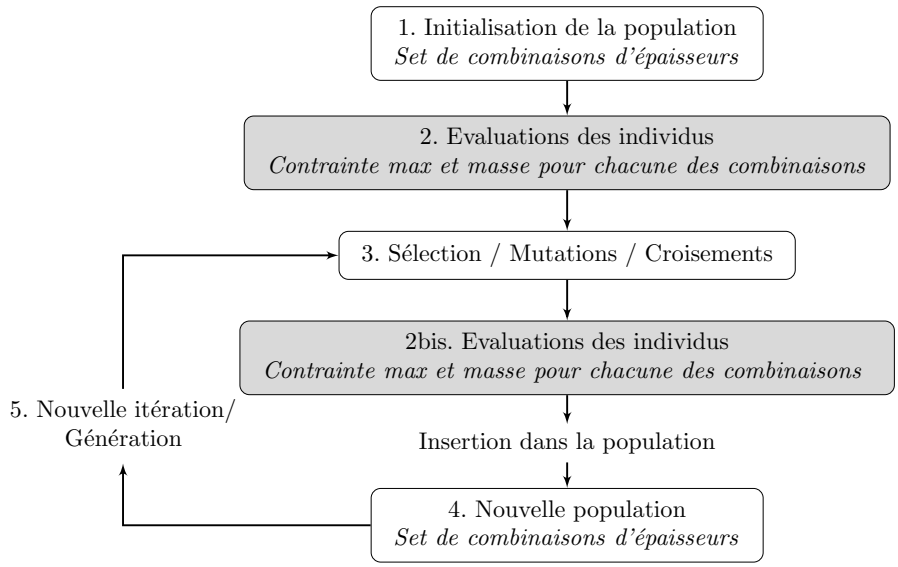


FIGURE 5.3: Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (blocs gris : apport de notre travail)

Fonctionnement Général

Le fonctionnement du GA est synthétisé par le schéma figure 5.3. Il est composé de 5 étapes :

- 1. Création d'une population initiale de façon aléatoire (répartition d'épaisseurs aléatoire).
- 2. Calcul des objectifs pour chaque individu de la population (étape "d'évaluation" qui donne les valeurs des objectifs pour chacune des combinaisons d'épaisseurs).
- 3. Création de nouveaux individus par sélection, mutation et croisement.
- 2.bis Évaluation des nouveaux individus (identique à l'étape 2).
- 4. Formation d'une nouvelle population avec un mélange de nouveaux et d'anciens individus le cas échéant.
- 5. Réitération du processus sur plusieurs générations.

Il convient de noter que les étapes identiques 2. (et 2bis.) d'évaluation des individus et donc des fonctions-objectifs sont très souvent les plus coûteuse, en particulier lorsqu'elles nécessitent la reconstruction du champ de contraintes comme c'est le cas dans cette étude. C'est ici que notre travail s'insère dans le reste du chapitre.

Sélections, Croisements et mutations

La compréhension du fonctionnement du GA nécessite la connaissance des significations des opérateurs de sélection, mutation et croisement :
Croisement : c'est le principal opérateur pour un GA. Il opère sur deux "chromosomes" et génère un troisième (enfant) en combinant les deux derniers. En pratique, il s'agit dans notre cas de prendre certaines épaisseurs d'un individus, et d'autres épaisseurs d'un autre individus, et ainsi d'en former un troisième. On part ainsi du principe qu'en prenant des chromosomes (quelques épaisseurs) de plusieurs individus donnant de bons objectifs, on peut éventuellement obtenir un nouvel individu dont certains objectifs sont meilleurs. Une méthode simple pour faire le croisement est de coupler les chromosomes en définissant un point de coupe et de coller les deux morceaux. Cette méthode marche bien pour une représentation binaire des variables. La performance d'un GA dépend fortement du type de croisement. De nombreux types de croisement ont été proposés dans la littérature dont les plus connus sont : conventionnel, arithmétique et stochastique.
Mutation : c'est un opérateur basique qui produit des changements aléatoires au niveau des chromosomes. Une technique simple permettant de générer des mutations est de modifier des gênes d'une manière aléatoire. Pour les GA, les mutations jouent un rôle important : elles servent à remplacer les chromosomes "oubliés" de l'ancienne population.
Sélection : c'est la clé du GA. Différentes stratégies de sélection ont été proposées dans la littérature : la "*roulette wheel selection*", "*tournament selection*", "*truncation selection*" ou encore la "*elitist selection*". Une comparaison de ces différents schémas de sélection est disponible dans [BT95].

Spécificités de NSGA-II

L'algorithme NSGA-II proposé par Deb [DAPM00, DPAM02] est très largement utilisé dans la résolution des problèmes d'optimisation MO. Le principe de base de cet algorithme consiste à classer l'ensemble des solutions pour chaque génération selon la notion de dominance de Pareto. L'ensemble des solutions de la population en cours est rangé sous plusieurs classes. Les meilleures solutions sont sur le front de Pareto numéro 1, les individus qui sont sur le deuxième front forment le front de Pareto numéro 2, et ainsi de suite. Deux valeurs permettant de faire la sélection sont attribuées à chaque individus :

- la première, est le rang de la solution à laquelle il appartient et qui représente la qualité de la solution en terme de convergence ;
- la seconde, est connue sous le nom de "*crowding distance*" : elle consiste à estimer la densité entourant une valeur particulière de l'espace objectif et représente la qualité de la solution en terme de diversité.

Une solution est dite meilleure qu'une autre si elle a un meilleur rang, en cas d'égalité, c'est celle qui a la meilleure "*crowding distance*" qui l'emporte. L'algorithme NSGA-II est donc basé sur une classification des individus en plusieurs niveaux et utilise une procédure de tri plus rapide que son prédécesseur NSGA basé sur la non dominance. D'une part, il bénéficie d'une approche élitiste qui permet de préserver la diversité des populations en sauvegardant les meilleures solutions trouvées lors des générations précédentes. D'autre part, l'opérateur de comparaison basé sur un calcul de la "*crowding distance*" permet une bonne répartition de Front de Pareto sur l'ensemble des possibilités. Sa mise en œuvre est simple et efficace, grâce à la pédagogie et au temps consacré par Deb dans l'implémentation de ToolBox dédiées.

5.4 Modèles éléments-finis mixtes paramétrés en épaisseurs pour plaques fines

L'étape d'évaluation du GA (figure 5.3) est de loin la plus coûteuse, en particulier dans le cas où elle nécessite la reconstruction du champ de contraintes. Les MEF mixtes déplacements/contraintes généralisée définis dans le chapitre 1 permet un accès plus rapide au champ de contraintes global par rapport à un MEF primal (voir section 2.4). Cependant, ce type de MEF présente en contrepartie des inconvénients de temps d'assemblage et de matrices élémentaires de grandes tailles. Ces caractéristiques peuvent donc paraître rédhibitoires si l'on doit remailler la structure pour en changer des paramètres géométriques. Toutefois, si les grandeurs modifiées sont des épaisseurs, la théorie des plaques implémentée dans la formulation mixte de Hellinger-Reissner nous donne la possibilité de construire un modèle paramétrique indépendant de l'épaisseur. Ainsi, une modification des paramètres de l'optimisation n'entraîne pas remaillage. Nous expliquons ici comment construire ce modèle dans le cas de la théorie de KL, en se basant sur le développement de la section 1.3.

Il convient de noter que toutes les composantes matricielles écrits en noir dans les équations de cette section se réfèrent à des composantes indépendantes de l'épaisseur, tandis que les termes qui en dépendent sont en rouge. De plus les matrices surmontées d'un $\tilde{.}$ définissent des composants des matrices de raideur et masse précédemment définies, dont l'épaisseur a été "sortie" (exemple : $\tilde{\boldsymbol{P}} = t^3\boldsymbol{H}$). Pour aider le développement matriciel et le paramétrage en épaisseur, les indices $._w$ et $._\theta$ sont aussi introduits pour différencier respectivement les termes en déplacements transverses qui dépendent de t et les termes en rotation qui dépendent de t^3.

5.4.1 Modèle mixte paramétré

La discrétisation des champs de déplacements et contraintes généralisée reste la même que dans les sections 1.3.2 et 1.3.3. On peut néanmoins définir la matrice de souplesse généralisée comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{ijkl} = t^3\boldsymbol{S}_{ijkl} = \begin{Bmatrix} \frac{12}{E} & -\frac{12\nu}{E} & 0 \\ -\frac{12\nu}{E} & \frac{12}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{E} \end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

On peut aussi séparer la matrice $\boldsymbol{m}$ de l'équation 1.18 en deux matrices :

$$m_w = t\rho \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{m}_\theta = t^3\rho \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{Bmatrix} \tag{5.4}$$

Ainsi, le système matriciel mixte qui définit l'équilibre d'un élement (initialement l'équation 1.23) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} t\tilde{\boldsymbol{M}}_w & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{M}_{mix}} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_w \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_\theta \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_w^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_\theta^T \\ \boldsymbol{G}_w & \boldsymbol{G}_\theta & \frac{1}{t^3}\tilde{\boldsymbol{H}} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{K}_{mix}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_w \\ \boldsymbol{U}_\theta \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_w \\ \boldsymbol{F}_\theta \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_w = \iint_S \boldsymbol{N}_w^T\rho\boldsymbol{N}_w \mathrm{dS} \tag{5.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta = \iint_S \boldsymbol{N}_\theta^T\frac{\rho}{12}\boldsymbol{N}_\theta \mathrm{dS} \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{G}_w = \iint_S \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}_w \mathrm{dS} \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{G}_\theta = \iint_S \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}_\theta \mathrm{dS} \tag{5.9}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \iint_S -\boldsymbol{P}^T\tilde{\boldsymbol{S}}_{ijkl}\boldsymbol{P} \mathrm{dS} \tag{5.10}$$

$\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{G}_w, \boldsymbol{G}_\theta\}$, et $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{F}_w, \boldsymbol{F}_\theta\}^T$ les forces nodales (séparées entre composantes en w et en θ).

Les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta$, $\boldsymbol{G}_w$, $\boldsymbol{G}_\theta$ et $\tilde{\boldsymbol{H}}$ constitutives du système 5.5 sont libres de tout paramètre d'épaisseur.

On peut ainsi, pour chaque zone (q) d'épaisseur donnée t, assembler, et construire des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w^{(q)}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta^{(q)}$, $\boldsymbol{G}_w^{(q)}$, $\boldsymbol{G}_\theta^{(q)}$ (ou $\boldsymbol{G}^{(q)}$ totale) et $\tilde{\boldsymbol{H}}^{(q)}$, caractéristiques de chaque zone.
Ainsi, on peut attribuer a posteriori les épaisseurs de chaque zone pré-assemblée (q) pour obtenir les matrices de masse $\boldsymbol{M}_{mix}^{(q)}$ et de raideur $\boldsymbol{K}_{mix}^{(q)}$, et donc les modifier facilement.
Il suffit ensuite d'assembler les différentes zones (en déplacements, comme pour les éléments eux-mêmes (cf. 1.3.5)) pour avoir les matrices de masse $\boldsymbol{M}_{mix}^{tot}$ et de raideur $\boldsymbol{K}_{mix}^{tot}$ de la structure totale paramétrée.
La figure 5.4 schématise la procédure de calcul de contraintes pour une structure divisée en (q) zones d'épaisseurs t_q, avec le modèle mixte paramétré en épaisseur.

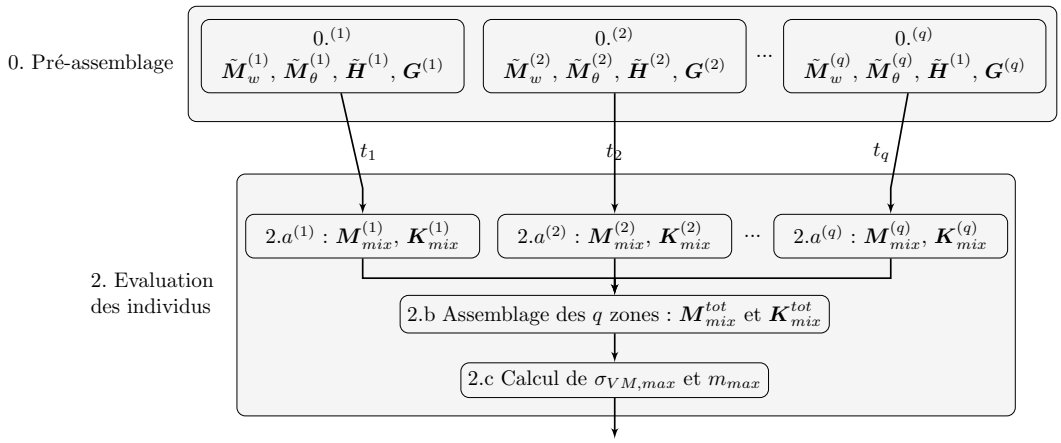


FIGURE 5.4: Étape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation du modèle mixte dans un cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes

5.4.2 Modèle primal équivalent paramétré

De la même façon que pour le modèle mixte, la discrétisation des champs de déplacements et contraintes généralisée reste la même que dans la section 1.3.6. On peut néanmoins définir la matrice de rigidité généralisée, inverse de la souplesse

généralisée, comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{ijkl} = \frac{1}{t^3}\boldsymbol{C}_{ijkl} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{Bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{\nu}{12} & 0 \\ \frac{\nu}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\frac{1}{12} \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

Les termes m_w et matrices $\boldsymbol{m}_\theta$ sont définies de la même façon que dans le cas mixte (cf. équation 5.3 et 5.4).

Ainsi, le système matriciel primal qui définit l'équilibre d'un élement (initialement l'équation 1.28) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} t\tilde{\boldsymbol{M}}_w & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{M}_{pri}} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_w \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{K}}_F \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{K}_{pri}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_w \\ \boldsymbol{U}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_w \\ \boldsymbol{F}_\theta \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_F = \iint_S (\boldsymbol{DN}_F)^T \tilde{\boldsymbol{C}}_{ijkl} (\boldsymbol{DN}_F) \mathrm{dS} \tag{5.13}$$

et $\boldsymbol{F} = \left\{\boldsymbol{F}_w, \boldsymbol{F}_\theta\right\}^T$ les forces nodales (séparées entre composantes en w et en θ).

De façon analogue au modèle mixte (cf. 5.5.1), les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}_F$ constitutives du système 5.12 sont libres de tout paramètre d'épaisseur.

On peut ainsi, pour chaque zone (q) d'épaisseur donnée t, les assembler, et construire des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w^{(q)}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta^{(q)}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}_F^{(q)}$, caractéristiques de chaque zone.
Ainsi, on peut, comme pour le modèle mixte, attribuer a posteriori les épaisseurs de chaque zone pré-assemblée (q), et construire les matrices de masse $\boldsymbol{M}_{pri}^{(q)}$ et de raideur $\boldsymbol{K}_{pri}^{(q)}$ de chaque zone (q).
Il s'agit ensuite de les assembler pour avoir les matrices de masse $\boldsymbol{M}_{mix}^{tot}$ et de raideur $\boldsymbol{K}_{mix}^{tot}$ de la structure totale.
La figure 5.5 schématise la procédure de calcul de contraintes pour un structure divisée en (q) zones d'épaisseurs t_q, avec le modèle primal paramétré en épaisseur.

5.4.3 Méthodologie/Intégrations dans l'Algorithme Génétique

Il s'agit ici d'intégrer les processus de calcul de contraintes au sein d'une structure divisée en différente zones d'épaisseur constante (schéma 5.4 et 5.5) dans le principe général des GA (schéma 5.3). Les processus sont schématisés dans les figures 5.6 pour le modèle mixte et 5.7 pour le modèle primal.
Les termes entre parenthèses en couleur bleue présents dans l'algorithme mixte définissent l'ajout optionnel de construction du modèle primal en parallèle, dans le cas où le calcul de la contrainte $\sigma_{VM,max}$ nécessite le calcul préalable d'une fréquence propre ω_n de la structure (en pratique, si l'excitation à laquelle la structure est soumise se

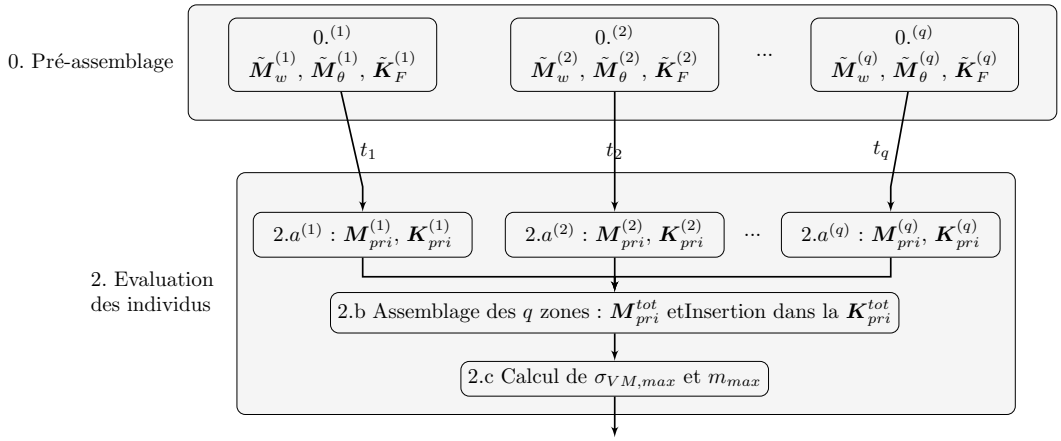


FIGURE 5.5: Étape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation du modèle primal dans un cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes

fait sur mode n et que l'on cherche la fréquence propre associée). Pour rappel, le calcul des modes propres ne peut se faire simplement que sur le modèle primal (cf. section 2.5.2.
On parle dans la suite du rapport d'optimisation par "Modèle mixte/primal paramétré" pour citer ces méthodes.

Étape (0) de pré-assemblage

Il convient de noter l'ajout dans ces algorithmes d'une étape (0) de "pré-assemblage" qui constitue les matrices constitutives de chaque sous-structure (q), sans notion d'épaisseur :

- les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w^{(q)}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta^{(q)}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}^{(q)}$ et $\boldsymbol{G}^{(q)}$ dans le cas du modèle mixte (et $\tilde{\boldsymbol{K}}_F(q)$ le cas échéant (la matrice de masse étant composée des mêmes composantes que la matrice de masse mixte)) ;
- les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}_w^{(q)}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta^{(q)}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}_F^{(q)}$ dans le cas du modèle primal.

Étape (1), (3) et (4)

Les étapes d'initialisation (1), de sélection/mutation/croisement (3), de constitution de la nouvelle population (4) et de réitération des opérations sur g générations sont les mêmes.

Étape (2) et (2bis)

En revanche, c'est dans l'évaluation des p individus (2 et 2.bis) que l'on utilise la sous-structuration précédemment décrite. Celle-ci se fait en 3 principales étapes :

– **Étapes 2.$a^{(q)}$** : attribution des (q) épaisseurs t_q à chaque zone pour obtenir les matrices $\boldsymbol{M}_{pri}^{(q)}$ et $\boldsymbol{K}_{pri}^{(q)}$ dans le cas du modèle primal, $\boldsymbol{M}_{mix}^{(q)}$ et $\boldsymbol{K}_{mix}^{(q)}$ dans le cas du modèle mixte (et ainsi que les matrices $\boldsymbol{M}_{pri}^{(q)}$ et $\boldsymbol{K}_{pri}^{(q)}$ le cas échéant).
– **Étape 2.*b*** : assemblage des (q) zones pour faire la structure globale : $\boldsymbol{M}_{pri}^{tot}$ et $\boldsymbol{K}_{pri}^{tot}$ dans le cas primal ; $\boldsymbol{M}_{mix}^{tot}$ et $\boldsymbol{K}_{mix}^{tot}$ dans le cas mixte (avec $\boldsymbol{M}_{pri}^{tot}$ et $\boldsymbol{K}_{pri}^{tot}$ le cas échéant).
– **Étape 2.*c*** : calcul des contraintes $\sigma_{VM,max}$ sur la structure globale assemblée (et ω_n le cas échéant).

5.5 Modèle éléments-finis mixtes sous-structurés paramétrés en épaisseurs pour plaques fines : “Super-Éléments Mixtes”

Dans la section précédente, le MEF mixte est sous-structuré de telle façon que chacune des zones de la structure est représentée par un modèle mixte paramétré en épaisseur. On peut ainsi définir les matrices de masse et de raideur constitutives de chacune des sous-structures et attribuer les épaisseurs par la suite. Cette méthodologie nous permet d'envisager l'utilisation de méthodes de synthèse modale définies dans le chapitre 3, de façon à ajouter à la sous-structuration déjà effectuée, une représentation modale de chacune des sous-structures considérées. Ainsi, l'étape répétitive d'évaluation du GA (figure 5.3) est simplifiée.
En effet, les méthodes de sous-structuration modale implémentées présentent aussi la particularité d'être facilement modifiables en épaisseur, sans avoir à reconstruire la base modale. On peut ainsi définir, pour chaque zone considérée (d'épaisseur constante), un Super-Élément Mixte (MSE) réduit, facilement manipulable et assemblable, qui permet de calculer les contraintes sur la structure globale réduite plus rapidement. La méthode choisie pour nos problèmes est Fix-Fix-1 (cf. section 3.5.1, modes encastrés sur les déplacements et sur les contraintes, sans modes de branches). Cette méthode a montré son efficacité (cf. chapitre 4), et sa simplicité dans le cas où les DDL de jonctions sont conservés.
Il s'agit de présenter ici le modèle paramétrique de MSE avec la méthode Fix-Fix-1 et la méthodologie associée dans le cas d'une optimisation définie section 5.2. On présente d'une part le modèle paramétrique et la méthodologie d'autre part.
De façon analogue à la section précédente, les couleurs noires et rouges définissent respectivement les termes indépendants et dépendants de l'épaisseur, et les exposants $\tilde{.}$ et indices $._w$ et $._\theta$ sont aussi utilisés.
De plus, l'exposant $.^{(a)}$ définit un composant de la sous-structure (a). Par souci de clarté, les indices $._{U,\beta}$ (qui définissent un composant modal à la fois de déplacements et de contraintes dans la méthode Fix-Fix-1) sont supprimés.

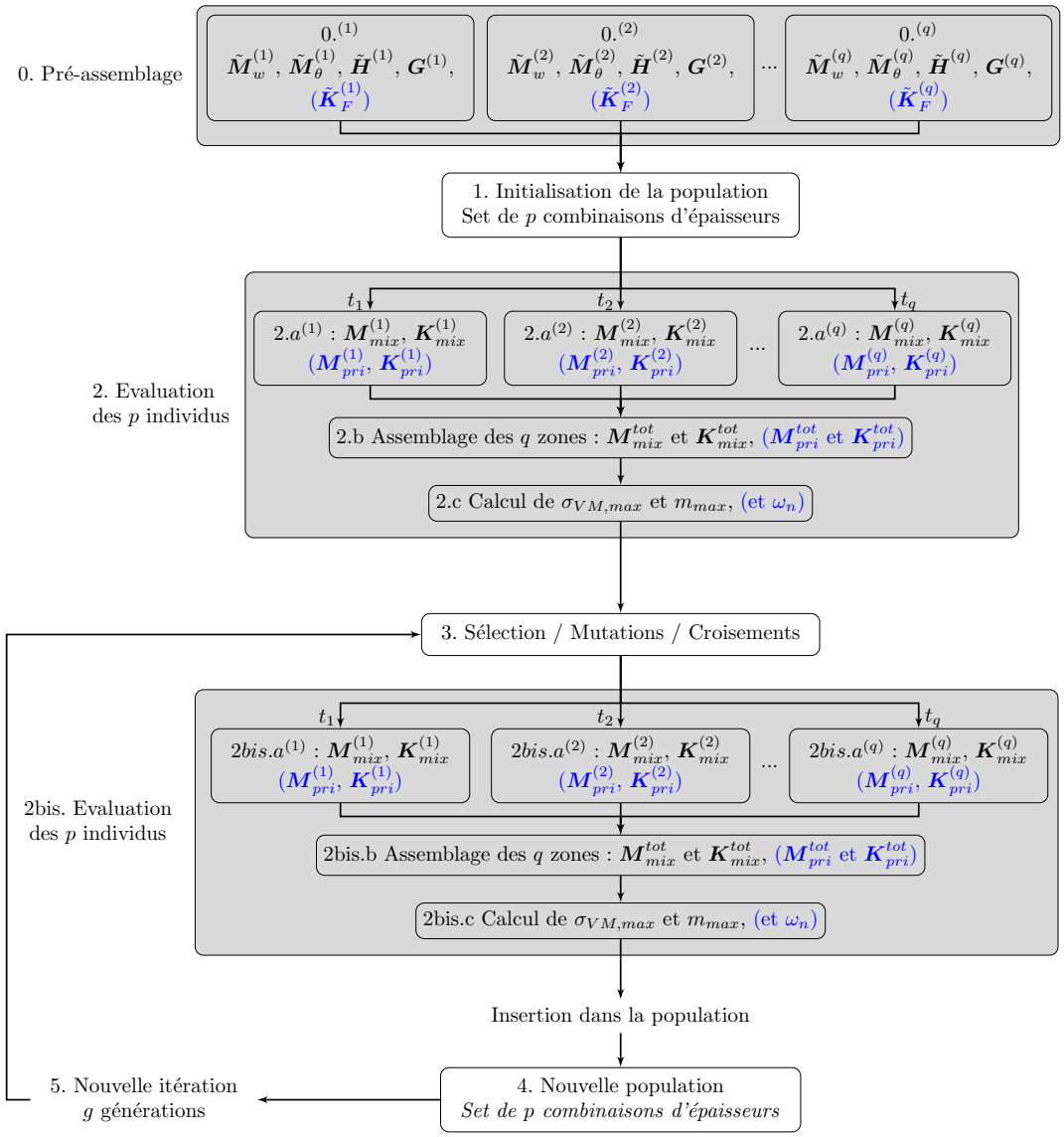


FIGURE 5.6: Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un "MEF mixte paramétré" dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes (blocs gris : apport de notre travail, matrices bleues : optionnelle si besoin de calculer un mode)

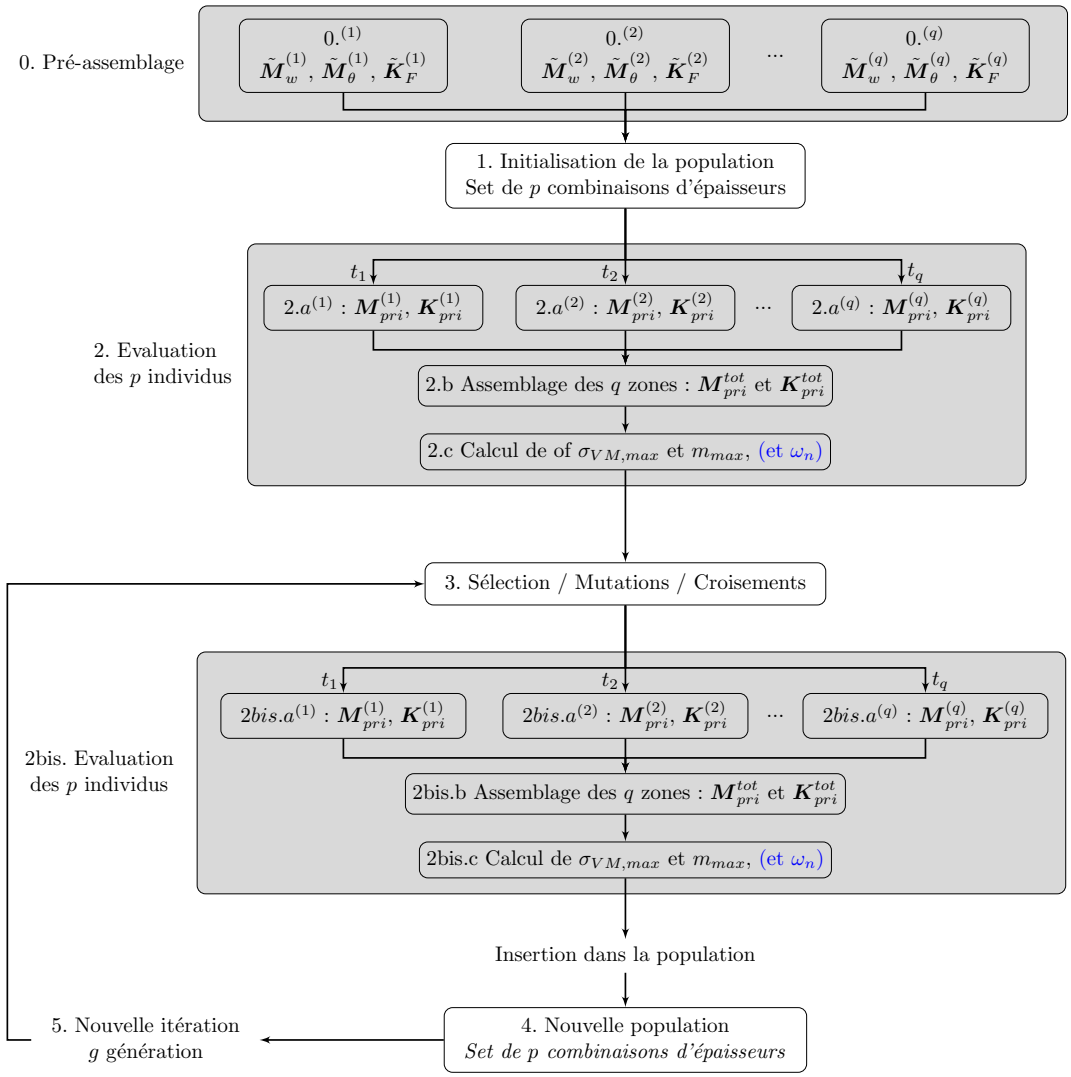


FIGURE 5.7: Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un "MEF primal paramétré" dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes (blocs gris : apport de notre travail, matrices bleues : optionnelle si besoin de calculer un mode)

5.5.1 Modèle et Super-Élément Mixte

Le modèle utilisé pour construire les MSE est basé sur le MEF mixte pour plaques de KL défini dans la section précédente et sur la méthode de sous-structuration modale Fix-Fix-1 (cf. section 3.5.1).

Paramétrage de la réduction Fix-Fix-1

Cette méthode utilise une base de réduction composée de modes propres de la sous-structure $\boldsymbol{\Phi}_{FI,i}$ (avec la jonction considérée comme fixe) et modes statiques de liaison (ou relèvement statique) $\boldsymbol{\Psi}_i$.
Ces deux bases présentent des caractéristiques d'invariance en fonction de l'épaisseur qui s'avère essentielles dans notre cas :

- dans le cas d'un MEF défini par la théorie de Kirchhoff-Love, et d'une sous-structure plane, la forme des modes $\boldsymbol{\Phi}_{FI,i}$ et $\boldsymbol{\Psi}_i$ reste inchangée avec une modification de l'épaisseur ;
- dans le cas d'un MEF défini par la théorie de Kirchhoff-Love, et d'une sous-structure non-plane (type coque), les matrices $\boldsymbol{\Phi}_{FI,i}$ et $\boldsymbol{\Psi}_i$ ne restent pas strictement identiques avec un changement d'épaisseur. Cependant, les effets de membranes étant souvent négligeables, on peut considérer qu'il s'agit d'une bonne approximation de garder les mêmes modes malgré une épaisseur différente (dans la mesure ou la plage d'épaisseur choisie n'est pas trop large).

Par conséquent, pour des sous-structures planes, et dans une moindre mesure pour des sous-structures qui ne le sont pas, ces deux bases modales restent identiques pour une plaque donnée, quelle que soit son épaisseur. De plus, la relation 2.20 qui introduit la matrice $\boldsymbol{P}^{(a)}$ peut, à l'aide de l'équation 5.5, s'écrire de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = t^3 \tilde{\boldsymbol{P}} \boldsymbol{U} \tag{5.14}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} = -\tilde{\boldsymbol{H}}^{-1} \boldsymbol{G} \tag{5.15}$$

$\tilde{\boldsymbol{H}}$ et $\boldsymbol{G}$ étant indépendant de tout paramètre d'épaisseur Ces caractéristiques nous permettent de réécrire la projection matricielle de la section 3.5.1 en isolant les variables d'épaisseurs, pour une sous-structure donnée (a) :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{a}_{i,w} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j,w} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j,\theta} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,w} & \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,w} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,\theta} & \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij,w} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij,\theta} \\ t^3 \tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,w} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,\theta} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & t^3 \tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,w} \\ \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{I}_{ij,w} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\theta} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

avec $\boldsymbol{\Phi}_{FIi}^{(a)} = \left\{\boldsymbol{\Phi}_{FI,i,w} \quad \boldsymbol{\Phi}_{FI,i,\theta}\right\}^T$ la matrice tronquée des modes fixes de la sous-structure (a) et $\boldsymbol{\Psi}_i^{(a)} = -\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ij} = \left\{\boldsymbol{\Psi}_{i,w}^{(a)} \quad \boldsymbol{\Psi}_{i,\theta}^{(a)}\right\}^T$ la matrice des modes statiques de liaisons de la structure (a) pour la jonction considérée. La conservation des DDL physiques $\boldsymbol{U}_j^{(a)}$ permettent d'assembler facilement deux sous-structures (a) et (b) tel que : $\boldsymbol{U}_j^{(a)} = \boldsymbol{U}_j^{(b)} = \boldsymbol{U}_j$.

Paramétrage des MSE

De façon analogue aux équations 5.5 et 3.14, il convient de réécrire les matrices M_{mix} et K_{mix} en séparant à la fois les termes dépendants de t, t^3 et $\frac{1}{t^3}$ et les DDL Internes i et de Jonction j :

$$\boldsymbol{K}_{mix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{i,w}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{i,\theta}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{j,w}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{j,\theta}^T \\ \boldsymbol{G}_{i,w} & \boldsymbol{G}_{i,\theta} & \boldsymbol{G}_{j,w} & \boldsymbol{G}_{j,\theta} & \frac{1}{t^3}\tilde{\boldsymbol{H}} \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

et

$$\boldsymbol{M}_{mix} = \begin{Bmatrix} t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,w} & \boldsymbol{0} & t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,w} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,\theta} & \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,\theta} & \boldsymbol{0} \\ t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,w} & \boldsymbol{0} & t\tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,w} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,\theta} & \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,\theta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

avec

$$\boldsymbol{G} = \left\{\boldsymbol{G}_{i,w} \quad \boldsymbol{G}_{i,\theta} \quad \boldsymbol{G}_{j,w} \quad \boldsymbol{G}_{j,\theta}\right\}^T \tag{5.19}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_w = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,w} & \tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,w} \\ \tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,w} & \tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,w} \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_\theta = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,\theta} & \tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,\theta} \\ \tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,\theta} & \tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,\theta} \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

Une fois réduit, l'équilibre d'une sous-structure (a) peut être donnée par ses matrices de masse réduite $\boldsymbol{M}_{mix,red}^{(a)}$ et de raideur réduite $\boldsymbol{K}_{mix,red}^{(a)}$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_{\eta\eta}^{(a)} & \boldsymbol{M}_{\eta j}^{(a)} \\ \boldsymbol{M}_{j\eta}^{(a)} & \boldsymbol{M}_{jj}^{(a)} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{M}_{mix,red}^{(a)}} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{FI}^{(a)} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_j^{(a)} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{K}_{\eta\eta}^{(a)} & \boldsymbol{K}_{\eta j}^{(a)} \\ \boldsymbol{K}_{j\eta}^{(a)} & \boldsymbol{K}_{jj}^{(a)} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{K}_{mix,red}^{(a)}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{FI}^{(a)} \\ \boldsymbol{U}_j^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_\eta \\ \boldsymbol{F}_j \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

A l'aide des équations 5.16, 5.17 et 5.18, l'équation 5.22 d'équilibre d'une sous-structure (a) peut s'écrire de façon paramétrique en épaisseur, à l'aide des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red,t}$, indépendantes de toute variable d'épaisseur :

$$\left\{ t\,\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t} + t^3\,\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3} \right\} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^{(a)}_{FI} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} + \left\{ t^3 \tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red} \right\} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\eta} \\ \boldsymbol{F}_{j} \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

On se réfère à l'annexe B pour le détail des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red}$.

L'équation 5.23 permet ainsi de décrire le comportement d'une sous-structure/d'un MSE (a) en fonction des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red}$ qui sont indépendantes de l'épaisseur pour un maillage donné.
Ces matrices dérivent elles-mêmes des matrices :

- $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{w}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\theta}$, $\boldsymbol{G}^{(a)}$ et $\tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)}$ constitutives des matrices du système non réduit (équations 5.17 et 5.18) ;
- $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i}$, $\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i}$ et $\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}$ caractéristiques de la réduction Fix-Fix-1 avec la troncature choisie (équation 5.16).

Toutes ces matrices sont libres de tout paramètre d'épaisseur.

On peut ainsi, pour chaque zone (a) d'épaisseur donnée t, assembler, et construire les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{w}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\theta}$, $\boldsymbol{G}^{(a)}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)}$, $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i}$, $\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i}$ et $\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}$, et ainsi les matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red}$ caractéristiques de chaque zone/MSE (a), sans connaître leurs épaisseurs.
On peut attribuer a posteriori les épaisseurs de chaque MSE pré-assemblé, et donc les modifier facilement.
Il suffit ensuite d'assembler les différentes zones par les déplacements de jonctions conservés dans la réduction. La figure 5.8 schématise la procédure de calcul de contraintes pour une structure divisée en (q) zones d'épaisseurs t_q, avec les MSE paramétrés en épaisseur.

5.5.2 Méthodologie/Intégrations dans l'Algorithme Génétique

Il s'agit ici d'intégrer les processus de calcul de contraintes à l'aide des MSE au sein d'une structure divisée en différentes zones d'épaisseurs constantes (schéma 5.8) dans le principe général des GA (schéma 5.3). Le processus est schématisé dans la figure 5.9.
On parle dans la suite du rapport d'optimisation par "MSE paramétrés" pour citer ces méthodes.

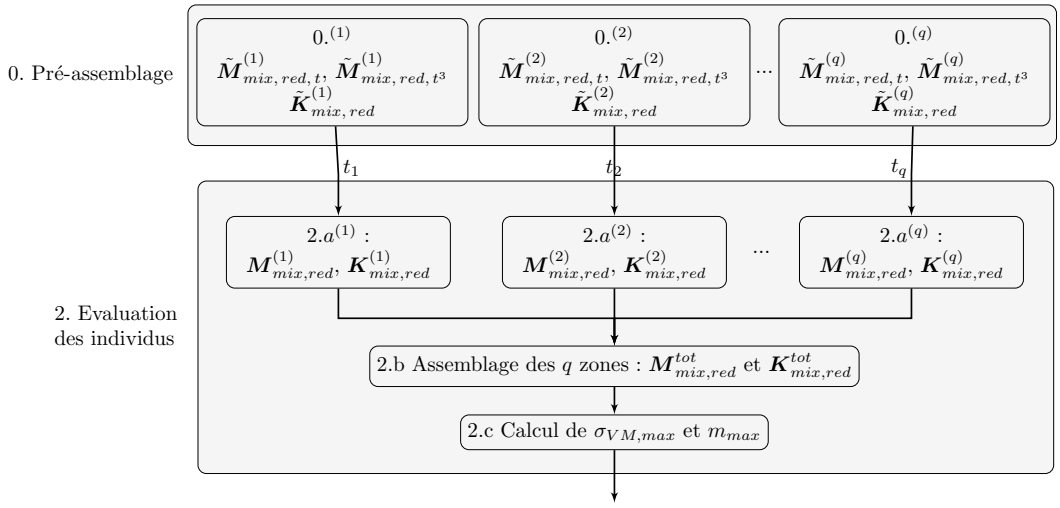


FIGURE 5.8: Etape 2 d'évaluation de l'Algorithme Génétique avec l'utilisation des MSE dans un cas de (q) zones/MSE d'épaisseurs indépendantes

Étape (0) de pré-assemblage

De façon analogue à la méthode de la section 5.4, on note l'ajout d'une étape (0) de "pré-assemblage" qui constitue les matrices constitutives de réduction de chaque MSE (q), sans notion d'épaisseur :

- les matrices du modèle mixte réduit libre de toute épaisseur : $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,red,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,red}$;
- la matrice de raideur du modèle primal le cas échéant : $\tilde{\boldsymbol{K}}_F(q)$.

Étape (1), (3) et (4)

Les étapes d'initialisation (1), de sélection/mutation/croisement (3), de constitution de la nouvelle population (4) et de réitération des opérations sur g générations sont une nouvelle fois les mêmes.

Étape (2) et (2.bis)

C'est cependant dans l'évaluation des p individus (2 et 2.bis) que l'on utilise la sous-structuration modale en MSE que l'on vient de décrire. Elle se fait en 3 principales étapes :

- **Étapes ($2.a^{(q)}$)** : attribution des (q) épaisseurs à chaque MSE pour calculer : $\boldsymbol{M}^{(q)}_{mix,red}$ et $\boldsymbol{K}^{(q)}_{mix,red}$ (ainsi que les matrices $\boldsymbol{M}^{(q)}_{pri}$ et $\boldsymbol{K}^{(q)}_{pri}$ le cas échéant si l'on a besoin des modes propres de la structure).
- **Étape (2.*b*)** : assemblage des (q) zones pour faire les matrices de la structure globale réduite $\boldsymbol{M}^{tot}_{mix,red}$ et $\boldsymbol{K}^{tot}_{mix,red}$ (avec $\boldsymbol{M}^{tot}_{pri}$ et $\boldsymbol{K}^{tot}_{pri}$ le cas échéant).

– **Étape (2.*c*)** : calcul des contraintes $\sigma_{VM,max}$ sur la structure globale réduite assemblée (et ω_n le cas échéant).

5.6 Temps de calcul et bénéfices

Dans un cas d'optimisation comme le nôtre, l'algorithme 5.7 qui utilise un modèle primal "plaque" paramétré en épaisseur est la méthode qui paraît la plus évidente et intuitive, car elle permet de changer les paramètres d'épaisseurs sans avoir à re-mailler, tout en utilisant un MEF primal classique.

Les deux méthodes implémentées dans les sections 5.4 et 5.5.1 utilisent respectivement un MEF mixte sous-structuré et un MEF mixte réduit sous-structuré, tous les deux paramétrés en épaisseur. Au delà de l'originalité de ces méthodes et de la possibilité d'utiliser des MEF mixtes plus complexes, elles présentent l'intérêt d'améliorer les temps de calcul dans certains compartiments de l'algorithme. Le tableau 5.1 résume les performances de l'algorithme en fonction des méthodes de calcul de contraintes que l'on utilise.

Les étapes (1), (3) et (4) de l'algorithme sont identiques quelle que soit la méthode utilisée. L'étape de pré-assemblage (0) n'étant pas répétitive le temps qui lui est associé (pour l'exemple présenté ici, entre quelques secondes et quelques dizaines de secondes suivant la méthode) n'est pas significatif. En revanche, l'étape (2) que l'on répète au minimum pour chaque individus p sur g générations est la plus importante. C'est cette étape que l'on examine dans le tableau.

Le cas d'étude est celui d'une structure composée de 768 éléments et 3 sous-structures d'épaisseurs variables. Le modèle mixte est réduit avec la méthode Fix-Fix-1 et une projection sur 20 modes par sous-structure. Ainsi, le modèle primal est composé de 2448 DDL, tandis que le modèle mixte est composé de 9360 DDL et le modèle mixte réduit de 168 DDL.
Il convient de noter que les temps donnés correspondent à un seul individu, avec un seul calcul du champ de contraintes global de la structure (un seul cas de chargement). D'autre part, on souligne le fait que le nombre de sous-structures considéré (et donc le nombre de paramètres) ne modifie que très légèrement les temps de calcul décrits ici. On peut ainsi considérer ces temps comme étant valable pour ce modèle, quelque soit le nombre de paramètres d'épaisseurs. On distingue ainsi 2 cas de figure :

– le cas où l'excitation ne nécessite pas le calcul des fréquences propres ;
– le cas où l'excitation se fait sur un mode en particulier et où il faut calculer les premières fréquences propres (texte bleu dans le tableau) ; dans le cas des étapes (2.a) et (2.b), il s'agit de construire le modèle primal en plus du modèle mixte (ajout de 0.023 s pour les méthodes mixtes et mixtes réduites), dans le cas de l'étape (2.c) il faut calculer les modes en plus (ajout de 0.110 s pour tous les modèles).

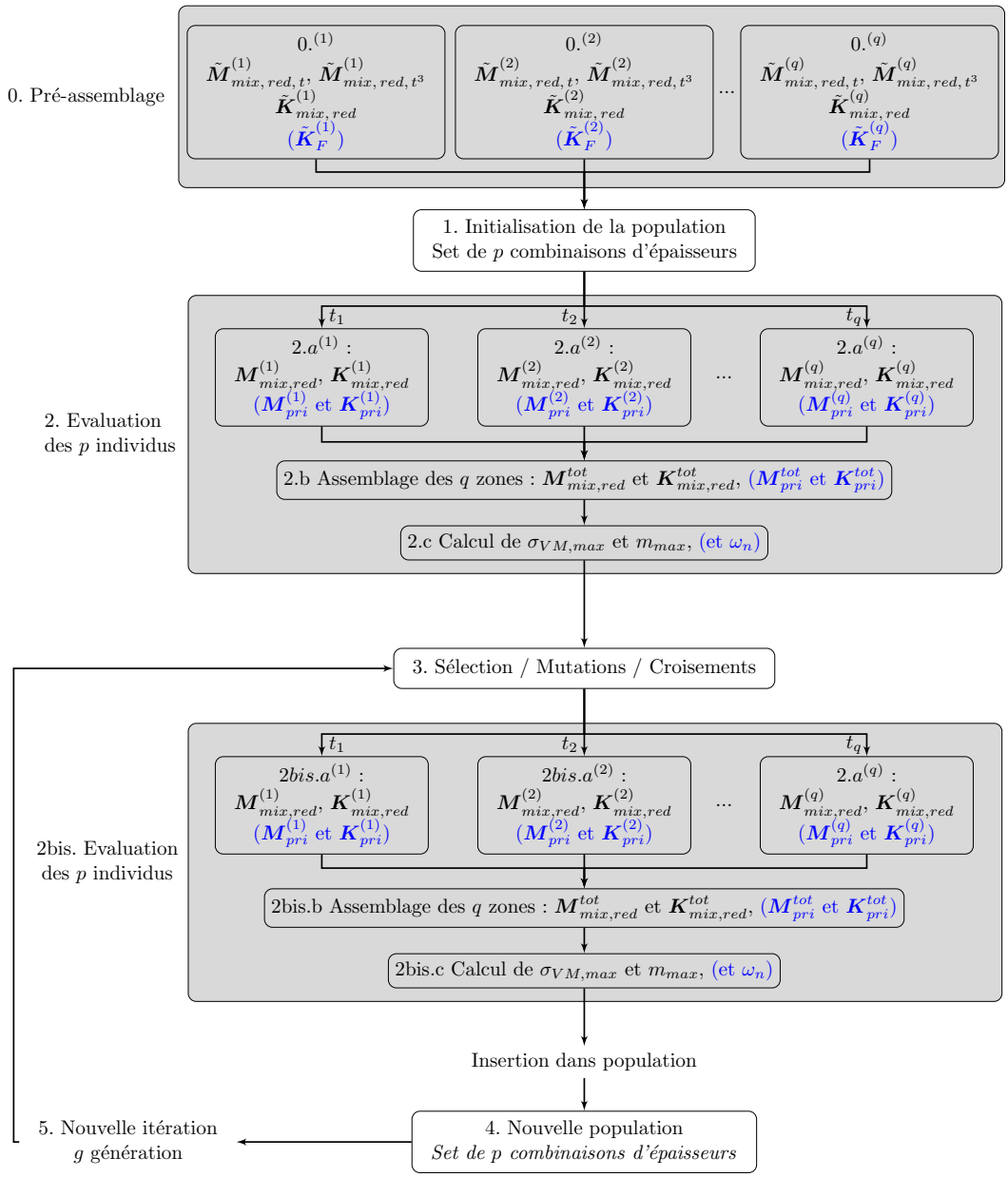


FIGURE 5.9: Principe de fonctionnement d'un Algorithme Génétique (de g générations et p individus) utilisant un MEF mixte sous-structuré réduit dans le cas de (q) zones d'épaisseurs indépendantes (blocs gris : apport de notre travail, matrices bleues : optionnelle si besoin de calculer un mode)

Pour une meilleure lisibilité du tableau 5.1, nous avons séparé les étapes (2.a) et (2.b) d'assemblage et l'étape (2.c). Les temps de référence sont ceux du modèle primal paramétré. A titre indicatif, la dernière colonne donne les temps associés à un modèle primal non-paramétré (avec re-maillage).

5.6.1 Étape (2.a) et (2.b) : construction du modèle

Les résultats de cette section sont à observer dans la partie "**Étape (2.a)**" du tableau 5.1.

Le modèle mixte souffre d'un assemblage des sous-structures lent et il en résulte un temps d'étape (2.a) et (2.c) 10 fois plus élevé que pour le modèle primal paramétré. L'ajout d'une étape optionnelle (construction du modèle primal en parallèle) rend le ratio encore plus défavorable pour le modèle mixte.

Le modèle mixte réduit, de par l'assemblage de matrices plus petites, a un temps d'assemblage avantageux, de même que son temps d'attribution des épaisseurs. En revanche, l'ajout de la construction du modèle primal en parallèle dégrade de façon logique les temps de calcul.

Malgré tout, il convient de noter que ces étapes ont des temps de calcul relativement dérisoires par rapport au calcul de contraintes en lui même (étape (2.c)). L'ordre de grandeur est de quelques centièmes de seconde dans le cas des modèles primaux et mixtes réduits, tandis qu'il est de quelques dixièmes de seconde dans le cas du modèle mixte non-réduit. Cela reste bien inférieur à des temps de l'ordre de quelques secondes quand il s'agit de reconstruire le champ de contraintes.

La dernière colonne donne, à titre indicatif, le temps nécessaire à la reconstruction globale du modèle primal, dans le cas où il ne serait pas paramétré en épaisseur : on constate un temps 300 fois plus élevé (7.3 s) qui, à lui seul, est supérieur à temps total de l'étape (2) quel que soit le modèle utilisé. A titre d'information, la reconstruction globale du modèle primal prend 10.3 s, soit 40 % de plus que le modèle primal. Le paramétrage de nos modèles permet donc, que l'on utilise un modèle primal ou mixte, un gain très important, supérieur à tout calcul de contraintes.

5.6.2 Étape (2.c) : calcul de la réponse et du champ de contraintes

Cette étape (2.c) est divisée en deux sous-étapes : le calcul de la réponse de la structure, puis le calcul du champ de contraintes (voir "**Étape (2.c)**" dans le tableau 5.1).

Compte-tenu de la taille des systèmes matriciels, il est logique de voir un temps de calcul supérieur dans le cas du modèle mixte, et bien meilleur dans le cas du modèle réduit. Néanmoins, les ordres de grandeur considérés sont faibles par rapport au

Modèle	Primal	Mixte paramétré	MSE	Primal classique
Étapes (2.a) et (2.b) : temps (s) de construction du modèle				
Étape 2.a Attribution t_q	0.006	0.008	0.002	Assemblage
Étape 2.b Assemblage	0.017	0.220	0.012	global
Total Étape 2.a et 2.b	0.023	0.228	0.014	7.3
Gain (en %) MEF primal	Réf.	+891 %	-39 %	+31600 %
+étape optionnelle (0.023)	Idem	0.251	0.037	Idem
Gain % MEF primal	Réf.	+991 %	+60 %	Idem
Étape (2.c) : temps (s) de calcul réponse et champ de contraintes				
Étape 2.c.' Réponse	0.05	0.250	0.003	0.05
Étape 2.c." Contraintes	2.95	2.25	2.15	2.95
Total Étape 2.c	3.00	2.500	2.153	Idem Réf.
Gain (en %) MEF primal	Réf.	-16.7 %	-28 %	Idem Réf.
+étape optionnelle (0.110)	3.11	2.61	2.263	Idem Réf.
Gain % MEF primal	Réf.	-16.1 %	-27.2 %	Idem Réf.
ÉTAPE (2) TOTALE : temps (s) de l'étape 2 pour 1 individu/configuration				
Temps	3.023	2.728	2.167	10.3
Gain (en %) MEF primal	Réf.	-9.8 %	-28.3%	+240 %
Avec étape optionnelle	3.133	2.861	2.300	10.41
Gain % MEF primal	Réf.	-8.7 %	-26.6 %	+240 %

TABLE 5.1: Temps de calcul de l'étape 2 d'évaluation du GA pour 1 individu et 1 calcul de contraintes avec les modèles paramétrés primaux (5.4.2), mixtes (5.4) et mixte réduits (MSE, 5.4.1), et un modèle primal classique avec remaillage. **Les lignes bleues correspondent à l'étape 2 avec étape optionnelle de calcul de fréquence propre

temps de reconstruction du champ de contraintes qui joue un rôle plus important.

Ce temps de reconstruction du champ, de 2.95 s dans le cas du modèle primal (paramétré ou non), est nettement amélioré dans le cas du modèle mixte (2.25 s), et même encore meilleur dans le cas du modèle mixte réduit (2.15 s).

Tout bien pesé, l'utilisation du modèle mixte pour calculer la réponse et le champ associé est très bénéfique.
Dans le cas du modèle mixte non-réduit, malgré un temps de calcul de réponse bien plus élevé, le gain total sur cette étape est de 16.7 %, grâce à l'accessibilité du champ de contraintes.
Dans le cas du modèle mixte réduit, le gain étant positif à la fois pour le calcul de la réponse et pour la reconstruction du champ, le gain total sur cette étape est de 28 %.
L'ajout de l'étape optionnelle qui consiste ici à calculer les premières fréquences propres de la structure (+0.110 s), est d'une durée assez courte, et à créditer à chaque modèle. Par conséquent, cela ne change que très peu les gains des modèles mixtes et réduits.

5.6.3 Étape (2) globale : évaluation d'un individu

Il s'agit ici d'observer les temps totaux relatifs à l'étape (2). Les résultats sont à observer dans la partie "**ÉTAPE (2) TOTALE**" du tableau 5.1).

On constate que l'étape (2.c) est vraiment prépondérante, de par les ordres de grandeurs qui sont mis en jeu. En effet, bien que le paramétrage des modèles soit indispensable à la modification des épaisseurs pour éviter des temps d'assemblage de modèle rédhibitoires (cf. temps du modèle non-paramétré, et accrus dans le cas d'un modèle mixte), les temps de calcul de réponse et de champ de contraintes sont la clés de cette méthode.

On constate ainsi un gain global de 9.8 % avec le modèle mixte paramétré, et de 28.3 % avec les MSE. L'ajout de l'étape optionnel ne dégrade que légèrement ces avantages, avec des gains respectifs de 8.7 % et 26.6 %. L'utilisation de modèles mixtes, qui plus est avec réduction, présente donc un apport intéressant par rapport à des méthodes d'optimisation avec la contrainte à calculer à chaque itération, et les épaisseurs en paramètres du problème.

Remarque : dans le cas où la fréquence d'excitation appartient à une bande fréquentielle, il est nécessaire de calculer la contrainte sur toutes les fréquences propres appartenant à cette bande. Par conséquent, ce cas précis nécessite de répéter l'étape (2.c) autant de fois qu'il y a de modes dans l'intervalle. Ainsi, l'étape (2) totale devient plus longue, mais l'étape (2.c) étant prépondérante, les gains de temps autorisés par

les méthodes mixtes et mixtes réduites sont d'autant plus élevés.

5.7 Cas d'étude et représentation des résultats

Il s'agit maintenant de vérifier la cohérence de nos méthodes en présentant quelques résultats significatifs. Dans cette optique, nous présentons d'une part les cas d'étude avec trois différentes structures EF, 2 types d'excitation et les 3 types d'amortissement que l'on utilise. Ensuite nous décrivons la représentation sous forme de front de Pareto avec l'évolution des épaisseurs intégrée dans les graphiques.

5.7.1 Cas d'étude

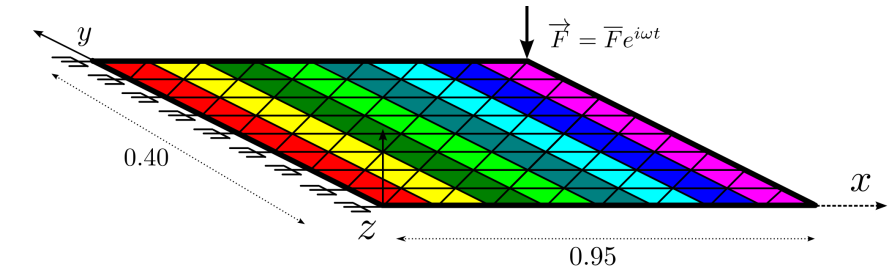
On propose 3 structures différentes pour tester nos méthodes. Nous les appelons "Plaque simple", "Plaque double" et "Plaque triple", en raison de leur forme (voir figure 5.10). Les structures "simples" et "doubles" sont optimisées avec la méthode "Mixte paramétrée", tandis que la structure "triple" est optimisée avec la méthode des "MSE". Cependant, considérant les résultats du chapitre 4, il s'avère que l'utilisation de la méthode Fix-Fix-1 implémentée dans les MSE de la section 5.5.1 n'altère pas les résultats donnés par le modèle. On peut donc considérer que, dans la mesure où la troncature choisie est judicieuse, les méthodes "mixtes paramétrées" et "mixtes réduites" donnent des résultats identiques. Seule la durée des calculs diffère.

Le MEF représentant la plaque simple est composé de 256 éléments. Pour l'optimisation du mode 5, on utilise cependant un modèle composé de 1024 éléments.
La plaque double est représentée par un MEF de 512 éléments. Nous avons aussi fait le choix d'effectuer certains calculs avec un MEF de 128 éléments, étant donné les faibles déformations à observer.
La plaque triple est pour sa part représentée avec 768 EF.
Le matériau choisi pour l'application numérique est le même que celui du chapitre 2 (cf. tableau 2.1).

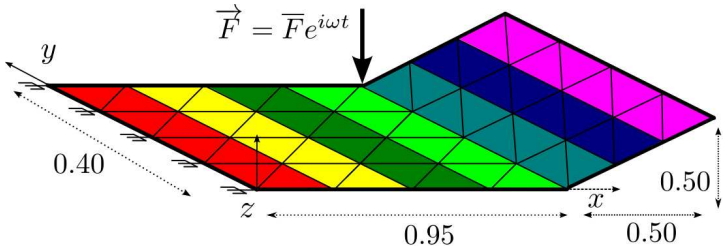
Pour rappel, les objectifs de l'optimisation sont de minimiser la contrainte maximale de Von Mises au sein de la structure sous un chargement dynamique, et sa masse. Les paramètres de l'optimisation sont les épaisseurs de chacune des zones définies par l'utilisateur : ce sont les zones colorées sur les figures 5.10a.b.c (ici par exemple, les structures simples, doubles et triples sont respectivement divisées en 8, 7 et 3 zones). Dans notre cas, nous choisissons arbitrairement une plage de variation de 1 à 2 mm. Cette plage de variation nous permet de rester dans l'hypothèse des plaques minces ($\frac{R}{t} \geqslant 10$, voir section 1.3.1).

5.7.2 Excitation

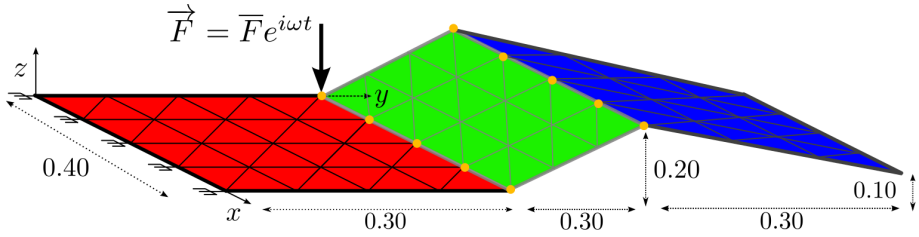
Les structures sont soumises à des chargements harmoniques localisés (cf. figure 5.10). Nous étudions deux cas de chargement : un cas où la pulsation correspond à



(a) Plaque simple



(b) Plaque double



(c) Plaque triple

FIGURE 5.10: Schéma des trois structures académiques à optimiser (en m)

une fréquence propre de la structure (fréquence qui est modifiée pour chaque set de paramètre), et un autre cas plus réel et robuste, où la pulsation peut varier dans une plage de fréquence définie qui contient une ou plusieurs fréquences propres :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}e^{i\omega t} \text{ avec :} \\ &\text{Cas 1 : } \omega = \omega_n \text{ (pulsation du mode } n) \\ &\text{Cas 2 : } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

On calcule ensuite la réponse de la structure à l'aide de la raideur dynamique $\boldsymbol{D}$, de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}^{-1} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

avec $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{K}_{mix} - \omega_n^2 \boldsymbol{M}_{mix}$ dans un cas conservatif, avec un chargement de type "cas 1". Dans le "cas 2" de chargement, il faut répéter le calcul de réponse de la structure pour chacune des fréquences propres appartenant à l'intervalle choisi.
Il convient d'ajouter une notion d'amortissement, dans un souci de réalisme.

5.7.3 Introduction de l'amortissement

Dans notre cas, nous cherchons à intégrer de l'amortissement par le biais des matrices de raideur et d'amortissement précédemment définies (matrices mixtes dans notre cas). En dynamique linéaire, il existe plusieurs types d'amortissement, parmis lesquels les amortissements hystérétiques (ou amortissements structurels) ou les amortissements visqueux. Nous avons choisi d'utiliser et de présenter ici trois amortissements différents.

Amortissement hystérétique global

Dans le cas d'un amortissement hystérétique global, la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de raideur, d'un coefficient ξ. L'équilibre général de la structure s'écrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{M}_{mix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + (1 + j\xi) \boldsymbol{K}_{mix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

Dans notre cas de vibrations forcées, $\boldsymbol{F} = \overline{\boldsymbol{F}} e^{i\omega t}$, donc $\boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{U}} e^{i\omega t}$. Le calcul de la réponse forcée se fait de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{U}} \\ \overline{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} = ((1 + j\xi) \boldsymbol{K}_{mix} - \omega^2 \boldsymbol{M}_{mix})^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

Ce type d'amortissement est dit "structurel", et ne dépend pas de la fréquence d'excitation. On l'utilise dans les cas à la fois d'une excitation sur une fréquence propre et pour une bande fréquentielle.

Amortissement global de Rayleigh (ou visqueux proportionnel global)

L'amortissement de Rayleigh est dit "global". Il est basé sur une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur. La matrice d'amortissement $\boldsymbol{C}$ est ainsi définie par $\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{K} + \beta \boldsymbol{M}$. L'équilibre général de la structure, dans un cas mixte, s'écrit ainsi :

$$\boldsymbol{M}_{mix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \underbrace{(\alpha \boldsymbol{K} + \beta \boldsymbol{M})}_{\boldsymbol{C}} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{U}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \boldsymbol{K}_{mix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.28}$$

Dans un cas de vibrations forcées, on obtient ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{U}} \\ \overline{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} = ((1 + j\omega\alpha) \boldsymbol{K}_{mix} + (-\omega^2 + j\omega\beta) \boldsymbol{M}_{mix})^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.29}$$

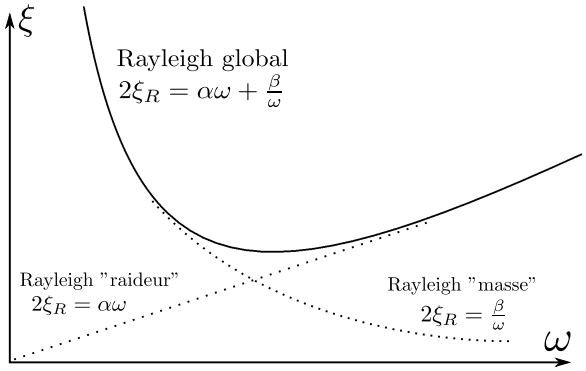


FIGURE 5.11: Évolution de l'amortissement global de Rayleigh en fonction de la pulsation d'excitation.

Ce type d'amortissement dépend de la fréquence d'excitation de réponse. En primal, on peut définir un coefficient ξ_R d'amortissement modal réduit de la façon suivante :

$$2\xi_R = \alpha\omega + \frac{\beta}{\omega} \tag{5.30}$$

Bien que nos études soient basées sur un MEF mixte, nous utilisons aussi cette équation pour définir ξ_R. La figure 5.11 décrit l'évolution de ce coefficient d'amortissement en fonction de la pulsation.
On peut déterminer deux coefficients α et β qui permettent d'obtenir le même coefficient ξ_R pour 2 fréquences ω_1 et ω_2 données :

$$\left.\begin{array}{l} 2\xi_R = \alpha\omega_1 + \frac{\beta}{\omega_1} \\ 2\xi_R = \alpha\omega_2 + \frac{\beta}{\omega_2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \frac{2\xi_R}{\omega_1} - \frac{\beta}{\omega_1^2} \\ \beta = 2\xi_R\omega_2 - \alpha\omega_2^2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \frac{2\xi_R}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1^2}\right) \\ \beta = 2\xi_R\omega_2 - \alpha\omega_2^2 \end{array}\right. \tag{5.31}$$

Dans le cas où nous optimisons sur une bande fréquentielle, nous pouvons choisir un amortissement de Rayleigh global en choisissant ω_1 et ω_2 comme étant le début et la fin de la bande fréquentielle.
Remarques :

- ce type d'amortissement ne permet pas de représenter une hétérogénéité (exemple : dissipation au contact, appuis...) ;
- l'identification des coefficients ne peut se faire que pour deux fréquences modales données ;
- pour une seule fréquence donnée, on peut poser $\beta = 0$ et ainsi : $\alpha = \frac{2\xi_R}{\omega_1}$. La réponse de la structure est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{\boldsymbol{U}} \\ \overline{\boldsymbol{\beta}} \end{array}\right\} = ((1 + 2j\xi_R)\boldsymbol{K}_{mix} - \omega^2\boldsymbol{M}_{mix})^{-1}\left\{\begin{array}{c} \overline{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{5.32}$$

  On perd ainsi la dépendance en ω de l'amortissement, et on se ramène finalement à un amortissement hystérétique global avec $2\xi_R = \xi$. Par conséquent, dans le

cas où un seul mode est optimisé (cas 1), la méthode d'amortissement global de Rayleigh n'est pas testée en plus de celle de l'amortissement hystérétique.

On utilise ce type d'amortissement uniquement dans le cas 2 d'excitation sur une bande fréquentielle.

Amortissement global de Rayleigh "raideur"

On peut également définir un amortissement de Rayleigh dit de "raideur", défini par $\boldsymbol{C}_{mix} = \alpha \boldsymbol{K}_{mix}$. L'équilibre général de la structure s'écrit ainsi :

$$\boldsymbol{M}_{mix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \underbrace{\alpha \boldsymbol{K}_{mix}}_{\boldsymbol{C}_{mix}} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{U}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \boldsymbol{K}_{mix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.33}$$

Dans un cas de vibrations forcées, on obtient ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{U}} \\ \overline{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} = ((1 + j\omega\alpha)\boldsymbol{K}_{mix} + (-\omega^2)\boldsymbol{M}_{mix})^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

L'évolution de l'amortissement de Rayleigh "raideur" est décrit dans la figure 5.11. Dans ce cas, la raideur augmente avec la pulsation. On utilise ce type d'amortissement dans le cas d'une excitation sur une fréquence propre et dans le cas d'une bande fréquentielle.

Il convient de noter que les valeurs d'amortissement choisies par la suite sont suffisamment faibles pour que la valeur des fréquences propres du système conservatif et des fréquences de résonance soient quasiment identiques. On choisit donc par la suite des valeurs de résonance égales aux fréquences propres du système conservatif.

5.7.4 Représentation sous forme de Front de Pareto et évolution des épaisseurs

Chaque résultat présenté dans les annexes C, D et E pour le "cas 1" d'excitation (localisée sur un mode) est composé de 3 graphiques : (a) un front de Pareto qui contient les résultats de l'optimisation et l'évolution des épaisseurs pour les différents compromis trouvés, (b) la configuration d'épaisseur et la structure choisies pour ce cas, (c) la forme du mode à optimiser (dont la fréquence est celle de l'excitation) avec le champ de contraintes de Von Mises. La figure 5.12 en donne un exemple.

(a) Front de Pareto et évolution des épaisseurs

La figure 5.12(a) présente un exemple des graphiques donnant les résultats de l'optimisation. Ces derniers sont représentés sous forme de front de Pareto (points noirs). Chaque point du front est un compromis (ou une Pareto-solution) entre les deux objectifs : la masse (ordonnée de droite) et la contrainte maximale (abscisse). Les

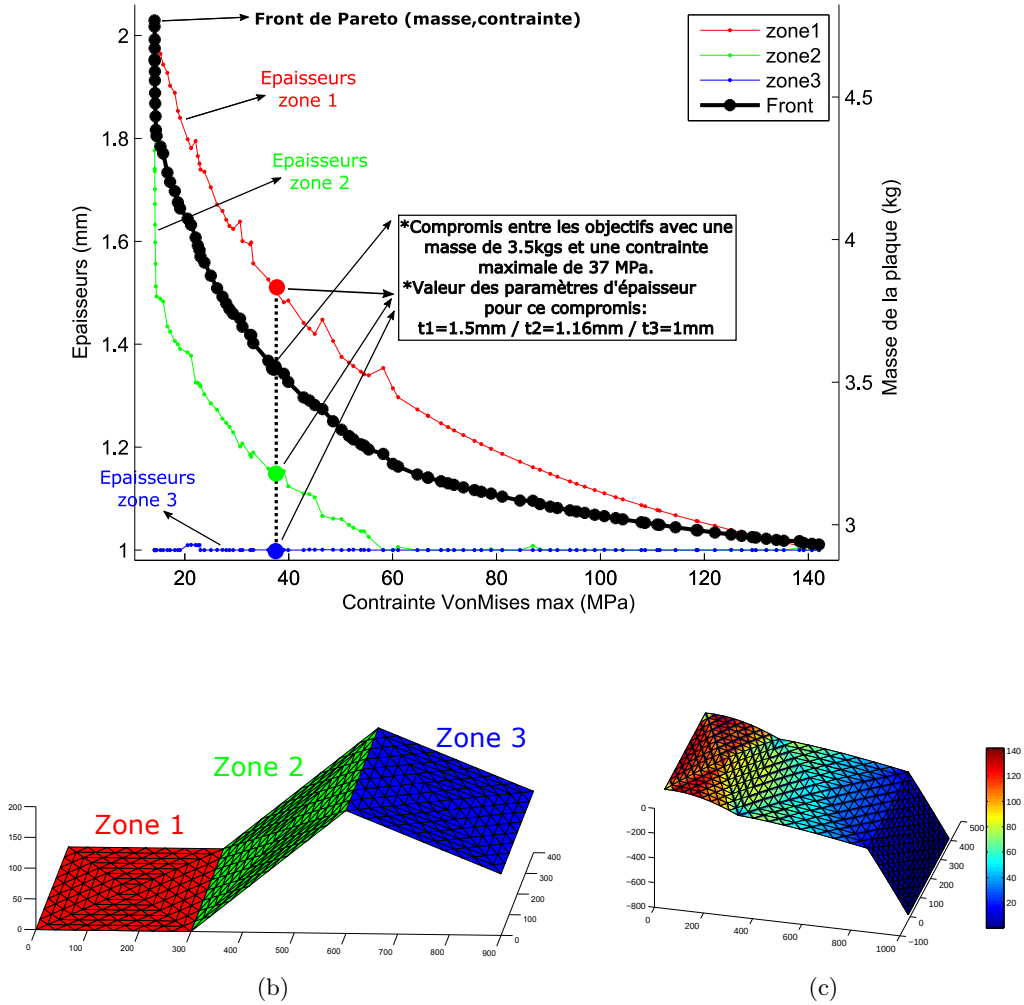


FIGURE 5.12: Exemple de présentation des résultats : (a) Front de Pareto (Masse de la plaque / Contrainte maximale de la plaque) avec l'évolution des 3 épaisseurs paramètres, (b) Répartition des zones d'épaisseurs sur la structure concernée, (c) forme du mode optimisé

courbes colorées correspondent aux évolutions de chacune des épaisseurs des zones colorées sur la figure (b) (ordonnées de gauche).
La lecture de ce graphique se fait comme suit : l'utilisateur choisit une Pareto-solution en fonction des compromis de masse et de contraintes qu'il souhaite. Pour obtenir le set de paramètres correspondant à ce compromis, il faut prendre les points de chacune des courbes d'épaisseurs sur la même abscisse. L'exemple de la figure 5.12 montre par exemple une configuration d'épaisseurs $t_1 = 1.5$ mm, $t_2 = 1.16$ mm et $t_3 = 1$ mm, pour un résultat d'une contrainte maximale de 37 MPa et une masse de 3.5 kgs.

(b) Répartition des zones d'épaisseurs indépendantes

La figure 5.12(b) donne la structure concernée par l'optimisation, et surtout la répartition des zones épaisseurs indépendantes.

(c) Forme du mode

La figure 5.12(b) donne la forme du mode de la structure (b) que l'on cherche à optimiser, avec le champ de contrainte de Von Mises associé. Cette figure permet de se rendre compte rapidement du côté intuitif ou non des résultats (la logique voudrait que l'augmente l'épaisseur des zones les plus contraintes).

Particularité des cas d'excitation sur un intervalle

Dans le cas où l'on excite avec une fréquence inconnue contenue dans un intervalle connu, plusieurs modes peuvent appartenir à cet intervalle (pas nécessairement les mêmes à chaque fois) et donc être mis en jeu. On ne peut pas savoir a priori lequel des modes est le plus contraint. Il faut, pour chaque individu, calculer les fréquences propres des modes (qui varient pour chaque individu), et calculer le champ de contraintes (et donc la réponse) de chacun de ces modes. Le plus contraint est dimensionnant, et définit le point du front de Pareto pour cet individu.
Nous choisissons ainsi d'ajouter au Front de Pareto des flèches horizontales qui définissent les domaines dans lesquels les modes n ont une influence. Au-dessus de chaque flèche est inscrit à la fois le numéro du mode le plus contraint dans ce domaine et les fréquences concernées (voir section 5.8.3 et annexes E.15, E.16, E.17, E.18 et E.19). Lorsqu'un domaine affiche deux modes à la fois, cela indique que l'influence des deux modes est alternée sur ce domaine. Ce cas d'excitation sur une bande fréquentielle n'est étudié que pour la plaque "triple". Dans ces cas, la figure (c) n'est plus nécessaire, et la figure (b) reste la même que la figure 5.12(b) (même répartition des zones d'épaisseurs indépendantes).

Populations et générations

Tous les résultats présentés dans la section 5.8 et dans les annexes C, D et E ont convergé pour un nombre de générations entre $g = 500$ et $g = 1000$. Il est à noter que certaines optimisations ont convergé à partir de $g = 300$. Tous les résultats ont été obtenus pour des populations entre $p = 50$ et $p = 100$ individus, en fonction de la précision dans la forme du front de Pareto voulue. Cependant, la qualité de convergence de NSGA-II en fonction de ces deux paramètres n'est pas l'objet de ce rapport, et il ne paraît donc pas important de s'attarder sur ce point.

5.8 Principaux résultats significatifs

Il s'agit ici de présenter les résultats pertinents que l'on peut obtenir avec nos méthodes et l'intérêt du type de représentation choisi. Après un bref résumé des résultats disponibles en annexe, nous présentons des fronts de Pareto obtenus avec une excitation localisée sur un mode, puis ceux obtenus avec l'excitation sur une bande fréquentielle, et enfin des cas pratiques de typage paramétrique et fonctionnel.

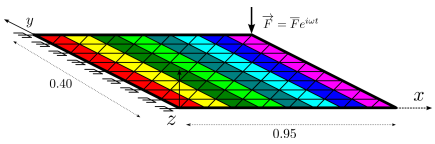
5.8.1 Synthèse des calculs effectués

Les résultats de l'optimisation de la plaque "simple" sont contenus dans l'annexe C. Seul le cas 1 d'excitation sur un mode particulier a été choisi. Les cinq premiers modes ont été optimisés. Respectivement 4, 8, 3, 8 et 4 configurations de zones d'épaisseurs ont été testées pour respectivement les modes 1, 2, 3, 4 et 5. Pour chacun des modes, les deux amortissements hystérétiques et "Rayleigh raideur" ont été implémentés. L'intégralité de ces résultats et les annexes C correspondantes sont résumés dans la première partie du tableau 5.2.

Les résultats concernant la plaque "double" sont contenus dans l'annexe D. De façon analogue à la plaque simple, seul le "cas 1" d'excitation a été implémenté pour les deux amortissements hystérétiques et "Rayleigh raideur", cette fois uniquement pour le mode 3. Trois configurations de répartition d'épaisseurs ont été utilisées. Tous ces résultats et les annexes D correspondantes sont résumés dans la deuxième partie du tableau 5.2.

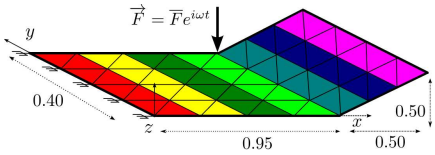
Le lecteur pourra noter que, dans les graphiques présentés en annexes C, D et E, certaines grandeurs associées aux contraintes ne sont physiques (valeur trop élevées), en raison d'un coefficient d'amortissement choisi très faible. Cependant, la répartition des contraintes est physique et l'optimisation des paramètres d'épaisseurs reste cohérente. Des calculs similaires avec des coefficients d'amortissement plus élevés donneraient des résultats analogues avec un niveau de contrainte plus faible (tant que le coefficient d'amortissement influe peu sur les fréquences de résonance).

Plaque Simple



Mode	Configuration	Annexe
Mode 1	4 zones	C.1.1
	6 zones	C.1.2
	8 zones	C.1.3
	10 zones	C.1.4
Mode 2	4 zones	C.2.2
	4 zones + symétrie	C.2.2
	6 zones	C.2.3
	6 zones + symétrie	C.2.4
	8 zones	C.2.5
	9 zones + symétrie	C.2.6
	12 zones	C.2.7
	16 zones	C.2.8
Mode 3	6 zones	C.3.1
	8 zones	C.3.2
	12 zones	C.3.3
Mode 4	4 zones	C.4.2
	4 zones + symétrie	C.4.2
	6 zones	C.4.3
	6 zones + symétrie	C.4.4
	8 zones	C.4.5
	9 zones + symétrie	C.4.6
	12 zones	C.4.7
	16 zones	C.4.8
Mode 5	6 zones	C.5.1
	8 zones	C.5.2
	10 zones	C.5.3
	12 zones	C.3.3

Plaque Double

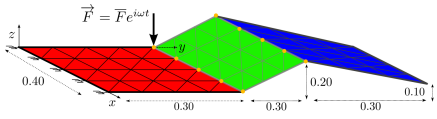


Mode	Configuration	Annexe
Mode 3	7 zones	D.1.1
	10 zones	D.1.2
	14 zones	D.1.3

TABLE 5.2: Modes optimisés pour les structures plaques “simples” et “doubles” avec la méthode d’optimisation du modèle mixte paramétrée (section 5.4.1) avec différentes configurations de zones d’épaisseurs. Se référer aux annexes pour voir les résultats

En ce qui concerne la plaque triple, les deux cas d'excitation ont été optimisés. Les annexes E.1 à E.14 concernent le "cas 1" d'excitation pour les modes 1 à 14, tandis que les annexes E.15 concernent les "cas 2" d'excitation pour des bandes fréquentielles $0-20$ Hz, $10-30$ Hz, $30-70$ Hz, $50-100$ Hz et $70-100$ Hz. Tous ces calculs et les annexes E correspondantes sont résumés dans le tableau 5.3.

Plaque Triple



Mode	Annexe
Mode 1	E.1
Mode 2	E.2
Mode 3	E.3
Mode 4	E.4
Mode 5	E.5
Mode 6	E.6
Mode 7	E.7
Mode 8	E.8
Mode 9	E.9
Mode 10	E.10
Mode 11	E.11
Mode 12	E.12
Mode 13	E.13
Mode 14	E.14

Bande fréquentielle (Hz)	Annexe
Mode 0-20, 0-40, 0-70	E.15
Mode 10-30	E.16
Mode 30-70	E.17
Mode 50-100	E.18
Mode 70-100	E.19

TABLE 5.3: Modes et bandes fréquentielles optimisés pour la structure triple avec la méthode d'optimisation des Super-Éléments Mixtes (section 5.5.1) et 3 sous-structures. Se référer aux annexes pour voir les résultats

5.8.2 Excitation localisée sur une fréquence propre et validation qualitative des méthodes

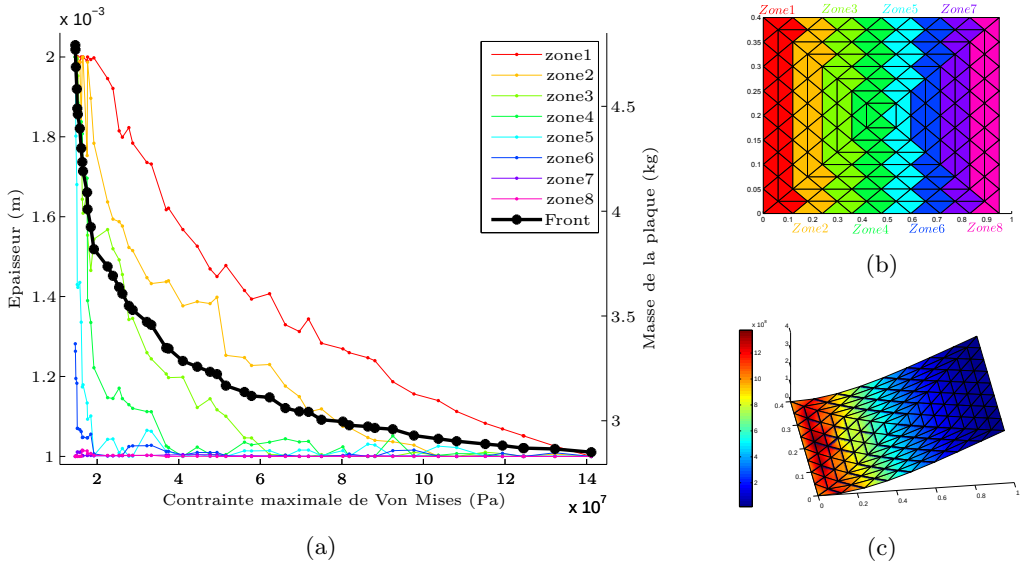
Il s'agit ici d'étudier le type de résultat obtenu avec le "cas 1" d'excitation, où la pulsation correspond à une fréquence propre d'un mode choisi. Néanmoins, il faut noter que le changement d'épaisseurs pour chaque individu induit un changement dans les matrices de masse et de raideur, et par conséquent une modification des

fréquences propres du système. Dans ce cas, il faut, pour chaque individu (ou set de paramètres), recalculer la fréquence propre du mode en question que l'on cherche à optimiser, et exciter la structure avec cette pulsation. Il s'agit de "l'étape optionnelle" (couleur bleue) dans les algorithmes et méthodes des sections 5.4.1, 5.4.2 et 5.5.1.

Validation sur des cas simples

Le cas choisi pour valider qualitativement nos méthodes est celui de la structure "simple" avec excitation localisée sur le mode 1, quel que soit l'amortissement choisi. Les résultats présentés dans la figure 5.13 correspondent au cas "8 zones" d'épaisseurs indépendantes, pour un amortissement de type Rayleigh "raideur" dont le coefficient $\alpha = 2e^{-2}$ et un MEF composé de 256 éléments.

Cet exemple montre des combinaisons d'épaisseurs qui permettent d'obtenir une



(a) (b) (c)

FIGURE 5.13: Optimisation de la structure "simple" pour le mode 1 : (a) Front de Pareto (noir) & épaisseurs (m) pour chaque Pareto-solution (couleur), (b) zone d'épaisseurs indépendantes, (c) Champ de contraintes pour le mode 1 (Pa)

contrainte maximale de Von Mises entre 17 et 142 MPa, pour une masse de la structure comprise entre 2.85 et 4.8 kg.

Plus que la régularité du front de Pareto et le nombre important de solutions pertinentes proposées par le front, c'est l'évolution des épaisseurs en fonction des contraintes maximales qui est intéressante dans ce cas (figure 5.13(a)). En effet, on observe que les zones les plus importantes à renforcer (zones dont l'épaisseur est la plus grande) de façon à diminuer la contrainte maximale, sont les zones proches de l'en-

castrement. Plus une zone est proche de l'encastrement (plus son numéro est bas dans notre cas) et plus son importance est grande dès lors que l'on veut diminuer le niveau de contraintes tout en conservant une masse la plus petite possible. En réalité, il suffit de regarder la forme du champ de contraintes du mode 1 (figure 5.13(c)) pour supposer ce résultat, puisque que la contrainte est grande vers l'encastrement, et tend à diminuer à mesure que l'on s'en éloigne. Intuitivement, nous aurions augmenté l'épaisseur des zones les plus contraintes de la plaque, et laissé les zones peu contraintes avec une épaisseur minimale pour conserver une masse acceptable. Cette exemple met donc en avant la pertinence de nos méthodes et de nos représentations, mais permet aussi de donner un sens quantitatif à notre intuition avec des valeurs précises de nos objectifs et de nos paramètres. Il convient de noter que les résultats sont très similaires avec ceux utilisant un autre type d'amortissement (cf. annexe C.1.3).

Si l'on tente de vérifier ces résultats avec une structure différente, nous montrons ici l'optimisation du mode 3 de la structure double, dans un cas de "7 zones" d'épaisseurs indépendantes et un amortissement de Rayleigh "raideur", pour $\alpha = 2e^{-3}$. Le MEF est composé de 512 éléments. Ces résultats sont présentés dans la figure 5.15.

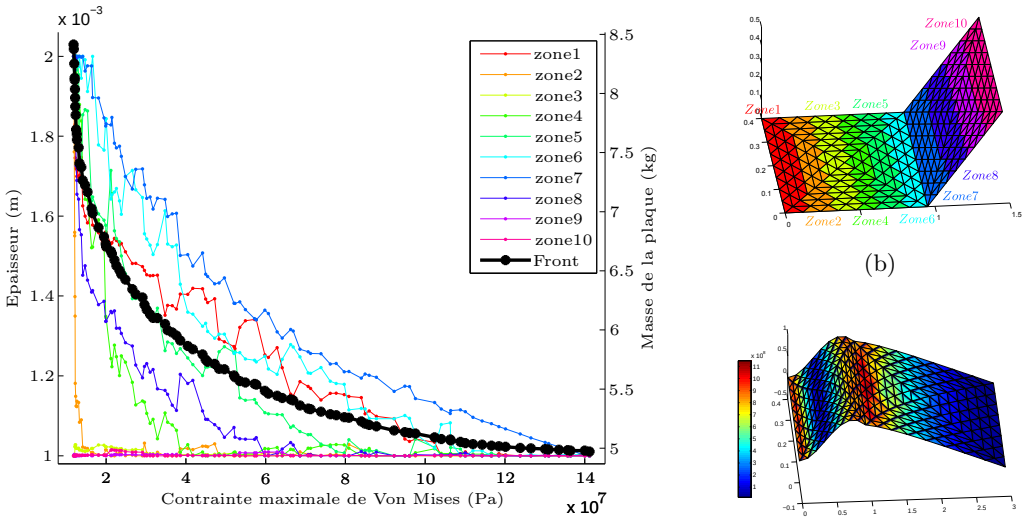


FIGURE 5.14: Optimisation de la structure "double" pour le mode 3 : (a) Front de Pareto (noir) & épaisseurs (m) pour chaque Pareto-solution (colored), (b) zones d'épaisseurs indépendantes, (c) Champ de contraintes pour le mode 3 (Pa)

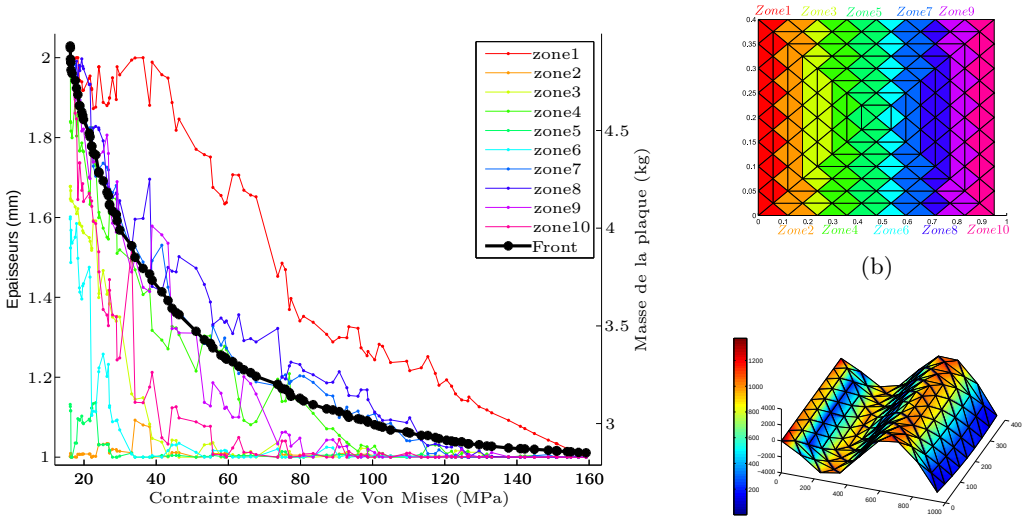
Cette exemple montre une amplitude de contrainte maximale de Von Mises entre

14 et 142 MPa, pour une masse entre 4.95 et 8.3 kg (voir figure 5.14(a)). Une fois de plus, le champ de contraintes du mode 3 (figure 5.14(c)) et la répartition des épaisseurs (figure 5.14(b)) nous incitent à renforcer les zones 1, 5, et 6. Le front de Pareto et les épaisseurs associées confirment cette tendance. On note que les résultats sont très proches que l'on utilise un type d'amortissement ou un autre (cf. annexe D.1).

D'autres exemples "intuitifs" permettant de constater l'intérêt qualitatif de la méthode peuvent se retrouver dans toutes les optimisations du mode 1 de la structure simple (4, 6, 8 et 10 zones, en annexe C.1), du mode 3 de la structure double (7, 10 et 14 zones, annexe D.1), et du mode 1 de la structure triple (3 zones, en annexe E.1).

Validation sur des cas plus complexes

On peut aussi trouver des résultats similaires mais relativement moins intuitifs, sur des déformées plus complexes. On prend ici l'exemple du mode 5 de la structure simple, pour un cas de 10 zones d'épaisseurs indépendantes et un amortissement de type Rayleigh "raideur", avec $\alpha = 2e^{-3}$. Le MEF est composé de 256 éléments. Ces résultats sont présentés dans la figure 5.15.



(a) (b) (c)

FIGURE 5.15: Optimisation de la structure "simple" pour le mode 5 : (a) Front de Pareto (noir) & épaisseurs (mm) pour chaque Pareto-solution (couleur), (b) zones d'épaisseurs indépendante, (c) Champ de contraintes pour le mode 5 (MPa)

Cette exemple montre une amplitude de contrainte maximale de Von Mises entre 18 et 160 MPa, pour une masse entre 2.85 et 4.8 kg (voir figure 5.15(a)). Une fois de plus, outre le côté quantitatif, c'est plus l'évolution des épaisseurs qui nous intéresse. A la vue du champ de contraintes (figure 5.15(c)) et de la géométrie des zones d'épaisseurs (5.15(b)), nous voudrions renforcer, dans l'ordre, les zones 1, 7, 8 et 4. Il s'agit bien des zones les plus épaisses pour les Pareto-solutions de basses contraintes, dans le même ordre.
Néanmoins, on note ici l'importance non-négligeable des zones 9 et 10, bien qu'elles soient respectivement peu, et très peu contraintes. Ceci tend à prouver que, même pour des cas qui semblent faciles à traiter sans algorithme particulier, ces derniers peuvent faire apparaître quelques subtilités, en plus de valeurs précises des objectifs en fonction des sets de paramètre.

On retrouve des résultats similaires à ceux-là pour les optimisations du mode 3 de la structure simple (6, 8 et 12 zones, en annexe C.3) et du mode 5 de la structure simple (6, 8, 10 et 12 zones, en annexe C.5).

Résultats imprévisibles et influence des zones choisies

On choisit ici de présenter certains des résultats du mode 4 de la structure simple, pour deux cas de configurations d'épaisseurs différentes. Ces résultats ont été obtenus dans le cadre de l'amortissement de Rayleigh "raideur", pour $\alpha = 1e^{-4}$. Les résultats sont disponibles dans la figure 5.16. Le premier front 5.16(a) correspond à la configuration 5.16(b), dîte "4 zones", tandis que le front 5.16(d) correspond à la configuration 5.16(e), dite "4 zones + symétrie". Dans les deux cas, le MEF de 256 éléments est le même.

Dans les deux cas de figure, les front de Pareto ne sont pas aussi réguliers que dans les cas précédents. La première configuration donne à l'utilisateur des compromis allant de 3.4 à 170 MPa en contraintes pour une masse entre 2.85 et 4.23 kg. La seconde configuration donne des choix entre 3.3 et 170 MPa, pour une masse entre 2.85 et 4.24 kg.

Évolution des épaisseurs : le cas "4 zones" (figure 5.16(a) et 5.16(b)) montre une évolution des épaisseurs qui n'est ni linéaire, ni prévisible. On constate par exemple que la zone 4, à l'extrémité de la plaque, a une grande importance, tandis qu'elle n'est pas la plus contrainte. La zone 1 d'encastrement que nous voudrions intuitivement renforcer joue son rôle, mais dans une moindre mesure par rapport à la zone 4. Cela veut donc dire que l'on peut diminuer un niveau de contraintes générales d'une structure, sans forcément renforcer la zone la plus contrainte. On observe également des changements brusques de valeurs d'épaisseurs, pour des points pourtant proches en terme de valeur d'objectif : on parle plus en profondeur de "typage paramétrique" dans la section 5.8.4 (ou "*parametric typing*").
Les résultats associés à la configuration "4 zones + symétrie" sont également sur-

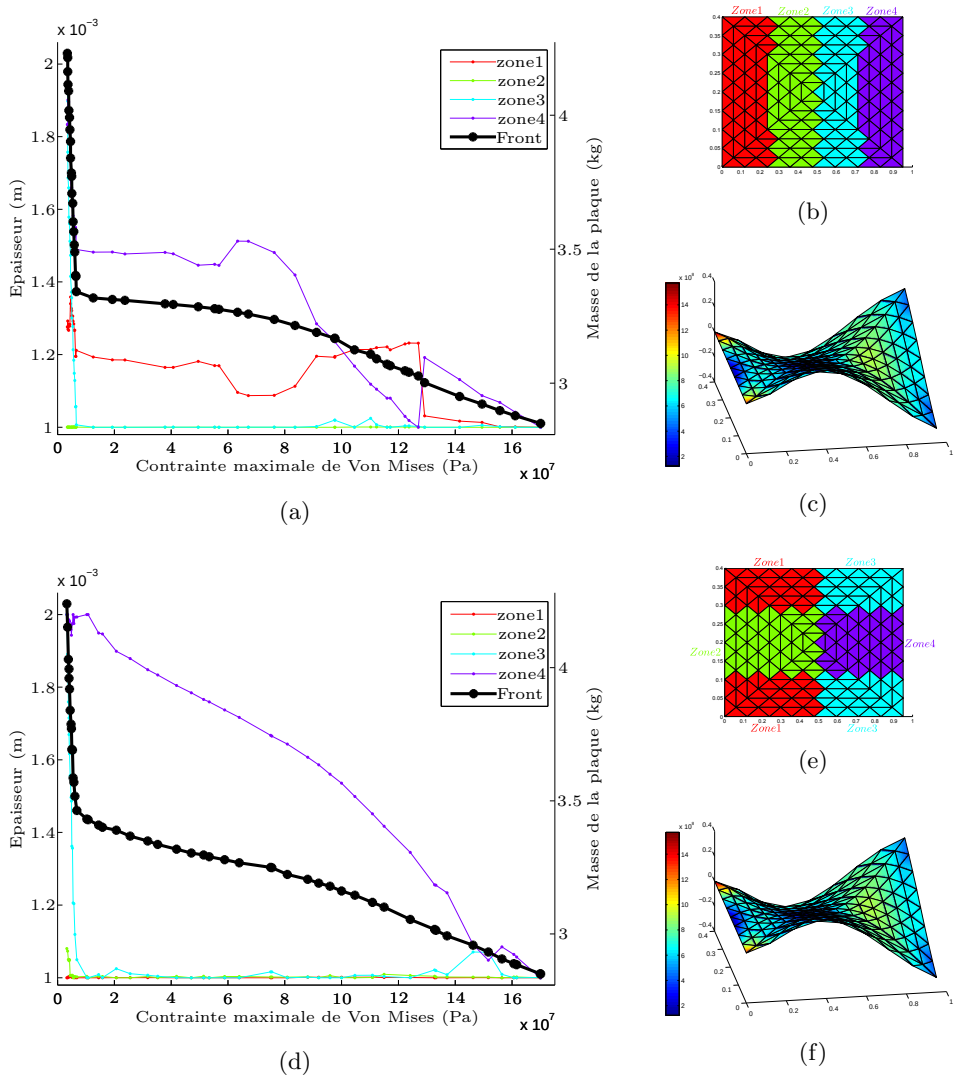


FIGURE 5.16: Optimisation de la structure “simple” pour le mode 4 : (a) Front de Pareto (noir) & épaisseur (m) pour la configuration (b), (b) zones d’épaisseurs indépendante du front (a), (c) et (f) Champ de contraintes pour le mode 4 (Pa), (d) Front de Pareto (noir) & épaisseurs (m) pour la configuration (e), (e) zones d’épaisseurs indépendantes du front (d)

prenants (figure 5.16(d) et 5.16(e)). Outre le front de Pareto qui présente une forme similaire au cas "4 zones" (malgré une configuration très différente), ces résultats donnent une importance quasi exclusive à la zone 4, qui se trouve en position centrale sur la seconde partie de la plaque, malgré une contrainte assez faible dans cette zone, tandis que les autres zones ne sont pas du tout concernées par une augmentation d'épaisseur.

Évolution du front de Pareto : on observe des spécificités dans les fronts que l'on n'observait pas dans les front précédents, avec des zones dont l'un des deux objectifs reste quasiment constants tandis que l'autre varie, pour des valeurs de paramètres changeantes (front quasi-vertical avec une contrainte qui ne varie que très peu). On parle de typage fonctionnel dans la section 5.8.4.

Ces deux configurations présentent donc des répartitions d'épaisseurs relativement inédites, et difficiles à appréhender pour un designer, ainsi que des spécificités dans les front de Pareto. On montre ici également que le choix initial des configurations d'épaisseurs disponibles joue un rôle majeur dans les résultats obtenus, tant en terme de configuration géométriques qu'en terme de valeur d'objectif.

Des résultats similaires sont également disponibles dans le cadre de l'optimisation du mode 2 (8 configurations différentes, annexes C.2) et du mode 4 (8 configurations différentes, annexes C.4) de la structure simple. Dans tous ces cas, les résultats sont peu intuitifs, tant en terme de valeur de paramètres que d'objectif, et les choix de configuration de zones d'épaisseurs jouent un rôle très important.

Influence de l'amortissement

Si l'on se réfère aux annexes C.4.1 pour la configuration "4 zones" et C.4.2 pour la configuration "4 zones + symétrie", on constate que le choix du type d'amortissement joue logiquement un rôle dans les résultats.
Pour la configuration "4 zones", la zone 1 ne joue un rôle que dans les compromis à contraintes faibles pour l'amortissement hystérétique, tandis qu'elle est non négligeable pour des compromis à contraintes modérées dans le cas d'amortissement de Rayleigh "raideur". Un simple coup d'œil révèle une évolution différente des paramètres.
D'un autre côté, la configuration "4 zones + symétrie" fournit des évolutions de paramètres très proches, quel que soit l'amortissement choisi.
Ces variations peuvent s'expliquer par la dépendance en fréquence de l'amortissement dans le cas "Rayleigh raideur", absente dans le cas hystérétique. Un mode d'une même configuration d'épaisseurs n'est donc pas amorti de la même façon dans les deux cas. Il convient donc à l'utilisateur de bien choisir le type d'amortissement adapté à sa structure et son cas d'excitation.
D'autres cas particuliers où l'amortissement est déterminant sont disponibles pour les

optimisations notamment des modes 2 ("4 zones + symétrie", "6 zones + symétrie", 8 zones, annexes C.2.2, C.2.4 et C.2.5) et mode 4 (8 zones C.4.5) de la structure simple, et le mode 7 de la structure triple (annexe E.7). Néanmoins, quand il s'agit d'optimiser un mode en particulier, les résultats restent la plupart du temps concordants, quel que soit l'amortissement. Seules les amplitudes de contraintes varient légèrement.

Remarques

Les variations de paramètre ont été arbitrairement choisies dans une plage de 1 à 2 mm. Ces variations étant relativement faibles, elles sont censées ne pas trop influer sur la forme du mode choisi et sur le champ de contraintes associé. Néanmoins, on comprend aisément qu'un ratio supérieur à 1.5 entre les épaisseurs de deux zones adjacentes entraîne une forte discontinuité et peut mener à une concentration de contraintes élevée. Cela peut expliquer l'obtention de certains résultats surprenants dans le cas des modes 2 et 4 de la plaque simple (annexes C.2 et C.4).

5.8.3 Excitation sur une bande fréquentielle

Les résultats présentés jusqu'ici concernaient le "cas 1" d'excitation sur une fréquence propre du système. Ce cas nous a permis de montrer à la fois des cas intuitifs, et des cas plus complexes et moins évidents.
Dans le "cas 2" d'excitation, la fréquence précise de l'excitation n'est pas connue, mais en revanche on connaît un intervalle précis qui contient cette fréquence. Ce cas de figure peut se retrouver par exemple dans l'automobile où une excitation harmonique, correspondant aux vibrations du moteur, est comprise dans une plage fréquentielle associée au régime moteur (exemple : entre 1000 et 4000 tr/min). Ce type d'excitation est plus fidèle à la réalité et permet d'ajouter une dimension de robustesse à nos méthodes.

Les fréquences propres du système étant modifiées pour chaque répartition d'épaisseurs différente, il est nécessaire de recalculer les fréquences propres pour chaque individu (ou set d'épaisseurs), de sélectionner les fréquences contenues dans la bande d'étude, de calculer les contraintes maximales pour chacun des modes, et de sélectionner la plus élevée. Comme expliqué dans la section 5.7.4, des flèches horizontales, surplombées du numéro du mode et des fréquences correspondantes définissent les domaines où le mode en question est celui qui est le plus contraint. On appelle ce mode : "mode dominant". Plusieurs raisons peuvent expliquer un changement de mode le plus contraint :

- le changement des épaisseurs modifie les niveaux de contraintes des modes contenus dans la bande fréquentielle, et un mode devient plus contraint qu'un autre ;
- le changement des épaisseurs modifie les fréquences propres du système et le mode précédemment le plus contraint sort de la bande fréquentielle.

Ce cas d'excitation a uniquement été implémenté pour la structure "triple" (annexes E). La nécessité de calculer plusieurs fois le champs de contraintes (pour chaque mode de la bande fréquentielle) augmente fortement le temps d'évaluation des individus, c'est la raison pour laquelle la méthode rapide d'optimisation utilisant les MSE (section 5.5.1) a été préférée.

Cas type

Le cas choisi pour présenter ce type d'excitation est celui de la structure "triple" pour une excitation comprise dans la bande fréquentielle $70 - 100$ Hz, avec 3 paramètres d'épaisseurs (un par "plaque simple") . Les résultats présentés dans la figure 5.17 ont été obtenus pour un amortissement de type Rayleigh "raideur" dont le coefficient $\xi = 1e^{-3}$, et un MEF composé de 768 éléments.

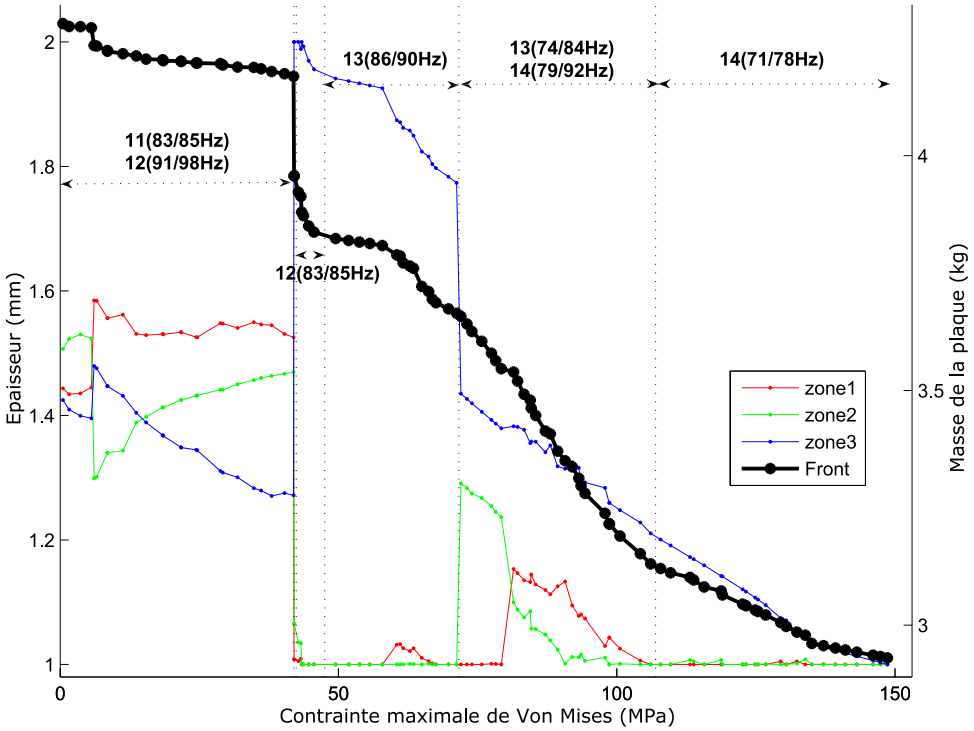


FIGURE 5.17: Optimisation de la structure "triple" pour la bande fréquentielle $70 - 100$ Hz : Front de Pareto (noir) & épaisseurs (mm) pour chaque Pareto-solution (couleur)

Les résultats montrent des compromis allant de 3 à 148 MPa, pour des masses de la plaque allant de 2.9 à 4.25 kg. Le front de Pareto et les évolutions des épaisseurs associées présentent des discontinuités, en raison, entre autres, des changements de mode dominant. Quatre modes influencent le résultat : les modes 11 à 14 (voir annexe

E.11(b) à E.14(b) pour les formes des modes et les champs de contraintes associés). Ces quatre modes présentent successivement, en fonction des valeurs des épaisseurs, la contrainte maximale la plus élevée.

On distingue plusieurs domaines d'influence :

- Le domaine 1 ("faibles contraintes") est dominé par les modes 11 et 12. Il est dit "typé masse" car il contient des compromis qui ont tous une masse proche. De plus, les 3 sous-structures ont des valeurs similaires, entre 1.3 et 1.6 mm, mais qui présentent une évolution différente, avec une augmentation de la zone 2, une diminution de la zone 3 et une zone 1 relativement constante. On note un gap important des valeurs de masse des compromis par rapport au domaine 2 suivant, ainsi qu'un changement radical des valeurs d'épaisseurs.
- Les domaines 2 et 3 ("contraintes modérées", dominés par les modes 13 et 14) présentent une particularité intéressante, avec une zone 3 (loin de l'encastrement) d'épaisseur très élevée (entre 1.8 et 2 mm) et des zones 1 et 2 d'épaisseurs minimales (1 mm). La jonction avec le domaine 4 ne présente pas de discontinuité de front mais une importante discontinuité dans les valeurs des paramètres.
- les domaines 4 et 5 ("contraintes élevées") sont respectivement dominés par les modes 13 et 14, et uniquement le mode 14. Ils présentent un front de Pareto que l'on peut qualifier de régulier. L'épaisseur de la zone 3 reste la plus élevée (bien que moindre par rapport aux domaines précedents), tandis que les épaisseurs des zones 1 et 2 ne sont plus minimum comme elles l'étaient dans le domaine précédent.

Il faut noter qu'un domaine du front dominé par un mode n ne ressemble pas à un front correspondant à l'optimisation du mode n seul. Cela pourrait paraître intuitif "d'assembler" les fronts du mode (annexes E.1 à E.14) dominant pour construire le front d'une bande fréquentielle. Cette supposition est cependant érronée. En effet, un set de paramètre donné qui donne un compromis intéressant pour un mode, peut devenir très contraint pour un autre mode de la bande. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas faire de correspondance entre les front "des modes" et les fronts "des bandes fréquentielles".

La majorité des résultats d'optimisation concernant le cas d'excitation sur une bande fréquentielle présente de nombreuses discontinuités de front et de valeur d'épaisseurs, qui peuvent jouer un rôle intéressant en terme de design : on parle de typage paramétrique et typage fonctionnel dans la section suivante. On peut se référer aux annexe E.16, E.17, E.18 et E.19 pour plus de résultats de ce type.
On note cependant que les cas particuliers de l'optimisation des bandes $0-20$, $0-40$ et $0-70$ Hz sont intégralement dominés par le mode 1, et ressemblent ainsi aux résultats de l'optimisation du mode 1 (voir annexes E.1).

Influence de l'amortissement

Chacun des calculs d'optimisation sur une bande fréquentielle (annexes E.15($0-20$, $0-40$ et $0-70$ Hz), E.16($10-30$ Hz), E.17($30-70$ Hz), E.18($50-100$ Hz) et E.19($70-100$ Hz)) a été effectué pour les trois types d'amortissement précédemment définis. Hormis l'optimisation des bandes $0-20$, $0-40$ et $0-70$ Hz qui sont des cas particuliers, tous les résultats varient fortement en fonction de l'amortissement choisi, aussi bien en terme de valeurs de paramètres que d'objectifs.

Ces différences peuvent facilement s'expliquer par le fait que certains amortissements dépendent de la pulsation d'excitation, alors que d'autres sont des amortissements visqueux. Ainsi, un mode haute fréquence fortement amorti dans un cas "Rayleigh raideur", peut par exemple l'être beaucoup moins dans un cas d'amortissement hystérétique. De la même façon, les amortissements de "Rayleigh global" se basant sur les valeurs extrêmes de la bande peuvent aussi donner un amortissement modal bien différent, et non monotone sur la bande choisie. De plus, les amortissements de Rayleigh étant dépendants de la pulsation, et ces pulsations étant modifiées pour chaque individu, un même mode n'a pas le même amortissement propre pour tous les individus. L'utilisateur doit choisir avec soin l'amortissement qui correspond à sa structure.

5.8.4 Cas spécifiques de typage

Qu'il s'agisse d'un cas d'excitation localisée sur un mode, ou d'une excitation inconnue appartenant à une bande fréquentielle connue, de nombreux résultats présentent des discontinuités de forme de front de Pareto et de valeurs de paramètre. Ces résultats sont rarement intuitifs et peuvent surprendre, néanmoins ils peuvent mettre en lumière des avantages importants pour un designer, et laisser à l'utilisateur plus de possibilités qu'il n'en aurait avec une optimisation SO, qui ne donne qu'une seule option locale. On trouve plusieurs cas, dits "de typage" qui s'avèrent intéressants pour la conception et la mise en forme des structures. On distingue deux cas principaux de typage : le typage paramétrique, et le typage fonctionnel.

Typage paramétrique

Pour présenter un cas de typage paramétrique, on choisit l'exemple de l'optimisation mode 7 (cas 2 d'excitation) de la structure triple, avec une configuration de 3 zones d'épaisseurs indépendantes et un amortissement hystérétique, avec $\xi = 1e^{-3}$. Le MEF est composé de 768 éléments. Ces résultats sont présentés dans la figure 5.18.

On s'intéresse ici aux deux points particuliers du front de Pareto, entourés sur la figure 5.18. Les paramètres de ces points, à récupérer sur la même abscisse (pointillés noirs). Ces deux compromis peuvent être considérés comme la jonction entre deux domaines paramétriques :

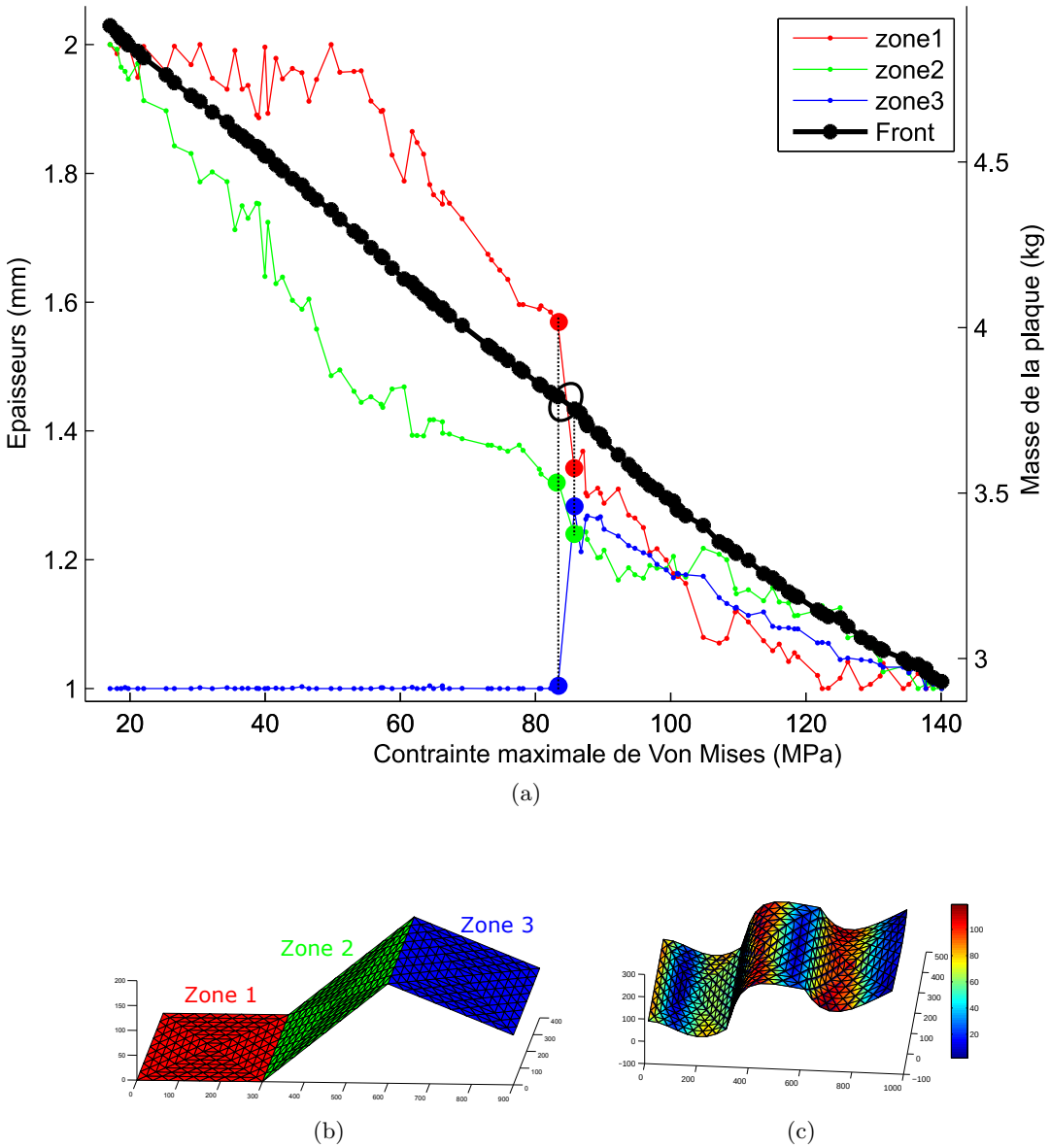


FIGURE 5.18: Optimisation de la structure “triple” pour le mode 7 : (a) Front de Pareto (noir) & épaisseurs (mm) pour chaque Pareto-solution (couleur), (b) zones d’épaisseurs indépendante, (c) Champ de contraintes pour le mode 7 (MPa)

- Domaine "basses contraintes" de 18 à 86 MPa (masses de 2.9 à 3.75 kg). L'épaisseur de la zone 3 reste dans le minimum de la plage autorisée, tandis que les zones 1 et 2 ont des épaisseurs importantes qui décroient à mesure que la contrainte des compromis augmente. L'épaisseur de la zone 1 reste supérieure à celle de la zone 2.
- Domaine fortes contraintes de 86 à 140 MPa (masses de 3.75 à 2.85 kg). Les épaisseurs des trois zones ont des ordres de grandeur similaires (de 1.3 à 1 mm) et une évolution décroissante commune à mesure que la contrainte des solutions augmente.

La jonction entre ces deux domaines présente une discontinuité importante en terme de valeur de paramètre, mais des valeurs d'objectif très proches : on parle de typage paramétrique. Cette caractéristique peut se traduire de la façon suivante : l'algorithme d'optimisation donne deux compromis ayant des objectifs quasi-identiques, pour des valeurs de paramètres très différentes. En pratique, cela veut dire que deux sets de paramètres différents donnent le même résultat, et donc que deux géométries différentes débouchent sur la même masse et la même contrainte maximale dans notre cas d'excitation. Il en résulte un plus large choix pour le designer ou le fabriquant, qui peut, selon d'autres critères, préférer une géométrie à une autre, tout en conservant les mêmes critères. Ainsi, chaque discontinuité dans les valeurs de paramètres (associée à un front de Pareto régulier), fait apparaître un typage paramétrique qui peut s'avérer bénéfique pour le concepteur. La représentation sous forme de front de Pareto trouve encore une fois son intérêt dès lors que la contrainte en est un objectif : alors qu'une optimisation SO donne un seul et unique résultat basé sur des contraintes et objectifs préalablement définis, nos front permettent de donner une vue d'ensemble du comportement de la structure et peut ainsi donner a posteriori des idées aux designers.

On peut retrouver des cas similaires de typage paramétrique dans les résultats de l'optimisation du mode 2 ("4 zones", "4 zones + symétrie", "8 zones", "9 zones + symétrie", "12 zones", "16 zones" respectivement dans les annexes C.2.1, C.2.2, C.2.5, C.2.6, C.2.7 et C.2.8), du mode 3 ("8 zones", annexe C.3.2) et du mode 4 de la plaque simple ("4 zones", "6 zones", "8 zones", "9 zones + symétrie", "12 zones" et 16 zones, respectivement dans les annexes C.4.1, C.4.3, C.4.5, C.4.6, C.4.7 et C.4.8). L'optimisation de la plaque triple propose aussi des cas de typage paramétriques avec le mode 5 (annexe E.5), le mode 7 (annexe E.7) et les bandes fréquentielles $10-30$ Hz (annexe E.16), $30-70$ Hz (annexe E.17), $50-100$ Hz (annexe E.18) et $70-100$ Hz (annexe E.19).

Typage fonctionnel

Pour présenter un cas de typage fonctionnel, on choisit l'exemple de l'optimisation de la bande fréquentielle $70-100$ Hz (cas 2 d'excitation) de la structure triple, avec une configuration de 3 zones d'épaisseurs indépendantes et un amortissement hystérétique, avec $\xi = 1e^{-3}$. Le MEF est composé de 768 éléments. Ces résultats ont

d'ores et déjà été présentés dans la section 5.8.3.
Pour rappel ce cas d'optimisation présentait plusieurs zones de dominance de certains modes. Il s'agit ici de se concentrer sur le premier domaine de "faibles contraintes", dominé par les modes 11 et 12. Tous les compromis de ce domaine ont des masses très proches (entre 4.15 et 4.25 mm) pour des contraintes maximales très variables entre 3 et 42 MPa. Ce domaine est dit "typé masse". En pratique, cela veut dire que le front de Pareto propose plusieurs compromis dont les masses sont quasi-identiques, ce qui peut présenter un intérêt pour un designer qui cherche des solutions de ce type et qui se contente de la plage disponible pour l'autre objectif. Chacun des compromis de ce domaine peut lui convenir.
Dans le même temps, les 3 paramètres d'épaisseurs des zones choisies sont assez variables dans ce domaine, ce qui indique que les solutions proposées sont bien basées sur des géométries différentes, et qu'elles offrent réellement plusieurs solutions à l'utilisateur de l'algorithme. Dans ce cas, ce dernier peut choisir un compromis au milieu du domaine, et ainsi prendre moins de risques sur les tolérances de géométrie, tout en gardant des objectifs conformes à ses attentes.

On peut retrouver des cas similaires de typage fonctionnel dans les résultats de l'optimisation du mode 2 ("16 zones", annexe C.2.8) et du mode 4 ("4 zones", "4 zones + symétrie", "6 zones + symétrie", "8 zones", "9 zones + symétrie", "12 zones" et "16 zones", respectivement les annexes C.4.1, C.4.2, C.4.4, C.4.5, C.4.6, C.4.7 et C.4.8) de la plaque simple, et du mode 9 (annexe E.9), mode 13 (annexe E.13), et bande fréquentielle $70 - 100$ Hz (annexe E.19) de la plaque triple.

Remarques : certains cas de typage fonctionnel peuvent paraître intéressants d'un point de vue des valeurs des objectifs, mais sont en réalité délicats compte tenu des valeurs de paramètre qui lui sont associés. En effet, si les valeurs des paramètres varient dans le domaine de typage, les solutions proposées sont riches (cf. cas précédent). Cependant, si les paramètres varient peu sur l'intervalle de typage, les géométries proposées sont toutes très proches sur le domaine, malgré des valeurs très variables pour l'objectif qui n'est pas typé (bien que l'autre objectif, typé, soit quasiment constant pour toutes les solutions du domaine). En pratique, cela se traduit par un risque important en terme de fabrication, puisque l'on peut passer d'une solution à une autre moins bonne pour une légère erreur ou tolérance de fabrication. Cela rend le typage fonctionnel peu robuste, et le choix d'un compromis très risqué.

On retrouve des cas où le typage fonctionnel est dangereux dans les résultats de l'optimisation du mode 2 ("4 zones", "4 zones + symétrie" et "8 zones", respectivement dans les annexes C.2.1, C.2.2 et C.2.5) de la plaque simple et des modes 3, 4, 8, 10, 11 et 14 (respectivement dans les annexes E.3), E.4, E.8, E.10, E.11 et E.14).

5.9 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de mettre en place de nouvelles méthodes d'optimisation de forme pour des cas de structures "plaque" soumises à des chargements dynamiques, avec des paramètres d'épaisseurs et des critères de contraintes. Ces méthodes utilisent un algorithme génétique pour l'optimisation multi-objectifs, tandis que le modèle mécanique est basé sur les MEF mixtes présentés dans les chapitres 1 et 2, ainsi qu'une des méthodes de réduction implémentées dans les chapitres 3 et 4. Les résultats sont présentés sous forme de fronts de Pareto en ajoutant les paramètres d'épaisseurs aux graphiques, et permettent une bonne vue globale des résultats de l'optimisation.

Alors que la plupart des optimisations de paramètres structurels calculent les contraintes avec des modèles en déplacements, nous faisons ici le choix d'utiliser le modèle mixte décrit dans le chapitre 1. Ce choix est fait dans le but d'accélérer le calcul des contraintes que l'on répète à chaque itération de l'algorithme. En effet le chapitre 2 a montré que ce type de modèle donne un accès privilégié et rapide aux champs de contraintes. Le temps d'assemblage étant rédhibitoire, l'idée principale de ce chapitre est de construire un modèle mixte paramétré qui ne nécessite pas de remailler à chaque nouveau set de paramètre. Ainsi, on construit une méthode d'optimisation multi-objectifs utilisant l'algorithme génétique NSGA-II et un MEF mixte paramétré. Cette méthode s'avère bénéficier d'un gain de temps d'environ 9/10 % par rapport aux méthodes classiques utilisant des modèles en déplacements.

De façon analogue, les méthodes de réduction développées dans le chapitre 3 peuvent également être paramétrées en épaisseur. Ainsi, il est possible de construire un modèle mixte réduit paramétré qui ne nécessite pas de remaillage à chaque itération, et qui présente l'avantage de manipuler des matrices bien plus petites. On parle ainsi de Super-Éléments Mixtes (MSE). Le temps de calcul de réponse n'en est que meilleur, de même que le temps de calcul du champ de contraintes. Dans notre cas, la méthode que nous avons choisi de paramétrer est la méthode Fix-Fix-1 sans mode de branche. La méthode d'optimisation Multi-Objectifs utilisant des MSE de type Fix-Fix-1 bénéficie d'un gain de temps de 27/28 % par rapport aux méthodes classiques en déplacements.

Ces méthodes ont été testées dans des cas d'optimisation multi-objectifs sur des structures élément-finis académiques. Les objectifs sont de minimiser la contrainte maximale de Von Mises au sein de la plaque et sa masse. L'utilisateur est chargé de définir des zones dont l'épaisseur est un paramètre de l'optimisation. L'utilisation de modèles éléments-finis permet d'imaginer aisément l'extrapolation de nos méthodes à des structures industrielles de plus grande taille. Deux cas d'excitation ont été implémentés, avec une force harmonique de pulsation connue, et de pulsation inconnue comprise dans un intervalle connu.

La présentation des résultats se fait sous forme de front de Pareto, avec les paramètres intégrés aux graphiques. Ce type de représentation est classique dans l'optimisation, mais rarement utilisé pour des cas multi-objectifs où les contraintes sont un objectif de l'optimisation (et non une simple contrainte). Elle permet d'avoir une vue d'ensemble des possibilités offertes à l'utilisateur, et donne l'opportunité de faire des choix a posteriori, en fonction du comportement de la structure face aux changements de paramètres. Au-delà des cas d'optimisation triviaux que l'on peut résoudre intuitivement, confirmés par nos calculs, nos méthodes présentent également des discontinuités dans les fronts de Pareto et dans les évolutions des paramètres. Ces particularités permettent de mettre en lumière des typages paramétriques et fonctionnels qui sont autant de possibilités offertes à l'utilisateur et au designer.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Au cours de cette thèse, nous avons développé des méthodes numériques de calcul et d'optimisation de structures "plaque", basées sur l'utilisation de Modèle Éléments-Finis mixtes, de nouvelles méthodes de synthèses modales dédiées et d'algorithmes génétiques. La formulation mixte apporte un gain de temps significatif, une certaine originalité à nos méthodes, et enfin des perspectives intéressantes.

Dans un premier temps, au chapitre 1, nous avons développé deux Modèles Éléments-Finis mixtes déplacements-contraintes généralisées en dynamique, pour les théories de plaques fines de Kirchhoff-Love et de plaques épaisses de Reissner-Mindlin. Ces modèles sont basés sur la formulation mixte de mécanique des milieux continus linéaire d'Hellinger-Reissner, qui a la particularité d'exprimer l'énergie de déformation d'une structure en fonction à la fois des déplacements et des contraintes généralisées. Une fois discrétisée, cette approche permet d'obtenir un modèle dont l'accès aux paramètres de contraintes est privilégié, par rapport à un modèle classique en déplacements. Dans ce cadre, notre travail a permis de mettre en place une ToolBox Matlab complète qui permet de construire les matrices mixtes constitutives d'une structure donnée à partir des caractéristiques de son maillage, d'utiliser et de stocker les structures éléments-finis, et de leur appliquer des conditions aux limites et chargements dynamiques.

Nous avons ensuite étudié la convergence de nos modèles, ainsi que les avantages et inconvénients qui leur sont liés (chapitre 2). Dans ce cadre, nous avons utilisé des méthodes d'analyse et de comparaison modale basées sur des critères de MAC en déplacements, des erreurs relatives sur les fréquences propres, et enfin un critère MAC-like en contraintes. Ces analyses ont permis de montrer une convergence délicate du Modèle Éléments-Finis mixtes pour plaques de Reissner-Mindlin tel que nous l'avons implémenté, de façon analogue à un modèle en déplacements. En revanche, le modèle pour plaques de Kirchhoff-Love offre une très bonne convergence modale, et s'avère donner des résultats identiques à un modèle en déplacements, aussi bien en terme de déplacements qu'en terme de contraintes (il est ainsi exclusivement utilisé dans le reste de notre travail). Cependant, ce chapitre montre qu'une fois les modèles assemblés, le calcul du champ de contraintes d'une structure s'avère plus rapide avec une formulation mixte (de 10 à 45 % de gain), et c'est cette caractéristique qui a retenu notre attention. Cependant, deux problèmes majeurs persistent pour ce type de modèle : une taille numérique plus importante qui nous incite à opter pour

des méthodes de réduction, et une singularité qui empêche une analyse modale rapide.

Ainsi, le chapitre 3 est dédié à la présentation de nouvelles méthodes de réduction, de sous-structuration et double synthèse modale, adaptées à notre formulation. En effet, de telles méthodes existent dans la littérature pour des modèles en déplacements, mais rien n'est mentionné pour la réduction de modèles mixtes. De plus, la difficulté d'obtenir les modes propres de la structure nous empêche d'utiliser simplement les méthodes primales existantes. En ce sens, nous avons développé 10 méthodes de réduction spécifiquement adaptées aux Modèle Éléments-Finis mixtes déplacements-contraintes. L'idée est de diviser la structure en plusieurs sous-structures de petite taille. Dès lors, la réduction de chaque sous-structure se fait en séparant la projection des paramètres de déplacements, et de contraintes. Ainsi, les déplacements sont réduits à partir du modèle primal équivalent, en utilisant des méthodes primales classiques de projection modale. D'autre part, la base de réduction des contraintes est construite sur une projection d'une base en déplacements (obtenue à partir du modèle primal équivalent) sur les paramètres de contraintes (sur des "contraintes modales"). On peut ainsi mixer le type de mode utilisé (encatrés, libres, ...) pour les déplacements et les contraintes, et ajouter une réduction de la jonction à l'aide de modes de branche. Une fois de plus, une ToolBox a été mise en place. Elle permet d'obtenir une structure réduite à partir des sous-structures et de la méthode choisies par l'utilisateur, et de l'utilisation ou non de réduction de la jonction. Ce type de méthode pourrait s'adapter à d'autres formulations mixtes multi-champs.

Le chapitre 4 donne un aperçu des performances des méthodes développées dans le chapitre précédent. Pour se faire, nous prenons un exemple d'une structure divisée en deux sous-structures, soumises à un chargement dynamique harmonique. Le modèle primal équivalent contient 2598 degrés de libertés, tandis que le modèle mixte non-réduit en contient 11256. Toutes les méthodes implémentées n'offrent pas les même garanties, les meilleures étant les méthodes Fix-Fix1-2 (avec ou sans mode de branche) et la méthode Fre-Fre-2 (sans mode de branche). Ces dernières permettent par exemple de réduire le modèle à 14, 25, 46, 90, 131 et 173 degrés de liberté, tout en conservant une représentation modale excellente sur respectivement les 12, 22, 42, 76, 113 et 147 premiers modes. Elles offrent ainsi un gain de stockage et de temps de calcul considérables et suppriment l'inconvénient de taille du modèle mixte.

Une fois ces modèles et réductions mis en place, le but était de les implémenter dans un algorithme génétique afin de procéder à une optimisation multi-objectifs sur des structures "plaque" (chapitre 5). Ces méthodes sont adaptées à des cas où la contrainte est un objectif de l'optimisation, et les paramètres sont les épaisseurs de zones préalablement choisies par l'utilisateur. Cependant, subsiste l'inconvénient du temps d'assemblage des modèles mixtes. En ce sens, l'idée de ces méthodes est de paramétrer en épaisseur les modèles et réductions précédemment définies, de façon à éliminer l'étape de remaillage et d'assemblage et à ne garder que les avantages du modèle. Dans ce cadre, nous avons mis en place deux méthodes d'opti-

misation utilisant NSGA-II : une basée sur notre modèle éléments-finis mixte pour plaques de Kirchhoff-Love (sans réduction) et une seconde intégrant les méthodes de réduction paramétrée utilisant ainsi des Super-Éléments mixtes. La première des deux méthodes, bien que manipulant des matrices de grande taille, offre un gain de temps entre 9 et 10 %, tandis que la seconde permet de gagner 27 à 28 % de temps de calcul, par rapport à des méthodes classiques en déplacements. L'utilisation d'un algorithme génétique est intéressante ici puisqu'elle permet d'effectuer une optimisation globale qui explore l'intégralité de l'espace de conception et évite ainsi les extremums locaux. D'autre part, ces méthodes se prêtent bien à une présentation des résultats sous forme de front de Pareto. Bien que très répandue, cette représentation est assez rare avec la contrainte en tant qu'objectif. Cela permet d'avoir une vue d'ensemble intéressante du comportement de la structure vis-à-vis des changements de paramètres, et offre une large palette de choix à l'utilisateur. On constate également l'apparition de phénomènes de typage paramétrique et fonctionnel qui sont autant de possibilités pour le designer.

Perspectives

Ces travaux ont permis de mettre en lumière de nombreuses perspectives.

Tout d'abord, des perspectives relatives au modèle utilisé apparaissent.
En ce qui concerne les modèles éléments-finis mixtes, il paraît essentiel d'explorer la discrétisation des champs de contraintes et les choix de continuités et de fonctions de forme qui vont avec ceux-ci. D'une part, cela permettrait de résoudre certains problèmes de convergence des plaques épaisses ("locking") en améliorant le modèle pour la théorie des plaques épaisses, mais améliorerait également la représentation des plaques fines. D'autre part, cela mènerait à un gain en temps de calcul de reconstruction des champs de contraintes, en ne calculant qu'une seule fois la contrainte pour les points communs à plusieurs éléments.
De plus, les temps d'assemblage étant un inconvénient des modèles mixtes, la méthode implémentée pour construire nos modèles sous Matlab mériterait d'être améliorée pour se rapprocher des performances élevées des logiciels du commerce.
Dans ce travail, les déformations dans le plan de l'élément "plaque", dites "de membrane", ont été prises en compte de façon primale uniquement (non développé dans le manuscrit par souci de concision). Pour certains cas de structure et de chargement, il serait intéressant d'intégrer les efforts membranaires de façon mixte, au même titre que les phénomènes de flexion, avec des paramètres associés. Cela alourdirait le modèle, mais permettrait éventuellement une meilleure définition de ces phénomènes, le cas échéant.
D'autres méthodes de représentation mécanique basées sur des éléments isogéométriques sont bien adaptées à l'optimisation de forme dans la mesure où elles permettent de modifier localement le maillage en jouant sur certains paramètres. Il serait intéressant de coupler ce type d'éléments à nos modèles en imaginant des éléments isogéométriques mixtes déplacement-contraintes qui allient à la fois les bénéfices des

modèles mixtes en terme d'accès et de définition des contraintes, et les performances de ces éléments en terme de modification de géométrie.
On constate également dans le chapitre 5 que les temps de calcul des contraintes sont de loin ce qu'il y a de plus coûteux dans l'algorithme d'optimisation. Ce calcul nécessite une reconstruction de la contrainte choisie sur l'ensemble des points du maillage, ce qui multiplie d'autant plus le temps nécessaire. En ce sens, il paraît intéressant d'imaginer un moyen d'anticiper la zone dans laquelle le point le plus contraint (et donc dimensionnant) va se trouver, de manière à ne calculer la contrainte qu'en certains points choisis du maillage.

Ensuite, d'autres perspectives relatives aux méthodes de sous-structuration peuvent être envisagées
Il serait intéressant d'étudier plus en détail les autres méthodes de sous-structuration modale primale, de façon à les adapter aux modèles mixtes, comme nous l'avons fait pour les méthodes de modes encastrés, libres et de branche. De plus certaines combinaisons de modes n'ont pas été testées dans le cadre de notre formulation.
En outre, les méthodes de sous-structuration développées sont adaptées à des modèles "plaque" mixtes déplacements-contraintes, mais pourrait également être étudiées et généralisées dans le cadre d'autres modèles mixtes (coques, composites ...) ou encore pour d'autres formulations multi-champs (interaction fluide structure...).
De manière plus générale, la convergence de ces méthodes mériterait d'être étudiée dans le cadre d'une structure industrielle à grande échelle. De plus, la structure académique que nous avons choisie possède une jonction particulièrement raide, qui favorise les méthodes de modes encastrés. Il serait intéressant de tester nos méthodes sur des structures dont la jonction est plus souple.

Enfin, des perspectives relatives à l'optimisation elle-même paraissent indispensables.
En effet, l'algorithme d'optimisation utilisé a été choisi par pure affinité et pour son côté ludique et facilement implémentable. L'apport de notre travail ne se faisant que sur la modélisation mécanique, il paraît important d'étudier en profondeur les types d'algorithme d'optimisation multi-objectifs, de façon à sélectionner le plus adapté à notre problème.

De façon plus générale, il est indispensable de tester nos algorithmes sur une optimisation de structure industrielle de grande taille, et dans ce cadre, nos méthodes pourrait être amélioré en effectuant un gros travail de parallélisation des taches.

Annexe A

Développement variationnel de la formulation mixte d'Hellinger-Reissner

A.1 Définition des espaces fonctionnels

L'espace des déplacements $\boldsymbol{u}_i(M,t)$ cinématiquement admissibles $\Omega_R(V\times]t_0,t_1[)$ est défini par :

- des déplacements réels ;
- des déplacements définis sur $V\times]t_0,t_1[$;
- des fonctions de classe C^∞ ;
- le respect de la condition aux limites de "déplacements imposés" :

$$\boldsymbol{u}_i(M,t)=\boldsymbol{D}_i(M,t)\quad\forall(M,t)\in\overline{V}_E\times]t_0,t_1[\tag{A.1}$$

- le respect des conditions initiales et finales :

$$\boldsymbol{u}_i(M,t)=\overline{\boldsymbol{u}}_i(M,t_0)\quad\forall M\in V \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{u}_i(M,t)=\overline{\boldsymbol{u}}_i(M,t_1)\quad\forall M\in V \tag{A.3}$$

avec V le volume du solide considéré, t_0 et t_1 les temps initiaux et finaux.

L'espace des champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{ij}(M,t)$ non nécessairement statiquement admissible $\Sigma_R(V\times]t_0,t_1[)$ est défini par :

- des contraintes réelles ;
- des contraintes définies sur $(V\times]t_0,t_1[)$;
- des fonctions de classe C^∞.

A.2 Définition de la fonctionnelle

La fonctionnelle de Hellinger-Reissner $\Pi(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\sigma}_{ij})$ est définie par :

$$\begin{aligned}\Pi : \Omega_R\times\Sigma_R &\to \Re\\ (\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\sigma}_{ij}) &\to \Pi(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{\sigma}ij)\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\Pi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_{ij}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \frac{1}{2}\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t}^2 - \boldsymbol{\sigma}_{ij}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}_i) + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl}\, dV + \int_{\overline{V}_F} \boldsymbol{s}_i\boldsymbol{u}_i\, d\overline{V} \right] dt \tag{A.5}$$

où l'on adopte les notations suivantes :
- $\boldsymbol{u}_i$ est le vecteur des déplacements du solide considéré ;
- $\boldsymbol{\sigma}ij$ est le tenseur des contraintes du solide ;
- $\boldsymbol{\epsilon}_{ij}(u_i)$ est le tenseur de déformations du solide exprimé en fonction du déplacement u_i ;
- $\overline{V}$ et V sont respectivement les surfaces extérieures et le volume du solide considéré ;
- $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ est le tenseur inverse de $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ caractéristique de la loi de comportement élastique : $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl}$;
- $\boldsymbol{b}_i$ et $\boldsymbol{s}_i$ sont respectivement les vecteurs des forces de volume et de surface ;
- ρ est la masse volumique du matériau considéré.

A.3 Équations de la mécanique des milieux continus élastiques à vérifier

Les dérivées directionnelles de la fonctionnelle de Hellinger-Reissner $\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi$ et $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Pi$ s'annulent pour le couple solution $(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \in (\Omega_R, \Sigma_R))$ si et seulement si il vérifie les équations suivantes :

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial t^2} = \boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + \boldsymbol{b}_i \quad \text{sur } V \times]t_0, t_1[\tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\epsilon}_{kl} \quad \text{sur } V \times]t_0, t_1[\tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j = 0 \quad \text{sur } \overline{V}_L \times]t_0, t_1[\tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{D}_i \quad \text{sur } \overline{V}_E \times]t_0, t_1[\tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j = \boldsymbol{F} \quad \text{sur } \overline{V}_F \times]t_0, t_1[\tag{A.10}$$

où V, $\overline{V}_L$, $\overline{V}_E$, et $\overline{V}_F$ correspondent respectivement au volume total, aux surfaces sans efforts imposés, aux surfaces à déplacements imposés et enfin aux surfaces avec un effort imposé.

A.4 Dérivées directionnelles et vérification du théorème

Vérifions la véracité du théorème précédent en calculant les dérivées directionnelles énoncées précédemment. Pour cela, il faut décomposer $\boldsymbol{u}_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$.

$$\boldsymbol{u}_i = \overline{\boldsymbol{u}}_i + \lambda\boldsymbol{u}_i^* \tag{A.11}$$

$\overline{\boldsymbol{u}}_i$ est un champ de déplacements vérifiant les équations de mouvements pour $\boldsymbol{\sigma}ij$ fixé, λ est un réel et $\boldsymbol{u}_i^*$ est un champ de déplacements virtuels quelconque, et représente des déplacements qui ne sont pas astreints à vérifier toutes les conditions imposées aux déplacements réels du milieu continu (les conditions aux limites en particulier).

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} + \lambda \boldsymbol{\sigma}^*_{ij} \tag{A.12}$$

De la même façon, $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ est un champ de contrainte vérifiant les équations de mouvements pour $\boldsymbol{u}_i$ fixé, λ est un réel et $\boldsymbol{\sigma}ij^*$ est un champ de contrainte virtuel quelconque, et représente des contraintes qui ne sont pas astreintes à vérifier toutes les conditions imposées aux contraintes réelles du milieu continu (les conditions aux limites en particulier).

A.4.1 Calcul de la dérivée directionnelle en déplacements $\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi$

$$\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{u}_i^*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i + \lambda\boldsymbol{u}_i^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}) \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{u}_i^*) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{t_0}^{t_1}[\int_V \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\boldsymbol{u}_i^*}{\partial t})^2 - \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^*_{ij} - \lambda\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\boldsymbol{\epsilon}^*_{ij} \\ + \boldsymbol{b}_i(\overline{\boldsymbol{u}}_i + \lambda\boldsymbol{u}_i^*) + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\boldsymbol{S}_{ijkl}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}\,dV \;+\; \int_{\overline{V}} \boldsymbol{s}_i\overline{\boldsymbol{u}}_i + \lambda\boldsymbol{s}_i\boldsymbol{u}_i^*\,d\overline{V}]\,dt \\ = \int_{t_0}^{t_1}[\int_V \rho\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{u}_i^*}{\partial t} - \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\boldsymbol{\epsilon}ij^* + \boldsymbol{b}_i\boldsymbol{u}_i^*\,dV \;+\; \int_{\overline{V}_F}\boldsymbol{s}_i\boldsymbol{u}_i^*\,d\overline{V}]\,dt\end{aligned} \tag{A.14}$$

Or

$$\boldsymbol{\epsilon}^*_{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}^*_{i,j} + \boldsymbol{u}^*_{j,i}) \tag{A.15}$$

De plus, la formule de Green nous donne :

$$\int_V u(\overrightarrow{x}\,div(\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x})\,dV = -\int_V \overrightarrow{grad}(u(\overrightarrow{x}))v(\overrightarrow{x})\,dV + \int_S \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{n}_j u(\overrightarrow{x})\,dS) \tag{A.16}$$

Dans notre cas, cela se traduit par :

$$-\int_V \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\overrightarrow{grad}(\boldsymbol{u}_i^*)\,dV = \int_V \boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{\sigma}_{ij,j}\,dV - \int_{\overline{V}=\overline{V}_F+\overline{V}_L}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\,\overrightarrow{n}_j\boldsymbol{u}_i^*\,dS) \tag{A.17}$$

Nous devons également utiliser une intégration par partie pour éliminer la partie temporelle, c'est-à-dire :

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{u}_i^*}{\partial t}\,dt = \left[\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t}\boldsymbol{u}_i^*\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t^2}\boldsymbol{u}_i^*\,dt \tag{A.18}$$

Ainsi, l'équation A.14 devient :

$$\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{u}_i^*) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V (-\rho \frac{\partial^2 \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t^2} + \boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{u}_i^* \, dV - \int_{\overline{V}_F} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{s}_i)\boldsymbol{u}_i^* \, d\overline{V} - \int_{\overline{V}_L} (\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j)\boldsymbol{u}_i^* \, d\overline{V} \right] dt + \left[\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} \boldsymbol{u}_i^* \right]_{t_0}^{t_1} \tag{A.19}$$

Si cette dérivée directionnelle est nulle, cela doit nous permettre de retrouver les équations A.6, A.7, A.8, A.9 et A.10. On suppose :

$$\boldsymbol{u}_i^*(M, t_0) = \boldsymbol{u}_i^*(M, t_1) = 0 \quad \text{sur } V \tag{A.20}$$

Parmi les champs virtuels, il en existe une infinité qui vérifient ces conditions. Ainsi, nous avons :

$$\left[\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t} \boldsymbol{u}_i^* \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{A.21}$$

On suppose que :

$$\boldsymbol{u}_i^*(M, t) = 0 \quad \text{sur } \overline{V} \times]t_0, t_1[\tag{A.22}$$

Parmi les champs virtuels, il y en a une infinité qui vérifient cette condition. En supposant également que $\boldsymbol{u}_i^*$ est libre sur $V \times]t_0, t_1[$ et en appliquant le lemme de Haar, nous retrouvons ainsi l'équation A.6, à savoir :

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial t^2} = \boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + f_i \quad \text{sur } V \times]t_0, t_1[\tag{A.23}$$

On considère maintenant :

$$\boldsymbol{u}_i^*(M, t) = 0 \quad \text{sur } \overline{V} \times]t_0, t_1[\tag{A.24}$$

Étant donné le résultat obtenu par l'équation A.23, et d'après le lemme de Haar, l'équation A.19 nous permet de retrouver les équations A.8 et A.10, à savoir :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j = 0 \quad \text{sur } \overline{V}_L \times]t_0, t_1[\tag{A.25}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j = \boldsymbol{F} \quad \text{sur } \overline{V}_F \times]t_0, t_1[\tag{A.26}$$

A.4.2 Calcul de la dérivée directionnelle en déplacements $\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Pi$

$$\delta_{\boldsymbol{u}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{u}_i^*) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i + \lambda \boldsymbol{u}_i^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}) \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{\sigma}_{ij}]^*) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_V \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial t})^2 - \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\overline{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} - \lambda\boldsymbol{\sigma}^*_{ij}\overline{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + \boldsymbol{b}_i\overline{\boldsymbol{u}}_i\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^*_{ij})\boldsymbol{S}_{ijkl}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{kl} + \lambda\boldsymbol{\sigma}^*_{kl})\,dV + \int_{\overline{V}_F}\boldsymbol{s}_i\overline{\boldsymbol{u}}_i\,d\overline{V}\right]dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_V -\boldsymbol{\sigma}^*_{ij}\overline{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}\boldsymbol{S}_{ijkl}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}\,dV\right]dt\\
\delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Pi(\overline{\boldsymbol{u}}_i, \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}, \boldsymbol{\sigma}_{ij}]^*) &= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_V \boldsymbol{\sigma}^*_{ij}(-\overline{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} + \boldsymbol{S}_{ijkl}\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{kl})\,dV\right]dt
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Si cette dérivée directionnelle est nulle, cela doit nous permettre de retrouver les équations A.7 et A.8 restantes. On suppose que :

$$\boldsymbol{\sigma}^*_{ij}(M, t_0) = \boldsymbol{\sigma}^*_{ij}(M, t_1) = 0 \tag{A.29}$$

Il existe une infinité de champ de contrainte vérifiant cette équation. En utilisant le lemme de Haar, on retrouve l'équation A.7, à savoir :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl} \quad \text{sur } V \times]t_0, t_1[\quad \text{et } \boldsymbol{S}_ijkl = \boldsymbol{C}^{-1}_{ijkl} \tag{A.30}$$

L'équation A.9 concernant les conditions aux limites de déplacements imposés est vérifiée intrinsèquement par la définition même de l'espace des champs de déplacements Σ_R.

Annexe B

Développement des matrices paramétriques des Super-Éléments Mixtes

Tout le développement de cette annexe est fait pour une sous-structure (a).

B.1 Définitions de la base de réduction

Pour rappel, la méthode utilisée dans la section 5.5 est Fix-Fix-1 ; elle est définie par la projection suivante :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}^{a}_{i,w} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j,w} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j,\theta} \\ \boldsymbol{\beta}^{(a)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,w} & \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,w} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,\theta} & \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij,w} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{ij,\theta} \\ t^3\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,w} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,i,\theta} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} & t^3\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,w} \\ \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{I}_{ij,w} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\theta} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} \tag{B.1}$$

B.2 Paramétrages i/j et w/θ

Les matrices de masses $\boldsymbol{M}_{mix}$ et de raideur $\boldsymbol{K}_{mix}$ des MEF mixtes peuvent être paramétrées de la façon suivante :

$$\boldsymbol{K}_{mix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{T}_{i,w} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{T}_{i,\theta} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{T}_{j,w} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{T}_{j,\theta} \\ \boldsymbol{G}_{i,w} & \boldsymbol{G}_{i,\theta} & \boldsymbol{G}_{j,w} & \boldsymbol{G}_{j,\theta} & \frac{1}{t^3}\tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

et

$$\boldsymbol{M}_{mix} = \begin{Bmatrix} t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,w} & \boldsymbol{0} & t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,w} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ii,\theta} & \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ij,\theta} & \boldsymbol{0} \\ t\tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,w} & \boldsymbol{0} & t\tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,w} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{ji,\theta} & \boldsymbol{0} & t^3\tilde{\boldsymbol{M}}_{jj,\theta} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{B.3}$$

B.3 Paramétrages dans la basé réduite

L'équilibre d'une sous-structure (a) réduite avec la méthode Fix-Fix-1 peut être donnée par ses matrices de masse réduite $\boldsymbol{M}^{(a)}_{mix,\,red}$ et de raideur réduite $\boldsymbol{K}^{(a)}_{mix,\,red}$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}^{(a)}_{\eta\eta} & \boldsymbol{M}^{(a)}_{\eta j} \\ \boldsymbol{M}^{(a)}_{j\eta} & \boldsymbol{M}^{(a)}_{jj} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{M}^{(a)}_{mix,\,red}} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^{(a)}_{FI} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{K}^{(a)}_{\eta\eta} & \boldsymbol{K}^{(a)}_{\eta j} \\ \boldsymbol{K}^{(a)}_{j\eta} & \boldsymbol{K}^{(a)}_{jj} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{K}^{(a)}_{mix,\,red}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\eta} \\ \boldsymbol{F}_{j} \end{Bmatrix} \tag{B.4}$$

Les équations B.1, B.2 et B.3 permettent d'écrire l'équation B.4 d'équilibre d'une sous-structure (a) de façon paramétrique en épaisseur, à l'aide des matrices $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,\,red,\,t}$, $\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,\,red,\,t^3}$ et $\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,\,red,\,t}$, indépendantes de toute variable d'épaisseur :

$$\begin{aligned} &\left(t \underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t} & \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta j,\,t} \\ \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{j\eta,\,t} & \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,\,red,\,t}} + t^3 \underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t^3} & \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta j,\,t^3} \\ \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{j\eta,\,t^3} & \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t^3} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{mix,\,red,\,t^3}} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}^{(a)}_{FI} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} \\ &\qquad + \left(t^3 \underbrace{\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{\eta\eta} & \tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{\eta j} \\ \tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{j\eta} & \tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{\eta\eta} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{mix,\,red}} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{(a)}_{FI} \\ \boldsymbol{U}^{(a)}_{j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\eta} \\ \boldsymbol{F}_{j} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{B.5}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t} = \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,w} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,w} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w} \tag{B.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta\eta,\,t^3} = \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,\theta} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,\theta} \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta} \tag{B.7}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta j,\,t} = \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,w} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,w} \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w} + \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,w} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ij,\,w} \boldsymbol{I}_{ij,\,w} \tag{B.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{\eta j,\,t^3} = \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,\theta} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,\theta} \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,\theta} + \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,\theta} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ij,\,\theta} \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta} \tag{B.9}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{j\eta,\,t} = \left(\boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\,w} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,w} + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\,w} \tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ji,\,w} \right) \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w} \tag{B.10}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{j\eta,\,t^3} = (\boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\theta} + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ji,\theta})\,\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta} \tag{B.11}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{jj,\,t} = (\boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\,w}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\,w} + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\,w}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ji,\,w})\,\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w} + (\boldsymbol{I}^{T}_{ij,\,w}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{jj,\,w} + \boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\,w}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ij,\,w})\boldsymbol{I}_{ij,\,w} \tag{B.12}$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{jj,\,t^3} = (\boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ii,\theta} + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ji,\theta})\,\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} + (\boldsymbol{I}^{T}_{ij,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{jj,\theta} + \boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\theta}\tilde{\boldsymbol{M}}^{(a)}_{ij,\theta})\boldsymbol{I}_{ij,\theta} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{\eta\eta} = {} & \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\left\{\boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\,w}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w} + \boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\theta}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\right\}\\ & + \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,w}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\,w} + \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,\theta}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\theta}\\ \qquad + \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)}\end{matrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{\eta j} = {} & \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\left\{\boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\,w}\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w} + \boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\theta}\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\theta} + \boldsymbol{G}^{(a)}_{j,\,w}\boldsymbol{I}_{ij,\,w} + \boldsymbol{G}^{(a)}_{j,\theta}\boldsymbol{I}_{ij,\theta}\right\}\\ & + \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,w}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\,w} + \boldsymbol{\Phi}^{(a),T}_{FI,\,i,\,\theta}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\theta}\\ \qquad + \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)}\end{matrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w}\\ \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,\theta}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta}\end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{K}}^{(a)}_{j\eta} = {} & \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w}\\ \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,\theta}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\left\{\boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\,w}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w} + \boldsymbol{G}^{(a)}_{i,\theta}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\right\}\\ & + \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\,w}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\,w} + \boldsymbol{\Psi}^{(a),T}_{i,\theta}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{i,\theta} + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\,w}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{j,\,w}\\ \qquad + \boldsymbol{I}^{T}_{ij,\theta}\boldsymbol{G}^{(a),T}_{j,\theta} + \left\{\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,w}\\ \boldsymbol{\Psi}^{(a)}_{i,\,\theta}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w}\\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta}\end{matrix}\right\}\right\}^{T}\tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)}\end{matrix}\right\}\tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,w}\\ \boldsymbol{\Phi}^{(a)}_{FI,\,i,\,\theta}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\end{aligned} \tag{B.16}$$

et

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{jj}^{(a)} = \left\{ \tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,w}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Psi}_{i,\,\theta}^{(a)} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta} \end{array} \right\} \right\}^{T} \cdot \left\{ \boldsymbol{G}_{i,\,w}^{(a)} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,w}^{(a)} + \boldsymbol{G}_{i,\,\theta}^{(a)} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,\theta}^{(a)} + \boldsymbol{G}_{j,\,w}^{(a)} \boldsymbol{I}_{ij,\,w} + \boldsymbol{G}_{j,\,\theta}^{(a)} \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta} \right\}$$
$$+ \left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,w}^{(a),T} \boldsymbol{G}_{i,\,w}^{(a),T} + \boldsymbol{\Psi}_{i,\,\theta}^{(a),T} \boldsymbol{G}_{i,\,\theta}^{(a),T} + \boldsymbol{I}_{ij,\,w}^{T} \boldsymbol{G}_{j,\,w}^{(a),T} + \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta}^{T} \boldsymbol{G}_{j,\,\theta}^{(a),T} \\ + \left\{ \tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,w}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Psi}_{i,\,\theta}^{(a)} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta} \end{array} \right\} \right\}^{T} \tilde{\boldsymbol{H}}^{(a)} \end{array} \right\} \tilde{\boldsymbol{P}}^{(a)} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\Psi}_{i,\,w}^{(a)} \\ \boldsymbol{\Psi}_{i,\,\theta}^{(a)} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,w} \\ \boldsymbol{I}_{ij,\,\theta} \end{array} \right\} \tag{B.17}$$

Annexe C

Résultats de l'optimisation d'une plaque simple

Cette annexe concerne les résultats de l'optimisation de la plaque simple (cf. figure C.1). Le MEF la représentant est composé de 256 éléments (excepté certains modèles composés de 1024 éléments pour le mode 5). Les caractéristiques matériaux utilisés sont résumés dans le tableau 2.1.
Le cas d'excitation étudié est le "cas 1" qui considère une fréquence d'excitation calquée sur la fréquence propre du mode choisi. Les cinq premiers modes de la plaque sont optimisés, pour plusieurs configurations de zones d'épaisseur différentes (respectivement 4, 8, 3 ,8 et 4 configurations pour les modes 1, 2, 3, 4 et 5). Chacun des calculs a été effectué à la fois pour l'amortissement hystérétique et pour l'amortissement de Rayleigh "raideur". La première partie du tableau 5.2 résume les calculs effectués et les annexes auxquelles il faut se référer.
La méthode d'optimisation utilisée est celle du MEF mixte paramétré (voir section 5.4.1). Les résultats présentés ont tous convergé.
La section 5.7.4 donne plus d'explication sur la signification des graphiques.
On note que certaines grandeurs associées aux contraintes ne sont pas physiques (valeur trop élevées), en raison d'un coefficient d'amortissement choisi très faible. Cependant, la répartition des contraintes est physique et l'optimisation des paramètres reste cohérente. Des calculs similaires avec des coefficients d'amortissement plus élevés donneraient des résultats analogues avec un niveau de contrainte plus faible (tant que le coefficient d'amortissement influe peu sur les fréquences de résonance).

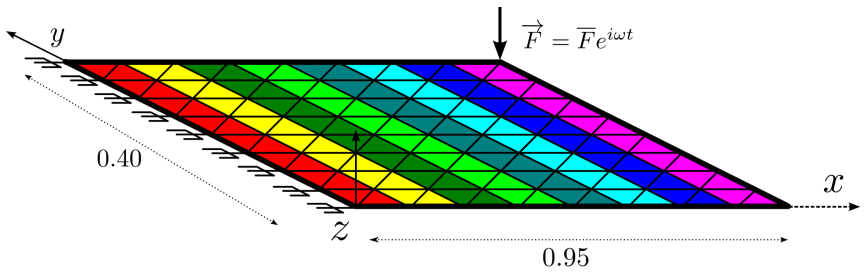
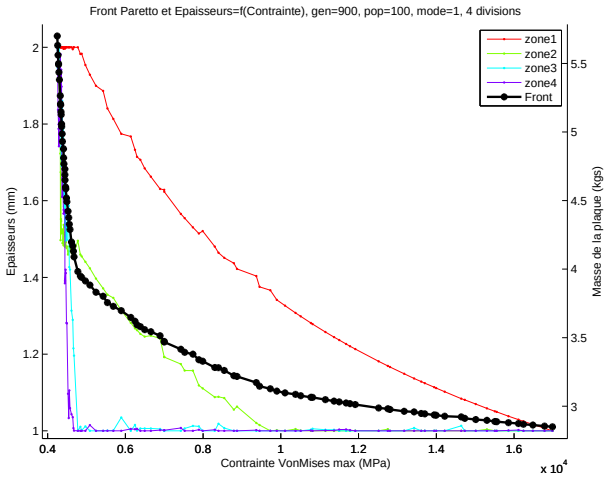


FIGURE C.1: Schéma de la structure "simple" (en m) à optimiser (exemple à 8 zones d'épaisseur)

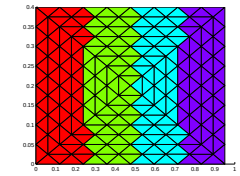
C.1 Mode 1

C.1.1 4 zones

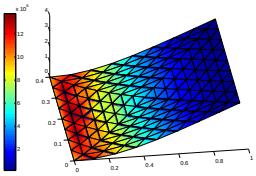
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

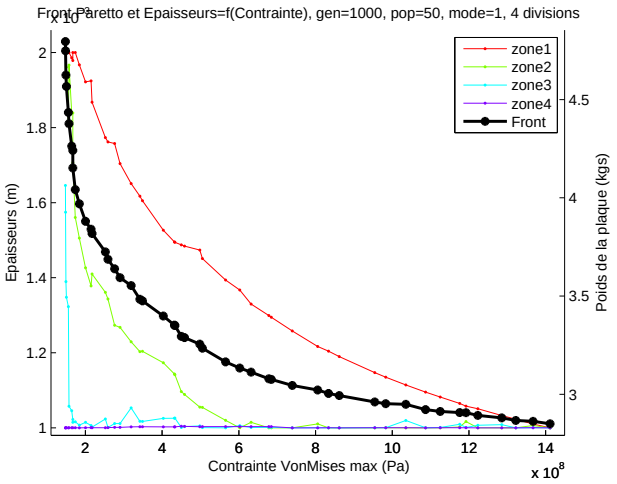


(b)

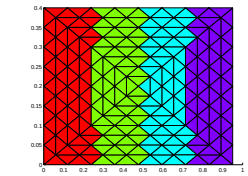


(c)

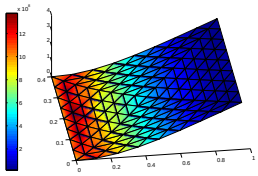
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-3}$, 256 éléments



(a)



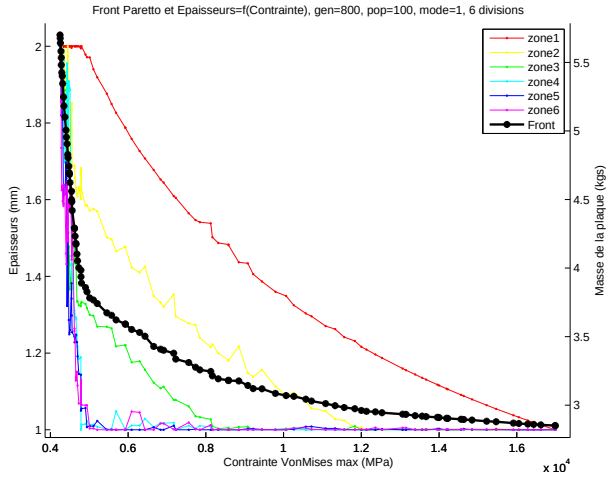
(b)



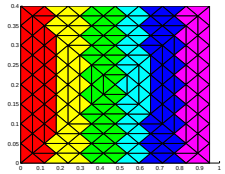
(c)

C.1.2 6 zones

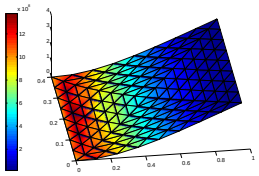
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

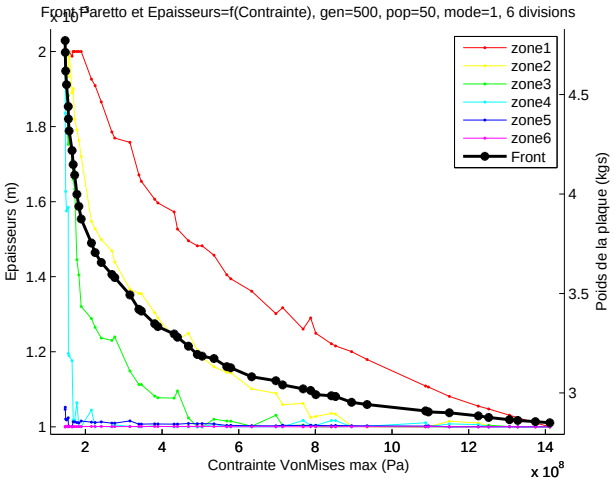


(b)

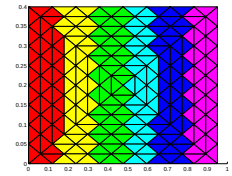


(c)

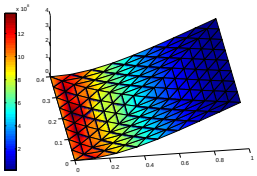
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-3}$, 256 éléments



(a)



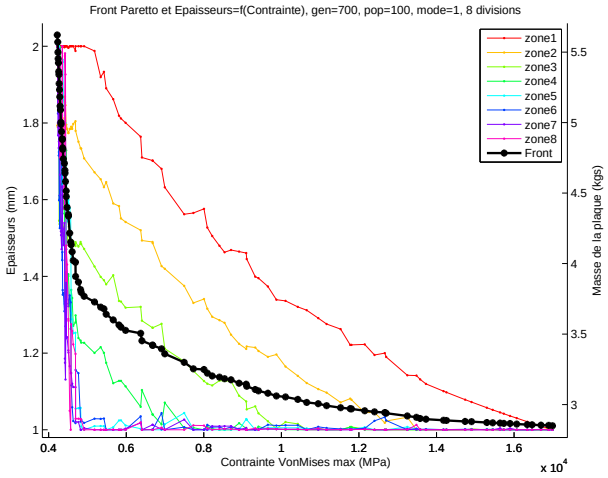
(b)



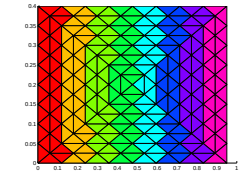
(c)

C.1.3 8 zones

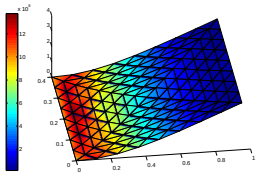
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

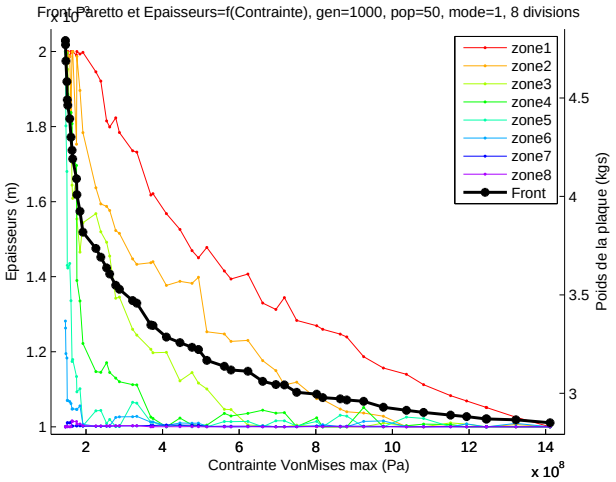


(b)

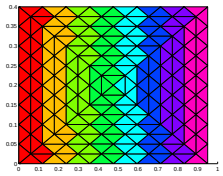


(c)

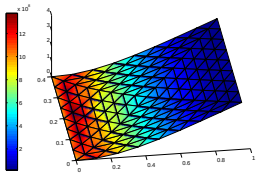
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-3}$, 256 éléments



(a)



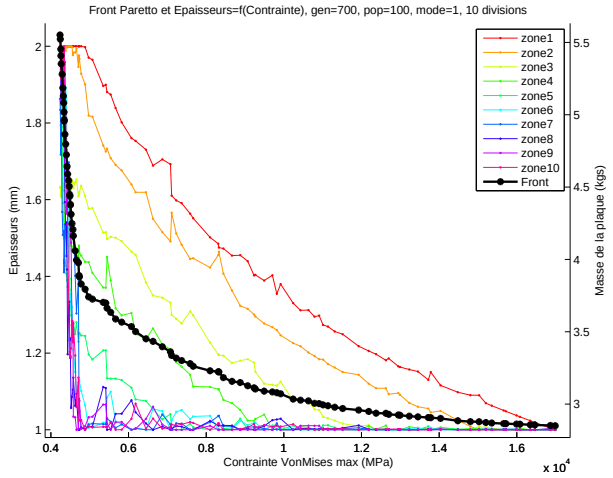
(b)



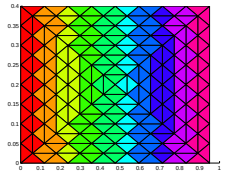
(c)

C.1.4 10 zones

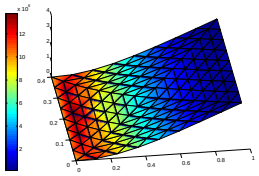
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

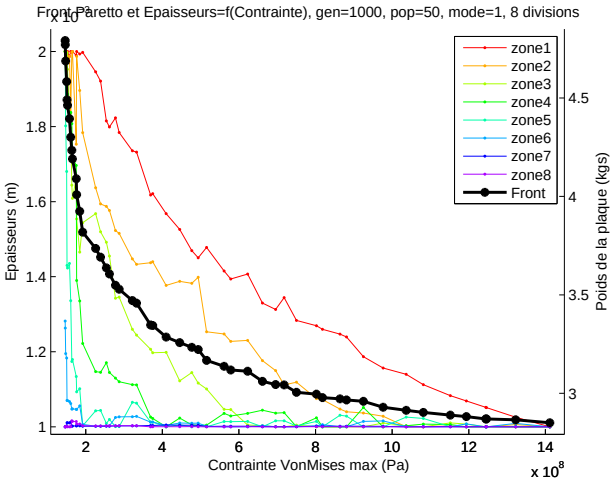


(b)

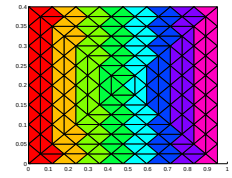


(c)

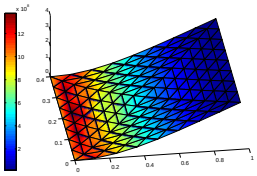
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-3}$, 256 éléments



(a)



(b)

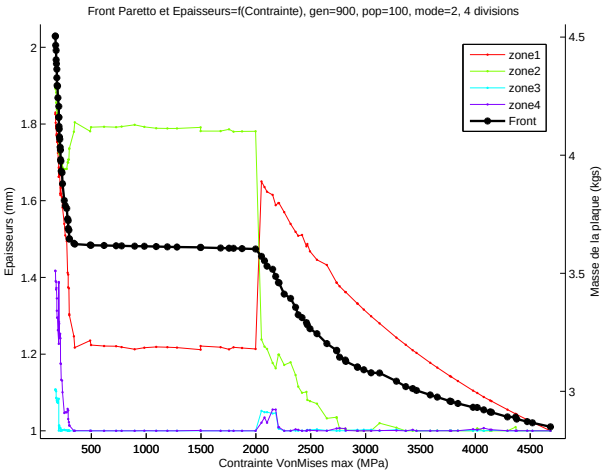


(c)

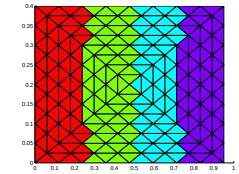
C.2 Mode 2

C.2.1 4 zones

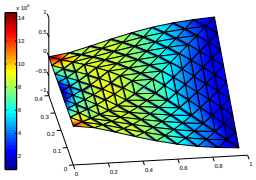
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

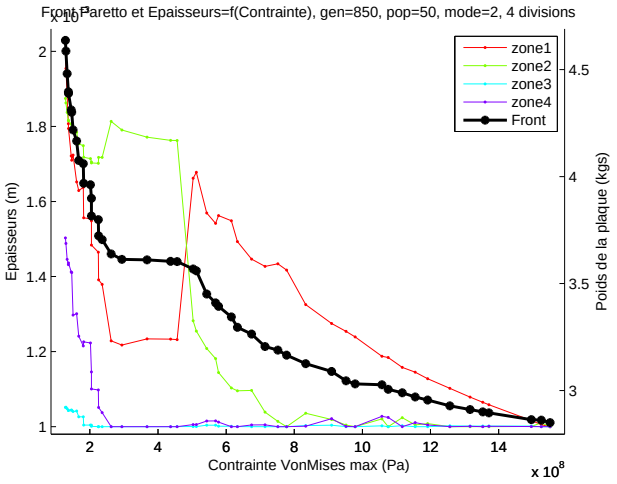


(b)

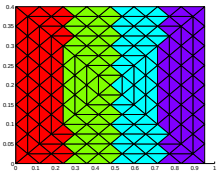


(c)

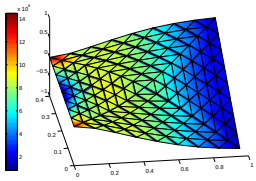
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



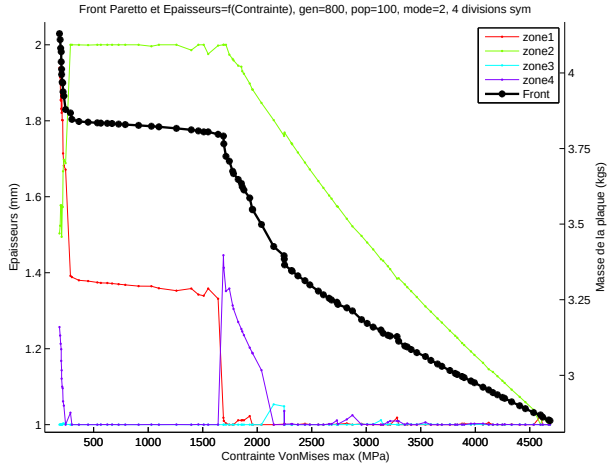
(b)



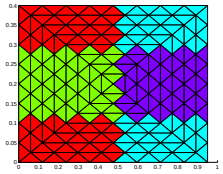
(c)

C.2.2 4 zones + symétrie

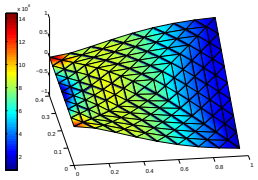
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

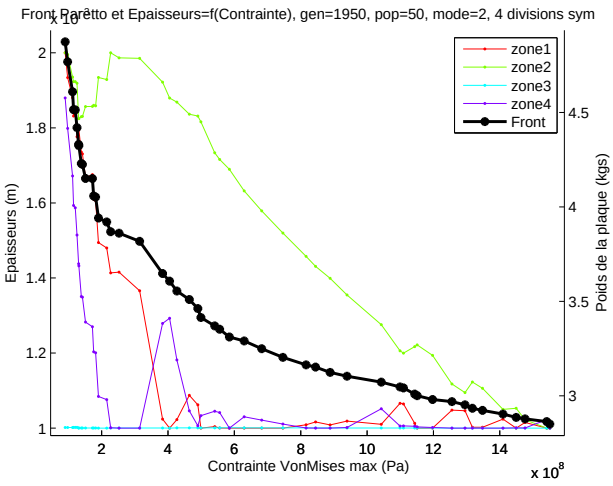


(b)

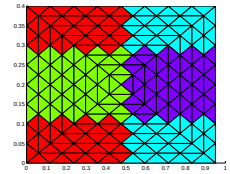


(c)

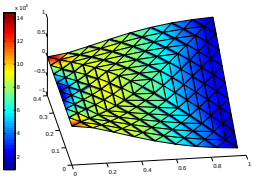
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



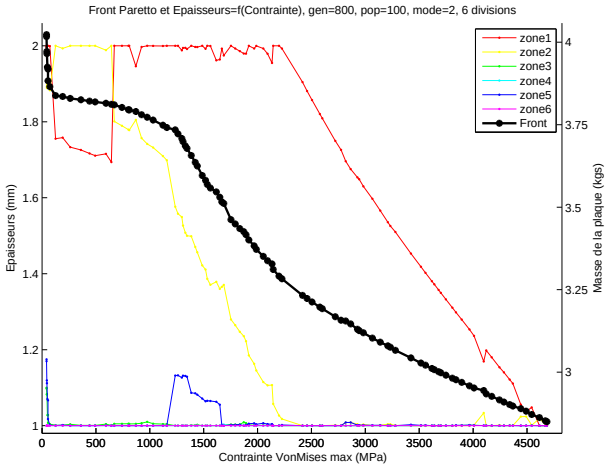
(b)



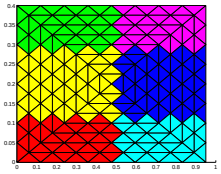
(c)

C.2.3 6 zones

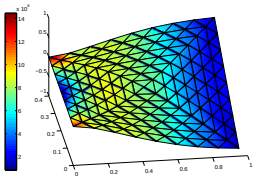
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

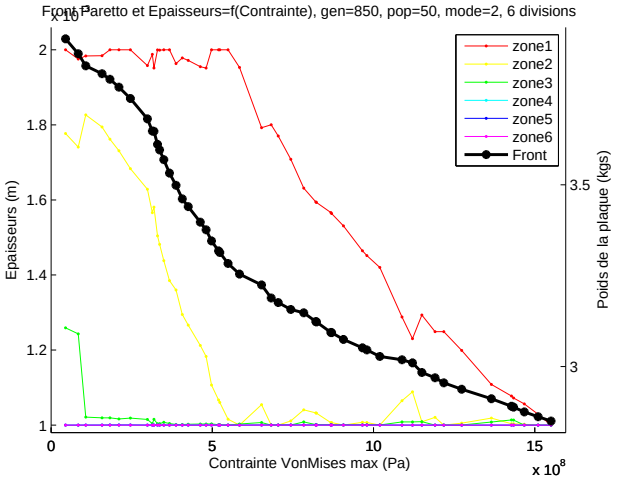


(b)

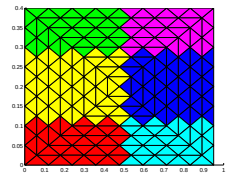


(c)

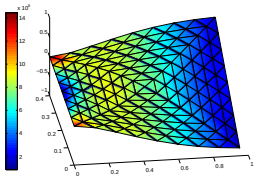
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



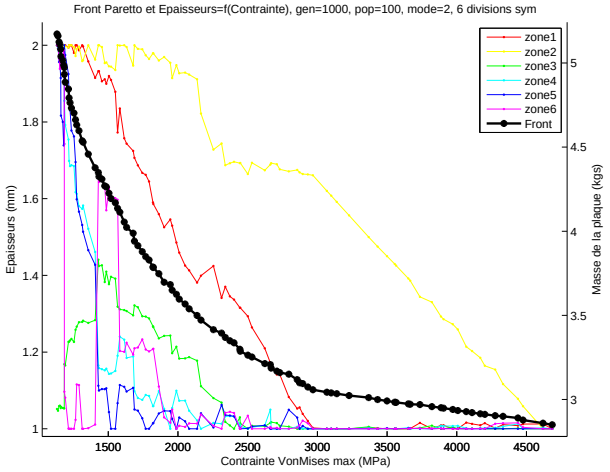
(b)



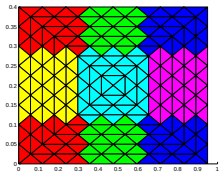
(c)

C.2.4 6 zones + symétrie

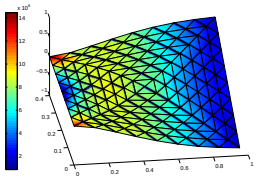
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

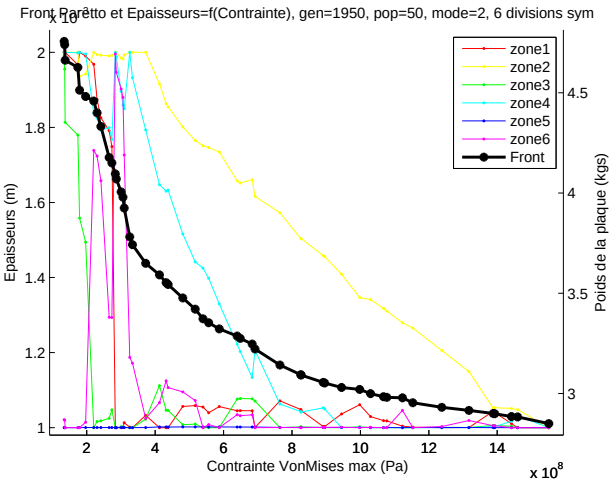


(b)

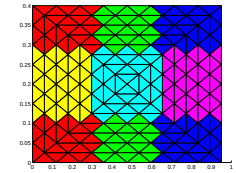


(c)

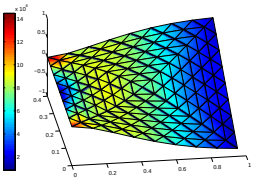
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



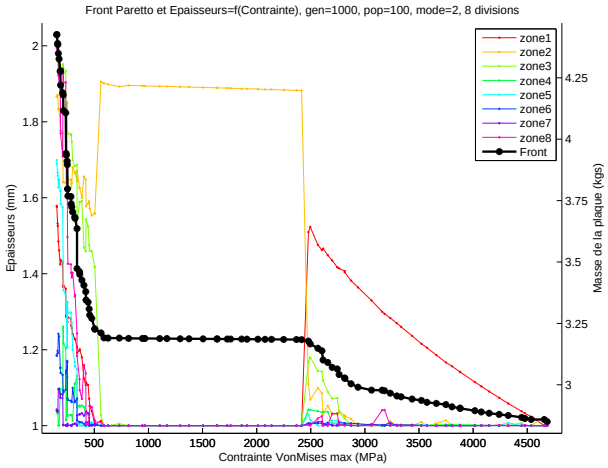
(b)



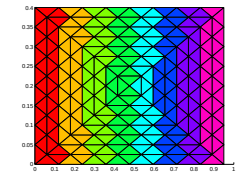
(c)

C.2.5 8 zones

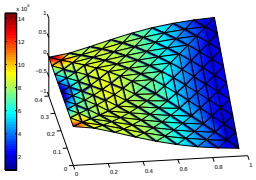
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

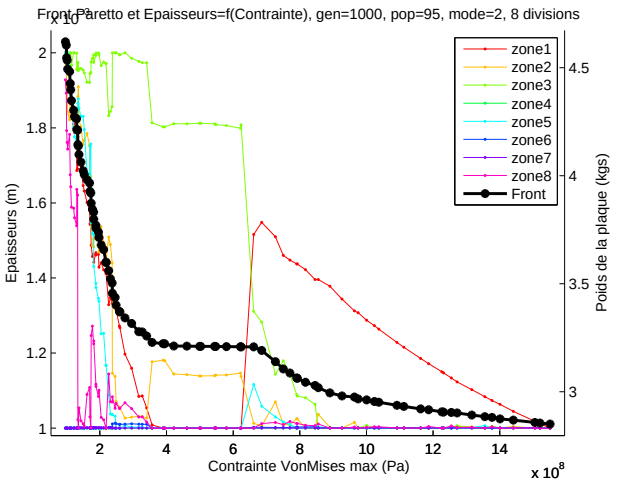


(b)

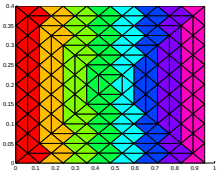


(c)

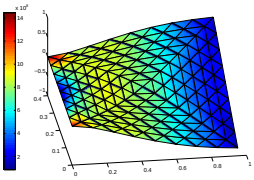
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



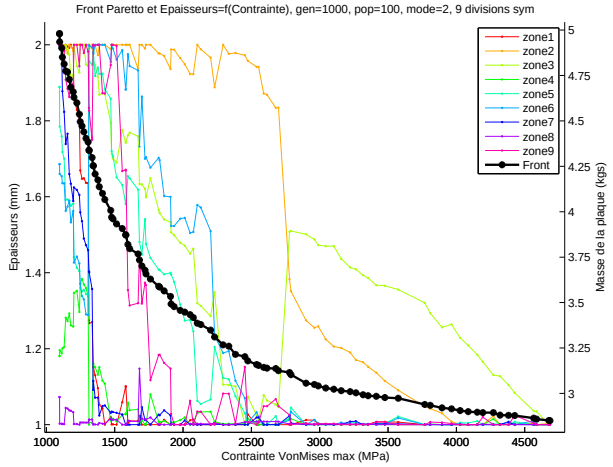
(b)



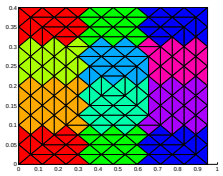
(c)

C.2.6 9 zones + symétrie

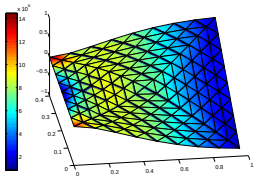
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

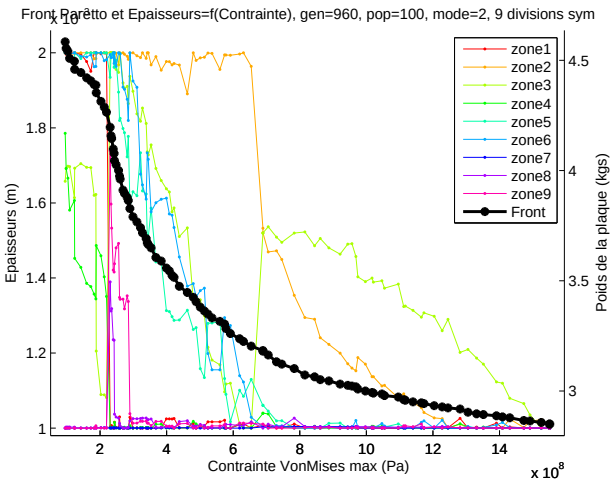


(b)

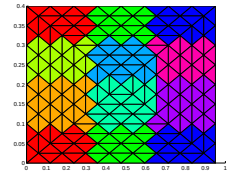


(c)

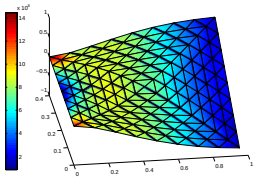
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



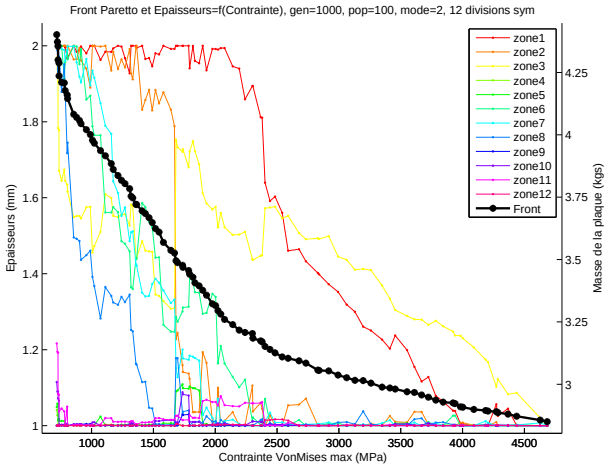
(b)



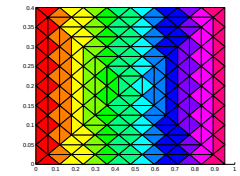
(c)

C.2.7 12 zones

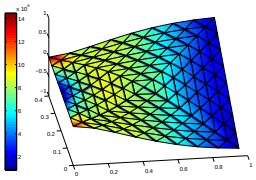
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

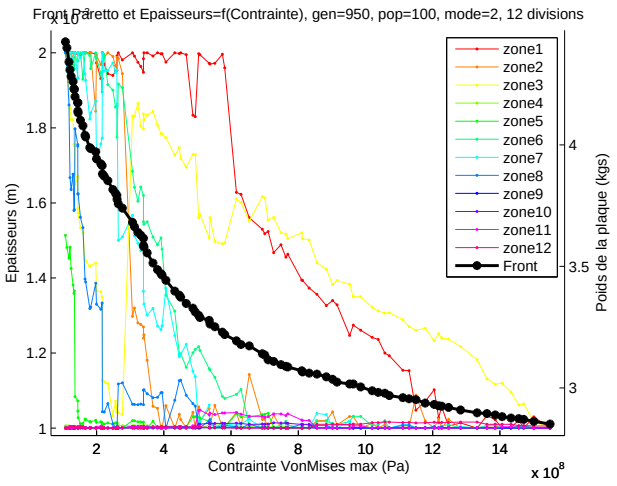


(b)

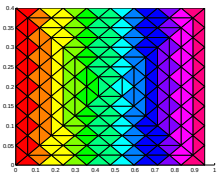


(c)

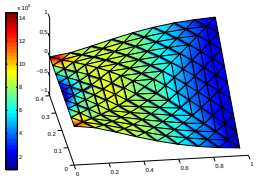
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



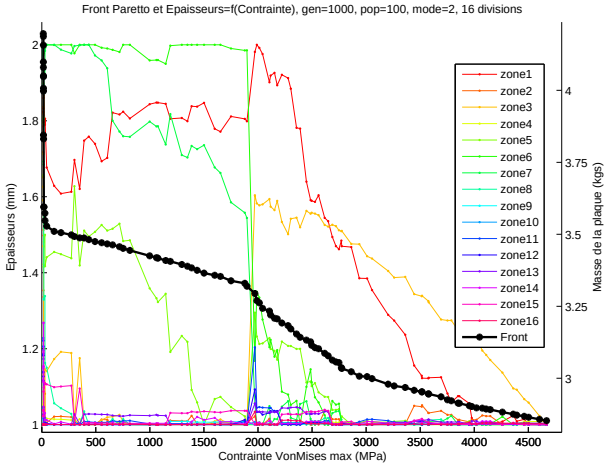
(b)



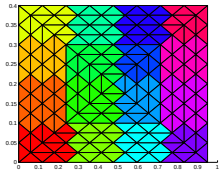
(c)

C.2.8 16 zones

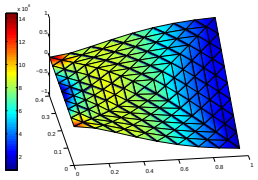
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

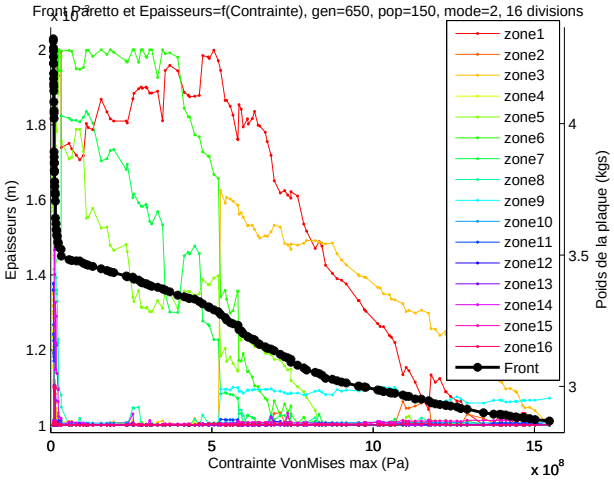


(b)

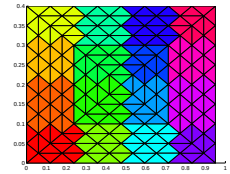


(c)

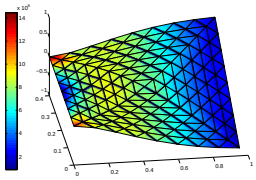
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



(b)

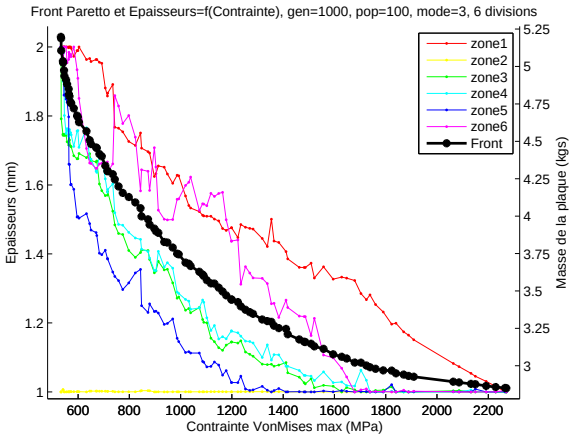


(c)

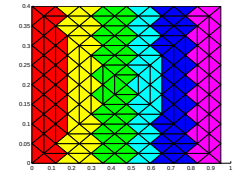
C.3 Mode 3

C.3.1 6 zones

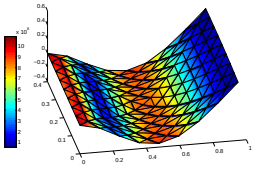
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

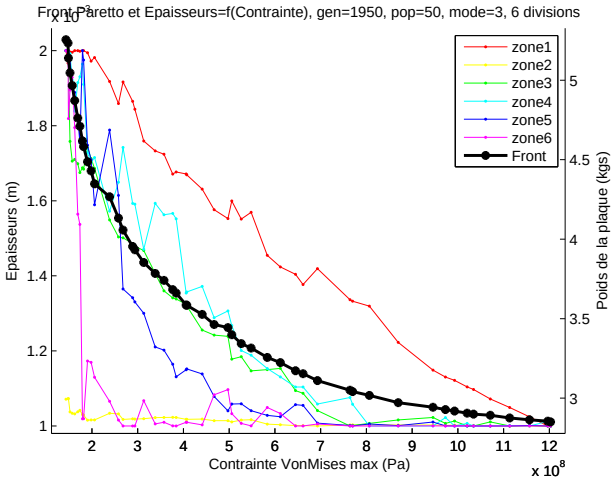


(b)

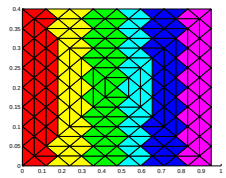


(c)

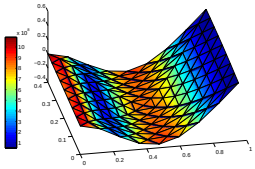
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



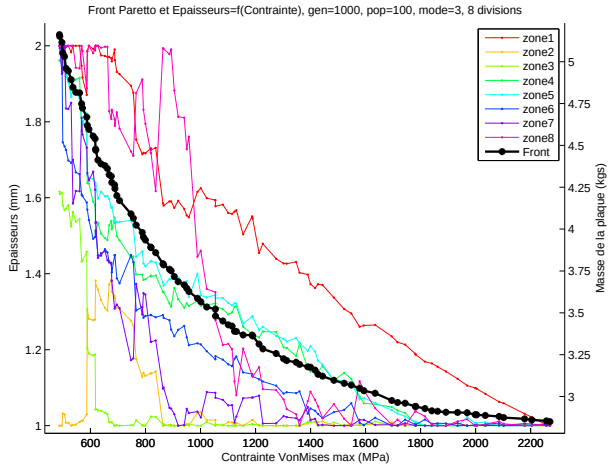
(b)



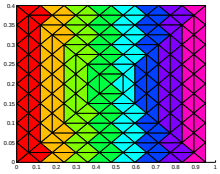
(c)

C.3.2 8 zones

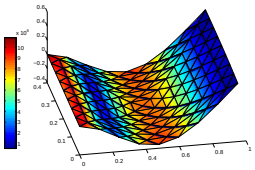
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

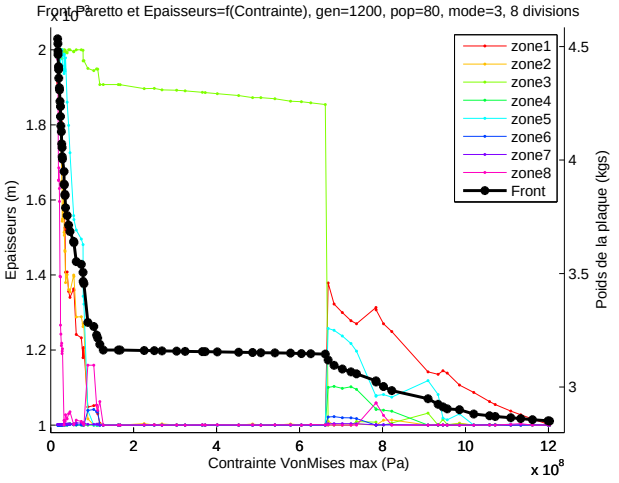


(b)

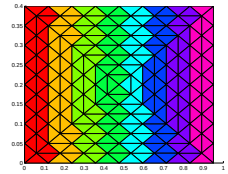


(c)

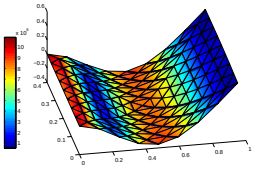
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



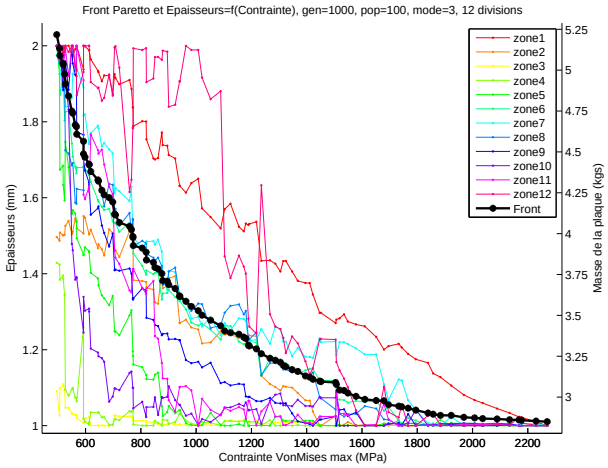
(b)



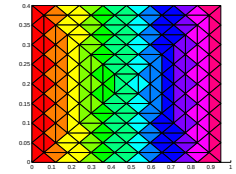
(c)

C.3.3 12 zones

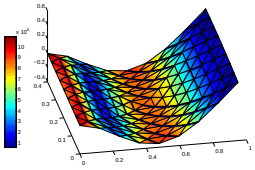
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

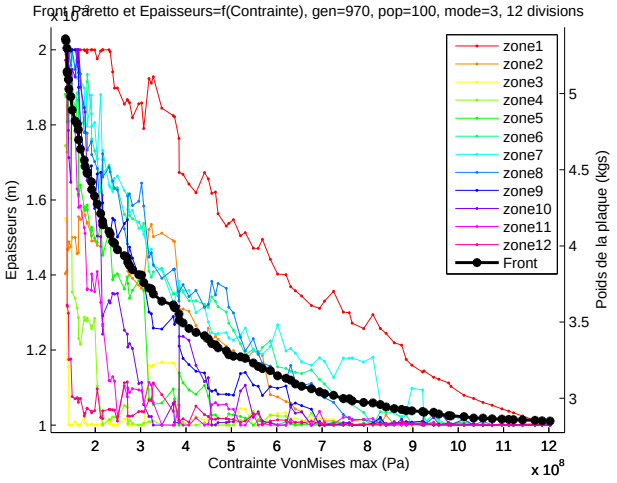


(b)

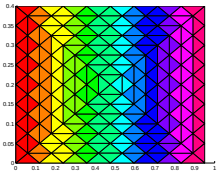


(c)

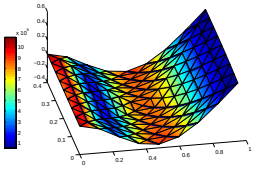
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-4}$, 256 éléments



(a)



(b)

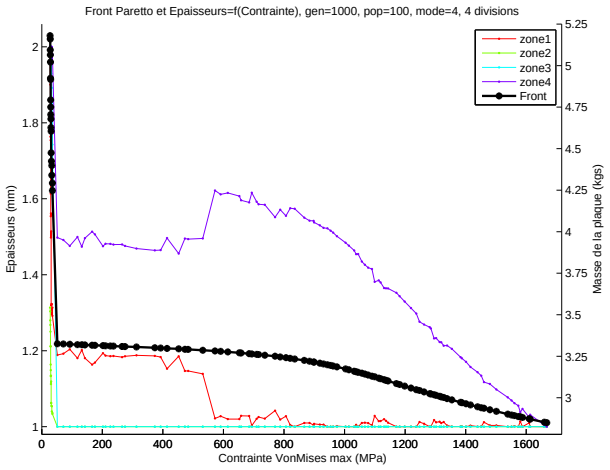


(c)

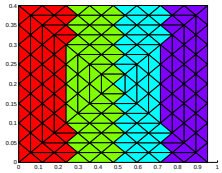
C.4 Mode 4

C.4.1 4 zones

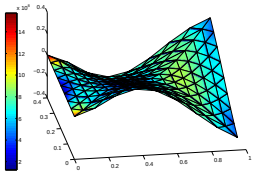
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

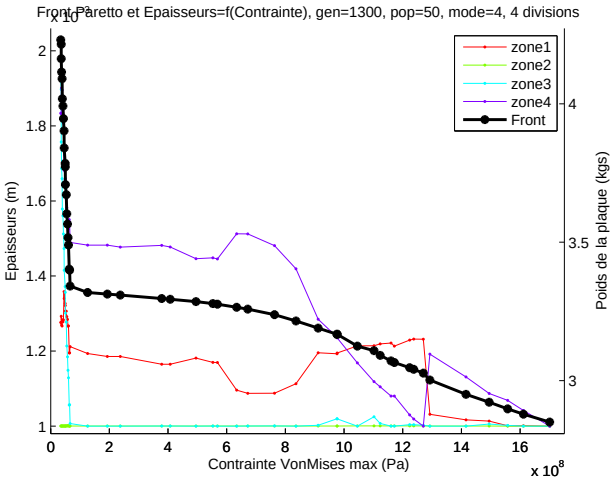


(b)

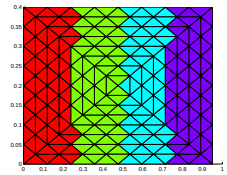


(c)

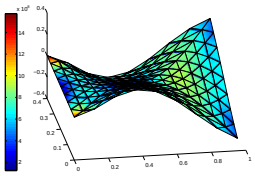
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



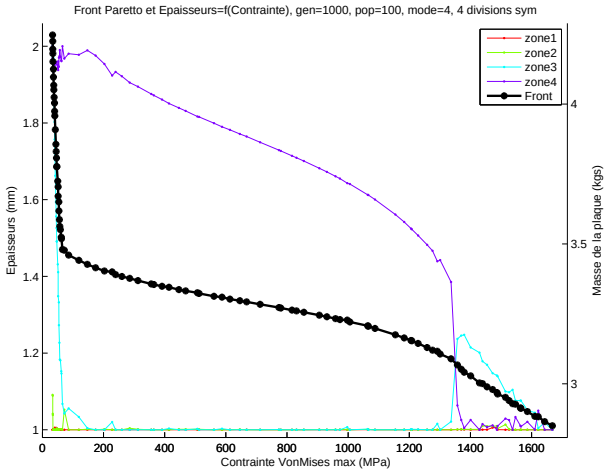
(b)



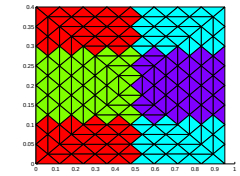
(c)

C.4.2 4 zones + symétrie

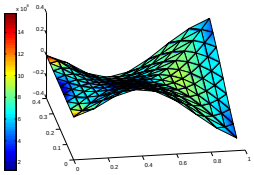
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

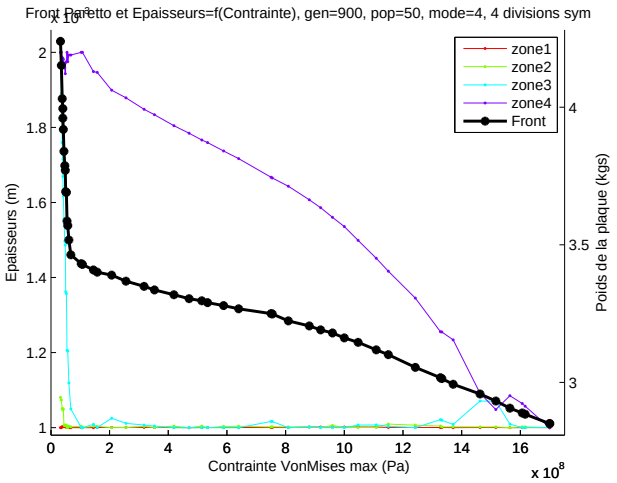


(b)

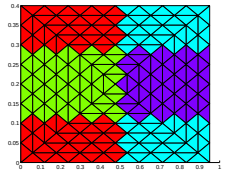


(c)

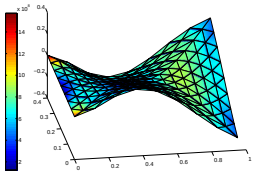
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



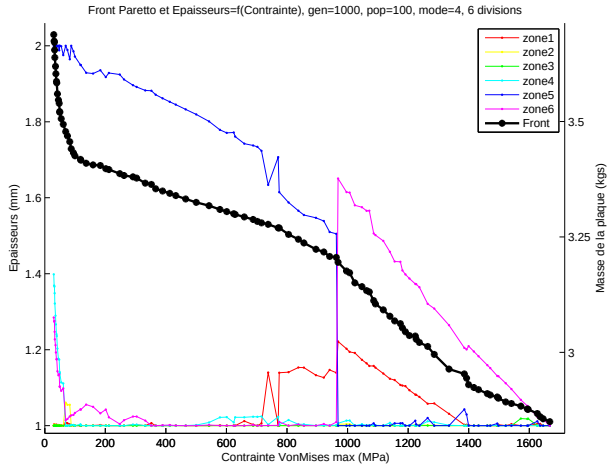
(b)



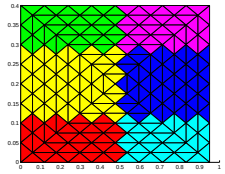
(c)

C.4.3 6 zones

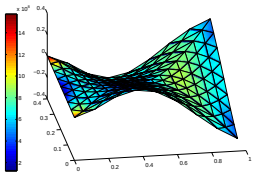
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

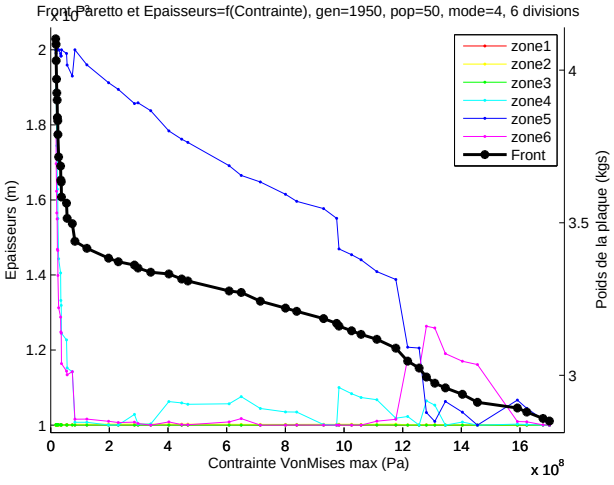


(b)

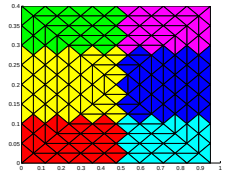


(c)

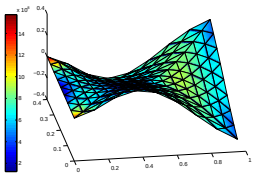
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



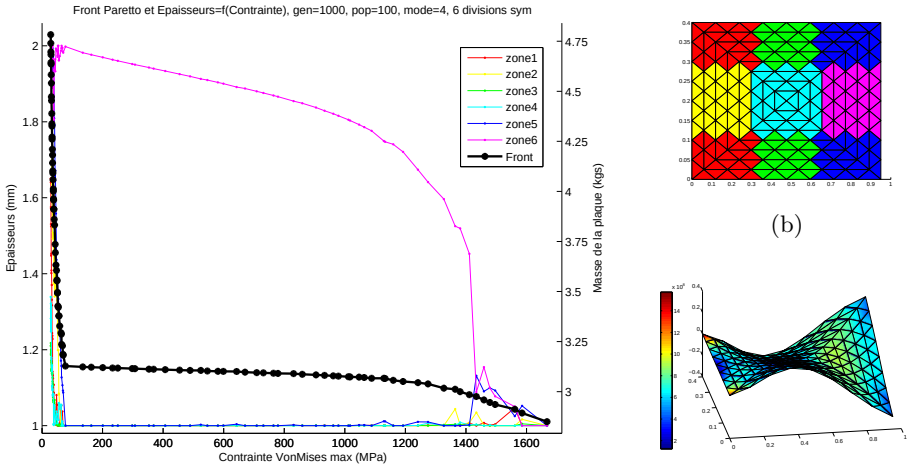
(b)



(c)

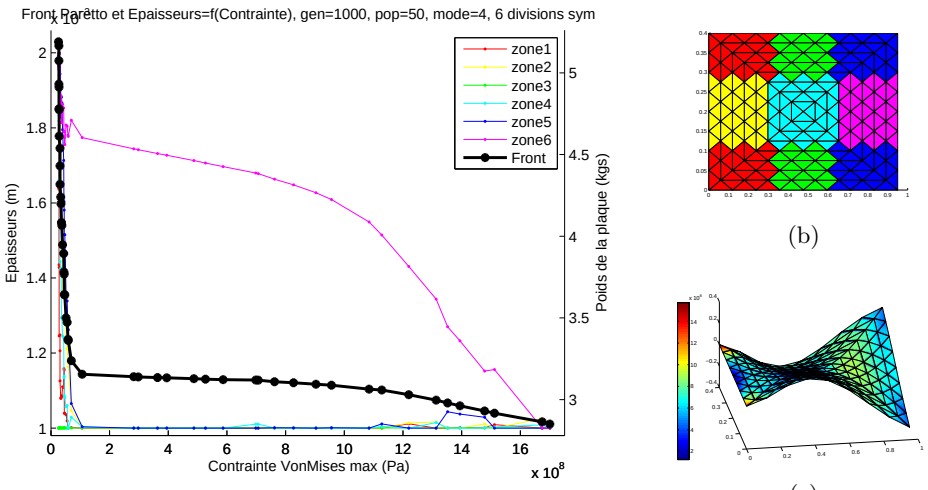
C.4.4 6 zones + symétrie

Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a) (b) (c)

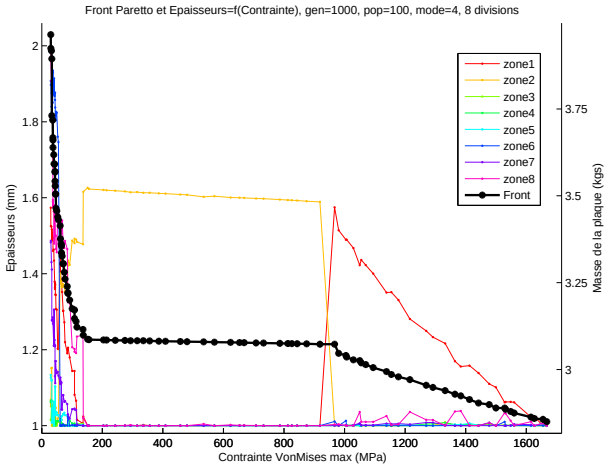
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



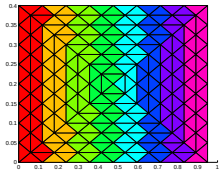
(a) (b) (c)

C.4.5 8 zones

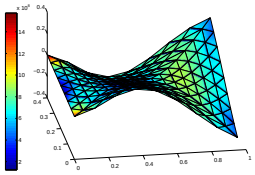
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

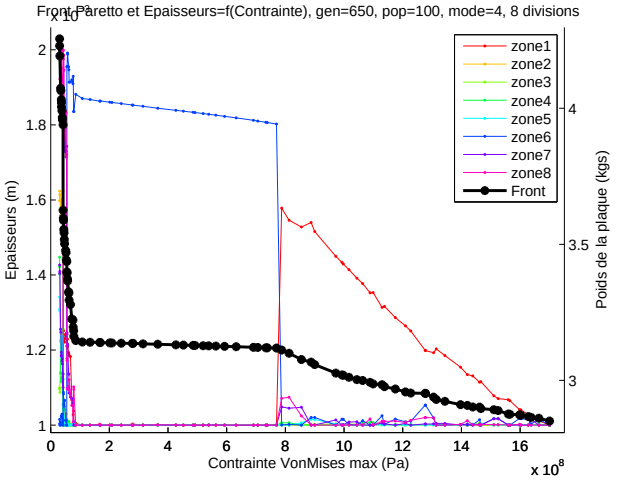


(b)

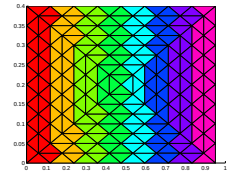


(c)

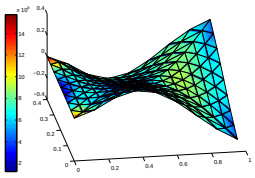
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



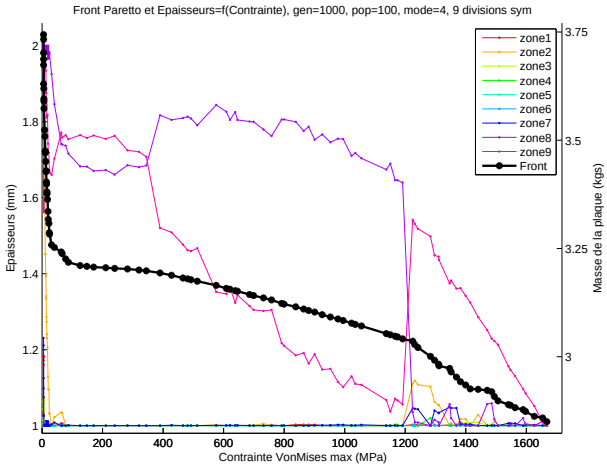
(b)



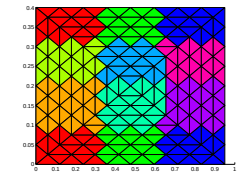
(c)

C.4.6 9 zones + symétrie

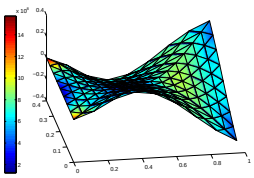
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

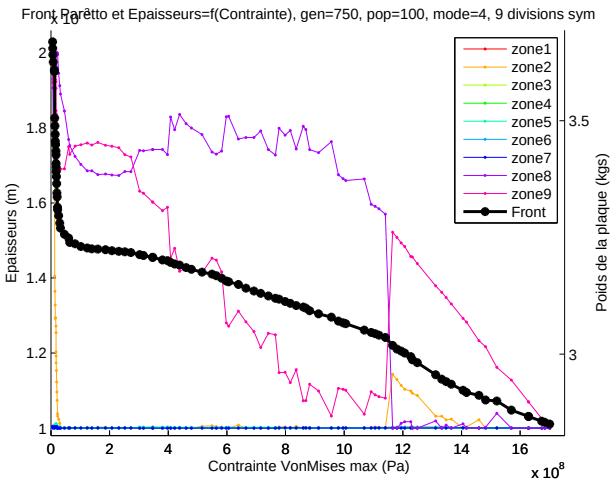


(b)

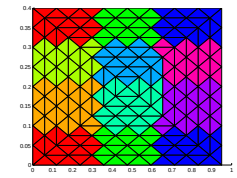


(c)

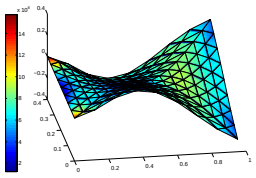
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



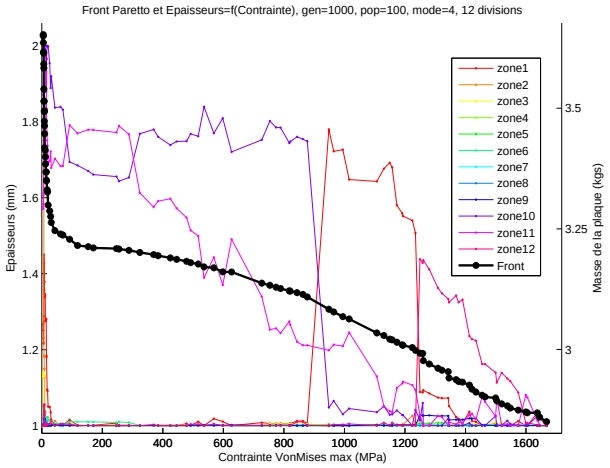
(b)



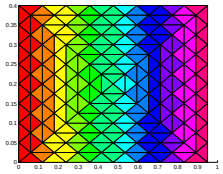
(c)

C.4.7 12 zones

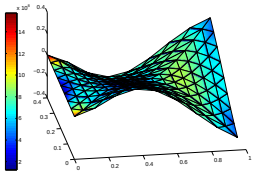
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

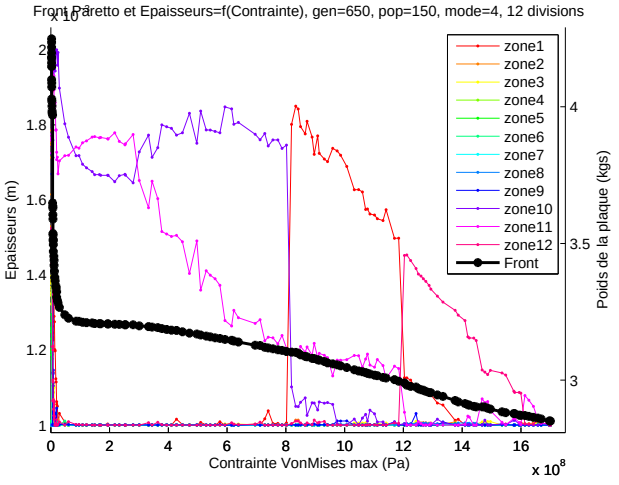


(b)

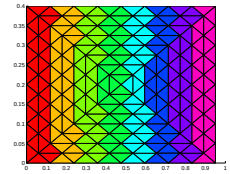


(c)

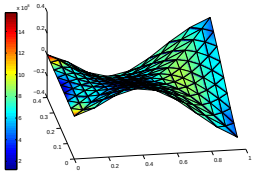
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



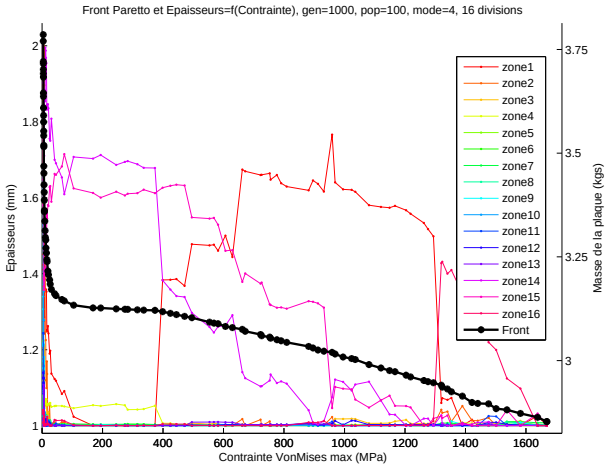
(b)



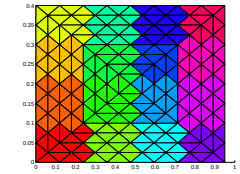
(c)

C.4.8 16 zones

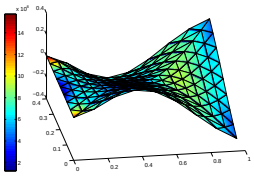
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

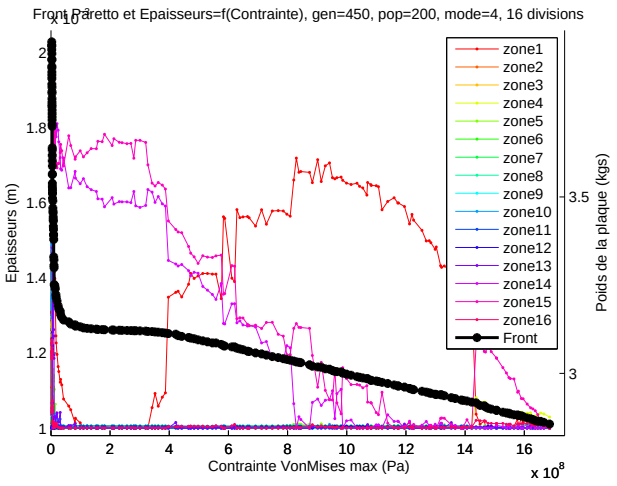


(b)

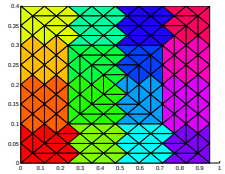


(c)

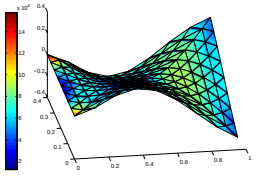
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 256 éléments



(a)



(b)

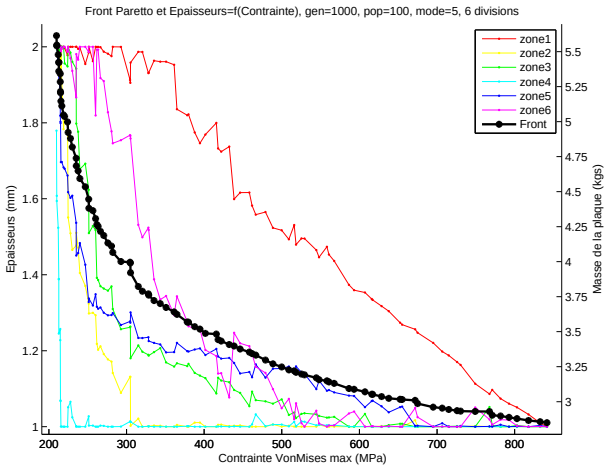


(c)

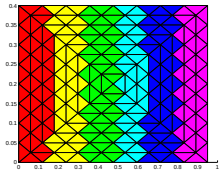
C.5 Mode 5

C.5.1 6 zones

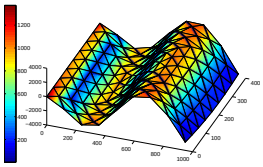
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

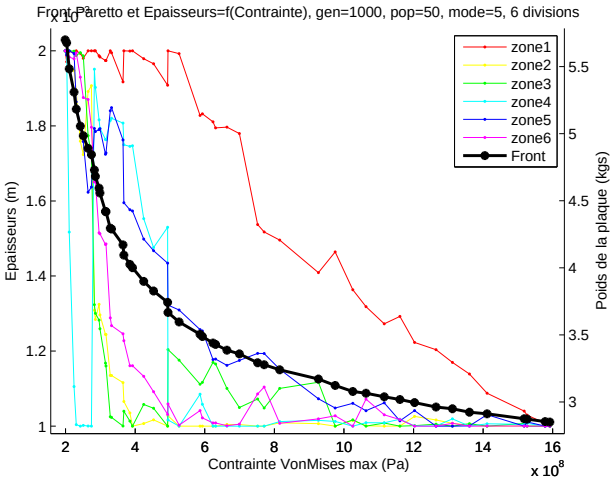


(b)

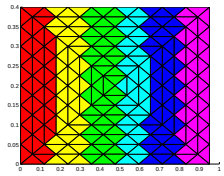


(c)

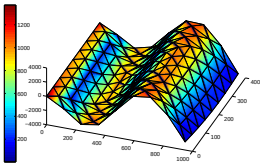
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-6}$, 256 éléments



(a)



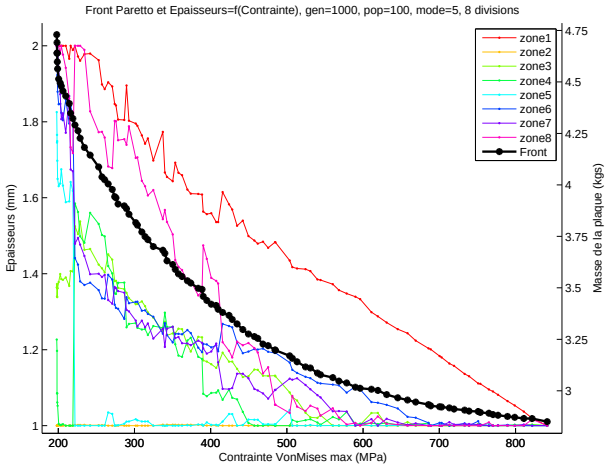
(b)



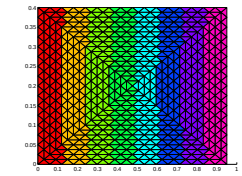
(c)

C.5.2 8 zones

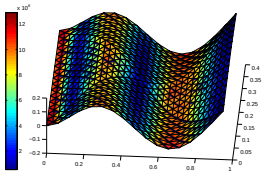
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 1024 éléments



(a)

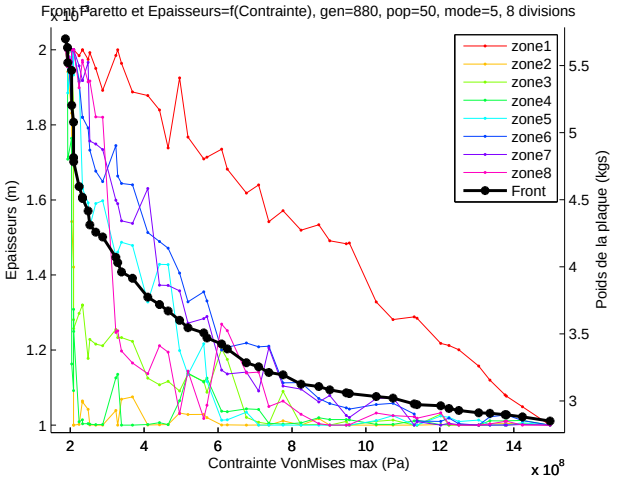


(b)

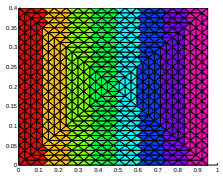


(c)

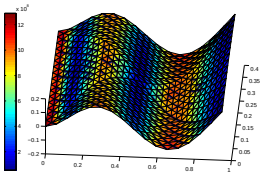
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-6}$, 1024 éléments



(a)



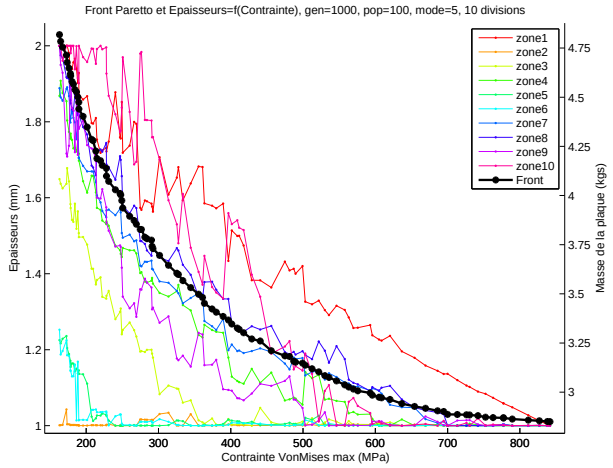
(b)



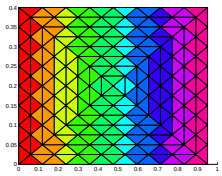
(c)

C.5.3 10 zones

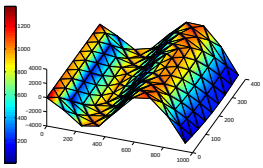
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

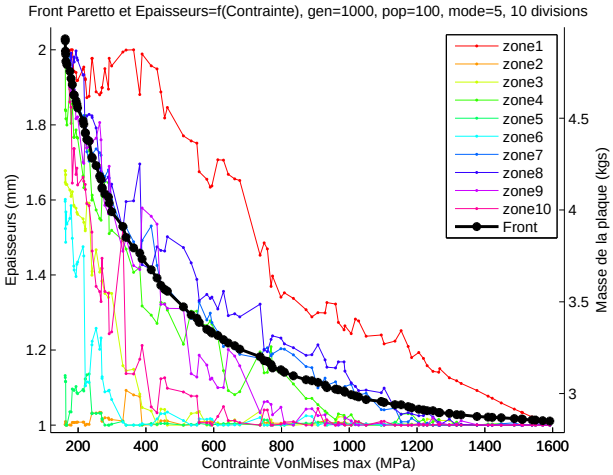


(b)

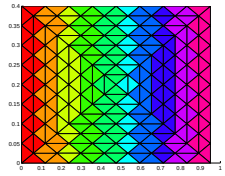


(c)

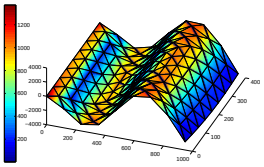
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-6}$, 256 éléments



(a)



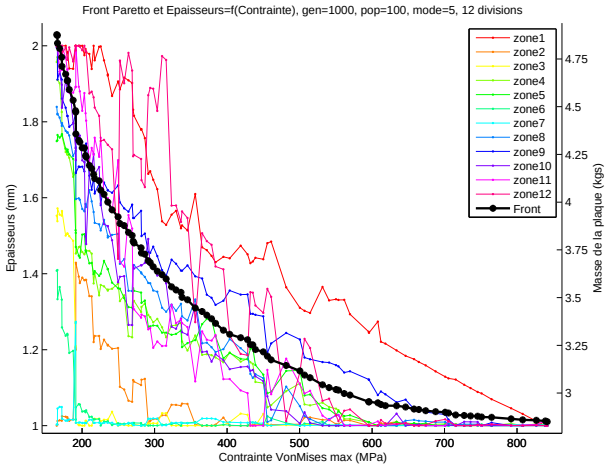
(b)



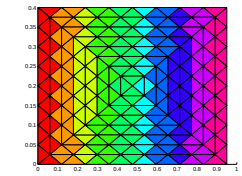
(c)

C.5.4 12 zones

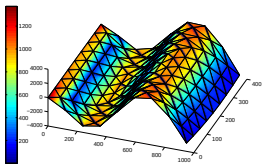
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 256 éléments



(a)

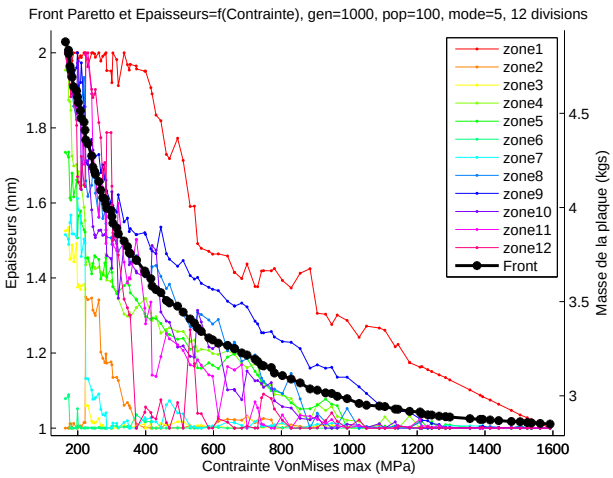


(b)

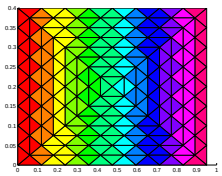


(c)

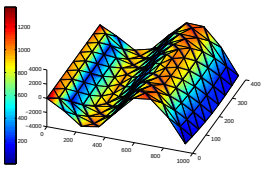
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-6}$, 256 éléments



(a)



(b)



(c)

Annexe D

Résultats de l'optimisation d'une plaque double

Cette annexe concerne les résultats de l'optimisation de la plaque double (cf. figure D.1). Le MEF la représentant est composé de 512 éléments (excepté le configuration à 14 zones, également implémentée pour un MEF de 128 éléments). Les caractéristiques matériaux utilisés sont résumés dans le tableau 2.1.
Le cas d'excitation étudié est le "cas 1" qui considère une fréquence d'excitation calquée sur la fréquence propre du mode choisi. Seul le mode 3 est étudié, pour 3 configurations d'épaisseur. Chacun des calculs a été effectué à la fois pour l'amortissement hystérétique et pour l'amortissement de Rayleigh "raideur". La seconde partie du tableau 5.2 résume les calculs effectués et les annexes auxquelles il faut se référer.
La méthode d'optimisation utilisée est celle du MEF mixte paramétré (voir section 5.4.1). Les résultats présentés ont tous convergé.
La section 5.7.4 donne plus d'explication sur la signification des graphiques.
On note que certaines grandeurs associées aux contraintes ne sont pas physiques (valeur trop élevées), en raison d'un coefficient d'amortissement choisi très faible. Cependant, la répartition des contraintes est physique et l'optimisation des paramètres reste cohérente. Des calculs similaires avec des coefficients d'amortissement plus élevés donneraient des résultats analogues avec un niveau de contrainte plus faible (tant que le coefficient d'amortissement influe peu sur les fréquences de résonance).

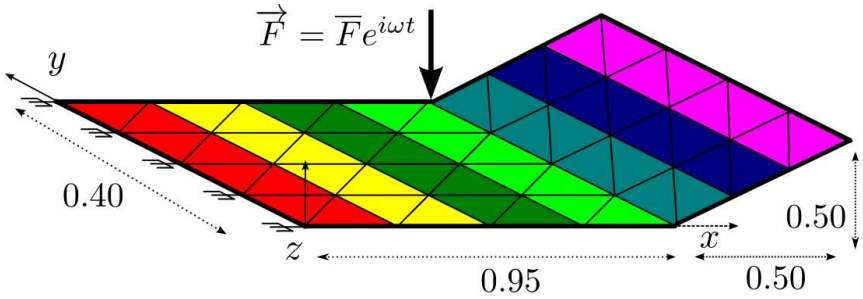
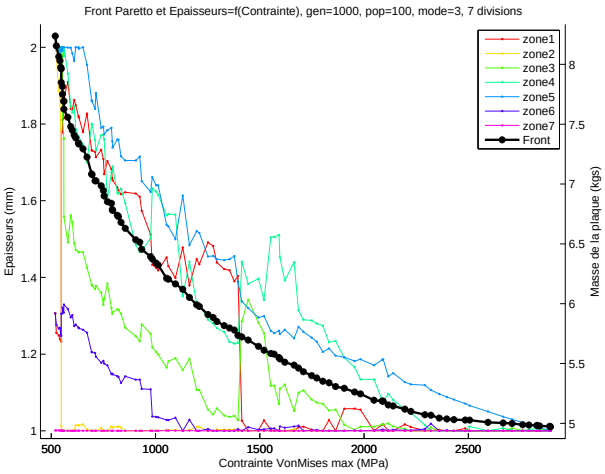


FIGURE D.1: Schéma de la structure "double" (en m) à optimiser (exemple à 7 zones d'épaisseur)

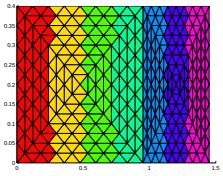
D.1 Mode 3

D.1.1 7 zones

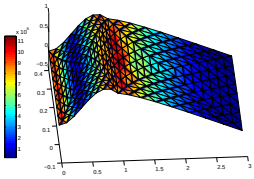
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 512 éléments



(a)

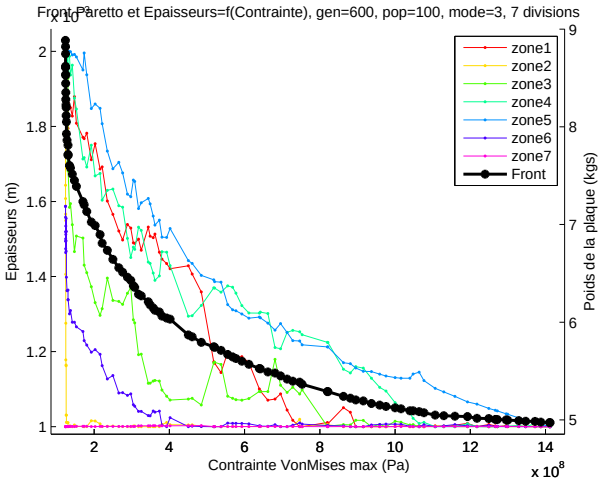


(b)

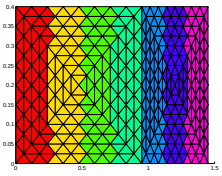


(c)

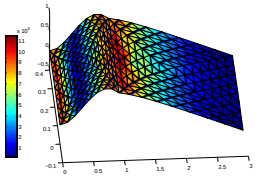
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-4}$, 512 éléments



(a)



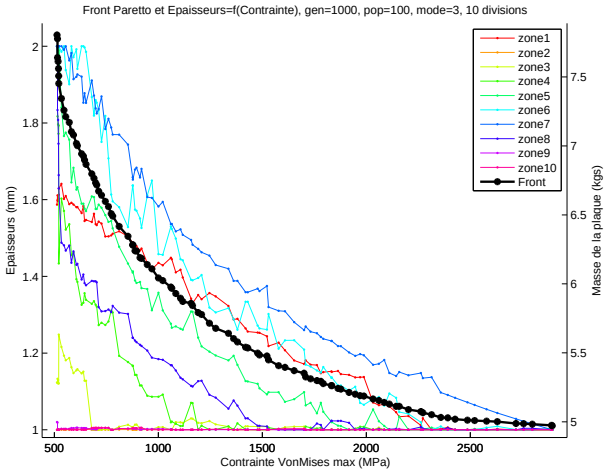
(b)



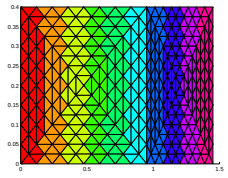
(c)

D.1.2 10 zones

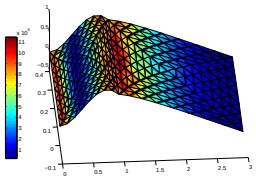
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 512 éléments



(a)

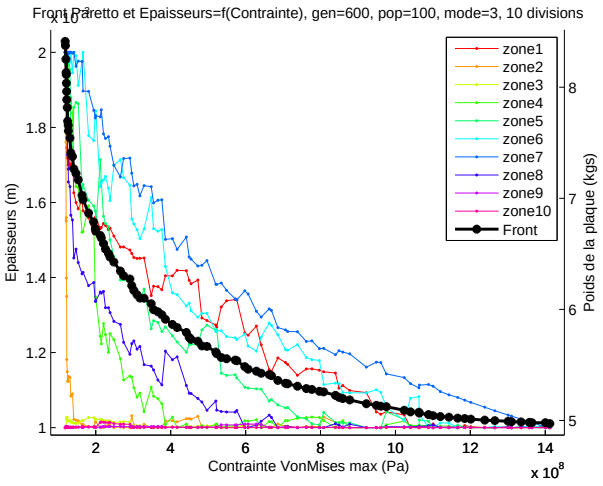


(b)

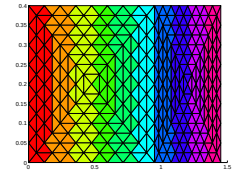


(c)

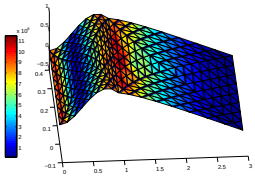
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-4}$, 512 éléments



(a)



(b)

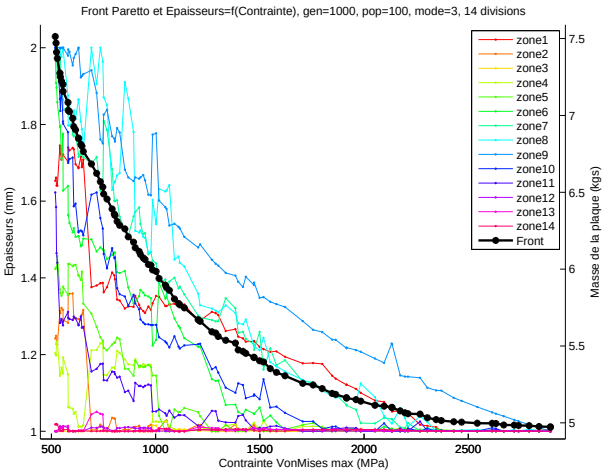


(c)

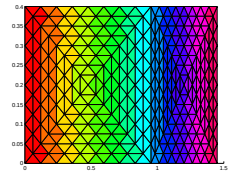
D.1.3 14 zones

Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$

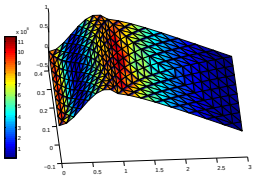
512 éléments



(a)

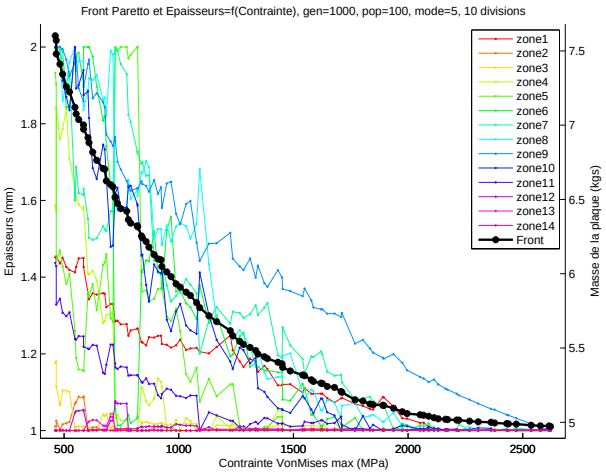


(b)

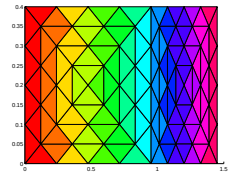


(c)

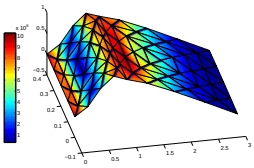
128 éléments



(a)



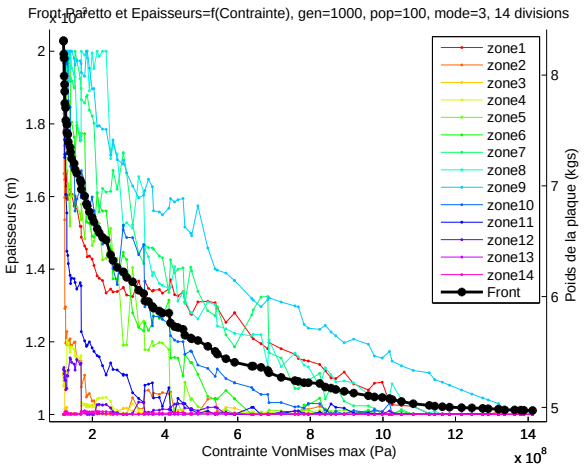
(b)



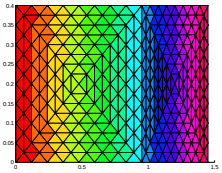
(c)

Amortissement “Rayleigh raideur” $\alpha = 2^{-4}$

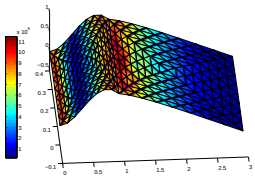
512 éléments



(a)

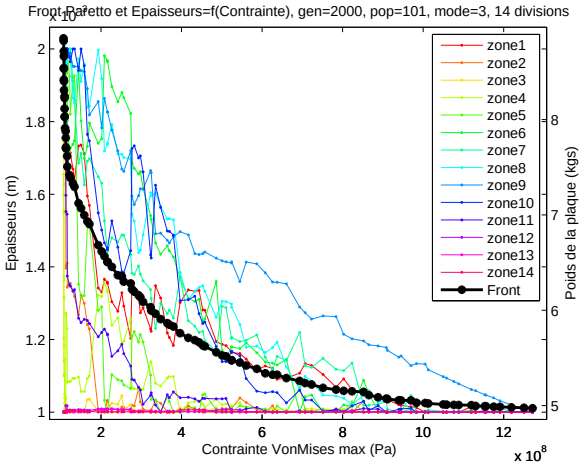


(b)

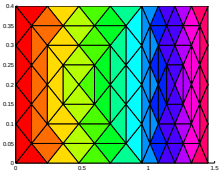


(c)

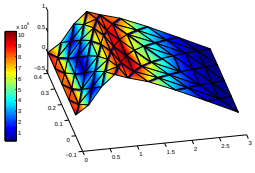
128 éléments



(a)



(b)



(c)

Annexe E

Résultats de l'optimisation d'une plaque triple

Cette annexe concerne les résultats de l'optimisation de la plaque triple (cf. figure E.1). Le MEF la représentant est composé de 768 éléments. Les caractéristiques matériaux utilisés sont résumés dans le tableau 2.1.
La configuration d'épaisseur est la même que sur la figure E.1 pour tous les calculs.
Les deux cas d'excitation sont étudiés.
Le "cas 1" qui considère une fréquence d'excitation calquée sur la fréquence propre du mode choisi a été implémenté pour les 14 premiers modes (section E.1 à E.14). Ces tests ont été lancés avec un amortissement hystérétique et un amortissement de Rayleigh "rigide".
Le "cas 3" qui considère un excitation inconnue comprise dans un intervalle connu, a également été implémenté pour des bandes fréquentielles $0-20$ Hz, $10-30$ Hz, $30-70$ Hz, $50-100$ Hz et $70-100$ Hz. Chacun des calculs a été effectué pour les trois amortissements décrits dans la section 5.7.3 : pour l'amortissement hystérétique, l'amortissement de Rayleigh Global et l'amortissement de Rayleigh "raideur". Le tableau 5.3 résume les calculs effectués et les annexes auxquelles il faut se référer.
La méthode d'optimisation utilisée est celle du MEF mixte réduit paramétré ou "MSE paramétrés" (voir section 5.4.1). Les résultats présentés ont tous convergé.
La section 5.7.4 donne plus d'explication sur la signification des graphiques.
On note que certaines grandeurs associées aux contraintes ne sont pas physiques (valeur trop élevées), en raison d'un coefficient d'amortissement choisi très faible. Cependant, la répartition des contraintes est physique et l'optimisation des paramètres reste cohérente. Des calculs similaires avec des coefficients d'amortissement plus élevés donneraient des résultats analogues avec un niveau de contrainte plus faible (tant que le coefficient d'amortissement influe peu sur les fréquences de résonance).

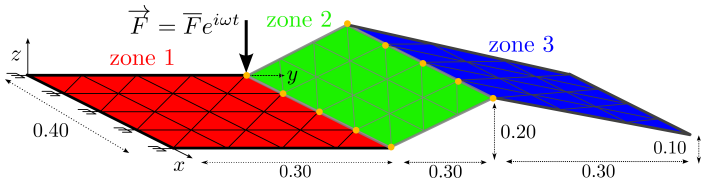
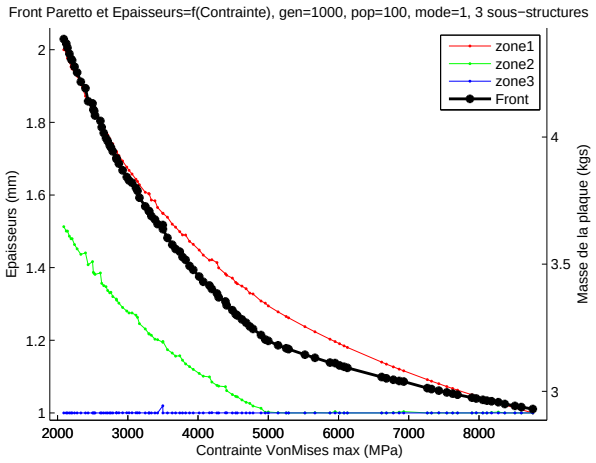


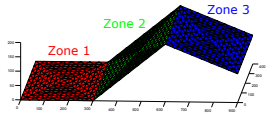
FIGURE E.1: Schéma de la structure "triple" (en m) à optimiser

E.1 Mode 1

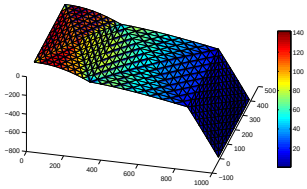
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

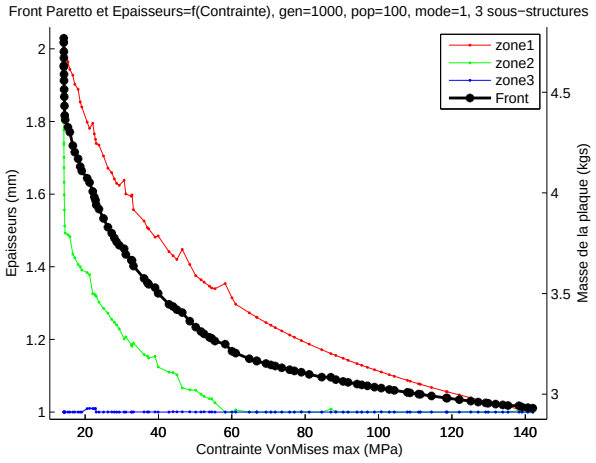


(b)

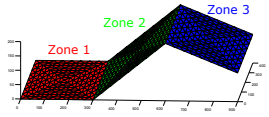


(c)

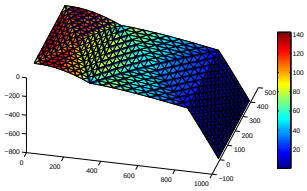
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-2}$, 768 éléments



(a)



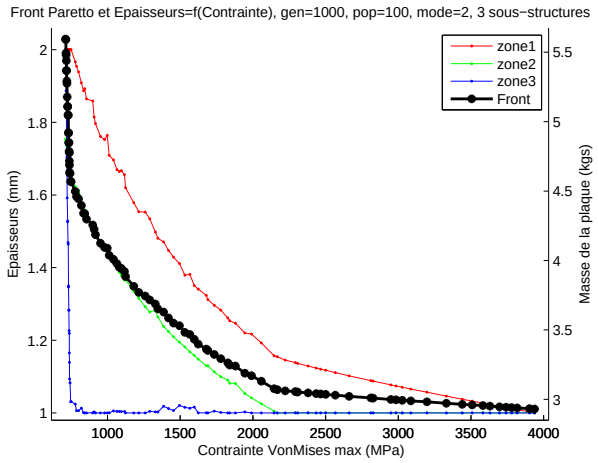
(b)



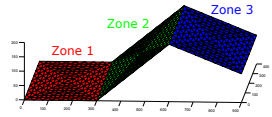
(c)

E.2 Mode 2

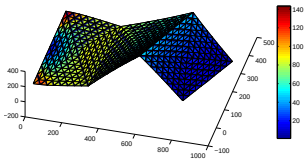
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

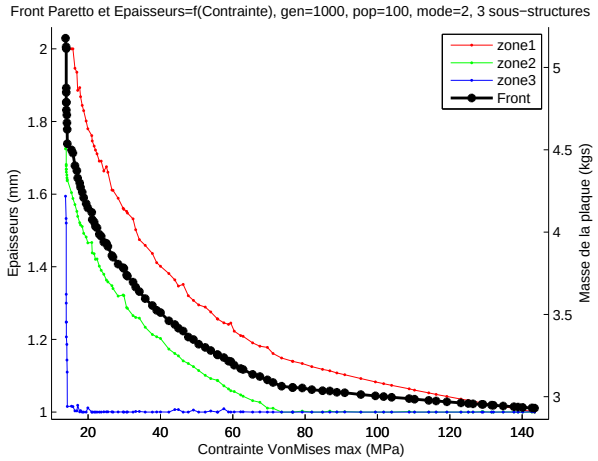


(b)

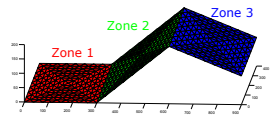


(c)

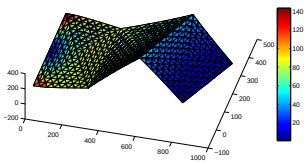
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)



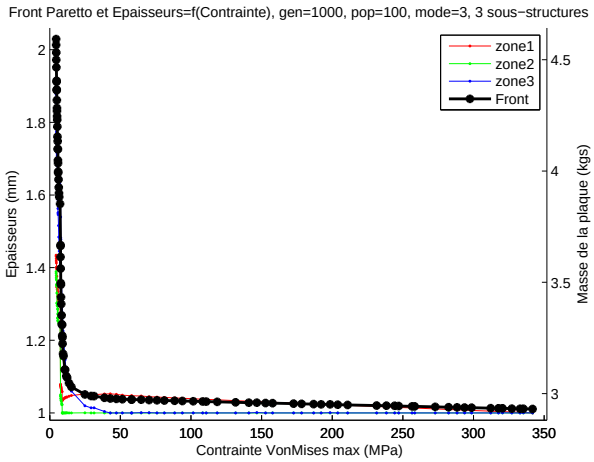
(b)



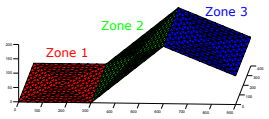
(c)

E.3 Mode 3

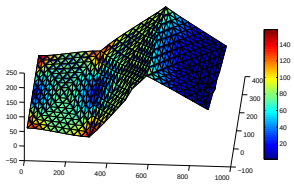
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

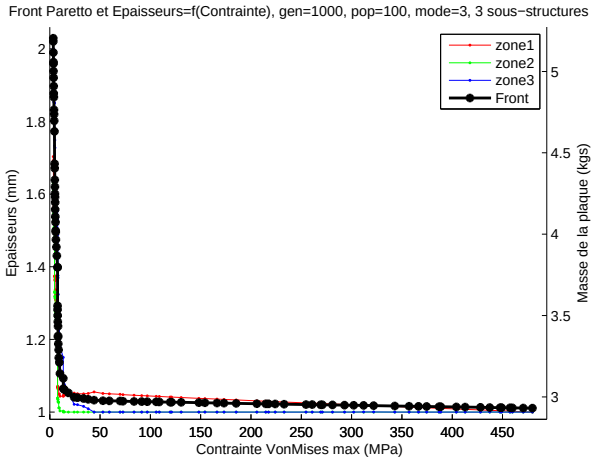


(b)

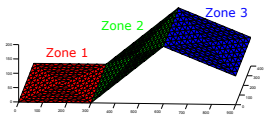


(c)

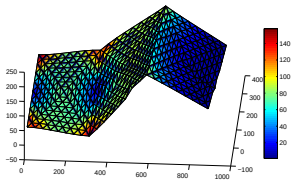
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 2^{-5}$, 768 éléments



(a)



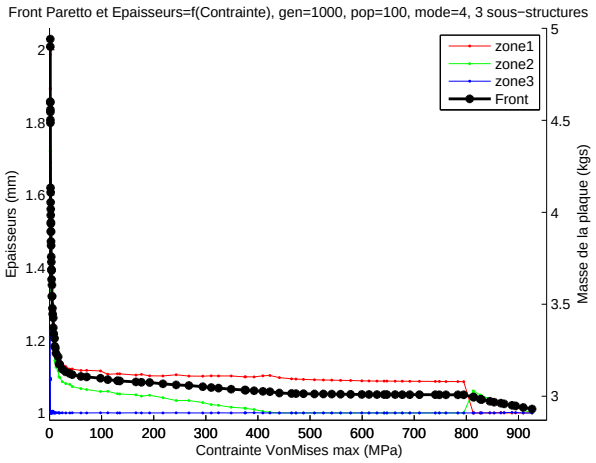
(b)



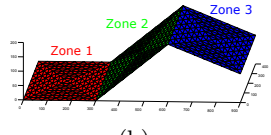
(c)

E.4 Mode 4

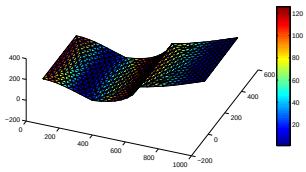
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

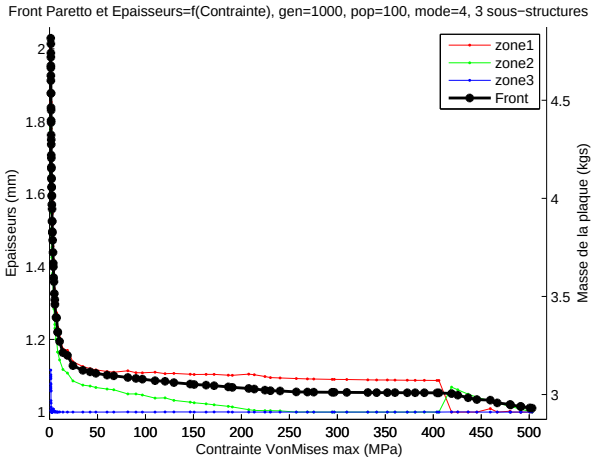


(b)

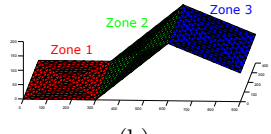


(c)

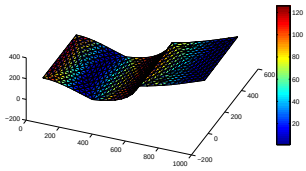
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-5}$, 768 éléments



(a)



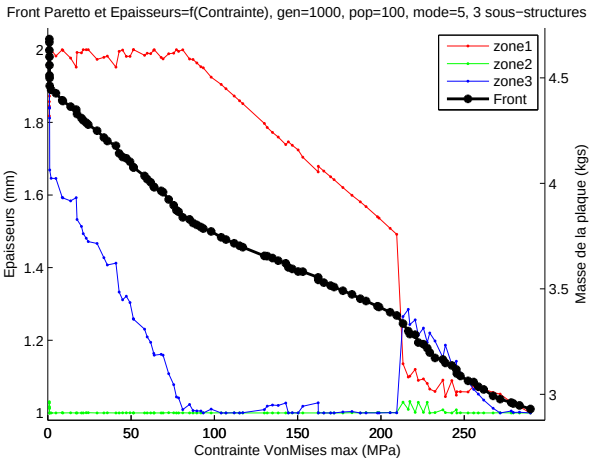
(b)



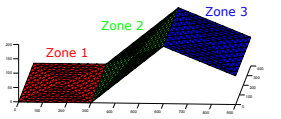
(c)

E.5 Mode 5

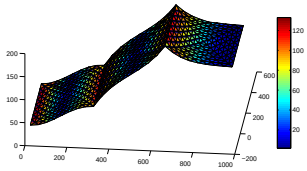
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

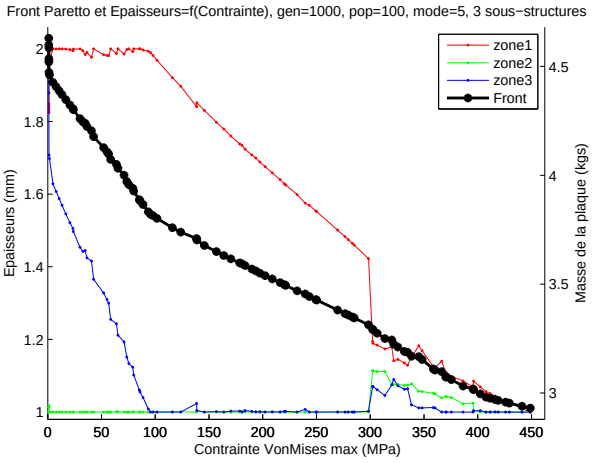


(b)

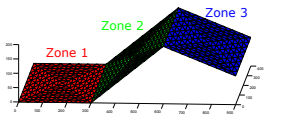


(c)

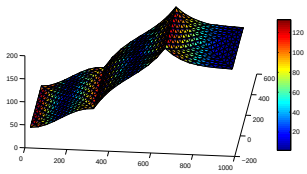
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 768 éléments



(a)



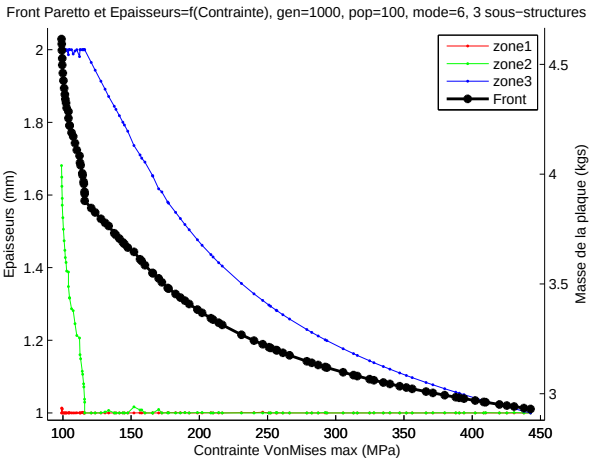
(b)



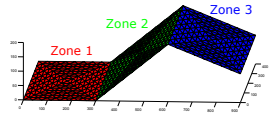
(c)

E.6 Mode 6

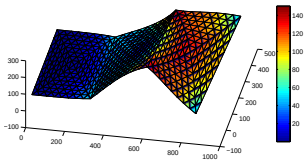
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

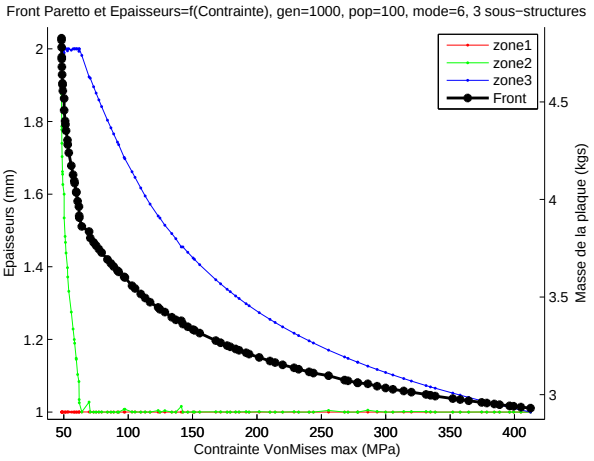


(b)

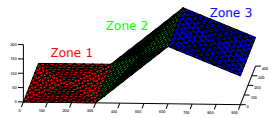


(c)

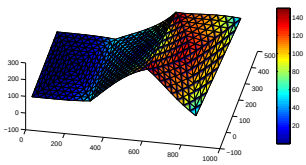
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 768 éléments



(a)



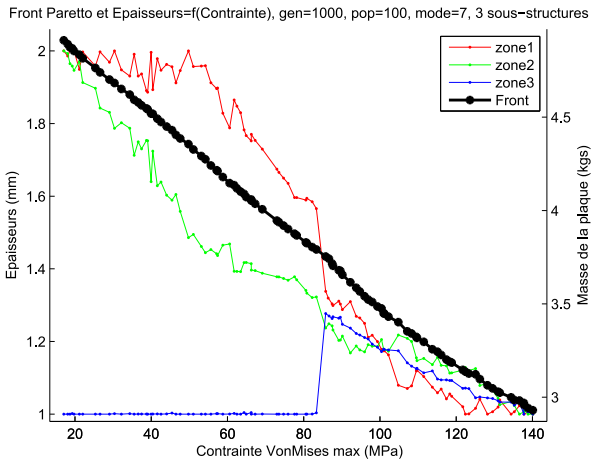
(b)



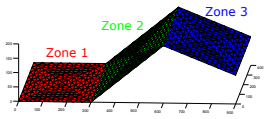
(c)

E.7 Mode 7

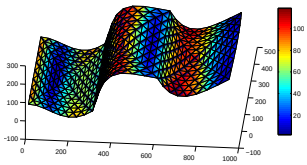
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

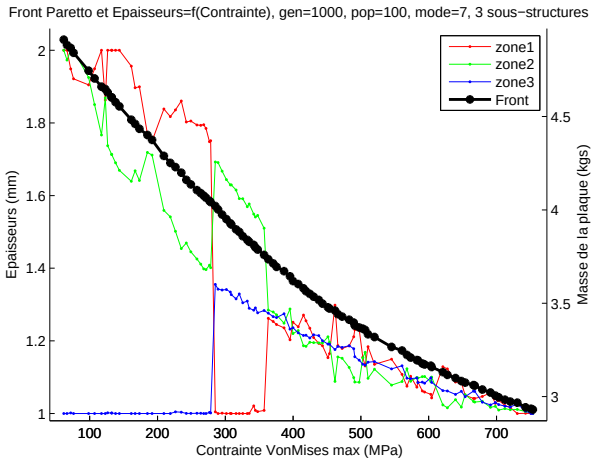


(b)

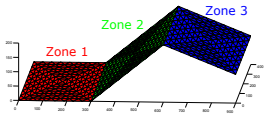


(c)

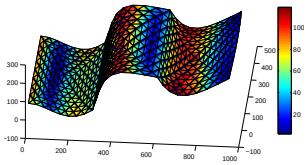
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-6}$, 768 éléments



(a)



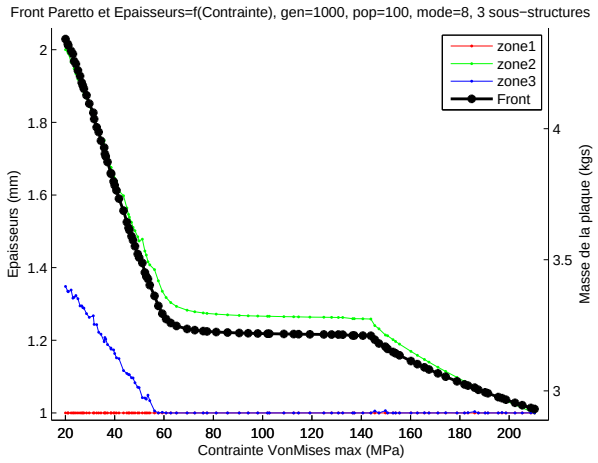
(b)



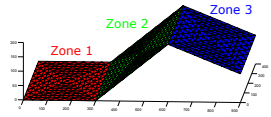
(c)

E.8 Mode 8

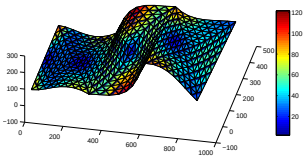
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

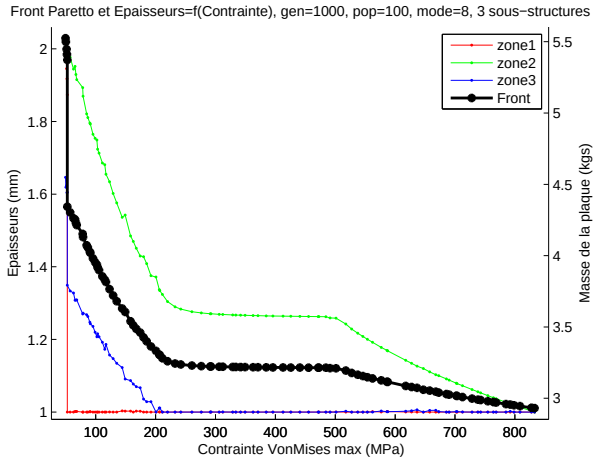


(b)

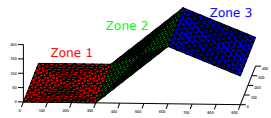


(c)

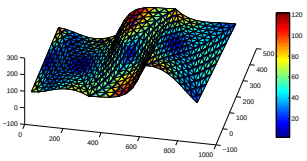
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-6}$, 768 éléments



(a)



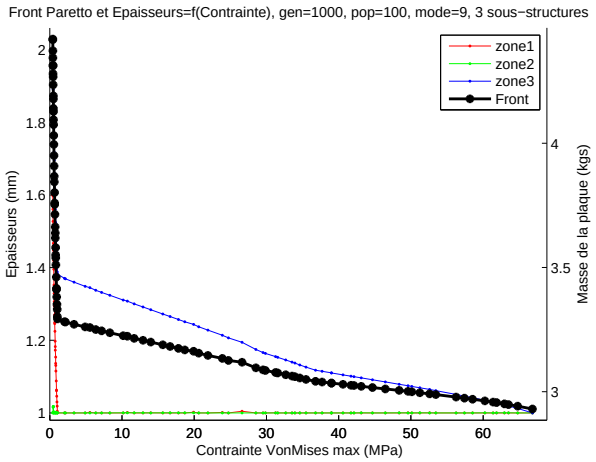
(b)



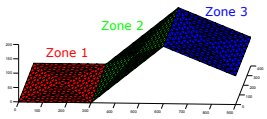
(c)

E.9 Mode 9

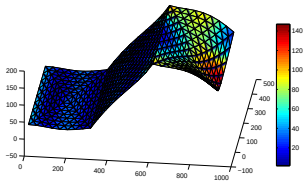
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

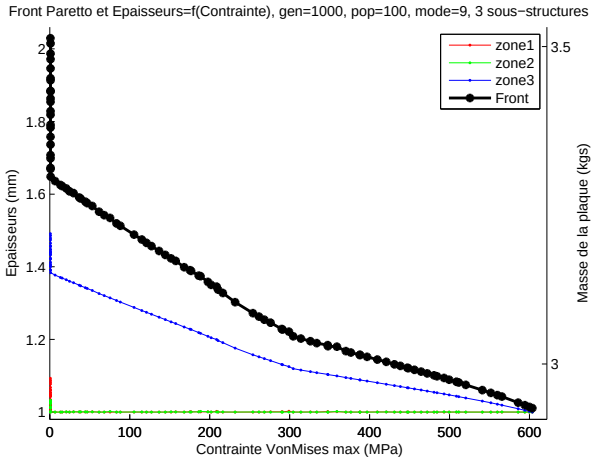


(b)

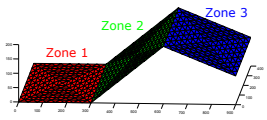


(c)

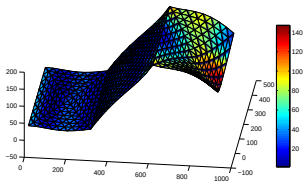
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 4^{-7}$, 768 éléments



(a)



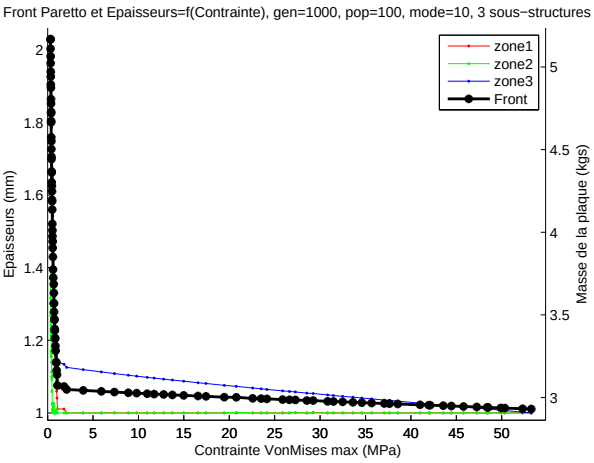
(b)



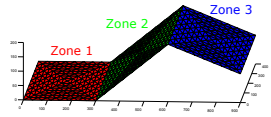
(c)

E.10 Mode 10

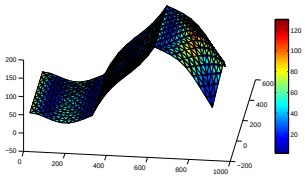
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

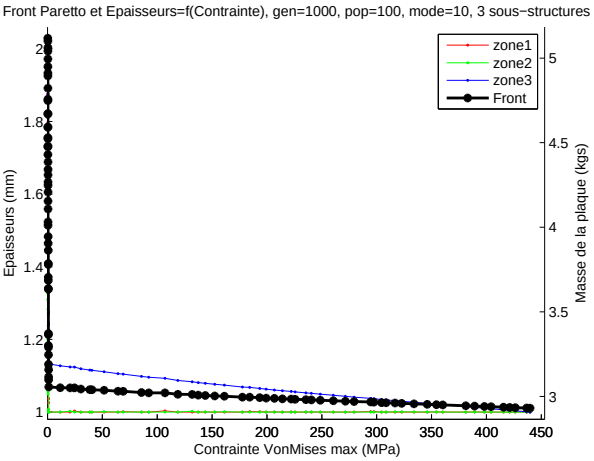


(b)

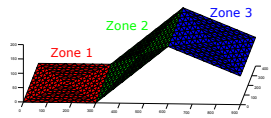


(c)

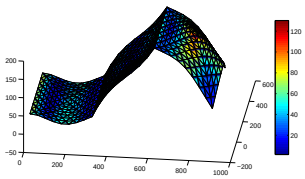
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 4^{-7}$, 768 éléments



(a)



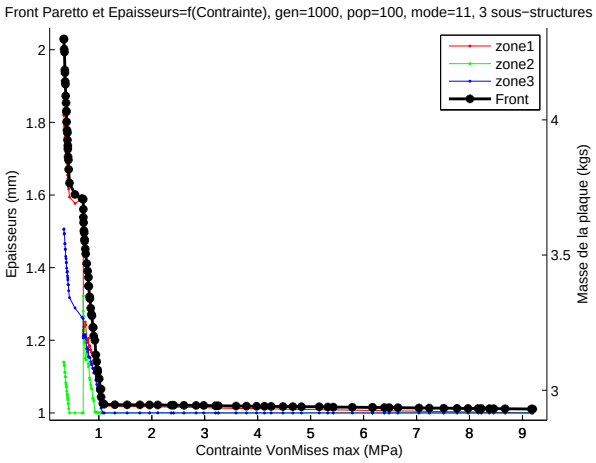
(b)



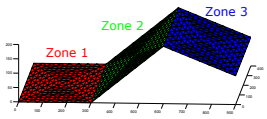
(c)

E.11 Mode 11

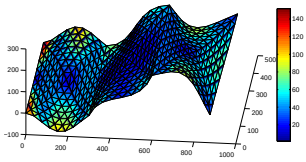
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

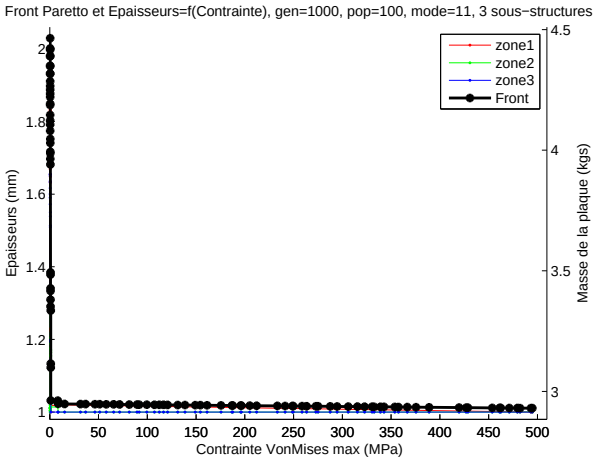


(b)

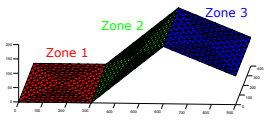


(c)

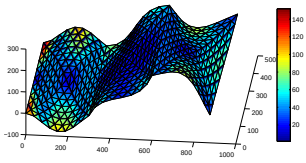
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-8}$, 768 éléments



(a)



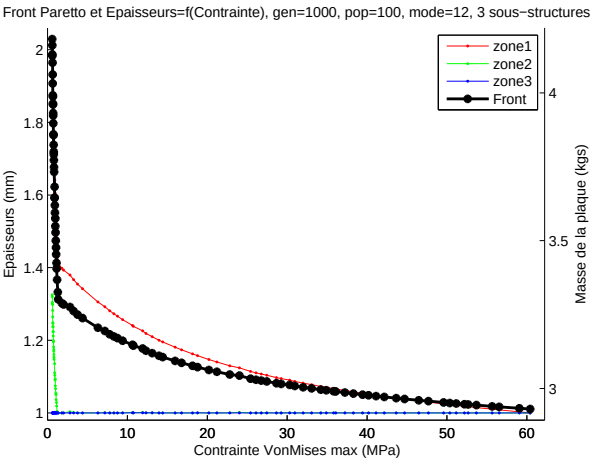
(b)



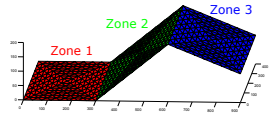
(c)

E.12 Mode 12

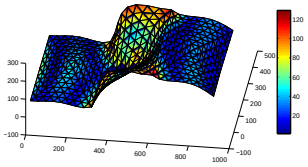
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

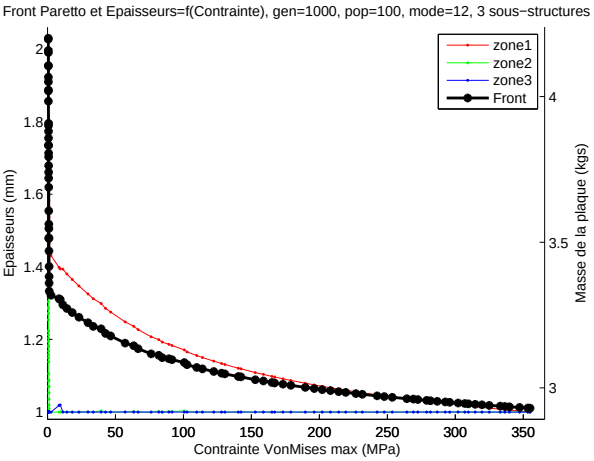


(b)

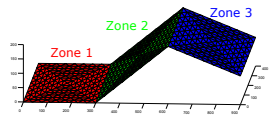


(c)

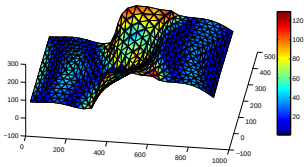
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 4^{-7}$, 768 éléments



(a)



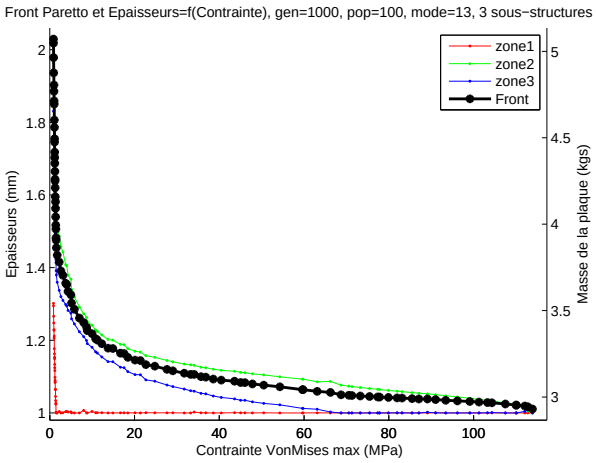
(b)



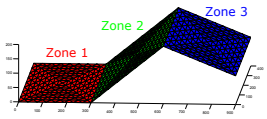
(c)

E.13 Mode 13

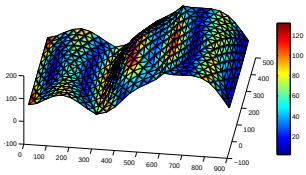
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

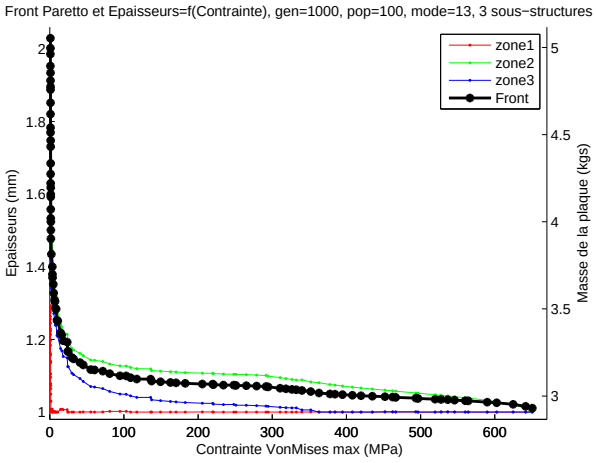


(b)

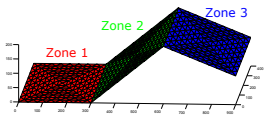


(c)

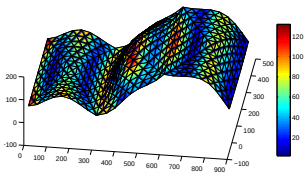
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 4^{-7}$, 768 éléments



(a)



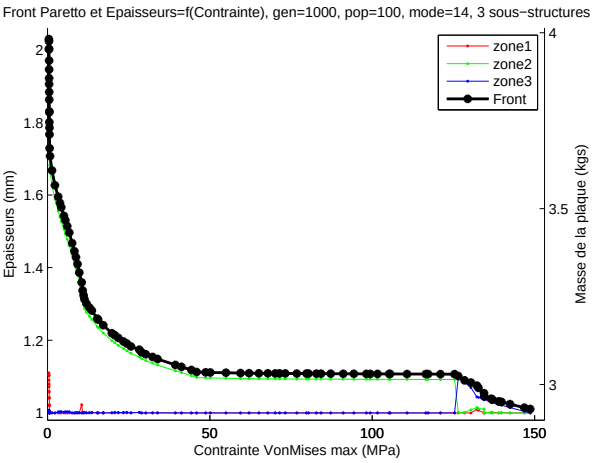
(b)



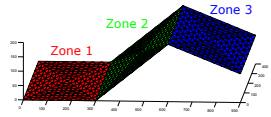
(c)

E.14 Mode 14

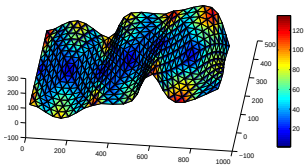
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



(a)

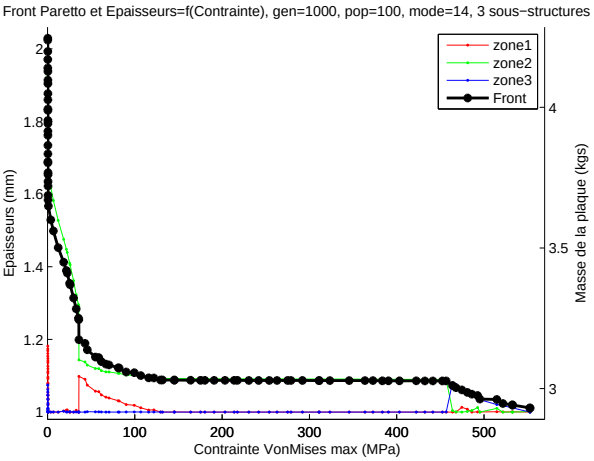


(b)

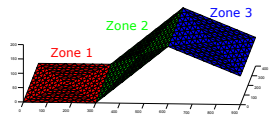


(c)

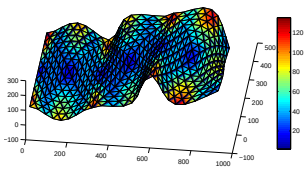
Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 6^{-7}$, 768 éléments



(a)



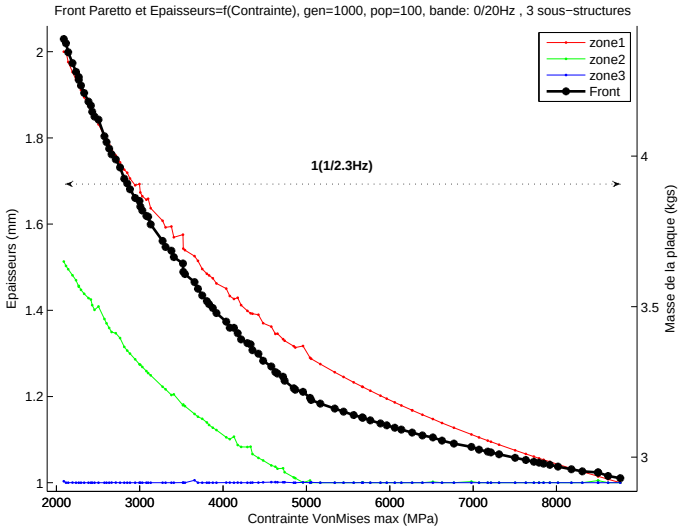
(b)



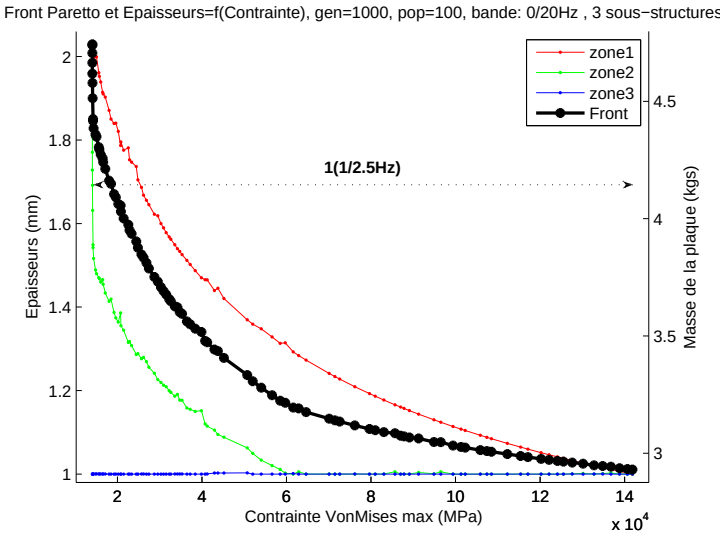
(c)

E.15 Bande 0-20 Hz, 0-40 Hz et 0-70 Hz

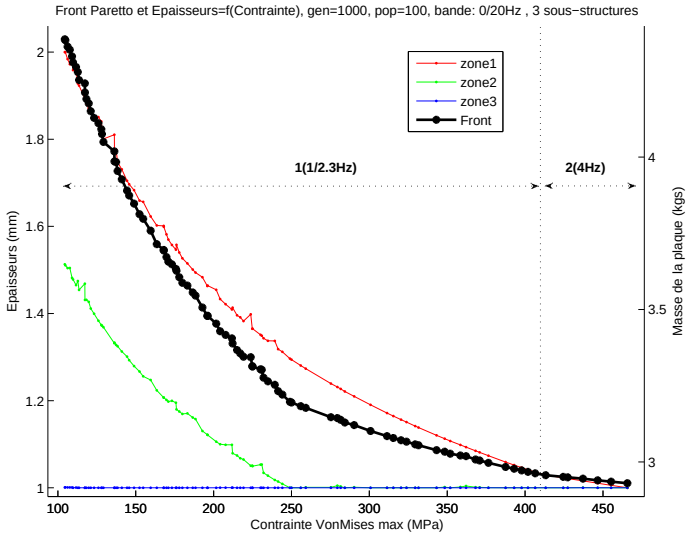
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 768 éléments

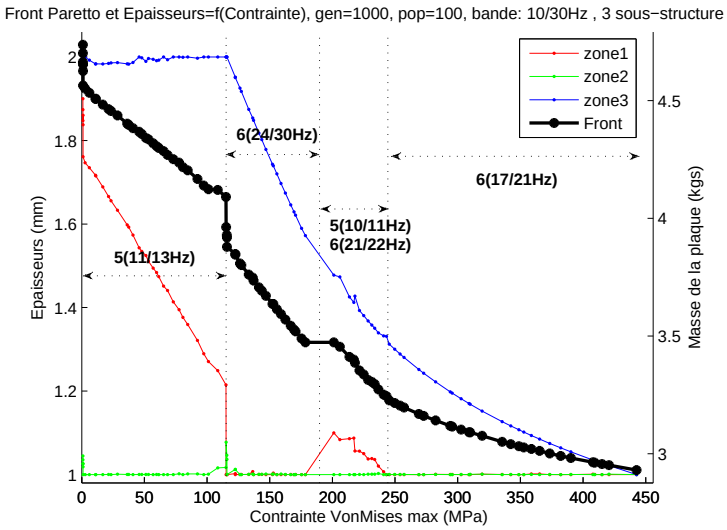


Amortissement de Rayleigh global (bande fréquentielle), 768 éléments

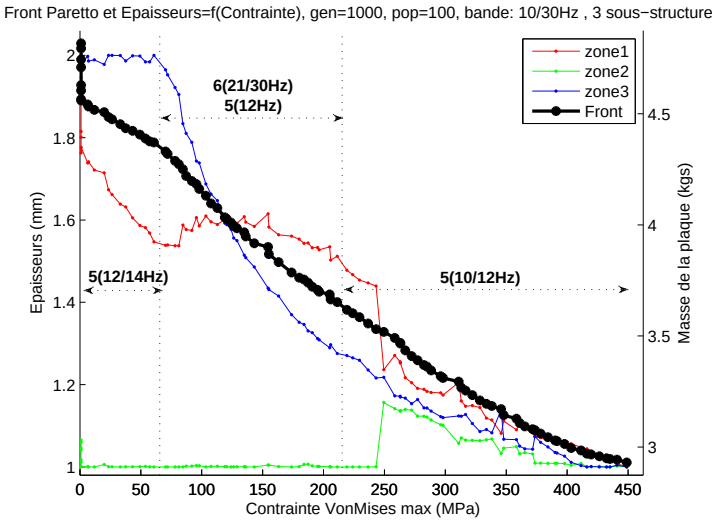


E.16 Bande 10-30 Hz

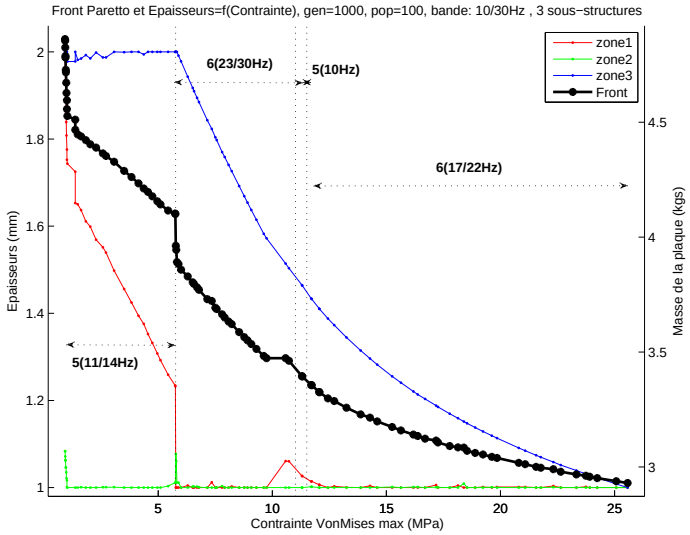
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-5}$, 768 éléments

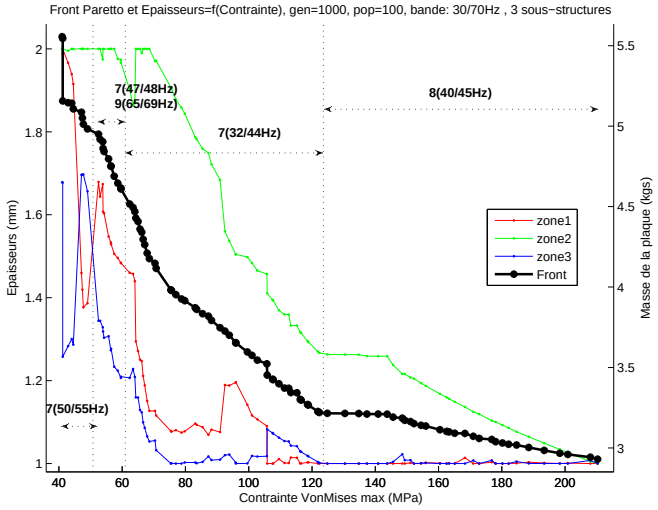


Amortissement de Rayleigh global (bande fréquentielle), 768 éléments

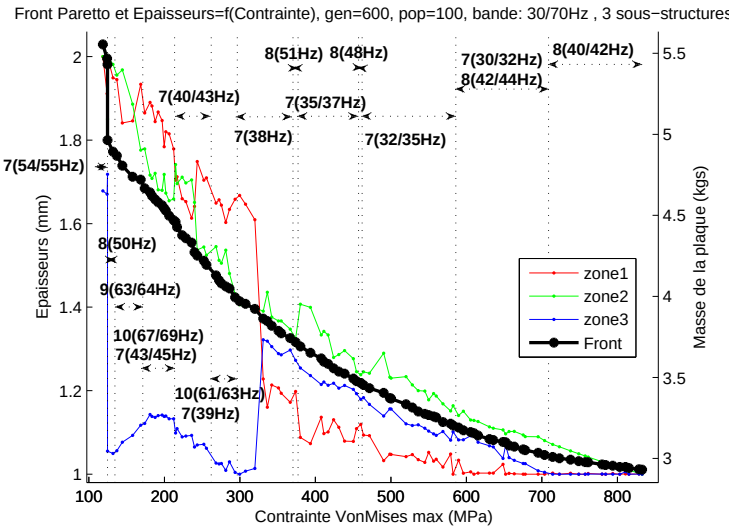


E.17 Bande 30-70 Hz

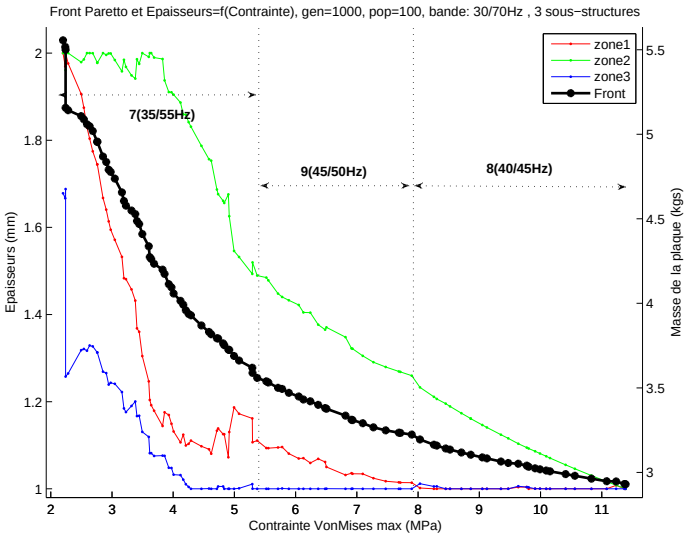
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 1^{-6}$, 768 éléments

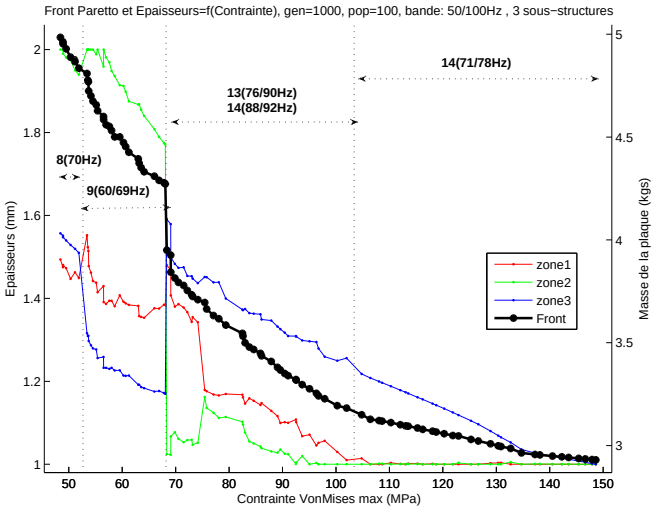


Amortissement de Rayleigh global (bande fréquentielle), 768 éléments

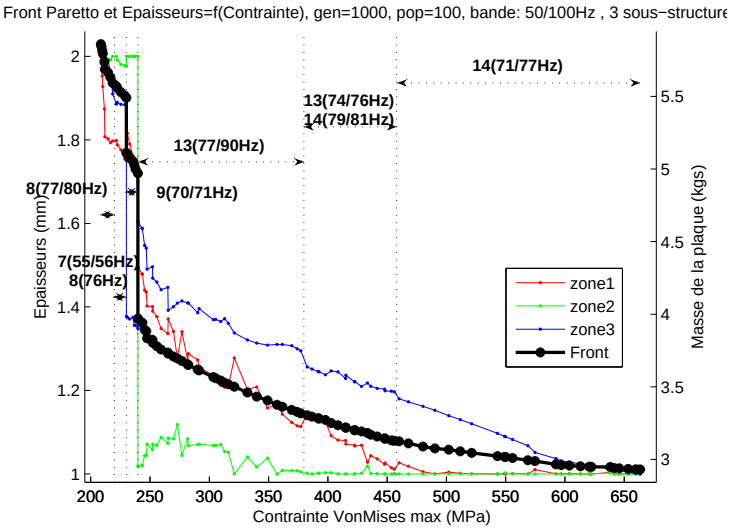


E.18 Bande 50-100 Hz

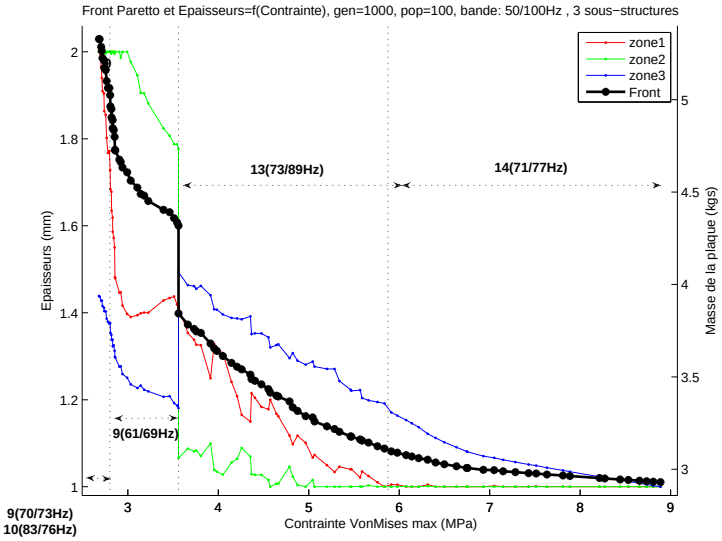
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-7}$, 768 éléments

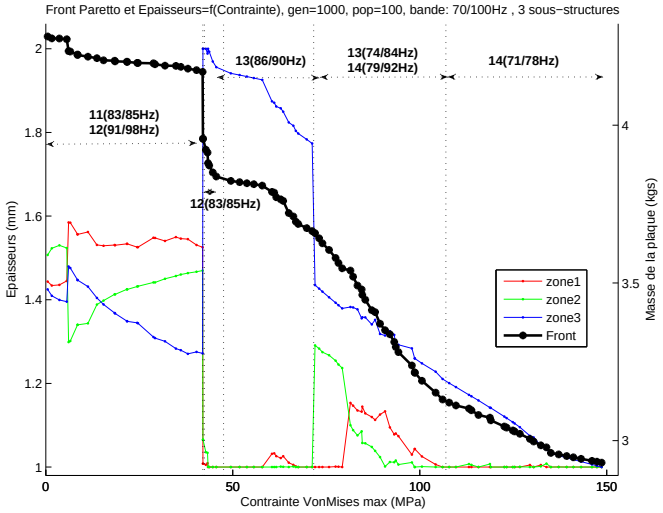


Amortissement de Rayleigh global (bande fréquentielle), 768 éléments

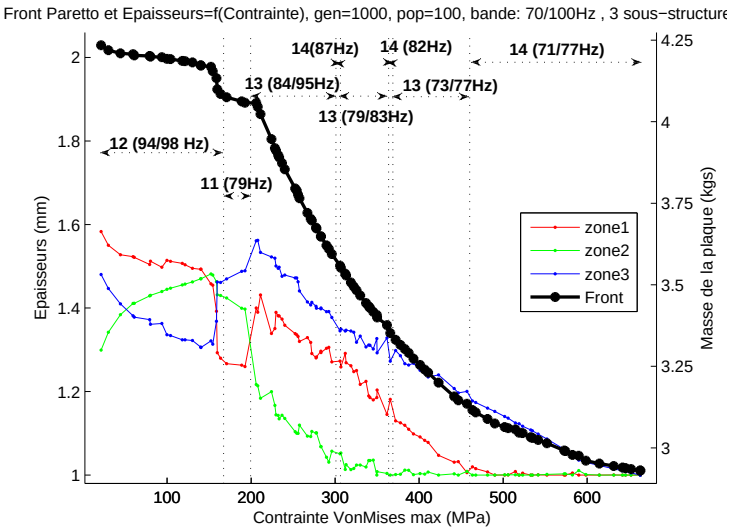


E.19 Bande 70-100 Hz

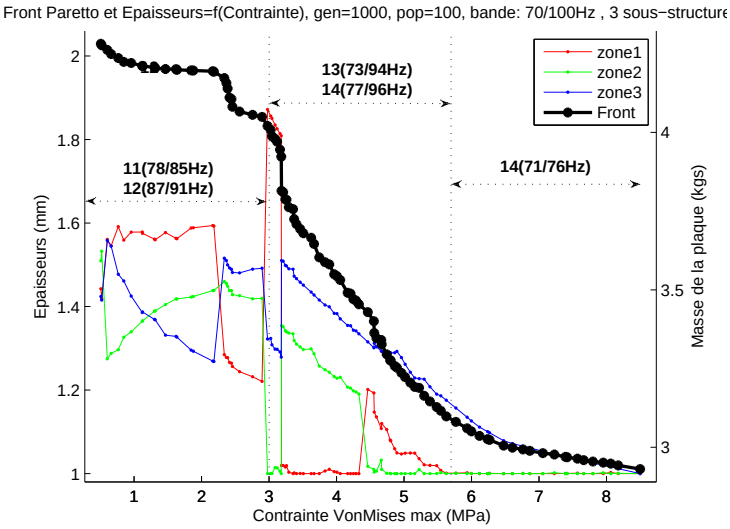
Amortissement Hystérétique $\xi = 1^{-3}$, 768 éléments



Amortissement "Rayleigh raideur" $\alpha = 5^{-7}$, 768 éléments



Amortissement de Rayleigh global (bande fréquentielle), 768 éléments



Bibliographie

[AA09] F.S. Almeida and A.M. Awruch. Design optimization of composite laminated structures using genetic algorithms and finite element analysis. *Composite and Structures*, 88 :443–454, 2009.

[ABD84] D.N. Arnold, F. Brezzi, and J.Jr. Douglas. Peers : A new mixed finite element for plane elasticity. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 1(2) :347–367, 1984.

[ADB98] R. Ayad, G. Dhatt, and J.L. Batoz. A new hybrid variational approach for reissner-mindlin plates. the misp model. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 42 :1149–1179, 1998.

[AF88] D.N Arnold and R.S. Falk. A new mixed formulation for elasticity. *Numerische Mathematik*, 53(1-2) :13–30, 1988.

[AFB12] S. Arnout, M. Firl, and K.U. Bletzinger. Parameter free shape and thickness optimization considering stress response. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 45 :801–814, 2012.

[AMMS+09] A.L. Araujo, P. Martins, C.M. Mota Soares, Mota Soares C.A., and J. Herskovits. Damping optimization of viscoelastic laminated sandwich composite structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39 :569–579, 2009.

[Arg65] J.H. Argyris. Continua and discontinua. *Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. mech.*, pages 11–190, 1965.

[AS07] M. Abouhamze and M. Shakeri. Multi-objective stacking sequence optimization of laminated cylindrical panels using a genetic algorithm and neural networks. *Composite and Structures*, 81 :253–263, 2007.

[AW03] D.N. Arnold and R. Winther. Mixed finite element for elasticity in the stress-displacement formulation. 329 :33–42, 2003.

[BA05] A. Benjeddou and O. Andrianarison. A thermopiezoelectric mixed variational theorem for smart, multilayered composites. *Computers and Structures*, 83 :1266–1276, 2005.

[Bab73] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.

[Bal96] E. Balmes. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *Proceeding of IMAC*, pages 204–210, 1996.

[Bam66] R. M. Bamford. A modal combination program for dynamic analysis of structures. Technical report, NASA-CR-82877, NASA, Jet Propulsion Laboratory, 1966.

[BBR00] K.U. Bletzinger, M. Bischoff, and E. Ramm. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite element. *Computers and Structures*, 75 :321–334, 2000.

[BD72] J. Bron and G. Dhatt. Mixed quadrilateral elements for bending. *AIAA Journal*, 10 :1359–1361, 1972.

[BD85] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. Short communnication a four-node plate bending element based on mindlin/reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 21 :367–383, 1985.

[BD86] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 22 :697–722, 1986.

[Ben00] A. Benjeddou. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptative structural elements : a survey. *Computers and Structures*, 76 :347–363, 2000.

[Bes06] S. Besset. *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2006.

[BFLW10] K.U. Bletzinger, M. Firl, J. Linhard, and R. Wüchner. Optimal shapes of mechanically motivated surfaces. *Computational Methods Applied for Mechanical Engineering*, 199 :324–33, 2010.

[BJ08] S. Besset and L. Jézéquel. Dynamic sub-structuring based on a double modal analysis. *Journal of Vibration and acoustics*, 130(1) :011008, 2008.

[BJBT12] D. Brizard, L. Jézéquel, S. Besset, and B. Troclet. Determinental method for locally modified structures. application to the vibration damping of a space launcher. *Computational Mechanics*, 20 :631–644, 2012.

[Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue Francaise d'Automatique, informatique, rechefceh opérationnelle, analyse numérique*, 8(2) :129–151, 1974.

[BT95] T. Blickle and L. Thiele. A comparison of selection schemes used in genetic algorithms. Technical report, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), 1995.

[Car97] E. Carrera. An improved reissner-mindlin-type model for the electromechanical analysis of multilayered plates including piezo-layers.

Journal of Intelligent Materials Systems and Structures, 8 :232–248, 1997.

[Car98] E. Carrera. Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plate analysis. *AIAA Journal*, 36 :830–839, 1998.

[Car00] E. Carrera. An assesment of mixed and classical theories for the thermal stress analysis of orthotropic multilayered plates. *Journal of Thermal Stresses*, 23 :797–831, 2000.

[Car01] E. Carrera. Developments, ideas, and evaluations based upon reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 54 :301–329, 2001.

[CB68] R.R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.

[CB07] E. Carrera and M. Boscolo. Classical and mixed finite element for static and dynamic analysis of piezoelectric plates. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 70 :1135–1181, 2007.

[CC76] R.R. Craig and C.J. Chang. A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. Technical report, NASA, 1976.

[CC77] R.R. Craig and C.J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. 77 :89–99, 1977.

[CC94] K.K. Choi and K.H. Chang. A study of design velocity field computation for shape optimal design. *Finite Element Analysis Description*, 15 :317–341, 1994.

[CD02a] E. Carrera and L. Demasi. Classical and advanced multilayered plate elements based upon pvd and rmvt. part 1 : Derivation of finite element matrices. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 55 :191–231, 2002.

[CD02b] E. Carrera and L. Demasi. Classical and advanced multilayered plate elements based upon pvd and rmvt. part 2 : Numerical implementation. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 55 :253–291, 2002.

[CFF+04] L. Costa, L. Fernandes, I. Figueiredo, J. Judice, R. Leal, and P. Oliveira. Multiple- and single-objective approaches to laminate optimization with genetic algorithms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27 :55–65, 2004.

[CH09] S. Cho and S.H. Ha. Isogeometric shape design optimization-exact geometry and enhanced sensitivity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38 :53–70, 2009.

[CHK77] J.D. Collins, W.C. Hurty, and B. Kennedy. Review and development of modal synthesis techniques. Technical report, NASA-CR-2781, NASA, 1977.

[Cle04] M. Clerc. *L'optimisation par essaims particulaires.* Hermès Science, 2004.

[CP93] M. Cho and R. Parmerter. Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *AIAA Journal*, 31(7) :1299–1306, 1993.

[Cra81] R.R Craig. Generalized substructure coupling procedure for damped systems. *Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 20 :442–444, Atlanta, 1981.

[Cra89a] R.R Craig. Component mode synthesis for model order reduction of non-classically damped systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 12 :577–584, 1989.

[Cra89b] R.R. Craig. A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis methods. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 12 :577–584, 1989.

[Cra00] R.R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analysis : an overview. *AIAA Journal*, 1573, 2000.

[CS72] A. Chatterjee and A.V. Setlur. A mixed finite element formulation for plate problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 4 :67–84, 1972.

[CT65] R.W. Clough and J.I. Tocher. Finite element stiffness matrix for the analysis for plate bending. *Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. mech.*, pages 515–546, 1965.

[DAPM00] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization : Nsga-2. *Notes in Computer Science*, 2000.

[DGCZ08] L. Dai, Z.Q. Guan, B.S. Chen, and H.W. Zhang. An open platform of shape design optimization for shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35 :609–622, 2008.

[DGO01a] D. Dumitrescu, C. Groşan, and M. Oltean. A new evolutionary adaptative representation paradigm. *Studia Universitas Babes-Boylai, Seria Informatica*, XLVI(1) :15–30, 2001.

[DGO01b] D. Dumitrescu, C. Groşan, and M. Oltean. Simple multiobjective evolutionary algorithm. In *Seminars on Computer Science, Faculty of Mathematics and Computer Science, Babeş-Boylai University of Cluj-Napoca*, 2001.

[DKM11] P.D. Dunning, H.A. Kin, and G. Mullineux. Investigation and improvement of sensitivity computation using the area-fraction weighted fixed grid fem and structural optimization. *Finite Element Analysis Description*, 200 :3439–3452, 2011.

[dKRV08] D. de Klerk, D.J. Rixen, and S.N. Voormeeren. Genral framework for dynamic substructuring : History review, and classification of thechniques. *AIAA Journal*, 46(5) :1169–1181, 2008.

[DMID99] M. Duan, Y. Miyamoto, S. Iwasaki, and H. Deto. Numerical implementation of hybrid-mixed finite element model for reissner-mindlin plates. *Finite Element in Analysis and Design*, 33 :167–185, 1999.

[dMU06] S. de Miranda and F. Ubertini. A simple hybrid stress element for shear deformable plates. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 65 :808–833, 2006.

[DPAM02] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-2. *Transactions on evolutionary computation*, 6 (2), 2002.

[FdV65] B. Fraeijs de Veubeke. *Displacement and equilibrium models in the finite element method, chapter 9.* John Wiley & Sons, 1965.

[FdVS68] B. Fraeijs de Veubeke and G. Sander. An equilibrium model for plate bending. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :447–768, 1968.

[FT14a] N. Fantuzzi and F. Tornabene. Strong formulation finite element method for arbitrarily shaped laminated plates - part 1. theoretical analysis. *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 1 :125–143, 2014.

[FT14b] N. Fantuzzi and F. Tornabene. Strong formulation finite element method for arbitrarily shaped laminated plates - part 2. numerical analysis. *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 1 :145–175, 2014.

[FTVF14] N. Fantuzzi, F. Tornabene, E. Viola, and A.J.M. Ferreira. A strong formulation finite element method (sfem) based on rbf and gdq techniques for the static and dynamic analyses of laminated plates of arbitrary shape. *Meccanica*, 49 :2503–2542, 2014.

[GD02] C. Groşan and D. Dumitrescu. A comparison of multiobjective evolutionary algorithms. *Acta Universitatis Apulensis*, 4, 2002.

[GL76] M. Gellert and M.E. Laursen. Formulation and convergence of a mixed finite element method applied to elastic arches of arbitrary geometry and loading. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 7 :285–302, 1976.

[GLMSMSR04a] R. Garcia Lage, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, and J.N. Reddy. Analysis of adaptative plate structures by mixed layerwise finite elements. *Composite and Structures*, 66 :269–276, 2004.

[GLMSMSR04b] R. Garcia Lage, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, and J.N. Reddy. Modelling of piezolamited plates using layerwise mixed elements. *Computers and Structures*, 82 :1849–1863, 2004.

[GS72] S. Goldenberg and M. Shapiro. A study of modal coupling procedures for the space shuttle. Technical report, NASA-CR-112252, NASA, 1972.

[GS00] M.J. Garcia and G.P. Steven. Fixed grid finite element analysis in structural design and optimization. In *Proc. 2nd ASMO/AIAA Internet Conf Approx Fast Reneal Eng Optim*, volume 58, pages 643–660, 2000.

[GS03] M.J. Garcia and G.P. Steven. Knowledge-based algorithms in fixed-grid ga shape optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 58 :643–660, 2003.

[GZWW11] X Guo, W.S. Zhang, M.Y. Wang, and P. Wei. Stress-related topology optimization via level set approach. *Computational Method Applied for Mechanical Engineering*, 200 :3439–3452, 2011.

[HB85] A.L. Hale and L.A. Bergman. The dynamic synthesis of general non-conservative structures from separately identified substructure models. *Journal of Sound and Vibration*, 98(3) :431–446, 1985.

[HCC10] S.H. Ha, K.K. Choi, and S. Cho. Numerical method for shape optimization using t-spline based isogeometric method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42 :417–428, 2010.

[HCH78] T.J.R. Hughes, M. Cohen, and M. Haron. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and Design*, 46 :203–222, 1978.

[Hel14] E. Hellinger. Die allgemeinen ansatze der mechanik der kontinua. *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften*, 4, 1914.

[Her65] L.R. Herrmann. A bending analysis for plates. *Proceeding of the conference on matrix methods in structural mechanics, A.F.F.D.L-TR-66-88*, pages 577–604, 1965.

[Her67] L.R. Herrmann. Finite element bending analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E EM5*, 93 :13–26, 1967.

[HG86] R.T. Haftka and R.V. Grandhi. Structural shape optimization - a survey. *Computational Methods Applied for Mechanical Engineering*, 57 :91–106, 1986.

[HM80] A.L. Hale and L. Meirovitch. A general substructure synthesis method for the dynamic simulation of complex structures. *Journal of Sound and Vibration*, 69(2) :309–326, 1980.

[HM82] A.L. Hale and L. Meirovitch. A general procedure for improving substructures representation in dynamic synthesis. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2) :269–287, 1982.

[Hur64] W.C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems by component mode synthesis. Technical report, NASA-CR-53057, NASA, Jet Propulsion Laboratory, 1964.

[Hur65] W.C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using comonent modes. *AIAA Journal*, 3(4) :678–685, 1965.

[JS94a] L. Jézéquel and H.D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part 1 : Theory of hybrid models and modal truncation methods. *Journal of Applied mechanics*, 61 :100–108, 1994.

[JS94b] L. Jézéquel and H.D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part 2 : numerical test analysesd experimental identification of hybrid models. *Journal of Applied Mechanics*, 61(1) :109–116, 1994.

[Jé85] L. Jézéquel. *Synthèse modale : théorie et extensions.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1985.

[KBCB05] F. Koschnick, M. Bischoff, N. Camprubì, and K.U. Bletzinger. The discrete strain gap method and membrane locking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :2444–2463, 2005.

[KC99] J.D. Knowles and D.W. Corne. The pareto archived evolution strategy : A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimization. *Congress on Evolutionary Computation (CEC 99)*, 1, Piscataway :98–105, 1999.

[KC05] N.H. Kim and Y.M. Chang. Eulerian shape design sensitivity analysis and optimization with a fixed grid. *Computational Method Applied for Mechanical Engineering*, 194 :3291–3314, 2005.

[KDB09] R. Kudikala, K. Deb, and B. Bhattacharya. Multi-objective optimization of piezoelectric actuator placement for shape control of plates using genetic algorithms. *Journal of Mechanical Design*, 131 :091007–1–11, 2009.

[KHK05] F.V. Keulen, R. Haftka, and N.H. Kim. Review of options for structural design sensitivity analysis. part 1 : Linear systems. *Computational Methods Applied for Mechanical Engineering*, 194 :3213–3243, 2005.

[LBT11] C. Le, T. Bruns, and D. Tortorelli. A gradient-based parameter-free approach to shape otpimization. *Computational Methods Applied for Mechanical Engineering*, 200 :985–996, 2011.

[LCW77] K.H. Lo, R.M. Christensen, and M. Wu. A high-order theory of plate deformation—part 2 : Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44 :669–676, 1977.

[LJ97] T. Lindby and Santos. J.L.T. 2-d and 3-d shape optimization using mesh velocities to integrate analytical sensitivities with associative cad. *Structural Optimization*, 13 :213–222, 1997.

[Lov88] A.E.H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 17 :491–549, 1888.

[LP06] N.D. Lagaros and V. Papadopoulos. Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6948–6964, 2006.

[LR86] S.W. Lee and J.J. Rhiu. A new efficient approach to the formulation of mixed finite element model for structural analysis. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 21 :1629–1641, 1986.

[LZ09] H. Li and Q. Zhang. Multiobjective optimization problems with complicated pareto sets, moead/d and nsga-2. *Transactions on evolutionary computation*, 13 :284–302, 2009.

[Mac71] R.H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1 :581–601, 1971.

[MH82] L. Meirovitch and A.L. Hale. A general dynamic synthesis for structures with discrete substructures. *Journal of Sound and Vibration*, 85(4) :445–457, 1982.

[Min51] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexual motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951.

[NXLTHNT10] H. Nguyen-Xuan, G.R. Liu, C. Thai-Hoang, and T. Nguyen-Thoi. An edge-based smoothed finite element method (es-fem) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of reissner-mindlin plates. *Computational Methods Applied for Mechanical Engineering*, 199 :471–489, 2010.

[OK98] M.H. Omurtag and F. Kadioglu. Free vibration analysis of orthotropic plates resting on pasternak foundation by mixed finite element formulation. *Computers and Structures*, 67 :253–265, 1998.

[PCK83] T.H.H. Pian, D.P. Chen, and D. Kang. A new formulation of hybrid/mixed finite element. *Computers & Structures*, 16 :81–87, 1983.

[PD10] H.S. Park and X.P. Dang. Structural optimization based on cad-cae integration and metamodeling techniques. *Computer-Aided Design*, 42 :889–902, 2010.

[PF00] E.M.B.R. Pereira and J.A.T. Freitas. Numerical implementation of hybrid-mixed finite element model for reissner-mindlin plates. *Computers and Structures*, 74 :323–334, 2000.

[PGF08] B. Paluch, M. Grédiac, and A. Faye. Combining a finite element programme and a genetic algorithm to optimize composite structures with variable thickness. *Composite and Structures*, 83 :284–294, 2008.

[Pra16] G. Prange. Die variations- und minimalprinzipe der statik der baukonstruktion (doctoral dissertation). *Habilitationsschrift, Technische Hochschule Hannover*, 1916.

[PT72] T.H.H. Pian and P. Tong. Finite element methods in continuum mechanics. *Advances in Applied Mechanics*, 12 :1–58, 1972.

[Red87] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3 :173–180, 1987.

[Red07] J.N. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. 2007.

[Rei45] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :69–76, 1945.

[Rei50] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29 :90–95, 1950.

[Rei84] E. Reissner. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 20(7) :1366–1368, 1984.

[Rei86] E. Reissner. On a mixed variational theorem and on shear feformable plate theory. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 23(2) :193–198, 1986.

[RFT04] J. Rodenas, F.J. Fuenmayor, and J.E. Tarancon. A numerical methodology to asses the quality of the design velocity field computation methods in shape sensitivity analysis. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 59 :1725–1747, 2004.

[RHX+12] B. Raghavan, M. Hamdaoui, M. Xiao, P. Breitkopf, and P. Villon. A bi-level metamodeling approach for structural optimization using modified pod bases and diffuse approximation. *Computers and Structures*, 2012.

[Rix04] D Rixen. A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :383–391, 2004.

[Rub75] S Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic substructuring. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.

[SB83] H. Stolarski and T. Belytschko. Shear and membrane locking in curved c0 elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 41 :279–296, 1983.

[SB86a] H. Stolarski and T. Belytschko. On the equivalence of mode decomposition and mixed finite element based on the hellinger-reissner principle. part 1 : Theory. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :249–263, 1986.

[SB86b] H. Stolarski and T. Belytschko. On the equivalence of mode decomposition and mixed finite element based on the hellinger-reissner principle. part 2 : Application. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58 :265–284, 1986.

[SC87] A.F. Saleeb and T.Y. Chang. On the hybrid-mixed formulation of c0 curved beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60 :95–121, 1987.

[SCM+01] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computational Method Applied for Mechanical Engineering*, 190 :6183–6200, 2001.

[SD94] N. Srinivas and K. Deb. Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. *Journal of Evolutionary Computation*, 2 :221–248, 1994.

[SDS10] M. Scherer, R. Denzer, and P. Steinmann. A fictious energy approach for shape optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 82 :269–302, 2010.

[SMMB00] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 48 :1549–1570, 2000.

[Sri73] N. Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 30(4) :495–507, 1973.

[TFVB15] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, and R.C. Batra. Stress and strains recovery for functionnaly graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equivalent single layer theory. *Composite and Structures*, 119 :67–89, 2015.

[TP69] P. Tong and T.H.H. Pian. A variational principle and the convergence of a finite element method based on assumed stress distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 5 :463–472, 1969.

[Tra01] D.M. Tran. Component mode synthesis methods using interface modes. application to structures with cyclic symmetry. *Computers and Structures*, 79 :209–222, 2001.

[Tra09] D.M. Tran. Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry. *Computers and Structures*, 87 :1141–1156, 2009.

[VMD07] L. Van Miegroet and P. Duysinx. Stress concentration minimization of 2d filets using x-fem and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33 :425–438, 2007.

[Was75] K. Washizu. *Variational methods in elasticity and plasticity, 2nd edition*. Pergamon Press, 1975.

[WC09] P. Wriggers and C. Carstensen. *Mixed Finite Element Technologies*. Applied Mathematics/Computational Methods of Engineering, 2009.

[WLL+14] F. Wu, G.R. Liu, G.Y. Li, A.G. Cheng, and Z.C. He. A new hybrid-smoothed fem for static and free vibration analyses of reissner-mindlin plates. *Computational Mechanics*, 54(3) :865–890, 2014.

[WS03] M. Walker and R.E. Smith. A technique for the multiobjective optimization of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis. *Composite and Structures*, 62 :123–128, 2003.

[WTQS99] S.Y. Woon, I. Tong, O.M. Querin, and G.P. Steven. Fixed grid finite element in elasticity problems. *Eng Comput*, 16 :145–164, 1999.

[WZ13] D. Wang and W. Zhang. A general material perturbation method using fixed mesh for stress sensitivity analysis and structural shape optimization. *Computers and Structures*, 129 :40–53, 2013.

[XZZ02] L. Xia, J.H. Zhu, and W.H. Zhang. Sensitivity analysis with the modified heaviside function for the optimal layout design of multi-component systems. *Computational Method Applied for Mechanical Engineering*, 241 :142–154, 20102.

[YC89] T.M. Yao and K.K. Choi. 3-d shape optimal design and automatic finite element regridding. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 28 :369–384, 1989.

[ZBF95] W.H. Zhang, P. Beckers, and C. Fleury. A unified parametric design approach to structural shape optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 38 :2283–2292, 1995.

[ZC67] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung. *The finite element method in structural and continuum mechanics*. McGraw-Hill, 1967.

[ZDT99] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele. Comparison of multiobjectivr evolutionary algorithms : empirical results. Technical report, Technical Report 70, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 1999.

[ZLT01] E. Zitzler, E. Laumanns, and L. Thiele. Spea2 : Improving the strength pareto evolutionary algorithm. Technical report, Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.

[ZT99] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms : a comparative case study and the strength pareto approach. evolutionary computation. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 3(4) :257–271, 1999.

Publications personnelles

Revues internationales spécialisées avec comité de lecture

- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, A new component mode synthesis for dynamic mixed plate finite element models, *Archive of Applied Mechanics*. Publication acceptée en octobre 2015.
- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Various double component mode synthesis and sub-structuring methods for dynamic mixed FEM, *European Journal of Mechanics*, Vol 53, Sept-Oct 2015, 196-219.
- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Multi-objective structural robust optimization under stress criteria based on mixed plate super-element and genetic algorithms, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Publication acceptée en juin 2015.
- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Multi-objective shape optimization of plate structure under stress criteria based on sub-structured mixed FEM and genetic algorithms, 2015, *Journal of Physics : Conference Series* (JPCS), 628 012011 (article de congrés sélectionné pour publication).

Colloques internationaux avec actes publiés

- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Multi-objective shape optimization of plate structure under stress criteria based on sub-structured mixed FEM and genetic algorithms, *11th International Conference on Damage Assessment of Structures* (DAMAS 2015), Ghent (Belgium), 24–26 august 2015.
- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Multi-objective structural optimization under stress criteria based on mixed plate FEM and genetic algorithms, *5th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering* (COMPDYN 2015), Crete island (Greece), 25–27 May 2015.
- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Modal synthesis applied to a Reissner mixed plate finite element dynamic model, *Proceeding of the 9th International Conference on Structural Dynamics* (EURODYN 2014), Porto (Portugal), 30th June–2nd July 2014.

Colloques nationaux avec actes publiés

- P. Garambois, S. Besset and L. Jézéquel, Optimisation multi-objectifs de structure sous critère de contrainte à l'aide de MEF mixtes, *12eme Colloque National en Calcul des Structures* (CSMA 2015), Giens (France), 18–22 May 2015.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Monsieur M. OUISSE
Professeur - FEMTO ST - 24 chemin de l'Epitaphe - 25000 Besançon

Et de

Monsieur P. ARGOUL
Maître de Conférences HDR - Ecole des Ponts Paris Tech - Labo Navier - 6-8 avenue Blaise Pascal
Cité Descartes - Champs-sur-Marne - 77455 Marne-la-Vallée cedex 2

Monsieur GARAMBOIS Pierre

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 12 novembre 2015

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

ECOLE CENTRALE LYON
Service
Scolarité
ECULLY

M-A. GALLAND