

Numéro d'ordre : 2016-XX

# Thèse de l'Université de Lyon

présentée pour obtenir le grade de

## Docteur de l'École Centrale de Lyon

en mécanique

par

**Laurent Genest**

### Optimisation de forme par gradient en dynamique rapide

Présentée et soutenue publiquement le 19 Juillet 2016 devant le jury composé de :

Piotr BREITKOPF, Université de Technologie de Compiègne, Ingénieur de recherche CNRS	Rapporteur
Manuel COLLET, École Centrale de Lyon, Directeur de recherche CNRS	Président du jury
Frédéric GILLOT, École Centrale de Lyon, Maître de conférences	Co-encadrant
Louis JÉZÉQUEL, École Centrale de Lyon, Professeur des universités	Directeur de thèse
Pierre LEMERLE, Institut National de Recherche et de Sécurité, Chercheur INRS	Rapporteur
Frédéric MERCIER, Renault, Chef de projet	Examineur





ÉCOLE  
CENTRALE LYON

ÉCOLE CENTRALE DE LYON  
LTDS – D2S

36, avenue Guy de Collongue  
69130 Écully



**RENAULT**

TECHNOCENTRE RENAULT  
DEA – TDSO

1, avenue du golf  
78280 Guyancourt



# Résumé

---

Afin de faire face aux nouveaux challenges de l'industrie automobile, les ingénieurs souhaitent appliquer des méthodes d'optimisation à chaque étape du processus de conception. En élargissant l'espace de conception aux paramètres de forme, en augmentant leur nombre et en étendant les plages de variation, de nouveaux verrous sont apparus. C'est le cas de la résistance aux chocs. Avec les temps de calcul long, la non-linéarité, l'instabilité et la dispersion numérique de ce problème de dynamique rapide, la méthode usuellement employée, l'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponse, devient trop coûteuse pour être utilisée industriellement.

Se pose alors la problématique suivante : « Comment faire de l'optimisation de forme en dynamique rapide avec un nombre élevé de paramètres? ».

Pour y répondre, les méthodes d'optimisation par gradient s'avèrent être les plus judicieuses. Le nombre de paramètres a une influence réduite sur le coût de l'optimisation. Elles permettent donc l'optimisation de problèmes ayant de nombreux paramètres. Cependant, les méthodes classiques de calcul du gradient sont peu pertinentes en dynamique rapide : le coût en nombre de simulations et le bruit empêchent l'utilisation des différences finies et le calcul du gradient en dérivant les équations de dynamique rapide n'est pas encore disponible et serait très intrusif vis-à-vis des logiciels.

Au lieu de déterminer le gradient, au sens classique du terme, des problèmes de crash, nous avons cherché à l'estimer. L'Equivalent Static Loads Method est une méthode permettant l'optimisation à moindre coût basée sur la construction d'un problème statique linéaire équivalent au problème de dynamique rapide. En utilisant la dérivée du problème équivalent comme estimation du gradient, il nous a été possible d'optimiser des problèmes de dynamique rapide ayant des épaisseurs comme variables d'optimisation. De plus, si l'on construit les équations du problème équivalent avec la matrice de rigidité sécante, l'approximation du gradient n'en est que meilleure.

De cette manière, il est aussi possible d'estimer le gradient par rapport à la position des nœuds du modèle de calcul. Comme il est plus courant de travailler avec des paramètres CAO, il faut déterminer la dérivée de la position des nœuds par rapport à ces paramètres. Nous pouvons le faire de manière analytique si nous utilisons une surface paramétrique pour définir la forme et ses points de contrôle comme variables d'optimisation. Grâce à l'estimation du gradient et à ce lien entre nœuds et paramètres de forme, l'optimisation de forme avec un nombre important de paramètres est désormais possible à moindre coût.

La méthode a été développée pour deux familles de critères issues du crash automobile. La première est liée au déplacement d'un nœud, objectif important lorsqu'il faut préserver l'intégrité de l'habitacle du véhicule. La seconde est liée à l'énergie de déformation. Elle permet d'assurer un bon comportement de la structure lors du choc.

**Mots clés :** optimisation de formes, dynamique rapide, résistance aux chocs, estimation du gradient, Equivalent Static Loads Method.



# Abstract

---

In order to face their new industrial challenges, automotive constructors wish to apply optimization methods in every step of the design process. By including shape parameters in the design space, increasing their number and their variation range, new problematics appeared. It is the case of crashworthiness. With the high computational time, the nonlinearity, the instability and the numerical dispersion of this rapid dynamics problem, metamodeling techniques become to heavy for the standardization of those optimization methods.

We face this problematic: "How can we carry out shape optimization in rapid dynamics with a high number of parameters ?".

Gradient methods are the most likely to solve this problematic. Because the number of parameters has a reduced effect on the optimization cost, they allow optimization with a high number of parameters. However, conventional methods used to calculate gradients are ineffective: the computation cost and the numerical noise prevent the use of finite differences and the calculation of a gradient by deriving the rapid dynamics equations is not currently available and would be really intrusive towards the software.

Instead of determining the real gradient, we decided to estimate it. The Equivalent Static Loads Method is an optimization method based on the construction of a linear static problem equivalent to the rapid dynamic problem. By using the sensitivity of the equivalent problem as the estimated gradient, we have optimized rapid dynamic problems with thickness parameters.

It is also possible to approximate the derivative with respect to the position of the nodes of the CAE model. But it is more common to use CAD parameters in shape optimization studies. So it is needed to have the sensitivity of the nodes position with these CAD parameters. It is possible to obtain it analytically by using parametric surface for the shape and its poles as parameters. With this link between nodes and CAD parameters, we can do shape optimization studies with a large number of parameters and this with a low optimization cost.

The method has been developed for two kinds of crashworthiness objective functions. The first family of criterions is linked to a nodal displacement. This category contains objectives like the minimization of the intrusion inside the passenger compartment. The second one is linked to the absorbed energy. It is used to ensure a good behavior of the structure during the crash.

**Keywords:** shape optimization, rapid dynamics, crashworthiness, estimated gradient, Equivalent Static Loads Method.



*« Si l'aspect d'un pupitre encombré évoque un esprit encombré,  
que penser d'un pupitre vide ? »*

Albert Einstein



# Remerciements

---

Dans la vie d'un thésard, arrive le moment où l'on doit faire le bilan de trois années passées à lire, à réfléchir et à coder (ce qui va de paire avec relire, re relire, voir pourquoi ça ne marche pas et débbuger). Cet instant prend la forme d'un écrit plus ou moins intelligible. Sa rédaction nous remémore les bons moments et nous fait prendre conscience qu'il est le fruit d'un travail d'équipe. Ce sont ces personnes passionnées, curieuses, drôles et attachantes que je tiens à remercier ici.

Pour commencer cette longue liste, je salue mon directeur de thèse Louis Jézéquel qui a accompagné le petit breton que je suis, lui a fait découvrir l'entrepreneuriat et les problématiques industrielles et l'a poussé à se lancer dans cette grande aventure qu'est le doctorat. Je n'oublierai jamais ces repas à refaire le monde accompagnés par mon co-encadrant Frédéric Gillot qui a su me maintenir sur la trajectoire académique tout en me laissant mon autonomie. Un grand merci à Simone de Beauvoir qui m'a permis de me rapprocher de Frédéric Mercier, mon encadrant industriel, que je remercie pour son suivi et son soutien sans faille.

Je tiens à remercier les membres du jury, Piotr Breitkopf, Manuel Collet et Pierre Lemerle, pour le temps qu'ils m'ont accordé et leurs remarques pertinentes.

Mes pensées vont aussi à l'ancienne équipe optimisation qui m'a accueillie. Je profite de ces quelques lignes pour faire un câlin à Pascalou qui m'a supporté pendant trois ans et des bisous à Sylvain et Gireg (en remboursement des cafés et des thés que je leurs dois). Merci à vous pour votre présence et votre aide. Je tiens aussi à remercier André B., Hervé G., Thomas Q. et bien-sûr Stéphane pour leur écoute et l'intérêt porté à mes travaux.

Je dédie un paragraphe spécial à quelqu'un de grandes qualités qui m'a mis sur la voie de l'Equivalent Static Loads Method : Marc Albertelli. Marc, merci pour tout.

Cédric, Tim et Pierre, je vous dis à très vite autour d'une bière, d'un fromage ou d'une tablette de chocolat. C'est l'occasion pour moi de décerner le lauréat du stagiaire à André Sousa De Paula pour m'avoir supporté pendant six mois. Mickaël, mon co-thésard, je te souhaite le meilleur et merci pour tes conseils, ton aide et le temps que tu as accordé au cokrigeage.

Je remercie aussi tous ceux que j'ai rencontré lors de cette thèse, comme ponpon et patapon, avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissant.

Merci Papa, merci Maman, merci Marie pépette d'être toujours là et de me soutenir dans tout ce que je fais.

Merci Sarah d'être et de rester avec moi alors que je suis capable de parler d'éléments mortiers un dimanche matin sur l'oreiller... Bisous.



# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte</b>	<b>3</b>
1.1 Dynamique rapide dans l'automobile . . . . .	4
1.1.1 Résistance aux chocs . . . . .	4
1.1.2 Méthodes de calcul en dynamique rapide . . . . .	8
1.1.3 Difficultés liées au calcul de crash . . . . .	11
1.2 État de l'art de l'optimisation en dynamique rapide . . . . .	12
1.2.1 Méthodes d'optimisation de forme . . . . .	13
1.2.2 Optimisation par plan d'expériences et méta-modèles . . . . .	16
1.3 Problèmes de forme en crash . . . . .	22
1.3.1 Processus de conception et résistance au chocs . . . . .	22
1.3.2 Paramètres de forme de la caisse en blanc . . . . .	25
1.3.3 Exemples d'études d'optimisation . . . . .	27
1.4 Synthèse du chapitre . . . . .	31
Bibliographie du 1 <sup>er</sup> chapitre . . . . .	33
<b>2 Estimation du gradient en dynamique rapide</b>	<b>37</b>
2.1 Recherche d'un gradient en dynamique rapide . . . . .	38
2.1.1 Optimisation par gradient . . . . .	38
2.1.2 Calcul de gradient en dynamique rapide par les méthodes classiques	43
2.2 Estimation du gradient par l'Equivalent Static Loads Method . . . . .	47
2.2.1 Equivalent Static Loads Method . . . . .	47
2.2.2 Estimation du gradient . . . . .	50
2.3 Optimisation en crash avec direction de descente . . . . .	54
2.3.1 Méthode 1 : Optimisation avec le gradient approximé issu de l'ESLM	55
2.3.2 Méthode 2 : Utilisation de la matrice de rigidité sécante . . . . .	56
2.3.3 Comparaison des deux méthodes et analyse de l'optimum . . . . .	58
2.4 Synthèse du chapitre . . . . .	63
Bibliographie du 2 <sup>e</sup> chapitre . . . . .	65

<b>3</b>	<b>Optimisation de forme</b>	<b>67</b>
3.1	Sensibilité par rapport aux nœuds du maillage . . . . .	68
3.2	Description des surfaces en CAO . . . . .	70
3.2.1	Surfaces paramétriques . . . . .	70
3.2.2	Représentation par des volumes . . . . .	73
3.3	Sensibilité par rapport aux paramètres de forme . . . . .	75
3.3.1	Calcul analytique . . . . .	75
3.3.2	Différences finies . . . . .	79
3.3.3	Méthodes isogéométriques . . . . .	80
3.4	Implémentation et application . . . . .	81
3.4.1	Algorithme de test pour l'optimisation de forme . . . . .	82
3.4.2	Application . . . . .	83
3.5	Synthèse du chapitre . . . . .	88
	Bibliographie du 3 <sup>e</sup> chapitre . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre de la méthode pour les critères énergétiques</b>	<b>91</b>
4.1	Critères énergétiques en dynamique rapide . . . . .	92
4.1.1	Comportement souhaité lors d'un crash . . . . .	92
4.1.2	Différentes approches pour contrôler le comportement . . . . .	93
4.1.3	Problème statique équivalent pour la préservation de l'énergie . . . . .	96
4.2	Estimation du gradient pour la forme . . . . .	97
4.2.1	Dérivée de forme du problème statique linéaire équivalent . . . . .	97
4.2.2	Application à une poutre en S . . . . .	100
4.3	Extension aux paramètres d'épaisseur . . . . .	106
4.3.1	Dérivée par rapport à l'épaisseur . . . . .	107
4.3.2	Application . . . . .	108
4.4	Synthèse du chapitre . . . . .	113
	Bibliographie du 4 <sup>e</sup> chapitre . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>115</b>
5.1	Conclusions . . . . .	115
5.2	Perspectives . . . . .	116
<b>A</b>	<b>Modification du Head Injury Criterion pour l'optimisation par gradient</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Co-krigeage utilisant l'estimation du gradient</b>	<b>123</b>
	Bibliographie des annexes . . . . .	128
	<b>Bibliographie globale</b>	<b>129</b>

# Table des figures

1	Évolution du nombre de tués sur la route en France depuis 1971. . . . .	1
1.1	Essai choc piéton de l'Euro NCAP (a) et mapping du Renault Kadjar (b) .	5
1.2	Modèle de calcul pour le choc piéton : exemple d'un tir au centre du capot	5
1.3	Chocs Euro NCAP à grande vitesse . . . . .	6
1.4	Calcul de l'OLC . . . . .	7
1.5	Choc assurance RCAR . . . . .	8
1.6	Modèle masses-ressorts de Kamal pour la simulation en Crash . . . . .	9
1.7	Instants de calcul dans le schéma de résolution explicite . . . . .	10
1.8	Les différents comportements en flambement d'une poutre en S : global et local . . . . .	11
1.9	Dispersion numérique du critère « Déplacement du montant de baie suivant Z » . . . . .	12
1.10	Optimisation topologique avec contraintes d'épaisseur . . . . .	14
1.11	Exemple d'optimisation géométrique sur une coque de forme en L . . . . .	15
1.12	Exemple de paramètres CAO ( $L_1, L_2$ et $r$ ) pour l'optimisation paramétrique	15
1.13	Algorithme générique d'optimisation par plan d'expériences et méta-modèles	16
1.14	Illustration d'un front de Pareto pour un problème à deux objectifs . . . . .	18
1.15	Exemple de modèle de krigeage . . . . .	21
1.16	Caisse en blanc de la Renault Latitude . . . . .	22
1.17	Déploiement du cahier des charges . . . . .	23
1.18	Utilité des zones du bloc avant . . . . .	24
1.19	Cycle en V . . . . .	24
1.20	Exemples de paramètres « Design » . . . . .	25
1.21	Exemples de paramètres d'architecture . . . . .	26
1.22	Exemples de paramètres organiques . . . . .	26
1.23	Exemples de paramètres de renforts . . . . .	27
1.24	Boucle automatique de génération des essais de crash . . . . .	27
1.25	Paramétrage de la forme organique pour l'étude des longerons avant . . . . .	28
1.26	Résultat de l'étude de la forme organique des longerons avant . . . . .	29

1.27	Paramétrage de la forme et de la position des triggers . . . . .	30
1.28	Résultat de l'étude de forme et de positionnement des triggers . . . . .	30
1.29	Déroulement d'une itération projet . . . . .	32
2.1	Principe des méthodes de descente pour déterminer le minimum . . . . .	39
2.2	Cas test de l'étude de la détermination du pas pour un calcul de gradient par différences finies . . . . .	44
2.3	Variation de la fonction objectif en fonction du pas $h$ pour chaque paramètre	45
2.4	Le domaine d'analyse et le domaine de conception . . . . .	47
2.5	Calcul des forces équivalentes à chaque instant . . . . .	48
2.6	Cas-test poutre transverse en choc poteau à un paramètre d'épaisseur . . .	52
2.7	Estimation du gradient calculée grâce à l'ESLM et gradient calculé par différences finies . . . . .	53
2.8	Cas-test poutre transverse en choc poteau avec 10 paramètres d'épaisseur .	53
2.9	Recherche linéaire sur le cas-test poutre transverse avec 10 paramètres . . .	54
2.10	Algorigramme de la boucle de test . . . . .	55
2.11	Définition du module de Young initial $E_L$ , tangent $E_T$ et sécant $E_S$ . . . . .	57
2.12	Paramètres d'épaisseur du cas-test poutre transverse en choc poteau . . . . .	59
2.13	Déformée du cas-test de la poutre transverse après impact dans la configura- tion initiale . . . . .	59
2.14	Résultats de l'optimisation en épaisseur du cas-test poutre transverse en utilisant le gradient issu du problème équivalent . . . . .	60
2.15	Évolution des paramètres lors de l'optimisation du cas-test poutre transverse	61
2.16	Résultats de l'optimisation par pas fixe $\alpha = 2$ en utilisant le gradient du problème équivalent avec $K_S$ et en partant de l'optimum trouvé grâce à $K_L$	61
2.17	Configuration optimale de la poutre transverse en choc poteau . . . . .	62
2.18	Déformée de l'optimum du cas-test poutre transverse après l'impact du poteau . . . . .	63
3.1	Modèle de calcul du cas-test crash-box en (a) et visualisation de la déformée après le choc (b) . . . . .	69
3.2	Mapping de sensibilité de forme . . . . .	69
3.3	Construction d'un longeron avant par une surface paramétrique . . . . .	72
3.4	Construction d'un solide par méthode CSG . . . . .	73
3.5	Construction par approche CSG du cas-test de l'étude de forme et de po- sitionnement des triggers . . . . .	74

3.6	Décalage des nœuds du maillage par rapport à la surface d'origine à cause des erreurs numériques . . . . .	76
3.7	Déformation de la forme pour un calcul de sensibilité des nœuds par rapport aux paramètres par différences finies . . . . .	79
3.8	Transformation harmonique pour les différences finies . . . . .	80
3.9	Fonction de forme permettant de représenter une géométrie à partir d'un domaine de référence . . . . .	81
3.10	Modèle de calcul du cas-test crash-box . . . . .	83
3.11	Définition de la forme et du paramétrage de la crash-box . . . . .	84
3.12	Écrasement de la crash-box dans la configuration initiale . . . . .	84
3.13	Évolution de la fonction objectif lors de l'optimisation de forme du cas-test crash-box à 10 paramètres . . . . .	85
3.14	Forme initiale de la crash-box à gauche et forme finale à droite . . . . .	85
3.15	Déformées des crash-boxes initiale (à gauche) et après optimisation (à droite) après impact . . . . .	86
3.16	Effet du bruit et de la taille de maille sur l'optimisation – Valeur de la fonction objectif . . . . .	87
3.17	Effet du bruit et de la taille de maille sur l'optimisation – Évolution des paramètres . . . . .	87
4.1	Les deux modes d'effondrement d'une poutre : le flambement en (a) et l'effondrement axial en (b) . . . . .	92
4.2	Différentes SECFOs sur une voie d'effort . . . . .	93
4.3	Forces issues de SECFOs en fonction du temps . . . . .	94
4.4	Définition des zones pour le calcul du critère PEA . . . . .	95
4.5	Représentation de la dérivée de forme de la compliance sur une surface . . . . .	98
4.6	Élément quadrangle utilisé lors des calculs de crash . . . . .	98
4.7	Position d'un point sur l'extrados d'un élément . . . . .	99
4.8	Définition de la forme de l'étude de forme avec critères énergétiques . . . . .	102
4.9	Paramétrage de la forme de l'étude de forme avec critères énergétiques . . . . .	102
4.10	Modèle de calcul initial de l'étude de la forme de la poutre en S . . . . .	103
4.11	Déformée pendant le choc du modèle en S initial . . . . .	103
4.12	Zones de calcul du critère énergétique agrégé . . . . .	104
4.13	Évolution de la fonction objectif au cours de l'optimisation . . . . .	105
4.14	Évolution des paramètres au cours de l'optimisation en fonction des itérations	105
4.15	Déformée pendant le crash de l'optimum trouvé . . . . .	106

4.16	Division du cas-test pour le critère énergétique avec paramètres d'épaisseur	109
4.17	Évolution du critère énergétique lors de l'optimisation des paramètres d'épaisseur	110
4.18	Évolution des paramètres d'épaisseur lors de l'optimisation . . . . .	111
4.19	Cartographie des épaisseurs de la configuration finale . . . . .	111
4.20	Effondrement final de la poutre à l'itération 6 . . . . .	112
4.21	Effondrement de la poutre dans sa configuration finale à divers instants . .	112
5.1	Mapping de la sensibilité du critère énergétique par rapport aux nœuds du maillage . . . . .	117
A.1	Courbe typique d'une accélération en fonction temps . . . . .	119
B.1	Exemple de modèle de co-krigeage avec gradient . . . . .	125
B.2	Rappel du cas-test de la poutre transverse en choc poteau avec 10 paramètres	125
B.3	Fronts de Pareto obtenus par les différents métamodèles . . . . .	126
B.4	Évolution de l'aire contenu dans le front de Pareto . . . . .	127

# Liste des tableaux

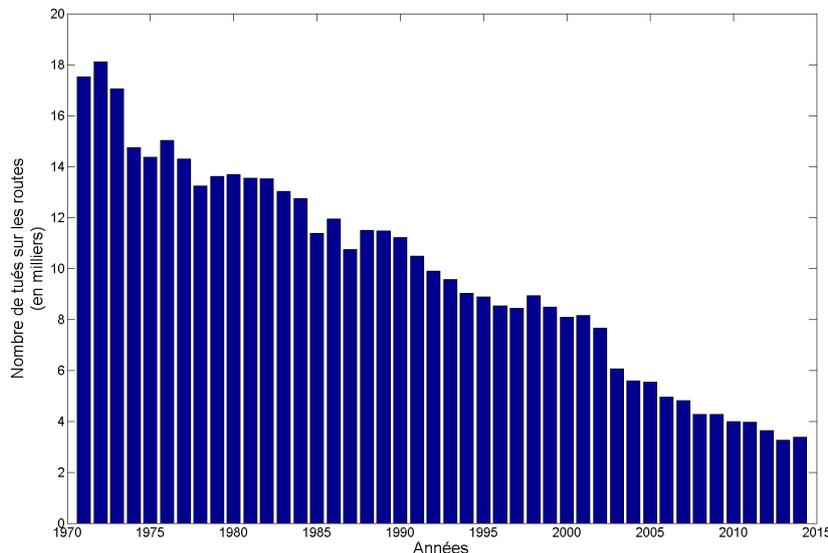
---

1.1	Comparatif des différents types d'optimisation de forme . . . . .	13
1.2	Récapitulatif des coûts des études d'optimisation de forme du longeron avant	31
2.1	Résultat du calcul du gradient par différences finies . . . . .	45
3.1	Utilisation de surfaces paramétriques pour la conception . . . . .	73
3.2	Utilisation de la méthode CSG pour la conception . . . . .	75
3.3	Comparaison de l'analyse isogéométrique avec les éléments finis classiques .	81
3.4	Valeurs des paramètres du cas-test crash-box avant et après optimisation .	86
4.1	Répétition de l'optimum trouvé pour le critère énergétique . . . . .	106
4.2	Épaisseurs finales des zones de la poutre en S . . . . .	111



# Introduction générale

Aujourd'hui, et ce depuis plus d'une cinquantaine d'années, la sécurité routière est une des préoccupations majeures des gouvernements et de l'industrie automobile. Comme le montre la figure 1, les actions conjointes de ce secteur et de l'État français – limitations de vitesse, ceinture de sécurité, contrôles d'alcoolémie, radars, ABS et ESP, etc. – ont permis de faire baisser le nombre de tués sur les routes de France. Cependant, les usagers de véhicules de tourisme constituaient encore 49% des personnes tuées sur nos routes en 2014<sup>a</sup>. Il revient alors aux constructeurs de continuer à renforcer et à perfectionner leurs produits, surtout dans le cas où le choc devient inévitable.



**Figure 1** – Évolution du nombre de tués sur la route en France depuis 1971.

Source : *securite-routiere.gouv.fr*

Parallèlement, l'industrie automobile fait face à de nouveaux challenges. Afin de contrer le réchauffement climatique, les normes en matière d'émission de polluants deviennent de plus en plus contraignantes. Par exemple, l'Union Européenne impose depuis 2015 que le parc vendu par un constructeur émette en moyenne 130 g/km de CO<sub>2</sub> avec une cible de 95 g/km en 2021. Cette tendance ne peut que se renforcer après la signature du premier accord international sur le climat et les révélations qui ont secoué le secteur automobile durant l'année 2015 et qui se poursuivent en 2016. Parmi les pistes les plus prometteuses, se trouve la réduction de la masse des véhicules.

En associant ces deux objectifs antagonistes, que sont la résistance aux chocs et la réduction de masse, aux exigences croissantes des clients en matière de prestation, les

a. Source : *securite-routiere.gouv.fr*

constructeurs se tournent vers de nouvelles techniques de conception. Ils cherchent ainsi à intégrer un processus d'optimisation à chaque étape du cycle de conception.

Depuis une décennie, les méthodes d'optimisation par méta-modèles ont fait leurs preuves sur quelques paramètres d'épaisseur, de forme et de matériau. À présent que nous cherchons à élargir l'espace de conception en augmentant le nombre de paramètres et en agrandissant leur plage de variation, ces techniques deviennent trop coûteuses. Elles ne peuvent pas s'adapter aux contraintes de temps du secteur automobile. Notamment pour le problème de dynamique rapide qu'est le crash avec ses temps de calcul longs, sa non-linéarité et son bruit numérique.

Se pose alors la problématique que nous allons chercher à résoudre dans cette thèse :

*Comment faire de l'optimisation de forme en crash avec un nombre important de paramètres ?*

Avant d'y répondre, nous ferons un état de l'art des méthodes d'optimisation de forme appliquées au crash de véhicules automobiles. Cette partie sera l'occasion de montrer l'importance de cette prestation et d'explicitier les difficultés liées aux problèmes de dynamique rapide.

Les méthodes d'optimisation par gradient connaissent une influence réduite du nombre de paramètres. C'est pourquoi nous aimerions les utiliser comme réponse à notre problématique. Dans le second chapitre, nous verrons que les méthodes classiques de calcul de gradient sont peu pertinentes. Alors, nous nous sommes inspiré de l'*Equivalent Static Loads Method* pour estimer cette sensibilité. Afin d'appréhender au mieux la méthode proposée, nous l'appliquerons sur des paramètres d'épaisseur.

L'optimisation de forme sera au cœur du troisième chapitre. Après la détermination d'une direction de descente, le principal verrou est lié au fait que nos paramètres sont des paramètres issus de la CAO<sup>b</sup>. Comme la sensibilité est calculée par rapport à la position des nœuds du modèle de calcul, il est nécessaire de déterminer la dérivée de ces positions par rapport aux paramètres de forme. C'est ce lien qui permettra l'optimisation de forme par estimation du gradient du problème de dynamique rapide.

Les deux derniers chapitres expliquent la méthode pour des critères liés aux déplacements nodaux, une famille d'objectifs très présente dans les problèmes de résistance aux chocs. En plus de celle-ci, les fonctions objectif basées sur l'énergie de déformation permettent d'assurer un bon comportement de la structure lors de l'impact. Nous consacrerons l'avant-dernière partie de cette thèse à la détermination d'une estimation de gradient pour cette catégorie de critères.

Enfin, nous concluons sur cette approche utilisant une estimation du gradient pour l'optimisation de problèmes de dynamique rapide. Ce dernier chapitre sera l'occasion de présenter les pistes permettant d'améliorer la direction de descente et de compléter la technique proposée. De même, nous aborderons les perspectives industrielles de la méthode en suggérant comment l'estimation du gradient peut être utilisée.

---

b. Conception Assistée par Ordinateur

# CHAPITRE 1

## Contexte

---

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Dynamique rapide dans l'automobile . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1.1	Résistance aux chocs . . . . .	4
1.1.1.1	Choc piéton . . . . .	5
1.1.1.2	Chocs à grande vitesse . . . . .	6
1.1.1.3	Chocs à petite vitesse . . . . .	7
1.1.2	Méthodes de calcul en dynamique rapide . . . . .	8
1.1.2.1	Schéma de résolution implicite . . . . .	9
1.1.2.2	Schéma de résolution explicite . . . . .	10
1.1.3	Difficultés liées au calcul de crash . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>État de l'art de l'optimisation en dynamique rapide . . .</b>	<b>12</b>
1.2.1	Méthodes d'optimisation de forme . . . . .	13
1.2.2	Optimisation par plan d'expériences et méta-modèles . . . . .	16
1.2.2.1	Plans d'expériences . . . . .	17
1.2.2.2	Optimisation multi-objectifs par méta-modèles . . . . .	17
<b>1.3</b>	<b>Problèmes de forme en crash . . . . .</b>	<b>22</b>
1.3.1	Processus de conception et résistance au chocs . . . . .	22
1.3.2	Paramètres de forme de la caisse en blanc . . . . .	25
1.3.3	Exemples d'études d'optimisation . . . . .	27
1.3.3.1	Étude de la forme organique d'un longeron avant . . . . .	28
1.3.3.2	Étude de la forme et de la position des triggers sur le longeron . . . . .	29
1.3.3.3	Conclusion quant au coût d'une étude . . . . .	31
<b>1.4</b>	<b>Synthèse du chapitre . . . . .</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliographie du 1<sup>er</sup> chapitre . . . . .</b>	<b>33</b>

Précédemment, nous avons introduit que les nouveaux challenges de l'industrie automobile ont poussé les constructeurs à s'intéresser à des méthodes de conception telles que l'optimisation de forme. Cependant, les techniques d'optimisation par méta-modèles, couramment utilisées dans ce secteur, sont gourmandes en nombre de simulations en présence de nombreux paramètres. Elles deviennent alors trop coûteuses pour les problèmes au temps long comme ceux issus de la dynamique rapide. Se pose la problématique suivante : *Comment faire de l'optimisation de forme en dynamique rapide avec un nombre important de paramètres ?*

Ce premier chapitre sera pour nous l'occasion d'explicitier celle-ci. Nous commencerons par définir les fonctions objectifs issues du domaine complexe qu'est la dynamique rapide, plus particulièrement le crash de véhicules automobiles. Nous poursuivrons sur un état de l'art de l'optimisation. Dans une troisième partie, l'analyse du déploiement du cahier des charges de la prestation crash permettra de mettre en exergue les différents paramètres de forme pouvant apparaître lors d'une optimisation. L'application à deux cas industriels terminera ce chapitre en mettant en avant le coût et les difficultés liés aux méthodes utilisées dans l'industrie automobile.

## 1.1 Dynamique rapide dans l'automobile

La simulation en dynamique rapide englobe les différents comportements de structures qui se produisent lors d'un impact à grande vitesse : grandes déformations, fissurations, vibrations... La résistance aux chocs, plus communément appelée crash, se dégage comme étant le problème de dynamique rapide le plus dimensionnant pour les constructeurs.

### 1.1.1 Résistance aux chocs

Aujourd'hui, de nombreuses innovations techniques ont permis de réduire le nombre d'accidents de voiture. ABS<sup>a</sup> et ESP<sup>b</sup> permettent au véhicule de conserver un bon comportement en réduisant la distance de freinage et en évitant les sorties de routes. Les détecteurs de collisions avertissent le conducteur, lui permettant d'anticiper le choc. Hélas, il existe un moment où l'impact devient inévitable. Dans ce cas, il faut que les ingénieurs conçoivent un véhicule capable de protéger les occupants, ou l'impacté dans le cas de choc piéton. En effet, en crash, nous ne parlons pas exclusivement de choc à grande vitesse contre un autre véhicule ou un mur mais aussi de choc piéton ou de chocs à petite vitesse.

Afin de vérifier la tenue au crash des automobiles et de permettre leur comparaison et leur homologation, plusieurs conditions de choc ont été répertoriées par de nombreux instituts. Ainsi, l'Euro NCAP<sup>c</sup> en Europe, l'Australian NCAP en Australie ou encore le

---

a. ABS : Système anti-blocage des roues, de « Antilockersystem »

b. ESP : Correcteur électronique de trajectoire, de « Electronic Stability Program »

c. NCAP : New Car Assessment Program

NHTSA<sup>d</sup> aux États-Unis notent les nouveaux produits de l'industrie automobile sur la base d'essais réels souvent partagés.

Dans la suite, nous allons relever les cas de choc les plus représentatifs de ces institutions. Ainsi, les quatre grandes familles de critères qui sont utilisées pour dimensionner la voiture et qui servent d'objectifs et de contraintes pour l'optimisation se dégageront.

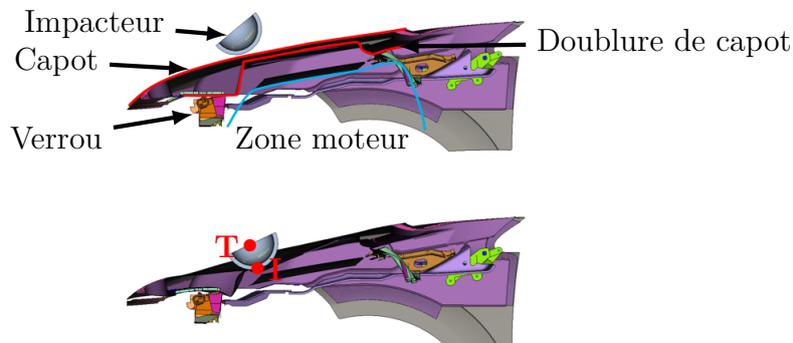
### 1.1.1.1 Choc piéton

Le choc d'une voiture contre un piéton représente encore 14 % des accidents mortels. Depuis 1997, l'Euro NCAP a inclus dans ses tests la protection des piétons. Pour ce faire, elle projette différents impacteurs représentant tête et jambes sur plusieurs endroits de l'avant de la voiture à 40 km.h<sup>-1</sup> comme le montre la figure 1.1-a. Cela fait, il est possible d'estimer les dégâts causés au piéton et de cartographier la qualité de l'absorption de l'énergie par le capot et le pare-choc. Pour l'illustrer, une cartographie du Renault Kadjar noté 74/100 en choc piéton se trouve en figure 1.1-b.



**Figure 1.1** – Essai choc piéton de l'Euro NCAP (a) et mapping du Renault Kadjar (b)  
*Source des images : euroncap.com*

Le constructeur observe principalement deux critères issus d'une simulation de ce choc pour dimensionner le capot. Le premier est l'intrusion dans le compartiment moteur du point d'impact, noté  $I$  en figure 1.2. Il faut minimiser cette intrusion pour que la tête ne heurte pas les différents composant de verrouillage, voire le moteur lui-même si le capot est trop souple.



**Figure 1.2** – Modèle de calcul pour le choc piéton : exemple d'un tir au centre du capot

d. NHTSA : National Highway Traffic Safety Administration

Le second est un critère bio-mécanique : le Head Injury Criterion [Henn 1998] décrit en équation (1.1). Calculé à partir du point d'impact  $I$  ou du centre de l'impacteur  $T$  (cf. figure 1.2), il permet d'estimer les dégâts engendrés par la décélération du piéton. En déterminant l'intégrale du pic d'accélération maximal sur 15 ms, nous obtenons le  $HIC_{15}$  qui doit être le plus faible possible.

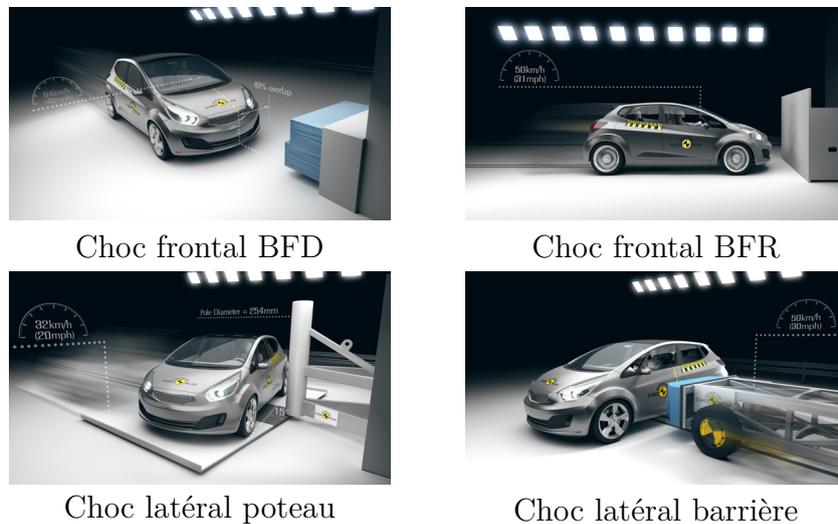
$$HIC = \max_{t_i} \left\{ \Delta T \left[ \frac{1}{\Delta T} \int_{t_i}^{t_i + \Delta T} \ddot{x}(t) dt \right]^{2.5} \right\} \quad (1.1)$$

où  $\ddot{x}$  est l'accélération du point  $T$  ou  $I$ ,  $t$  le temps et  $5ms < \Delta T < 35ms$  la durée du pulse. En général,  $\Delta T = 15ms$ .

Ce problème donne déjà une idée des objectifs antagonistes auxquels font face les concepteurs : raidir le capot diminue l'intrusion mais augmente le HIC, et inversement.

### 1.1.1.2 Chocs à grande vitesse

Pour les cas où le choc à grande vitesse devient inévitable, les ingénieurs cherchent à dimensionner au mieux la voiture. Pour ce faire, ils simulent le crash du véhicule suivant plusieurs cas de choc comme ceux de la figure 1.3.



**Figure 1.3** – Chocs Euro NCAP à grande vitesse

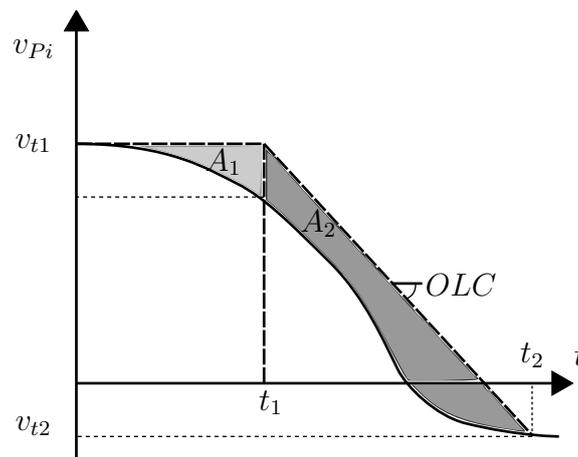
*Source des images : euroncap.com*

En utilisant ces simulations de chocs frontaux et latéraux, plusieurs critères sont utilisés pour dimensionner la caisse. La première famille de critère est celle de l'intrusion dans l'habitacle. En effet, quel que soit le cas de choc, la zone où se trouve l'occupant doit préserver son intégrité afin qu'il ne se trouve pas incarcerated ou encore que ses blessures ne s'aggravent.

La deuxième famille est celle des critères bio-mécaniques. Nous y retrouvons bien-sûr le Head Injury Criterion comme critère de référence. Néanmoins, la présence d'un mannequin dans le modèle de calcul est très rare dans les modèles amont. Dans ces cas où nous n'avons que la caisse, nous utilisons plutôt l'Occupant Load Criterion (OLC) [Kubler 2009], un critère basé sur la vitesse d'un point  $P$  de la caisse se situant au niveau du conducteur.

Le calcul de l'OLC structure se fait de la manière suivante :

- a. Comme dans la figure 1.4, nous traçons l'évolution de la vitesse de ce point  $P$  par rapport au temps. (La vitesse négative à la fin du calcul est due au rebond du véhicule après l'impact)
- b. À partir de la vitesse initiale  $v_{t_1}$ , nous traçons une droite. Nous pouvons ainsi déterminer l'instant  $t_1$  de sorte que l'aire  $A_1$  soit égale à  $65\text{mm}^e$ . Cela correspond à la période de glissement avant que la ceinture ne fasse effet.
- c. Nous traçons alors une autre droite passant par le point de coordonnée  $(t_1, v_{t_1})$  et telle que l'aire entre cette nouvelle droite et la courbe  $A_2$  soit égale à  $235\text{mm}$ , distance entre le visage et le volant.
- d. L'OLC est alors la pente de cette droite.



**Figure 1.4** – Calcul de l'OLC

### 1.1.1.3 Chocs à petite vitesse

Il existe une autre catégorie de chocs, à plus petite vitesse cette fois, comme les chocs pour les assurances représentés en figure 1.5. Ces tests visent à faire en sorte que la voiture conserve son intégrité lors de chocs à faible vitesse. Ainsi, il faut circonscrire les conséquences de l'impact aux pièces de protection telles que les boucliers, les absorbeurs ou encore les crash-boxes afin que seules celles-ci nécessitent d'être remplacées. Ici, le principal critère est celui de l'énergie absorbée par les pièces.

---

e. Les aires sont ici en unité de distance :  $A = \text{temps} \times \text{vitesse} = \text{distance}$ .

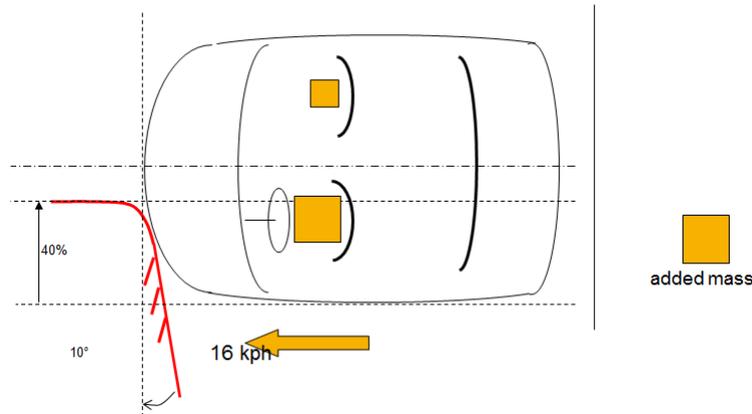


Figure 1.5 – Choc assurance RCAR

### Les quatre familles de critères

Les différents critères vu précédemment peuvent se classer en quatre catégories :

- Critères fonction du déplacement d'un nœud (*e.g.* intrusions)
- Critères fonction de la vitesse d'un nœud (*e.g.* OLC)
- Critères fonction de l'accélération d'un nœud (*e.g.* HIC)
- Critères énergétiques

Comme les critères fonction de la vitesse et de l'accélération peuvent être liés au déplacement par différences finies :  $\dot{x}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}$  et  $\ddot{x}(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{\Delta t^2}$ , nous nous concentrerons dans cette thèse sur les critères fonction du déplacement d'un nœud et sur les critères énergétiques. Toutefois, un exemple de traitement de ce type de fonctions objectifs est disponible en Annexe A sur le cas du HIC.

### 1.1.2 Méthodes de calcul en dynamique rapide

Bien-entendu, les essais ont peu à peu été remplacés par des simulations numériques à cause de leur coût prohibitif et ne sont dorénavant réalisés que durant les phases finales de validation. Néanmoins, les simulations de crash ont un coût très élevé. Bien avant que les machines de calcul soient suffisamment puissantes pour supporter les *modèles numériques*, les industriels ont commencé leurs premières études via des *modèles fonctionnels* type masses-ressorts [Cheva 1996, Kamal 1970, White 1985] comme celui de Kamal présenté figure 1.6.

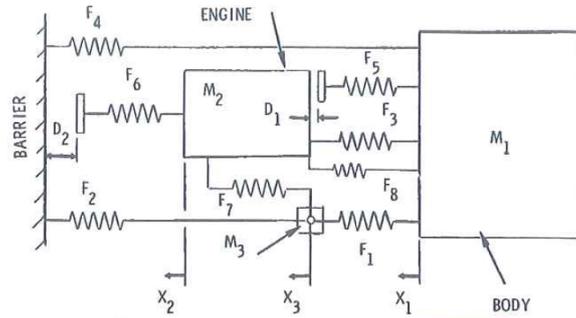


Figure 1.6 – Modèle masses-ressorts de Kamal pour la simulation en Crash

Source : [Kamal 1970]

À présent, les outils de calcul numérique sont assez puissants pour pouvoir simuler par la méthode des éléments finis les différents cas de chocs que nous avons présenté. La puissance numérique est telle qu'il a été possible de simuler un choc de véhicule complet par un modèle à 20 millions d'éléments (soit une taille de maille de 2mm) comprenant modélisation de la rupture, effets de l'emboutissage et un mannequin [Allain 2014]. Ce calcul très lourd – 35h/1024 processeurs – est, bien-sûr, pour l'instant non industrialisable. Actuellement, les temps de calcul de crash tournent autour de 14h/24 processeurs. Mais l'étude effectuée durant le projet PRACE est représentative des possibilités de calculs présentes et futures.

Pour simuler par éléments finis le crash d'un véhicule automobile, la formulation de dynamique rapide correspond à celle de la dynamique non-linéaire en grande déformation. Son équation d'état discrétisée (1.2) s'écrit :

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + K_T [X(t)] \Delta X(t) = F(t) \quad (1.2)$$

où  $M$  est la matrice de masse,  $C$  celle d'amortissement,  $X$  le vecteur solution du déplacement des nœuds,  $\dot{X}$  et  $\ddot{X}$  sont respectivement ses dérivées premières et secondes par rapport au temps  $t$  et  $F$  est le vecteur des forces extérieures. Le terme  $K_T [X(t)] \Delta X(t)$ , correspondant aux forces internes, est en fait la simplification de la fonction non-linéaire  $H [X(t)]$  englobant forces de contact, non-linéarité des matériaux, rigidité... Nous trouvons  $K_T$ , la matrice de raideur tangente, par la relation  $K_T = \frac{\partial H}{\partial X}$ .

Il existe principalement deux méthodes de résolution de cette équation : le schéma implicite et le schéma explicite.

### 1.1.2.1 Schéma de résolution implicite

Le schéma de résolution implicite impose que le calcul du déplacement  $X(t + \delta t)$  soit déterminé en même temps que les autres grandeurs à  $t + \delta t$ . Cela implique que l'équation (1.2) soit résolue à chaque pas de temps. Nous proposons d'illustrer cette méthode sur l'exemple 1-D, sans amortissement, suivant :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1.3)$$

Par résolution implicite, les grandeurs  $x$ ,  $\dot{x}$  et  $\ddot{x}$  à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \delta t_n$  sont calculées par différences finies de la façon suivante :

$$x(t_{n+1}) = \left( \frac{m}{\delta t_n^2} + k \right)^{-1} \left( f(t_{n+1}) + \frac{m}{\delta t_n^2} [2x(t_n) - x(t_{n-1})] \right) \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t_{n+1}) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\delta t_n} \quad (1.5)$$

$$\ddot{x}(t_{n+1}) = \frac{\dot{x}(t_{n+1}) - \dot{x}(t_n)}{\delta t_n} \quad (1.6)$$

Ce schéma de résolution est stable mais beaucoup plus coûteux que le schéma de résolution explicite.

### 1.1.2.2 Schéma de résolution explicite

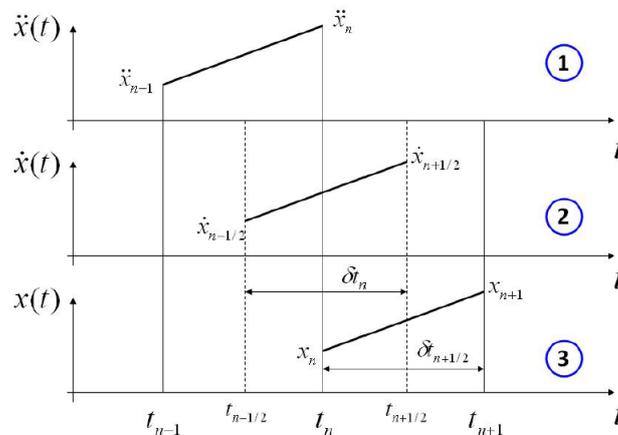
Le schéma de résolution explicite implique, quant à lui, que le calcul de  $X(t + \delta t)$  ne dépende que des grandeurs aux instants précédents. Nous proposons d'illustrer cette méthode, détaillée dans [Belytschko 1996], sur le même cas que précédemment. Les grandeurs sont calculées de la manière suivante :

$$\ddot{x}(t_n) = m^{-1}(f(t_n) - kx(t_n)) \quad (1.7)$$

$$\dot{x}(t_{n+\frac{1}{2}}) = \dot{x}(t_{n-\frac{1}{2}}) + \delta t_n \ddot{x}(t_n) \quad (1.8)$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \delta t_{n+\frac{1}{2}} \dot{x}(t_{n+\frac{1}{2}}) \quad (1.9)$$

Nous pouvons voir que le schéma de résolution explicite nécessite l'insertion du demi-instant :  $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$  et  $\delta t_{n+\frac{1}{2}} = t_{n+1} - t_n$ . Il est d'autant plus notable que la vitesse  $\dot{x}$  n'est calculée qu'à ces demi-instants. La figure 1.7 proposée par N. Rosenblatt [Rosenblatt 2012] illustre ces instants.



**Figure 1.7** – Instants de calcul dans le schéma de résolution explicite  
 Source de l'image : [Rosenblatt 2012]

Cette méthode étant très instable, il faut contrôler le pas de temps régulièrement par la règle de Courant.

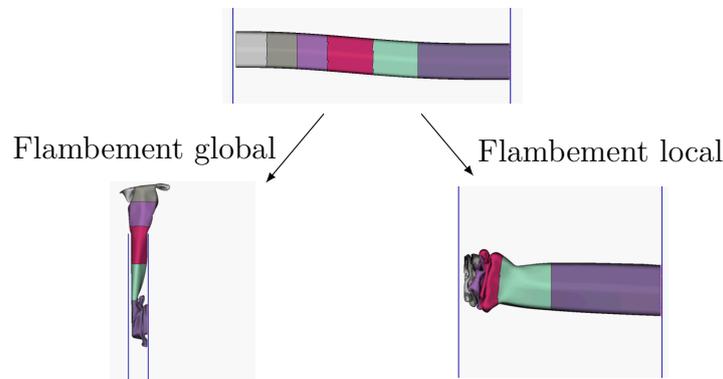
$$\delta t \approx L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (1.10)$$

où  $L$  est la longueur caractéristique du plus petit élément du maillage,  $\rho$  sa densité et  $E$  son module de Young.

Même si cette méthode est instable et participe aux différentes difficultés de calcul que nous allons voir par la suite, elle est préférée par l'industrie car elle ne nécessite pas les coûteuses inversions de matrices du schéma implicite.

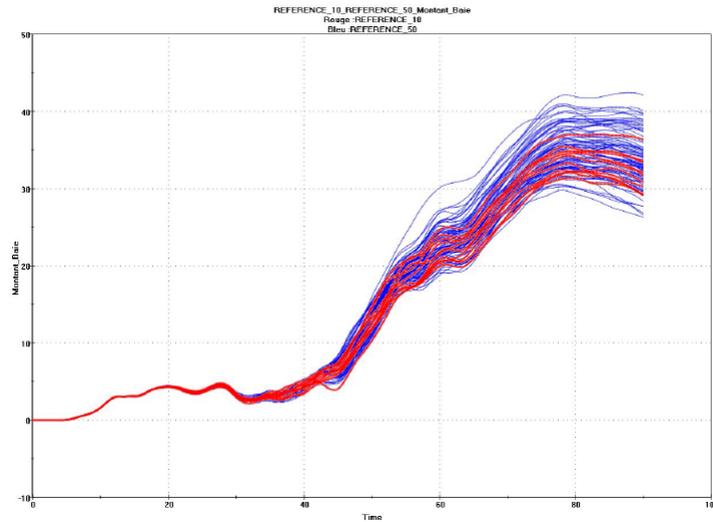
### 1.1.3 Difficultés liées au calcul de crash

Le calcul de crash présente plusieurs difficultés qui influent sur l'optimisation. Outre la non-linéarité intrinsèque de l'équation de dynamique rapide (1.2) et les temps de calcul long d'environ 20h/24 processeurs, la simulation de crash met en avant des bifurcations. Comme l'illustre la figure 1.8, de faibles changements de forme peuvent faire basculer un mode de flambement global en mode de flambement local. Cela peut se traduire par des « sauts » au niveau des fonctions objectifs.



**Figure 1.8** – Les différents comportements en flambement d'une poutre en S : global et local

Cette instabilité couplée au schéma de résolution explicite et à la parallélisation des calculs provoque une dispersion numérique : lorsque le même calcul est relancé plusieurs fois nous n'obtenons pas le même résultat. La figure 1.9 montre la dispersion d'un critère d'intrusion dans l'habitacle au fur et à mesure du calcul de crash. Cette dispersion pouvant aller jusqu'à 50 % de la valeur de l'intrusion est très problématique pour l'optimisation : il faudrait moyenner les réponses sur une dizaine voire une centaine de calculs pour chaque configuration. Cela est bien-entendu inenvisageable au vu de la durée d'une simulation.



**Figure 1.9** – Dispersion numérique du critère « Déplacement du montant de baie suivant  $Z$  »

Comparaison entre 10 répétitions (en rouge) et 100 répétitions (en bleu)

Source de l'image : [Rosenblatt 2012]

Comme expliqué dans [Rosenblatt 2012], cette dispersion est principalement due à trois items :

- la parallélisation des calculs de crash,
- la prise en compte des contacts survenant au cours de la simulation,
- et la saturation des lois de comportement matériau.

Il a été montré dans cette thèse qu'en prenant en compte l'historique du procédé de fabrication des pièces, c'est-à-dire l'effet de l'emboutissage comme dans [Huh 2003], ce faisceau de dispersion s'amenuise. Cela est principalement dû au fait que les comportements de crash deviennent plus robustes. Cependant, le calcul d'emboutissage est long et est difficile à mettre en œuvre lorsque nous n'en sommes qu'au processus de conception et que les outils de fabrication ne sont pas définis. Une estimation des effets de l'emboutissage par approche inverse est alors utilisée [Mercier 1998].

Afin d'obvier à cette dispersion numérique, nous utiliserons un maillage plus fin (mailles de 2mm au lieu de 5mm) et travaillerons sur des sous-modèles pour tester notre méthode de type gradient que nous décrirons au prochain chapitre.

## 1.2 État de l'art de l'optimisation en dynamique rapide

Maintenant que nous avons listé les différents critères de crash qu'il est possible de retrouver lors d'une optimisation ainsi que leur méthode de calcul, nous allons nous consacrer à un état de l'art de l'optimisation en dynamique rapide dans l'automobile.

## 1.2. État de l’art de l’optimisation en dynamique rapide

À la prestation crash, il faut ajouter les problèmes vibratoires et statiques ou encore l’objectif de réduction de masse. Pour optimiser ces critères, plusieurs méthodes existent et dépendent principalement du type de variables du problème d’optimisation.

Dans l’industrie automobile, plusieurs types de paramètres peuvent être présents :

- les épaisseurs de tôles,
- les matériaux,
- les paramètres combinatoires comme les présences - absences ou les alternatives,
- et la forme.

Parmi ces variables d’optimisation, la forme s’avère être à présent la plus récurrente dans les problèmes d’optimisation du secteur automobile. En effet, c’est elle qui permet potentiellement le plus de gain.

### 1.2.1 Méthodes d’optimisation de forme

Comme résumé dans [Froment 2014], il existe plusieurs manières de paramétrer une forme. Cette définition influe sur le type d’optimisation utilisée – topologique, géométrique et paramétrique – mais aussi sur le nombre de paramètres ou encore la capacité à respecter les procédés de fabrication. Le tableau 1.1 regroupe ces différentes manières de paramétrer.

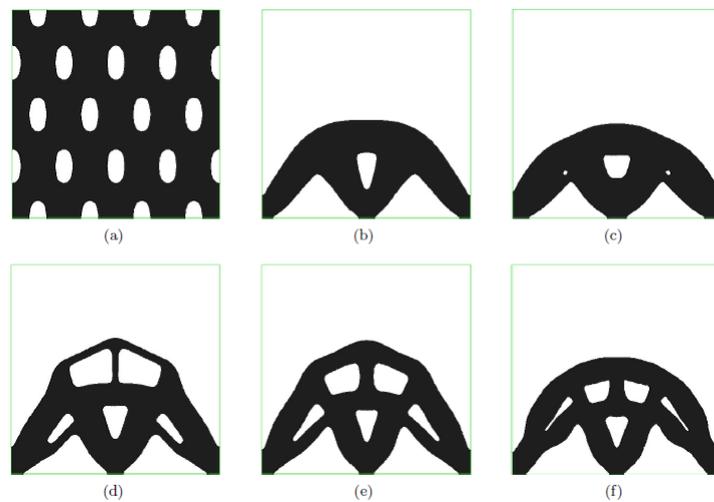
Type d’op- timisation	Paramètres	Nombre de paramètres	Dépendance au concepteur	Respect des procédés de fabrication	Prérequis
Géométrique	position des nœuds	+++	faible	+	gradient
Topologique	densité des éléments	+++	faible	–	gradient
Paramétrique	paramètres CAO morphing	+	très forte	+++	CAO à paramétrer

Tableau 1.1 – Comparatif des différents types d’optimisation de forme

#### Optimisation topologique

L’optimisation topologique revient à déterminer la forme optimale dans un volume donné. La densité de chaque élément du maillage de ce volume correspond à une variable d’optimisation. Une densité de matière à 0 correspond au vide et une densité à 1 au plein. En pilotant de manière continue cette densité, il est alors possible de calculer un gradient et de pouvoir traiter le nombre important de degrés de liberté. Les méthodes SIMP [Bendsoe 2003] ou par level-set [Allaire 2003, Albertelli 2015] utilisent cette technique. Le principal inconvénient de ce type d’optimisation est qu’il s’avère difficile de respecter le procédé de fabrication. Il est donc principalement utilisé pour déterminer des solutions innovantes qui seront retravaillées par la suite. Néanmoins, les procédés commencent à être pris en compte comme les contraintes liées au démoulage ou celles liées aux épaisseurs

[Michailidis 2014]. La figure 1.10 tirée de cette thèse illustre ce propos en montrant l'optimisation topologique d'un problème 2D ayant pour solution une arche. Ici, l'épaisseur est contrainte à une certaine valeur, impliquant des changements de topologie sur l'optimum. Cela permet de lever certains problèmes de procédés comme ceux du moulage qui impose une épaisseur constante pour éviter des problématiques de refroidissement.

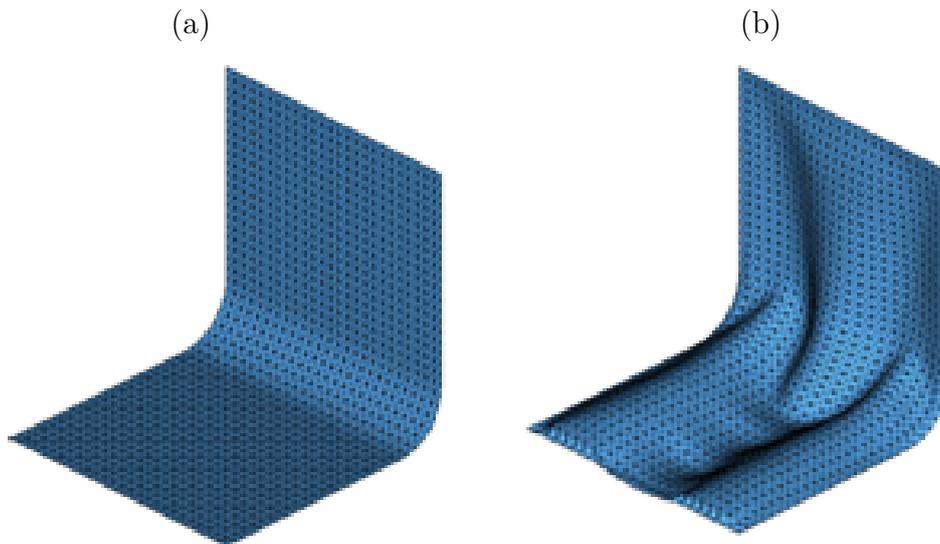


**Figure 1.10** – Optimisation topologique avec contraintes d'épaisseur  
Volume initial (a), Forme optimale sans contrainte d'épaisseur (b), avec contrainte  
d'épaisseur  $d_{max} = 0.2$  (c), pour  $d_{max} = 0.16$  (d), pour  $d_{max} = 0.14$  (e), pour  
 $d_{max} = 0.12$  (f)

Source des images : [Michailidis 2014]

### Optimisation géométrique

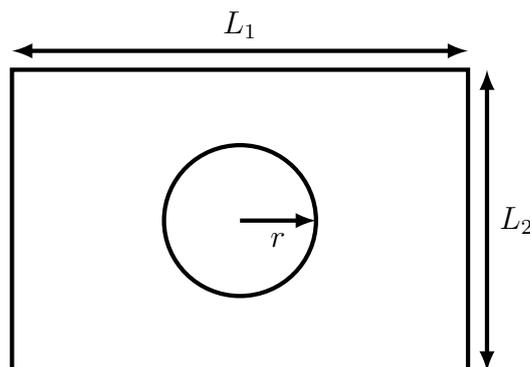
En prenant cette fois la position des nœuds d'un maillage comme paramètres, nous parlons d'optimisation géométrique comme le montre le cas de la figure 1.11. Devant le nombre important de variables, il s'avère essentiel, là encore, d'utiliser l'information du gradient. La principale difficulté est qu'ici le maillage va se déformer et risque alors d'être dégradé à mesure des itérations. Plusieurs techniques comme le remaillage via un level-set permettent de résoudre cette difficulté [Dapogny 2013].



**Figure 1.11** – Exemple d'optimisation géométrique sur une coque de forme en L  
Forme initial (a) et forme optimale trouvée (b)  
*Source : 3dcadworld.com – Toyota Technological Institute*

### Optimisation paramétrique

Le troisième type d'optimisation de forme est celui de l'optimisation paramétrique. Comme en figure 1.12, les paramètres sont des longueurs, des angles, des rayons, etc. Le modèle présenté est bien-sûr simplifié et des cas industriels plus complexes sont présentés par la suite. Il est très fastidieux et très long de préparer ces modèles paramétriques mais ils permettent de respecter les contraintes de fabrication. Le prix à payer est un espace de conception fortement réduit.



**Figure 1.12** – Exemple de paramètres CAO ( $L_1, L_2$  et  $r$ ) pour l'optimisation paramétrique

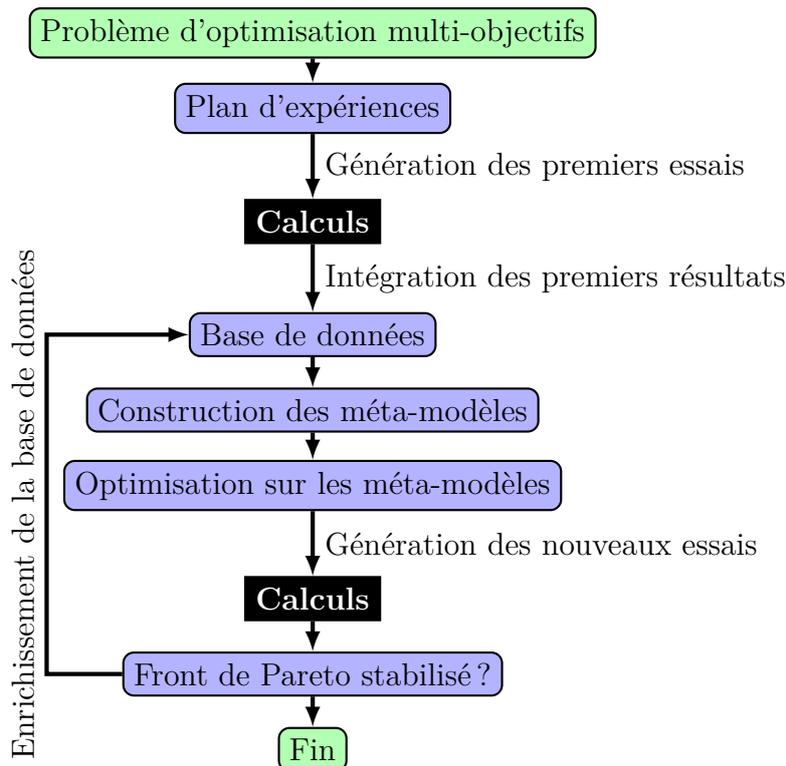
C'est avec ce type d'optimisation que sont gérés les problèmes de dynamique rapide dans l'automobile. Cela est dû au fait que le nombre réduit de paramètres ne nécessite pas le recours aux gradients, d'ailleurs non disponible pour le crash (nous y reviendrons ultérieurement). Nous allons détailler par la suite l'optimisation par plan d'expériences

et méta-modèles, la méthode la plus employée pour l'optimisation paramétrique avec des objectifs antagonistes comme ceux du crash.

### 1.2.2 Optimisation par plan d'expériences et méta-modèles

Les problèmes d'optimisation de l'industrie automobile portent sur des critères souvent antagonistes. Nous avons vu dans la première partie que les critères bio-mécaniques comme le HIC ou l'OLC nécessitent d'avoir la caisse la plus souple possible mais cela revient à augmenter les intrusions dans l'habitacle. Le crash est donc un problème d'optimisation avec des objectifs antagonistes. De surcroît, il faut ajouter les problèmes vibratoires et la volonté de réduction de masse.

Les industriels utilisent la méthode générique décrite en figure 1.13 pour l'optimisation de ces problèmes. Comme la plupart des calculs sont longs, ils commencent par réaliser un plan d'expériences et ainsi générer la première base de données sur laquelle seront constitués les méta-modèles. L'optimisation multi-objectifs sera effectuée sur ces méta-modèles et proposera de nouveaux essais. Ces essais, une fois réalisés, permettront d'enrichir la base de données et d'améliorer les méta-modèles. Ce processus est répété jusqu'à stabilisation du front de Pareto ou jusqu'à consommation du budget calcul.



**Figure 1.13** – Algorithme générique d'optimisation par plan d'expériences et méta-modèles

L'un des avantages de ce type d'optimisation en « boîtes noires » pour le calcul est qu'il

permet de traiter de manière générique les différents problèmes que peuvent rencontrer les ingénieurs dont la résistance aux chocs.

La littérature montre que cette méthode d'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponse est effectivement celle majoritairement retenue pour les problèmes de crash [Fang 2005, Jansson 2003, Marklund 2001, Sinha 2007] et pour les problèmes couplés crash et vibratoires [Duddeck 2008, Hoppe 2005]. C'est pourquoi nous allons par la suite définir plus en détails cette méthode avant de l'appliquer.

### 1.2.2.1 Plans d'expériences

Lorsque les essais sont longs et coûteux – et c'est le cas du crash –, il convient de déterminer les configurations de paramètres qui vont fournir le plus d'informations sans être redondant. C'est le rôle des plans d'expériences. Nous n'allons pas détailler ces plans mais juste en donner une liste non-exhaustive. Davantage d'informations sont disponibles dans [Goupy 1999]. Nous pouvons par exemple citer :

- les plans Latin Hypercube (LHS),
- les plans orthogonaux,
- les plans optimaux,
- ou les plans sursaturés.

Une fois le plan d'expérience choisi et effectué, les essais serviront de base de données initiale pour la construction des méta-modèles que nous allons voir par la suite.

### 1.2.2.2 Optimisation multi-objectifs par méta-modèles

Le but de l'optimisation est de déterminer la configuration  $P$  de paramètres qui minimise une ou plusieurs fonctions  $J^k(P)$ , avec  $k = \{1, \dots, n\}$ , en respectant un certain nombre de contraintes. Le problème d'optimisation s'écrit alors ainsi :

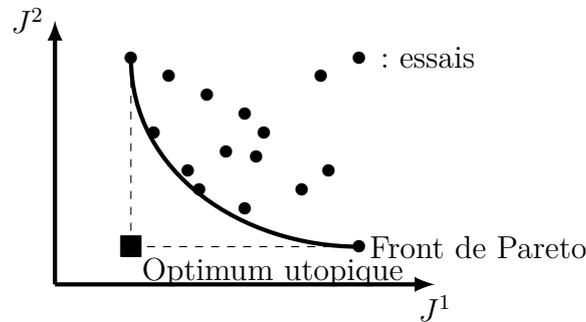
$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver} && P = \{p_1, \dots, p_m\} \\
 & \text{Pour minimiser} && J^k(P), k = \{1, \dots, n\} \\
 & \text{avec} && h_i(P) = 0, 0 \leq i \leq p \\
 & && g_j(P) \leq 0, 0 \leq j \leq q
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec  $h_i(P)$  les contraintes d'égalité et  $g_j(P)$  les contraintes d'inégalité.

Contrairement aux problèmes d'optimisation mono-objectif, il n'existe pas forcément une configuration qui minimise toutes les fonctions objectifs  $J^k$ . C'est le cas des différents objectifs antagonistes que nous retrouvons dans le crash. Un compromis doit être fait. Dans l'optimisation multi-objectifs, nous cherchons à établir un front de Pareto : c'est-à-dire l'ensemble des configurations dites optimales qui dominent les autres configurations. La dominance se définit ainsi :

Soient  $P^1$  et  $P^2$  deux configurations distinctes, alors  $P^1$  domine  $P^2$  si,  $\forall k$ , nous avons  $J^k(P^1) \leq J^k(P^2)$  avec au moins une inégalité stricte pour une des fonctions objectifs  $J^k$ .

La figure 1.14 illustre le front de Pareto dans le cas d'un problème à deux objectifs. Une fois ce front établi, il ne reste alors aux ingénieurs qu'à déterminer la configuration qui leur convient le mieux.



**Figure 1.14** – Illustration d'un front de Pareto pour un problème à deux objectifs

Les différents algorithmes qui permettent de déterminer le front de Pareto sont néanmoins très coûteux en nombre d'évaluation. Dans le cas de calcul long, il est préférable de travailler sur des méta-modèles. Un méta-modèle, ou surface de réponse, est une fonction qui approxime la fonction réelle à partir des différents essais effectués.

Nous allons décrire les quelques méta-modèles qui ont été utilisés dans ces travaux par la suite. Nous noterons  $D = \{P^1, \dots, P^{n_e}\}$  la matrice de l'ensemble des configurations de paramètres de la base de donnée et  $R = \{J(P^1), \dots, J(P^{n_e})\}$  leur réponse.  $n_e$  correspond au nombre d'essais effectués.

### Modèles polynomiaux

La classe de surfaces de réponse la plus utilisée est celle des modèles polynomiaux. Elle consiste en l'approximation du modèle réel par des polynômes. Un modèle polynomial se construit à partir des configurations  $D$  et de leur réponse  $R = J(X)$  en cherchant à déterminer la matrice des coefficients polynomiaux  $A$  tout en minimisant l'erreur  $\epsilon$  :

$$R = DA + \epsilon \tag{1.12}$$

### Modèles MARS et Poly-MARS

Les modèles MARS<sup>f</sup> et Poly-MARS<sup>g</sup> utilisent quant à eux des polynômes par morceaux pour estimer la réponse [Friedman 1991, Kooperberg 1997]. Cela permet d'inclure des discontinuités dans le modèle et de s'approcher au mieux de problèmes non-linéaires.

---

f. Multivariate Adaptive Regression Spline

g. Polychotomous regression based on MARS

## 1.2. État de l'art de l'optimisation en dynamique rapide

---

Ces modèles utilisent une somme de fonctions charnières de base  $B_i(P)$  – comme  $\max(0, x-3)$  par exemple – ou un produit de fonctions charnières et s'écrivent comme suit :

$$\hat{R}(D) = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i B_i(D) \quad (1.13)$$

où  $c_i$  est un coefficient constant et  $\hat{R}(X)$  l'approximation de  $R$ .

### Krigeage

Du nom de son inventeur D.G. Krige [Krige 1951], le krigeage a commencé à être utilisé pour l'optimisation à la fin des années 1980 dans le cadre de la simulation numérique [Sacks 1989]. Ce modèle probabiliste considère que la réponse  $J$  est une réalisation d'un processus gaussien :

$$J(P) \approx Y(P) = \mu(P) + Z(P) \quad (1.14)$$

où  $\mu(P)$  est la tendance déterministe du modèle et  $Z(P)$  modélise les résidus et est un processus gaussien à moyenne nulle :  $\mathbb{E}[Z(P)] = 0$ . Cela implique que la variance  $Var[Z(P)] = Var[Y(P)] = \sigma_Z^2$  et que  $\mu(P) = \mathbb{E}[Y(P)]$ .

Nous avons pour fonction de covariance, ou noyau, *ker* qui se formule ainsi :

$$ker(P^i, P^j) = cov[Y(P^i), Y(P^j)] = cov[Z(P^i), Z(P^j)] \quad (1.15)$$

Le krigeage consiste à déterminer l'estimation  $\hat{Y}(P^0)$  pour la configuration de paramètres  $P^0$  du processus  $Y(P)$  construit à partir des  $n_e$  essais effectués :

$$\hat{Y}(P^0) = \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i(P^0) Y(P^i) \quad (1.16)$$

Il faut alors déterminer les coefficients  $\lambda = \{\lambda_i(P^0)\}$  en respectant la condition de non-biais et en minimisant la variance de krigeage.

- La condition de non-biais se détermine grâce à  $\mathbb{E}[\hat{Y}(P^0) - Y(P^0)] = 0$ , soit :

$$\sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i(P^0) \mu(P^i) - \mu(P^0) = 0 \quad (1.17)$$

- Quant à la variance, elle s'écrit

$$Var[\hat{Y}(P^0) - Y(P^0)] = \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} \lambda_i \lambda_j cov[Z(P^i), Z(P^j)] - 2 \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i cov[Z(P^i), Z(P^0)] + Var[Z(P^0)] \quad (1.18)$$

## Chapitre 1. Contexte

---

Le krigeage revient donc à la résolution du problème suivant :

Trouver  $\lambda = \{\lambda_i\}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n_e\}$ , minimisant la variance

$$\lambda^T C \lambda - 2\lambda^T c_0 + \sigma_Z^2 \quad (1.19)$$

Tout en respectant la contrainte de la condition de non-biais

$$\sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i (P^0) \mu(P^i) - \mu(P^0) = 0$$

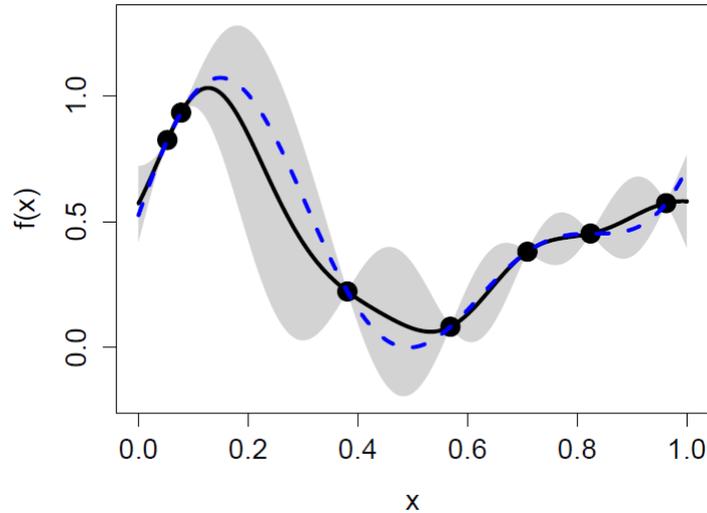
où  $C$  est la matrice de covariance de terme  $C_{ij} = cov[Z(P^i), Z(P^j)]$ ,  $c_0$  est le vecteur des covariances  $cov[Z(P^i), Z(P^0)]$  et  $\sigma_Z^2$  est la variance  $Var[Z(P^0)]$ .

Il existe plusieurs modèles de krigeage qui diffèrent selon l'écriture de la tendance et du noyau de covariance. Par exemple, le krigeage universel voit sa tendance s'écrire  $\mu(P) = h^T(P)\beta$  avec  $h$  le vecteur de fonctions de tendance et  $\beta$  un vecteur de coefficient. De même, nous pouvons illustrer le noyau de covariance en prenant l'exemple de la gaussienne (que nous avons utilisé pour l'étude de l'annexe B). La covariance s'écrit alors :

$$cov[Z(P^i), Z(P^j)] = ker(P^i, P^j) = \sigma_Z^2 \prod_{k=1}^{n_p} \exp\left(-\frac{(p_k^i - p_k^j)^2}{2\theta_k^2}\right) \quad (1.20)$$

où  $n_p$  est le nombre de paramètres  $P$  et les  $\theta_k$  sont les paramètres dit de longueur de corrélation.

De nombreux autres noyaux et modèles de tendance existent, certains d'entre eux permettent de prendre en compte des phénomènes comme le bruit [Gratiet 2013]. Comme explicité dans [Laurent 2013] et résumé dans [Picheny 2014], il convient de déterminer les hyperparamètres ( $\beta, \theta$  et  $\sigma_Z^2$  dans notre cas) par des méthodes telles que le maximum de vraisemblance [Forrester 2008]. La figure 1.15 prend l'exemple d'un modèle de krigeage basé sur 7 essais. Nous y distinguons la prédiction du modèle donnée par une loi normale de moyenne  $\mu(P)$  et d'écart type celui du modèle de krigeage.



**Figure 1.15** – Exemple de modèle de krigeage

Les points noirs représentent les 7 essais, la courbe bleu pointillée la fonction réelle, la courbe noire la moyenne du modèle et l'aire grisée l'intervalle de confiance à 95%

Source : [Picheny 2014]

Cette catégorie de méta-modèles permet d'estimer l'erreur de prédiction et donc de la prendre en compte dans des méthodes d'optimisation telles qu'EGO [Jones 1998] ou encore de quantifier l'incertitude du front de Pareto [Binois 2015].

### Mélange d'expert

Comme chacun des modèles précédents peut déceler un comportement que les autres n'auront pas déterminé et qu'il est difficile de choisir entre chacun d'eux, il est possible de combiner plusieurs surfaces de réponse en les pondérant en fonction de leur erreur [Jacobs 1991]. Cela nous permet d'en utiliser plusieurs afin d'avoir une meilleure estimation.

Ce mélange de méta-modèles est majoritairement employé dans les études Renault [Mercier 2012]. Il s'avère que c'est le mélange d'expert qui présente les meilleures estimations de la réponse pour les problèmes de crash comme le montre [Schumacher 2015]. Cet article passe d'ailleurs en revue certains méta-modèles appliqués au crash – comme les réseaux de neurones – que nous ne détaillerons pas.

### 1.3 Problèmes de forme en crash

La caisse en blanc de la figure 1.16 est le squelette du véhicule automobile. Constituée en majorité de pièces de tôles minces en acier, elle se trouve être l'un des éléments les plus complexes à dimensionner. En plus de s'adapter à la catégorie du véhicule et aux différents moteurs, elle touche à la plupart des prestations de la voiture. En tant que squelette, elle doit soutenir les autres pièces, supporter les vibrations et, étant le constituant le plus lourd, les objectifs de réduction de sa masse sont les plus importants.



**Figure 1.16** – Caisse en blanc de la Renault Latitude  
*Source : Présentation Renault Latitude, EuroCarBody 2010*

C'est aussi la caisse qui permet à la voiture de résister aux chocs. Certaines de ses pièces servent à absorber l'énergie du choc comme les crash-boxes ou les longerons, alors que d'autres font parties de l'habitacle et ne doivent pas se déformer.

L'analyse du processus de conception va nous permettre de voir quels sont les différents paramètres de forme qui pourraient apparaître lors d'une étude d'optimisation en crash. Nous nous attarderons ensuite sur deux cas industriels pour comprendre pourquoi les méthodes d'optimisation par surfaces de réponse ne permettent pas la standardisation, voire l'application de ces techniques aux problèmes de forme que nous aurons listés.

#### 1.3.1 Processus de conception et résistance au chocs

Comme dans l'aéronautique ou la mécatronique, l'ingénierie des systèmes complexes dans l'automobile se base sur le déploiement d'un cahier des charges spécifiant les objectifs et contraintes de chaque constituant. Bien-entendu, il est impossible d'avoir un niveau de détail important dès le début d'un projet. Avant de définir le produit, il faut exprimer le besoin et l'analyser [Lévesque 2003]. Le premier niveau du cahier des charges, spécifiant ce besoin, pourra alors être écrit par des outils d'ingénierie système [Sibony 2013b, Sibony 2013a]. Le cahier des charges peut commencer à être déployé, c'est-à-dire qu'il sera détaillé au fur et à mesure des solutions choisies. La figure 1.17 illustre les principales étapes de déploiement.

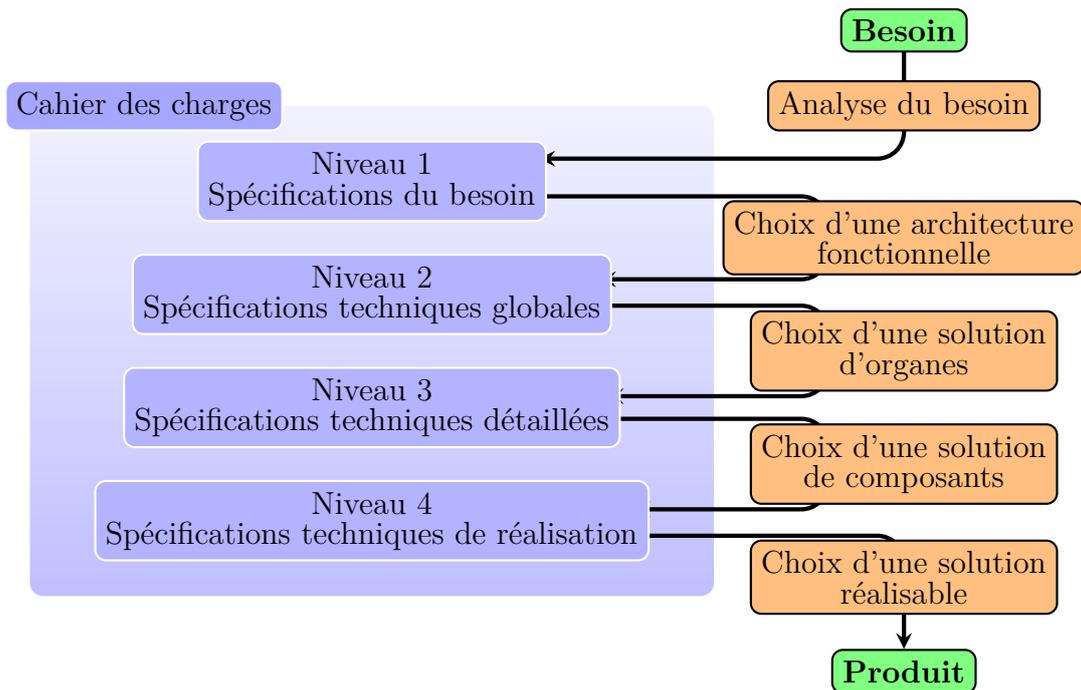


Figure 1.17 – Déploiement du cahier des charges

Ainsi, si le bloc avant doit répondre au besoin spécifié de la résistance aux chocs frontaux, il est possible d'écrire ses spécifications techniques globales comme les niveaux d'énergie à absorber suivant les types de chocs. La figure 1.18 propose une solution d'organes permettant d'y répondre : la traverse extrême avant et les crash-boxes absorberont l'énergie des petits chocs assurances alors que les longerons protégeront l'habitacle en dissipant l'énergie lors de grands chocs. Cette solution semble être la plus commune mais n'est pas unique : il est possible d'ajouter d'autres voies d'effort avec des addons<sup>h</sup> ou de modifier totalement l'architecture. Il ne reste alors qu'à dimensionner les composants de ces organes et de voir comment les réaliser.

h. Les addons sont une voie d'effort complémentaire présente sur plusieurs véhicules. Même si cette voie basse permet d'améliorer la tenue en crash, cela alourdit fortement la voiture.

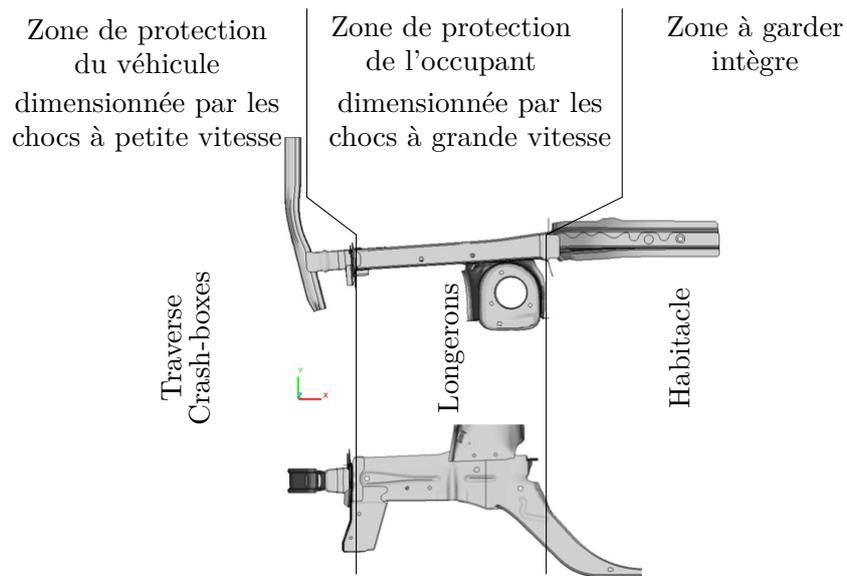


Figure 1.18 – Utilité des zones du bloc avant  
 Source : [Paulet 2014]

Dans l'industrie, ce processus prend la forme du cycle en V visible en figure 1.19. Ce cycle combine ainsi la phase d'étude et de conception, correspondant au déploiement du cahier des charges et à la recherche de solution, et la phase d'intégration (ou de validation) vérifiant qu'il est bien respecté. Grâce à la CAO et la simulation numérique, chaque étape de la phase de descente est vérifiée, accélérant le processus et évitant un coût trop élevé de la phase d'intégration [Devalan 2009, Lebrun 2003].

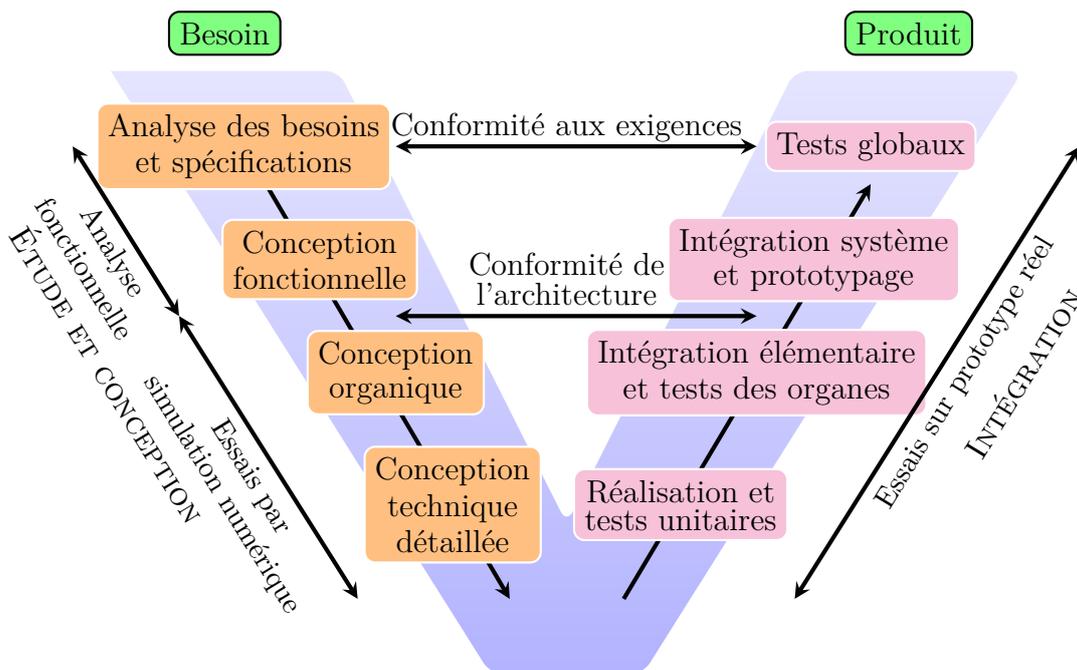


Figure 1.19 – Cycle en V

L'industrie automobile répète ce cycle depuis plusieurs décennies et dispose à présent de modèles de calcul à chacune de ces étapes. Comme le propose First Design [Jézéquel 2003, Chatillon 2005, Dahan 2007], elle souhaiterait intégrer un processus d'optimisation à chaque niveau du cycle de conception. Il faut alors dégager les paramètres de forme possibles des études d'optimisation en crash.

### 1.3.2 Paramètres de forme de la caisse en blanc

Les paramètres de forme de la caisse en blanc sont variés et nombreux. Il est possible de les lister en les hiérarchisant suivant la descente du cycle en V.

#### Les paramètres « Design »

Les premiers paramètres qui sont fixés lors d'un projet et qui pilotent la forme de la caisse sont ce que nous allons appeler les paramètres « Design ». Ils répondent à la question : « Quel type de véhicule voulons-nous créer ? ». Ils sont fixés en toute phase amont et sont complétés par l'aspect extérieur issu de l'équipe design. Des exemples de ces paramètres sont listés en figure 1.20.

*Quel véhicule voulons-nous créer ?*

#### Paramètres « Design »

- Type du véhicule,
- Type de motorisation,
- Propulsion ou traction,
- Écartement des roues,
- Design extérieur,
- Paramètres d'ergonomie...

Exemple :



Une citadine à traction électrique comme la Renault Zoé ou une petite citadine à propulsion thermique comme la Renault Twingo ?

**Figure 1.20** – Exemples de paramètres « Design »

*Sources des images : Zoé, myrenaultzoe.com et Twingo, renault.fr*

#### Les paramètres d'architecture

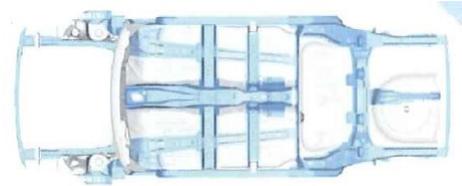
Une fois les paramètres « Design » donnés, il convient de définir l'architecture de la caisse. Les paramètres d'architecture, dont quelques exemples se trouvent en figure 1.21, définissent les volumes fonctionnels de chaque constituants. Ils répondent à la question : « Quelle doit-être l'architecture du véhicule pour qu'il réponde au mieux au cahier des charges global ? ».

Quelle doit être l'architecture du véhicule pour qu'il réponde au cahier des charges global ?

### Paramètres d'architecture

- Positionnement des voies d'effort,
- Positionnement des nœuds structuraux,
- Hauteur du plancher,
- Position du tablier...

Exemple :



Voies d'effort de l'ancienne Mazda2

**Figure 1.21** – Exemples de paramètres d'architecture

Source de l'image : Présentation Mazda lors de l'EuroCarBody 2014

### Les paramètres organiques

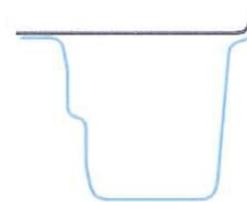
Le volume fonctionnel des pièces étant défini, il convient de fixer leur forme au sein de ce volume. La plupart de ces pièces sont en tôles minces. Les paramètres organiques contrôlent alors, généralement, la forme des sections pilotantes comme celles de la figure 1.22. Le choix de la forme optimale est en réponse à la question : « Quelle doit être la forme de ma pièce pour qu'elle réponde au cahier des charges pièces ? ».

Quelle doit être la forme de ma pièce pour qu'elle réponde au cahier des charges pièce ?

### Paramètres organiques

- Positions de point de contrôle de spline,
- Longueurs,
- Rayons...

Exemple :



Section du longeron arrière de la Mazda2

**Figure 1.22** – Exemples de paramètres organiques

Source de l'image : Présentation Mazda lors de l'EuroCarBody 2014

### Les paramètres d'emboutis locaux

Il advient souvent que la forme organique de la pièce ne suffise pas à satisfaire les objectifs. Dans ce cas, des emboutis sont placés pour rigidifier ou affaiblir localement la pièce comme l'illustre la figure 1.23.

Quelle doit être la forme de ma pièce pour qu'elle réponde au cahier des charges pièce ?

**Paramètres de renforts**

- Forme de raynures,
- Trous,
- Contre-emboutis,
- Triggers...

Exemple :



Triggers et renforts

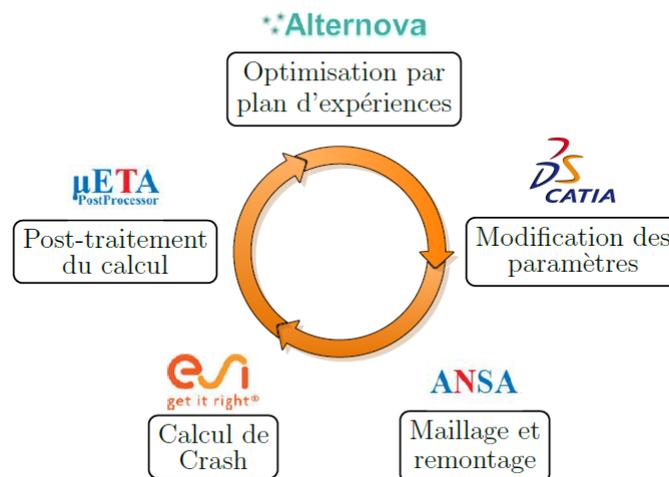
**Figure 1.23** – Exemples de paramètres de renforts

**Les paramètres d'assemblage et de process**

La dernière classe de paramètres est liée à l'assemblage et à la fabrication des pièces. Ces paramètres peuvent être pris en compte lors de l'élaboration du paramétrage des formes organiques afin de rejeter les formes non-admissibles. Nous pouvons citer comme exemples les largeurs de feuillures, les angles de dépouilles ou encore l'emplacement des points de soudure. Cette catégorie correspond le plus souvent à des contraintes plutôt qu'à des variables.

**1.3.3 Exemples d'études d'optimisation**

Afin d'appliquer l'algorithme décrit dans la figure 1.13 aux problématiques automobiles, Renault et EuroDécision ont développé le logiciel Alternova. Celui-ci a été utilisé fructueusement sur divers problèmes comme le choc piéton [Mercier 2012]. Pour gérer la génération des essais, une boucle automatique, représentée figure 1.24, a été implémentée.



**Figure 1.24** – Boucle automatique de génération des essais de crash

Dans le cas de problèmes d'optimisation avec paramètres de forme CAO, la boucle modifie les paramètres du modèle CAO générique, sous CATIA par exemple, puis maille

automatiquement ce modèle sous ANSA. Après génération du modèle de calcul, la simulation est lancée puis post-traitée. Les valeurs des critères sont ensuite injectés dans la base de données d'Alternova. Cet outil d'optimisation propose et génère des plans d'expériences ainsi que plusieurs types de surfaces de réponse qui seront utilisées pour le mélange d'experts.

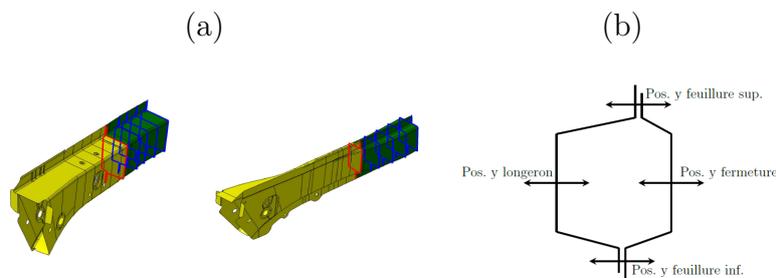
Ce logiciel a d'abord été développé pour traiter les paramètres d'épaisseur et de matériau. Les problèmes actuels comprenant plus souvent des paramètres de forme, l'outil a été adapté et permet de traiter quelques paramètres combinatoires et de forme.

Afin d'illustrer cet état de l'art et de montrer en quoi l'optimisation de forme en crash avec de nombreux paramètres est problématique, nous allons utiliser ce logiciel lors de deux études. Ces études concernent l'optimisation de la forme d'un longeron avant pour la prestation choc avant.

### 1.3.3.1 Étude de la forme organique d'un longeron avant

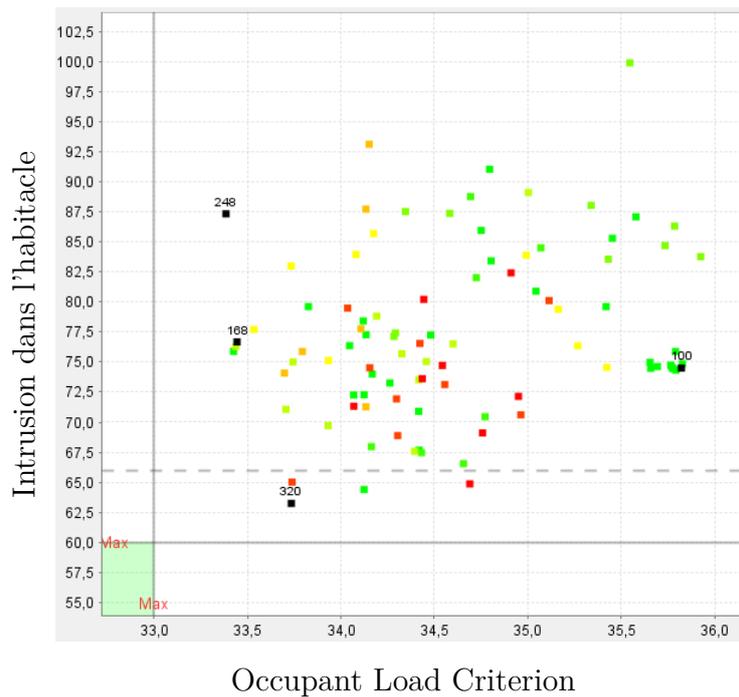
La première étude consiste à trouver la forme organique optimale de longerons avant épurés, c'est-à-dire sans trou ni contre-emboutis. Les paramètres de forme de cette étude pilotent les 200 premiers millimètres des longerons avant. Au nombre de 24, ils régissent les 6 esquisses pilotantes visibles sur la figure 1.25, avec 4 paramètres de forme par esquisse :

- la position en  $y$  de la feuillure supérieure,
- la position en  $y$  de la feuillure inférieure,
- la position en  $y$  du bord de la fermeture,
- et la position en  $y$  du bord du longeron.



**Figure 1.25** – Paramétrage de la forme organique pour l'étude des longerons avant  
(a) : les esquisses pilotantes en bleu, les esquisses de raccord en rouge et la zone à optimiser en vert ; (b) : les paramètres de chaque esquisse

Le problème a ici deux objectifs : la minimisation de l'Occupant Load Criterion et la minimisation de l'intrusion dans l'habitacle. Les calculs ont été faits avec un modèle complet de véhicule et l'utilisation de l'estimation des effets de l'emboutissage par approche inverse. L'optimisation a été faite via un mélange d'experts de quatre modèles polynomiaux de degré différents ainsi que deux Poly-MARS pour chaque réponse. L'algorithme utilisé est l'algorithme d'optimisation génétique NSGA-II. Les résultats se trouvent en figure 1.26.



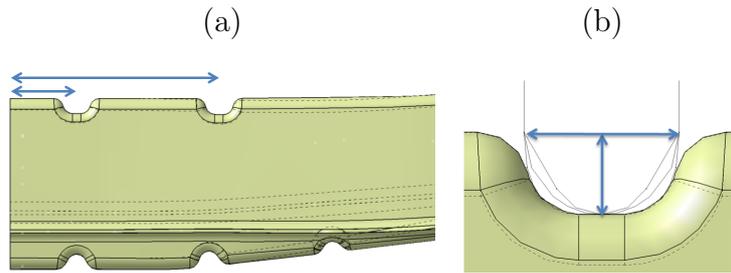
**Figure 1.26** – Résultat de l'étude de la forme organique des longerons avant L'OLC en abscisse et l'intrusion en ordonnée. L'échelle du vert au rouge correspond à l'avancée des itérations. L'essai 100 est l'essai de référence avec sa dispersion numérique autour de lui. Les trois configurations en noir correspondent aux configurations choisies.

Nous observons dans cette figure que le front de Pareto ne s'est pas encore dégagé et ce par manque de budget calcul. En effet, 154 calculs d'environ 9h / 16 processeurs ont été effectués. De plus, il est possible de voir que des points issus d'itérations avancées (en rouge) peuvent se retrouver au milieu du plan d'expériences (en vert) dû à la prédiction perfectible des méta-modèles. Quelques bonnes configurations, en noir sur la figure, ont pu tout de même être trouvées.

### 1.3.3.2 Étude de la forme et de la position des triggers sur le longeron

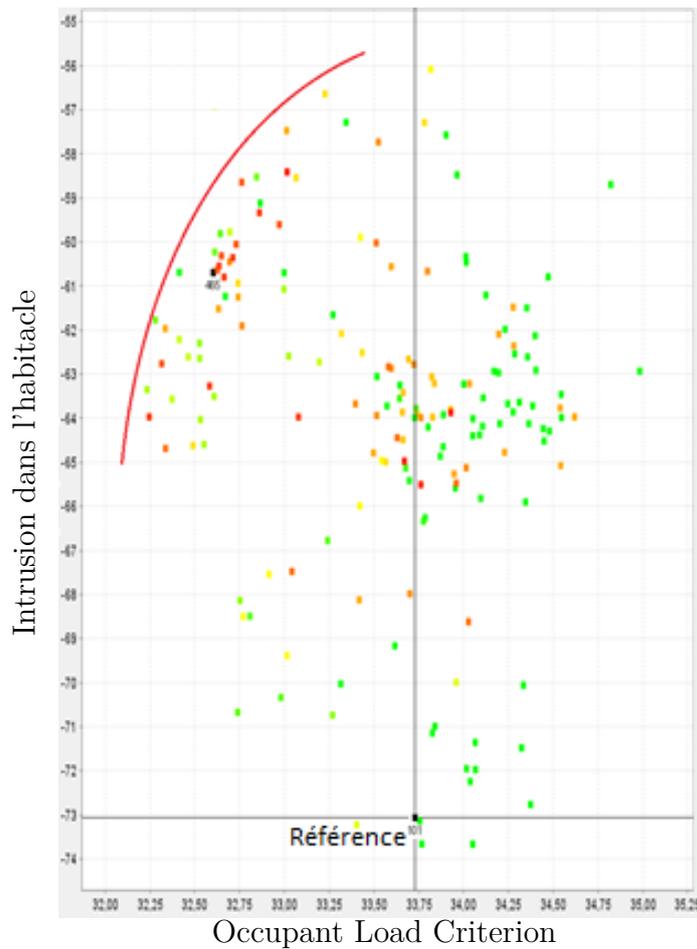
La seconde étude concerne la forme et le positionnement des triggers sur le longeron. Les triggers sont des contre-emboutis placés sur le soubassement (voir figure 1.23) qui permettent, dans le cadre du crash, d'amorcer l'effondrement axial des voies d'effort. Cette étude a été réalisée dans le cadre du stage d'A. Sousa De Paula [Paula 2014]. Nous dénombrons 25 paramètres de forme. Pour chacun des 5 triggers, comme l'illustre la figure 1.27, nous pilotons :

- sa position sur le longeron,
- sa profondeur,
- sa largeur,
- sa forme (ovale, rectangulaire ou triangulaire),
- et s'il est présent ou non.



**Figure 1.27** – Paramétrage de la forme et de la position des triggers  
(a) : positionnement des triggers sur le longeron, (b) : paramètres de largeur et de profondeur pour un trigger.

Les objectifs et méthodes de calcul sont les mêmes que l'étude précédente. L'intrusion est négative et est donc à minimiser. L'optimisation a été faite avec quatre modèles polynomiaux de degré différent et deux Poly-MARS pour chaque réponse. L'algorithme NSGA-II a été utilisé pour l'optimisation. Les résultats sont montrés figure 1.28.



**Figure 1.28** – Résultat de l'étude de forme et de positionnement des triggers  
L'OLC en abscisse et l'intrusion en ordonnée. L'échelle du vert au rouge correspond à l'avancée des itérations. La ligne rouge illustre le front de Pareto.

Nous pouvons voir dans cette figure qu'un front de Pareto s'est dessiné, mais au prix de 382 calculs de 7h / 16 processeurs. La qualité des surfaces de réponse est meilleure dans cette étude : il y a moins d'essais issus de vagues d'itérations avancées qui se trouvent au milieu du plan d'expériences initial.

### 1.3.3.3 Conclusion quant au coût d'une étude

Le coût des deux études précédentes est répertorié dans le tableau 1.2 suivant.

Étude	Nb. paramètres	Taille du PIEx	Nb. itérations	Nb. calculs	Temps de calcul /16 processeurs
Forme organique	24	58	6	154	1386h
Triggers	25	81	15	382	2674h

**Tableau 1.2** – Récapitulatif des coûts des études d'optimisation de forme du longeron avant

Seuls les 200 premiers millimètres du longeron ont été optimisés dans ces deux cas. Ce tableau montre le coût important en nombre d'essai et donc, pour le crash, le coût important en temps de calcul des études d'optimisation. Au regard des moyens actuels, si le nombre de paramètres de forme augmentait, l'étude nécessiterait un budget calcul prohibitif.

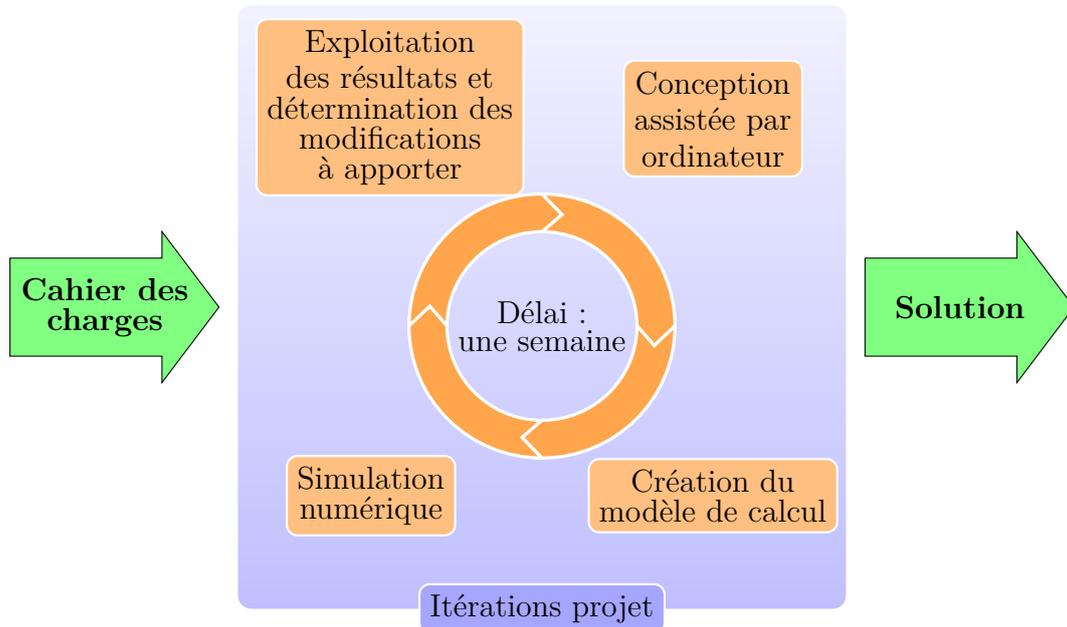
## 1.4 Synthèse du chapitre

Ce chapitre a été l'occasion de faire un état de l'art de l'optimisation de forme en dynamique rapide dans l'industrie automobile. L'analyse du problème de dynamique rapide le plus présent dans l'industrie automobile, le crash, a mis en lumière les différents objectifs de l'optimisation. Ils peuvent être classés en quatre catégories : ceux liés au déplacement d'un nœud (les intrusions), à la vitesse (l'OLC), à l'accélération (le HIC) et les critères énergétiques. La simulation en crash s'avère être problématique pour l'optimisation : temps de calcul long, non-linéarités, bifurcations, dispersion numérique, objectifs antagonistes...

Dans un second temps, la méthode d'optimisation usuellement utilisée pour les problèmes de crash, l'optimisation par plan d'expériences et surfaces de réponse, a été décrite. En listant les différents types de paramètres de forme que nous pouvons retrouver dans une étude d'optimisation dans la troisième partie, nous avons vu qu'ils sont nombreux et variés. Pour étudier la forme organique des 200 premiers millimètres d'un longeron avant, il est possible d'atteindre la cinquantaine de variables d'optimisation.

Une telle étude demande plus 3500h de calcul. Or, les constructeurs souhaitent faire des études d'optimisation à chaque niveau du cycle de conception. Les délais d'une itération projet sont d'une semaine pour déterminer, construire et tester une solution (cf. figure

1.29). Cette décorrélation des temps projet et des temps d'optimisation rend l'utilisation des méthodes présentées impossible à utiliser de manière industrielle.



**Figure 1.29** – Déroulement d'une itération projet

Nous en revenons à l'objet de cette thèse : « *Comment faire de l'optimisation de forme en crash avec un nombre important de paramètres ?* »

Une piste serait de trouver un gradient. En effet, les méthodes d'optimisation par direction de descente s'avèrent moins dépendantes du nombre de variables. Nous verrons dans le prochain chapitre comment nous en avons déterminé une.

---

## Bibliographie du 1<sup>er</sup> chapitre

- [Albertelli 2015] M. Albertelli, T. Abballe, G. Allaire, A. Caron, P. Couraux, L. Dall’Olio, C. Dapogny, C. Dobrzynski, B. Jeannin, F. Jouve, D. Lachouette, T. Le Sommer, K. Maquin, G. Michailidis, M. Siavelis et V. Srithammavanh. *RODIN project, topology optimization 2.0?* SIA, Congrès Simulation, 2015. (cité page 13)
- [Allain 2014] J.-C. Allain, M. Pariente, Y. Tourbier et T. Vuong. *Fast multi-physics optimization of a car*, 2014. (cité page 9)
- [Allaire 2003] G. Allaire, F. Jouve et A.-M. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, 2003. (cité pages 13 et 97)
- [Belytschko 1996] T. Belytschko, J.I. Lin et C.-S. Tsay. *Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shell*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 42, no. 2, pages 225–251, 1996. (cité page 10)
- [Bendsoe 2003] M.P. Bendsoe et O. Sigmund. *Topology optimization : theory, methods and applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (cité page 13)
- [Binois 2015] M. Binois. *Quantification d’incertitude sur fronts de Pareto et stratégies pour l’optimisation bayésienne en grande dimension, avec applications en conception automobile*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2015. (cité page 21)
- [Chatillon 2005] M.-M. Chatillon. *Méthodologie de conception robuste appliquée aux trains de véhicules de tourisme*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005. (cité page 25)
- [Cheva 1996] W. Cheva, T. Yasuki, V. Gupta et K. Mendis. *Vehicle development for frontal/offset crash using lumped parameters modeling*. SAE paper, no. 960437, 1996. (cité page 8)
- [Dahan 2007] R. Dahan. *Conception robuste avec modèles simplifiés de crash : Application au choc latéral d’une automobile*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007. (cité page 25)
- [Dapogny 2013] C. Dapogny. *Shape optimization, level-set methods on unstructured meshes and mesh evolution*. PhD thesis, École Doctorale Paris Centre, 2013. (cité pages 14 et 97)
- [Devalan 2009] P. Devalan. *La simulation numérique dans le processus de conception de systèmes mécaniques*. Techniques de l’ingénieur, no. BM 5 013, 2009. (cité page 24)
- [Duddeck 2008] F. Duddeck. *Multidisciplinary optimization of car bodies*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 35, pages 375–389, 2008. (cité page 17)
- [Fang 2005] H. Fang, M. Rais-Rohani, Z. Lin et M.F. Horstemeyer. *A comparative study of metamodeling methods for multiobjective crashworthiness optimization*. Computers and Structures Volume 83, pages 2121–2136, 2005. (cité page 17)
- [Forrester 2008] A. Forrester, A. Sobester et A. Keane. *Engineering design via surrogate modelling : a practical guide*. Wiley, 2008. (cité page 20)

- [Friedman 1991] J.H. Friedman. *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The annale of statistics, Volume 19, pages 1–141, 1991. (cité page 18)
- [Froment 2014] P. Froment. *Optimisation de formes paramétriques en grande dimension*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2014. (cité pages 13 et 79)
- [Goupy 1999] J. Goupy. *Plans d’expériences pour surfaces de réponses*. Dunod, 1999. (cité page 17)
- [Gratiet 2013] L. Le Gratiet. *Multi-fidelity Gaussian process regression for computer experiments*. PhD thesis, Université de Paris-Diderot, 2013. (cité pages 20 et 123)
- [Henn 1998] H.-W. Henn. *Crash Tests and the Head Injury Criterion*. Teaching Mathematics and its Applications Volume 17, no. 4, 1998. (cité page 6)
- [Hoppe 2005] A. Hoppe et M. Kaufmann. *Multidisciplinary optimization considering crash and NVH loadcases*. Lecture at ATZ/MTZ Virtual product creation, 2005. (cité page 17)
- [Huh 2003] H. Huh, K.P. Kim, S.H. Kim, J.H. Song, H.S. Kim et S.K. Hong. *Crashworthiness assessment of front side members in an auto-body considering the fabrication histories*. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 45, pages 1645–1660, 2003. (cité page 12)
- [Jacobs 1991] R.A. Jacobs, M.I. Jordan, S.J. Nowlan et G.E. Hinton. *Adaptive mixture of local experts*, 1991. (cité page 21)
- [Jansson 2003] T. Jansson, L. Nilsson et M. Redhe. *Using surrogate models and response surfaces in structural optimization – with application to crashworthiness design and sheet metal forming*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 25, pages 129–140, 2003. (cité page 17)
- [Jones 1998] D.R. Jones, M. Schonlau et W.J. Welch. *Efficient global optimization of expensive black box functions*. Journal of Global Optimization, Volume 13, pages 455–492, 1998. (cité page 21)
- [Jézéquel 2003] L. Jézéquel. *First Design : Pour une conception fiable et robuste des systèmes*, 2003. (cité page 25)
- [Kamal 1970] M.M. Kamal. *Analysis and simulation of vehicle to barrier impact*. SAE paper, no. 700414, 1970. (cité pages 8 et 9)
- [Kooperberg 1997] C. Kooperberg, S. Bose et C.J. Stone. *Polychotomous regression*. Journal of the American statistical association, Volume 92, pages 117–127, 1997. (cité page 18)
- [Krige 1951] D.G. Krige. *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*. Journal of the chemical, metallurgical and mining society of South Africa, Volume 52, pages 119–139, 1951. (cité page 19)
- [Kubler 2009] L. Kubler, S. Gargallo et K. Elsasser. *Frontal crash pulse assessment with application to occupant safety*. ATZ worldwilde, Volume 111, Issue 6, pages 12–17, 2009. (cité page 7)
- [Laurent 2013] L. Laurent. *Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l’optimisation multiniveaux de structures*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Cachan, 2013. (cité pages 20 et 123)

- [Lebrun 2003] M. Lebrun. *Simulation et CAO en automatique et mécatronique*. Techniques de l'ingénieur, no. S 7 260, 2003. (cité page 24)
- [Lévesque 2003] J.-R. Lévesque et C. Chavant. *Logiciels de modélisation des structures : expression du besoin*. Techniques de l'ingénieur, no. BM 5 016, 2003. (cité page 22)
- [Marklund 2001] P.O. Marklund et L. Nilsson. *Optimization of a car body component subjected to side impact*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 21, pages 383–392, 2001. (cité pages 17 et 44)
- [Mercier 1998] F. Mercier. *Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1998. (cité pages 12 et 56)
- [Mercier 2012] F. Mercier, M. Guillon et S. Maillot. *Deployment of optimization studies using Alternova : design of a hood inner panel for pedestrian safety performance*. Ingénieur de l'automobile, pages 29–46, 2012. (cité pages 21 et 27)
- [Michailidis 2014] G. Michailidis. *Manufacturing constraints and multi-phase shape and topology optimization via a level-set method*. PhD thesis, École Polytechnique, 2014. (cité page 14)
- [Paula 2014] A. Sousa De Paula. *Paramétrage de formes pour l'optimisation en crash de pièces de structures minces*. Rapport de stage de fin d'étude, 2014. (cité page 29)
- [Paulet 2014] A. Paulet. *Etude de la conception d'une crash-box de traverse avant pour l'automobile en matériau composite*. Rapport de stage de fin d'étude de Master, 2014. (cité page 24)
- [Picheny 2014] V. Picheny. *A stepwise uncertainty reduction approach to constrained global optimization*. 17<sup>th</sup> International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, pages 787–795, 2014. (cité pages 20 et 21)
- [Rosenblatt 2012] N. Rosenblatt. *Contribution à la conception robuste de véhicules en choc frontal : détection de défaillance en crash*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2012. (cité pages 10 et 12)
- [Sacks 1989] J. Sacks, S.B. Schiller et W.J. Welch. *Design for computer experiments*. Technometrics, Volume 31, pages 41–47, 1989. (cité page 19)
- [Schumacher 2015] A. Schumacher et C. Ortmann. *Combining state of the art metamodels for predicting the behavior of nonlinear crashworthiness structures for shape and sizing optimizations*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 21)
- [Sibony 2013a] S. Sibony. *Du besoin à la spécification : cas d'étude*. Techniques de l'ingénieur, no. 1244, 2013. (cité page 22)
- [Sibony 2013b] S. Sibony. *Du besoin à l'implantation : grands axes de l'ingénierie système*. Techniques de l'ingénieur, no. 1243, 2013. (cité page 22)
- [Sinha 2007] K. Sinha. *Reliability-based multiobjective optimization for automotive crashworthiness and occupant safety*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 33, pages 255–268, 2007. (cité page 17)

## Bibliographie du 1<sup>er</sup> chapitre

---

[White 1985] K.P. White, W.D. Pilkey, H.C. Gabler et T. Holowell. *Simulation optimization of the crashworthiness of a passenger vehicle in frontal collisions using response surface methodology*. SAE paper, no. 850512, 1985. (cité page 8)

# Estimation du gradient en dynamique rapide

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Recherche d'un gradient en dynamique rapide . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1.1	Optimisation par gradient . . . . .	38
2.1.1.1	Méthodes d'optimisation par gradient . . . . .	38
2.1.1.2	Calcul du gradient . . . . .	40
2.1.2	Calcul de gradient en dynamique rapide par les méthodes classiques . . . . .	43
2.1.2.1	Calcul par différences finies . . . . .	44
2.1.2.2	Calcul direct . . . . .	46
<b>2.2</b>	<b>Estimation du gradient par l'Equivalent Static Loads Method . . . . .</b>	<b>47</b>
2.2.1	Equivalent Static Loads Method . . . . .	47
2.2.1.1	Principe . . . . .	47
2.2.1.2	Calcul des forces statiques équivalentes . . . . .	49
2.2.1.3	Algorithme d'optimisation . . . . .	50
2.2.2	Estimation du gradient . . . . .	50
2.2.2.1	Analyse de la direction de descente . . . . .	51
<b>2.3</b>	<b>Optimisation en crash avec direction de descente . . . . .</b>	<b>54</b>
2.3.1	Méthode 1 : Optimisation avec le gradient approximé issu de l'ESLM . . . . .	55
2.3.2	Méthode 2 : Utilisation de la matrice de rigidité sécante . . . . .	56
2.3.3	Comparaison des deux méthodes et analyse de l'optimum . . . . .	58
2.3.3.1	Comparaison des directions de descente . . . . .	58
2.3.3.2	Analyse de l'optimum . . . . .	62
<b>2.4</b>	<b>Synthèse du chapitre . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie du 2<sup>e</sup> chapitre . . . . .</b>	<b>65</b>

En conclusion du chapitre précédent, nous avons souligné le fait que les méthodes d'optimisation classiquement utilisées pour la dynamique rapide deviennent trop coûteuses lorsque le nombre de paramètres de forme est important. Par conséquent, elles deviennent inutilisables par les concepteurs.

Nous avons vu que les méthodes topologique et géométrique utilisent l'information du gradient pour exploiter leurs nombreuses variables d'optimisation, ce que nous aimerions utiliser pour nos problèmes de forme en crash. Dans ce chapitre, nous allons montrer qu'aucune technique de calcul de gradient n'est actuellement disponible pour les problèmes de crash. Toutefois, en utilisant l'*Equivalent Static Loads Method*, il nous a été possible de l'estimer.

Pour l'instant, nous nous intéresserons uniquement à des problèmes mono-objectifs sur un critère en déplacement nodal comprenant comme variables d'optimisation des paramètres d'épaisseurs. Cela nous permettra de nous concentrer sur la présentation et la performance de la méthode.

### 2.1 Recherche d'un gradient en dynamique rapide

Nous chercherons dans cette partie à voir si un gradient est disponible pour nos problèmes d'optimisation en dynamique rapide. Mais avant de s'attaquer à l'étude des gradients dans le cas du crash, il convient de définir ce que cela veut dire et de voir comment ils sont utilisés dans les méthodes d'optimisation.

#### 2.1.1 Optimisation par gradient

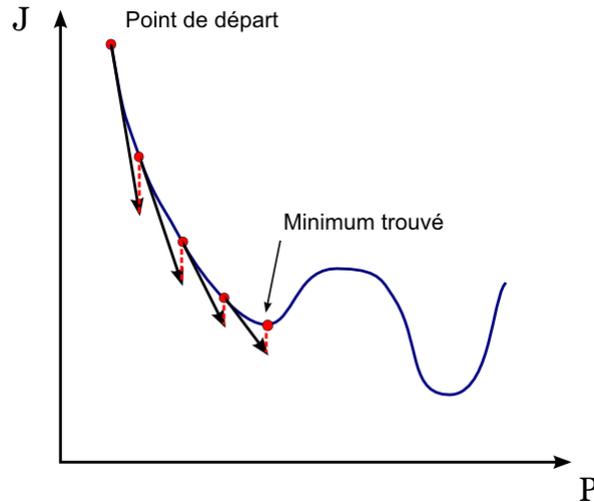
Un gradient  $\nabla_P J$  en optimisation est le vecteur des dérivées du critère  $J$  par rapport aux paramètres  $P$  :

$$\nabla_P J(P) = \left\{ \frac{dJ(P)}{dP} \right\} \quad (2.1)$$

##### 2.1.1.1 Méthodes d'optimisation par gradient

Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation utilisant le gradient. Pour permettre de comprendre comment fonctionne le gradient en optimisation, nous allons présenter ici les méthodes de descente pour un problème mono-objectif sans contraintes. Le problème consiste à minimiser la fonction objectif  $J(P)$ .

Comme illustré dans la figure 2.1, ces méthodes suivent le gradient pour déterminer le minimum. Un critère d'arrêt classique est  $\|\nabla J\| = 0$  car le gradient s'annule à l'optimum. Dans le cas présenté, nous n'atteindrons qu'un minimum local par ces méthodes en choisissant ce point initial. Pour de plus amples informations sur ces méthodes, il est possible de se référer à [Culioli 1994, Fletcher 1980].



**Figure 2.1** – Principe des méthodes de descente pour déterminer le minimum

### Méthode du gradient

La méthode du gradient consiste en l'approximation de la fonction  $J$  au voisinage de  $P^0$  à l'ordre 1 :  $J(P) \approx J(P^0) + \nabla J(P^0)(P - P^0)$ . Localement, la configuration  $P^1 = P^0 - \alpha \nabla J(P^0)$  est meilleure si le pas  $\alpha$  est positif :  $J(P^1) \leq J(P^0)$ .

L'algorithme du gradient à pas optimal consiste à suivre la direction  $-\nabla J$ , dans le cas d'une minimisation, tout en déterminant le pas optimal  $\alpha$  par une recherche linéaire. Il est aussi possible de conserver le pas  $\alpha$  fixe pour toute l'optimisation, il s'agit alors de l'algorithme du gradient à pas constant.

#### Algorithme du gradient à pas optimal

**Étape 0** : Étude de la configuration initiale  $k = 0$

TANT QUE *test\_convergence*  $\neq$  OK, nous itérons  $k = k + 1$

**Étape 1** : À l'itération  $k$  de configuration  $P^k$ , nous calculons  $J(P^k)$  et  $\nabla J(P^k)$ .

**Étape 2** : Nous effectuons une recherche linéaire pour déterminer le pas optimal

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} \{J(P - \alpha \nabla J)\}$$

**Étape 3** : La nouvelle configuration de paramètres est  $P^{k+1} = P^k - \alpha_k \nabla J(P^k)$ .

**Étape 4** : Test du critère d'arrêt

FIN TANT QUE

### Méthodes du gradient conjugué

Principalement utilisées pour les problèmes quadratiques, les méthodes du gradient conjugué peuvent s'appliquer dans le cas de fonctionnelles quelconques [Gilbert 1992]. Elles permettent d'éviter les oscillations lors de l'optimisation en modifiant la direction de descente de l'étape  $k + 1$  par celle de l'étape  $k$ .

**Algorithme du gradient conjugué**

**Étape 0 :** À l'étape initiale, nous calculons  $J(P^0)$  et  $\nabla J(P^0)$

La direction de descente est  $d_0 = \nabla J(P^0)$ .

TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons  $k = k + 1$

**Étape 1 :** À l'itération  $k$ ,

$$P^{k+1} = P^k - \alpha_k d_k \text{ avec } \alpha_k = \frac{d_k^T \nabla J(P^k)}{\|d_k\|^2}$$

**Étape 2 :** La nouvelle direction de descente est  $d_{k+1} = \nabla J(P^{k+1}) - \beta_k d_k$

**Étape 3 :** Test du critère d'arrêt

FIN TANT QUE

Dans le cas général, il existe deux variantes de  $\beta_k$  :

- celle de Fletcher-Reeves :

$$\beta_k^{FR} = -\frac{\|\nabla J(P^{k+1})\|^2}{\|\nabla J(P^k)\|^2}$$

- celle de Polak et Ribière :

$$\beta_k^{PR} = -\frac{[\nabla J(P^{k+1}) - \nabla J(P^k)]^T \nabla J(P^{k+1})}{\|\nabla J(P^k)\|^2}$$

Il est recommandé de réinitialiser la direction de descente au cours de l'optimisation.

**Méthode de Newton**

La méthode de Newton utilise les approximations au second ordre de la fonction  $J$ . En effet, autour de  $P^0$ , nous avons :

$$J(P) \approx J(P^0) + \nabla J(P^0)(P - P^0) + \frac{1}{2}(P - P^0)^T J''(P^0)(P - P^0) \tag{2.2}$$

Nous utilisons alors la matrice Hessienne  $J''(P^k)$  pour évaluer la configuration  $P^{k+1}$  :

$$P^{k+1} = P^k - [J''(P^k)]^{-1} \nabla J(P^k) \tag{2.3}$$

En général, il est difficile de calculer la matrice Hessienne. C'est pourquoi les méthodes de quasi-Newton telles que celle de Davidon-Fletcher-Powell ou celle de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanna l'approximent.

**2.1.1.2 Calcul du gradient**

Il existe des manières plus ou moins intrusives de calculer le gradient utilisé par les méthodes d'optimisation précédentes.

### Calcul par différences finies

La méthode de calcul la moins intrusive vis à vis du code de calcul, voire la plus ancienne, est celle des différences finies [Boole 1880]. Elle tient de la définition de la dérivée d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est dérivable en  $x \in E$  si et seulement si son taux d'accroissement admet une limite finie. Cette limite est la dérivée de  $f$  en  $x$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.4)$$

Ainsi, en utilisant le développement de Taylor du critère  $J(p + \Delta p)$  à une variable  $p$  avec le pas  $\Delta p$  qui tend vers 0, nous avons :

$$J(p + \Delta p) = J(p) + \Delta p J'(p) + \dots \quad (2.5)$$

Ce qui donne la méthode de calcul du gradient par différence finie (DFav) :

$$\text{DFav} : J'(p) = \frac{J(p + \Delta p) - J(p)}{\Delta p} + O(\Delta p) \quad (2.6)$$

De la même manière, en utilisant le développement de Taylor de  $J(p - \Delta p)$  et de  $J(p + 2\Delta p)$  et  $J(p - 2\Delta p)$  lorsque  $\Delta p$  tend vers 0, nous obtenons les méthodes de calcul par différences finies arrière (DFar) et par différences centrées (DC).

$$\text{DFar} : J'(p) = \frac{J(p) - J(p - \Delta p)}{\Delta p} + O(\Delta p) \quad (2.7)$$

$$\text{DC} : J'(p) = \frac{J(p + \Delta p) - J(p - \Delta p)}{2\Delta p} + O(\Delta p^2) \quad (2.8)$$

Pour écrire les équations précédentes, nous avons introduit la notion de pas  $\Delta p$ . Celui-ci doit être le plus petit possible pour éviter une trop grande erreur d'approximation. Or, dans le cas de fonctions bruitées comme celles issues du crash, un pas trop faible induit une erreur sur le calcul de la tendance. De plus, le calcul du gradient peut devenir rapidement conséquent avec un grand nombre de variables puisque ces méthodes impliquent un calcul pour chaque paramètre.

### Calcul par variable complexe

Afin d'éviter l'erreur due au calcul et de la contourner à celle de l'approximation de Taylor, la méthode par variable complexe a été proposée par [Squire 1998]. L'approche consiste à considérer la fonction comme étant à variable complexe. En utilisant le développement de Taylor de  $f(x + ih)$  en  $x$ , soit :

$$f(x + ih) = f(x) + ihf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots \quad (2.9)$$

Il est possible d'obtenir la dérivée grâce à l'identification d'une partie imaginaire :

$$f'(x) = \frac{\Im[f(x + ih)]}{h} + O(h^2) \quad (2.10)$$

L'utilisation de cette méthode nécessite une refonte des codes de simulation car chacun des opérateurs et chacune des routines doivent permettre l'utilisation de variables complexes.

### Méthode de calcul directe

Dans le cas de fonctions objectifs issues de simulations par éléments finis, il est parfois possible de calculer directement la dérivée [Adelman 1986]. Pour l'illustrer, nous souhaitons calculer la sensibilité d'une fonction  $J[P, X(P)]$  par rapport aux paramètres  $P$  avec  $X$  une variable conservative (un déplacement par exemple) évaluée grâce à l'équation d'état (2.11).

$$G[P, X(P)] = 0 \quad (2.11)$$

Elle peut être issue aussi bien de la statique linéaire que de la mécanique des fluides. La dérivée de la fonction  $J$  par rapport aux  $n_p$  paramètres  $p_i$  s'écrit :

$$\frac{dJ}{dP} = \frac{\partial J}{\partial P} + \frac{\partial J}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial P} \quad (2.12)$$

où le terme  $\frac{\partial X}{\partial P}$  se calcule en dérivant l'équation d'état (2.11).

$$\frac{dG}{dp_i} = \frac{\partial G}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial p_i}, \forall i \in \{1, \dots, n_p\} \quad (2.13)$$

Le calcul du gradient de  $J$  peut s'avérer très lourd. En effet, il va falloir résoudre les  $n_p$  équations (2.13). Des exemples d'application en statique et en dynamique sont présentés dans [Keane 2005].

### Méthode de calcul adjointe

Le coût de la méthode précédente étant très élevé, l'utilisation d'une méthode dite adjointe a été proposée dans les années 1980 [Cacuci 1981]. Elle consiste à recourir à la fonction lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}[P, X(P)] = J[P, X(P)] + \lambda^T G[P, X(P)] \quad (2.14)$$

où nous avons introduit le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  correspondant à l'adjoint. En imposant  $\frac{d\mathcal{L}}{dP} = 0$ , nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dP} = \left( \frac{\partial J}{\partial P} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial P} \right) + \left( \frac{\partial J}{\partial X} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial P} = 0 \quad (2.15)$$

En choisissant  $\lambda$  de manière à rendre le terme  $\left( \frac{\partial J}{\partial P} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial P} \right)$  nul, nous nous affranchissons du calcul de  $\frac{\partial X}{\partial P}$ . Nous obtenons alors l'équation adjointe à  $G[P, X(P)]$  :

$$\left[ \frac{\partial G}{\partial X} \right]^T \lambda = - \left[ \frac{\partial J}{\partial X} \right]^T \quad (2.16)$$

Le gradient de  $J$  se détermine par l'obtention de la solution  $\lambda$  de l'équation adjointe précédente :

$$\frac{dJ}{dP} = \frac{\partial J}{\partial P} + \lambda^T \frac{\partial G}{\partial P} \quad (2.17)$$

La formulation discrète de l'équation (2.16) peut s'obtenir par dérivation des équations d'états discrétisées ou par discrétisation de l'état adjoint issu d'une formulation continue. Cette méthode très intrusive a pour grand avantage de ne nécessiter la résolution que d'un système d'équations par fonction objectif ce qui s'avère essentiel lorsque le nombre de paramètres est important.

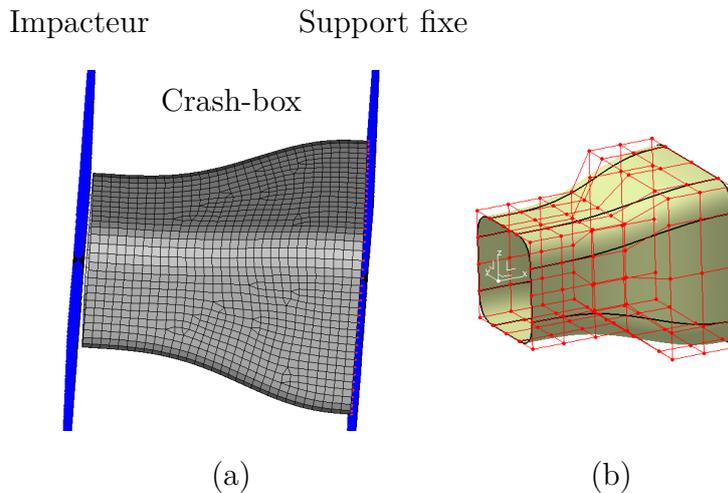
### 2.1.2 Calcul de gradient en dynamique rapide par les méthodes classiques

Nous allons à présent voir s'il est possible de calculer un gradient pour nos problèmes de crash et ainsi nous permettre d'exploiter un nombre élevé de paramètres.

### 2.1.2.1 Calcul par différences finies

L'utilisation des différences finies pour la détermination d'un gradient pour les problèmes de crash s'avère être prohibitif voire illusoire. En effet, si le nombre de paramètres est important, le nombre de calculs, d'une durée de plus de 10h, va aller au-delà du raisonnable. Toutefois, il existe dans la littérature des exemples d'utilisation de cette méthode [Marklund 2001].

Nous allons tenter d'appliquer cette méthode à un problème de forme. Le but de l'étude est de déterminer le pas  $h$  qui permettrait de calculer le gradient. Pour cela, le modèle paramétré de la figure 2.2 compte seulement 10 paramètres de forme contrôlant les points de contrôle, visibles en figure 2.2-b, des esquisses pilotantes. La fonction objectif choisie est celle de l'écrasement de cette crash-box en acier lors d'un impact à  $15 \text{ km.h}^{-1}$  contre un mur rigide. Pour plus d'informations concernant le paramétrage de la forme, il est possible de se référer au chapitre 3, paragraphe 3.4.2.1, de ce manuscrit. Ce cas-test est réutilisé en tant que problème d'optimisation de forme pour tester l'estimation du gradient développée dans ces travaux.



**Figure 2.2** – Cas test de l'étude de la détermination du pas pour un calcul de gradient par différences finies

Le modèle de calcul en (a) et les points de contrôles définissant la forme en (b).

Cette pièce en tôle mince a une taille de maille de 5mm, taille standard pour des calculs crash. Nous avons fait varier la valeur de chaque paramètre par les pas  $h \in [0,01; 0,025; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,75; 1]$ . La figure 2.3 représente la variation de la fonction objectif en fonction du pas et ce pour chaque paramètre.

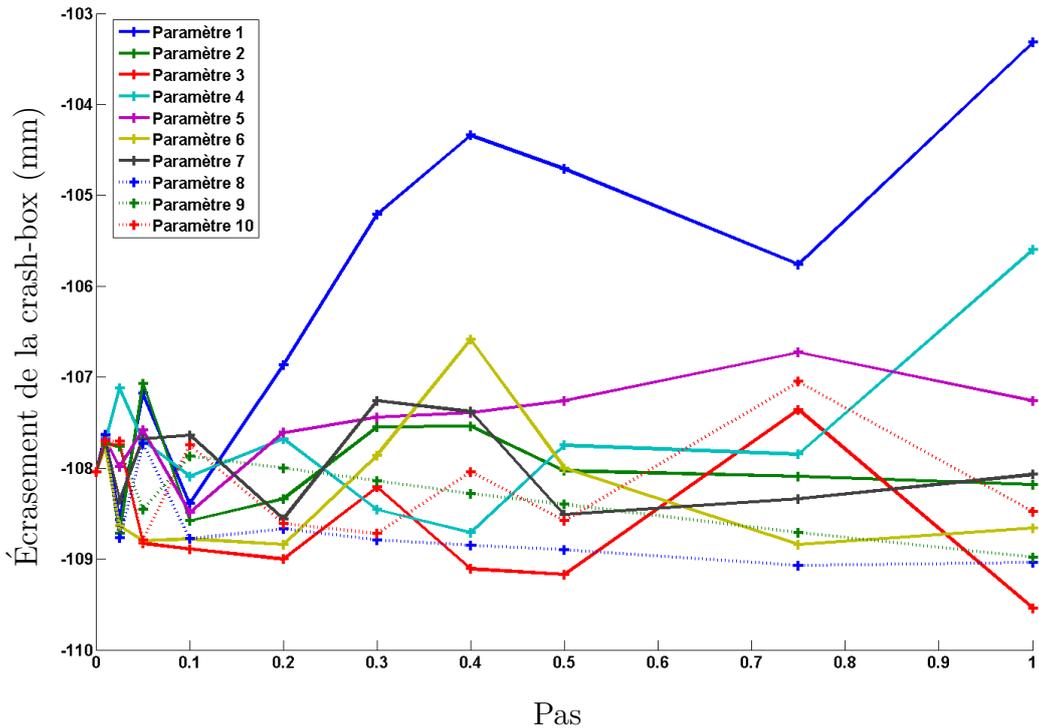


Figure 2.3 – Variation de la fonction objectif en fonction du pas  $h$  pour chaque paramètre

Ces courbes mettent en lumière le fait que la détermination d'un pas correct pour le calcul d'un gradient par différences finies en crash est très difficile. Le bruit numérique couplé à la non-répétabilité de la fonction rend impossible la détection d'une tendance régulière pour tous ces paramètres. La figure 2.3 étant peu lisible, nous proposons le tableau 2.1 qui répertorie les résultats du calcul de la dérivée par différences finies. En plus de donner un résultat différent pour chaque pas, le bruit provoque des changements de signe.

	Pas $h$ du calcul de gradient par différences finies									
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,75	1
$\partial_{p_1} J$	41	-21,2	17,2	-3,5	5,85	9,43	9,25	6,66	3,04	4,72
$\partial_{p_2} J$	36	-27,2	19,4	-5,4	-1,5	1,63	1,25	0,02	-0,067	-0,14
$\partial_{p_3} J$	30	11,6	-15,8	-8,5	-4,8	-0,57	-2,675	-2,26	0,91	-1,5
$\partial_{p_4} J$	33	36,8	6,8	-0,5	1,8	-1,4	-1,675	0,58	0,25	2,44
$\partial_{p_5} J$	35	2	9,2	-4,5	2,15	2	1,625	1,56	1,75	0,78
$\partial_{p_6} J$	27	-24	-15,2	-7,4	-4	0,6	3,625	0,08	-1,07	-0,62
$\partial_{p_7} J$	33	-12,4	7,2	4	-2,6	2,6	1,65	-0,94	-0,4	-0,03
$\partial_{p_8} J$	40	-29,2	6,2	-7,4	-3,15	-2,5	-2,025	-1,72	-1,37	-1
$\partial_{p_9} J$	31	11,2	-8,4	1,7	0,2	-0,33	-0,6	-0,72	-0,89	-0,94
$\partial_{p_{10}} J$	33	13,2	-15	2,9	-2,85	-2,27	0	-1,08	1,32	-0,44

Tableau 2.1 – Résultat du calcul du gradient par différences finies

Bien-entendu, les mailles de 5mm peuvent être considérées comme trop grossières. Mais

c'est pourtant le maillage standard des calculs de crash utilisé dans l'industrie automobile. Pour détecter la tendance, nous pourrions prendre des pas assez grand mais alors le gradient n'en serait que moins précis et donc moins pertinent.

Étant donné qu'un maillage plus fin réduit le bruit, nous utiliserons des mailles de 2mm pour l'optimisation. Ce choix allonge le temps de calcul et rend trop long le calcul d'un gradient par différences finies.

### 2.1.2.2 Calcul direct

Si nous souhaitions calculer le gradient de manière discrète, il faudrait dériver l'équation de dynamique rapide. Nous la rappelons dans son état discrétisé et général.

$$M(P)\ddot{X}(t,P) + C(P)\dot{X}(t,P) + H[X(t,P),P] = F(t,P) \quad (2.18)$$

où  $P$  sont les paramètres,  $M$  la matrice de masse,  $C$  la matrice d'amortissement,  $F$  le vecteur des forces externes,  $X$  le vecteur déplacement,  $\dot{X}$  et  $\ddot{X}$  ses dérivées première et seconde par rapport au temps  $t$  et  $H$  la fonction non-linéaire des forces internes (contact, rigidité, ...). Nous retrouvons la matrice de raideur tangente par la relation  $K_T = \frac{\partial H}{\partial X}$ .

En dérivant l'équation (2.18) par rapport à  $P$  comme détaillé dans [Andriambololona 2009] et en posant  $Y = \frac{\partial X}{\partial P}$ , nous obtenons :

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + K_T Y = \frac{\partial F}{\partial P} - \frac{\partial M}{\partial P}\ddot{X} - \frac{\partial C}{\partial P}\dot{X} - \frac{\partial H}{\partial P} \quad (2.19)$$

Le calcul du terme  $\frac{\partial H}{\partial P}$  s'avère très complexe à cause des forces de contact et de la non-linéarité. Comme nous l'avons rappelé précédemment, le calcul direct s'avère très lourd en nombre d'équation à résoudre, d'autant plus qu'il faut les multiplier par le nombre d'instant.

Et il faut ajouter à cela que cette méthode est très intrusive et que nous n'avons pas accès aux sources des codes de calcul de crash de l'industrie. De plus, ils utilisent, pour la plupart, une méthode de résolution explicite, ce qui implique que les différentes matrices nécessaires ne sont pas disponibles.

Cette partie nous a permis de souligner que les méthodes d'optimisation utilisant les gradients peuvent gérer un nombre important de paramètres s'ils sont calculés grâce à un adjoint. Celui-ci n'est actuellement pas disponible pour le crash. Comme les autres méthodes de calcul sont inenvisageables, nous nous sommes tournés vers la détermination d'une estimation du gradient grâce à une méthode récente utilisée pour l'optimisation en crash : l'Equivalent Static Loads Method.

## 2.2 Estimation du gradient par l'Equivalent Static Loads Method

Une méthode d'optimisation qui peut s'appliquer aux problèmes de crash a récemment été développée par Park [Park 2011]. L'Equivalent Static Loads Method, ou la méthode des forces statiques équivalentes, permet d'obtenir une estimation du gradient pour nos problèmes de dynamique rapide. Nous présenterons dans cette partie ses principes et comment nous l'avons exploité.

### 2.2.1 Equivalent Static Loads Method

Au début des années 2000, l'équipe Sud-Coréenne de G.-J. Park a proposé l'Equivalent Static Loads Method pour résoudre des problèmes de dynamique [Kang 2001]. L'utilisation de cette méthode permet d'alléger le coût de leur optimisation.

#### 2.2.1.1 Principe

Pour traiter ces problèmes, il est alors proposé d'effectuer l'optimisation non plus sur le problème non-linéaire mais sur un problème statique linéaire équivalent. Comme le montre la figure 2.4, l'ESLM<sup>a</sup> distingue un domaine d'analyse, correspondant au problème non-linéaire, et un domaine de conception, correspondant au problème de statique linéaire équivalent. Le premier domaine sert au calcul non-linéaire et permet d'extraire les fonctions objectifs ainsi que de définir les forces statiques équivalentes. Celles-ci permettront de construire le domaine de conception. L'optimisation est effectuée sur le problème équivalent et la nouvelle configuration est alors analysée dans le problème non-linéaire. Ce cycle est alors répété jusqu'à convergence.

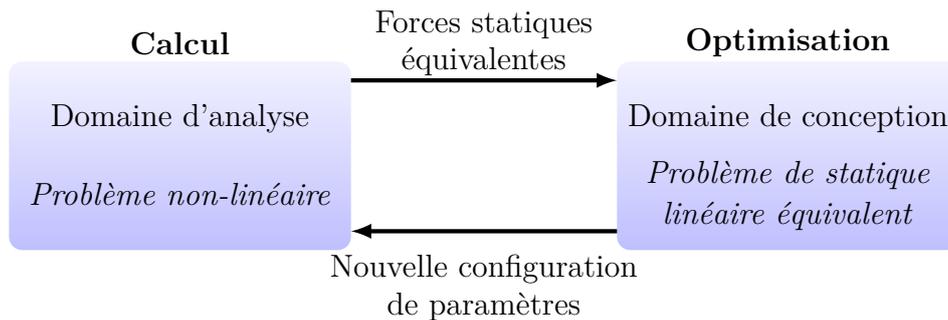


Figure 2.4 – Le domaine d'analyse et le domaine de conception

Cette méthode a d'abord été utilisée pour les problèmes vibratoires [Kang 2001]. C'est-à-dire ceux liés à l'équation de dynamique linéaire :

$$M(P)\ddot{X}_{NL}(P,t) + K(P)X_{NL}(P,t) = F(P,t) , \forall t \in [t_1, \dots, t_f] \quad (2.20)$$

a. Afin d'alléger ce manuscrit, l'acronyme ESLM correspondra à l'Equivalent Static Loads Method

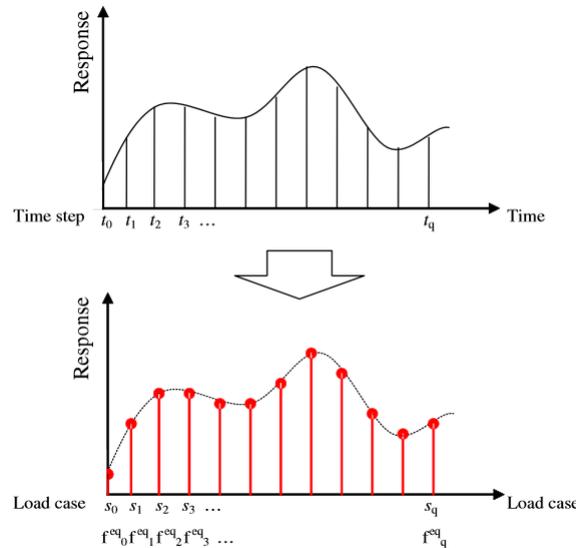
## Chapitre 2. Estimation du gradient en dynamique rapide

L'indice  $NL$  sera utilisé tout au long de ce manuscrit pour montrer que le vecteur déplacement  $X_{NL}$  est issu de l'équation du domaine d'analyse.

L'ESLM est maintenant étendue aux problèmes de statique non-linéaire [Park 2005b], aux problèmes de contact [Yi 2011a] ou encore aux problèmes de dynamique transitoire [Park 2005a]. Ces diverses applications sont résumées dans [Park 2011]. Celle qui nous intéresse particulièrement est celle de la résistance aux chocs [Jeong 2009]. En effet, à partir de l'équation (2.21) régissant le crash, il est possible de calculer des forces statiques équivalentes.

$$M(P)\ddot{X}_{NL}(P,t) + K_T[X_{NL}(P,t),P]\Delta X_{NL}(P,t) = F(P,t) , \forall t \in [t_1, \dots, t_f] \quad (2.21)$$

Les forces statiques équivalentes correspondent aux forces qui permettent de préserver la solution issue du problème non-linéaire dans le problème linéaire. Par exemple, dans le cas d'une fonction  $J[X_{NL}(P,t),P]$  dépendant du vecteur  $X_{NL}$  solution de l'équation non-linéaire, il va falloir déterminer la force équivalente  $f_{eq}$  qui permet de préserver ce vecteur dans le problème statique linéaire. Lorsque la réponse dépend du temps, une force équivalente va être calculée pour chaque instant comme le montre la figure 2.5 tirée de [Kim 2010].



**Figure 2.5** – Calcul des forces équivalentes à chaque instant  
Source de l'image : [Kim 2010]

Ainsi, les forces équivalentes vont permettre de construire les équations de statique linéaires (2.22) du domaine de conception sur lesquelles seront effectuées l'optimisation.

$$K_L(P)X_L(P) = f_{eq}^s(P) , \forall s \in [1, \dots, f] \quad (2.22)$$

où  $s$  correspond à l'instant de calcul,  $X_L$  le vecteur déplacement solution et  $K_L$  la matrice de rigidité choisie comme étant celle du modèle non-linéaire à l'instant initial.

### 2.2.1.2 Calcul des forces statiques équivalentes

En mécanique des structures, il existe principalement deux catégories de critères : ceux qui dépendent du déplacement et ceux qui dépendent de la contrainte. Il faut alors définir les forces équivalentes qui permettent de préserver les déplacements et aussi ceux préservant les contraintes.

#### Préservation du déplacement

Dans le cas où la fonction à minimiser dépend du déplacement,  $J[X_{NL}(P,t),P]$ , il faut conserver le déplacement  $X_{NL}$  à chaque instant dans le problème statique équivalent. Nous posons :

$$f_{eq}^{X,s} = K_L(P)X_{NL}(P,t_s) , \forall s \in [1,\dots,f] \quad (2.23)$$

où  $K_L$  est la matrice de rigidité initiale utilisée dans le problème équivalent. Nous obtenons bien par l'équation (2.22).

$$X_{NL}(P,t_s) = X_L(P) , \forall s \in [1,\dots,f] \quad (2.24)$$

Dans le cas où  $J$  dépend de la vitesse  $\dot{X}_{NL}(P,t)$  ou de l'accélération  $\ddot{X}_{NL}(P,t)$ , les problèmes statiques équivalents se construisent exactement de la même manière. En effet, comme les ESLs<sup>b</sup> sont calculés à chaque instant, nous pouvons déterminer par différences finies que :

$$\dot{X}_{NL}(P,t_s) = \frac{X_L^{s+1}(P) - X_L^s(P)}{t_{s+1} - t_s} \quad (2.25)$$

$$\ddot{X}_{NL}(P,t_s) = \frac{X_L^{s+1}(P) - 2X_L^s(P) + X_L^{s-1}(P)}{(t_{s+1} - t_s)(t_s - t_{s-1})} \quad (2.26)$$

#### Préservation des contraintes

Dans le cas où la fonction objectif dépend des contraintes, il est proposé dans [Choi 2005] de récupérer les contraintes  $\sigma_{NL}$  après le calcul non-linéaire et de les imposer comme un chargement extérieur  $f_{eq}^{\sigma,s}$  :

$$K_L(P)X_L(P) = f_{eq}^{\sigma,s} , \forall s \in [1,\dots,f] \quad (2.27)$$

Comme le calcul de dynamique rapide est souvent sous-intégré, il est conseillé d'ajouter un facteur correctif comme détaillé dans [Kim 2010].

---

b. ESL : Equivalent Static Load

### 2.2.1.3 Algorithme d'optimisation

L'Equivalent Static Loads Method dans le cadre de l'optimisation en crash se présente suivant cet algorithme.

#### Algorithme de l'ESLM appliqué au crash

**Étape 0 :** Initialisation,  $k = 0$

TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ ,  $k = k + 1$

**Étape 1 :** À l'itération  $k$ , nous effectuons un calcul de crash

$$M(P^k)\ddot{X}_{NL}(P^k, t) + K_T[X_{NL}(P^k, t), P^k]\Delta X_{NL}(P^k, t) = F(P^k, t)$$

**Étape 2 :** Nous calculons  $J[P^k, X_{NL}(P^k, t)]$  et la solution  $X_{NL}$  (ou les contraintes) est récupérée à chaque instant

**Étape 3 :** Nous calculons les forces statiques équivalentes

**Étape 4 :** Nous effectuons l'optimisation sur le problème statique équivalent

**Étape 5 :** La nouvelle configuration de paramètres obtenue par l'optimisation du problème équivalent est utilisée comme la nouvelle configuration  $P^{k+1}$

**Étape 6 :** Test du critère d'arrêt

FIN TANT QUE

Cette méthode a été utilisée de manière fructueuse sur plusieurs problèmes de résistance aux chocs sur des critères tels que le déplacement d'un nœud, le HIC ou encore des critères énergétiques de l'automobile [Lee 2015, Yi 2011b], voire même sur des problèmes de choc issus du monde du transport de télévision [Han 2015].

L'ESLM montre de bons résultats et est utilisée dans d'autres méthodes d'optimisation [Alavi 2011] ou en réduction de modèle [Kim 2014]. Toutefois, elle souffre d'un manque de conditions de validités du problème statique équivalent même si plusieurs écrits vont dans ce sens [Park 2003, Stolpe 2014].

### 2.2.2 Estimation du gradient

C'est à partir du problème statique linéaire équivalent défini par l'Equivalent Static Loads Method que nous avons estimé le gradient du problème de dynamique rapide. En effet, c'est le gradient du problème équivalent qui va être utilisé comme direction de descente .

Seuls les critères en déplacement nodal avec des paramètres d'épaisseur seront étudiés dans ce chapitre. Cela permettra d'explicitier les difficultés liées à la forme dans le chapitre suivant.

L'idée est d'utiliser le gradient issu des équations linéaires équivalentes comme une approximation du gradient de la fonction objectif  $J_{NL}[X_{NL}(P, t), P]$  liée au problème non linéaire :

$$\frac{dJ_{NL}}{dP} = \frac{\partial J_{NL}}{\partial P} + \frac{\partial J_{NL}}{\partial X_{NL}} \frac{\partial X_{NL}}{\partial P} \approx \frac{\partial J_{NL}}{\partial P} + \frac{\partial J_L}{\partial X_L} \frac{\partial X_L}{\partial P} \quad (2.28)$$

où  $\frac{\partial J_L}{\partial X_L} \frac{\partial X_L}{\partial P}$  est obtenu en dérivant l'équation d'état discrétisée (2.29) du problème équivalent.

$$G_{eq}[P, X_L(P)] = K_L(P)X_L(P) - f_{eq} = 0 \quad (2.29)$$

L'adjoint pour les problèmes de statique linéaire en déplacement existe, ce qui nous permet d'écrire que l'approximation (2.28) revient à :

$$\frac{dJ_{NL}}{dP} \approx \frac{\partial J_{NL}}{\partial P} + \lambda_L^T \frac{\partial G_{eq}}{\partial P} \quad (2.30)$$

où  $\lambda_L$  est la solution de l'état adjoint à  $G_{eq}[P, X_L(P)]$

Le fait que cet adjoint existe nous permet de pallier le problème du nombre de paramètres. De plus, le gradient du problème équivalent est rapide à calculer vis à vis du calcul de crash. Et, enfin, cette méthode est non-intrusive par rapport au code de calcul de dynamique rapide.

### 2.2.2.1 Analyse de la direction de descente

Il convient tout d'abord de tester si l'approximation de l'Equivalent Static Loads Method permet bien de définir une direction de descente. Comme les conditions de validité ne nous sont pas disponibles, nous proposons de tester numériquement le gradient approximé.

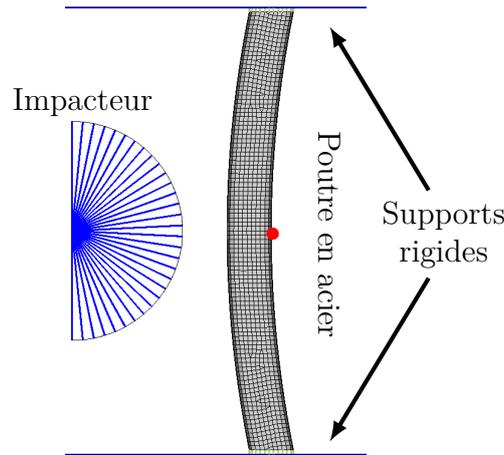
### Comparaison avec les différences finies

La première étude est de comparer la directions de descente obtenue via le problème équivalent avec un gradient obtenu par différences finies. Pour cela, nous allons prendre le cas-test visible en figure 2.6. Cette poutre courbée et encastree aux extrémités peut représenter un bavolet en choc poteau<sup>c</sup> ou une traverse extrême avant en choc bumper<sup>d</sup>. Elle subit en son centre l'impact à 10 km.h<sup>-1</sup> d'un poteau rigide d'une masse de 50kg. Afin d'éviter une mauvaise répétabilité et d'abaisser le bruit, nous prenons des petits pas de temps pour le calcul et maillons à 2mm. Cela, combiné à un pas  $h$  assez grand pour le calcul de différences finies, permettra d'avoir un résultat plus réaliste et éviter les difficultés dont nous avons parlées précédemment.

---

c. Dans le cadre du choc latéral poteau présenté en figure 1.3, les seules pièces permettant d'absorber l'énergie du choc sont la portière et le bavolet : une poutre en tôle mince située sous les portières.

d. Le choc bumper est un des chocs à petite vitesse comme le choc RCAR. Contrairement à ce dernier, la caisse subit le choc d'un impacteur cylindrique dans l'axe. Cela permet de dimensionner la traverse extrême avant visible en figure 1.18.



**Figure 2.6** – Cas-test poutre transverse en choc poteau à un paramètre d'épaisseur

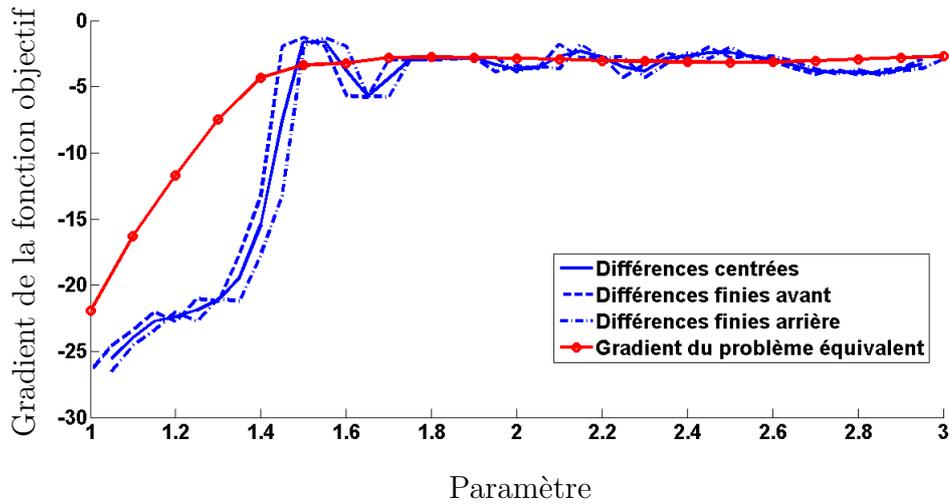
Nous avons ici un seul paramètre d'épaisseur que nous faisons varier entre 1mm et 3mm par pas de 0,1mm. La fonction objectif est le déplacement final de noeud 1 visible en rouge sur la figure 2.6. Notre fonction objectif dépend seulement de l'instant final qui est fixé, l'équation d'état discrétisée du problème statique équivalent est :

$$G_{eq} = K_L(p)X_L(p) - f_{eq}^{t_f} = 0 \text{ avec } f_{eq}^{t_f} = K_L X_{NL}(t_f) \quad (2.31)$$

De plus, la fonction objectif ne dépend du paramètre  $p$  que par  $X_{NL}(p)$ , le gradient selon l'approximation de l'ESLM s'écrit donc :

$$\frac{dJ_{NL}}{dp} \approx \nabla J_L = \lambda_L^T \frac{\partial F_{eq}}{\partial p} \quad (2.32)$$

Le gradient du problème équivalent est calculé grâce à la SOL200 du logiciel **Nastran**. Les calculs de crash sont effectués avec le logiciel **PamCrash**. Le calcul du gradient par différences finies avant, arrière et par différences centrées sera effectué avec un pas de 0,05mm. Les résultats sont présentés figure 2.7.

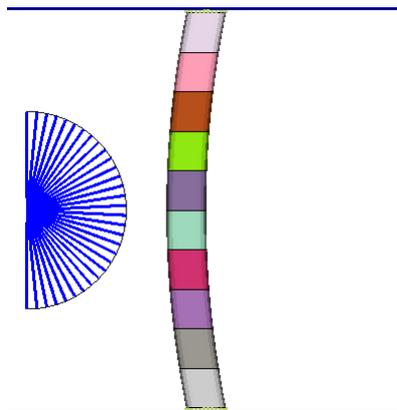


**Figure 2.7** – Estimation du gradient calculée grâce à l’ESLM et gradient calculé par différences finies

Cette figure montre que le gradient du problème équivalent ne se superpose pas complètement avec celui calculé par différences finies. Cependant, la même tendance est observée. L’écart observé pour les faibles épaisseurs peut s’expliquer par le fait qu’à ces valeurs, la poutre a des difficultés à absorber toute l’énergie du choc provoquant un allongement des éléments au-delà du raisonnable. Cela intensifie l’erreur de l’estimation et celle du calcul du gradient par différences finies.

### Recherche linéaire

Dans l’étude précédente, seul un paramètre était utilisé. La fonction objectif était d’ailleurs croissante. Pour voir si le gradient du problème équivalent est effectivement une direction de descente pour le problème de crash, nous proposons d’utiliser le même cas-test mais avec 10 paramètres d’épaisseur cette fois.



**Figure 2.8** – Cas-test poutre transverse en choc poteau avec 10 paramètres d’épaisseur

En partant de la configuration où tous les paramètres sont égaux à 2mm, une recherche linéaire a été effectuée suivant la direction de descente  $\nabla J_L$  : c’est-à-dire en faisant varier

le pas  $\alpha$  entre -1 et 1 de la fonction  $J_{NL}(P^0 - \alpha \nabla J_L)$ . Le résultat est présenté en figure 2.9.

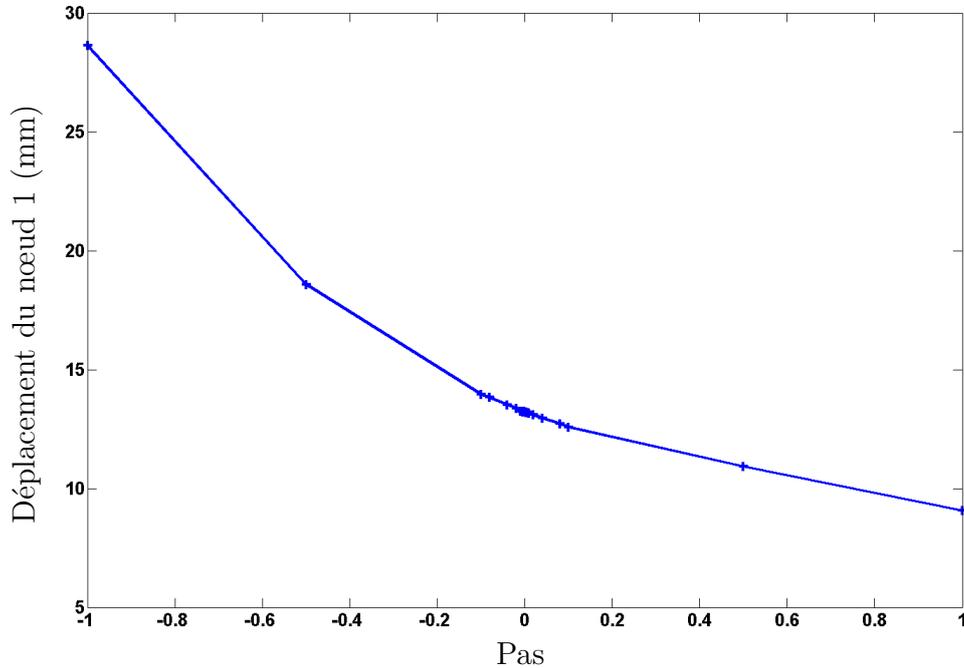


Figure 2.9 – Recherche linéaire sur le cas-test poutre transverse avec 10 paramètres

La fonction objectif  $J$  décroît bien lorsque le pas  $\alpha$  est positif et augmente lorsque le pas est négatif. Numériquement, nous avons bien le gradient  $\nabla J_L$  qui est une direction de descente pour le problème de crash : le produit scalaire  $\langle -\nabla J_{NL}, -\nabla J_L \rangle > 0$ .

Nous avons vérifié que le gradient du problème équivalent construit par l'ESLM se comporte comme une direction de descente pour les problèmes de crash. Maintenant, nous allons étudier comment il se comporte lors d'une optimisation.

### 2.3 Optimisation en crash avec direction de descente

Il est possible de construire différemment le problème équivalent servant à obtenir la direction de descente. Deux méthodes sont proposées. La première consiste à utiliser le problème statique équivalent de l'Equivalent Static Loads Method pour calculer un gradient approximé. La seconde méthode propose d'améliorer le problème équivalent par l'utilisation de la matrice de rigidité sécante. Nous appliquerons et comparerons ces différentes techniques sur le cas-test de la poutre transverse en choc poteau.

### 2.3.1 Méthode 1 : Optimisation avec le gradient approximé issu de l'ESLM

Pour tester l'utilisation du gradient issu de l'approximation de l'ESLM pour l'optimisation en crash, un simple algorithme de descente a été implémenté. Ici, les seules contraintes viennent des bornes sur les paramètres. L'unique complexité de ce test réside dans l'utilisation des différents outils disponibles dans le secteur automobile.

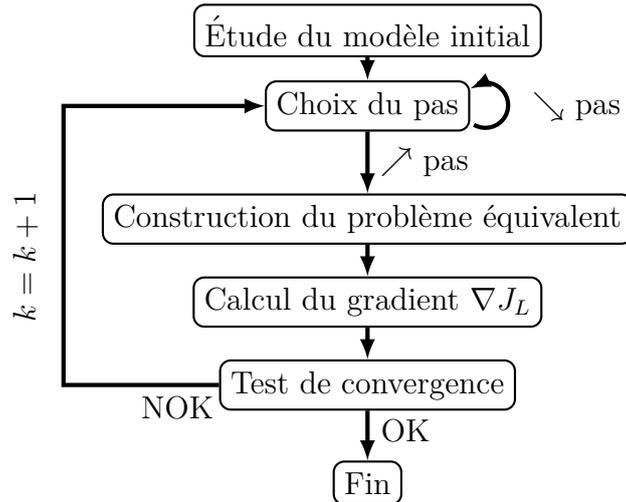


Figure 2.10 – Algorithme de la boucle de test

Le logiciel Matlab a été utilisé pour piloter l'algorithme, représenté figure 2.10.

#### Algorithme de test du gradient issu de l'ESLM

**Étape 0 :** Étude de la configuration initiale  $k = 0$

Création du modèle de calcul, calcul de la fonction objectif  $J[P^0, X_{NL}(P^0, t)]$ , calcul du gradient du problème équivalent  $\nabla J_L(P^0)$  et initialisation du pas  $\alpha_0$ . Ces étapes sont décrites par la suite.

TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons  $k = k + 1$

**Étape 1 :** Choix du pas de l'itération  $k$ .

Il serait trop lourd d'effectuer une recherche linéaire à chaque itération. Une simple adaptation du pas  $\alpha_k$  est effectuée.

TANT QUE  $test\_fonction\_objectif \neq OK$

**Étape 1-a :** Modification des paramètres en suivant la direction du gradient  $\nabla J_L$ , tout en respectant les bornes.

$$P^k = P^{k-1} - \alpha_k \nabla J_L(P^{k-1})$$

**Étape 1-b :** Modification du modèle de calcul (ANSA).

**Étape 1-c :** Calcul explicite de crash (PamCrash).

$$M(p^k) \ddot{X}_{NL}(P^k, t) + K_T[X_{NL}(P^k, t), P^k] X_{NL}(P^k, t) = F(P^k, t)$$

**Étape 1-d :** Calcul de la fonction objectif  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k]$  (MetaPost).

```

SI  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k] \leq J[X_{NL}(P^{k-1}, t), P^{k-1}]$ 
   $test\_fonction\_objectif = OK$  et  $\alpha_{k+1} = \alpha_k \times 1,5$ 
SINON
   $\alpha_k = \alpha_k \times 0,5$ 
FIN SI
FIN TANT QUE
Étape 2 : Récupération de  $X_{NL}(P^k, t_i) \forall t_i \in [t_1, \dots, t_f]$  dont nous avons besoin
pour la construction du problème statique équivalent (MetaPost).
Étape 3 : Calcul des forces statiques équivalentes (DMAP Nastran).


$$f_{eq}^s = K_L X_{NL}(t_s) \forall s \in [1, \dots, f]$$


Étape 4 : Calcul du gradient du problème statique linéaire équivalent  $\nabla J_L(P^k)$ 
(SOL200 de Nastran).
Étape 5 : Test de convergence ou test de fin du budget calcul.
FIN TANT QUE

```

Les coefficients 0,5 et 1,5 qui modulent le pas ont été choisis de manière arbitraire.

### 2.3.2 Méthode 2 : Utilisation de la matrice de rigidité sécante

Afin d'améliorer la direction de descente, nous proposons de modifier le problème statique linéaire équivalent en utilisant la matrice de rigidité sécante au lieu de la matrice de raideur initiale.

Nous nous basons sur les hypothèses du chargement quasi-proportionnel [Lemaitre 1985], soit :

- Les efforts extérieurs croissent proportionnellement à un seul paramètre.
- L'état initial est l'état non-déformé non écroui.
- Le matériau obéit à la loi de Prandtl-Reuss.
- La loi d'écrouissage est une fonction puissance.
- Les déformations élastiques sont négligées.

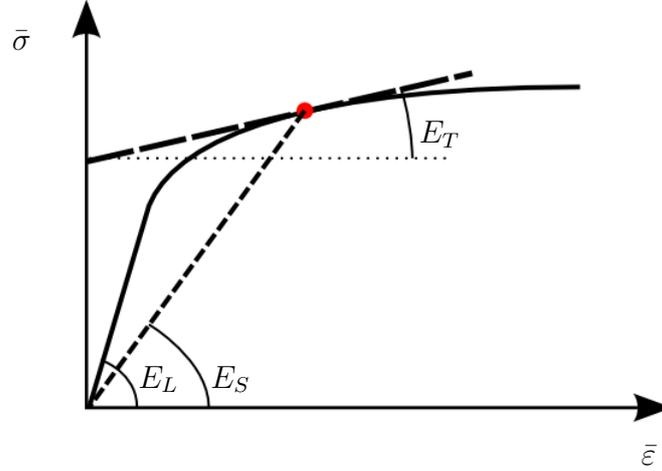
Bien-entendu, les hypothèses de chargement quasi-proportionnel ne sont pas toujours vérifiées tout le long d'un calcul, surtout la première. Mais cela permet de poser un cadre à la méthode et alors de pouvoir estimer l'erreur comme ceux proposés dans [Debruyne 2012]. Dans ce cadre, il nous est possible d'utiliser le module de Young sécant [Mercier 1998].

La loi matériau utilisée pour nos calculs de dynamique rapide est une loi type puissance de la forme suivante :

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_e + a(\bar{\varepsilon}_p)^n \tag{2.33}$$

où  $\bar{\varepsilon}_p$  est la déformation plastique de Von Mises,  $\sigma_e$  la limite élastique et  $\bar{\sigma}$  la contrainte de Von Mises.  $a$  et  $n$  sont des constantes dépendantes du matériau.

Il est alors possible de définir le module de Young initial  $E_L$ , tangent  $E_T$  et sécant  $E_S$  comme sur la figure 2.11.



**Figure 2.11** – Définition du module de Young initial  $E_L$ , tangent  $E_T$  et sécant  $E_S$

Le module d'élasticité sécant est alors :

$$E_S = \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}} \quad (2.34)$$

En calculant le module sécant pour chaque élément du modèle de calcul, il est possible de créer la matrice de rigidité sécante  $K_S$  par assemblage à chaque instant de calcul :

$$K_S = \sum_{e=1}^{nb. \text{ elem}} [T_e]^T [K_S^e]_{loc} [T_e] \quad (2.35)$$

Cette matrice de rigidité va être utilisée pour le problème statique linéaire équivalent à la place de la matrice de rigidité initiale  $K_L$  comme proposée par l'ESLM. Nous aurons alors les équations suivantes comme équations du problème équivalent :

$$K_S^s(P) X_L(P) = f_{eq}^s, \forall s \in [1, \dots, f] \quad (2.36)$$

avec  $f_{eq}^s = K_S^s(P) X_{NL}(P, t_s)$  et  $K_S^s(P)$  la matrice de rigidité sécante calculée à l'instant  $t_s$ . Cela permettra d'imposer que  $X_L = X_{NL}(t_s)$  et que les contraintes soient aussi préservées.

Une étape de calcul de la matrice de rigidité sécante est donc incluse dans l'algorithme de test avant le calcul des forces équivalentes.

#### **Algorithme de test du gradient obtenu avec la matrice de rigidité sécante**

**Étape 0** : Étude de la configuration initiale  $k = 0$

TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons  $k = k + 1$

**Étape 1** : Choix du pas de l'itération  $k$ .

TANT QUE  $test\_fonction\_objectif \neq OK$

**Étape 1-a** : Modification des paramètres en suivant la direction du gradient  $\nabla J_L$ , tout en respectant les bornes.

**Étape 1-b** : Modification du modèle de calcul.

**Étape 1-c** : Calcul explicite de crash.

**Étape 1-d** : Calcul de la fonction objectif  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k]$ .

SI  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k] \leq J[X_{NL}(P^{k-1}, t), P^{k-1}]$   
 $test\_fonction\_objectif = OK$  et  $\alpha_{k+1} = \alpha_k \times 1,5$

SINON  
 $\alpha_k = \alpha_k \times 0,5$

FIN SI

FIN TANT QUE

**Étape 2** : Récupération de  $X_{NL}(P^k, t_i) \forall t_i \in [t_1, \dots, t_f]$  dont nous avons besoin pour la construction du problème statique équivalent.

**Étape 3** : Calcul du module de Young sécant  $E_S$  pour chaque élément (Matlab) et assemblage de la matrice de rigidité sécante  $K_S^s$  (Nastran) pour chaque instant nécessaire  $t_s$ .

**Étape 4** : Calcul des forces statiques équivalentes (DMAP Nastran).

$$f_{eq}^s = K_S^s X_{NL}(t_s) \forall s \in [1, \dots, f]$$

**Étape 5** : Calcul du gradient du problème statique linéaire équivalent  $\nabla J_L(P^k)$  (SOL200 de Nastran).

**Étape 6** : Test de convergence ou test de fin du budget calcul.

FIN TANT QUE

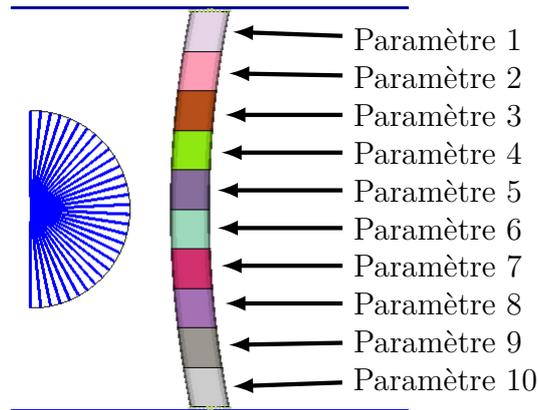
### 2.3.3 Comparaison des deux méthodes et analyse de l'optimum

Deux manières de définir le problème statique équivalent ont ainsi été proposées. La première utilise le problème statique linéaire équivalent classique proposé dans l'Equivalent Static Loads Method. La seconde construit le problème équivalent en utilisant la matrice de rigidité sécante en lieu et place de la matrice de raideur initiale. Cela permet de préserver à la fois les contraintes et les déformations dans le problème équivalent et de poser des conditions de validités qui sont celles du chargement quasi-proportionnel.

#### 2.3.3.1 Comparaison des directions de descente

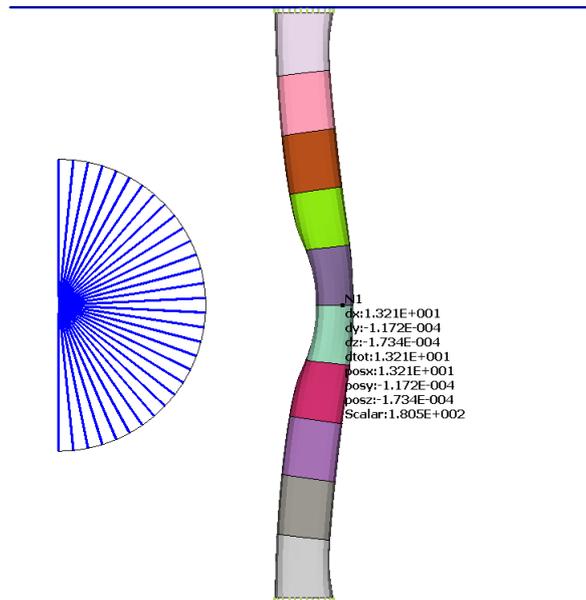
Nous avons effectué l'optimisation du cas-test de la poutre transverse en choc poteau en utilisant les directions de descente issues des différents problèmes équivalents que nous avons défini précédemment. Rappelons que ce problème de dynamique rapide compte 10 paramètres d'épaisseur visibles en figure 2.12.

### 2.3. Optimisation en crash avec direction de descente



**Figure 2.12** – Paramètres d'épaisseur du cas-test poutre transverse en choc poteau

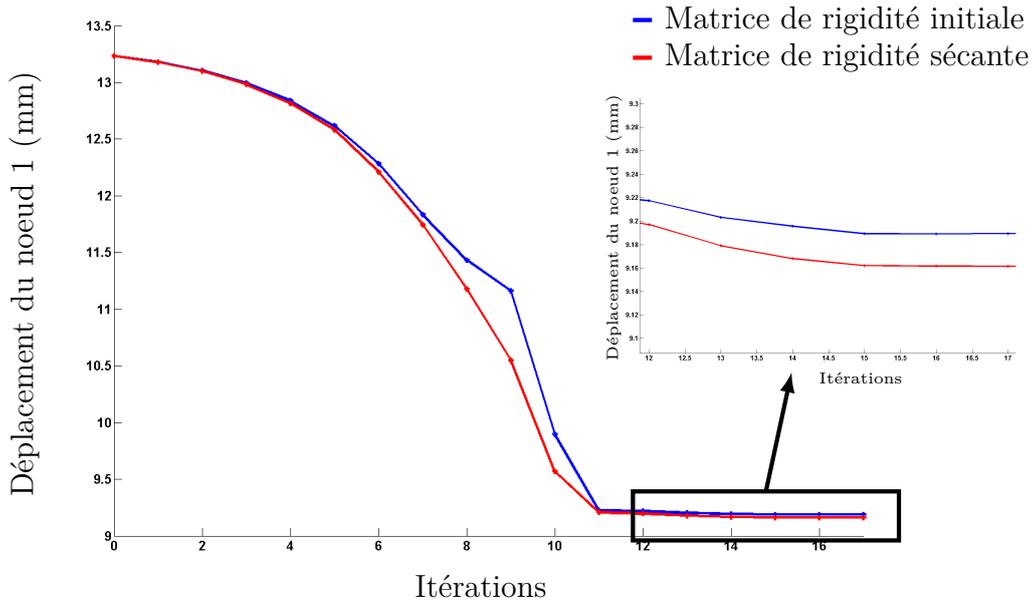
La configuration de départ est, dans les trois cas, celle où toutes les épaisseurs sont égales à 2mm. Le pas  $\alpha_0$  de départ est initialisé à 0,0075. La fonction objectif, c'est-à-dire le déplacement en  $x$  du nœud 1, est égale à 13,23mm. La déformée de la poutre après l'impact est représentée en figure 2.13. Nous pouvons voir que la zone d'impact s'est déformée et que la poutre a cloqué sous l'effet du choc.



**Figure 2.13** – Déformée du cas-test de la poutre transverse après impact dans la configuration initiale

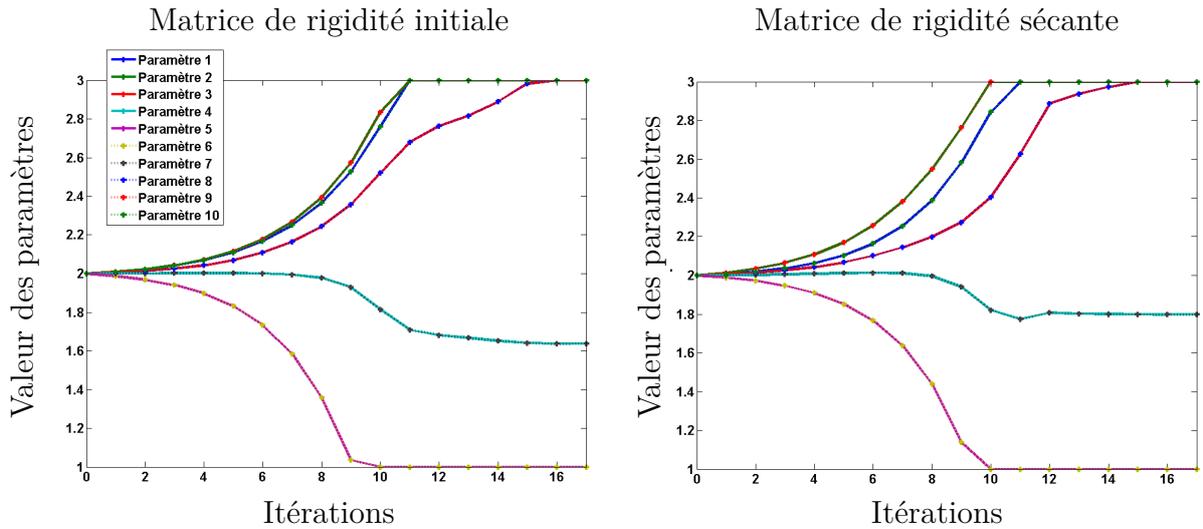
L'évolution de la fonction objectif en fonction des itérations d'optimisation est représentée en figure 2.14 suivante. L'utilisation du gradient du problème équivalent a permis dans les deux cas de minimiser la fonction objectif. Le problème équivalent construit avec le module de Young sécant (en rouge) s'avère donner une meilleure direction de descente que

celui construit avec la matrice de rigidité initiale (en bleu) : l’algorithme converge vers un meilleur optimum où le déplacement en  $x$  du noeud 1 est de 9,162mm contre 9,189mm.



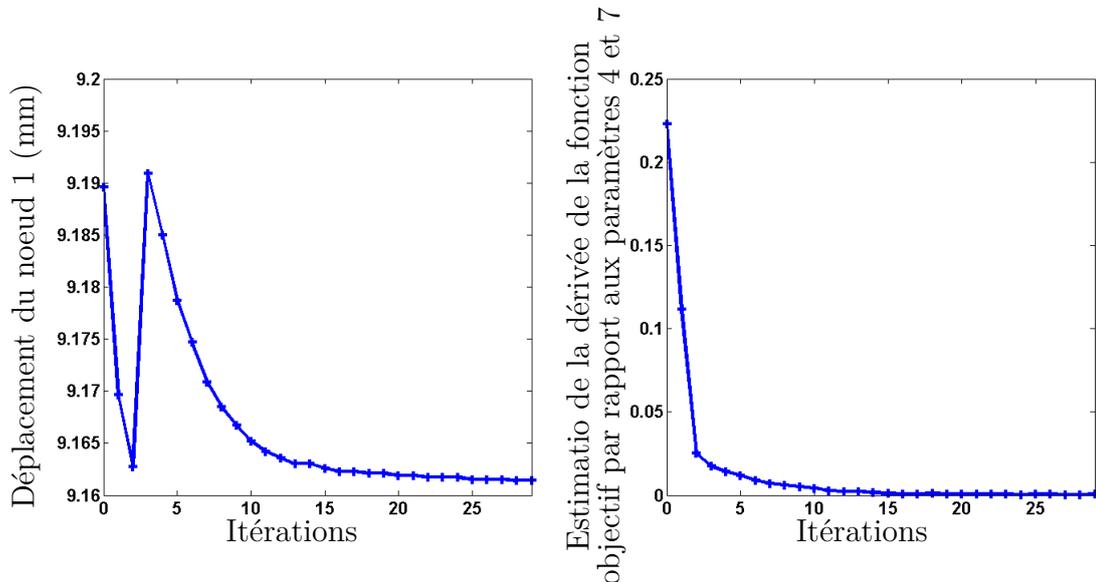
**Figure 2.14** – Résultats de l’optimisation en épaisseur du cas-test poutre transverse en utilisant le gradient issu du problème équivalent

Nous pouvons suivre l’évolution des paramètres au fil des itérations sur la figure 2.15. La première conclusion remarquable est que le gradient conserve la symétrie du problème dans les deux cas : cinq courbes sont observables pour les 10 paramètres comme l’évolution des variables symétriques sont superposées. Nous pouvons voir que les paramètres 4 et 7 ne convergent pas vers la même valeur pour les deux définitions du problème équivalent : la matrice de rigidité initiale porte les épaisseurs de ces zones à 1,638mm alors que la matrice de rigidité sécante les porte à 1,797mm. La seconde solution s’avère être une meilleure configuration. Les deux algorithmes ont convergé lorsque la valeur de la dérivé de la fonction objectif par rapport aux paramètres 4 et 7 est de  $-1,6 \cdot 10^{-4}$  pour celui utilisant la matrice  $K_L$  et de  $1,2 \cdot 10^{-4}$  pour  $K_S$ .



**Figure 2.15** – Évolution des paramètres lors de l’optimisation du cas-test poutre transverse

Afin de voir si la configuration finale de l’algorithme utilisant la matrice de rigidité initiale n’est pas un minimum local, nous allons effectuer une descente de gradient avec la deuxième méthode en partant de la configuration obtenue avec  $K_L$ . Cela permettra de vérifier si la direction de descente obtenue avec le module sécant est meilleure. Pour changer, nous avons décidé d’utiliser cette fois un algorithme à pas fixe. Ce qui permettra aussi de voir la diminution de la valeur du gradient. Les résultats de cette seconde étude sont présentés en figure 2.16.



**Figure 2.16** – Résultats de l’optimisation par pas fixe  $\alpha = 2$  en utilisant le gradient du problème équivalent avec  $K_S$  et en partant de l’optimum trouvé grâce à  $K_L$

Nous sommes alors retourné à l’optimum trouvé par la matrice de rigidité sécante

qui a une valeur inférieure à celle trouvée par  $K_L$ . L'utilisation d'un algorithme à pas fixe a permis de déceler une rupture sur la fonction objectif entre les itérations 2 et 3. Néanmoins, le critère suit toujours une tendance à la descente. Nous pouvons aussi observer que l'estimation de la dérivée par rapport aux paramètres 4 et 7 tend vers 0 au fil des itérations.

Ainsi, le gradient obtenu par le problème statique équivalent issu de l'Equivalent Static Loads Method permet d'optimiser le problème de dynamique rapide. Cette étude montre que l'utilisation de la matrice de rigidité sécante lors de la construction du problème équivalent améliore la direction de descente en préservant contraintes et déformations.

### 2.3.3.2 Analyse de l'optimum

La configuration optimale de poutre transverse soumise à un choc poteau trouvée par l'étude précédente est visible en figure 2.17. Les extrémités ont vu leur épaisseur augmentée au maximum alors que la zone centrale qui est impactée a son épaisseur réduite. La zone intermédiaire, quant à elle, a trouvé un point d'équilibre sûrement dû au fait qu'elle est aussi en parti impactée.

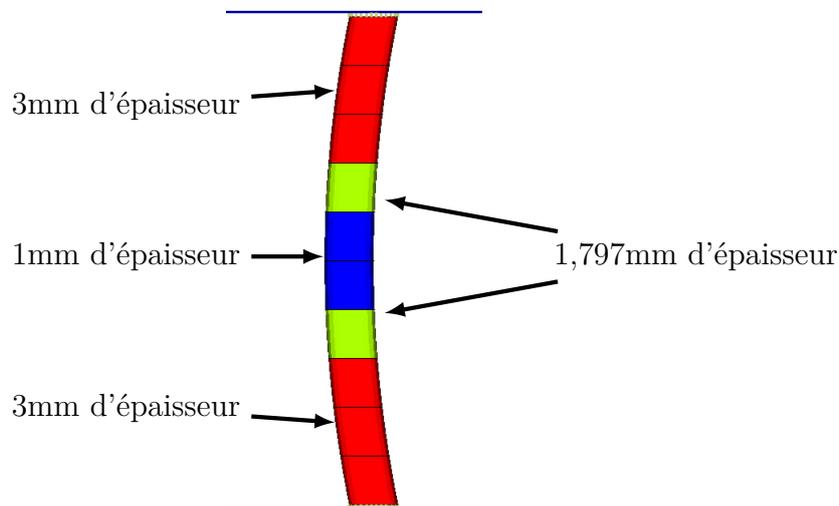
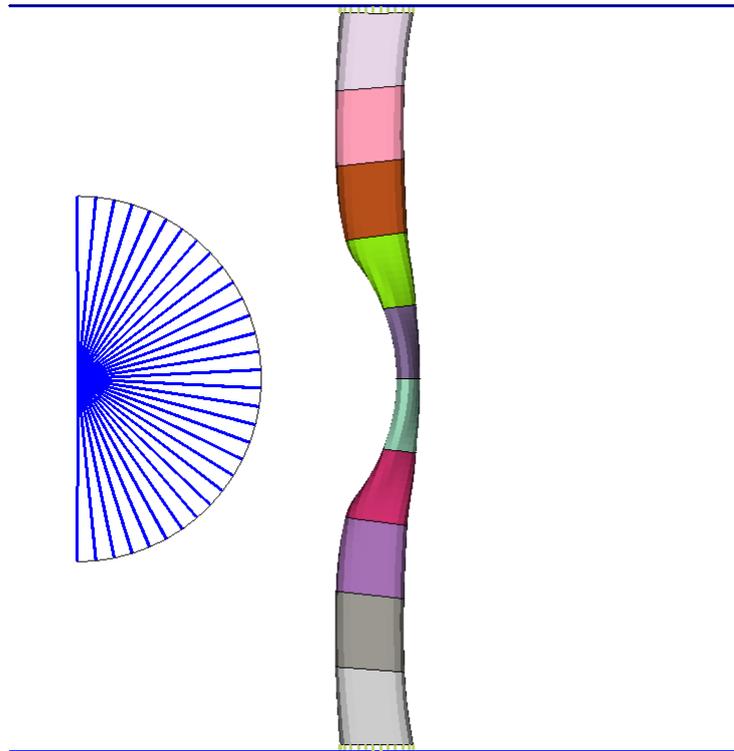


Figure 2.17 – Configuration optimale de la poutre transverse en choc poteau

En visualisant la déformée après impact de cette configuration en figure 2.18, nous comprenons ce résultat. En affaiblissant la zone d'impact, elle se déforme plus et dans le même temps absorbe plus d'énergie du choc. En rigidifiant les extrémités, la poutre ne cloque plus et ainsi seule la déformation de la zone d'impact (obligatoire qui plus est) participe au déplacement en  $x$  du nœud 1.



**Figure 2.18** – Déformée de l'optimum du cas-test poutre transverse après l'impact du poteau

Ce résultat s'avère dans un premier temps contre intuitif : la première idée est de maximiser l'épaisseur de tout le modèle. Or, il se trouve que les zones de la caisse qui subissent le même type de choc, comme un bavolet en choc poteau ou encore une traverse extrême avant en choc bumper, sont affaiblis à la zone d'impact et rigidifiés aux extrémités pour éviter que le reste de la structure ne se déforme. Le résultat obtenu par l'ESLM est donc l'optimum trouvé par l'expérience des ingénieurs automobiles.

## 2.4 Synthèse du chapitre

Au début de ce chapitre, la difficulté à déterminer un gradient pour les problèmes de dynamique rapide a été soulignée. La méthode des différences finies est trop coûteuse à appliquer. De plus, le bruit et la non-répétabilité l'en empêchent de déterminer un bon gradient. De plus, le calcul d'un gradient par dérivation des équations d'états nous est pour le moment impossible car il n'est pas disponible pour le schéma de résolution explicite. Le calcul nécessiterait une refonte du code de simulation de crash ce qui n'est pas dans la mission d'un constructeur. Nous nous sommes donc tournés vers l'Equivalent Static Loads Method. En améliorant le problème statique équivalent par l'utilisation du module de Young sécant, il nous est possible de déterminer une bonne estimation du gradient.

Ainsi, nous avons réussi à déterminer une méthode qui permet de gérer un nombre de paramètres important lors d'une optimisation en crash. Cette méthode est donc basée

## Chapitre 2. Estimation du gradient en dynamique rapide

---

sur le calcul peu coûteux d'une direction de descente via un problème statique équivalent. Nous avons répondu à une partie de la problématique, il reste encore à traiter les paramètres de forme.

---

## Bibliographie du 2<sup>e</sup> chapitre

- [Adelman 1986] H.M. Adelman et R.T. Haftka. *Sensitivity analysis of discrete structural systems*. AIAA Journal, no. 24, pages 823–832, 1986. (cité page 42)
- [Alavi 2011] S.A. Alavi, B. Ahmadi-Nedushan et H. Rahimi-Bondarabadi. *Topology optimization of structures under transient loads*. International Journal of Optimization in Civil Engineering, 2011. (cité page 50)
- [Andriambololona 2009] H. Andriambololona. *Calcul de sensibilité en dynamique*. ASTER R4.03.04, 2009. (cité page 46)
- [Boole 1880] G. Boole et J.F. Moulton. *A treatise on the calculus of finite differences*. Macmillan, 1880. (cité page 41)
- [Cacuci 1981] D.G. Cacuci. *Sensitivity theory for nonlinear systems. Nonlinear functional analysis approach*. Journal of Mathematical Physics, no. 22, pages 2794–2802, 1981. (cité page 43)
- [Choi 2005] W.-S. Choi, K.-B. Park et G.-J. Park. *Calculation of equivalent static loads and its application*. Nuclear Engineering and Design, no. 235, pages 2337–2348, 2005. (cité page 49)
- [Culioli 1994] J.-C. Culioli. *Introduction à l’optimisation*. Ellipse, 1994. (cité page 38)
- [Debruyne 2012] G. Debruyne. *Indicateurs de décharge et de perte de proportionnalité du chargement en élastoplasticité*. ASTER R4.20.12, 2012. (cité page 56)
- [Fletcher 1980] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley and Sons, 1980. (cité page 38)
- [Gilbert 1992] J.-C. Gilbert et J. Nocedal. *Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 2, pages 21–42, 1992. (cité page 39)
- [Han 2015] I. Han, Y. Lee et G.-J. Park. *TV packaging optimization of the frontal drop impact using equivalent static loads*. 11<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 50)
- [Jeong 2009] S.-B. Jeong, S. Yoon, S. Xu et G.-J. Park. *Non-linear dynamic response structural optimization of an automobile frontal structure using equivalent static loads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering, no. 224, pages 489–501, 2009. (cité page 48)
- [Kang 2001] B.-S. Kang, W.-S. Choi et G.-J. Park. *Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement*. Computer and Structures, no. 79, pages 145–154, 2001. (cité page 47)
- [Keane 2005] A.J. Keane et P.B. Nair. *Computational approaches for aerospace design : the pursuit of excellence*. John Wiley and Sons, 2005. (cité page 42)
- [Kim 2010] Y.-I. Kim et G.-J. Park. *Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads*. Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, no. 199, pages 660–676, 2010. (cité pages 48 et 49)

- [Kim 2014] E. Kim, H.-G. Kim, S. Baek et M. Cho. *Effective structural optimization based on equivalent static loads combined with system reduction method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014. (cité page 50)
- [Lee 2015] Y. Lee, J.-S. Ahn et G.-J. Park. *Crash optimization of automobile frontal and side structures using equivalent static loads*. 11<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 50)
- [Lemaitre 1985] J. Lemaitre et J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985. (cité page 56)
- [Marklund 2001] P.O. Marklund et L. Nilsson. *Optimization of a car body component subjected to side impact*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 21, pages 383–392, 2001. (cité pages 17 et 44)
- [Mercier 1998] F. Mercier. *Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1998. (cité pages 12 et 56)
- [Park 2003] G.-J. Park et B.-S. Kang. *Validation of a structural optimization algorithm transforming dynamic loads into equivalent static loads*. Journal of Optimization Theory and Application, no. 118, pages 191–200, 2003. (cité page 50)
- [Park 2005a] K.-J. Park, J.-N. Lee et G.-J. Park. *Structural shape optimization using equivalent static loads transformed from dynamic loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, no. 63, pages 589–602, 2005. (cité page 48)
- [Park 2005b] K.-J. Park et G.-J. Park. *Structural optimization for non-linear behavior using equivalent static loads*. 6<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005. (cité page 48)
- [Park 2011] G.-J. Park. *Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, no. 43, pages 319–337, 2011. (cité pages 47 et 48)
- [Squire 1998] W. Squire et G. Trapp. *Using complex variables to estimate derivatives of real functions*. SIAM Review, no. 40, pages 110–112, 1998. (cité page 42)
- [Stolpe 2014] M. Stolpe. *On the equivalent static loads approach for dynamic response structural optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014. (cité page 50)
- [Yi 2011a] S.-I. Yi, H.-A. Lee et G.-J. Park. *Optimization of a structure with contact conditions using equivalent loads*. Journal of Mechanical Science and Technology, no. 25, pages 773–782, 2011. (cité page 48)
- [Yi 2011b] S.-I. Yi, J.-Y. Lee et G.-J. Park. *Crashworthiness design optimization using equivalent static loads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering, no. 226, pages 23–38, 2011. (cité pages 50 et 96)

# Optimisation de forme

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Sensibilité par rapport aux nœuds du maillage . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Description des surfaces en CAO . . . . .</b>	<b>70</b>
3.2.1	Surfaces paramétriques . . . . .	70
3.2.1.1	Surfaces de Bézier . . . . .	70
3.2.1.2	Surfaces B-splines . . . . .	71
3.2.1.3	Surfaces N.U.R.B.S. . . . .	71
3.2.1.4	Avantages et inconvénients pour la construction de surfaces . . . . .	72
3.2.2	Représentation par des volumes . . . . .	73
3.2.2.1	Avantages et inconvénients de la Constructive Solid Geometry . . . . .	74
<b>3.3</b>	<b>Sensibilité par rapport aux paramètres de forme . . . . .</b>	<b>75</b>
3.3.1	Calcul analytique . . . . .	75
3.3.1.1	Relocalisation des nœuds sur la surface . . . . .	76
3.3.2	Différences finies . . . . .	79
3.3.3	Méthodes isogéométriques . . . . .	80
<b>3.4</b>	<b>Implémentation et application . . . . .</b>	<b>81</b>
3.4.1	Algorithme de test pour l'optimisation de forme . . . . .	82
3.4.2	Application . . . . .	83
3.4.2.1	Présentation du problème de forme . . . . .	83
3.4.2.2	Optimisation de forme par direction de descente . . . . .	84
3.4.2.3	Effet du maillage et du bruit sur l'optimisation . . . . .	86
<b>3.5</b>	<b>Synthèse du chapitre . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie du 3<sup>e</sup> chapitre . . . . .</b>	<b>89</b>

Il est rare d'avoir des problèmes d'optimisation avec de nombreux paramètres d'épaisseur. En somme, ce qui intéresse le plus les industriels, et qui fait partie intégrante de nos travaux, c'est l'optimisation de forme. En effet, les paramètres CAO qu'il est possible de retrouver dans un problème d'optimisation sont de l'ordre de la centaine, voire du millier, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre.

Nous verrons qu'il est facile d'obtenir la sensibilité de la fonction objectif par rapport à la position des nœuds du maillage. Mais c'est la sensibilité par rapport aux paramètres CAO que nous voulons. Il est essentiel de l'obtenir pour utiliser une méthode de gradient. Après l'analyse de la description de la forme en CAO, nous étudierons comment obtenir cette dérivée. Nous finirons ce chapitre par la proposition d'une méthode et son application pour les problèmes de crash.

Dans ce chapitre, nous travaillerons uniquement avec des fonctions objectifs dépendant d'un déplacement nodal mais cette fois avec des paramètres de forme. La méthode de calcul de la direction de descente est celle qui utilise le module de rigidité sécant.

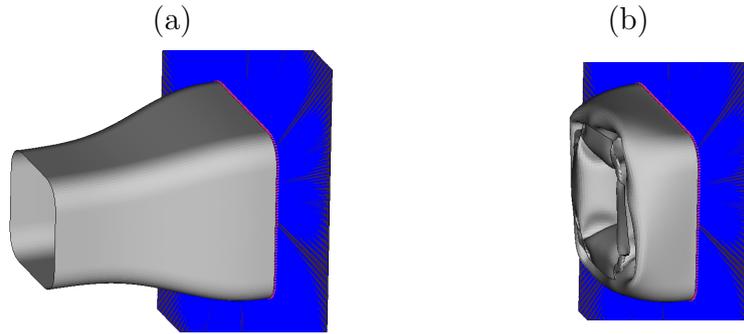
### 3.1 Sensibilité par rapport aux nœuds du maillage

La méthode que nous avons décrite au chapitre précédent pour les paramètres d'épaisseur peut s'étendre à la position des nœuds du maillage. Même si le nombre de paramètres est égale à trois fois le nombre de nœuds (pour chaque coordonnée), l'approximation du gradient est déterminée par des adjoints, ce qui rend possible ce calcul sans avoir un coût prohibitif. Nous utilisons donc comme direction de descente :

$$\nabla J_L(Q) = \frac{dJ_L}{dQ} \tag{3.1}$$

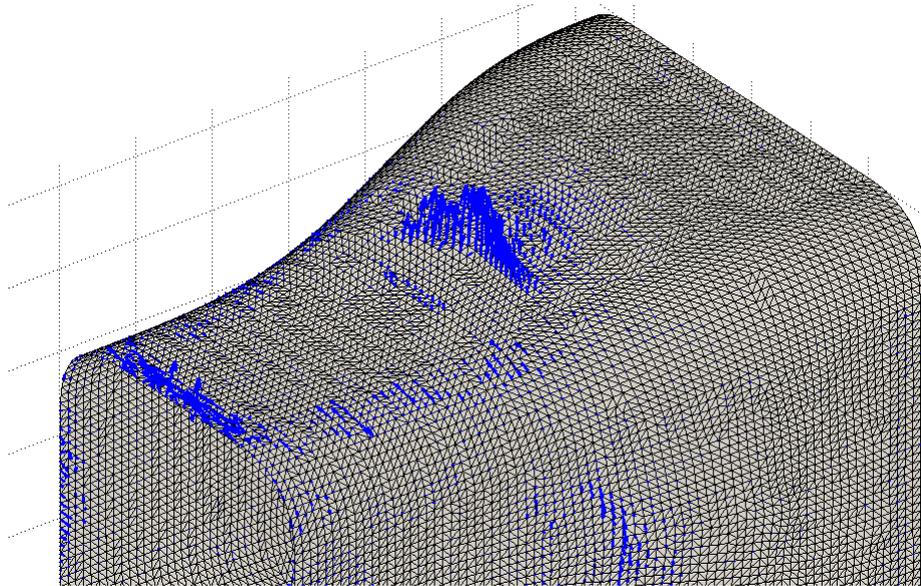
où  $Q$  est la position de tous les nœuds du maillage dans les trois directions et  $\frac{dJ_L}{dQ}$  est calculée par les équations adjointes du problème équivalent.

Pour illustrer ce propos, nous prenons un cas-test de type crash box maillé à 2mm dont le modèle de calcul est présenté en figure 3.1-a. Cette crash-box en acier est fixée sur un support rigide. Une plaque rigide vient l'impacter à  $15\text{km.h}^{-1}$  avec une masse poussante de 150kg. L'objectif est de minimiser le déplacement en  $x$  du nœud en rouge sur la figure. La figure 3.1-b montre comment la crash-box s'est déformée sous l'impact. Le déplacement est alors de 104,3mm.



**Figure 3.1** – Modèle de calcul du cas-test crash-box en (a) et visualisation de la déformée après le choc (b)

La sensibilité de la fonction objectif est estimée par rapport aux nœuds du maillage par l'utilisation du problème statique équivalent construit par l'Equivalent Static Loads Method et grâce au module de rigidité sécant. Il est possible de visualiser cette dérivée par ce que nous appelons un mapping de sensibilité. C'est-à-dire que nous allons tracer pour chaque nœud du maillage le vecteur des dérivées par rapport aux positions  $x_{q_i}$ ,  $y_{q_i}$  et  $z_{q_i}$  du nœud  $q_i$  :  $\langle \frac{\partial J}{\partial x_{q_i}}, \frac{\partial J}{\partial y_{q_i}}, \frac{\partial J}{\partial z_{q_i}} \rangle$ . Cette analyse est représentée sur la figure 3.2.



**Figure 3.2** – Mapping de sensibilité de forme

Ce mapping de sensibilité est utilisé pour l'optimisation géométrique. Dans ce type d'optimisation de forme, tous les nœuds du maillage sont des paramètres d'optimisation. Cependant, dans notre cas, ce sont les paramètres CAO  $P$  qui sont nos variables d'optimisation. Pour ce faire, nous proposons de calculer en deux temps cette sensibilité par une relation de Chasles :

$$\frac{dJ_{NL}}{dP} = \frac{\partial J_{NL}}{\partial P} + \frac{\partial J_{NL}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial P} \quad (3.2)$$

$\frac{\partial J_{NL}}{\partial P}$  est souvent nul dans nos problèmes comme la fonction objectif est liée indirectement aux paramètres CAO. Le terme  $\frac{\partial J_{NL}}{\partial Q}$  sera lui estimé par le problème statique linéaire équivalent que nous avons introduit. Il reste donc à obtenir la sensibilité de la position des nœuds  $Q$  par rapport aux paramètres CAO  $P$  :  $\frac{\partial Q}{\partial P}$ . C'est le calcul de ce terme qui sera au cœur de ce chapitre. En effet, il n'est pas si simple de l'obtenir : cela dépend de comment la forme est définie et, par conséquent, de la définition des paramètres.

## 3.2 Description des surfaces en CAO

Les formes que nous retrouvons dans les problèmes d'optimisation en crash dans l'automobile sont pour la plupart des surfaces. C'est pourquoi nous allons nous concentrer sur ce type de forme. Il existe principalement deux manières de construire une surface dans l'industrie. La première est de définir mathématiquement cette forme à l'aide de surfaces paramétriques. La seconde est issue des modeleurs CAO et consiste en la création d'un solide puis en l'extraction d'une surface. Nous consacrerons cette partie à la description de ces méthodes pour comprendre comment sont définis les paramètres CAO.

### 3.2.1 Surfaces paramétriques

Les études des courbes et des surfaces paramétriques ont débuté après avoir constaté que les formes géométriques simples telles que des cylindres, des plans ou encore des ellipses ne permettaient pas la représentation des géométries complexes apparaissant dans l'industrie aéronautique ou automobile. Les travaux de Bézier, Coons, Fergusson et De Casteljaou [Bézier 1986, Casteljaou 1985, Coons 1987] ont permis de définir des éléments géométriques basés sur la notion de pôles ou encore points de contrôle.

Les surfaces paramétriques sont définies sous la forme de l'équation suivante :

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \phi_i(u)\phi_j(v)P_{ij} \quad (3.3)$$

où  $S$  est la surface paramétrique définie par la base de fonctions de forme  $\phi$  et par les  $(n_u + 1) \times (n_v + 1)$  points de contrôle  $P_{ij}$ .  $u$  et  $v$  sont les coordonnées surfaciques. Ce sont alors la position de ces points de contrôle ou encore leur poids qui sont les paramètres CAO.

#### 3.2.1.1 Surfaces de Bézier

Pour commencer notre recensement de quelques familles de surfaces paramétriques, nous allons présenter les surfaces de Bézier<sup>a</sup>, ingénieur Renault. Elles sont définies ainsi :

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} a_{i,n_u}(u)a_{j,n_v}(v)P_{ij} , (u,v) \in [0,1]^2 \quad (3.4)$$

---

a. Thèse CIFRE Renault oblige

où les fonctions de forme  $a$  de la surface paramétrique  $S$  d'ordres  $n_u$  et  $n_v$ , définies en équation (3.5), sont des polynômes de Bernstein.

$$a_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n \quad (3.5)$$

avec,  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ .

### 3.2.1.2 Surfaces B-splines

Les surfaces B-splines [Cox 1971, Boor 1972] sont une généralisation des surfaces de Bézier. Elles sont définies comme suit :

Soient les  $n_u \times n_v$  points de contrôle  $P_{ij}$ , la surface B-spline d'ordres  $k$  et  $l$  et de vecteurs nœuds  $U = [u_1, u_2, \dots, u_{n_u+k+1}]$  et  $V = [v_1, v_2, \dots, v_{n_v+l+1}]$  est définie par l'équation (3.6).

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,k}(u) b_{j,l}(v) P_{ij}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (3.6)$$

où les fonctions B-splines  $b$  sont obtenues par la récurrence définie par les équations (3.7) et (3.8).

$$b_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$b_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} b_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} b_{i+1,k-1}(t) \text{ et } \frac{0}{0} = 0 \quad (3.8)$$

Comme elles peuvent modéliser la plupart des surfaces complexes, les surfaces B-splines sont à présent les plus utilisées en CAO. Néanmoins, elles ne permettent pas de construire certaines surfaces comme des cylindres elliptiques.

### 3.2.1.3 Surfaces N.U.R.B.S.

Les surfaces N.U.R.B.S.<sup>b</sup> [Farin 1999] sont une généralisation des surfaces B-Splines en associant un poids  $\omega_{ij}$  au point de contrôle  $P_{ij}$ . Elles permettent de générer les surfaces

---

b. Non-Uniform Rational B-Splines

sphériques et cylindriques que les surfaces B-Splines ne pouvaient qu’approcher et elles sont définies ainsi :

Soient les  $n_u \times n_v$  points de contrôle  $P_{ij}$  avec leur poids  $\omega_{ij}$ , la surface B-spline d’ordres  $p$  et  $q$  et de vecteurs nœuds  $U = [u_1, u_2, \dots, u_{n_u+k+1}]$  et  $V = [v_1, v_2, \dots, v_{n_v+l+1}]$  est définie par l’équation (3.9).

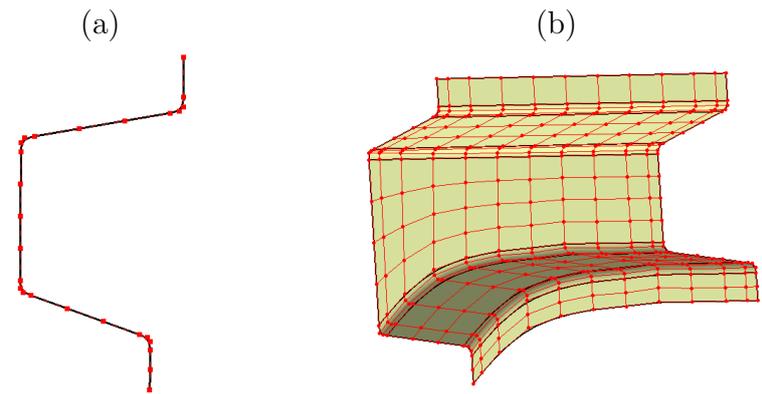
$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,k}(u) b_{j,l}(v) \omega_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,k}(u) b_{j,l}(v) \omega_{ij}} \tag{3.9}$$

La base des fonctions de forme  $b$  est celle des fonctions B-Splines.

Outre les surfaces paramétriques définies précédemment, nous pouvons retrouver d’autres surfaces splines comme les T-splines [Bakenov 2003], une généralisation des N.U.R.B.S., ou encore les splines de Catmull-Rom [Catmull 1974]. Nous pouvons aussi retrouver toutes les autres surfaces paramétriques comme les surfaces cylindriques ou sphériques.

### 3.2.1.4 Avantages et inconvénients pour la construction de surfaces

Pour construire des formes surfaciques comme un longeron avant avec une surface paramétrique, il convient de définir la forme de la section pilotante en positionnant ses points de contrôle. Nous pouvons voir la forme de la section pilotante choisie en figure 3.3-a. La seconde étape consiste à choisir le nombre de sections pilotantes et de les placer. Nous en avons choisi 12 pour créer le longeron visible en figure 3.3-b.



**Figure 3.3** – Construction d’un longeron avant par une surface paramétrique  
Le polygone de contrôle est en rouge

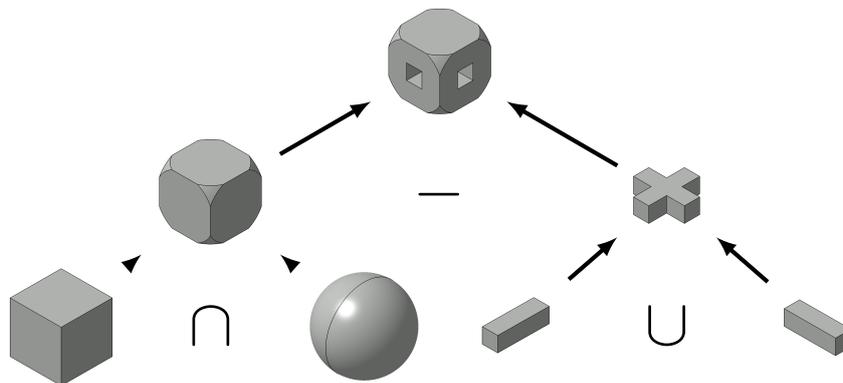
La conception peut s’avérer très fastidieuse avec cette méthode. Le tableau suivant résume les différents avantages et inconvénients de cette méthode pour la conception et le paramétrage.

Avantages et inconvénients pour la conception de l'utilisation de surfaces paramétriques et d'un paramétrage par les points de contrôle	
<b>Avantages</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le paramétrage par points de contrôle permet facilement de parcourir la totalité de l'espace de conception.</li> <li>– Il est facile de complexifier les formes que nous voulons obtenir en ajoutant des points de contrôle.</li> </ul>
<b>Inconvénients</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Il est difficile de prendre en compte les contraintes de process et d'assemblage.</li> <li>– La méthode s'éloigne des procédés de modélisation utilisés par les concepteurs.</li> <li>– La conception est fastidieuse pour les pièces de forme initiale complexe.</li> </ul>

**Tableau 3.1** – Utilisation de surfaces paramétriques pour la conception et de points de contrôle pour le paramétrage

### 3.2.2 Représentation par des volumes

Alors que les designers travaillent avec des surfaces paramétriques et des points de contrôle avec des logiciels de CAO comme Rhino, les concepteurs se sont tournés vers d'autres logiciels tels que SolidWorks, CATIA ou encore NX. Ces derniers se basent sur une méthode CSG<sup>c</sup>. Cette méthode permet de créer la forme à partir de primitives élémentaires (cubes, cônes, cylindres, demi-espace...). La forme finale est obtenue via des opérations booléennes (union, intersection ou différences), des translations et des rotations comme le représente la figure 3.4 suivante.



**Figure 3.4** – Construction d'un solide par méthode CSG

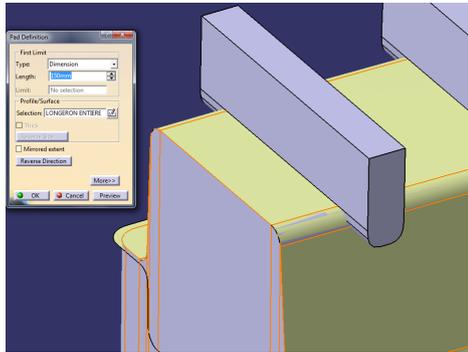
Une fois que le solide est obtenu, il faut effectuer une opération d'extraction pour obtenir la surface voulue. Cette méthode, optimisée pour les logiciels utilisés par les concepteurs, fait perdre la définition mathématique de la surface.

C'est cette technique qui est principalement employée dans l'industrie. Nous avons d'ailleurs utilisé cette méthode pour l'étude d'optimisation par méta-modèles sur la forme

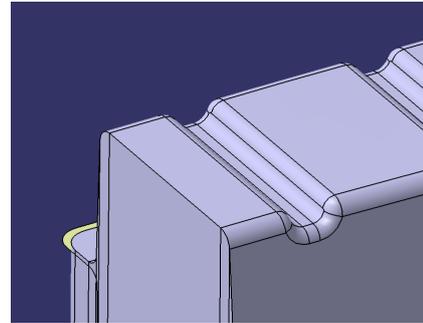
c. Constructive Solid Geometry

et le positionnement des triggers sur le longeron. Les étapes de construction sont récapitulées en figure 3.5.

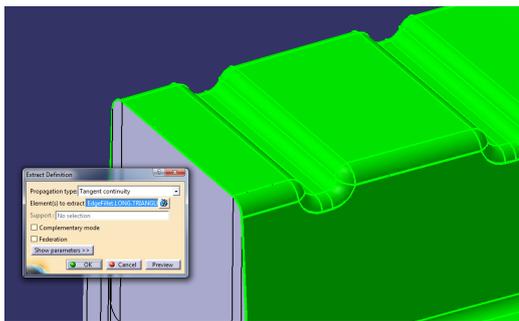
1 : Différence avec les primitives des triggers



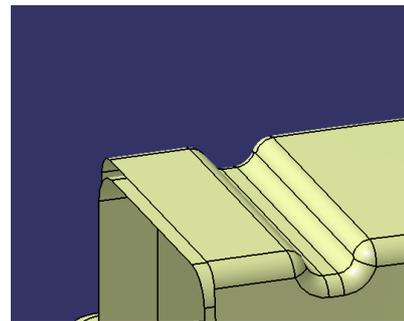
2 : Opération de congés



3 : Extraction de la surface



4 : Surface finale du longeron



**Figure 3.5** – Construction par approche CSG du cas-test de l'étude de forme et de positionnement des triggers

En plus de la facilité de construction d'une forme, les paramètres de forme les plus courant comme les longueurs, les rayons, les angles, etc., sont faciles à définir avec cette méthode : soit en jouant sur la forme des primitives, soit en paramétrant les opérations de translation et de rotation.

#### 3.2.2.1 Avantages et inconvénients de la Constructive Solid Geometry

Le tableau suivant récapitule les avantages et les inconvénients de la méthode CSG combinée à une extraction de surface pour la construction et le paramétrage de forme.

<b>Avantages et inconvénients de l'utilisation de la méthode CSG pour la conception et le paramétrage de surfaces</b>	
<b>Avantages</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le temps de construction d'un modèle est rapide et « concepteur-friendly ».</li> <li>– Il est facile de prendre en compte les contraintes de process et d'assemblage.</li> <li>– Le paramétrage est simple et est facilement lié aux paramètres métiers.</li> </ul>
<b>Inconvénients</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le paramétrage doit être pensé dès la conception du modèle CAO.</li> <li>– Aucune information mathématique n'est disponible sur la surface.</li> <li>– Le paramétrage ne permet pas de faire évoluer la forme dans tout l'espace de conception.</li> </ul>

**Tableau 3.2** – Utilisation de la méthode CSG pour la conception de surfaces par extraction

Même si cette méthode est préférée par le monde industriel, nous construirons nos géométries à partir des surfaces paramétriques présentées précédemment. Ce choix est dû à la manière de calculer la sensibilité par rapport aux paramètres de forme que nous avons implémentée comme nous le verrons par la suite.

## 3.3 Sensibilité par rapport aux paramètres de forme

Maintenant que les deux approches de construction d'une forme surfacique en CAO ainsi que les deux façons de les paramétrer ont été passées en revue, nous étudierons comment calculer la sensibilité par rapport aux paramètres CAO. Trois méthodes se proposent à nous. Il est possible de calculer de manière analytique la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres CAO ou encore de la calculer par différences finies. Une troisième méthode consiste à faire directement le lien entre le modèle de calcul et le modèle CAO.

### 3.3.1 Calcul analytique

Nous rappelons que l'objectif est de déterminer la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres CAO. En effet, nous souhaitons lier le mapping de sensibilité, c'est-à-dire la dérivée de la fonction objectif par rapport aux nœuds, aux paramètres de forme.

Il est possible de le faire lorsque la définition mathématique de la forme est connue et que le lien est explicite entre la forme et les paramètres. C'est le cas avec une surface paramétrique et avec des points de contrôle comme paramètres de forme. Si nous prenons l'équation générique de ces surfaces :

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \phi_i(u)\phi_j(v)P_{ij} \tag{3.10}$$

Alors la dérivée du nœud  $q$  de coordonnées surfaciques  $(u_q, v_q)$  sur la surface par rapport au point de contrôle  $P_{\alpha\beta}$  est :

$$\frac{dS(u_q, v_q)}{dP_{\alpha\beta}} = \phi_\alpha(u_q)\phi_\beta(v_q) \quad (3.11)$$

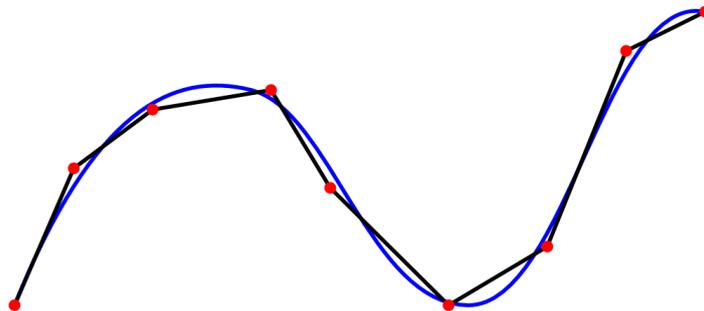
Nous avons choisi d'employer cette méthode pour nos études en décrivant nos formes par des surfaces paramétriques B-splines. Même si elles ne peuvent représenter des cercles parfaits comme les NURBS, elles permettent de réaliser des surfaces suffisamment complexes pour nos problèmes. En utilisant ces surfaces, la dérivée du nœud  $q$  de coordonnées surfaciques  $(u_q, v_q)$  sur la surface par rapport au point de contrôle  $P_{\alpha\beta}$  s'écrit comme un produit de fonctions B-splines :

$$\frac{dS(u_q, v_q)}{dP_{\alpha\beta}} = b_{\alpha,k}(u_q)b_{\beta,l}(v_q) \quad (3.12)$$

où  $k$  et  $l$  sont les degrés des fonctions B-splines. Il suffit de réussir à déterminer les coordonnées surfaciques des nœuds sur la surface.

#### 3.3.1.1 Relocalisation des nœuds sur la surface

Il est cependant difficile d'obtenir les coordonnées surfaciques d'un nœud du maillage sur la forme initiale. Outre les erreurs numériques de positionnement des nœuds, les logiciels de maillage ne sont pas les mêmes que les logiciels de CAO. Le lien est alors perdu et il faut le redéterminer. Nous nous trouvons dans la situation illustrée en figure 3.6. Dans ce cas, nous cherchons à déterminer le point de la surface B-spline qui est le plus proche de ce nœud.



**Figure 3.6** – Décalage des nœuds du maillage par rapport à la surface d'origine à cause des erreurs numériques

Nous nous sommes inspirés des méthodes de construction de courbe B-spline par un nuage de points [Wang 2004] ainsi que des méthodes de détermination d'un point proche d'une courbe B-spline [Wang 2002]. Ces méthodes de minimisation de la distance entre

### 3.3. Sensibilité par rapport aux paramètres de forme

---

un point et une courbe B-spline ont été étendues au cas d'une surface. Nous cherchons alors à déterminer les coordonnées surfaciques  $(u_q, v_q)$  qui minimisent la distance  $D$  entre la surface  $S(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle^d$  et le nœud de coordonnées  $(x_q, y_q, z_q)$ .

$$D(u, v) = (x(u, v) - x_q)^2 + (y(u, v) - y_q)^2 + (z(u, v) - z_q)^2 \quad (3.13)$$

Les coordonnées surfaciques  $(u_q, v_q)$  du nœud correspondent donc à la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial v}(u, v) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

La première étape consiste à déterminer un premier couple  $(u_0, v_0)$  assez proche de la solution en criblant le carreau de B-spline de manière régulière. Une fois cette première estimation obtenue, nous utiliserons une méthode de Newton-Raphson pour déterminer la solution par itération de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} u_{t+1} \\ v_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} - J(u_t, v_t) \begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial u}(u_t, v_t) \\ \frac{\partial D}{\partial v}(u_t, v_t) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

avec  $J$  la matrice des dérivées secondes :

$$J(u_t, v_t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D}{\partial u^2}(u_t, v_t) & \frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v}(u_t, v_t) \\ \frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v}(u_t, v_t) & \frac{\partial^2 D}{\partial v^2}(u_t, v_t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Afin d'alléger l'écriture des dérivées de la distance, nous posons la notation  $X$  qui correspond aux différentes coordonnées,  $X \in \{x, y, z\}$ . Les dérivées premières et secondes de la distance s'écrivent alors :

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \sum_{X=\{x,y,z\}} 2(X - X_q) \frac{\partial X}{\partial u} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \sum_{X=\{x,y,z\}} 2(X - X_q) \frac{\partial X}{\partial v} \quad (3.18)$$

---

d.  $P_{ij}$  correspond à un vecteur :  $P_{ij} = \langle x_{P_{ij}}, y_{P_{ij}}, z_{P_{ij}} \rangle$ , de même pour la surface :  $S(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial u^2} = \sum_{X=\{x,y,z\}} 2 \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + (X - X_q) \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right] \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} = \sum_{X=\{x,y,z\}} 2 \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + (X - X_q) \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right] \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} = \sum_{X=\{x,y,z\}} 2 \left[ \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + (X - X_q) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right] \quad (3.21)$$

Ce qui est remarquable, ce sont les dérivées de la surface par rapport aux coordonnées curvilignes. En effet, nous avons pour les dérivées du premier ordre :

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} \frac{\partial b_{i,k}(u)}{\partial u} b_{j,l}(v) X_{ij} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,k}(u) \frac{\partial b_{j,l}(v)}{\partial v} X_{ij} \quad (3.23)$$

Et pour celles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} \frac{\partial^2 b_{i,k}(u)}{\partial u^2} b_{j,l}(v) X_{ij} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} b_{i,k}(u) \frac{\partial^2 b_{j,l}(v)}{\partial v^2} X_{ij} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} \frac{\partial b_{i,k}(u)}{\partial u} \frac{\partial b_{j,l}(v)}{\partial v} X_{ij} \quad (3.26)$$

Les dérivées des fonctions B-splines (3.27) et (3.28) que nous utilisons se calculent à partir des fonctions B-splines de degré inférieur que nous avons déjà calculée en utilisant la récurrence définie en équation (3.8) de la partie précédente. Cela rend alors le calcul des coordonnées surfaciques très rapide.

$$\frac{db_{i,k}(s)}{ds} = \frac{k}{s_{i+k} - s_i} b_{i,k-1}(s) - \frac{k}{s_{i+k+1} - s_{i+1}} b_{i+1,k-1}(s) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b_{i,k}(s)}{ds^2} = & \frac{k(k-1)}{(s_{i+k} - s_i)(s_{i+k-1} - s_i)} b_{i,k-2}(s) - \frac{k(k-1)}{s_{i+k} - s_{i+1}} \left( \frac{1}{s_{i+k} - s_i} \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{s_{i+k+1} - s_{i+1}} \right) b_{i+1,k-2}(s) + \frac{k(k-1)}{(s_{i+k+1} - s_{i+1})(s_{i+k-1} - s_{i+2})} b_{i+2,k-2}(s) \end{aligned} \quad (3.28)$$

### 3.3.2 Différences finies

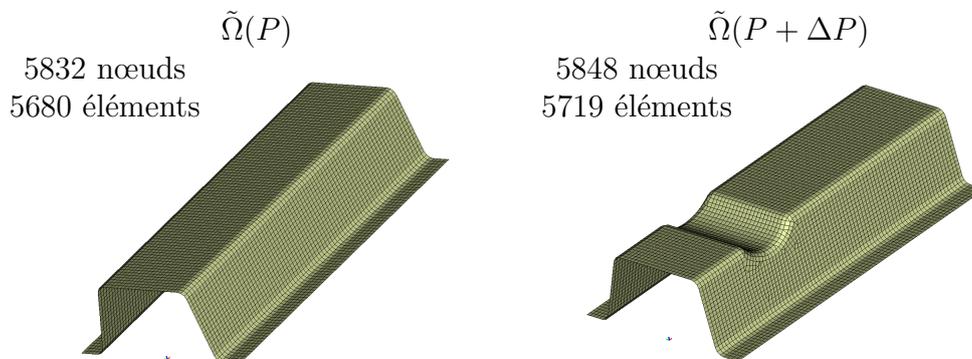
Dans l'industrie, la plupart des modèles paramétrés est construite par des logiciels de CAO via une approche CSG. Le lien  $y$  est souvent perdu avec les paramètres de forme ce qui ne permet pas de calculer de manière analytique la dérivée. Dans cette majorité de cas, un calcul de la dérivée de la position du nœud  $q_i$  par rapport au paramètre  $p_j$  est préférée :

$$\frac{dq_i}{dp_j} = \frac{q_i(p_j + \Delta p) - q_i(p_j)}{\Delta p} \quad (3.29)$$

Comme explicité dans [Froment 2014], il existe diverses manières de déterminer le lien entre la position des nœuds et les paramètres CAO par différences finies.

La première méthode consiste d'abord à évaluer l'effet de la variation d'un paramètre sur la forme et ensuite d'interpoler cette sensibilité sur les nœuds [Chen 1997, Hardee 1999]. Cette technique est donc basée sur une comparaison des géométries avant maillage. Même si l'interpolation aux nœuds peut s'avérer difficile, cette méthode a pu être employée sur divers problèmes d'optimisation de forme avec paramètres CAO [Armstrong 2007].

La seconde technique propose de travailler sur les maillages. Différentes méthodes existent comme celles proposées dans [Choi 1994, Toivanen 2006]. Basiquement, il convient de faire varier un paramètre du modèle CAO, de mailler la forme puis de comparer la nouvelle position des nœuds avec celle du maillage initial.



**Figure 3.7** – Déformation de la forme pour un calcul de sensibilité des nœuds par rapport aux paramètres par différences finies

La comparaison n'est pas simple : les nombres de nœuds et d'élément ne sont pas forcément les mêmes. Comme le propose [Robinson 2009], il est possible de faire une projection et une interpolation dans ce cas mais il arrive qu'un nœud ne trouve pas de projection sur le maillage d'origine. C'est pourquoi les travaux de thèse de Froment, poursuivis par Leblond [Froment 2014, Leblond 2015], proposent de passer par une transformation harmonique  $\mathcal{H}$  sur un domaine de référence (comme un disque) pour pouvoir comparer les deux modèles comme le montre la figure 3.8.

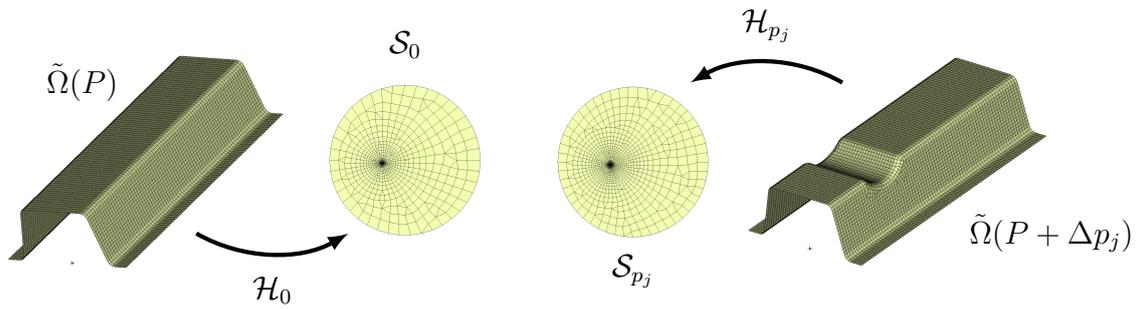


Figure 3.8 – Transformation harmonique pour les différences finies

En connaissant la fonction  $\mathcal{H}_{p_j}$  qui a permis de transformer le modèle déformé sur le domaine de référence, il est possible d’appliquer son inverse sur le disque obtenu à partir du modèle d’origine et ainsi obtenir la position des nœuds du modèle d’origine sur la géométrie déformée sans projection. Le calcul de la dérivée se fait alors ainsi :

$$\frac{dq_i}{dp_j} = \frac{q_i(p_j + \Delta p) - q_i(p_j)}{\Delta p} = \frac{\mathcal{H}_{p_j}^{-1}[\mathcal{H}_0(q_i(p_j))] - q_i(p_j)}{\Delta p_j} \quad (3.30)$$

Ainsi, le lien entre paramètres et position des nœuds peut être retrouvé permettant l’utilisation de modèles CAO construits avec une méthode CSG.

### 3.3.3 Méthodes isogéométriques

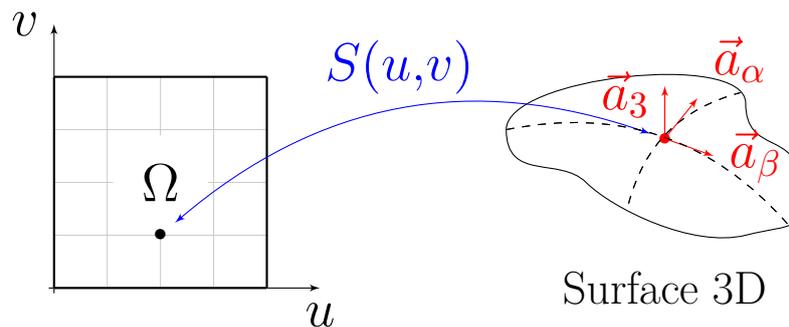
Nous avons vu que la décorrélation des modèles de calcul et de CAO engendre divers problèmes. Il existe une catégorie de méthodes de calcul qui permet de lier ces deux modèles : les méthodes isogéométriques.

En plus des problèmes précédemment évoqués, le maillage et la création du modèle sont devenus une étape à la durée non-négligeable dans le processus de conception. Afin de contourner ces difficultés, l’analyse isogéométrique propose d’utiliser les fonctions de forme du modèle CAO (B-Splines, NURBS...) pour le modèle de calcul [Cottrell 2009]. Les éléments du modèles de calcul deviennent des carreaux sur la forme. Cela permet de respecter toutes les courbures sans dégrader la géométrie. L’étape de maillage est supprimée et remplacée par une étape de raffinement *hpk* de la géométrie. Le tableau 3.3 compare l’analyse isogéométrique avec les éléments finis iso-paramétrique. En conservant ce lien entre le modèle de calcul et es points de contrôle pilotant la forme, la sensibilité pourrait être calculée directement par rapport au paramètres.

Éléments finis classiques	Analyse isogéométrique
Maillage	Raffinement <i>hpk</i> de la géométrie
Éléments	Carreaux
Nœuds	Points de contrôles
Fonctions de forme polynomiales	B-Splines, NURBS...

**Tableau 3.3** – Comparaison de l’analyse isogéométrique avec les éléments finis classiques  
*Source* : [Cottrell 2009]

Une autre approche consiste à intégrer dans la formulation mécanique la forme comme une fonction  $S$  permettant de passer d’un domaine de référence où le calcul est effectué à la forme 3D comme le montre la figure 3.9. En utilisant des éléments « classiques » tels que des éléments d’Argyris, cette méthode permet là encore de respecter les courbures du modèle [Julisson 2015]. Comme nous conservons l’information de la forme dans le modèle, il est alors possible de calculer directement la dérivée de la fonction objectif par rapport aux paramètres CAO [du Cauzé de Nazelle 2013]. Des surfaces paramétriques sont donc utilisées et les points de contrôle deviennent les paramètres de forme.



**Figure 3.9** – Fonction de forme permettant de représenter une géométrie à partir d’un domaine de référence

*Source* : [Julisson 2015]

Ces deux méthodes sont récentes et nécessitent encore beaucoup de développement. Il faut effectuer une refonte des codes de calculs en y intégrant la forme et de les lier fortement avec les modelers CAO. La principale difficulté des ces méthodes réside dans le fait que les modelers CAO ne donnent pas la définition mathématique de la surface et que les paramètres CAO sont rarement des points de contrôle, ce qui freine leurs applications.

### 3.4 Implémentation et application

Dans cette dernière partie, nous allons voir comment nous avons modifié l’algorithme présenté au paragraphe 2.3.2 pour pouvoir prendre en compte les paramètres de forme. Nous appliquerons la méthode à un problème de forme en crash en utilisant notre direction de descente.

### 3.4.1 Algorithme de test pour l'optimisation de forme

Dans notre approche, nous avons choisi de travailler avec des surfaces paramétriques B-splines. Cela empêche d'utiliser les modeleurs CAO les plus communs. Nous avons donc décidé de coder les surfaces directement dans le format d'échange standard qu'est le STEP [Gilbert 1993]. Ce format peut être lu par tous les logiciels travaillant avec de la forme comme les modeleurs CAO ou encore les logiciels de maillage. Nous pouvons citer l'exemple de la classe qui permet de construire directement une surface B-spline : `B_SPLINE_SURFACE_WITH_KNOTS`. Utiliser directement le STEP permet de placer où nous voulons les points de contrôle et définir nous-même les vecteurs nœuds et les degrés de la surface.

Nous avons modifié l'algorithme de test pour pouvoir prendre en compte la sensibilité par rapport aux paramètres de forme. L'optimisation de forme en crash par un gradient estimé par le problème statique équivalent se déroule comme suit :

**Algorithme de test du gradient obtenu avec la matrice de rigidité sécante pour la forme**

**Étape 0 :** Étude de la configuration initiale  $k = 0$   
TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons :  $k = k + 1$   
**Étape 1 :** Détermination du pas  $\alpha_k$ .  
TANT QUE  $test\_fonction\_objectif \neq OK$   
**Étape 1-a :** Modification des paramètres de forme en suivant la direction du gradient  $\nabla J_L$ , tout en respectant les bornes. (STEP)  
**Étape 1-b :** Maillage de la forme et montage du modèle de calcul.(ANSA)  
**Étape 1-c :** Calcul explicite de crash. (PamCrash)  
**Étape 1-d :** Calcul de la fonction objectif  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k]$ . (MetaPost)  
SI  $J[X_{NL}(P^k, t), P^k] \leq J[X_{NL}(P^{k-1}, t), P^{k-1}]$   
 $test\_fonction\_objectif = OK$  et  $\alpha_{k+1} = \alpha_k \times 1,5$   
SINON  
 $\alpha_k = \alpha_k \times 0,5$   
FIN SI  
FIN TANT QUE  
**Étape 2 :** Récupération de  $X_{NL}(P^k, t_i) \forall t_i \in [t_1, \dots, t_f]$  dont nous avons besoin pour la construction du problème statique équivalent. (MetaPost)  
**Étape 3 :** Calcul du module sécant  $E_S$  pour chaque élément (Matlab) et assemblage de la matrice de rigidité sécante  $K_S^s$  (Nastran) pour chaque instant nécessaire  $t_s$ .  
**Étape 4 :** Calcul des forces statiques équivalentes (DMAP Nastran).

$$f_{eq}^s = K_S^s X_{NL}(t_s) \forall s \in [1, \dots, f]$$

**Étape 5 :** Calcul de la dérivée de la fonction objectif par rapport à la position des nœuds du maillage du problème statique linéaire équivalent  $\frac{\partial J_L(P^k)}{\partial Q}$  (SOL200 de Nastran).

**Étape 6 :** Détermination des coordonnées surfaciques  $(u_{q_i}, v_{q_i})$  de chaque nœuds  $q_i$  par une méthode de Newton-Raphson. (Matlab)

**Étape 7 :** Détermination de la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres de forme (points de contrôle ou combinaison de points de contrôle) :  $\frac{\partial Q}{\partial P}$ . (Matlab)

**Étape 8 :** Calcul de la direction de descente pour les paramètres de forme. (Matlab)

$$\nabla J_L = \frac{\partial J_L(P^k)}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P}$$

**Étape 9 :** Test de convergence ou test de fin du budget calcul.

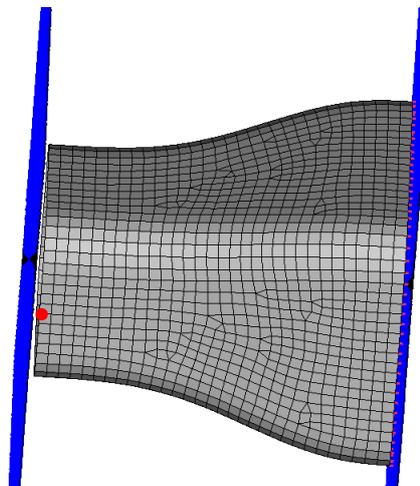
FIN TANT QUE

## 3.4.2 Application

Nous allons à présent appliquer cet algorithme dans le cadre d'un problème d'optimisation de forme en crash.

### 3.4.2.1 Présentation du problème de forme

Le but de cette étude est de minimiser l'écrasement d'une crash-box dont le modèle de calcul est représenté en figure 3.10. C'est celui que nous avons utilisé pour tester un calcul de la sensibilité par rapport au paramètres de forme par différences finies et sur lequel nous avons visualisé le mapping de sensibilité. La fonction objectif à minimiser est le déplacement du nœud 1, en rouge sur la figure, à l'avant de la crash-box. Cette pièce est dimensionnée principalement par les chocs « assurances » à  $15\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ . C'est pourquoi elle subit l'impact d'un mur rigide à cette vitesse. La pièce est maintenue par un support fixe à l'opposé de la zone d'impact. Le modèle de calcul est obtenu par un maillage à 2mm pour réduire au maximum le bruit numérique et ainsi pouvoir effectuer une optimisation.



**Figure 3.10** – Modèle de calcul du cas-test crash-box

La forme est une surface paramétrique B-spline fermée définie par  $16 \times 7$  points de contrôle visibles en figure 3.11-a. Concernant son paramétrage, nous avons décidé de ne piloter que les 5 esquisses centrales. Le fait de fixer les extrémités correspond à un problème industriel courant car la pièce doit toujours pouvoir s'assembler avec les pièces environnantes. De plus, les points de contrôle des esquisses pilotantes ne sont pas tous des paramètres d'optimisation mais ils sont liés aux deux paramètres<sup>e</sup> visibles en figure 3.11-b. Ces paramètres contrôlent la largeur de l'esquisse ainsi que la longueur des congés. Nous avons alors 10 paramètres de forme dans ce cas. Les seules contraintes viennent des bornes sur les plages de variation des paramètres.

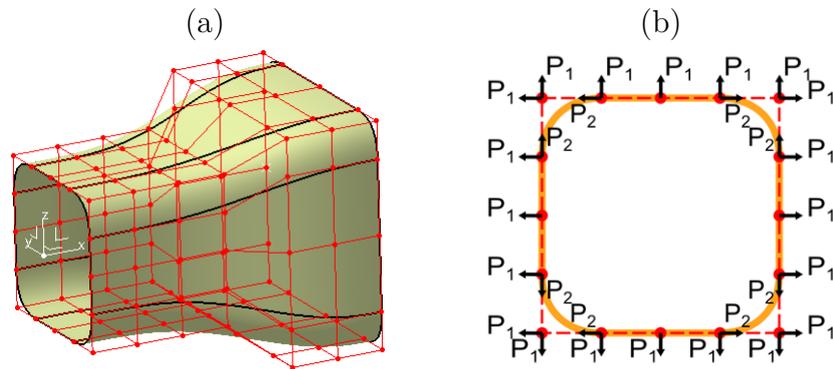


Figure 3.11 – Définition de la forme et du paramétrage de la crash-box

Dans sa forme initiale, le modèle s'écrase comme montré en figure 3.12. La fonction objectif est alors de 104,3mm.

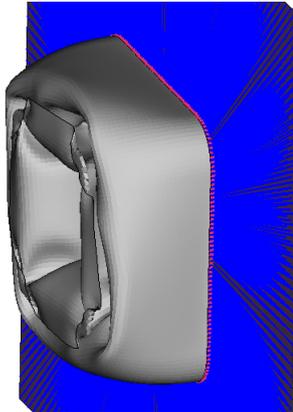


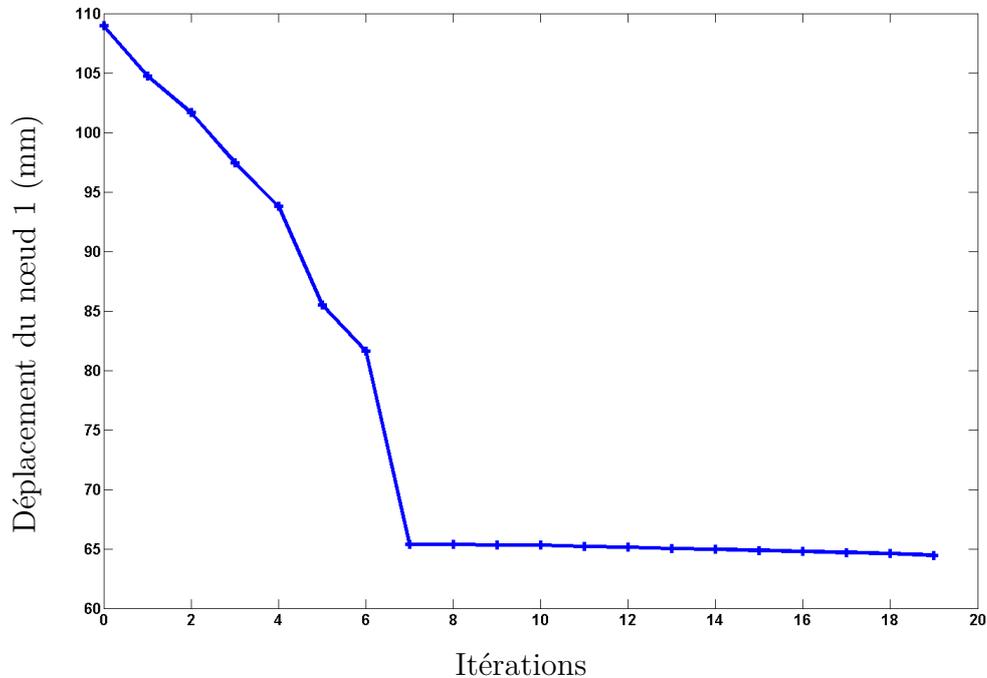
Figure 3.12 – Écrasement de la crash-box dans la configuration initiale

### 3.4.2.2 Optimisation de forme par direction de descente

Nous avons appliqué l'algorithme précédemment défini à ce problème de dynamique rapide et avons donc utilisé la direction de descente obtenue par le problème équivalent.

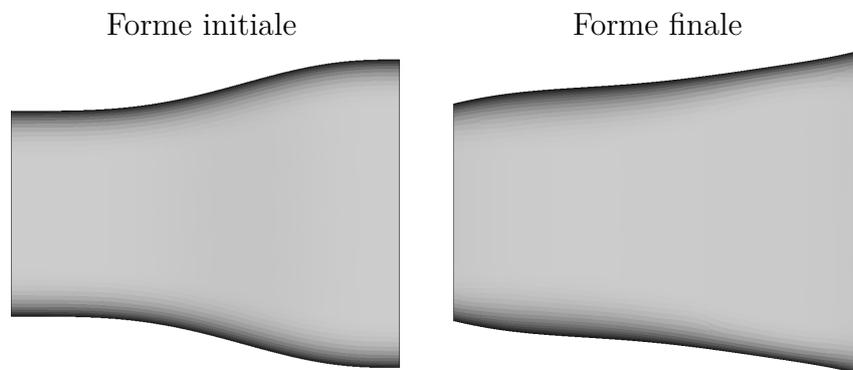
e. Il faudra donc calculer la dérivée de la position des points de contrôle par rapport aux paramètres de forme, ce qui se fait facilement de manière analytique.

La courbe présentée en figure 3.13 montre l'évolution de la fonction objectif au cours de l'optimisation de forme. L'optimum trouvé de cette manière connaît un déplacement en  $x$  du nœud de mesure de 64,45mm.



**Figure 3.13** – Évolution de la fonction objectif lors de l'optimisation de forme du cas-test crash-box à 10 paramètres

La forme de cet optimum est montrée à droite de la figure 3.14 et peut-être comparée à la forme initiale à sa gauche. Les paramètres finaux et initiaux sont répertoriés dans le tableau 3.4. La crash-box prend alors du volume tout en marquant une forte inflexion à l'avant et une ligne plus régulière à l'arrière.

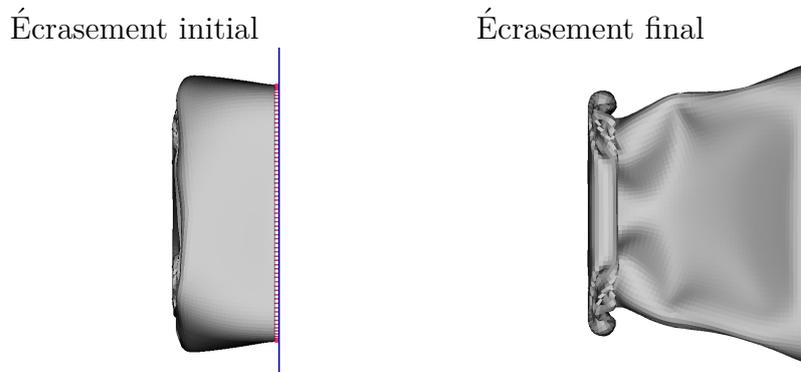


**Figure 3.14** – Forme initiale de la crash-box à gauche et forme finale à droite

	Esquisse 1		Esquisse 2		Esquisse 3		Esquisse 4		Esquisse 5	
	$P_1$	$P_2$								
Forme initiale	40	20	40	20	40	20	60	40	60	40
Forme finale	46,16	18,97	47,7	18,8	42,82	19,69	54,53	40,97	52,83	41,04

**Tableau 3.4** – Valeurs des paramètres du cas-test crash-box avant et après optimisation

Cette forme permet au cas-test de faire travailler la zone la plus proche de l’impacteur comme le montre la figure 3.15. La « bosse » à l’avant de la crash-box optimale lui permet de se plier en amont. Ce type de déformation correspond à un résultat très recherché en crash : c’est le mode d’effondrement qui absorbe l’énergie sans provoquer un trop grand écrasement. L’obtention d’un tel résultat est au cœur du chapitre suivant consacré aux critères basés sur l’énergie de déformation.



**Figure 3.15** – Déformées des crash-boxes initiale (à gauche) et après optimisation (à droite) après impact

Un autre cas d’application de la méthode sur une crash-box avec des paramètres différents se trouve en [Genest 2015a].

### 3.4.2.3 Effet du maillage et du bruit sur l’optimisation

Lors du premier chapitre, nous avons discuté de la non-répétabilité des simulations crash. En effet, si nous lançons plusieurs fois le même calcul, des résultats différents sont obtenus. L’influence de cette caractéristique sur l’optimisation peut être élevée si nous couplons à cela l’effet du bruit numérique. Pour mettre en lumière cette problématique, nous lancerons trois fois l’étude précédente en partant de la même configuration initiale.

De plus, nous en profiterons pour analyser l’effet du maillage sur l’optimisation. Pour cela, nous utiliserons quatre tailles de mailles différentes : 2mm, 3mm, 4mm et 5mm. Les résultats sont présentés en figure 3.16.

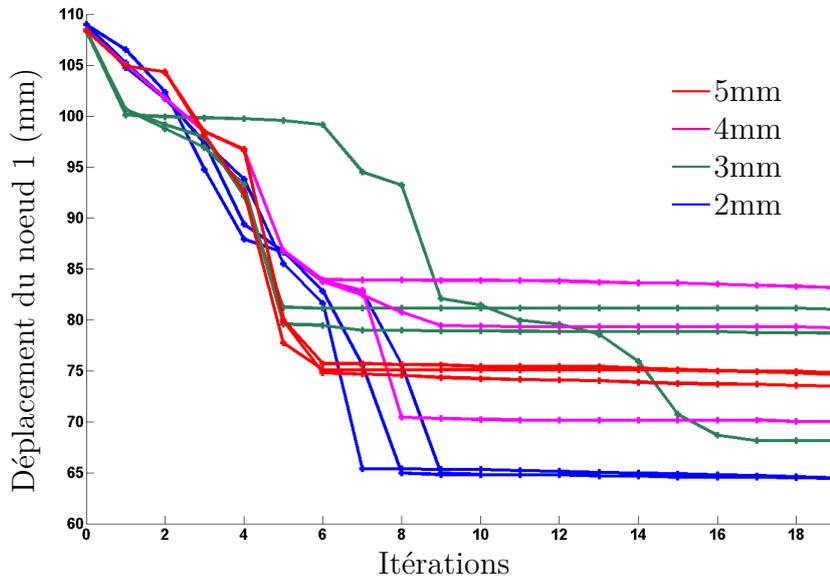


Figure 3.16 – Effet du bruit et de la taille de maille sur l’optimisation – Valeur de la fonction objectif

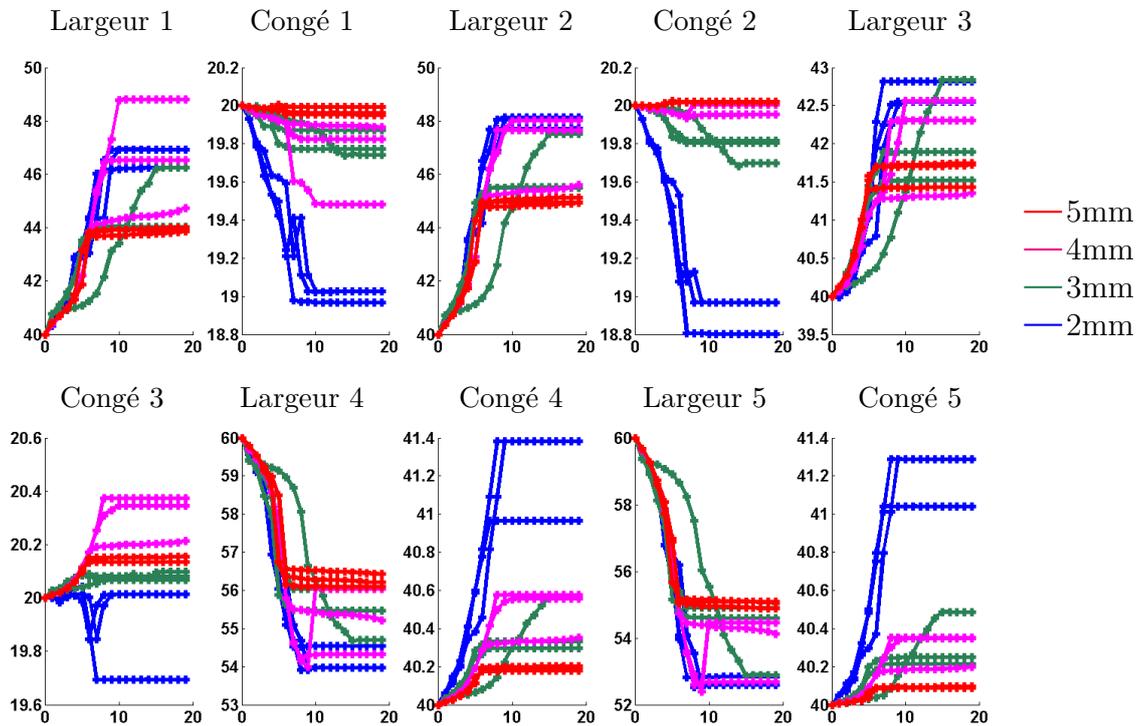


Figure 3.17 – Effet du bruit et de la taille de maille sur l’optimisation – Évolution des paramètres

Les itérations en abscisses et les valeurs des paramètres en ordonnées

Le faisceau de dispersion  $y$  est très important. Nous avons à chaque fois pu réduire la fonction objectif mais les chemins suivis sont tous différents. D'ailleurs, les optima trouvés ne sont pas les mêmes, ce qui se confirme lorsque nous observons l'évolution des paramètres sur la figure 3.17.

Les différents chemins s'expliquent par le bruit numérique important de la simulation crash ainsi que la non-répétabilité. De plus, il est à noter que la taille de maille n'a que peu d'influence sur la répétabilité de l'optimisation alors qu'elle en a une sur la répétabilité d'une simulation : que ce soit pour une taille de 5mm ou de 2mm les chemins suivis diffèrent fortement alors que les simulations sont de plus en plus répétables.

Contrairement au cas-test de la poutre transverse que nous avons étudié au chapitre 2, ce cas-test type crash-box n'a pas des paramètres d'épaisseur mais de forme. Ce type de variables induit une plus forte non-linéarité du problème et, dans le cas de la dynamique rapide, plus de chance d'obtenir des phénomènes de bifurcations. C'est pour cela que nous trouvons des optima différents à chaque lancement de l'algorithme.

Cette étude nous permet de conclure sur l'exigence d'avoir une bonne modélisation en crash pour permettre l'optimisation et en garantir une meilleure répétabilité.

### 3.5 Synthèse du chapitre

Ce chapitre a montré qu'il est possible de calculer une direction de descente par rapport à la position des nœuds d'un maillage, c'est-à-dire avoir un mapping de sensibilité. Cependant, nous souhaitons la sensibilité par rapport aux paramètres CAO. Il n'est pas aisé de l'obtenir. En effet, le paramétrage dépend fortement du processus de construction du modèle CAO et le lien mathématique entre les paramètres, la forme et la position des nœuds du maillage n'est pas toujours établie.

Nous avons alors choisi de calculer de manière analytique cette sensibilité en utilisant des surfaces paramétriques pour définir la forme et des points de contrôle comme paramètres de forme. Ainsi, il est facile de la calculer lorsque les coordonnées surfaciques des nœuds ont été obtenus par relocalisation. Néanmoins, il faut garder en tête que le calcul analytique est rarement disponible avec les modèles CAO paramétrés du monde industriel. Une approche par différences finies, dont nous avons discuté, sera alors préférable.

Nous avons pu appliquer notre méthode utilisant le gradient du problème équivalent à un problème de dynamique rapide. Nous cherchions alors à minimiser l'écrasement d'une crash-box, donc à minimiser un déplacement nodal. De très bons résultats ont été obtenus. Cependant, nous avons vu que le bruit numérique s'avère néfaste pour l'optimisation et, par conséquent, qu'une bonne qualité de modélisation est exigée.

Nous pouvons maintenant traiter un nombre important de paramètres de forme lors d'une optimisation en dynamique rapide grâce à notre méthode utilisant un gradient approximé. Pour l'instant, nous n'avons traité que des fonctions objectifs dépendant d'un déplacement nodal et il nous reste à étudier l'autre importante catégorie de critères : les critères énergétiques.

Bibliographie du 3<sup>e</sup> chapitre

- [Armstrong 2007] C.G. Armstrong, T.T. Robinson, H. Ou et C. Othmer. *Linking adjoint sensitivity maps with CAD parameters*. Evolutionary methods for design, optimization and control, pages 234–239, 2007. (cité page 79)
- [Bakenov 2003] A. Bakenov, T.W. Sederberg, J. Zheng et A. Nasri. *T-splines and t-nurccs*. ACM Trans. Graph., no. 22, pages 477–484, 2003. (cité page 72)
- [Boor 1972] C. De Boor. *On calculating with b-splines*. Journal of Approximation Theory, 1972. (cité page 71)
- [Bézier 1986] P. Bézier. Mathématiques et c.a.o., volume 4 : Courbes et surfaces. Hermès, 1986. (cité page 70)
- [Casteljau 1985] P. De Casteljau. Mathématiques et c.a.o., volume 2 : Formes à pôles. Hermès, 1985. (cité page 70)
- [Catmull 1974] E. Catmull et R. Rom. *A class of local interpolating splines*. Computer Aided Geometric Design, 1974. (cité page 72)
- [Chen 1997] S. Chen et D.A. Tortelli. *Three-dimensional shape optimization with variational geometry*. Structural optimization, no. 13, pages 81–94, 1997. (cité page 79)
- [Choi 1994] K.K. Choi et K.H. Chang. *A study of design velocity field computation for shape optimal design*. Finite Elements in Analysis and Design, no. 15, pages 317–341, 1994. (cité page 79)
- [Coons 1987] S. Coons. Mathématiques et c.a.o., volume 5 : Méthodes matricielles. Hermès, 1987. (cité page 70)
- [Cottrell 2009] J.A. Cottrell, T. J.R. Hughes et Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis, toward integration of cad and fea*. John Wiley and Sons, 2009. (cité pages 80 et 81)
- [Cox 1971] M.G. Cox. *The numerical evaluation of b-splines*. Technical Report, National Physics Laboratory DNAC, no. 4, 1971. (cité page 71)
- [du Cauzé de Nazelle 2013] P. du Cauzé de Nazelle. *Paramétrage de formes surfaciques pour l’optimisation*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2013. (cité page 81)
- [Farin 1999] G. Farin. *Nurbs for curve and surface design : from projective geometry to practical use*. A.K. Peters, 1999. (cité page 71)
- [Froment 2014] P. Froment. *Optimisation de formes paramétriques en grande dimension*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2014. (cité pages 13 et 79)
- [Genest 2015] L. Genest, L. Jézéquel, F. Gillot et F. Mercier. *Méthode d’optimisation de forme en dynamique rapide par approche quasi-statique*. 12e Colloque National en Calcul des Structures, 2015. (cité page 86)
- [Gilbert 1993] M. Gilbert. *Configuration controlled 3D designs of mechanical parts and assemblies*. ISO 10303, Part 203, 1993. (cité page 82)
- [Hardee 1999] E. Hardee, K.H. Chang, J. Tu, K.K. Choi, I. Grindeanu et X. Yu. *A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solids*. Advances in Engineering Software, no. 30, pages 185–199, 1999. (cité page 79)

- [Julisson 2015] S. Julisson, C. Fourcade, P. de Nazelle et L. Dumas. *A novative optimal shape design based on an isogeometric approach : Application to optimization of surface shapes with discontinuous curvature*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 81)
- [Leblond 2015] T. Leblond, P. Froment, P. de Nazelle, R. Sellakh, P. Serré et G. Chevalier. *Gradient-based optimization of parameterized CAD geometries*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 79)
- [Robinson 2009] T.T. Robinson, C.G. Armstrong, H.S. Chua, C. Othmer et T. Grahns. *Sensitivity-based optimization of parameterized CAD geometries*. 8<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009. (cité page 79)
- [Toivanen 2006] J.I. Toivanen et J. Martikainen. *A new method for creating sparse design velocity fields*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, no. 196, pages 528–537, 2006. (cité page 79)
- [Wang 2002] H. Wang, J. Kearney et K. Atkinson. *Robust and efficient computation of the closest point on a spline curve*. Curve and surface design, 2002. (cité page 76)
- [Wang 2004] W. Wang, H. Pottmann et Y. Lin. *Fitting B-Spline curves to point clouds by squared distance minimization*. Technical Report, HKU CS, 2004. (cité page 76)

# Mise en œuvre de la méthode pour les critères énergétiques

---

## Sommaire

<b>4.1 Critères énergétiques en dynamique rapide . . . . .</b>	<b>92</b>
4.1.1 Comportement souhaité lors d'un crash . . . . .	92
4.1.2 Différentes approches pour contrôler le comportement . . . . .	93
4.1.2.1 Approche utilisée dans l'industrie automobile . . . . .	93
4.1.2.2 Approche basée sur l'énergie de déformation . . . . .	94
4.1.3 Problème statique équivalent pour la préservation de l'énergie .	96
4.1.3.1 Approche classique de l'ESLM . . . . .	96
4.1.3.2 Utilisation de la matrice de rigidité sécante . . . . .	96
<b>4.2 Estimation du gradient pour la forme . . . . .</b>	<b>97</b>
4.2.1 Dérivée de forme du problème statique linéaire équivalent . . .	97
4.2.1.1 Dérivée continue de la forme . . . . .	97
4.2.1.2 Discrétisation . . . . .	98
4.2.2 Application à une poutre en S . . . . .	100
4.2.2.1 Présentation du problème de forme . . . . .	101
4.2.2.2 Optimisation . . . . .	104
<b>4.3 Extension aux paramètres d'épaisseur . . . . .</b>	<b>106</b>
4.3.1 Dérivée par rapport à l'épaisseur . . . . .	107
4.3.2 Application . . . . .	108
4.3.2.1 Description du problème . . . . .	109
4.3.2.2 Application de la méthode . . . . .	110
<b>4.4 Synthèse du chapitre . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>Bibliographie du 4<sup>e</sup> chapitre . . . . .</b>	<b>114</b>

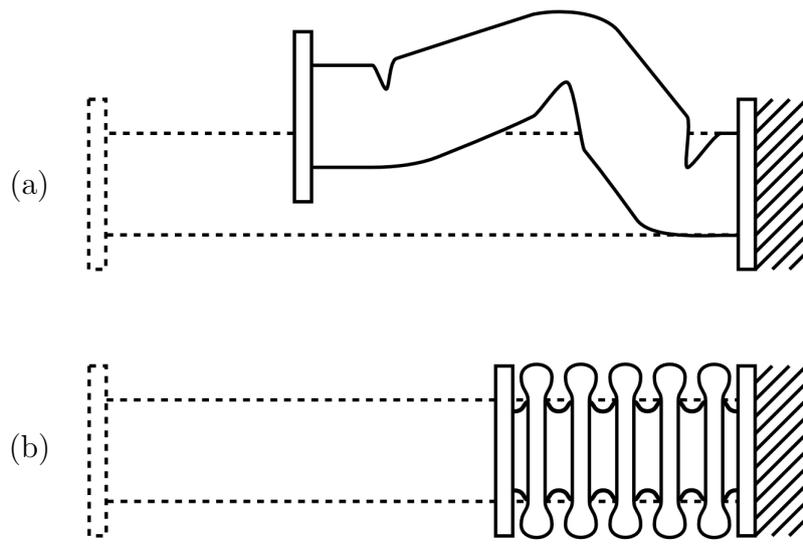
Les précédents chapitres ont permis de montrer que l'optimisation de forme et d'épaisseur en dynamique rapide est devenue possible pour un grand nombre de paramètres. En effet, l'estimation du gradient obtenue par l'Equivalent Static Loads Method permet de traiter les problèmes ayant un critère dépendant d'un déplacement nodal. À présent, nous allons nous concentrer sur une autre catégorie de critère : les critères énergétiques. Nous analyserons dans ce chapitre à quoi servent ces critères et comment ils sont construits. Nous poursuivrons par la définition d'une méthode basée sur l'ESLM pour traiter les paramètres de forme et d'épaisseur.

### 4.1 Critères énergétiques en dynamique rapide

L'intérêt des critères énergétiques vient du fait qu'ils permettent de contrôler le comportement de la structure lors du crash. En effet, pour qu'une structure résiste bien au choc, il ne faut pas uniquement que l'habitacle ne se déforme pas exagérément ou que les critères biomécaniques soient respectés. Il faut que les pièces, comme le longeron ou la crash-box, absorbent, grâce à leur déformation, l'énergie du choc dans un ordre établi.

#### 4.1.1 Comportement souhaité lors d'un crash

Nous avons dit dans le premier chapitre qu'il existe différentes zones dans la partie frontale d'une voiture. La traverse extrême avant et les crash-box servent à absorber l'énergie des chocs à petite vitesse alors que le longeron sert à absorber l'énergie à grande vitesse. Néanmoins, même la traverse et les crash-box ont leur rôle à jouer lors des grands chocs. Et, pour qu'elles soient utilisées à leur plein potentiel, il faut qu'elles s'effondrent avant les longerons. C'est la première condition d'un bon comportement en crash.



**Figure 4.1** – Les deux modes d'effondrement d'une poutre : le flambement en (a) et l'effondrement axial en (b)

La seconde condition vient des deux modes d'effondrement des poutres en tôles minces : le flambement et l'effondrement axial. De ces deux modes explicités dans [Bois 2004] et illustrés en figure 4.1, l'effondrement axial s'avère être celui qui absorbe le mieux l'énergie du choc au vu de la déformation qu'il engendre. Or, ce mode d'effondrement n'est pas simple à réaliser à cause de son instabilité. La meilleure façon de l'obtenir est d'avoir une poutre droite.

Dû à la présence des différents composants de la partie avant du véhicule, comme le moteur ou le groupe moto-ventilateur, le longeron que nous aimerions droit se trouve avoir une forme en S. Dans ce cas, le mode principal est le flambement. C'est pourquoi de nombreux renforts sont utilisés pour imposer un effondrement axial. Nous comprenons l'intérêt de l'optimisation de forme sur cette pièce car l'ajout de renforts alourdit fortement le bloc frontal de la caisse.

### 4.1.2 Différentes approches pour contrôler le comportement

Ainsi, pour contrôler le comportement de la structure lors d'un choc et plus particulièrement l'effondrement des voies d'efforts (crash-box, longerons, montant de baie, bavolet...), différentes méthodes sont utilisées.

#### 4.1.2.1 Approche utilisée dans l'industrie automobile

L'approche la plus couramment utilisée dans l'industrie automobile utilise ce que nous appelons des SECFOs<sup>a</sup>. Les SECFOs sont des sections virtuelles qui coupent la voie d'effort en plusieurs endroits comme le montre la figure 4.2.

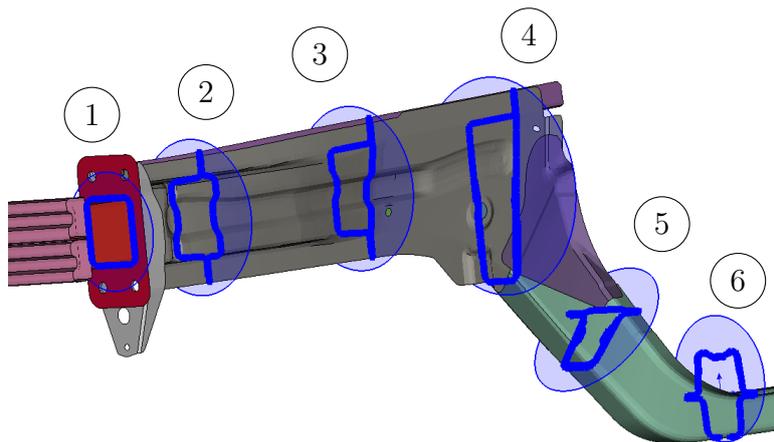


Figure 4.2 – Différentes SECFOs sur une voie d'effort

Nous traçons alors la force  $F_{S_i}(t)$  qui représente l'intégrale de la contrainte passant

---

a. SECFOs : Section de forces

par cette section  $\mathcal{S}_i$  en fonction du temps.

$$F_{\mathcal{S}_i}(t) = \int_{\mathcal{S}_i} \sigma(t) dS \tag{4.1}$$

Nous obtenons des courbes comme celles représentées en figure 4.3. Ces courbes, assez difficiles à décrypter, permettent de savoir quelles zones résistent le mieux au choc. Il faut tout d’abord déterminer l’instant où la voie d’effort se ruine, c’est-à-dire le pic maximal des courbes. Ensuite, nous observons qu’elle est la valeur de la force à cet instant : plus elle est élevée, meilleure est la résistance de la section au choc.

Dans notre exemple, nous aimerions que la section 1 sur la crash-box s’effondre avant la section 2 de la partie avant du longeron. La ruine de la section 3 au milieu du longeron suivra dans un troisième temps. Or, nous voyons que les trois SECFOs ruinent au même instant et que leur effort maximal ont quasiment la même valeur. Pire que cela, l’effort maximal de la zone arrière du longeron, en bleu, est inférieur à celui de l’avant du longeron, en rouge.

Nous observons un mauvais comportement qui correspond typiquement à un flambement de la voie d’effort. Il va falloir renforcer fortement la zone arrière de la voie d’effort et affaiblir la crash-box pour obtenir l’effondrement axial. C’est avec cette démarche que les ingénieurs automobiles assurent un bon comportement lors du crash.

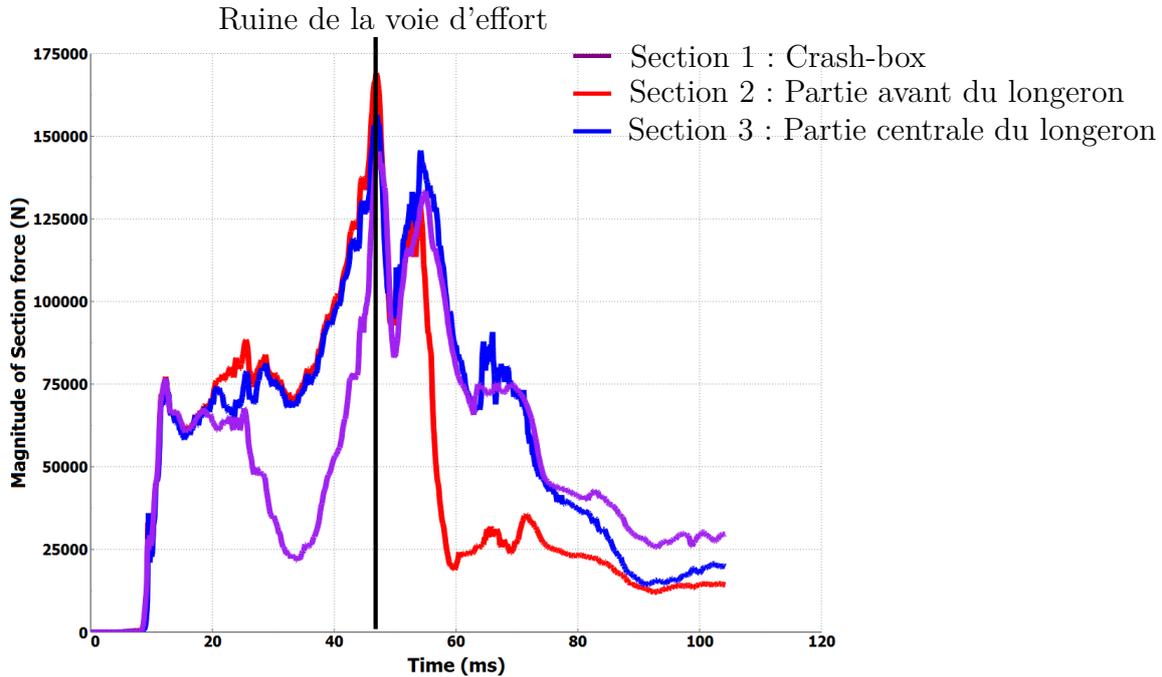


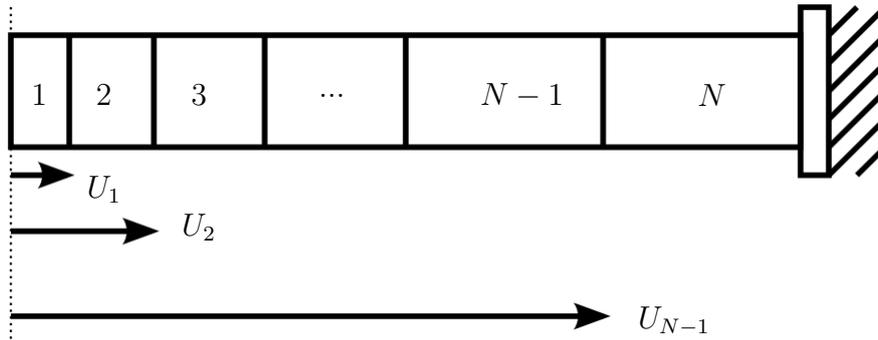
Figure 4.3 – Forces issues de SECFOs en fonction du temps

#### 4.1.2.2 Approche basée sur l’énergie de déformation

Il est aussi possible de piloter le comportement de la structure lors du crash directement à partir de l’énergie de déformation. Cela peut être fait en définissant des zones sur la

voie d'effort et en créant des critères liés à l'énergie de déformation de ces zones. Nous pouvons ensuite associer un objectif sur chacune des parties de la voie ou bien utiliser un critère agrégé.

Pour illustrer ce propos, nous allons voir comment se construit le critère proposé dans [Chase 2008]. Il permet d'assurer le fait que les zones les plus avant dissipent l'énergie avant les zones arrières, c'est-à-dire le comportement souhaité : l'effondrement axial. Le critère se base sur la décomposition en zones de la voie d'effort comme l'illustre la figure 4.4.



**Figure 4.4** – Définition des zones pour le calcul du critère PEA

Pour imposer l'effondrement des parties les plus proches de la zone d'impact avant les autres, le Progressive Energy Absorbed, ou PEA, se définit comme suit :

$$PEA = \sum_{i=1}^{N-1} PEA_i - \mathbf{E}_{abs,N}^{tot} \quad (4.2)$$

Avec,

$$PEA_i = \mathbf{E}_{abs,i}(t_{U_i}) - \mathbf{E}_{abs,i}(t_{U_{i-1}}) \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{E}_{abs,N}^{tot}$  est l'énergie totale absorbée par la zone  $N$ , qu'il faut minimiser, et  $\mathbf{E}_{abs,i}(t_{U_i})$  est l'énergie de déformation totale de la zone  $i$  lorsque nous nous sommes déplacés de  $U_i$ .

Bien-entendu, nous pouvons créer d'autres critères énergétiques en définissant un objectif sur chacune des zones du problème. Comme ce type d'objectifs s'avère le plus robuste, nous travaillerons par la suite sur les critères liés directement à l'énergie de déformation. Pour faire en sorte que notre critère de test ne dépende que des énergies de déformation des différentes zones, nous préférons un critère agrégé.

### 4.1.3 Problème statique équivalent pour la préservation de l'énergie

Les critères énergétiques sur lesquels nous allons travailler se basent sur l'énergie de déformation, ou absorbée,  $\mathbf{E}_{def}$  à l'instant  $t$  d'un domaine  $\Omega$ . Elle s'écrit,

$$\mathbf{E}_{def}(t) = \int_{\Omega} \{\sigma_{NL}(t, \mathbf{x})\}^T \{\varepsilon_{NL}(t, \mathbf{x})\} dV \quad (4.4)$$

où  $t$  est le temps,  $\mathbf{x}$  la position sur  $\Omega$ ,  $\sigma_{NL}$  la contrainte et  $\varepsilon_{NL}$  la déformation.

Il va falloir construire les problèmes statiques linéaires équivalents de telle sorte que nous préservions dans une équation le couple  $(\sigma_{NL}(t, \mathbf{x}), \varepsilon_{NL}(t, \mathbf{x}))$  à l'instant  $t$  de calcul de la fonction objectif.

#### 4.1.3.1 Approche classique de l'ESLM

Nous cherchons à construire un problème équivalent conservant l'énergie de déformation en statique linéaire. Dans le cadre de l'Equivalent Static Loads Method classique, il est proposé dans [Yi 2011b] de construire le problème équivalent avec deux équations distinctes. La première préservera les contraintes  $\sigma_{NL}$  à l'instant  $t$  et la seconde préservera les déformations  $\varepsilon_{NL}$  à l'instant  $t$ . Le problème équivalent revient à être écrit de la manière suivante :

Trouver les paramètres  $P$   
 Pour minimiser  $\mathbf{E}_L$

$$\mathbf{E}_L = \int_{\Omega} \{\sigma_L\}^T \{\varepsilon_L\} dV$$

Où  $\varepsilon_L$  est obtenu par

$$K_L(P) X_L^{\varepsilon, s}(P) = f_{eq}^{X, s}, \forall s$$

Et où  $\sigma_L$  est obtenu par

$$K_L(P) X_L^{\sigma, s}(P) = f_{eq}^{\sigma, s}, \forall s$$

Les forces équivalentes préservant les contraintes et celles préservant les déformations sont calculées comme explicité dans le chapitre 2.

Le fait que ce problème utilise deux équations est dû à l'impossibilité de préserver contraintes et déformations dans une seule équation, celles-ci étant construites avec la matrice de rigidité initiale  $K_L$ .

#### 4.1.3.2 Utilisation de la matrice de rigidité sécante

Par contre, si nous utilisons la matrice de rigidité sécante  $K_S$ , il est possible de préserver à la fois les contraintes et le déplacement dans une seule équation. Cela amène au problème statique équivalent suivant pour le couple  $(\sigma_{NL}(t, \mathbf{x}), \varepsilon_{NL}(t, \mathbf{x}))$  :

Trouver les paramètres  $P$   
 Pour minimiser ou maximiser  $\mathbf{E}_L$

$$\mathbf{E}_L = \int_{\Omega} \{\sigma_L\}^T \{\varepsilon_L\} dV$$

Où  $\varepsilon_L$  et  $\sigma_L$  sont issus de

$$K_S(P) X_L^{\varepsilon,s}(P) = f_{eq}^{X,s}, \forall s$$

L'utilisation de la matrice de rigidité sécante a un autre avantage : l'objectif  $\mathbf{E}_L$  que nous cherchons à minimiser ou maximiser se trouve être la compliance de l'équation équivalente.

## 4.2 Estimation du gradient pour la forme

À présent, nous allons calculer une approximation du gradient du problème de dynamique rapide. Pour ce faire, la dérivée du problème statique équivalent sera une nouvelle fois calculée et utilisée comme une direction de descente du problème de crash.

### 4.2.1 Dérivée de forme du problème statique linéaire équivalent

Pour calculer la dérivée de forme, nous allons utiliser le fait que la compliance est auto-adjointe. Nous commencerons par déterminer la dérivée de forme continue avant de la discrétiser.

#### 4.2.1.1 Dérivée continue de la forme

Nous allons écrire  $\Omega$  pour la forme et son paramétrage afin de montrer que nous travaillons de manière continue. Nous rappelons que nous cherchons à obtenir la dérivée de la fonction objectif  $J[\Omega] = \mathbf{E}_L[\Omega]$  du problème équivalent :

$$J[\Omega] = \int_{\Omega} \{\sigma_L\}^T \{\varepsilon_L\} dV \tag{4.5}$$

C'est la compliance du problème statique linéaire équivalent. Comme aucune force volumique n'est présente dans notre problème, nous pouvons écrire la dérivée de forme de la fonction objectif de la manière suivante [Allaire 2003, Dapogny 2013] :

$$J'[\Omega](\theta) = - \int_{\partial\Omega} \{\sigma_L\}^T \{\varepsilon_L\} \theta \vec{n} dS \tag{4.6}$$

où  $J'$  est la dérivée de forme de  $J$ ,  $\partial\Omega$  la surface délimitant le volume  $\Omega$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal à cette surface.

La forme étant définie par une surface, la dérivée est calculée sur les surfaces intrados et extrados comme représenté sur la figure 4.5.

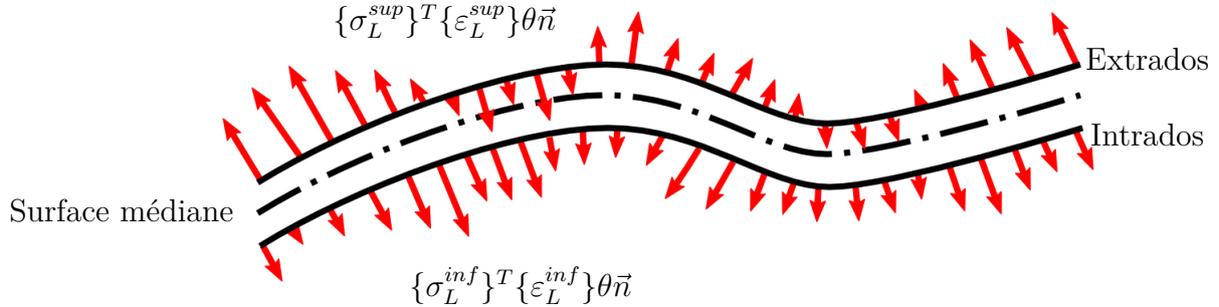


Figure 4.5 – Représentation de la dérivée de forme de la compliance sur une surface

#### 4.2.1.2 Discrétisation

Les éléments du problème linéaire sont choisis comme étant ceux du calcul de crash. Ce sont des éléments facettes quadrangles comme celui de la figure 4.6.

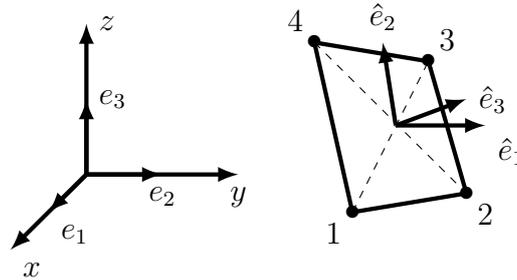


Figure 4.6 – Élément quadrangle utilisé lors des calculs de crash

Les vecteurs de coordonnée locale de l'élément se construisent ainsi :

$$\hat{e}_3 = \frac{r_{13} \wedge r_{24}}{\|r_{13} \wedge r_{24}\|} \quad (4.7)$$

$$\hat{e}_1 = \frac{r_{12} - (r_{12} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3}{\|r_{12} - (r_{12} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3\|} \quad (4.8)$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 \quad (4.9)$$

où  $r_{ij}$  correspond à la distance entre le nœud  $i$  et le nœud  $j$ . Ces quadrangles sont sous-intégrés en crash et ne possèdent qu'un seul point d'intégration de Gauss en leur centre.

Il se peut que des éléments triangles co-existent avec les quadrangles. Ils sont construits de la même manière en posant que les nœuds 3 et 4 sont identiques. La définition de cet élément impose que la normale à l'extrados s'écrit  $\vec{n}_{sup} = \hat{e}_3$  et que la normale à l'intrados soit  $\vec{n}_{inf} = -\hat{e}_3$ .

Nous notons  $\vec{j}_{sup} = -\{\sigma_L^{sup}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1})\}^T \{\varepsilon_L^{sup}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1})\} \hat{e}_3$  la dérivée locale par rapport à point  $s_1$  de coordonnées  $(\xi_{s_1}, \eta_{s_1})$  situé sur l'extrados.

De même,  $\vec{j}_{inf} = \{\sigma_L^{inf}(\xi_{s_2}, \eta_{s_2})\}^T \{\varepsilon_L^{inf}(\xi_{s_2}, \eta_{s_2})\} \hat{e}_3$  est la dérivée locale par rapport au point  $s_2$  situé sur la surface intrados.  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées du domaine de référence de l'élément. La figure 4.7 montre que la position du point  $s_1$  dans l'espace s'écrit :

$$s_1 = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_{q_i}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1}) q_i + \frac{T}{2} \hat{e}_3 \quad (4.10)$$

où  $q_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  sont les nœuds de l'élément quadrangle,  $\mathcal{N}_{q_i}$  les fonctions de formes associées à ces nœuds et  $T$  l'épaisseur de l'élément.

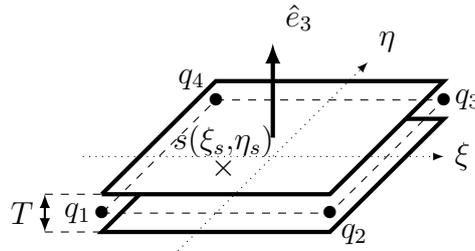


Figure 4.7 – Position d'un point sur l'extrados d'un élément

Et de la même manière, nous avons pour un point de l'intrados :

$$s_2 = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_{q_i}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1}) q_i - \frac{T}{2} \hat{e}_3 \quad (4.11)$$

Alors, il est possible d'écrire la dérivée des points de l'extrados et de l'intrados par rapport à la position des nœuds de l'élément :

$$\frac{\partial s}{\partial q_i} = \mathcal{N}_{q_i}(\xi_s, \eta_s) \quad (4.12)$$

avec  $s$  qui peut appartenir à l'extrados et à l'intrados.

Pour obtenir la dérivée de la compliance par rapport au nœud  $q_i$  (pour un élément), il faut prendre la contribution totale des dérivées locales  $\vec{j}_{sup}$  et  $\vec{j}_{inf}$  : c'est-à-dire l'intégrale sur l'élément,

$$\frac{\partial J^e}{\partial q_i} = \int_{\partial\Omega_e^{sup}} \vec{j}_{sup}(\xi_s, \eta_s) \frac{\partial s}{\partial q_i} dS + \int_{\partial\Omega_e^{inf}} \vec{j}_{inf}(\xi_s, \eta_s) \frac{\partial s}{\partial q_i} dS \quad (4.13)$$

où  $\partial\Omega_e sup$  est la surface extradados de l'élément et  $\partial\Omega_e inf$  sa surface intrados.

$$\frac{\partial J^e}{\partial q_i} = \int_{\partial\Omega_e sup} \vec{j}_{sup}(\xi_s, \eta_s) \mathcal{N}_{q_i}(\xi_s, \eta_s) dS + \int_{\partial\Omega_e inf} \vec{j}_{inf}(\xi_s, \eta_s) \mathcal{N}_{q_i}(\xi_s, \eta_s) dS \quad (4.14)$$

En utilisant une intégration de Gauss, nous avons :

$$\frac{\partial J^e}{\partial q_i} = A_e \sum_{g=1}^{N_g} \vec{j}_{sup}(\xi_s, \eta_s) \mathcal{N}_{q_i}(\xi_s, \eta_s) \omega_g + A_e \sum_{g=1}^{N_g} \vec{j}_{inf}(\xi_s, \eta_s) \mathcal{N}_{q_i}(\xi_s, \eta_s) \omega_g \quad (4.15)$$

où l'indice  $g$  représente les différents points de Gauss,  $\omega_g$  leur poids et  $A_e$  est l'aire de l'élément. Comme l'élément utilisé n'a qu'un seul point d'intégration en son centre, nous pouvons simplifier le calcul de la dérivée :

$$\frac{\partial J^e}{\partial q_i} = A_e \vec{j}_{sup}(0,0) \mathcal{N}_{q_i}(0,0) + A_e \vec{j}_{inf}(0,0) \mathcal{N}_{q_i}(0,0) \quad (4.16)$$

Soit,

$$\frac{\partial J^e}{\partial q_i} = -A_e \mathcal{N}_{q_i}(0,0) \{\sigma_L^{sup}(0,0)\}^T \{\varepsilon_L^{sup}(0,0)\} \hat{e}_3 + A_e \mathcal{N}_{q_i}(0,0) \{\sigma_L^{inf}(0,0)\}^T \{\varepsilon_L^{inf}(0,0)\} \hat{e}_3 \quad (4.17)$$

La dérivée de la compliance par rapport au nœud  $q_i$  s'obtient par assemblage des différentes contributions des éléments :

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial J^e}{\partial q_i} \quad (4.18)$$

où l'exposant  $e$  correspond à l'élément et  $N_e$  est le nombre d'éléments du modèle.

Le retour aux paramètres CAO  $P$  s'effectue de la même façon qu'au chapitre précédent. C'est-à-dire par un calcul analytique de la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres de forme.

## 4.2.2 Application à une poutre en S

Pour tester l'estimation du gradient, l'algorithme suivant a été implémenté.

**Algorithme d'optimisation de forme des critères énergétiques par estimation du gradient (cas de la maximisation)**

**Étape 0 :** Étude de la configuration initiale  $k = 0$   
TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons :  $k = k + 1$   
**Étape 1 :** Détermination du pas  $\alpha_k$ .  
TANT QUE  $test\_fonction\_objectif \neq OK$   
**Étape 1-a :** Modification des paramètres de forme en suivant la direction du gradient estimé  $\nabla J_L$ , tout en respectant les bornes. (STEP)  
**Étape 1-b :** Maillage de la forme et montage du modèle de calcul.(ANSA)  
**Étape 1-c :** Calcul explicite de crash. (PamCrash)  
**Étape 1-d :** Calcul de la fonction objectif  $J(P^k) = \mathbf{E}_{def}^{NL}(P^k)$ . (MetaPost)  
SI  $J(P^k) \geq J(P^{k-1})$   
 $test\_fonction\_objectif = OK$  et  $\alpha_{k+1} = \alpha_k \times 1,5$   
SINON  
 $\alpha_k = \alpha_k \times 0,5$   
FIN SI  
FIN TANT QUE  
**Étape 2 :** Construction du problème statique linéaire équivalent. (Matlab)  
**Étape 3 :** Calcul de la dérivée de la fonction objectif par rapport à la position des nœuds du maillage du problème statique linéaire équivalent  $\frac{\partial J_L(P^k)}{\partial Q}$  par discrétisation de la dérivée de forme continue de la compliance (Matlab).  
**Étape 4 :** Détermination des coordonnées surfaciques  $(u_{q_i}, v_{q_i})$  de chaque nœuds  $q_i$  par une méthode de Newton-Raphson. (Matlab)  
**Étape 5 :** Détermination de la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres de forme (points de contrôle ou combinaison de points de contrôle) :  $\frac{\partial Q}{\partial P}$ . (Matlab)  
**Étape 6 :** Calcul de la direction de descente pour les paramètres de forme. (Matlab)

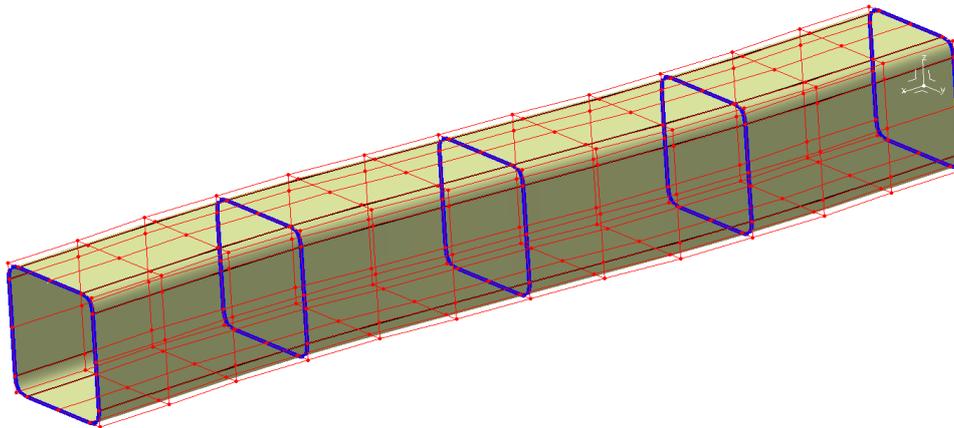
$$\nabla J_L = \frac{\partial J_L(P^k)}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial P}$$

**Étape 7 :** Test de convergence ou test de fin du budget calcul.  
FIN TANT QUE

Il diffère de celui mis en place pour l'optimisation de forme des critères en déplacement nodal par le fait que la sensibilité est calculée directement avec **Matlab** et ne nécessite donc pas de faire appelle au logiciel **Nastran**.

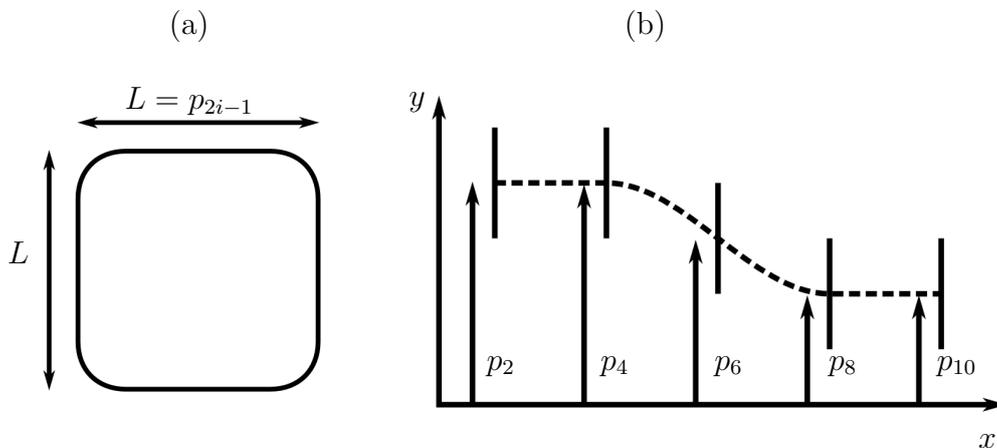
#### 4.2.2.1 Présentation du problème de forme

L'étude que nous allons réaliser reprend la problématique du longeron et de sa forme en S. La géométrie a été construite avec 5 esquisses, en bleu sur la figure 4.8, qui pilotent le polygone de contrôle, en rouge, de la surface paramétrique.



**Figure 4.8** – Définition de la forme de l'étude de forme avec critères énergétiques  
En rouge le polygone de contrôle, en bleu les esquisses pilotantes

Dix paramètres ont été choisis pour contrôler la forme de cette poutre d'épaisseur 1,5mm en acier. Pour chaque esquisse, un paramètre définit la largeur du carré comme le montre la figure 4.9-a. Le congé est fixé dans ce cas-test. Un deuxième paramètre permet de positionner en  $y$  l'esquisse, cf. figure 4.9-b.



**Figure 4.9** – Paramétrage de la forme de l'étude de forme avec critères énergétiques  
Paramètre de largeur de l'esquisse  $i$  en (a) et paramètres de positionnement en  $y$  en (b)

Dans la configuration initiale, toutes les largeurs sont de 60mm et les paramètres de positionnement sont les suivants : 0mm pour les esquisses 1 et 2, -10mm pour la troisième et -20mm pour les deux dernières. Suivant l'axe  $x$ , la longueur de la poutre est de 450mm. La forme est alors celle du modèle de calcul présenté en figure 4.10. Nous pouvons y voir la plaque poussante à laquelle est affectée une masse ponctuelle de 500kg en son centre. Cet ensemble constitué de la poutre et de la plaque va s'écraser sur le mur rigide à une vitesse de 21,6 km.h<sup>-1</sup>. Une taille de maille de 3mm est choisie pour cette étude.

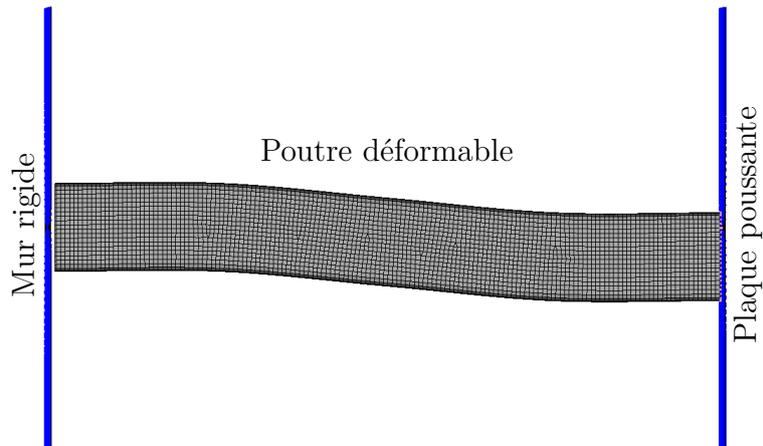


Figure 4.10 – Modèle de calcul initial de l'étude de la forme de la poutre en S

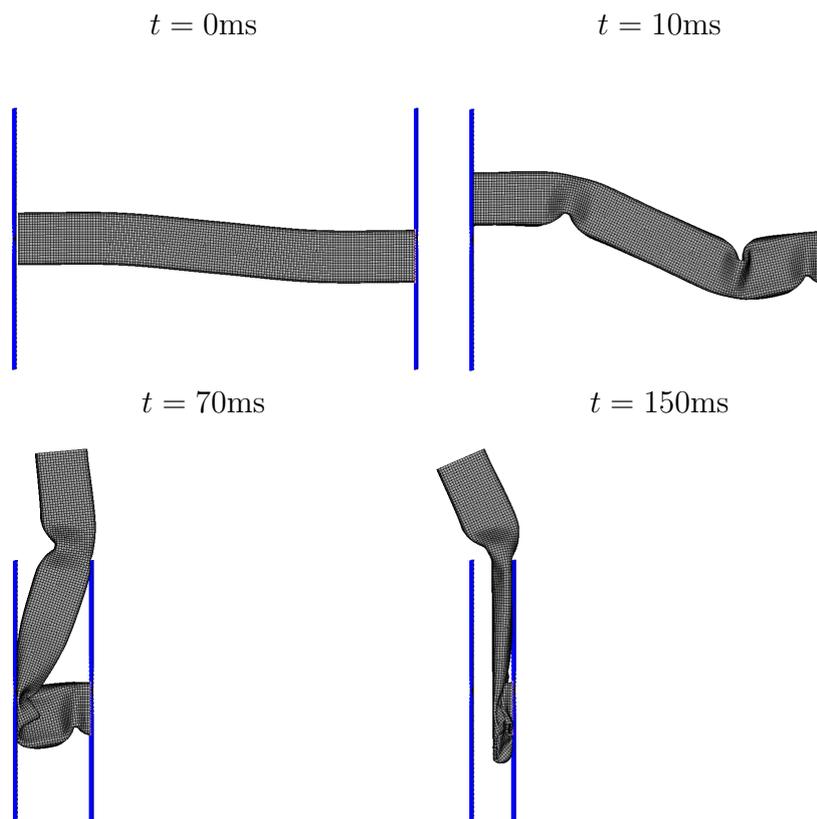


Figure 4.11 – Déformée pendant le choc du modèle en S initial

Le comportement de la poutre lors du crash est celui d'un mode de flambement. La figure 4.11 contient la déformée de la poutre à différents instants du calcul de crash. Ce

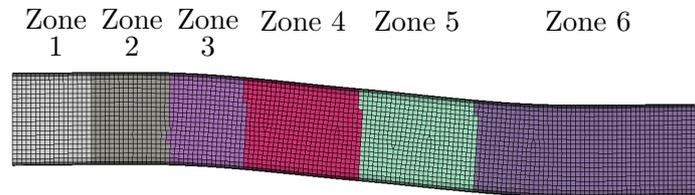
mode d'effondrement est, en général, non souhaité comme nous l'avons évoqué. En effet, l'effondrement axial serait préférable pour faire travailler les zones amonts de la pièce et éviter que l'arrière de la poutre n'absorbe toute l'énergie du choc.

Dans cette optique, un critère agrégé a été défini. La poutre a été divisée en 6 zones comme illustré en figure 4.12. Le but est de minimiser l'énergie de déformation des zones arrières et de maximiser celle des zones avant. Un poids plus fort est instauré aux extrémités de la pièce. Le critère agrégé à maximiser s'écrit alors :

$$J(P) = \mathbf{E}_{def}^{(1)} + \frac{2}{3}\mathbf{E}_{def}^{(2)} + \frac{1}{3}\mathbf{E}_{def}^{(3)} - \frac{1}{3}\mathbf{E}_{def}^{(4)} - \frac{2}{3}\mathbf{E}_{def}^{(5)} - \mathbf{E}_{def}^{(6)} \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{E}_{def}^{(i)}$  correspond à l'énergie de déformation de la zone  $i$ .

Un autre cas d'optimisation en utilisant l'estimation du gradient, utilisant le PEA cette fois, est disponible dans [Genest 2015b].



**Figure 4.12** – Zones de calcul du critère énergétique agrégé

### 4.2.2.2 Optimisation

Le critère a alors une valeur de  $-6,805.10^3\text{J}$  dans la configuration initiale. En appliquant l'algorithme d'optimisation proposé avec un pas initial de 0,02, nous obtenons la courbe présentée en figure 4.13. En quelques itérations, le critère est devenu positif. Ce qui implique que la partie amont de la poutre absorbe plus d'énergie que la partie arrière comme nous le souhaitions.

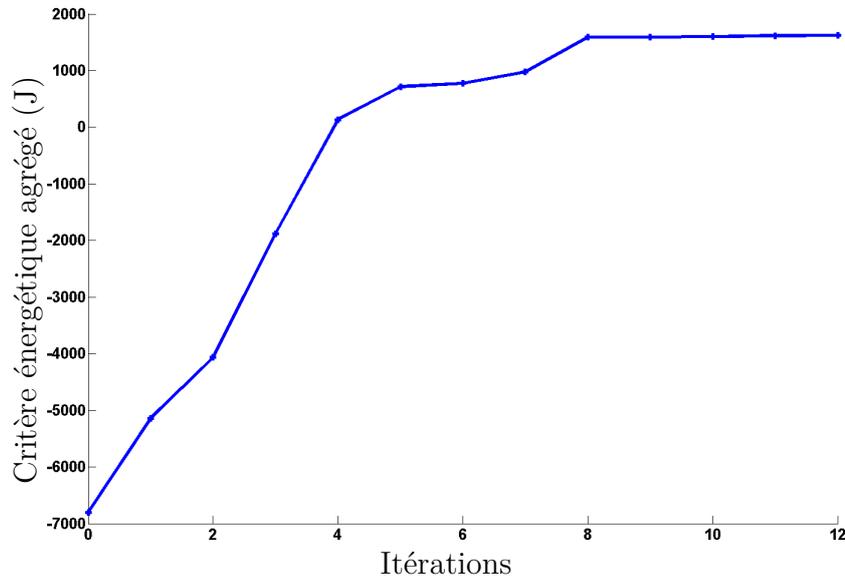


Figure 4.13 – Évolution de la fonction objectif au cours de l’optimisation

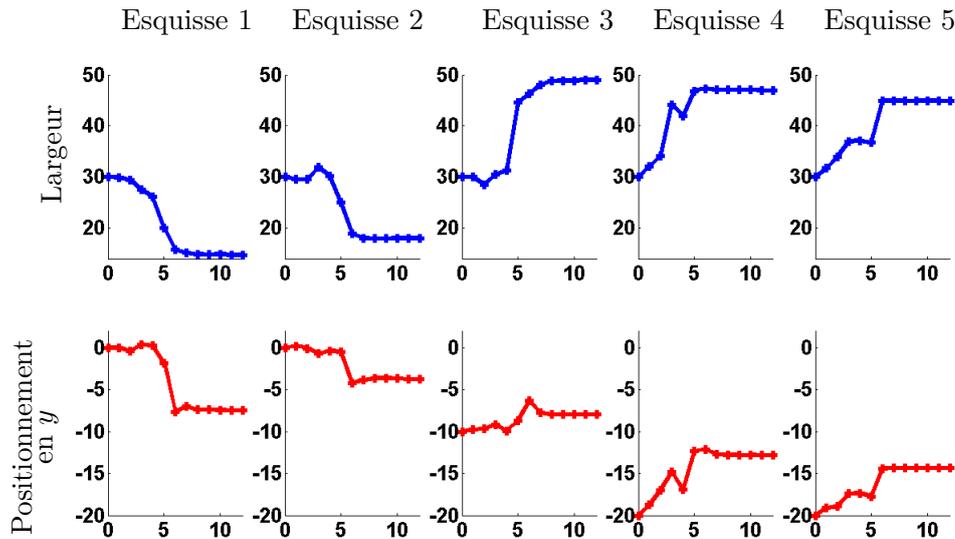


Figure 4.14 – Évolution des paramètres au cours de l’optimisation en fonction des itérations

L’évolution des paramètres est, quant à elle, visible en figure 4.14. Les paramètres de positionnement en  $y$  (en rouge) des premières esquisses ont diminué et ceux des esquisses arrières ont augmenté. Nous pouvons en conclure que la poutre s’est réalignée sur l’axe  $y$ . De plus, les largeurs (en bleu) des deux premières esquisses pilotantes ont diminué alors que les autres ont augmenté. Cela veut dire que la partie frontale a été affaiblie alors que la partie arrière s’est renforcée.

En analysant l'écrasement de la poutre lors de la simulation crash dont quelques instants se trouvent en figure 4.15, nous pouvons voir que l'optimum trouvé a le comportement que nous voulions. La poutre s'écrase progressivement en commençant par la zone frontale : c'est le mode d'effondrement axial.

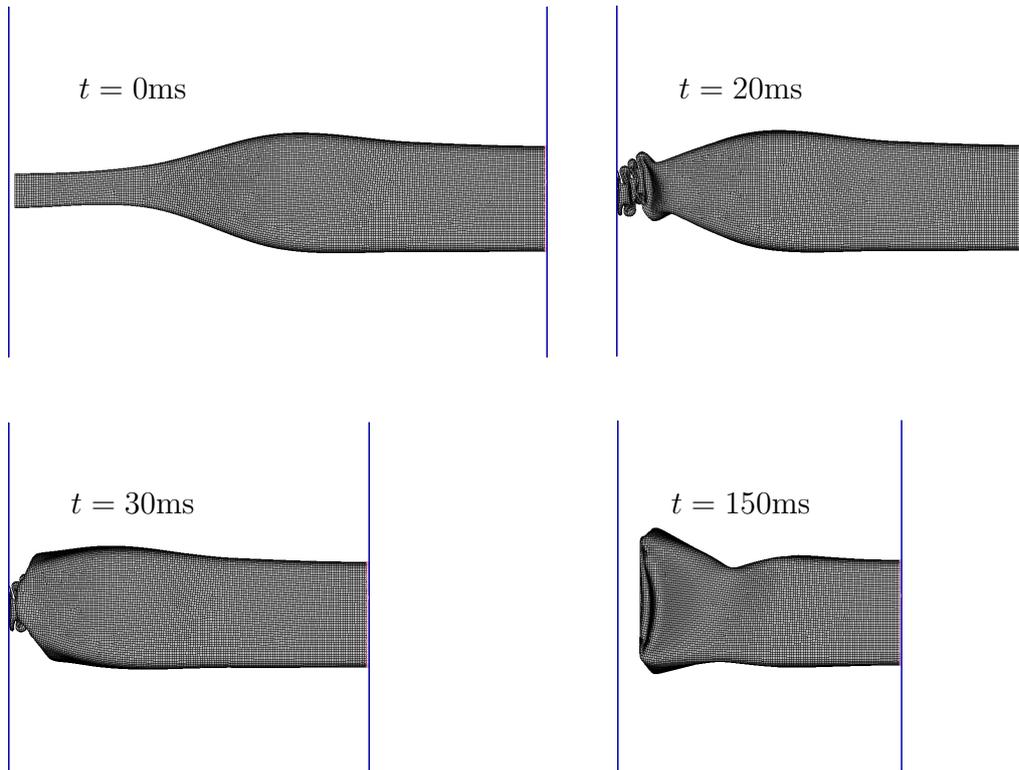


Figure 4.15 – Déformée pendant le crash de l'optimum trouvé

Il est possible de s'interroger sur le fait que la poutre ne se soit pas totalement alignée sur l'axe  $y$ . Outre les possibles bifurcations, l'arrêt de la boucle est principalement dû au bruit numérique. Le tableau 4.1 répertorie les résultats d'une répétition de l'optimum trouvé. L'écart moyen est alors de 2,14% sur une moyenne de 1627J. Ce phénomène a donc stoppé l'optimisation dans cette zone bifurcatoire et bruitée.

	Essai 1	Essai 2	Essai 3	Essai 4	Essai 5
Valeur du critère	1619,5 J	1586,1 J	1683 J	1658,7 J	1589 J

Tableau 4.1 – Répétition de l'optimum trouvé pour le critère énergétique

### 4.3 Extension aux paramètres d'épaisseur

Une démarche similaire peut être employée pour traiter les problèmes énergétiques avec des paramètres d'épaisseur. En effet, nous pouvons facilement lier la dérivée de forme de la compliance avec les paramètres d'épaisseur.

### 4.3.1 Dérivée par rapport à l'épaisseur

Nous rappelons que la position d'un point  $s_1$  situé sur l'extrados de l'élément s'écrit :

$$s_1 = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_{q_i}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1}) q_i + \frac{T_e}{2} \hat{e}_3 \quad (4.20)$$

Et qu'un point sur l'intrados est lié à la position des nœuds et à l'épaisseur de l'élément :

$$s_2 = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_{q_i}(\xi_{s_1}, \eta_{s_1}) q_i - \frac{T_e}{2} \hat{e}_3 \quad (4.21)$$

où  $T_e$  est l'épaisseur de l'élément et  $\hat{e}_3$  est le vecteur normal de l'élément.

Localement, la dérivée de forme de la compliance s'écrit :

$$\vec{j}(\xi, \eta) = \begin{cases} -\{\sigma_L^{sup}(\xi, \eta)\}^T \{\varepsilon_L^{sup}(\xi, \eta)\} \hat{e}_3 & \text{sur l'extrados} \\ \{\sigma_L^{inf}(\xi, \eta)\}^T \{\varepsilon_L^{inf}(\xi, \eta)\} \hat{e}_3 & \text{sur l'intrados} \end{cases} \quad (4.22)$$

Il est possible de dériver la position d'un point  $s$  des surfaces limites par rapport à l'épaisseur de l'élément :

$$\frac{\partial s}{\partial T_e} = \begin{cases} \frac{1}{2} \hat{e}_3 & \text{sur l'extrados} \\ -\frac{1}{2} \hat{e}_3 & \text{sur l'intrados} \end{cases} \quad (4.23)$$

En intégrant la sensibilité locale sur l'élément, nous obtenons la dérivée par rapport à l'épaisseur :

$$\frac{\partial J}{\partial T_e} = \int_{\partial\Omega_e sup} \vec{j}_{sup}(\xi_s, \eta_s) \frac{\partial s}{\partial T_e} dS + \int_{\partial\Omega_e inf} \vec{j}_{inf}(\xi_s, \eta_s) \frac{\partial s}{\partial T_e} dS \quad (4.24)$$

où  $\partial\Omega_e sup$  est l'extrados et  $\partial\Omega_e inf$  est l'intrados.

$$\frac{\partial J}{\partial T_e} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_e sup} \vec{j}_{sup}(\xi_s, \eta_s) \hat{e}_3 dS - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_e inf} \vec{j}_{inf}(\xi_s, \eta_s) \hat{e}_3 dS \quad (4.25)$$

En utilisant une intégration de Gauss, nous avons :

$$\frac{\partial J}{\partial T_e} = \frac{1}{2} A_e \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \vec{j}_{sup}(\xi_g, \eta_g) \hat{e}_3 - \frac{1}{2} A_e \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \vec{j}_{inf}(\xi_g, \eta_g) \hat{e}_3 \quad (4.26)$$

Après développement de l'expression de  $\vec{j}$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial J}{\partial T_e} = -\frac{1}{2}A_e \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \{\sigma_L^{sup}(\xi_g, \eta_g)\}^T \{\varepsilon_L^{sup}(\xi_g, \eta_g)\} - \frac{1}{2}A_e \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \{\sigma_L^{inf}(\xi_g, \eta_g)\}^T \{\varepsilon_L^{inf}(\xi_g, \eta_g)\} \quad (4.27)$$

Comme les éléments du modèle de crash n'ont qu'un seul point d'intégration en leur centre et que nous utilisons ces éléments pour notre calcul, nous pouvons simplifier la relation précédente :

$$\frac{\partial J}{\partial T_e} = -\frac{1}{2}A_e \{\sigma_L^{sup}(0,0)\}^T \{\varepsilon_L^{sup}(0,0)\} - \frac{1}{2}A_e \{\sigma_L^{inf}(0,0)\}^T \{\varepsilon_L^{inf}(0,0)\} \quad (4.28)$$

Bien-sûr, l'épaisseur de chaque élément du modèle de calcul n'est pas une variable d'optimisation du problème. Nous travaillons sur l'épaisseur des pièces voire de zones de pièce. Dans ce cas, il faut sommer les sensibilités de tous les éléments de la zone. En effet, comme  $T_e = T_{piece}$ , nous avons  $\frac{\partial T_e}{\partial T_{piece}} = 1$  ce qui implique que :

$$\frac{\partial J}{\partial T_{piece}} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial J}{\partial T_e} \frac{\partial T_e}{\partial T_{piece}} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial J}{\partial T_e} \quad (4.29)$$

où  $N_e$  est le nombre d'éléments sur la pièce.

### 4.3.2 Application

Pour tester l'estimation de la sensibilité par rapport aux épaisseurs pour les critères énergétiques, l'algorithme suivant a été implémenté.

**Algorithme d'optimisation d'épaisseur des critères énergétiques par estimation du gradient (cas de la maximisation)**

**Étape 0 :** Étude de la configuration initiale  $k = 0$

TANT QUE  $test\_convergence \neq OK$ , nous itérons :  $k = k + 1$

**Étape 1 :** Détermination du pas  $\alpha_k$ .

TANT QUE  $test\_fonction\_objectif \neq OK$

**Étape 1-a :** Modification des épaisseurs en suivant la direction du gradient estimé  $\nabla J_L$ , tout en respectant les bornes. (STEP)

**Étape 1-b :** Maillage de la forme et montage du modèle de calcul. (ANSA)

**Étape 1-c :** Calcul explicite de crash. (PamCrash)

**Étape 1-d :** Calcul de la fonction objectif  $J(P^k) = \mathbf{E}_{def}^{NL}(P^k)$ . (MetaPost)

SI  $J(P^k) \geq J(P^{k-1})$

$test\_fonction\_objectif = OK$  et  $\alpha_{k+1} = \alpha_k \times 1,5$

SINON

$$\alpha_k = \alpha_k \times 0,5$$

FIN SI

FIN TANT QUE

**Étape 2 :** Construction du problème statique linéaire équivalent. (Matlab)

**Étape 3 :** Calcul de la dérivée de la fonction objectif par rapport aux épaisseurs des éléments du problème statique linéaire équivalent  $\frac{\partial J_L(P^k)}{\partial T_e}$  par discrétisation de la dérivée de forme continue de la compliance (Matlab).

**Étape 4 :** Calcul de la direction de descente pour les paramètres d'épaisseur. (Matlab)

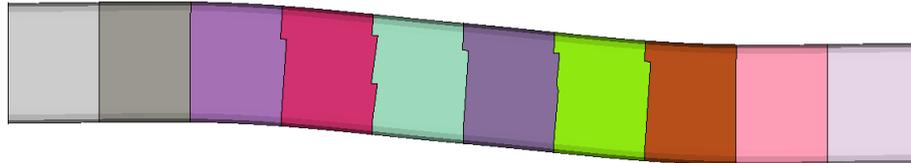
$$\nabla J_L = \frac{\partial J_L(P^k)}{\partial T_e} \cdot \frac{\partial T_e}{\partial P}$$

**Étape 5 :** Test de convergence ou test de fin du budget calcul.

FIN TANT QUE

#### 4.3.2.1 Description du problème

Le cas-test de la poutre en S, précédemment utilisé pour la forme, a été repris pour tester la direction de descente. La forme est celle de la configuration initiale. Le but est le même : assurer un bon comportement de la poutre : c'est-à-dire de faire en sorte que la poutre ait un effondrement axial et que l'avant absorbe le plus d'énergie. Pour cela, nous avons subdivisé en 10 parties la poutre comme le montre la figure 4.16.



**Figure 4.16** – Division du cas-test pour le critère énergétique avec paramètres d'épaisseur

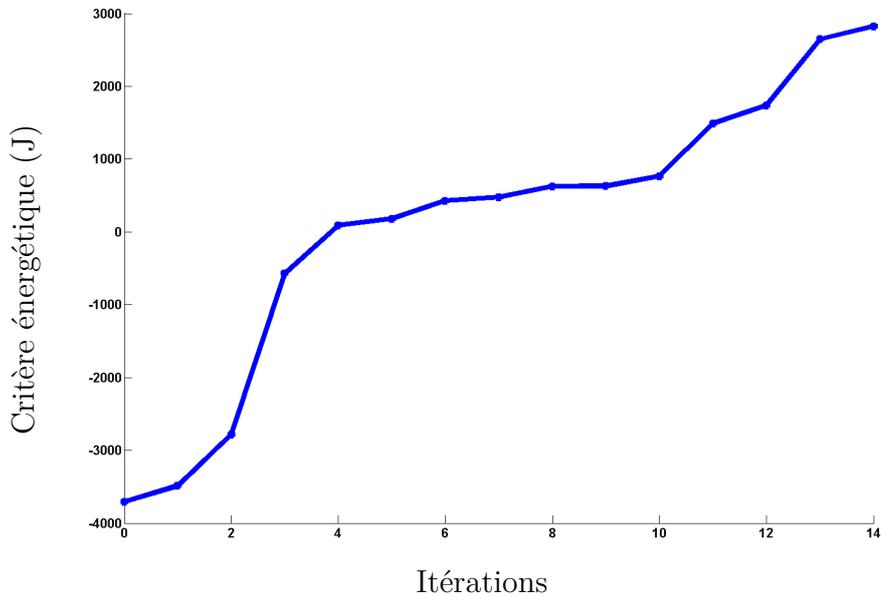
Chacune de ces zones a un paramètre d'épaisseur, 10 au total. Toutes les épaisseurs sont égales à 1,5mm dans la configuration initiale. L'énergie de déformation de chacune de ces zones participe également au critère agrégé suivant que nous allons chercher à maximiser :

$$J(P) = \mathbf{E}_{def}^{(1)} + \frac{4}{5}\mathbf{E}_{def}^{(2)} + \frac{3}{5}\mathbf{E}_{def}^{(3)} + \frac{2}{5}\mathbf{E}_{def}^{(4)} + \frac{1}{5}\mathbf{E}_{def}^{(5)} - \frac{1}{5}\mathbf{E}_{def}^{(6)} - \frac{2}{5}\mathbf{E}_{def}^{(7)} - \frac{3}{5}\mathbf{E}_{def}^{(8)} - \frac{4}{5}\mathbf{E}_{def}^{(9)} - \mathbf{E}_{def}^{(10)} \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{E}_{def}^{(i)}$  correspond à l'énergie de déformation de la zone  $i$ .

### 4.3.2.2 Application de la méthode

Ce nouveau critère a une valeur de  $-3,706.10^3\text{J}$  dans la configuration initiale. Avec un pas initial de  $5.10^{-7}$ , nous avons appliqué l'algorithme. L'évolution de la fonction objectif qui en résulte est en figure 4.17 suivante. La boucle s'arrête à la 14<sup>ème</sup> itération avec un optimum trouvé où le critère est de  $2,8263.10^3\text{J}$ . Celui-ci est positif ce qui implique que la partie amont absorbe plus d'énergie que les zones arrières.



**Figure 4.17** – Évolution du critère énergétique lors de l'optimisation des paramètres d'épaisseur

En observant l'évolution des paramètres sur la figure 4.18, nous voyons que les épaisseurs des zones avant ont été réduites. Celles des zones arrières ont augmenté. Nous nous retrouvons alors dans le même cas de figure que celui de l'optimisation de forme : nous avons un renforcement de la zone arrière et un affaiblissement de la zone avant. Cela permet l'effondrement prioritaire de la zone avant.

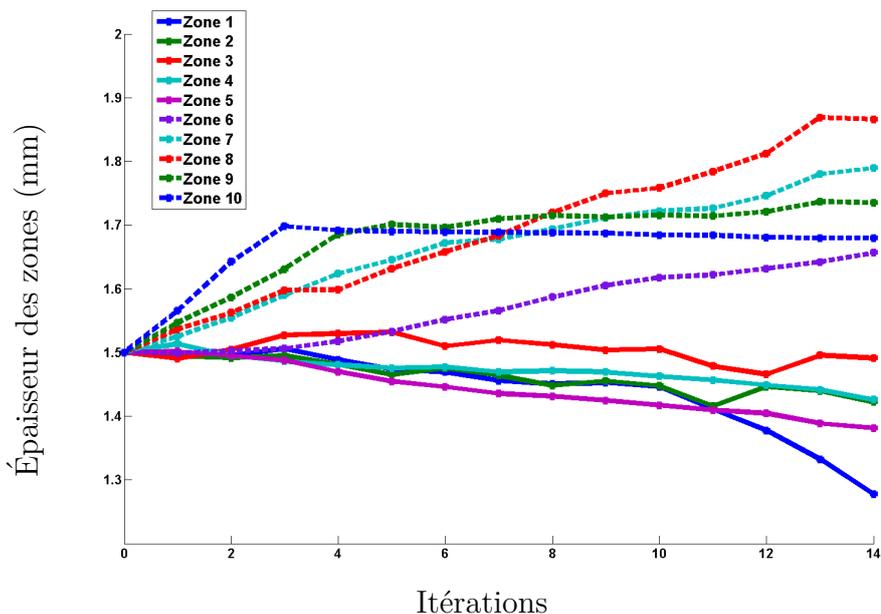


Figure 4.18 – Évolution des paramètres d'épaisseur lors de l'optimisation

La figure 4.19 ainsi que le tableau 4.2 montrent les différentes épaisseurs de l'optimum. Contrairement à ce que nous pouvons penser, la zone la plus amont n'a pas vu son épaisseur augmenter au maximum. Comme le montre la courbe d'évolution, l'épaisseur du paramètre stagne à partir de la troisième itération. C'est en effet à partir de cette dernière que nous atteignons un nouveau mode d'effondrement, représenté en figure 4.20. Dans celui-ci, la zone 10 n'absorbe plus d'énergie, même si l'effondrement n'est pas celui que nous souhaitons.

Zone	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Épaisseur finale (mm)	1,28	1,42	1,49	1,43	1,38	1,66	1,79	1,87	1,74	1,68

Tableau 4.2 – Épaisseurs finales des zones de la poutre en S

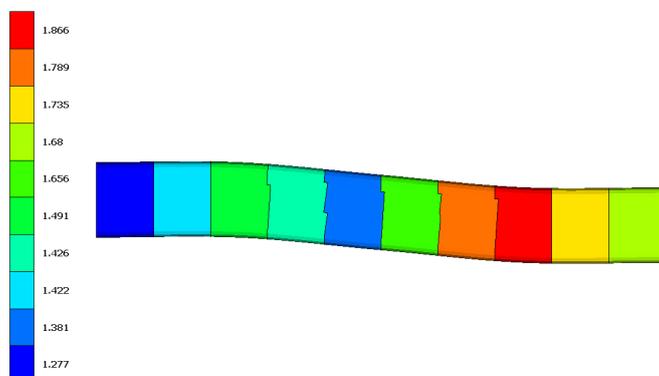
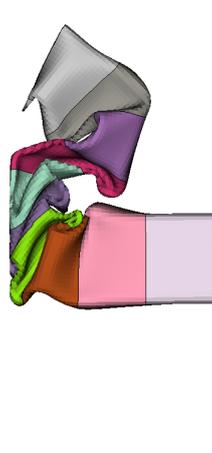
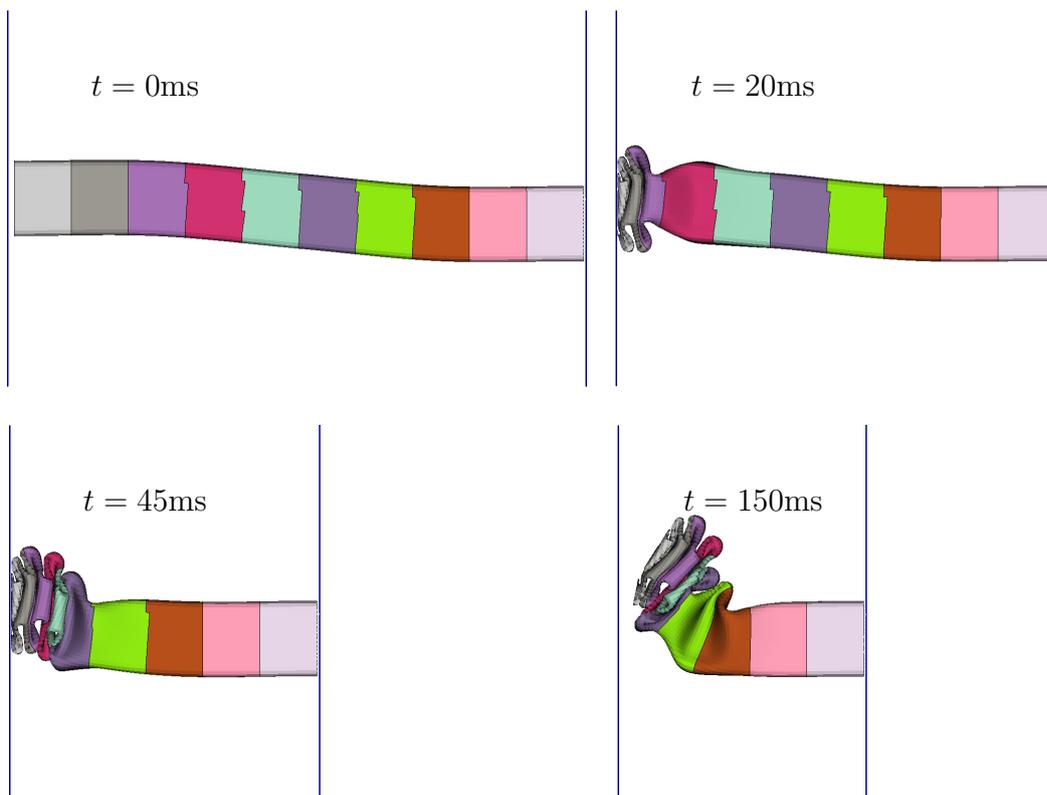


Figure 4.19 – Cartographie des épaisseurs de la configuration finale



**Figure 4.20** – Effondrement final de la poutre à l'itération 6  
Le mode d'effondrement est le même entre les itérations 3 et 9. Ici, la zone 10 ne se déforme plus.

Contrairement à cet état intermédiaire, la configuration finale a le comportement que nous souhaitons : l'effondrement axial. La déformée à plusieurs instants est montrée en figure 4.21.



**Figure 4.21** – Effondrement de la poutre dans sa configuration finale à divers instants

## 4.4 Synthèse du chapitre

Assurer un bon comportement de la structure lors d'un crash est l'un des aspects les plus importants de la résistance au choc. Parmi les critères utilisés dans l'industrie pour vérifier le comportement, les critères basés sur l'énergie de déformation s'avèrent être ceux qui ont le meilleur potentiel pour arriver à imposer et piloter l'effondrement des différentes zones.

En constituant le problème équivalent avec des équations utilisant la matrice de rigidité sécante, il est possible de conserver les contraintes et les déformations. Cela nous a permis de dériver l'énergie de déformation par rapport aux nœuds du maillage et d'utiliser le gradient du problème statique équivalent comme estimation du gradient du problème de dynamique rapide.

La dérivée de forme de la compliance des problèmes statiques linéaires équivalents peut aussi être liée à l'épaisseur des éléments de coques du modèle de calcul. Les problèmes énergétiques de dynamique rapide avec de nombreux paramètres d'épaisseur peuvent à présent être traités.

## Bibliographie du 4<sup>e</sup> chapitre

- [Allaire 2003] G. Allaire, F. Jouve et A.-M. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, 2003. (cité pages 13 et 97)
- [Bois 2004] P. Du Bois, C.C. Chou, B.B. Fileta, T.B. Khalil, A.I. King, H.F. Mahmood, H.I. Metz et J. Wismans. Vehicle crashworthiness and occupant protection. American Iron and Steel Institute, 2004. (cité page 93)
- [Chase 2008] N. Chase, R. Averill et R. Sidhn. *Design optimization of progressively crushing rails*. SAE Technical Paper, no. 2009-01-0355, 2008. (cité page 95)
- [Dapogny 2013] C. Dapogny. *Shape optimization, level-set methods on unstructured meshes and mesh evolution*. PhD thesis, École Doctorale Paris Centre, 2013. (cité pages 14 et 97)
- [Genest 2015] L. Genest, L. Jézéquel, F. Gillot et F. Mercier. *Shape optimization method for crashworthiness design based on Equivalent Static Loads concept*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 104)
- [Yi 2011] S.-I. Yi, J.-Y. Lee et G.-J. Park. *Crashworthiness design optimization using equivalent static loads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering, no. 226, pages 23–38, 2011. (cité pages 50 et 96)

# Conclusions et perspectives

---

## 5.1 Conclusions

À travers ce manuscrit, les difficultés de l'optimisation de forme en crash ont été mises en lumière. En effet, suite aux succès des méthodes d'optimisation par méta-modèles avec quelques paramètres, les études de formes deviennent récurrentes dans le monde industriel. De même, le nombre de paramètres croît fortement et rend les méthodes d'optimisation habituellement employées en dynamique trop coûteuses pour être utilisées.

Nous nous sommes alors tournés vers l'utilisation des gradients : le nombre de paramètres a un impact réduit sur les techniques d'optimisation qui utilisent la sensibilité (pour peu qu'elle ne soit pas calculée par différences finies). Cependant, aucun gradient n'est actuellement disponible en crash et nous n'avons pas accès aux codes sources des logiciels utilisés pour ce type de simulation. Au lieu de déterminer le gradient, nous avons donc cherché à en obtenir une estimation.

L'Equivalent Static Loads Method propose de recourir à un problème statique linéaire équivalent au problème de dynamique rapide pour effectuer l'optimisation. Nous avons alors proposé d'utiliser la dérivée des équations du problème équivalent comme estimation du gradient. Cette sensibilité a été utilisée comme une direction de descente pour traiter deux types de problèmes de crash : la minimisation du déplacement d'un nœud et la maximisation d'un critère énergétique. D'abord appliquée à des paramètres d'épaisseurs, cette estimation s'est révélée suffisante pour permettre l'optimisation. Une estimation de la sensibilité par rapport à la position des nœuds est aussi possible par cette approche. En déterminant de manière analytique la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres de forme, des études d'optimisation de forme paramétrique ont pu être faites. Cette dérivée peut aussi être déterminée par différences finies comme nous l'avons vu.

Ainsi, l'optimisation en crash avec de nombreux paramètres de forme et d'épaisseur est désormais possible à moindre coût. Bien-entendu, nous n'avons qu'une estimation du gradient réel qui ne remplacera pas celui-ci. Néanmoins, l'estimation est tout à fait compatible avec la véritable sensibilité, lorsqu'elle sera disponible dans les logiciels de crash. De part sa rapidité de calcul, l'approximation pourra « dégrossir » l'optimisation à moindre frais.

Cette méthode n'en est encore qu'à sa phase exploratoire mais les premiers résultats sont concluants. Afin d'éclaircir l'avenir de ces travaux, nous vous proposons d'introduire les perspectives dans la section suivante.

### 5.2 Perspectives

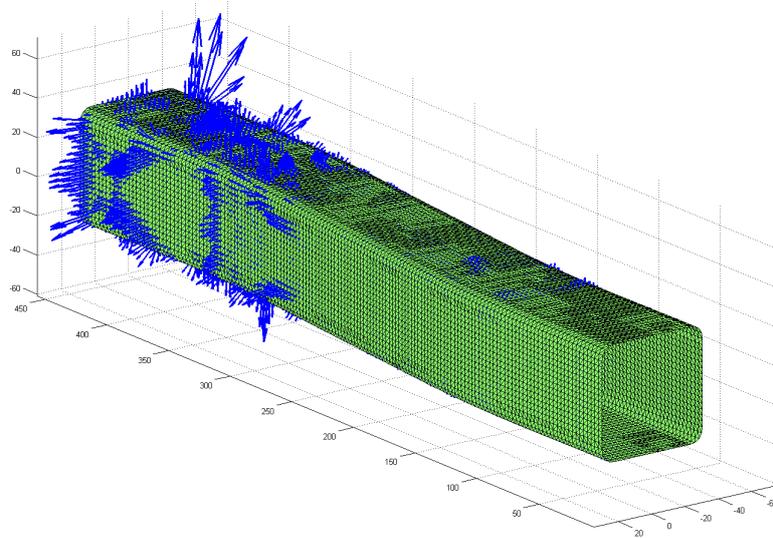
Dans cette thèse, la méthode a été développée pour deux types d'objectifs issus du crash automobile : les critères énergétiques et ceux dépendant du déplacement d'un nœud. Pour ces deux applications, l'instant de calcul du critère était fixé à l'instant final de la simulation, ce qui nous a permis de nous affranchir du temps. Ce n'est pas l'attribut de tous les critères que nous pourrions retrouver lors d'une étude d'optimisation. Nous avons vu que les fonctions liées à l'accélération et à la vitesse peuvent s'écrire en fonction d'un déplacement nodal par différences finies. Or, ces fonctions sont souvent des critères biomécanique qui sont liées au temps et non à un instant fixe dans toute l'optimisation. C'est notamment le cas du HIC qui dépend d'un maximum. Cette catégorie de critère est très présente en dynamique rapide. Nous y retrouvons, par exemple, les fonctions issues des SECFOs. Comme explicité en annexe A dans le cadre du HIC, il est possible de rendre dérivable cette famille d'objectifs en les modifiant par l'adjonction d'une fonction poids. Cela permettra d'étendre la méthode aux autres critères issus de la dynamique rapide.

Pour le moment, aucune validité mathématique de l'équivalence entre le problème de dynamique rapide et le problème équivalent défini par l'Equivalent Static Loads Method n'a été démontrée. Néanmoins, nous avons modifié le problème statique linéaire équivalent par l'utilisation de la matrice de rigidité sécante au lieu de la matrice de rigidité initiale. L'équivalence est alors dépendante des hypothèses de quasi-proportionnalité du chargement. Bien-entendu, ces hypothèses ne sont pas respectées tout au long du calcul. En testant la perte de proportionnalité du chargement, nous pourrions déterminer quand l'estimation du gradient par notre méthode ne permet plus de dégager une direction de descente.

L'utilisation d'un gradient, ou d'une estimation du gradient dans notre cas, a un autre avantage. Dans une étude d'optimisation de forme par méta-modèles, la construction du modèle CAO s'avère être la tâche la plus longue sans compter qu'il faut lancer un nombre important de calculs. C'est pour cela que les délais de l'optimisation ne sont pas corrélés aux délais des projets. En utilisant notre estimation du gradient, il est possible d'obtenir un mapping de sensibilité comme celui présenté en figure 5.1 suivante.

Ce mapping s'obtient en une seule simulation et ne nécessite pas la construction d'un modèle CAO paramétré : seul le modèle de calcul est nécessaire. Cette analyse tient parfaitement les temps projets et donne des informations essentielles au concepteur : quelles sont les zones les plus influentes et dans quelle direction la forme doit être modifiée.

Cette possibilité offerte aux ingénieurs leur permet d'appréhender l'information du gradient et d'utiliser leur expertise. Cela répond à une première problématique industrielle mais il faut y ajouter la volonté d'utilisation de modèles CAO paramétrés. Le calcul de la dérivée de la position des nœuds par rapport aux paramètres CAO par différences finies en utilisant une projection harmonique s'avère le plus prometteur.



**Figure 5.1** – Mapping de la sensibilité du critère énergétique par rapport aux nœuds du maillage

Le calcul a été effectué sur la configuration initiale du cas-test de la poutre en S.

Un dernier aspect non résolu est celui de l'optimisation multi-objectifs. Dans ce manuscrit, nous avons parlé des différents méta-modèles utilisés pour l'optimisation en crash comme le krigeage. Issu de ce dernier, le co-krigeage est une catégorie de surfaces de réponse permettant d'exploiter l'information du gradient. En annexe B, une optimisation multi-objectif (masse et déplacement) par méta-modèle de co-krigeage a été effectuée sur le cas-test poutre transverse en choc poteau. Il utilise le gradient de la masse et l'estimation du gradient du déplacement. Cela a permis de réduire le coût de l'optimisation en nombre de simulations. Dans ce cas, l'estimation du gradient a été considérée comme étant le véritable gradient additionné d'un bruit. Des recherches pourraient être effectuées pour inclure notre sensibilité comme une estimation et en déterminer l'erreur d'approximation. L'approche par multi-niveaux de fidélité pourrait être une piste de réflexion. Nous pourrions aussi inclure dans le méta-modèle une nouvelle variable qui prendrait en compte l'erreur d'approximation.



# Modification du Head Injury Criterion pour l'optimisation par gradient

Dans l'ingénierie automobile, beaucoup de critères de dimensionnement dépendent de la fonction maximum. Cela peut être un problème pour la dérivabilité. De plus, le cahier des charges peut être violé à multiple reprise sans que nous le détectons. C'est le cas du Head Injury Criterion, dont nous rappelons la formulation :

$$\text{HIC} = \max_{t_i} \left\{ \Delta T \left[ \frac{1}{\Delta T} \int_{t_i}^{t_i+\Delta T} \ddot{x}(t) dt \right]^{2.5} \right\} \quad (\text{A.1})$$

où  $\ddot{x}$  est l'accélération du point  $T$  ou  $I$ ,  $t$  le temps et  $5ms < \Delta T < 35ms$  la durée du pulse.

L'exemple présenté en figure A.1 illustre bien ces problèmes. Plusieurs « pics » d'accélération sont présents et le fait de réduire le pic principal a peu de chance de réduire les autres, en ajoutant qu'il peut se décaler dans le temps. De même, l'intervalle de temps de celui-ci est supérieur à 15ms. Alors, comment est-il possible de prendre en compte toutes ces données ?

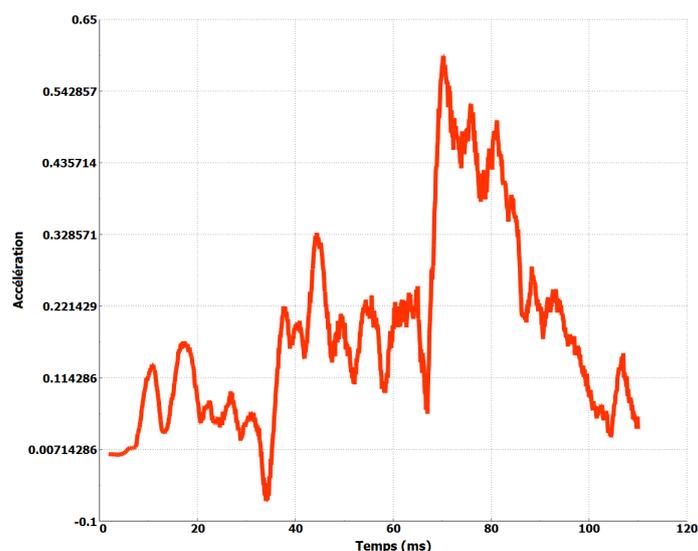


Figure A.1 – Courbe typique d'une accélération en fonction temps

## Annexe A. Modification du Head Injury Criterion pour l'optimisation par gradient

---

Nous proposons de modifier le critère en utilisant une fonction poids, ce qui nous donne la fonctionnelle suivante :

$$J(P) = \left( \frac{\int_{t_1}^{t_f} \tilde{H}(t,P)^p f[\tilde{H}(t,P)] \Delta T}{\int_{t_1}^{t_f} f[\tilde{H}(t,P)] \Delta T} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.2})$$

Qu'il est possible de discrétiser par rapport au temps :

$$J(P) = \left( \frac{\sum_{i=1}^f \tilde{H}(t_i,P)^p f[\tilde{H}(t_i,P)] dt}{\sum_{i=1}^f f[\tilde{H}(t_i,P)] dt} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.3})$$

où  $t$  est le temps,  $p$  un entier positif,  $\tilde{H}$  la fonction correspondant au HIC continu (après intégration de l'accélération) de l'équation (A.4) et  $f$  la fonction poids écrite en équation (A.5).

$$\tilde{H}(t_i,P) = \left[ \frac{1}{\Delta T} (v(t_i + \Delta T, P) - v(t_i, P)) \right]^{2,5} \Delta T \quad (\text{A.4})$$

où  $v$  correspond à la vitesse. Cette équation est obtenue en intégrant l'équation (A.1).

Nous avons choisi la fonction arc-tangente comme fonction seuil. Celle-ci permet de réduire l'influence des pics inférieurs à la valeur du cahier des charges  $H_{cdc}$ . Le paramètre  $\alpha$  permet d'accentuer plus ou moins cette perte d'influence.

$$f[\tilde{H}(t_i,P)] = \frac{1}{\pi} \left[ \arctan(\alpha H_{cdc}(\tilde{H}(t_i,P) - H_{cdc})) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{A.5})$$

Le critère ainsi modifié permet de filtrer les HIC supérieurs à la valeur seuil tout en prenant en compte toutes les valeurs. De plus, il a l'attribut d'être facilement dérivable. En effet, nous avons :

$$\frac{dJ}{dP} = \frac{\partial J}{\partial P} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial J}{\partial \tilde{H}(t_i,P)} \frac{\partial \tilde{H}(t_i,P)}{\partial P} \quad (\text{A.6})$$

avec  $\frac{\partial J}{\partial P} = 0$ .

Nous noterons  $\partial_x y = \frac{\partial y}{\partial x}$  et nous posons,

$$A = \sum_{i=1}^f \tilde{H}(t_i,P) f[\tilde{H}(t_i,P)] \Delta T \quad (\text{A.7})$$

$$B = \sum_{i=1}^f f[\tilde{H}(t_i,P)] \Delta T \quad (\text{A.8})$$

---

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{H}(t_i)} = \frac{1}{p} \left( \frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{p}-1} \left( \frac{\partial_{\tilde{H}(t_i)} A \cdot B - A \cdot \partial_{\tilde{H}(t_i)} B}{B^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

avec,

$$\partial_{\tilde{H}(t_i)} A = \left( p \tilde{H}(t_i)^{p-1} f[\tilde{H}(t_i)] + \tilde{H}(t_i) \partial_{\tilde{H}(t_i)} f[\tilde{H}(t_i)] \right) \Delta T \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_{\tilde{H}(t_i)} B = \partial_{\tilde{H}(t_i)} f[\tilde{H}(t_i)] \Delta T \quad (\text{A.11})$$

$$\partial_{\tilde{H}(t_i)} f[\tilde{H}(t_i)] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha H_{cdc}}{1 + [\alpha H_{cdc} (\tilde{H}(t_i) - H_{cdc})]^2} \quad (\text{A.12})$$

Concernant le terme  $\frac{\partial \tilde{H}(t_i, P)}{\partial P}$ , nous pouvons écrire

$$\partial_P \tilde{H}(t_i) = \partial_{v(t_i + \Delta T)} \tilde{H}(t_i) \cdot \partial_P v(t_i + \Delta T) + \partial_{v(t_i)} \tilde{H}(t_i) \cdot \partial_P v(t_i) \quad (\text{A.13})$$

où nous avons,

$$\partial_{v(t_i + \Delta T)} \tilde{H}(t_i) = 2,5 \left[ \frac{1}{\Delta T} (v(t_i + \Delta T) - v(t_i)) \right]^{1,5} \quad (\text{A.14})$$

$$\partial_{v(t_i)} \tilde{H}(t_i) = -2,5 \left[ \frac{1}{\Delta T} (v(t_i + \Delta T) - v(t_i)) \right]^{1,5} \quad (\text{A.15})$$

La dérivée de la vitesse aux instants  $t_i$  et  $t_i + \Delta T$  par rapport aux paramètres peut être reliée au déplacement  $u$  par différences finies de pas  $\Delta \tau$  :

$$\partial_P v(t_i) = \frac{\partial_P u(t_i + \Delta \tau) - \partial_P u(t_i)}{\Delta \tau} \quad (\text{A.16})$$

Nous projetons alors d'utiliser l'estimation du gradient que nous avons développé pour les critères en déplacement nodal pour déterminer  $\partial_P u(t_i)$  et  $\partial_P u(t_i + \Delta \tau)$ .



# Co-krigeage utilisant l'estimation du gradient

Cette thèse a été consacrée à l'optimisation mono-objectif. Néanmoins, la majeure partie des problèmes de crash sont multi-objectifs : masse et intrusion, intrusions et HIC... C'est pourquoi l'optimisation par méta-modèles est utilisée pour déterminer le front de Pareto et permettre un compromis. Or, cette méthode est assez gourmande en nombre de calculs. Nous allons alors analyser dans cette annexe si l'utilisation de notre estimation de gradient pour construire un méta-modèle allège le coût de l'optimisation. Il existe divers surfaces de réponses qui utilisent l'information du gradient. Parmi elles, se trouve le co-krigeage.

## Méta-modèle de co-krigeage

Dans un modèle de krigeage, il est possible d'utiliser des variables auxiliaires  $W_i$  pour estimer la variable primaire  $Y$  (la réponse), nous parlons alors de cokrigeage [Soulier 2015]. En associant un processus gaussien à celles-ci, la construction du méta-modèle est proche de celle du krigeage que nous avons exposé au chapitre 1. Elle utilise les covariances entre les variables primaires et auxiliaires ainsi que celles des variables auxiliaires entre elles.

Pour le co-krigeage avec gradient, ces variables sont les dérivées par rapport aux paramètres [Morris 1993, Gratiet 2013, Laurent 2013]. Nous avons donc,

$$Y(P) = \mu_0(P) + Z_0(P) \quad (\text{B.1})$$

$$W^i(P) = \mu_i(P) + Z_i(P), \forall i \in [1, \dots, n_p] \quad (\text{B.2})$$

où  $\mu_0$  et  $Z_0$  sont respectivement la tendance et le processus gaussien d'espérance nulle associé à la réponse  $Y$ ,  $n_p$  le nombre de paramètres et les  $\mu_i$  et  $Z_i$  les tendances et processus gaussiens associés aux dérivées par rapport aux paramètres. En effet,

$$W^i(P) = \frac{\partial Y}{\partial p_i}(P), \forall i \in [1, \dots, n_p] \quad (\text{B.3})$$

L'estimateur du cokrigeage  $\hat{Y}(P^0)$  en un point de configuration  $P^0$  est alors recherché par la combinaison linéaire suivante :

$$\hat{Y}(P^0) = \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i^0(P^0) Y(P^i) + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_i^j(P^0) W^j(P^i) \quad (\text{B.4})$$

## Annexe B. Co-krigeage utilisant l'estimation du gradient

---

où  $n_e$  est le nombre d'essais effectués.

Comme pour le krigeage, il convient de minimiser la variance de l'erreur d'estimation tout en respectant la condition de non-biais.

- La condition de non-biais s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i^0 \mu_0(P^i) + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_i^j \mu_j(P^i) - \mu_0(P^0) = 0 \quad (\text{B.5})$$

En imposant que les tendances  $\mu_i$  sont obtenues par dérivation de  $\mu_0$  ( $\mu_i(P) = \frac{\partial \mu_0}{\partial p_i}(P)$ ), et en utilisant un krigeage universel de vecteur de fonctions de tendance  $h(P)$ , nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n_e} \lambda_i^0 \beta^T h(P^i) + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_i^j \beta^T \frac{\partial h}{\partial p_j}(P^i) - \beta^T h(P^0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

- La variance à minimiser fait intervenir les covariances croisées que nous notons :

$$[C]_{ij} = \text{cov}[Y(P^i), Y(P^j)] \quad (\text{B.7})$$

$$[C_{WY}]_{ij,k} = \text{cov}[Y(P^i), W^k(P^j)] \quad (\text{B.8})$$

$$[C_{WW}]_{ij,kl} = \text{cov}[W^k(P^i), W^l(P^j)] \quad (\text{B.9})$$

Ce qui nous amène à devoir minimiser le terme

$$\sigma_{Z_0}^2 + \lambda^T \begin{bmatrix} C & C_{WY} \\ C_{WY}^T & C_{WW} \end{bmatrix} \lambda - 2\lambda^T \begin{bmatrix} C_{0Y} \\ C_{0W} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

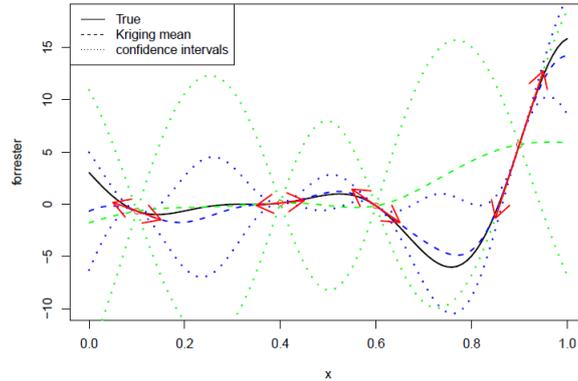
Dans le cadre du cokrigeage à gradient, il est nécessaire de dériver le noyau pour les covariances entre les gradients. C'est à dire que nous avons :

$$\text{cov}[Y(P^i), Y(P^j)] = \text{ker}(P^i, P^j) \quad (\text{B.11})$$

$$\text{cov}[Y(P^i), W^k(P^j)] = \frac{\partial \text{ker}}{\partial p_k}(P^i, P^j) \quad (\text{B.12})$$

$$\text{cov}[W^k(P^i), W^l(P^j)] = \frac{\partial^2 \text{ker}}{\partial p_k \partial p_l}(P^i, P^j) \quad (\text{B.13})$$

Le modèle de cokrigeage se construit en déterminant les hyperparamètres. Comme le montre la figure B.1, l'information du gradient permet d'améliorer fortement la prédiction du modèle.



**Figure B.1** – Exemple de modèle de co-krigeage avec gradient

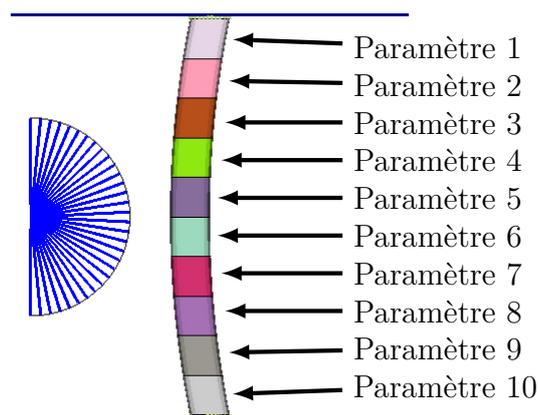
La fonction réelle est tracée en continu, le modèle de krigeage en vert et le modèle de cokrigeage en bleu.

Source : M. Binois, *Cokriging with kergp*

## Présentation de l'étude

Dans cette annexe, nous allons chercher à déterminer si l'utilisation de l'estimation du gradient par l'ESLM dans un modèle de cokrigeage permet d'améliorer la performance de l'optimisation multi-objectifs. Pour cela, nous le comparerons avec un mélange d'expert issu d'Alternova et un modèle de krigeage. En partant du même plan d'expériences de 24 essais (plan tabulé), nous effectuerons une optimisation multi-objectifs avec un budget calcul de 76 essais (soit 100 calculs au global).

Pour cette étude, nous reprendrons le cas-test de la poutre transverse en choc poteau utilisé au chapitre 2 (cf. figure B.2) à 10 paramètres d'épaisseur. Deux objectifs antagonistes sont utilisés : la masse et le déplacement à l'instant final du nœud 1.



**Figure B.2** – Rappel du cas-test de la poutre transverse en choc poteau avec 10 paramètres

Le mélange d'expert est construit avec Alternova. Il est constitué de deux modèles polynomiaux de degrés différents et de deux Poly-MARS. L'optimisation est faite à partir

d'un NSGA-II et la sélection de l'essai à effectuer par un algorithme maximisant la distance des paramètres de l'essai avec les configurations présentes dans la base de donnée.

Le modèle de krigeage est construit à partir de la librairie R `GPareto`. L'optimisation est quant à elle effectuée par un essaim particulaire (PSO) où nous cherchons à améliorer l'hypervolume (critère EHI<sup>a</sup>).

Pour le cokrigeage, la librairie `kergp` est utilisée et la méthode d'optimisation est la même que celle utilisée pour le krigeage. Une variable  $\tau$  prenant en compte le bruit du gradient a été additionnée dans le métamodèle modifiant la matrice de covariance entre les gradients de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} C & C_{WY} \\ C_{WY}^T & C_{WW} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} C & C_{WY} \\ C_{WY}^T & C_{WW} + \mathbb{I} \times \tau \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité. La section suivante présente les résultats de l'étude.

## Résultats

Les différents fronts de Pareto obtenus par les trois modèles sont représentés en figure B.3. Nous pouvons observer que les fronts obtenu par le krigeage et le cokrigeage dominent celui obtenu par les surfaces de réponses classiques. Il nous est néanmoins difficile de comparer le krigeage et le cokrigeage, chacun dominant une partie de l'autre.

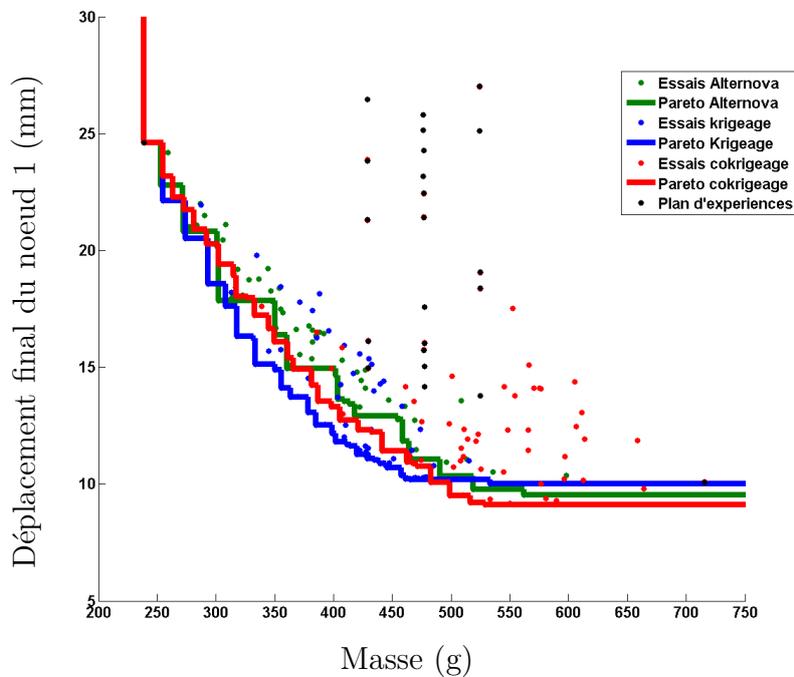
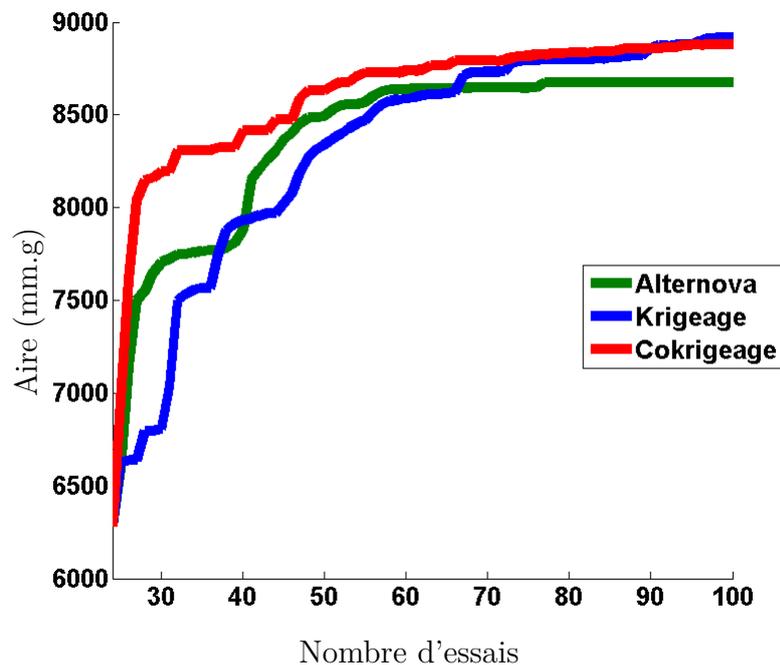


Figure B.3 – Fronts de Pareto obtenus par les différents métamodèles

a. Expected Hypercube Improvement

La comparaison de ces modèles peut être effectuée d’une manière différente : comparer l’évolution de l’aire entre le front de Pareto et un point de référence (ici placé à une masse de 750g et à un déplacement de 30mm) en fonction des itérations. En effet, nous ne disposons que rarement d’un budget de calcul de 100 essais. La figure B.4 montre cette évolution. Une aire plus importante correspond donc à un front de Pareto plus dominant. De plus, si cette aire croît vite en fonction des itérations, cela veut dire que le métamodèle nécessite moins d’itération pour obtenir des configurations intéressantes. Chacune des aires part de la même valeur issue du plan d’expérience à 24 essais.



**Figure B.4** – Évolution de l’aire contenue dans le front de Pareto

Même si le front de Pareto final obtenu par le krigage domine celui obtenu par les surfaces de réponses classiques, ce n’est le cas qu’à partir de la 60<sup>ème</sup> itération. Dans ce cas, le budget calcul doit être important pour avoir un bon front. Pour le cokrigage utilisant l’estimation du gradient, l’aire croît très vite au début. Cela montre qu’il nécessite moins de calcul pour déterminer de bons essais et qu’il permet de réduire le budget calcul.

Nous pouvons tout de même nous questionner sur le fait que l’optimisation avec cokrigage n’explore pas certaines zones pourtant dominantes. Ce phénomène est dû à l’utilisation de l’estimation du gradient et non du véritable gradient. Un travail pourrait être fait pour construire un modèle qui identifie le gradient du problème équivalent comme une estimation. Des approches comme le cokrigage à multi-niveaux de fidélité, comme celui proposé dans [Soulie 2015], peuvent être une piste de réflexion.

## Bibliographie des annexes

- [Gratiet 2013] L. Le Gratiet. *Multi-fidelity Gaussian process regression for computer experiments*. PhD thesis, Université de Paris-Diderot, 2013. (cité pages 20 et 123)
- [Laurent 2013] L. Laurent. *Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l'optimisation multiniveaux de structures*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Cachan, 2013. (cité pages 20 et 123)
- [Morris 1993] M.D. Morris, T.J. Mitchell et D. Ylvisaker. *Bayesian design and analysis of computer experiments : use of derivatives in surface prediction*. *Technometrics*, Volume 35, pages 243–255, 1993. (cité page 123)
- [Soulier 2015] B. Soulier, N. Courrier, L. Laurent et P.-A. Boucard. *Métamodèles à gradients et multiniveaux de fidélités pour l'optimisation d'assemblages*. 17<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 2015. (cité pages 123 et 127)

# Bibliographie globale

---

- [Adelman 1986] H.M. Adelman et R.T. Haftka. *Sensitivity analysis of discrete structural systems*. AIAA Journal, no. 24, pages 823–832, 1986. (cité page 42)
- [Alavi 2011] S.A. Alavi, B. Ahmadi-Nedushan et H. Rahimi-Bondarabadi. *Topology optimization of structures under transient loads*. International Journal of Optimization in Civil Engineering, 2011. (cité page 50)
- [Albertelli 2015] M. Albertelli, T Abballe, G. Allaire, A. Caron, P. Couraux, L. Dall’Olio, C. Dapogny, C. Dobrzynski, B. Jeannin, F. Jouve, D. Lachouette, T. Le Sommer, K. Maquin, G. Michailidis, M. Siavelis et V. Srithammavanh. *RODIN project, topology optimization 2.0 ?* SIA, Congrès Simulation, 2015. (cité page 13)
- [Allain 2014] J.-C. Allain, M. Pariente, Y. Tourbier et T. Vuong. *Fast multi-physics optimization of a car*, 2014. (cité page 9)
- [Allaire 2003] G. Allaire, F. Jouve et A.-M. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, 2003. (cité pages 13 et 97)
- [Andriambololona 2009] H. Andriambololona. *Calcul de sensibilité en dynamique*. ASTER R4.03.04, 2009. (cité page 46)
- [Armstrong 2007] C.G. Armstrong, T.T. Robinson, H. Ou et C. Othmer. *Linking adjoint sensitivity maps with CAD parameters*. Evolutionary methods for design, optimization and control, pages 234–239, 2007. (cité page 79)
- [Bakenov 2003] A. Bakenov, T.W. Sederberg, J. Zheng et A. Nasri. *T-splines and t-nurccs*. ACM Trans. Graph., no. 22, pages 477–484, 2003. (cité page 72)
- [Belytschko 1996] T. Belytschko, J.I. Lin et C.-S. Tsay. *Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shell*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 42, no. 2, pages 225–251, 1996. (cité page 10)
- [Bendsoe 2003] M.P. Bendsoe et O. Sigmund. *Topology optimization : theory, methods and applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (cité page 13)
- [Binois 2015] M. Binois. *Quantification d’incertitude sur fronts de Pareto et stratégies pour l’optimisation bayésienne en grande dimension, avec applications en conception automobile*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2015. (cité page 21)
- [Bois 2004] P. Du Bois, C.C. Chou, B.B. Fileta, T.B. Khalil, A.I. King, H.F. Mahmood, H.I. Metz et J. Wisnans. *Vehicle crashworthiness and occupant protection*. American Iron and Steel Institute, 2004. (cité page 93)
- [Boole 1880] G. Boole et J.F. Moulton. *A treatise on the calculus of finite differences*. Macmillan, 1880. (cité page 41)
- [Boor 1972] C. De Boor. *On calculating with b-splines*. Journal of Approximation Theory, 1972. (cité page 71)

## Bibliographie globale

---

- [Bézier 1986] P. Bézier. *Mathématiques et c.a.o.*, volume 4 : Courbes et surfaces. Hermès, 1986. (cité page 70)
- [Cacuci 1981] D.G. Cacuci. *Sensitivity theory for nonlinear systems. Nonlinear functional analysis approach*. *Journal of Mathematical Physics*, no. 22, pages 2794–2802, 1981. (cité page 43)
- [Casteljau 1985] P. De Casteljau. *Mathématiques et c.a.o.*, volume 2 : Formes à pôles. Hermès, 1985. (cité page 70)
- [Catmull 1974] E. Catmull et R. Rom. *A class of local interpolating splines*. *Computer Aided Geometric Design*, 1974. (cité page 72)
- [Chase 2008] N. Chase, R. Averill et R. Sidhn. *Design optimization of progressively crushing rails*. SAE Technical Paper, no. 2009-01-0355, 2008. (cité page 95)
- [Chatillon 2005] M.-M. Chatillon. *Méthodologie de conception robuste appliquée aux trains de véhicules de tourisme*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005. (cité page 25)
- [Chen 1997] S. Chen et D.A. Tortelli. *Three-dimensional shape optimization with variational geometry*. *Structural optimization*, no. 13, pages 81–94, 1997. (cité page 79)
- [Cheva 1996] W. Cheva, T. Yasuki, V. Gupta et K. Mendis. *Vehicle development for frontal/offset crash using lumped parameters modeling*. SAE paper, no. 960437, 1996. (cité page 8)
- [Choi 1994] K.K. Choi et K.H. Chang. *A study of design velocity field computation for shape optimal design*. *Finite Elements in Analysis and Design*, no. 15, pages 317–341, 1994. (cité page 79)
- [Choi 2005] W.-S. Choi, K.-B. Park et G.-J. Park. *Calculation of equivalent static loads and its application*. *Nuclear Engineering and Design*, no. 235, pages 2337–2348, 2005. (cité page 49)
- [Coons 1987] S. Coons. *Mathématiques et c.a.o.*, volume 5 : Méthodes matricielles. Hermès, 1987. (cité page 70)
- [Cottrell 2009] J.A. Cottrell, T. J.R. Hughes et Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis, toward integration of cad and fea*. John Wiley and Sons, 2009. (cité pages 80 et 81)
- [Cox 1971] M.G. Cox. *The numerical evaluation of b-splines*. Technical Report, National Physics Laboratory DNAC, no. 4, 1971. (cité page 71)
- [Culioli 1994] J.-C. Culioli. *Introduction à l'optimisation*. Ellipse, 1994. (cité page 38)
- [Dahan 2007] R. Dahan. *Conception robuste avec modèles simplifiés de crash : Application au choc latéral d'une automobile*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007. (cité page 25)
- [Dapogny 2013] C. Dapogny. *Shape optimization, level-set methods on unstructured meshes and mesh evolution*. PhD thesis, École Doctorale Paris Centre, 2013. (cité pages 14 et 97)
- [Debruyne 2012] G. Debruyne. *Indicateurs de décharge et de perte de proportionnalité du chargement en élastoplasticité*. ASTER R4.20.12, 2012. (cité page 56)

- [Devalan 2009] P. Devalan. *La simulation numérique dans le processus de conception de systèmes mécaniques*. Techniques de l'ingénieur, no. BM 5 013, 2009. (cité page 24)
- [du Cauzé de Nazelle 2013] P. du Cauzé de Nazelle. *Paramétrage de formes surfaciques pour l'optimisation*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2013. (cité page 81)
- [Duddeck 2008] F. Duddeck. *Multidisciplinary optimization of car bodies*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 35, pages 375–389, 2008. (cité page 17)
- [Fang 2005] H. Fang, M. Rais-Rohani, Z. Lin et M.F. Horstemeyer. *A comparative study of metamodeling methods for multiobjective crashworthiness optimization*. Computers and Structures Volume 83, pages 2121–2136, 2005. (cité page 17)
- [Farin 1999] G. Farin. *Nurbs for curve and surface design : from projective geometry to practical use*. A.K. Peters, 1999. (cité page 71)
- [Fletcher 1980] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley and Sons, 1980. (cité page 38)
- [Forrester 2008] A. Forrester, A. Sobester et A. Keane. *Engineering design via surrogate modelling : a practical guide*. Wiley, 2008. (cité page 20)
- [Friedman 1991] J.H. Friedman. *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The annale of statistics, Volume 19, pages 1–141, 1991. (cité page 18)
- [Froment 2014] P. Froment. *Optimisation de formes paramétriques en grande dimension*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2014. (cité pages 13 et 79)
- [Genest 2015a] L. Genest, L. Jézéquel, F. Gillot et F. Mercier. *Méthode d'optimisation de forme en dynamique rapide par approche quasi-statique*. 12e Colloque National en Calcul des Structures, 2015. (cité page 86)
- [Genest 2015b] L. Genest, L. Jézéquel, F. Gillot et F. Mercier. *Shape optimization method for crashworthiness design based on Equivalent Static Loads concept*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 104)
- [Gilbert 1992] J.-C. Gilbert et J. Nocedal. *Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 2, pages 21–42, 1992. (cité page 39)
- [Gilbert 1993] M. Gilbert. *Configuration controlled 3D designs of mechanical parts and assemblies*. ISO 10303, Part 203, 1993. (cité page 82)
- [Goupy 1999] J. Goupy. *Plans d'expériences pour surfaces de réponses*. Dunod, 1999. (cité page 17)
- [Gratiet 2013] L. Le Gratiet. *Multi-fidelity Gaussian process regression for computer experiments*. PhD thesis, Université de Paris-Diderot, 2013. (cité pages 20 et 123)
- [Han 2015] I. Han, Y. Lee et G.-J. Park. *TV packaging optimization of the frontal drop impact using equivalent static loads*. 11<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 50)
- [Hardee 1999] E. Hardee, K.H. Chang, J. Tu, K.K. Choi, I. Grindeanu et X. Yu. *A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solids*. Advances in Engineering Software, no. 30, pages 185–199, 1999. (cité page 79)

- [Henn 1998] H.-W. Henn. *Crash Tests and the Head Injury Criterion*. Teaching Mathematics and its Applications Volume 17, no. 4, 1998. (cité page 6)
- [Hoppe 2005] A. Hoppe et M. Kaufmann. *Multidisciplinary optimization considering crash and NVH loadcases*. Lecture at ATZ/MTZ Virtual product creation, 2005. (cité page 17)
- [Huh 2003] H. Huh, K.P. Kim, S.H. Kim, J.H. Song, H.S. Kim et S.K. Hong. *Crashworthiness assessment of front side members in an auto-body considering the fabrication histories*. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 45, pages 1645–1660, 2003. (cité page 12)
- [Jacobs 1991] R.A. Jacobs, M.I. Jordan, S.J. Nowlan et G.E. Hinton. *Adaptative mixture of local experts*, 1991. (cité page 21)
- [Jansson 2003] T. Jansson, L. Nilsson et M. Redhe. *Using surrogate models and response surfaces in structural optimization – with application to crashworthiness design and sheet metal forming*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 25, pages 129–140, 2003. (cité page 17)
- [Jeong 2009] S.-B. Jeong, S. Yoon, S. Xu et G.-J. Park. *Non-linear dynamic response structural optimization of an automobile frontal structure using equivalent static loads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering, no. 224, pages 489–501, 2009. (cité page 48)
- [Jones 1998] D.R. Jones, M. Schonlau et W.J. Welch. *Efficient global optimization of expensive black box functions*. Journal of Global Optimization, Volume 13, pages 455–492, 1998. (cité page 21)
- [Julisson 2015] S. Julisson, C. Fourcade, P. de Nazelle et L. Dumas. *A novative optimal shape design based on an isogeometric approach : Application to optimization of surface shapes with discontinuous curvature*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 81)
- [Jézéquel 2003] L. Jézéquel. *First Design : Pour une conception fiable et robuste des systèmes*, 2003. (cité page 25)
- [Kamal 1970] M.M. Kamal. *Analysis and simulation of vehicle to barrier impact*. SAE paper, no. 700414, 1970. (cité pages 8 et 9)
- [Kang 2001] B.-S. Kang, W.-S. Choi et G.-J. Park. *Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement*. Computer and Structures, no. 79, pages 145–154, 2001. (cité page 47)
- [Keane 2005] A.J. Keane et P.B. Nair. *Computational approaches for aerospace design : the pursuit of excellence*. John Wiley and Sons, 2005. (cité page 42)
- [Kim 2010] Y.-I. Kim et G.-J. Park. *Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads*. Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, no. 199, pages 660–676, 2010. (cité pages 48 et 49)
- [Kim 2014] E. Kim, H.-G. Kim, S. Baek et M. Cho. *Effective structural optimization based on equivalent static loads combined with system reduction method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014. (cité page 50)

- [Kooperberg 1997] C. Kooperberg, S. Bose et C.J. Stone. *Polychotomous regression*. Journal of the American statistical association, Volume 92, pages 117–127, 1997. (cité page 18)
- [Krige 1951] D.G. Krige. *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*. Journal of the chemical, metallurgical and mining society of South Africa, Volume 52, pages 119–139, 1951. (cité page 19)
- [Kubler 2009] L. Kubler, S. Gargallo et K. Elsasser. *Frontal crash pulse assessment with application to occupant safety*. ATZ worldwilde, Volume 111, Issue 6, pages 12–17, 2009. (cité page 7)
- [Laurent 2013] L. Laurent. *Stratégie multiparamétrique et métamodèles pour l'optimisation multiniveaux de structures*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Cachan, 2013. (cité pages 20 et 123)
- [Leblond 2015] T. Leblond, P. Froment, P. de Nazelle, R. Sellakh, P. Serré et G. Chevalier. *Gradient-based optimization of parameterized CAD geometries*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 79)
- [Lebrun 2003] M. Lebrun. *Simulation et CAO en automatique et mécatronique*. Techniques de l'ingénieur, no. S 7 260, 2003. (cité page 24)
- [Lee 2015] Y. Lee, J.-S. Ahn et G.-J. Park. *Crash optimization of automobile frontal and side structures using equivalent static loads*. 11<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 50)
- [Lemaitre 1985] J. Lemaitre et J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985. (cité page 56)
- [Lévesque 2003] J.-R. Lévesque et C. Chavant. *Logiciels de modélisation des structures : expression du besoin*. Techniques de l'ingénieur, no. BM 5 016, 2003. (cité page 22)
- [Marklund 2001] P.O. Marklund et L. Nilsson. *Optimization of a car body component subjected to side impact*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 21, pages 383–392, 2001. (cité pages 17 et 44)
- [Mercier 1998] F. Mercier. *Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1998. (cité pages 12 et 56)
- [Mercier 2012] F. Mercier, M. Guillon et S. Maillot. *Deployment of optimization studies using Alternova : design of a hood inner panel for pedestrian safety performance*. Ingénieur de l'automobile, pages 29–46, 2012. (cité pages 21 et 27)
- [Michailidis 2014] G. Michailidis. *Manufacturing constraints and multi-phase shape and topology optimization via a level-set method*. PhD thesis, École Polytechnique, 2014. (cité page 14)
- [Morris 1993] M.D. Morris, T.J. Mitchell et D. Ylvisaker. *Bayesian design and analysis of computer experiments : use of derivatives in surface prediction*. Technometrics, Volume 35, pages 243–255, 1993. (cité page 123)
- [Park 2003] G.-J. Park et B.-S. Kang. *Validation of a structural optimization algorithm transforming dynamic loads into equivalent static loads*. Journal of Optimization Theory and Application, no. 118, pages 191–200, 2003. (cité page 50)

- [Park 2005a] K.-J. Park, J.-N. Lee et G.-J. Park. *Structural shape optimization using equivalent static loads transformed from dynamic loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, no. 63, pages 589–602, 2005. (cité page 48)
- [Park 2005b] K.-J. Park et G.-J. Park. *Structural optimization for non-linear behavior using equivalent static loads*. 6<sup>th</sup> World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005. (cité page 48)
- [Park 2011] G.-J. Park. *Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, no. 43, pages 319–337, 2011. (cité pages 47 et 48)
- [Paula 2014] A. Sousa De Paula. *Paramétrage de formes pour l’optimisation en crash de pièces de structures minces*. Rapport de stage de fin d’étude, 2014. (cité page 29)
- [Paulet 2014] A. Paulet. *Etude de la conception d’une crash-box de traverse avant pour l’automobile en matériau composite*. Rapport de stage de fin d’étude de Master, 2014. (cité page 24)
- [Picheny 2014] V. Picheny. *A stepwise uncertainty reduction approach to constrained global optimization*. 17<sup>th</sup> International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, pages 787–795, 2014. (cité pages 20 et 21)
- [Robinson 2009] T.T. Robinson, C.G. Armstrong, H.S. Chua, C. Othmer et T. Grahs. *Sensitivity-based optimization of parameterized CAD geometries*. 8<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009. (cité page 79)
- [Rosenblatt 2012] N. Rosenblatt. *Contribution à la conception robuste de véhicules en choc frontal : détection de défaillance en crash*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2012. (cité pages 10 et 12)
- [Sacks 1989] J. Sacks, S.B. Schiller et W.J. Welch. *Design for computer experiments*. Technometrics, Volume 31, pages 41–47, 1989. (cité page 19)
- [Schumacher 2015] A. Schumacher et C. Ortmann. *Combining state of the art metamodels for predicting the behavior of nonlinear crashworthiness structures for shape and sizing optimizations*. 11<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, 2015. (cité page 21)
- [Sibony 2013a] S. Sibony. *Du besoin à la spécification : cas d’étude*. Techniques de l’ingénieur, no. 1244, 2013. (cité page 22)
- [Sibony 2013b] S. Sibony. *Du besoin à l’implantation : grands axes de l’ingénierie système*. Techniques de l’ingénieur, no. 1243, 2013. (cité page 22)
- [Sinha 2007] K. Sinha. *Reliability-based multiobjective optimization for automotive crash-worthiness and occupant safety*. Structural and Multi-disciplinary Optimization, Volume 33, pages 255–268, 2007. (cité page 17)
- [Soulier 2015] B. Soulier, N. Courrier, L. Laurent et P.-A. Boucard. *Métamodèles à gradients et multiniveaux de fidélités pour l’optimisation d’assemblages*. 17<sup>eme</sup> Colloque National en Calcul des Structures, 2015. (cité pages 123 et 127)
- [Squire 1998] W. Squire et G. Trapp. *Using complex variables to estimate derivatives of real functions*. SIAM Review, no. 40, pages 110–112, 1998. (cité page 42)

- [Stolpe 2014] M. Stolpe. *On the equivalent static loads approach for dynamic response structural optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014. (cité page 50)
- [Toivanen 2006] J.I. Toivanen et J. Martikainen. *A new method for creating sparse design velocity fields*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, no. 196, pages 528–537, 2006. (cité page 79)
- [Wang 2002] H. Wang, J. Kearney et K. Atkinson. *Robust and efficient computation of the closest point on a spline curve*. Curve and surface design, 2002. (cité page 76)
- [Wang 2004] W. Wang, H. Pottmann et Y. Lin. *Fitting B-Spline curves to point clouds by squared distance minimization*. Technical Report, HKU CS, 2004. (cité page 76)
- [White 1985] K.P. White, W.D. Pilkey, H.C. Gabler et T. Holowell. *Simulation optimization of the crashworthiness of a passenger vehicle in frontal collisions using response surface methodology*. SAE paper, no. 850512, 1985. (cité page 8)
- [Yi 2011a] S.-I. Yi, H.-A. Lee et G.-J. Park. *Optimization of a structure with contact conditions using equivalent loads*. Journal of Mechanical Science and Technology, no. 25, pages 773–782, 2011. (cité page 48)
- [Yi 2011b] S.-I. Yi, J.-Y. Lee et G.-J. Park. *Crashworthiness design optimization using equivalent static loads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering, no. 226, pages 23–38, 2011. (cité pages 50 et 96)