N° d'ordre NNT : 2018LYSEC039

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de

l'École Centrale de Lyon

École Doctorale ED162

Mécanique - Énergétique - Génie Civil - Acoustique

Spécialité : Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 04/12/2018, par :

Enora Denimal

Prédiction des instabilités de frottement par méta-modélisation et approches fréquentielles
Application au crissement de frein automobile

Devant le jury composé de :

Aubry Evelyne, Professeur des Universités, Université de Haute-Alsace	Présidente de jury
Tison Thierry, Professeur des Universités, Université de Valenciennes	Rapporteur
Chevallier Gaël, Professeur des Universités, Université de Franche-Comté	Rapporteur
Sarrouy Emmanuelle, Maître de Conférences, École Centrale Marseille	Examinatrice
Sinou Jean-Jacques, Professeur des Universités, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
Nacivet Samuel, Ingénieur PSA – Docteur, PSA Groupe	Encadrant industriel
Nechak Lyes, Maître de Conférences, École Centrale de Lyon	Encadrant

À ma mère

« *À l'origine de toute connaissance,*
nous rencontrons la curiosité ! »

Alexandra David-Néel

Remerciements

La première personne que je tiens à remercier est mon directeur de thèse Jean-Jacques Sinou de m'avoir proposé ce travail de recherche passionnant. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour l'encadrement sans faille et pour la formation scientifique qu'il m'a apportée et qui m'ont permis de réaliser ce travail. Je souhaite également le remercier pour sa disponibilité, son implication et son soutien qui ont contribué à faire de cette thèse une aventure à la fois scientifique et humaine.

Mes remerciements d'étendent également à Samuel Nacivet pour m'avoir encadrée au sein de PSA, pour sa disponibilité, ses conseils et son suivi qui m'ont guidée tout au long de cette thèse.

Je souhaite également remercier Lyes Nechak pour son encadrement.

Je remercie très sincèrement la Professeure Evelyne Aubry d'avoir accepté de présider ce jury.

J'adresse également toute ma reconnaissance à Thierry Tison et Gaël Chevallier d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également à Emmanuelle Sarrouy pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à saisir cette occasion et adresser mes profonds remerciements à l'ensemble des membres du E6 que j'ai pu côtoyer quotidiennement. Merci de m'avoir accueillie et d'avoir créer une ambiance chaleureuse et motivante. Les séances gâteaux et fléchettes resteront de bons souvenirs !

Je remercie aussi l'ensemble des personnes que j'ai pu côtoyer plus généralement au LTDS et à l'Ecole Centrale. Merci à mes partenaires de foot qui m'ont intégrée dans une très bonne ambiance.

Je remercie tous mes amis ainsi que toutes les personnes qui me sont chères pour leur soutien constant et qui m'ont permis d'arriver là aujourd'hui à savoir Nelson, Chloé, Enora (l'autre !), Blobby (RIP), Amélie, Anne-Laure, Eléonore, Jérémy, Alexis, Nicolas, Nathanaël, Bruno, Marcel, Marine, Alexandre et tous les autres !

Enfin, je remercie ma famille et plus particulièrement ma mère qui m'a toujours soutenue quels que soient mes choix et qui m'a donné toutes les clés pour croire en moi et évoluer dans la vie.

Résumé

Le crissement de frein est une nuisance sonore qui représente des coûts importants pour l'industrie automobile. Il tire son origine dans des phénomènes complexes à l'interface frottante entre les plaquettes de frein et le disque. L'analyse de stabilité reste aujourd'hui la méthode privilégiée dans l'industrie pour prédire la stabilité d'un système de frein malgré ses aspects sur- et sous-prédictifs.

Afin de construire un système de frein robuste, il est nécessaire de trouver la technologie qui permette de limiter les instabilités malgré certains paramètres incertains présents dans le système. Ainsi, l'un des objectifs de la thèse est de développer une méthode permettant de traiter et de propager l'incertitude et la variabilité de certains paramètres dans le modèle éléments finis de frein avec des coûts numériques abordables.

Dans un premier temps, l'influence d'un premier groupe de paramètres correspondant à des contacts internes au système a été étudiée afin de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu et leurs impacts sur le phénomène de crissement. Une approche basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique a été également mise en place afin d'identifier le jeu de paramètres le plus défavorable en termes de propension au crissement sur le système.

Dans un second temps, différentes méthodes de méta-modélisation ont été proposées afin de prédire la stabilité du système de frein en fonction de différents paramètres qui peuvent être des paramètres de conception ou des paramètres incertains liés à l'environnement du système.

Dans un troisième temps, une méthode d'analyse non-linéaire complémentaire de l'analyse de stabilité a été proposée et développée. Elle se base sur le suivi de la stabilité d'une solution vibratoire approchée et permet d'identifier les modes instables présents dans la réponse dynamique du système. Cette méthode a été appliquée sur un modèle simple avant d'illustrer sa faisabilité sur le modèle éléments finis de frein complet.

Mots Clés : crissement de frein , analyse de stabilité, incertitudes, méta-modélisation, krigeage, chaos polynomial, MEF, méthode non-linéaire, multi-instabilité

Abstract

Brake squeal is a noise nuisance that represents significant costs for the automotive industry. It originates from complex phenomena at the frictional interface between the brake pads and the disc. The stability analysis remains the preferred method in the industry today to predict the stability of a brake system despite its over- and under-predictive aspects.

In order to build a robust brake system, it is necessary to find the technology that limits instabilities despite some uncertain parameters present in the system. Thus, one of the main objectives of the PhD thesis is to develop a method to treat and propagate the uncertainty and variability of some parameters in the finite element brake model with reasonable numerical costs.

First, the influence of a first group of parameters corresponding to contacts within the system was studied in order to better understand the physical phenomena involved and their impacts on the squealing phenomenon. An approach based on the use of a genetic algorithm has also been implemented to identify the most unfavourable set of parameters in terms of squeal propensity on the brake system.

In a second step, different meta-modelling methods were proposed to predict the stability of the brake system with respect to different parameters that may be design parameters or uncertain parameters related to the environment of the brake system.

In a third step, a non-linear analysis method complementary to the stability analysis was proposed and developed. It is based on the tracking of the stability of an approximate vibrational solution and allows the identification of unstable modes present in the dynamic response of the system. This method was applied to a simple academic model before demonstrating its feasibility on the complete industrial brake finite element model under study.

Keywords : squeal noise , stability analysis, uncertainty, meta-modelling, kriging, polynomial chaos, FEM, non-linear method, multi-instability

Table des matières

Table des matières **xiii**

Introduction **1**

1 Présentation du système de frein et du phénomène de crissement **5**
1.1 Présentation du système de freinage industriel 6
1.2 Vibrations et bruits induits par les systèmes frottants 13
1.3 Conclusion et positionnement du problème 17

2 Bibliographie **19**
2.1 Phénoménologie des instabilités de frottement 20
2.2 Modélisation du contact frottant 26
2.3 Stabilité des systèmes dynamiques 30
2.4 Modélisation des incertitudes 41

3 Influence et prise en compte des contacts internes sur la propension au crissement **55**
3.1 Présentation du modèle éléments finis étudié et analyse de stabilité 56
3.2 Résultats préliminaires sur l'influence du coefficient de frottement des contacts internes 60
3.3 Une meilleure compréhension du rôle des contacts internes 66
3.4 Utilisation d'un algorithme génétique pour identifier le scénario le plus défavorable 79
3.5 Conclusion et perspectives 86

4 Méta-modélisation pour la prédiction des valeurs propres complexes d'un modèle phénoménologique **89**
4.1 Présentation du modèle phénoménologique 90
4.2 Méthode de type krigeage 95
4.3 Développement de type chaos polynomial 119
4.4 Krigeage et chaos polynomial : une approche hybride 132
4.5 Conclusion 147

5 Prédiction du crissement par méta-modélisation pour un modèle éléments finis de frein **149**
5.1 Paramètres incertains dans le modèle de frein industriel PSA 150
5.2 La difficulté du suivi de modes pour un modèle industriel MEF – Limitation de la méthodologie proposée au Chapitre 4 152
5.3 Application de la méthode de krigeage au modèle de frein - Cas à deux paramètres incertains 161
5.4 Application de la méthode de krigeage au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains 177

5.5 Application de la méthode hybride au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains . . . 190
5.6 Retour sur le problème de multi-contact - Application de la stratégie de méta-modélisation dans un cadre de conception . . . 200
5.7 Conclusion . . . 202

6 Prédiction des instabilités de crissement en dynamique non-linéaire via une technique d'approximation fréquentielle : la Modal Amplitude Stability Analysis (MASA) 205

6.1 Méthodes de résolution et d'analyse des systèmes dynamiques auto-entretenus . . . 206
6.2 Méthode MASA : Modal Amplitude Stability Analysis . . . 211
6.3 Préambule - Analyse non-linéaire du système du double Hulten . . . 222
6.4 Application de la méthode MASA pour la prédiction des modes instables en dynamique non-linéaire . . . 230
6.5 Prédiction des instabilités de crissement d'un modèle éléments finis de frein 243
6.6 Conclusion . . . 249

Conclusion 251

Liste des figures 255

Liste des tableaux 263

Bibliographie 265

Introduction

Contexte industriel et scientifique

Si la fonction principale d'un système de frein est d'ordre sécuritaire, il se trouve que le crissement est devenu depuis quelques décennies un enjeu majeur pour les constructeurs automobiles. Dans l'imaginaire collectif, il est associé à une défaillance technique du système de frein et nuit fortement à la qualité perçue du véhicule. Associé à des niveaux sonores élevés et désagréables pouvant atteindre 110 dB, le crissement est à l'origine du retour de nombreux véhicules auprès des services clients, entrainant alors des coûts de garantie importants. Il représente aujourd'hui un critère de confort acoustique aux contraintes de plus en plus strictes.

La problématique du crissement a été largement étudiée par la communauté scientifique et dans les différents domaines du transport comme l'automobile, le ferroviaire ou l'aéronautique. De nombreuses études numériques et expérimentales ont été menées au cours de ces dernières décennies afin d'identifier et d'expliquer les mécanismes à l'origine du crissement. Mais le renforcement des normes environnementales sur le confort acoustique ainsi que l'augmentation des exigences des utilisateurs nécessitent une connaissance toujours plus fine du phénomène et justifient la réalisation d'études systématiques en phase de conception.

Le crissement peut être défini comme une manifestation acoustique due à des vibrations auto-entretenues des différents composants du système de frein. L'interface frottante entre les plaquettes de frein et le disque dissipe l'énergie cinétique du véhicule en énergie thermique. Cependant, le frottement peut rendre une position d'équilibre du système instable. Le système se met alors à osciller autour de cette position avec des niveaux de vibration qui croissent jusqu'à ce qu'ils se stabilisent et que le système atteigne un régime stationnaire caractérisé par un cycle limite.

L'augmentation de la puissance des ordinateurs et l'amélioration des capacités de modélisation des nombreux logiciels permettent de ne plus se restreindre à l'étude de systèmes à quelques degrés de liberté et d'engager des études sur des systèmes complexes et riches. La modélisation par Éléments Finis reste la méthode privilégiée aujourd'hui pour modéliser un système de frein avec un maillage fin de la géométrie des différents composants, des caractéristiques matériaux ainsi que des différentes interactions entre les composants.

D'un point de vue simulation numérique, la prédiction du crissement consiste généralement à étudier la stabilité de la position d'équilibre glissant du système en déterminant les modes propres complexes. Les systèmes de frein étant des systèmes complexes, une multitude de couplage de modes est possible. Il est aujourd'hui impossible de déterminer à l'avance les modes qui vont être impliqués dans la réponse dynamique non-

linéaire du système sujet au crissement. Il est alors nécessaire de mener des études complémentaires de la stabilité afin de calculer la réponse transitoire non-linéaire du système et d'identifier les mécanismes de sélection des modes et les fréquences caractéristiques associées. Cependant, réaliser une telle analyse transitoire sur des systèmes dynamiques non-linéaires, autonomes et de taille importante nécessite une puissance de calcul conséquente rendant l'approche le plus souvent inabordable, en particulier dans un contexte industriel. Des alternatives basées sur des méthodes numériques avancées qui proposent d'approximer uniquement la réponse non-linéaire stationnaire du système sont parfois envisageables. Cependant, il s'avère que de telles approches restent difficiles à mettre en place et sont consommatrices en temps CPU. Pour ces différentes raisons, l'analyse de stabilité reste l'approche numérique la plus employée à ce jour dans l'industrie.

En parallèle de ces approches numériques, des essais physiques sont toujours réalisés dans l'industrie à différentes étapes de la conception d'un système de frein afin de recaler les modèles et d'identifier les fréquences qui ressortent effectivement lors d'une phase de freinage. Cependant, de telles approches expérimentales sont coûteuses et longues à mettre en place. Il est alors nécessaire de développer des outils numériques d'aide à la conception permettant une meilleure prédictivité du crissement. Afin de limiter les essais et les itérations pour l'identification d'une technologie robuste au crissement, il est indispensable de mettre en place des méthodes permettant dès la phase de conception d'identifier la meilleure technologie qui se devra d'être robuste face aux variations de certains paramètres aléatoires. Aujourd'hui il est nécessaire de prendre en compte dans les modèles la variation de différents paramètres, qui peuvent être des leviers de conception ou des paramètres aléatoires subis. Au vu du coût numérique que représenteraient des études paramétriques, il est indispensable de mettre au point des méthodes permettant de prendre en compte la variabilité des ces différents paramètres pour un coût numérique maîtrisé.

Objectifs industriels et scientifiques

Les objectifs de ces travaux de thèse sont multiples. Des travaux antérieurs au sein de PSA ayant mis en avant le rôle important des contacts entre les différents composants d'un système de frein sur la propension au crissement, la première étape a donc consisté à étudier leur influence puis à mettre en place une stratégie permettant de les prendre en compte dans le dimensionnement d'un système de frein. Il s'avère que ces contacts sont nombreux et ne peuvent être modélisés de façon similaire aux autres paramètres de conception. Le premier objectif a donc été de mettre en place une stratégie numérique permettant de statuer sur l'effet des différents contacts vis-à-vis de la problématique du crissement.

Une fois les contacts influents identifiés, l'objectif suivant fut de mettre en place une méthode de méta-modélisation sur le système de frein pour estimer sa propension au crissement en prédisant l'évolution des valeurs propres complexes. L'enjeu ici est de pouvoir prédire la propension au crissement d'un système de frein industriel en un nombre limité de calculs tout en considérant plusieurs paramètres variables.

Enfin, le dernier objectif de ces travaux de thèse a été de développer une méthodologie numérique complémentaire de l'analyse de stabilité tout en évitant la mise en place d'une approche non-linéaire trop fastidieuse ou l'utilisation d'une analyse non-linéaire par intégration temporelle qui reste trop coûteuse en temps de calcul. L'enjeu réside alors

à être capable d'apporter des informations pertinentes sur les contributions des modes instables lors de la génération des vibrations auto-entretenues.

Plan du mémoire

Ce mémoire est composé de six chapitres.

Tout d'abord, un premier chapitre présente le système industriel qui fera l'objet de ces travaux de thèse, à savoir un frein automobile, et les différentes technologies associées.

Le second chapitre fait une synthèse des différentes études menées sur les systèmes frottants et sur les phénomènes associés aux vibrations auto-entretenues. Par ailleurs, les différents aspects théoriques permettant de caractériser et d'analyser les systèmes dynamiques et leur stabilité sont présentés. Pour finir, la notion d'incertitude est discutée et diverses méthodes permettant de les modéliser sont présentées en se focalisant plus spécifiquement sur la problématique du crissement de frein.

Le troisième chapitre de ce manuscrit présente dans un premier temps le modèle éléments finis de frein automobile étudié. L'influence forte des contacts entre les différents composants du système de frein sur la propension au crissement et la contribution de différents modes instables est démontrée. Cependant, considérer la prise en compte de tous ces contacts représente trop de paramètres supplémentaires dans une démarche de dimensionnement vis-à-vis du crissement. Aussi, une stratégie basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique qui permet d'identifier le jeu de contacts internes qui amène la configuration "la plus crissante" du système de frein est proposée.

Le quatrième chapitre propose la mise en place de différentes méthodes de métamodélisation afin d'étudier la problématique du crissement en présence d'incertitudes. La stratégie proposée est appliquée à un modèle phénoménologique pour la prédiction de sa stabilité en prédisant l'évolution des valeurs propres complexes du système en fonction de différents paramètres. Pour cela les méthodes du krigeage et du chaos polynomial sont utilisées. Puis, une méthode associant chaos polynomial et krigeage est développée et appliquée afin de pouvoir modéliser différents types d'incertitudes simultanément et d'apporter une réponse pertinente sur la propagation des incertitudes vis-à-vis de la propension au crissement dans un cadre de conception.

Dans le cinquième chapitre, les méthodes développées au quatrième chapitre sur le modèle académique sont appliquées au modèle éléments finis de frein PSA sur la configuration la plus crissante identifiée dans le troisième chapitre. Différentes études d'intérêt pour PSA dans un cadre de dimensionnement sont menées et démontrent l'intérêt de l'approche envisagée.

Enfin, dans le sixième chapitre, une méthode d'analyse des contributions des modes instables dans la génération des réponses vibratoires non-linéaires est proposée. Cette approche se veut comme un outil complémentaire d'une analyse de stabilité tout en évitant la mise en place d'une approche non-linéaire souvent trop fastidieuse dans le cadre d'un objet industriel. Cette méthode appelée Modal Amplitude Stability Analysis (MASA) propose une linéarisation équivalente du problème dynamique non-linéaire et d'approcher une solution vibratoire auto-entretenue du problème en fonction d'un niveau d'amplitude modale des modes instables. Elle a pour objectif de statuer sur le caractère divergent

ou non de la solution vibratoire approchée et d'identifier les contributions des modes instables présents dans la réponse dynamique du système lors du crissement. Cette méthode est d'abord présentée dans le cas mono-instable puis généralisée à un nombre d'instabilités quelconque. Elle est appliquée dans un premier temps au modèle académique pour lequel il est possible d'obtenir les réponses temporelles de référence. La comparaison des résultats permet d'identifier les capacités de la méthode MASA ainsi que ses limitations. Elle est ensuite appliquée au modèle éléments finis de frein automobile et permet d'étudier les contributions des différents modes instables lors de la génération des vibrations dues au frottement.

Chapitre 1

Présentation du système de frein et du phénomène de crissement

Sommaire

1.1 Présentation du système de freinage industriel 6
1.1.1 Freins à tambour 6
1.1.2 Freins à disque 7
1.1.3 Classification des bruits de freinage 11
1.2 Vibrations et bruits induits par les systèmes frottants 13
1.2.1 Caractérisation expérimentale du crissement 13
1.2.2 Des phénomènes complexes et multi-échelles à l'origine des vibrations . . 15
1.2.3 Influence des paramètres et tendances générales 16
1.2.4 Notion de variabilité 16
1.3 Conclusion et positionnement du problème 17

Introduction

Ce chapitre propose dans un premier temps une description rapide des systèmes de frein automobiles et de leur fonctionnement. Dans un second temps, une synthèse sur la caractérisation et la classification des bruits liés au frottement est faite. Un accent particulier est mis sur le cas du crissement.

1.1 Présentation du système de freinage industriel

Le freinage a pour fonction principale de ralentir ou d'arrêter un véhicule en une distance limitée. Il s'agit alors de convertir l'énergie cinétique du véhicule en une autre forme d'énergie. La principale technologie utilisée, aussi bien pour l'automobile que pour le ferroviaire ou l'aéronautique, consiste à transformer cette énergie cinétique en énergie thermique au travers d'interfaces frottantes. Il arrive cependant, que l'ensemble de l'énergie cinétique ne soit pas convertie en énergie thermique et soit évacuée sous forme d'énergie vibratoire, pouvant alors conduire à l'apparition d'un bruit de freinage.

Dans l'industrie automobile actuelle, des freins sont placés sur chaque roue du véhicule (Figure 1.1). Deux grandes technologies sont utilisées : le frein à tambour et le frein à disque. Ce dernier arrive dans les années 1950, et remplace progressivement le frein à tambour pour ses performances supérieures.

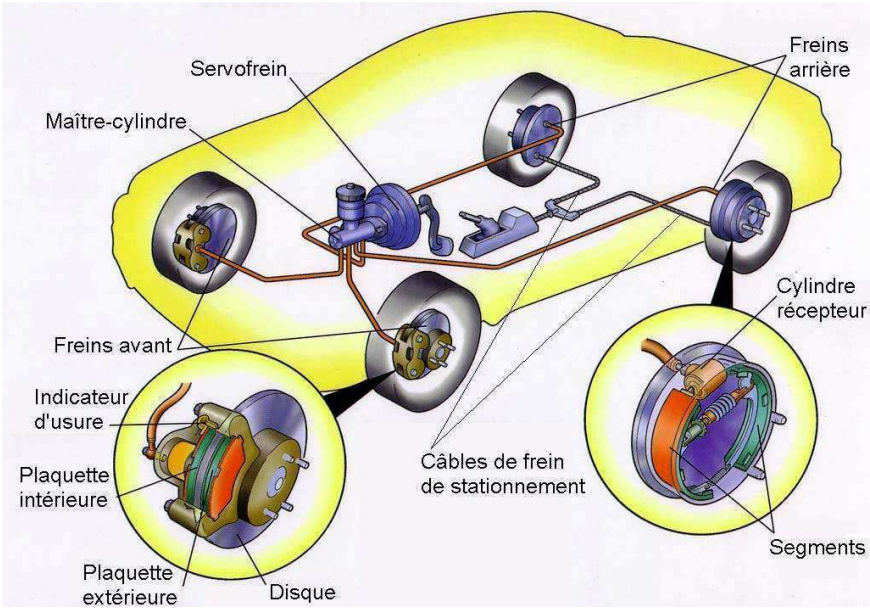


FIGURE 1.1 – Architecture du système de freinage d'une voiture

1.1.1 Freins à tambour

Cette technologie était majoritairement utilisée jusqu'à l'arrivée des freins à disque beaucoup plus performants. Cependant, son faible coût lui permet d'être toujours employée sur les petits véhicules économiques. Par ailleurs, les freins à tambour sont particulièrement adaptés en tant que frein de stationnement en étant disposés sur l'essieu arrière des véhicules compte tenu de leur capacité d'auto-serrage. De plus, puisqu'ils sont insérés à

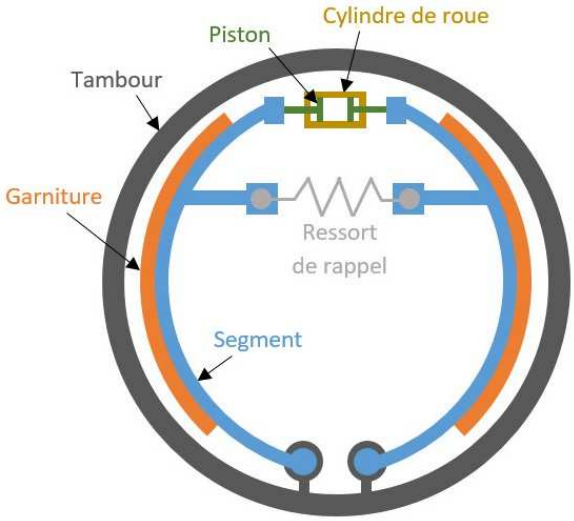


FIGURE 1.2 – Schéma de frein à tambour

l'intérieur de la roue, les surfaces de frottements sont protégées de l'environnement extérieur.

Principe de fonctionnement

Un frein à tambour, schématisé Figure 1.2, est composé d'un tambour solidaire au moyeu de la roue, de deux segments aussi appelés mâchoires, fixés au tambour et reliés par un ressort de rappel travaillant en traction. Ces segments sont recouverts d'une garniture composée d'un matériau de friction. Un piston permet de transmettre la commande de freinage du conducteur.

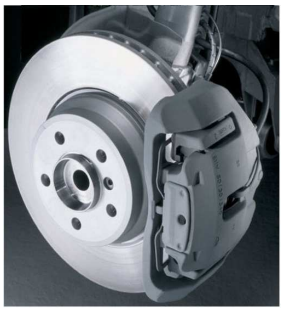
Lorsque le conducteur freine, le piston pousse les segments qui pivotent et entrent en contact avec le tambour en rotation. Les efforts de frottement ainsi générés ralentissent le véhicule. En fin de phase de freinage, lorsque le conducteur relâche la pédale de frein, le ressort de rappel ramène les segments en position initiale et évite ainsi que les segments restent en contact avec le tambour et bloquent les roues.

1.1.2 Freins à disque

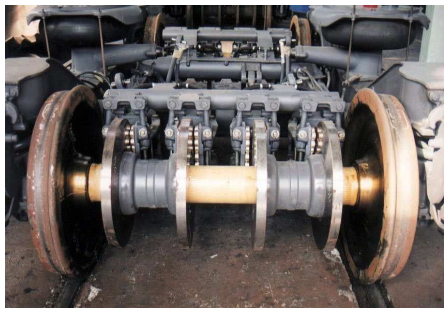
Les freins à disque sont aujourd'hui la seule technologie permettant d'arrêter efficacement des véhicules à la masse de plus en plus importante en respectant des contraintes sécuritaires de plus en plus sévères. Pour ces raisons, cette technologie est utilisée de façon majoritaire dans les domaines automobile (Fig. 1.3a), ferroviaire (Fig. 1.3b) et aéronautique (Fig. 1.3c). Dans la suite, le focus sera fait sur le cas des freins à disque automobile.

Principe de fonctionnement général

Un schéma de frein à disque automobile est donné Figure 1.4. Le système est composé d'un disque fixé au moyeu, d'un étrier, d'un ou de plusieurs pistons et de deux plaquettes situées de chaque côté du disque. La plaquette située côté roue est appelée plaquette extérieure, celle située côté véhicule est appelée plaquette intérieure. Les deux plaquettes



(a) Frein automobile



(b) Frein ferroviaire



(c) Frein aéronautique

FIGURE 1.3 – Exemples de freins à disque

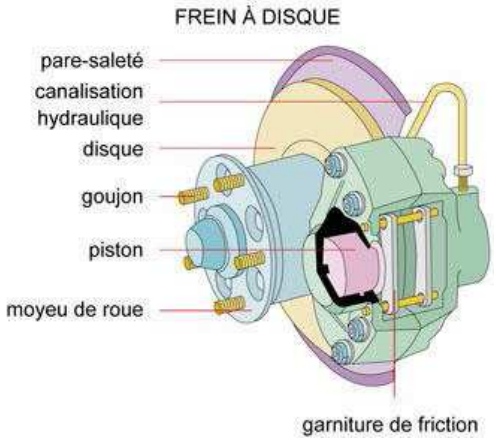
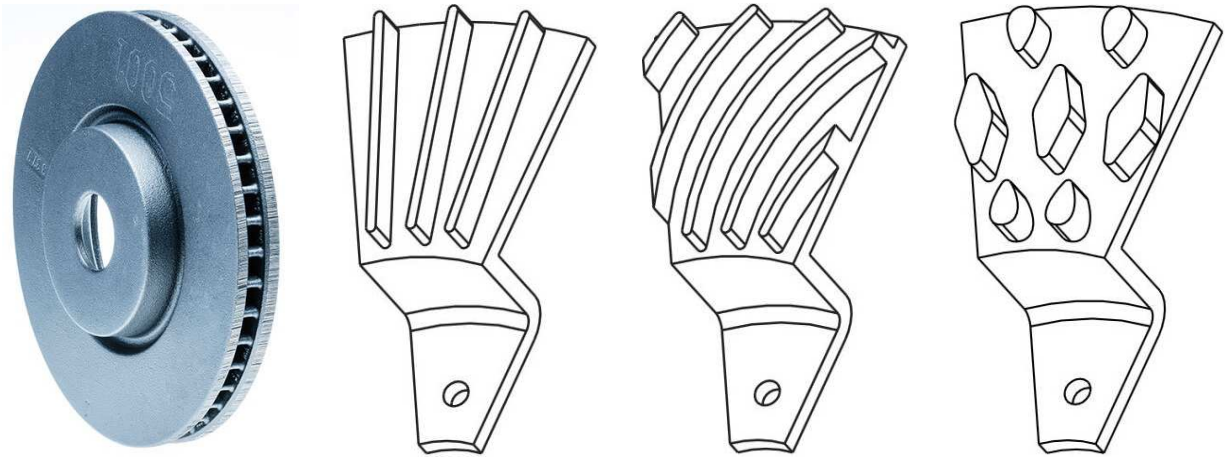


FIGURE 1.4 – Schéma de frein à disque

sont maintenues dans l'étrier. Lors d'une action de freinage, le conducteur appuie sur la pédale de frein, la pression ainsi créée dans le circuit hydraulique met en mouvement le piston qui vient pousser les plaquettes. Ces dernières translatent par rapport à la normale du disque et viennent se plaquer contre celui-ci. Les efforts de frottement ainsi générés ralentissent sa rotation jusqu'à entraîner l'arrêt du véhicule.

Le disque

Le disque est la pièce fixée à l'axe des roues et tourne donc à la même vitesse que celles-ci. La performance du freinage est évaluée par le taux d'énergie cinétique convertie en énergie thermique à l'interface de contact entre le disque et les plaquettes. Cependant, une élévation de la température des matériaux peut entrainer une usure prématurée du système et risque de dégrader l'efficacité du freinage. Un frein performant se doit de pouvoir évacuer rapidement la chaleur générée par le frottement des plaquettes. C'est dans cette optique que des disques de freins ventilés ont été créés. Ces disques sont composés d'ailettes qui séparent deux disques et permettent ainsi la circulation de l'air au sein du disque (Figure 1.5a). Différents schémas d'agencement des ailettes sont possibles, certains sont illustrés Figures 1.5b,1.5c,1.5d. Afin d'augmenter la surface totale du disque et ainsi faciliter le refroidissement, il est aussi possible d'utiliser une cloche de montage. Les disques sont majoritairement fabriqués en fonte grise, matériau qui a de très bonnes capacités thermiques et une bonne résistance à l'usure. Pour la compétition automobile il est possible de trouver des disques en carbone, cependant ceux-ci sont opérationnels uniquement à très haute température et ne sont donc pas adaptés à un usage classique.



(a) Disque ventilé (b) Ailettes droites (c) Ailettes courbées (d) Pilliers

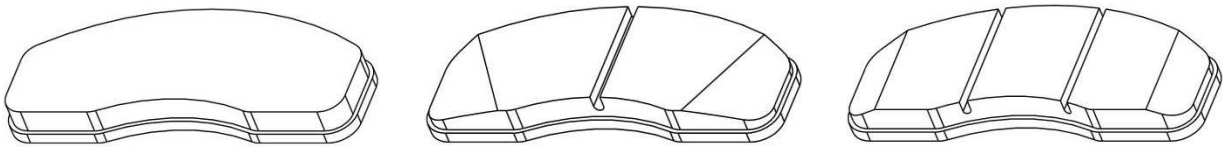
FIGURE 1.5 – Disque ventilé et schémas de quelques technologies d'ailettes pour les disques de frein ventilés [114]

Les plaquettes

Les plaquettes de frein sont les éléments qui viennent en contact avec le disque. Elles sont composées d'un support rigide et résistant à l'usure, sur lequel est disposé une garniture composée du matériau de friction. Le support doit être suffisamment rigide pour transmettre correctement l'effort venant du piston et permettre une bonne répartition de la pression sur la surface de la garniture. La garniture est de composition complexe pouvant comporter jusqu'à 25 matériaux différents. En effet, elle doit assurer des propriétés thermo-mécaniques performantes et un coefficient de frottement élevé et constant quelles que soient les conditions d'utilisation : vitesse, pression, humidité, température, état de surface, etc. Les plaquettes ont souvent une fente ou plus à leur surface et des chanfreins à leurs extrémités (Figure 1.6). Leur ajout permet souvent de réduire le crissement, et permet aussi une évacuation plus efficace de la poussière générée lors du freinage.

Les shims

Les shims sont des éléments placés entre le support de la plaquette et le piston ou l'étrier. Constitués d'une superposition de matériaux élastiques et de matériaux métalliques, ils sont de faible épaisseur et sont fixés à la plaquette soit par collage, soit par fixation mécanique. Ils sont destinés à amortir les vibrations du système de frein qui sont à l'origine du



(a) Plaquette classique (b) Plaquette avec une fente et des chanfreins radiaux (c) Plaquette avec deux fentes et des chanfreins verticaux

FIGURE 1.6 – Schémas de quelques plaquettes [114]

crissement. Cependant, la robustesse de l'ajout de shims sur des plaquettes pour atténuer le bruit de crissement reste un réel enjeu aujourd'hui [48].

L'étrier

L'étrier est une pièce fixée au porte-moyeu. Il maintient les plaquettes et permet le déplacement des plaquettes à l'aide d'un ou plusieurs pistons. Deux grandes classes de technologies existent : les étriers flottants (Fig. 1.7a et 1.7c) et les étriers fixes (Fig. 1.7b et 1.7d). Dans le cas de l'étrier flottant, un seul piston, situé du côté intérieur du système, est nécessaire. Lorsque la pression est appliquée, il vient pousser la plaquette intérieure qui entre alors en contact avec le disque. Les efforts de réaction ainsi créés tirent l'étrier et ramènent la plaquette extérieure qui vient se positionner contre le disque. L'étrier coulisse dans le porte-étrier sur des biellettes. Les jeux dans l'ensemble du système permettent d'assurer un contact franc entre les plaquettes et le disque. Dans le cas de l'étrier fixe, un piston est placé de chaque côté du disque. Lorsque la pression est appliquée, les deux pistons poussent les plaquettes contre le disque. Les efforts de frottement ainsi générés ralentissent la rotation du disque. Avec cette technologie, l'étrier est fixe et permet uniquement de guider le déplacement des plaquettes.

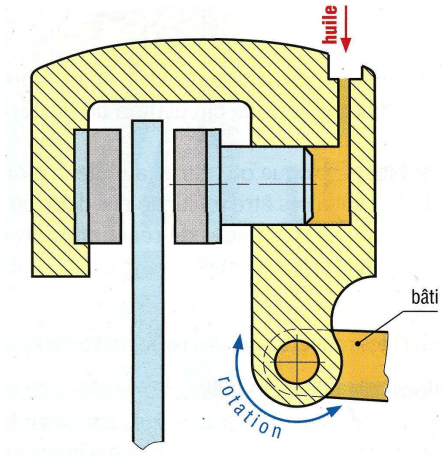
La technologie à étrier flottant est plus légère et donc moins coûteuse. C'est pour ces raisons qu'elle est largement utilisée dans l'industrie automobile. Mais dans des cas où des hautes performances de freinage sont nécessaires, comme dans le sport automobile, les freins à étriers fixes sont préférés et peuvent avoir plusieurs pistons par plaquettes.



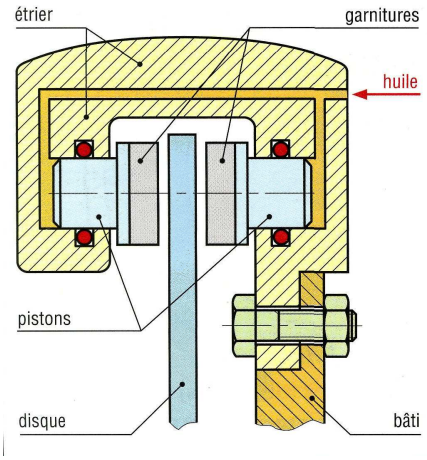
(a) Frein à étrier flottant



(b) Frein à étrier fixe



(c) Schéma de frein à étrier flottant



(d) Schéma de frein à étrier fixe

FIGURE 1.7 – Technologies d'étrier

1.1.3 Classification des bruits de freinage

Dès les années 1930, les bruits émis lors du freinage font partie des dix nuisances urbaines les plus importantes à New York [2]. Avec l'amélioration du confort acoustique des véhicules, les bruits du freinage n'ont cessé de prendre une part importante. Les conséquences de tels bruits sur la santé ne sont pas anodines. Une étude menée en 2016 par l'Ademe [149] en France chiffre à 20,6 milliards le coût annuel des nuisances sonores liées au transport sur la santé. En plus d'impacts directs sur l'audition, ces nuisances ont aussi des impacts extra-auditifs et peuvent entraîner des troubles du sommeil, des troubles cognitifs ou encore des maladies cardiovasculaires. Ainsi l'Union Européenne impose des normes de plus en plus strictes sur les niveaux sonores, en particulier dans le domaine ferroviaire. Dans le cas de l'industrie automobile, les bruits de freinage sont extrêmement désagréables et sont souvent associés à un défaut de fabrication dans l'imaginaire collectif. Ils sont à l'origine du retour de nombreux véhicules auprès des services clients, ce qui représente un coût important pour les entreprises, pouvant aller jusqu'à plusieurs millions d'euros.

La présence de nombreux composants dans un système de frein, leurs propriétés matérielles et non-linéaires rendent la dynamique d'un frein complexe et propice à l'émergence de différentes instabilités vibratoires pouvant conduire à l'apparition de nuisances

sonores. Différents types de bruits peuvent émerger lors du freinage. Une classification de ceux-ci, résumée Figure 1.8, est proposée dans [2]. La gamme de fréquences et la nature des vibrations permettent de les différencier. Les principaux bruits rencontrés dans le cas des véhicules légers, à savoir les trépidations, le bourdonnement, le broutement et le crissement, sont détaillés par la suite.

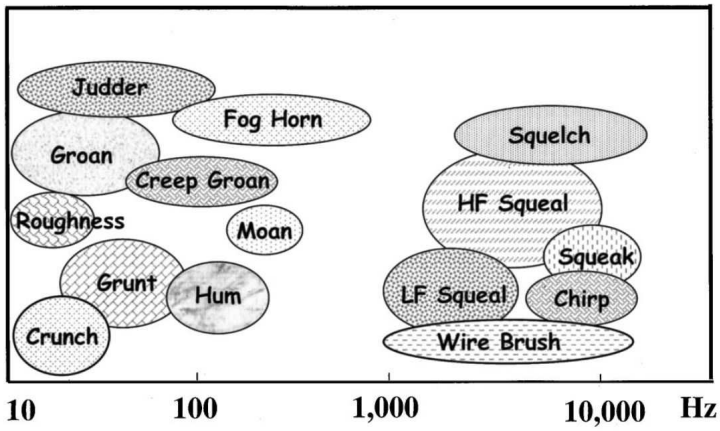


FIGURE 1.8 – Classification des bruits de freinage [2]

Les trépidations (*judder*)

Les vibrations de trépidations sont caractérisées par des fréquences inférieures à 500 Hz et des niveaux sonores souvent relativement faibles. Elles sont causées par un défaut d'épaisseur du disque, qui peut être dû à un mauvais procédé de fabrication ou aux déformations thermiques liées au freinage. Les variations d'épaisseur à la surface du disque entraînent une variation des efforts de contact. Les plaquettes voient alors de façon périodique la variation de ces efforts de contact et des vibrations de trépidations sont alors générées avec des amplitudes importantes. Ces vibrations étant liées à la vitesse de rotation du disque, elles font parties des vibrations forcées.

Broutement (*groan*)

Les vibrations de broutements existent pour des fréquences inférieures à 100 Hz. Elles proviennent d'une dépendance du coefficient de frottement à la vitesse relative entre le disque et les plaquettes. Particulièrement présentes à faible vitesse de rotation, le coefficient de frottement décroît lorsque la vitesse de glissement augmente faisant alors apparaitre un phénomène de *stick-slip* (adhérence-glissement). Des phases où les garnitures adhèrent au disque alternent avec des phases où ces dernières glissent. Ces vibrations font parties de la catégorie des vibrations auto-entretenues.

Bourdonnement (*hoan*)

Situées dans une plage fréquentielle allant de 100 à 500 Hz avec des niveaux d'amplitudes assez élevés, les vibrations de bourdonnement proviennent d'un couplage entre les vibrations normales et tangentielles de l'étrier générant une rotation rigide de l'étrier. Ce phénomène provient d'un contact non franc entre les garnitures et le disque et peut nuire

à la sécurité du freinage. Ce type de vibrations auto-entretenues est une instabilité de type *sprag-slip* (arc-boutement-glissement).

Crissement (*squeal*)

Le crissement est caractérisé par des hautes fréquences supérieures à 1 kHz et un spectre de raies très riche. Il provient d'un couplage entre différents modes du systèmes via l'interface frottante. Les fréquences apparaissant dans le spectre dépendent des différents modes impliqués dans le couplage. Les niveaux sonores associés au crissement sont élevés et peuvent atteindre 120 dB. Ils sont extrêmement désagréables et peuvent même être douloureux s'ils dépassent le seuil de la douleur de 110dB. Contrairement aux autres vibrations, le crissement n'affecte en rien la performance du freinage. Il dépend de nombreux paramètres intervenants à différentes échelles. Sa caractérisation expérimentale et numérique n'est toujours pas triviale aujourd'hui.

1.2 Vibrations et bruits induits par les systèmes frottants

Le crissement est fortement lié au phénomène de frottement qui a lieu à l'interface entre le disque et les plaquettes et fait partie de la catégorie des vibrations induites par frottement (*friction-induced vibrations*). Les interfaces frottantes sont le lieu de nombreux phénomènes complexes multi-échelles pouvant générer des vibrations et des bruits. Ces vibrations induites par frottement ont été le sujet de recherche de nombreux chercheurs et industriels depuis plusieurs décennies. L'objectif de cette partie est de présenter brièvement quelques résultats expérimentaux tirés de la littérature puis de décrire différents phénomènes physiques impliqués dans le crissement.

1.2.1 Caractérisation expérimentale du crissement

De nombreuses expérimentations ont été réalisées afin de caractériser le crissement et l'influence de différents paramètres sur celui-ci. Les mesures sont effectuées soit sur des véhicules roulants équipés d'accéléromètres et de microphones, soit sur des bancs d'essais avec un système de frein complet avec parfois d'autres éléments adjacents tels que le moyeu ou l'amortisseur. Même si les bancs ne sont pas toujours représentatifs des conditions réelles, ils ont l'avantage de permettre une meilleure répétabilité du phénomène et une meilleure instrumentation du système de frein. Une enceinte climatique peut aussi être placée autour afin de contrôler des paramètres environnementaux tels que la température ou l'humidité.

Les premières expérimentations commencent en 1938 avec Mills [93]. En 1961, Fosberry et Holubecki [52] arrivent à montrer que lorsque le coefficient de frottement entre la garniture et le disque diminue avec la vitesse relative de glissement, alors les occurrences de crissement augmentent. Ils observent aussi un nombre fini de fréquences distinctes pour un système de frein. Au début des années 1960, Spurr [135], puis Jarvis et Mills [70] montrent l'influence de la position du contact sur les occurrences de crissement. Il faudra attendre 1978 et Felske [47], pour que l'interférométrie laser soit utilisée afin de visualiser les déformées opérationnelles d'un frein qui crisse. L'accès à la forme des modes, la

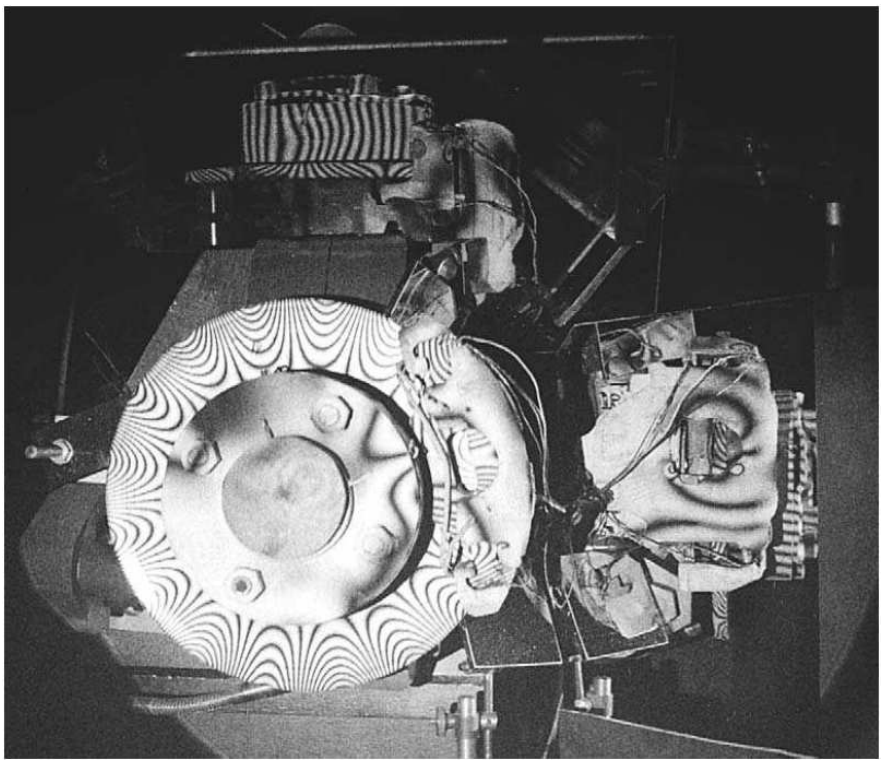


FIGURE 1.9 – Observation de la déformée opérationnelle d'un frein par interférométrie laser [49, 50]

vitesse et les déplacements permettent une analyse plus poussée des vibrations de freinage. Cette méthodologie sera réutilisée par la suite par Murakami [99], par Ohta [111] puis par Fieldhouse et Newcomb [49, 50] (Figure 1.9).

En 2003, Wagner [141] réalise des essais acoustiques et compare un modèle semi-analytique à des résultats expérimentaux menés sur un frein à disque automobile. Les vibrations et le bruit rayonné sont mesurés à l'aide d'accéléromètres et d'un microphone placé à un mètre du frein. Le spectre en fréquences fait apparaitre les fréquences propres du système ainsi que leurs harmoniques, ce qui met en évidence les phénomènes non-linéaires complexes ayant lieu à l'interface frottante. Les amplitudes de vibrations relevées sont de l'ordre de quelques dizaines de micromètres.

Des systèmes plus simplifiés sont aussi utilisés afin de se focaliser sur l'influence d'un nombre limité de paramètres sur le crissement. C'est le cas des systèmes pion-disque [18, 19, 40], où la pointe d'un cône vient frotter le disque, et des systèmes poutre-disque [3, 58, 86], où une poutre de section carrée ou circulaire vient frotter un disque. Ces bancs expérimentaux académiques permettent d'avoir une meilleure compréhension des mécanismes de crissement et d'étendre, à terme, ces connaissances à la conception de freins industriels moins crissants. Parmi ces bancs d'essais, deux grands groupes peuvent être distingués en fonction du positionnement choisi pour analyser le phénomène de crissement. Le premier groupe correspond aux bancs expérimentaux dont l'approche est tribologique [59, 87, 142, 143], le crissement serait le résultat d'une vibration instable de la surface de contact et où les caractéristiques physiques et chimiques de l'interface jouent un rôle primordial. Le second groupe correspond aux bancs expérimentaux dont l'approche est basée sur une analyse de la dynamique globale du système [3, 18, 19, 86, 116]. L'instabilité de crissement provient dans ce cas, d'un couplage entre différents modes du système.

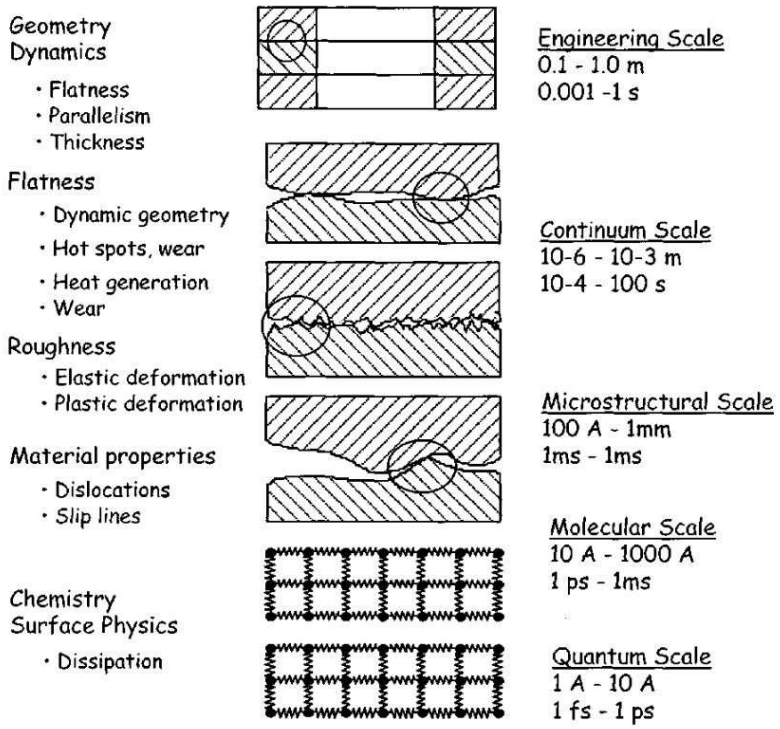


FIGURE 1.10 – Phénomènes ayant lieu aux différentes échelles du contact [2]

1.2.2 Des phénomènes complexes et multi-échelles à l'origine des vibrations

Les vibrations induites par frottement sont la manifestation de phénomènes présents à de multiples échelles. Akay propose une hiérarchie des différents phénomènes [2] représentée Figure 1.10. Lorsque deux surfaces frottent, à l'échelle des milieux continus, on observe les états de surface et les rugosités qui s'entrechoquent, se déforment ou se fracturent lors du frottement. Cela crée usure, chaleur, vibrations et bruit. A l'échelle de la structure, les surfaces peuvent être considérées comme planes.

De ce fait, différents domaines de recherche sont impliqués. Ainsi, les tribologues se focalisent sur l'étude des états de surface et leur évolution au cours du frottement. Il s'agit alors de s'intéresser à l'usure, la déformation des matériaux pendant le glissement, la nature de l'interface ou encore sa topologie. Si la loi de Coulomb pose le concept de force de frottement proportionnelle à la force normale de contact quelle que soit la vitesse relative de glissement et la surface apparente de contact en 1785, on sait aujourd'hui que les aspérités, les poussières à l'interface, la température ou encore l'humidité sont des paramètres qui font varier les conditions de frottement. Les lois sous-jacentes sont complexes et donnent lieu à de nombreuses études [67, 68]. Les matériaux de la garniture [43], l'usure [7], l'environnement [44], la géométrie de la surface [8] ou encore l'historique de freinage sont autant d'éléments qui influent sur le régime de contact et qui rendent l'étude et la modélisation complexe.

A l'échelle de la structure, il s'agit plutôt de s'intéresser aux mécanismes qui génèrent les vibrations et à l'interaction entre les différents éléments du système. Les surfaces de contact peuvent alors être considérées comme planes. Le crissement peut alors être expliqué par un couplage entre différents modes de la structure, couplage assuré par l'interface frottante. Le frein vibre alors à des fréquences discrètes proches des fréquences propres du système [107]. Les déformées du disque sont proches d'un de ses modes libres. Il peut

aussi bien s'agir d'un mode de flexion avec des diamètres nodaux, ou d'un mode dans le plan de la surface de contact. Le couplage se fait généralement avec un mode des garnitures [38, 47, 49, 50, 52, 89, 91, 107].

La détermination des modes et des fréquences présents lors d'une occurrence de crissement est complexe. Si les fréquences du disque influencent le crissement, les fréquences des garnitures et de l'étrier l'influencent beaucoup moins. Plus les fréquences des différents composants sont proches et plus le couplage entre les modes est favorisé [99]. Il est cependant possible de trouver des modes peu sensibles aux couplages impliqués dans des occurrences de crissement. Cela signifie qu'il est nécessaire de mener une étude à la fois sur chaque composant indépendamment des autres, mais aussi sur la structure dans son ensemble. L'identification du composant le plus bruyant est elle aussi complexe puisque spécifique à chaque système de frein.

1.2.3 Influence des paramètres et tendances générales

Si le crissement est un phénomène fugitif de grande variabilité dépendant de nombreux paramètres, il est quand même possible d'identifier quelques grandes tendances [73, 135] :

- le nombre de fréquences est limité, elles sont distinctes des fréquences propres du système [107],
- les vibrations de crissement sont proches des modes propres du système. Des ondes non stationnaires apparaissent et se propagent. Cependant, la connaissance des modes propres de la structure n'est pas suffisante [49, 50],
- l'augmentation du coefficient de frottement augmente la probabilité d'occurrence [47, 69, 99, 107, 135],
- l'augmentation de la pression augmente les fréquences et la propension au crissement [126],
- les occurrences sont plus sensibles à la variation du coefficient de frottement et de la pression qu'à la vitesse de glissement [69],
- la contribution des différents éléments est variable et dépend des fréquences [38, 47, 52, 89, 91] ,
- lors d'une occurrence, si la vitesse diminue, les niveaux sonores augmentent [126],
- l'amortissement joue un rôle complexe [21, 133].

1.2.4 Notion de variabilité

Compte tenu du nombre important de paramètres influents, de la fugacité du phénomène, de la difficulté de la reproductibilité, de la dépendance à des paramètres tels que l'environnement ou l'usure, la notion de prise en compte de la variabilité ou de l'incertitude sur certains facteurs apparaît depuis quelques années. Ainsi en 2009, Culla et Massi [29] proposent de considérer certains paramètres comme incertains en effectuant des tirages de Monte Carlo sur un modèle numérique afin d'améliorer la prédiction du crissement. En 2010, Butlin et Woodhouse [17] travaillent sur la variabilité des paramètres liés au crissement et posent les bases de la considération des incertitudes pour l'amélioration des prédictions de crissement. En 2014, les travaux de Tison et al. [137] montrent que la prise en compte des incertitudes permet d'améliorer la prédiction des occurrences et confirment ces résultats de façon expérimentale. Depuis, de nombreux travaux traitent de la prise en compte et de la modélisation des incertitudes dans les modèles de frein,

aussi bien sur des aspects numériques qu'expérimentaux [78, 109, 117]. Ces études restent cependant complexes à mener puisqu'il faut identifier et caractériser les différents types d'incertitudes puis mettre en place les outils adaptés, et souvent coûteux, permettant de les prendre en compte.

1.3 Conclusion et positionnement du problème

Cette première partie démontre l'importance que revêt le crissement dans les domaines scientifiques et industriels. Si les essais expérimentaux sont indispensables pour caractériser et observer le phénomène, leurs coûts et leurs complexités motivent l'utilisation de modèles numériques. L'augmentation des puissances de calcul sur ces dernières décennies a permis de passer de modèles simplifiés de quelques degrés de liberté à des modèles éléments finis complets permettant de traiter de la géométrie complexe du système. Ces modèles numériques permettent de prendre en compte le crissement dès la phase de conception d'un frein et ainsi de mieux appréhender la problématique de la prédiction des vibrations et du bruit induits par frottement.

Chapitre 2

Bibliographie

Sommaire

2.1 Phénoménologie des instabilités de frottement 20
2.1.1 Stick-slip : une origine tribologique 20
2.1.2 Sprag-slip 23
2.1.3 Couplage de modes 24
2.2 Modélisation du contact frottant 26
2.2.1 Formulation continue 26
2.2.2 Modélisation du contact unilatéral 27
2.2.3 Modélisation du frottement 28
2.2.4 Formulation variationnelle 28
2.3 Stabilité des systèmes dynamiques 30
2.3.1 Les différents types de solution 30
2.3.2 Stabilité des points fixes : stabilité au sens de Lyapunov 31
2.3.3 Stabilité des solutions périodiques 36
2.4 Modélisation des incertitudes 41
2.4.1 Incertitudes : sources et modélisation possible 41
2.4.2 Quelques notions mathématiques 43
2.4.3 Approches probabilistes 45
2.4.4 Approches ensemblistes 48
2.4.5 Les méthodes d'approximation de surface de réponse : la méta-modélisation 49
2.4.6 Les méthodes hybrides 53

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner différents éléments bibliographiques permettant de situer le travail présenté ici. Dans un premier temps, différents modèles phénoménologiques des instabilités de frottement sont présentés. Puis une brève description de la modélisation des systèmes frottants est proposée. Ensuite, la définition et la caractérisation de la stabilité des systèmes dynamiques sont données. Enfin, les notions et les méthodes associées à la modélisation des incertitudes sont présentées.

2.1 Phénoménologie des instabilités de frottement

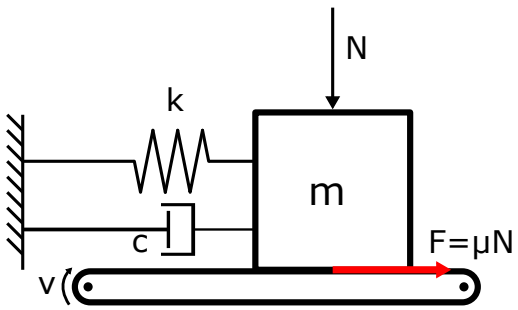
Différentes origines des instabilités de frottement ont été identifiées depuis les années 50. Initialement, l'attention était mise sur des aspects tribologiques : le principal responsable de l'instabilité était la dépendance du coefficient de frottement à différents paramètres, en particulier à la vitesse relative de glissement. Cependant, des travaux expérimentaux ont montré que cette origine tribologique n'était pas suffisante pour expliquer les vibrations induites par frottement. Des modélisations avec une vision plus géométrique ou structurelle ont alors émergé. Cette partie a pour objectif de présenter différentes phénoménologies pouvant expliquer des instabilités de frottement, à savoir le stick-slip, le sprag-slip et le couplage de modes.

2.1.1 Stick-slip : une origine tribologique

Les premiers travaux sur la recherche de l'origine du crissement se sont principalement concentrés sur des aspects tribologiques en cherchant à caractériser les lois de frottement pouvant être mises en jeu à l'interface de contact. Le phénomène de stick-slip a été mis en évidence par Sinclair et Manville [131]. Depuis, il a été le sujet de nombreuses études et a été largement expliqué dans différents travaux résumés par Ibrahim [67]. Pendant longtemps, le stick-slip a été considéré comme étant le phénomène à l'origine des instabilités de frottement.

Le stick-slip correspond à une alternance entre des phases d'adhérence et des phases de glissement entre les deux solides en contact. Cette alternance provient d'une variation, discontinue ou non, du coefficient de frottement et crée des vibrations auto-entretenues du système. L'un des modèles les plus courants pour modéliser le stick-slip est un modèle à un degré de liberté représenté Figure 2.1a. Il s'agit d'une masse m reliée à un ressort de raideur k et un amortisseur c, disposée sur un tapis tournant à une vitesse constante v. Les déplacements $x(t)$ de la masse et l'alternance des phases d'adhérence et de glissement sont représentés Figure 2.1b.

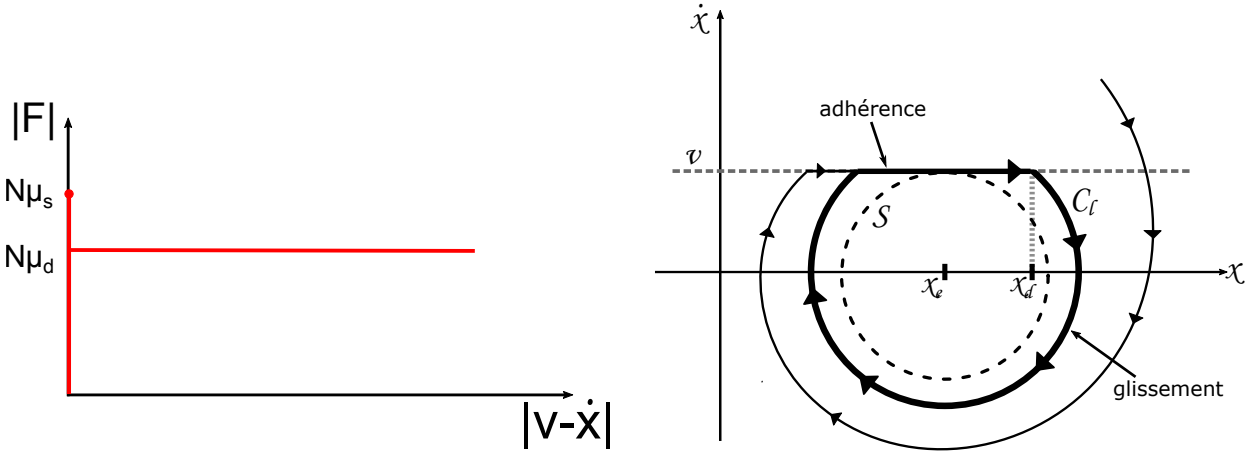
L'étude du phénomène de stick-slip se base sur un point primordial : la modélisation du contact frottant et de la loi de frottement associée. Différentes modélisations plus ou moins complexes sont possibles. La plus simple consiste à considérer que le coefficient de frottement dynamique μ_d est constant avec la vitesse de glissement et inférieur au coefficient de frottement statique μ_s. D'autres modélisations plus développées consistent à considérer que le coefficient de frottement varie avec la vitesse de glissement. Ces deux types de modélisation sont détaillées dans la suite.



(a) Modèle phénoménologique de stick-slip à 1 ddl

(b) Déplacement de la masse en fonction du temps

FIGURE 2.1 – Modèle de stick-slip (a) et visualisation des phases d'adhérence et de glissement (b)



(a) Loi de frottement

(b) Trajectoires dans l'espace des phases

FIGURE 2.2 – Loi de frottement (a) et trajectoires dans l'espace des phases (b) pour $\mu_d < \mu_s$

Coefficient de frottement dynamique constant inférieur au coefficient de frottement statique

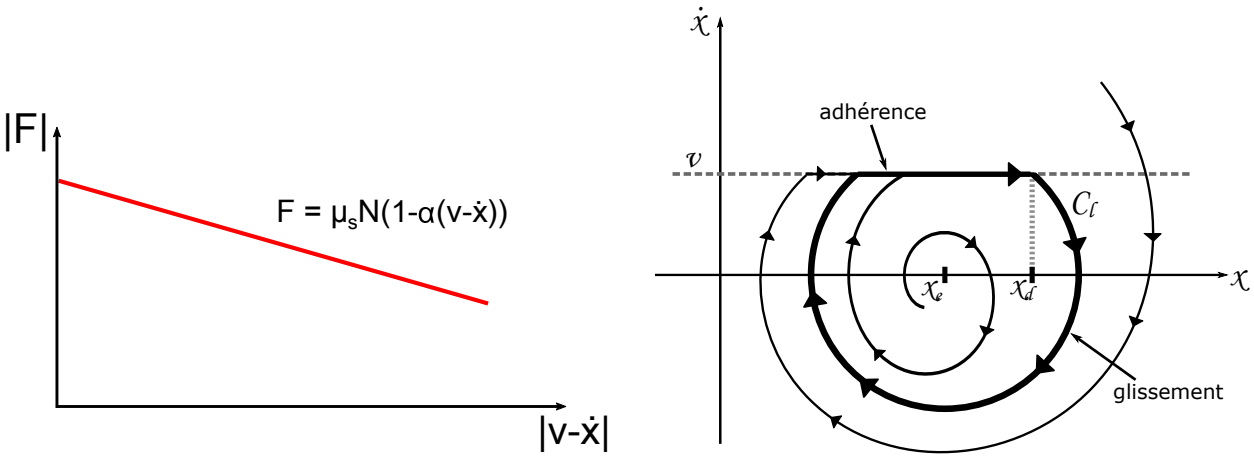
L'équation du mouvement du système représenté Figure 2.1a s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathrm{F}(v_r) \tag{2.1}$$

avec $v_r = \dot{x} - v$ la vitesse relative de glissement et $\mathrm{F}(v_r)$ la force de frottement non-linéaire. Si l'on considère que le coefficient de frottement dynamique μ_d est constant et inférieur au coefficient de frottement statique μ_s alors la force de frottement non-linéaire, représentée Figure 2.2a, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{F}(0) < \mu_s \mathrm{N} & \text{si } v_r = 0 \quad \text{Adhérence} \\ \mathrm{F}(v_r) = \mu_d \mathrm{N} & \text{si } v_r > 0 \quad \text{Vitesse de glissement positive} \\ \mathrm{F}(v_r) = -\mu_d \mathrm{N} & \text{si } v_r < 0 \quad \text{Vitesse de glissement négative} \end{cases} \tag{2.2}$$

De façon intuitive, lorsque la masse est initialement posée sur le tapis, la vitesse relative de glissement est nulle et la masse se déplace avec le tapis. Les efforts de frottements F se trouvent dans le cône de frottement et sont inférieurs à $|\mu_s \mathrm{N}|$ en valeur absolue. Lorsque la masse atteint le point $x_d = \mu_s \mathrm{N}/k$, les efforts de frottements valent $\mu_s \mathrm{N}$ et la masse se met à glisser. La vitesse de glissement étant non nulle, les efforts de frottements valent $|\mathrm{T}| = |\mu_d \mathrm{N}|$ et cette dernière décroît progressivement jusqu'à s'annuler et entamer une nouvelle phase d'adhérence : un nouveau cycle recommence et la masse oscille autour



(a) Loi de frottement

(b) Trajectoires dans l'espace des phases

FIGURE 2.3 – Loi de frottement (a) et trajectoires dans l'espace des phases (b) pour $\mu = f(v_r)$

d'une position d'équilibre $x_e = \mu_d N/k$.

Les différentes trajectoires possibles dans l'espace des phases sont représentées Figure 2.2b pour un amortissement nul. En fonction de l'initialisation, plusieurs cas distincts sont observés et sont présentés. Tout d'abord, il existe un domaine S stable dans lequel toute initialisation induit une oscillation de la masse sur le cercle de centre le point stationnaire $(x_e, 0)$ et passant par ses conditions initiales $(x_0, \dot{x}_0)$. Si les conditions initiales sont telles que $\dot{x} = v$ et $x \in [-x_d, x_d]$ (ensemble des points adhérents), alors la masse est d'abord en adhérence, puis se met à glisser à partir du point x_d. Elle décrit un cycle limite C_l jusqu'à ce que $\dot{x} = v$ où la masse se met de nouveau à adhérer au tapis. Si les conditions initiales sont différentes de celles énoncées précédemment, alors la masse d'écrit un mouvement de spirale décroissante jusqu'à ce que sa trajectoire croise le segment d'adhérence. Elle se met alors à décrire le cycle précédemment décrit avec des phases d'adhérence et de glissement. Le cycle C_l est appelé cycle attracteur du système.

Coefficient de frottement dynamique décroissant avec la vitesse de glissement

Dans le cas précédent, l'instabilité provenait du fait que le coefficient de frottement dynamique était inférieur au coefficient de frottement statique. Il est cependant possible de considérer des modélisations plus complexes où le coefficient de frottement est une fonction décroissante de la vitesse de glissement. Cette modélisation est encouragée par certaines études [94] qui mettent en évidence une diminution du coefficient de frottement pour une augmentation de la vitesse de glissement. Plusieurs types de lois de frottement sont possibles, parmi les plus courantes se trouvent la loi de frottement linéaire et la loi de frottement exponentielle, seul le premier cas est traité ici. Le coefficient de frottement s'écrit alors : $\mu_d = \mu_s(1-\alpha(v-\dot{x}))$. Les efforts de frottement sont tracés Figure 2.3a et s'écrivent :

$$\begin{cases} F(0) < \mu_s N & \text{si } v_r = 0 \quad \text{Adhérence} \\ F(v_r) = \mu_s N(1-\alpha(v-\dot{x})) & \text{si } v_r > 0 \quad \text{Vitesse de glissement positive} \\ F(v_r) = -\mu_s N(1-\alpha(v-\dot{x})) & \text{si } v_r < 0 \quad \text{Vitesse de glissement négative} \end{cases} \tag{2.3}$$

Dans le cas d'une vitesse de glissement positive, l'équation du mouvement du système présenté précédemment est :

$$m\ddot{x} + (c - \alpha\mu_s \mathrm{N})\dot{x} + kx = \mu_s \mathrm{N}(1 - \alpha v) \tag{2.4}$$

Comme dans le cas précédent, il existe une position d'équilibre statique unique $x_e = \mu_s \frac{\mathrm{N}}{k}(1 - \alpha v)$. Par ailleurs, la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse relative a ajouté une contribution en amortissement au système. Plus précisément, si le terme $(c - \alpha\mu_d \mathrm{N})$ est négatif, cela est équivalent à injecter de l'énergie au système. La plus petite perturbation autour de la position d'équilibre x_e entrainera alors des oscillations croissantes jusqu'à l'obtention d'un cycle limite attracteur. Les différentes trajectoires dans l'espace des phases sont données Figure 2.3b sous l'hypothèse que l'amortissement c est négligeable et que $\alpha v << 1$. En fonction de l'initialisation, plusieurs cas sont observables. Si les conditions initiales se trouvent sur le segment adhérent $([-x_d, x_d], v)$, alors le système décrit le cycle limite C_l en alternant des phases d'adhérence et de glissement comme dans le cas μ_d constant. Si les conditions initiales se trouvent à l'intérieur du cycle limite C_l, alors le système décrit une spirale divergente jusqu'à croiser le segment d'adhérence. Une fois ce segment rencontré, le système suit le comportement du cycle C_l. Si les conditions initiales sont à l'extérieur du cycle C_l, alors le système décrit une spirale décroissante jusqu'à intercepter le segment adhérent puis suit le comportement du cycle limite C_l.

Bilan

Nous avons vu que le stick-slip permettait d'expliquer certaines instabilités induites par frottement. L'ensemble des modélisations se basent sur des considérations tribologiques où le coefficient de frottement est le paramètre déterminant. En effet, si ce dernier dépend de la vitesse de glissement, alors le système dynamique décrit des phases d'adhérence et de glissement. Si le phénomène de stick-slip est encore largement utilisé pour décrire des instabilités à basses fréquences, il s'est rapidement avéré que sa seule considération n'était pas suffisante pour expliquer l'ensemble des vibrations liées au frottement. Un certain nombre d'études expérimentales ont observé des instabilités de frottement avec un coefficient de frottement sensiblement constant [71, 79]. Il apparait alors que les aspects tribologiques ne sont pas les seuls à être à l'origine d'instabilités de frottement. Ainsi, en 1961 Spurr [135] propose le modèle de sprag-slip.

2.1.2 Sprag-slip

En 1961, Spurr [135] propose une autre explication potentielle aux vibrations auto-entretenues. Il considère un coefficient de frottement indépendant de la vitesse de glissement à l'interface de contact et suppose que l'origine des vibrations provient d'une modification géométrique du système. Sa théorie se base sur l'idée qu'il existe un couplage entre le ddl normal et le ddl tangentiel de contact. Différents modèles minimaux permettent d'expliquer aisément le phénomène, l'un d'entre eux est présenté Figure 2.4. Il s'agit d'une barre flexible en contact glissant le long d'un tapis tournant à vitesse v. On note θ l'angle entre la normale au point de contact et la barre. Si un effort F est appliqué au sommet de la barre, alors l'effort normal N est égal à $\mathrm{F}\cos(\theta)$. L'effort tangentiel T est déduit avec la loi de Coulomb et vaut $\mathrm{T} = \mu\mathrm{N}$. On obtient :

$$\mathrm{T} = \frac{\mu\mathrm{N}}{1 - \mu\tan(\beta)} \tag{2.5}$$

avec $\beta = \pi/2 - \theta$. Lorsque β tend vers $\arctan(1/\mu)$, l'effort T devient très important. Le mouvement de la barre sur le tapis est bloqué et celle-ci s'arc-boute. Pendant cette phase, la

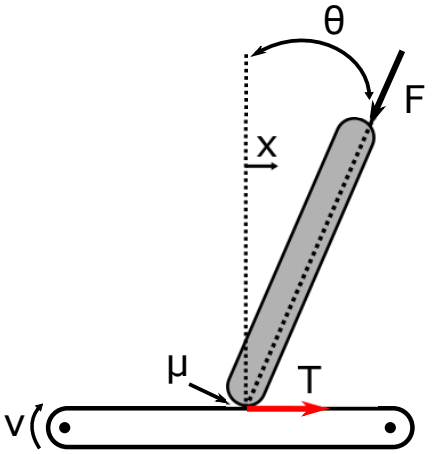


FIGURE 2.4 – Modèle de Sprag-Slip

barre emmagasine de l'énergie potentielle grâce à sa flexibilité. A partir d'un certain seuil, l'effort de flexion devient plus important que l'effort de frottement entrainant une libération de l'énergie stockée. La barre reprend sa position d'origine en glissant : un nouveau cycle est amorcé. Pendant la phase de glissement, l'effort de frottement apparent est plus faible malgré le coefficient de frottement constant. L'originalité du modèle de Spurr réside dans le fait qu'il est possible d'obtenir des vibrations auto-entretenues avec un coefficient de frottement constant. L'instabilité provient ici d'un couplage cinématique entre les efforts de frottement et le degré de liberté normal du système, les aspects tribologiques ne sont plus la source de l'instabilité. Cette nouvelle interprétation du phénomène a ouvert le champ à de nombreuses recherches par la suite.

2.1.3 Couplage de modes

Suite aux travaux de Spurr [135], de nombreux chercheurs se sont penchés sur la nouvelle interprétation du phénomène et ont développé des théories afin de la généraliser. La notion de couplage de modes est alors apparue. Le sprag-slip peut être perçu comme provenant d'une coalescence entre deux modes de la structure. Afin de faire émerger ce phénomène, il est nécessaire d'avoir un système avec au minimum deux degrés de liberté afin qu'il y ait au moins deux modes de vibration.

Des travaux expérimentaux ont été menés afin de valider la théorie de Spurr. Les premiers à réaliser de telles expériences sont Jarvis et Mills [71] en 1963. Ils étudient un système poutre-disque tournant et montrent que la variation du coefficient de frottement ne suffit pas à expliquer les instabilités existantes. Elles dépendent en fait de la configuration géométrique du système. Des travaux menés par la suite, par exemple ceux de Earles [40], valident la théorie du sprag-slip et montrent au passage qu'il est possible d'avoir des instabilités de frottement avec un coefficient de frottement μ constant. L'ensemble de ces travaux amène à penser que c'est l'interaction entre les degrés de liberté normaux et les degrés de liberté tangents qui est responsable des instabilités. Afin de représenter ce phénomène de couplage entre les différents modes de la structure, différents modèles phénoménologiques ont été proposés [65, 66]. Le modèle de Hulten [66], représenté Figure 2.5, est ici décrit et étudié afin de brièvement expliciter le mécanisme de couplage de modes. Il s'agit d'une masse m maintenue en contact contre une bande mobile comme sur la Figure 2.5. Le contact est assuré par des plaques étant chacune reliée à la masse par un ressort et un amortisseur.

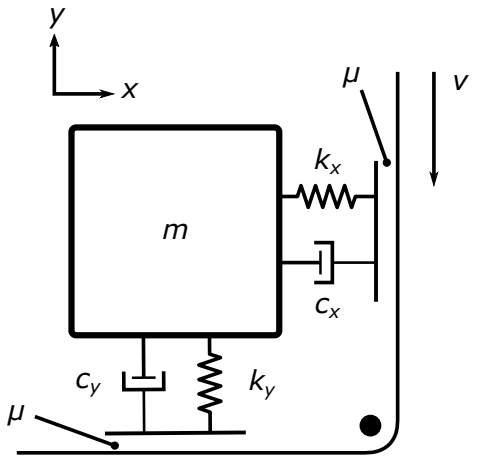


FIGURE 2.5 – Modèle de Hulten

L'équation du mouvement est donnée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

avec la matrice de masse **M**, la matrice d'amortissement **C** et la matrice de raideur **K** définies de la façon suivante :

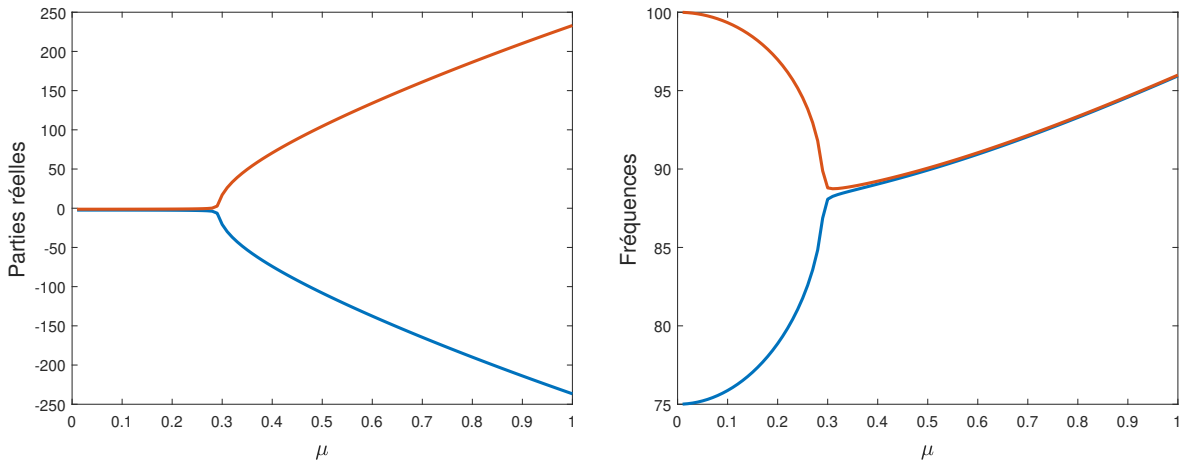
$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_x & -\mu k_y \\ \mu k_x & k_y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Avec $\mathbf{X} = [x, y]^{\mathrm{T}}$ et où le point représente la dérivée par rapport au temps. La dissymétrie de la matrice de raideur **K** conduit à l'existence de valeurs propres complexes pouvant rendre le système instable.

Afin de statuer sur la stabilité du système, une analyse aux valeurs propres est réalisée en résolvant le problème aux valeurs propres associés à l'équation 2.6, à savoir :

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0 \tag{2.8}$$

Les valeurs propres complexes $\lambda_j = a_j + i\omega_j$ sont ainsi déterminées. ω_j représente la pulsation du mode j et a_j sa partie réelle. Si la partie réelle d'au moins une des valeurs propres est positive, alors le système est instable. Les Figures 2.6a et 2.6b représentent l'évolution des parties réelles et des fréquences du système en fonction du coefficient de frottement μ pour un jeu de paramètres donné. Lorsque le coefficient de frottement augmente, les deux modes se rapprochent en fréquence jusqu'à coalescer en un point appelé bifurcation de Hopf, ici $\mu_{\mathrm{Hopf}} = 0.3$. A partir de ce point là, les parties réelles se séparent et l'une d'entre elles devient positive. La position d'équilibre statique devient alors instable et pour une petite perturbation le système se met à osciller.



(a) (b)

FIGURE 2.6 – Évolution des parties réelles (a) et des fréquences (b) en fonction du coefficient de frottement - Cas d'un amortissement faible

2.2 Modélisation du contact frottant

2.2.1 Formulation continue

Soit Ω un solide élastique défini dans $\mathbb{R}^3$ en contact frottant sur un support indéformable représenté Figure 2.7. $\partial\Omega$ désigne la surface continûment différentiable de Ω et $\mathbf{n}$ la normale sortante. Les efforts volumiques auxquels Ω est soumis sont notés $\mathbf{f}_v$. Les efforts $\mathbf{F}_d$ sont imposés sur la zone $\Gamma_F \subset \partial\Omega$ et les déplacements $\mathbf{u}_d$ sur la zone $\Gamma_u \subset \Omega$. Les équations du problème d'élasticité associé s'écrivent :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \rho.\ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{dans } \Omega \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad \text{sur } \Gamma_F \tag{2.11}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \Gamma_u \tag{2.12}$$

L'équation 2.9 est l'équation générale de la dynamique des milieux continus et 2.10 est la loi de Hooke qui relie le champ des petites déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ avec le tenseur de Hooke $\mathbf{A}$. L'équation 2.11 donne les conditions limites en efforts et l'équation 2.12 en déplacements. Γ_c représente la surface en contact avec le support.

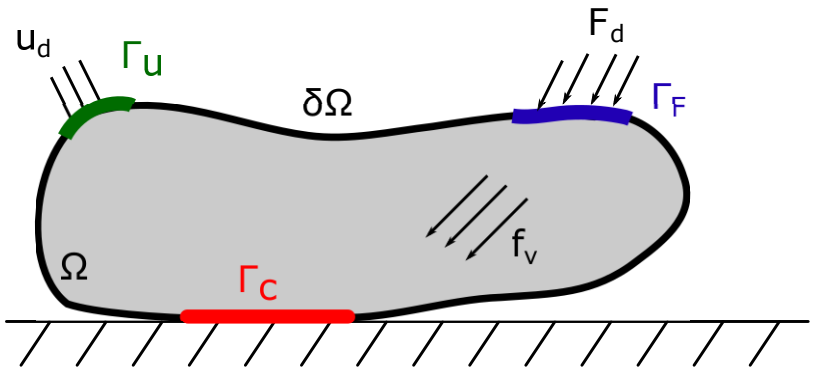
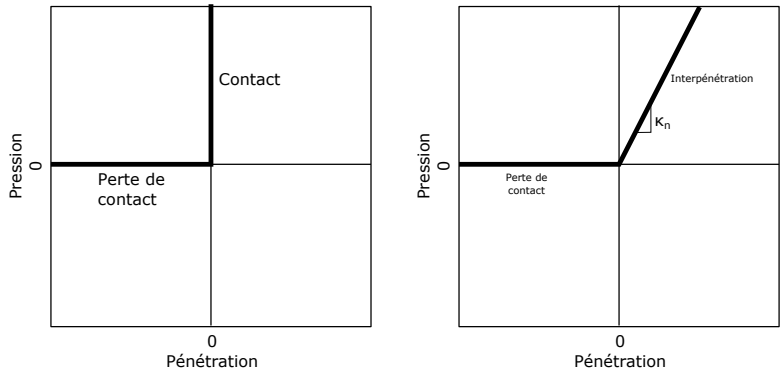


FIGURE 2.7 – Système mécanique



(a) Modèle de Signorini (b) Modèle de Signorini régularisé

FIGURE 2.8 – Contact unilatéral : Modèle de Signorini

2.2.2 Modélisation du contact unilatéral

Différentes modélisations du contact existent. L'une des plus anciennes et toujours largement utilisée est celle de Signorini. Sa modélisation intuitive du contact unilatéral exprime la non-interpénétration des deux corps en contact et le caractère répulsif des efforts normaux. Ces conditions s'écrivent de la façon suivante :

$$\delta_n \geq 0 \tag{2.13}$$

$$\mathbf{F}_n.\mathbf{n} \leq 0 \tag{2.14}$$

$$\delta_n.\|\mathbf{F}_n\| = 0 \tag{2.15}$$

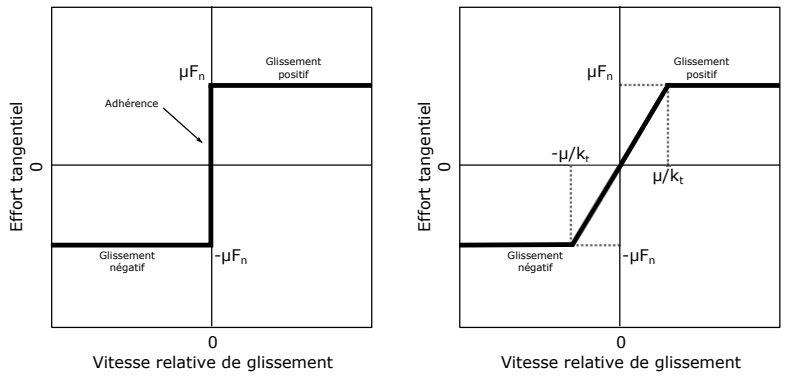
où δ_n représente le jeu entre deux points en contact et $\mathbf{F}_n$ les efforts normaux dirigés à l'intérieur de Ω. L'équation 2.13 traduit le fait que le jeu entre deux solides ne peut être négatif et qu'il n'y a donc aucune pénétration. La seconde équation 2.14 traduit le fait que les efforts normaux sont des efforts de compression dirigés à l'intérieur du solide. Enfin, la dernière équation 2.15, appelée équation de complémentarité, traduit le fait qu'un point à la surface de contact Γ_c est soit en contact ($\delta_n = 0$), soit en décollement ($\mathbf{F}_n = \mathbf{0}$). Ces conditions sont résumées Figure 2.8a.

Il est clair que cette loi est extrêmement non-linéaire et non-différentiable ce qui engendre des complications pour la résolution des équations du contact. A cause de ces difficultés, d'autres formulations ont été recherchées. Parmi les plus connues, le modèle de Hertz [63] s'intéresse au contact non-uniforme entre deux corps élastiques et prend en compte la déformation des surfaces. L'effort de réaction est alors proportionnel au cube de la racine du déplacement δ_n et des rayons de courbure des deux solides en contact :

$$\|\mathbf{F}_n\| \propto \delta_n^{3/2} \tag{2.16}$$

La loi de Hertz est dans les faits souvent traduite par une raideur de contact qui provient d'une linéarisation autour du point de fonctionnement.

D'autres approches consistent à régulariser la loi de contact unilatéral de Signorini [128] (Figure 2.8b). En autorisant une légère interpénétration, cela permet de prendre en compte l'écrasement des aspérités à la surface de contact. Cependant, il est nécessaire d'identifier les paramètres de régularisation, ce qui n'est pas toujours évident.



(a) Loi de Coulomb

(b) Loi de Coulomb régularisée linéairement

FIGURE 2.9 – Loi de frottement : modèle de Coulomb

2.2.3 Modélisation du frottement

Les premiers travaux sur le frottement datent de 1508 et ont été réalisés par Léonard de Vinci. Il montre que la force de frottement est proportionnelle à la force qui maintient les deux solides en contact. Il montre aussi que l'effort de frottement ne dépend pas de la surface de contact. En 1699, Amontons reprend ces travaux qui seront ensuite complétés par Coulomb. La loi de Coulomb donne la relation entre les efforts normaux $\mathbf{F}_n$ et les efforts de frottement tangents $\mathbf{F}_t$ à la surface de contact. Ces deux efforts sont reliés par le coefficient de frottement μ de la façon suivante :

$$\|\mathbf{F}_t\| \leq \mu\|\mathbf{F}_n\| \Leftrightarrow \begin{cases} \|\mathbf{F}_t\| = \mu\|\mathbf{F}_n\| \text{ glissement entre les deux solides} \\ \|\mathbf{F}_t\| < \mu\|\mathbf{F}_n\| \text{ adhérence entre les deux solides} \end{cases} \tag{2.17}$$

Cette loi est représentée Figure 2.9a. Il est clair qu'elle est non-régulière et non-univoque. Par ailleurs, elle lie l'effort tangentiel à la vitesse relative entre les deux solides. Cette loi peut être schématisée à l'aide d'un cône, appelé cône de frottement et représenté Figure 2.10. Tant que la résultante des efforts $\mathbf{r} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$ se trouve à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet $\arctan(\mu)$, alors il y a adhérence. Lorsque la résultante est sur les bords du cône, un glissement apparait. La vitesse de glissement v_t est opposée aux efforts tangentiels.

Afin de palier le problème de non-régularité de la loi, quelques méthodes de régularisation sont employées. Parmi les plus courante : les fonctions de Norton-Hoff, arctangente ou linéaire. Le dernier cas de figure est représenté Figure 2.9b. Comme vu précédemment, il est possible de trouver des lois de frottement avec un coefficient qui dépend de différents paramètres, tels que la vitesse relative de glissement ou la température. Cependant, les résultats obtenus jusqu'à présent dans la littérature, permettent de justifier l'utilisation d'un coefficient de frottement constant en première approche dans notre contexte.

2.2.4 Formulation variationnelle

Une formulation variationnelle peut être utilisée afin de résoudre le problème présenté. Pour cela, on introduit l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles $U = \{\mathbf{u}\,,\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u\}$ et l'espace $U_0 = \{\mathbf{u}\,,\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\}$. Il s'agit alors de déterminer le champ de déplacements $\mathbf{u} \in U$ et les efforts $\mathbf{r} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t$ de contact tels que :

$$\int_\Omega \rho\tilde{\mathbf{u}}.\ddot{\mathbf{u}}d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})d\Omega - \int_{\Gamma_F} \tilde{\mathbf{u}}.\mathbf{F}_d dS - \int_\Omega \tilde{\mathbf{u}}.\mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\Gamma_c} \tilde{\mathbf{u}}.\mathbf{r}dS = 0\ \forall\tilde{\mathbf{u}} \in U_0 \tag{2.18}$$

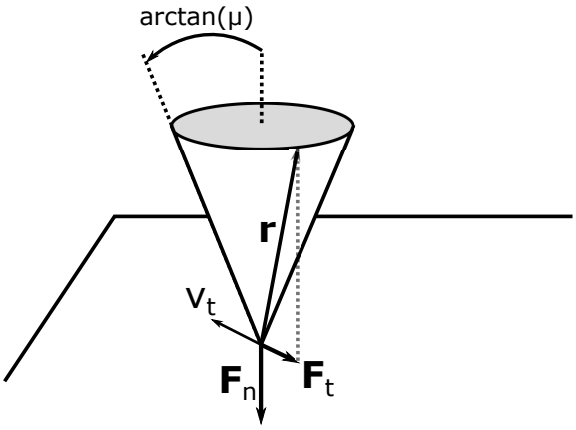


FIGURE 2.10 – Cône de Coulomb

Et qui vérifient les équations de contact de Signorini (2.13,2.14,2.15) et la loi de Coulomb 2.17. La gestion du contact frottant peut se faire avec une méthode de pénalité, qui autorise une légère interpénétration en ajoutant une raideur de contact, ou avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange [35, 129].

2.3 Stabilité des systèmes dynamiques

Introduction

L'objectif de cette partie est de présenter les notions nécessaires à l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. En effet, les systèmes dynamiques peuvent avoir plusieurs types de solutions attirées ou non par des bassins d'attraction. Lors d'une variation d'un ou de plusieurs paramètres du système, les caractéristiques des solutions peuvent évoluer et des phénomènes de bifurcation peuvent émerger. Il s'agit ici de donner la caractérisation mathématique de ces notions de stabilité et de bifurcation.

Pour cela, on considère un système dynamique non-linéaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \tag{2.19}$$

avec $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ une fonction de la classe C^1. Le point représente la dérivée par rapport au temps et μ est un paramètre de contrôle du problème. Si le paramètre temps t apparait de façon explicite dans l'équation 2.19, alors le système est dit non-autonome, sinon il est dit autonome.

Définition 1. Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1 telle que :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \tag{2.20}$$

On note $\phi(t, \mathbf{x}_{\text{init}}, \mu)$ la solution de l'équation différentielle telle que $\phi(0, \mathbf{x}_{\text{init}}, \mu) = \mathbf{x}_{\text{init}}$. Cette solution est définie sur un intervalle de temps maximal $J_\mu(\mathbf{x}_{\text{init}}) \subset \mathbb{R}$. Soit l'ensemble $W_\mu = \left\{(t, \mathbf{x}_{\text{init}}) \in \mathbb{R} \times \Omega, t \in J_\mu(\mathbf{x}_{\text{init}})\right\}$. On définit alors l'application ϕ_μ :

$$\phi_\mu : \begin{array}{ccc} W_\mu & \rightarrow & \Omega \\ (t, \mathbf{x}_{\text{init}}) & \rightarrow & \phi(t, \mathbf{x}_{\text{init}}, \mu) \end{array} \tag{2.21}$$

L'application ϕ_μ est appelée *flot* du système différentiel. On note $\phi_\mu(t, \mathbf{x}_{\text{init}}) = \phi_{\mu,t}(\mathbf{x}_{\text{init}})$. Le flot est dit complet si $W_\mu = \mathbb{R} \times \Omega$. Le flot vérifie la propriété suivante : $\phi_{\mu,s+t}(\mathbf{x}_{\text{init}}) = \phi_{\mu,s}(\phi_{\mu,t}(\mathbf{x}_{\text{init}}))$.

Quatre grandes familles de solutions existent pour ce type de problème, pour chaque type de solution, les définitions et les méthodes permettant d'analyser la stabilité du système sont spécifiques. On s'attardera dans cette partie aux cas des points fixes et des solutions périodiques.

2.3.1 Les différents types de solution

Point fixe

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que :

$$f(\mathbf{x}_0, \mu_0) = \mathbf{0} \tag{2.22}$$

alors $\mathbf{x}_0$ est appelé point fixe. Cette solution correspond au comportement statique des structures. Dans la suite, on considèrera que la solution $\mathbf{x}_0$ est obtenue pour $t = t_0 = 0$. $\mathbf{x}_0$ est aussi appelé point d'équilibre, zéro ou point stationnaire.

Solution périodique

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{+}$ tel que :

$$\mathbf{x}(t+\mathrm{T}) = \mathbf{x}(t) \text{ et } \forall \tilde{\mathrm{T}} \in]0, \mathrm{T}[, \forall t \in \mathbb{R}^{+}, \mathbf{x}(t+\tilde{\mathrm{T}}) \neq \mathbf{x}(t) \tag{2.23}$$

alors $\mathbf{x}$ est une solution périodique de 2.19. Dans l'espace des phases, ce type de solution donne des trajectoires fermées appelées *cycles limites*. T est la période de la solution, et $f = 1/\mathrm{T}$ sa fréquence.

Solution quasi-périodique

Une solution quasi-périodique est caractérisée par au moins deux fréquences incommensurables (i.e. dont le rapport n'est pas rationnel). Une solution quasi-périodique est dite *k-périodique* si elle est caractérisée par k fréquences incommensurables. La solution peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(f_1 t, f_2 t, \ldots, f_k t)$. L'analyse de ce type de solution nécessite d'utiliser des outils tels que les portraits de phases ou les sections de Poincaré.

Solution chaotique

Ce type de solution est complexe à caractériser et aucune définition précise existe [101]. Une réponse chaotique peut être définie comme une réponse bornée qui n'est pas un point fixe, ni une solution périodique, ni une solution quasi-périodique. Elle est aussi très sensible aux conditions initiales et une perturbation aussi infime soit-elle en entrée, peut être très vite amplifiée en sortie. Cet effet est connu sous le nom d'*effet papillon*.

2.3.2 Stabilité des points fixes : stabilité au sens de Lyapunov

Cette partie présente la définition de la stabilité pour le cas particulier des points fixes ainsi que des méthodologies permettant de statuer sur leur stabilité. L'évolution des propriétés de stabilité peut donner lieu à des bifurcations de différentes natures qui sont décrites ici.

Définition et classification des points fixes

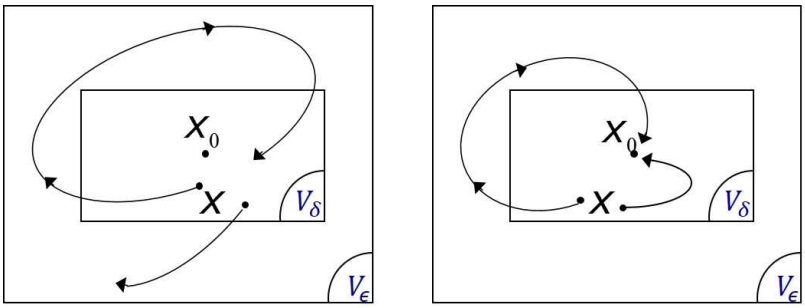
Définition 2 (**Stabilité d'un point fixe au sens de Lyapunov**)**.** Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ une solution de type point fixe de l'équation 2.19, alors on dit que $\mathbf{x}_0$ est :

- stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0\,, \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$,
- asymptotiquement stable si $\mathbf{x}_0$ est stable et que $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$,
- instable sinon.

Cette définition permet de formaliser la notion de stabilité dans le cas des points fixes. Un point fixe sera dit stable si en considérant une perturbation δ située dans un voisinage V_δ autour de $\mathbf{x}_0$, alors la solution perturbée $\mathbf{x}(t)$ restera dans un voisinage V_ϵ de $\mathbf{x}_0$ pour tout t (Figure 2.11a). Si de plus, la solution perturbée $\mathbf{x}$ converge vers $\mathbf{x}_0$, alors le point fixe est dit asymptotiquement stable (Figure 2.11b).

Conclure sur la stabilité globale d'un système est peu aisé [101]. Pour cette raison, on se limite souvent à l'analyse de la stabilité locale autour d'une solution $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$. Une légère perturbation $\boldsymbol{\epsilon}$ est injectée dans le système, la solution s'écrit alors : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\epsilon}$ et l'équation 2.19 devient :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = f(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\epsilon}, \mu_0) \tag{2.24}$$



(a) Point fixe stable (b) Point fixe asymptotiquement stable

FIGURE 2.11 – Stabilité des points fixes au sens de Lyapunov

En supposant f de classe C^1, le développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0}(f)\boldsymbol{\epsilon} \tag{2.25}$$

Avec $\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0}$ la matrice Jacobienne de f au point $(\mathbf{x}_0,\mu_0)$ définie de la façon suivante :

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_{2n}} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

L'équation 2.25 est une équation différentielle linéaire du premier ordre. En notant $\tilde{\mathbf{x}}_0$ la condition initiale en $t_0 = 0$, les solutions s'écrivent :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\mathbf{x}}_0 e^{\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0} t} \tag{2.27}$$

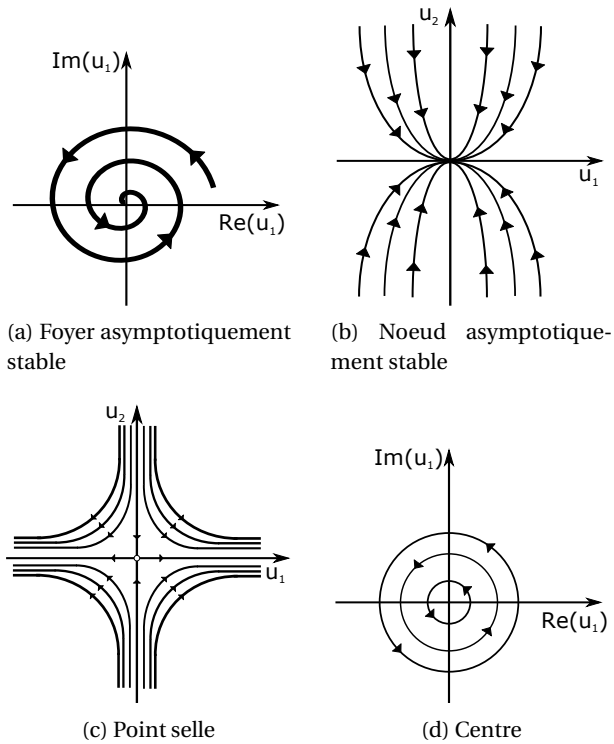
En notant $\boldsymbol{\lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres λ_j de $\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0}$ et $\boldsymbol{\Phi}$ la matrice des vecteurs propres, on a : $\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\mathbf{x}}_0 e^{\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0} t} = \tilde{\mathbf{x}}_0 \boldsymbol{\Phi} e^{\boldsymbol{\lambda} t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}$. L'étude du signe des parties réelles des valeurs propres λ_j permet de conclure sur la stabilité du point fixe :

- $\forall j, \Re(\lambda_j) < 0$, alors le point fixe $\boldsymbol{x}_0$ est asymptotique stable, il est qualifié d'*attractif*,
- $\exists j, \Re(\lambda_j) > 0$, alors le point fixe est instable, il est qualifié de *répulsif*,
- $\forall j, \Re(\lambda_j) \leq 0, \exists i, \Re(\lambda_i) = 0$, alors il est stable, mais pas asympthotiquement.

Une classification des points fixes est possible en fonction des parties réelles des valeurs propres de $\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0}$. Tout d'abord, la distinction est faite entre les points hyperboliques et les points non-hyperboliques. Un point fixe est dit hyperbolique si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle non nulle. Inversement, il est dit non-hyperbolique si au moins l'une de ses valeurs propres a une partie réelle nulle. Quelques cas en dimension 2 sont illustrés Figure 2.12.

Cas des points fixes hyperboliques En fonction du signe des parties réelles des valeurs propres, une classification est possible :

- si $\forall j, \Re(\lambda_j) < 0$, alors il s'agit d'un *puits*. Si les valeurs propres sont complexes, on l'appellera *foyer stable* (Fig. 2.12a), si elles sont réelles, il s'agit d'un *nœud stable* (Fig. 2.12b),
- si $\forall j, \Re(\lambda_j) > 0$, alors il s'agit d'une *source*. Si les valeurs propres sont complexes, on qualifiera la source de *foyer instable*, si elles sont réelles de *nœud instable*,
- si $\exists (i,j), \Re(\lambda_j) > 0, \Re(\lambda_i) < 0$, alors il s'agit d'un point *selle* ou *col* (Fig. 2.12c).



(a) Foyer asymptotiquement stable

(b) Noeud asymptotiquement stable

(c) Point selle

(d) Centre

FIGURE 2.12 – Illustration des différents types de points fixes dans le cas de la dimension 2

Cas des points fixes non-hyperboliques S'il existe une ou plusieurs valeurs propres de $\mathbf{J}_{\boldsymbol{x}_0,\mu_0}$ à partie réelle nulle, trois cas sont observés :

— $\exists j, \Re(\lambda_j) > 0$, alors le point fixe est instable,

— $\forall j, \Re(\lambda_j) \leq 0, \exists i, \Re(\lambda_i) = 0$, alors le point est dit *marginalement stable*,

— $\forall j, \Re(\lambda_j) = 0, \forall j, \Im(\lambda_j) \neq 0$, alors le point est un *centre* (Fig. 2.12d).

D'après le théorème de Hartman-Grobman :

Théorème 1 (**Théorème de Hartman-Grobman**)**.** *Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point fixe hyperbolique de f, $\boldsymbol{J}$ la matrice Jacobienne de f en $\boldsymbol{x}_0$. Alors il existe* U *et* V *deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant $\boldsymbol{x}_0$ et* 0*, et un homéomorphisme h de* U *dans* V *tel que $h(\boldsymbol{x}_0) = 0$ et qui envoie bijectivement les trajectoires $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$ sur les trajectoire $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$ dans* $\mathrm{V} = h(\mathrm{U})$ *en conservant l'orientation donnée par t. Les flots de f et $\boldsymbol{J}$ sont dits topologiquement conjugués.*

Il vient que la stabilité du système non-linéaire 2.19 au voisinage du point hyperbolique $\mathbf{x}_0$ est équivalente à la stabilité du système linéarisé 2.25. L'étude de stabilité du système non-linéaire en un point d'équilibre $\mathbf{x}_0$ peut donc se faire en étudiant la stabilité du système linéarisé autour de ce point d'équilibre.

L'étude de la stabilité des point non-hyperboliques est beaucoup plus complexe et nécessite la prise en compte des termes d'ordre supérieur à 1 dans le développement de Taylor. Dans notre cas, nous nous intéressons à l'évolution de la stabilité du système lorsque différents paramètres varient. Ces points non-hyperboliques correspondent alors aux frontières de stabilité du système. L'intérêt de les étudier est donc relativement limité, d'autant plus qu'il est peu probable que le système dynamique ait exactement le jeu de paramètres correspondant. Le lecteur intéressé pourra se référer à [101] pour plus de détails.

Détermination du bassin d'attraction : fonctions de Lyapunov

La détermination du voisinage de $\mathbf{x}_0$ dans lequel le système est stable ne peut être faite en calculant uniquement les valeurs propres du système linéarisé à l'ordre 1. Pour faire cela, il est nécessaire de pousser l'analyse en introduisant les fonctions de Lyapunov. Elles permettent de déterminer le bassin d'attraction du point fixe $\mathbf{x}_0$, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales $(\mathbf{x}, \mu)$ qui ramènent le système f vers $\mathbf{x}_0$. Elles permettent aussi de statuer sur la stabilité des points non-hyperboliques.

Soit le système autonome $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu)$ défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbf{x}_0$ un point fixe. On considère la fonction $V : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur un voisinage $U \subset \Omega$ de $\mathbf{x}_0$. Sa dérivée est définie de la façon suivante :

$$\dot{V} : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \to & \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial x_j}.\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial V}{\partial x_j}.f_j(\mathbf{x}, \mu) \end{array} \tag{2.28}$$

Théorème 2 (**Hirsch et Smale, 1974**)**.** *Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point fixe de f. S'il existe une application $V : U \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage $U \subset \Omega$ de $\boldsymbol{x}_0$, différentiable sur $U \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ et telle que :*

— *V atteint son minimum dans U : $V(\boldsymbol{x}_0) = 0$ et $V(\boldsymbol{x}) > 0$ si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$,*

— *V est non croissante sur U : $\forall \boldsymbol{x} \in U, \dot{V} \leq 0$,*

Alors $\boldsymbol{x}_0$ est stable. Si V vérifie de plus :

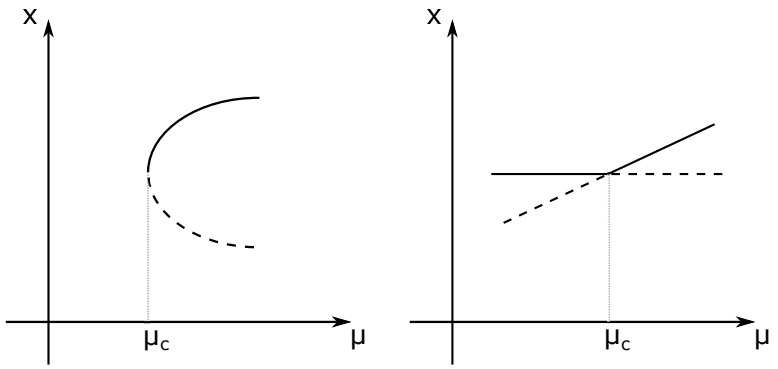
— *V strictement décroissante sur $U \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$: $\forall \boldsymbol{x} \in U \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}, \dot{V} < 0$,*

Alors $\boldsymbol{x}_0$ est asymptotiquement stable.

Les fonctions de Lyapunov sont souvent représentées à l'aide d'iso-surfaces définies par $\exists c > 0, \forall \mathbf{x}, V(\mathbf{x}) = c$. La condition sur la décroissance de V implique que si une trajectoire traverse l'iso-surface de valeur c, alors elle évolue dans un espace $U_c = \{\mathbf{x} \in \Omega, V(\mathbf{x}) \leq c\}$ et n'en sort pas. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, alors la trajectoire passe d'une iso-surface c_j à une iso-surface c_i avec $c_i \subset c_j$. Lorsque t tend vers l'infini, la trajectoire tend vers $\mathbf{x}_0$. Si l'inégalité n'est pas stricte, il n'y a aucune certitude sur la convergence de la trajectoire vers le point fixe $\mathbf{x}_0$. Elle reste cependant stable car elle reste contenue dans un voisinage de $\mathbf{x}_0$.

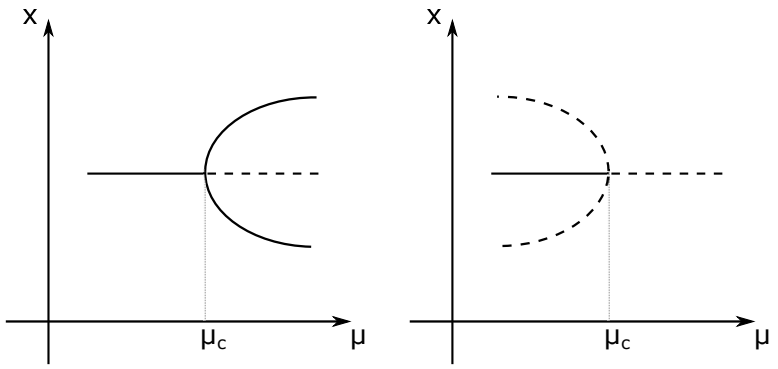
Bifurcations des point fixes

Les équations dynamiques des systèmes dépendent d'un certain nombre de paramètres qui peuvent être amenés à varier. Poincaré introduit le terme *bifurcation* pour désigner un changement qualitatif dans les caractéristiques d'un système, par exemple une modification du nombre ou du type de solution, sous la variation d'un ou plusieurs paramètres. Une bifurcation locale désignera un changement qualitatif autour d'un point fixe. L'étude des bifurcations est souvent réalisée sur un espace formé des variables d'état et des paramètres de contrôle du système. Un *point de bifurcation* correspond au point de cet espace où une bifurcation apparait. Lorsque les paramètres de contrôle évoluent, la localisation de ce point de bifurcation peut aussi évoluer, la courbe ainsi générée est appelée *courbe de bifurcation*. Cette évolution peut se faire de façon continue, on parle de *bifurcation continue*, ou de façon discontinue, on parle alors de *bifurcation discontinue ou catastrophique*. Ce type de bifurcation est subdivisé en deux sous-catégories : les bifurcations *dangereuses* ou *explosives*. Dans le cas d'une bifurcation dangereuse, le système saute d'un attracteur à un autre déconnecté du premier. Dans le cas de la bifurcation explosive, le système explose d'un attracteur à un autre attracteur plus grand qui contient l'ancien. Ce phénomène est réversible, et si le paramètre de contrôle évolue dans le sens



(a) Bifurcation col-noeud (saddle node)

(b) Bifurcation transcritique (transcritical)



(c) Bifurcation pitchfork sur-critique

(d) bifurcation pitchfork sous-critique

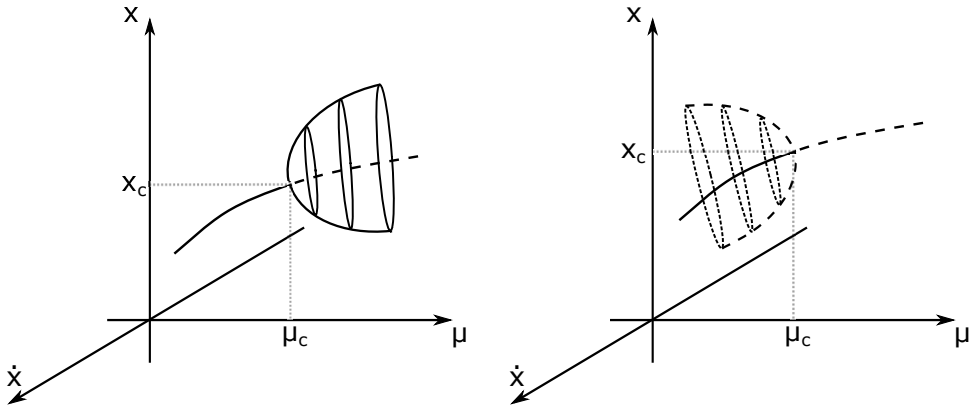
FIGURE 2.13 – Bifurcations statiques d'un point fixe : branche stable : ——— branche instable : - - - -

inverse alors le système explose du grand attracteur au petit.

Si pour une variation des paramètres de contrôle du système, un point fixe initialement hyperbolique devient non-hyperbolique et que le comportement du système change avant et après ce point, alors il s'agit d'un point de bifurcation. Plusieurs types de bifurcations existent :

- les bifurcations col-nœuds (*saddle-node*) : avant la bifurcation, deux points d'équilibre existent, l'un étant stable, l'autre non. Après la bifurcation, il n'y a plus de point d'équilibre (Fig. 2.13a),
- les bifurcations de fourche (*pitchfork*) : par exemple un équilibre stable peut donner naissance à deux équilibres stables. La transition peut se faire de façon sur-critique (i.e. de façon continue et prévisible, Fig. 2.13c) ou de façon sous-critique (i.e. discontinue avec parfois des phénomènes d'hystérésis, Fig. 2.13d),
- les bifurcations transcritiques (*transcritical*) : avant la bifurcation, deux branches existent (une stable et une instable), à la bifurcation elles échangent leur stabilité (Fig. 2.13b),
- les bifurcations de Hopf sur- ou sous-critique (Fig. 2.14).

Les trois premiers types de bifurcations sont des bifurcations statiques, c'est-à-dire que le système passe d'un point d'équilibre $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ à un autre point d'équilibre $(\tilde{\mathbf{x}}_c, \mu_c)$. Le cas de la bifurcation de Hopf est légèrement différent puisque le système passe d'un point d'équilibre $(\mathbf{x}_c, \mu_c)$ à un cycle limite pour $\mu > \mu_c$. Il s'agit d'un croisement entre une branche associée à des solutions fixes et une branche associée à des solutions périodiques. La bifurcation de Hopf est dite dynamique, elle est définie de la façon suivante :



(a) Bifurcation de Hopf sur-critique (b) Bifurcation de Hopf sous-critique

FIGURE 2.14 – Bifurcations de Hopf : branche stable : ——— branche instable : - - - -

Théorème 3 (**Hopf, 1942** [60]). *Soit le système différentiel* $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \mu)$ *définit sur* $\Omega \times \mathbb{R}$, *avec* $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$. *Le point* $(\boldsymbol{x}_c, \mu_c)$ *est un point de bifurcation de Hopf si :*

1. $(\boldsymbol{x}_c, \mu_c)$ *est un point fixe :* $f(\boldsymbol{x}_c, \mu_c) = \boldsymbol{0}$,
2. $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}_c, \mu_c}$ *possède une paire de valeurs propres* ($\lambda = \pm i\omega$) *imaginaires pures et que toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle non nulle,*
3. $\frac{\partial}{\partial \mu} Re(\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_c} \neq 0$

Alors il existe une unique variété de dimension 3 passant par $(\boldsymbol{x}_c, \mu_c)$ *dans* $\Omega \times \mathbb{R}$ *et un système régulier de coordonnées préservant les hyperplans à* μ *constant, dont le développement de Taylor à l'ordre 3 défini sur la variété centrale est de la forme* $\dot{r} = (d\lambda + ar^2)r, \dot{\theta} = \omega + c\lambda + br^2$ *en coordonnées polaires. Si* $a \neq 0$, *il existe une surface de solutions périodiques dans la variété centrale tangente quadratiquement avec les espaces propres de* $\lambda(\mu_c)$ *et* $\overline{\lambda}(\mu_c)$. *Si* $a < 0$ *les cycles limites sont stables, si* $a > 0$ *ils sont répulsifs.*

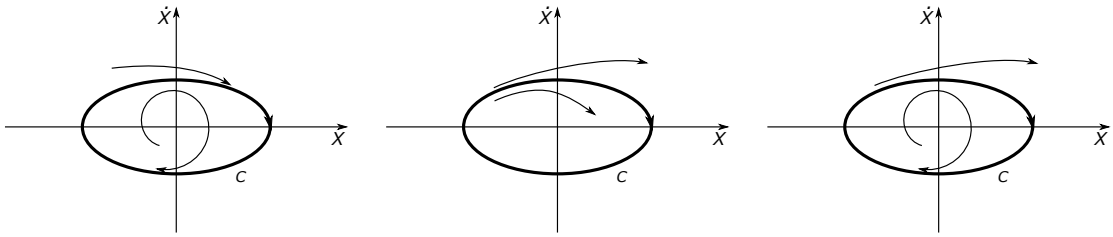
La troisième condition impose une contrainte sur la transversalité de l'axe imaginaire pour la partie réelle de la valeur propre λ. Au point de bifurcation de Hopf, il y a perte de stabilité du système, une solution périodique apparait ou disparait. Si pour $\mu > \mu_c$ il existe des solutions stables, alors la bifurcation est dite sur-critique, sinon elle est dite sous-critique.

2.3.3 Stabilité des solutions périodiques

Les solutions périodiques présentent des caractéristiques différentes des points fixes. Afin d'étudier leur stabilité, il est nécessaire d'utiliser des outils appropriés. Une solution périodique est caractérisée par sa période T et sa fréquence $f = 1/T$. Elle est associée à une trajectoire fermée dans l'espace des phases, appelée *cycle limite* et notée Γ. Ce cycle limite sera qualifié de stable si toute autre trajectoire initiée à proximité de celui-ci converge vers ce dernier. A l'inverse, si les trajectoires initiées à proximité du cycle limite s'en éloignent, alors il est dit instable. Il est aussi possible d'avoir des trajectoires qui s'éloignent d'un côté du cycle et se rapprochent de l'autre, le cycle est alors semi-stable, dans les faits il est instable. Ces différents cas sont illustrés Figure 2.15.

Définitions de la stabilité

Comme pour les points fixes, il est possible de définir la stabilité des orbites périodiques au sens de Lyapunov :



(a) Cycle limite stable (b) Cycle limite instable (c) Cycle limite semi-stable

FIGURE 2.15 – Cycles limites stable, instable et semi-stable

Définition 3. Soit ϕ_t le flot associé à f et $\mathbf{x}_0$ une solution périodique du système 2.19, alors on dit que $\mathbf{x}_0$ est :

- stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(0)\| \leq \delta \Rightarrow \forall t > 0, \|\phi_{\mu,t}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0(t)\| \leq \epsilon$
- asymptotiquement stable si $\mathbf{x}_0$ est stable et que $\exists \eta > 0, \forall \mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|\phi_{\mu,t}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0$
- instable sinon

Nayfeh [101] montre les limites de cette définition dans le cas des solutions périodiques qui peut parfois amener à des conclusions erronées sur la stabilité. On lui préfère souvent la définition de la stabilité au sens de Poincaré.

Définition 4. Soit $\mathbf{x}_0$ une solution périodique du système 2.19, alors on dit que $\mathbf{x}_0$ est :

- stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x}, \|\mathbf{x}_0(0) - \mathbf{x}(t)\| < \delta \Rightarrow \exists (t_1, t_2), \|\mathbf{x}_0(t_1) - \mathbf{x}(t_2)\| \leq \epsilon$,
- asymptotiquement stable si $\mathbf{x}_0$ est stable et que $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{x}_0$ lorsque t tend vers l'infini,
- instable s'il n'est pas stable.

A la différence de Lyapunov, cette définition propose de comparer la proximité des orbites dans l'espace des phases. Ainsi, certaines orbites peuvent être stables au sens de Poincaré, mais instables au sens de Lyapunov. Ces définitions ne fournissent pas de méthode explicite permettant de statuer sur la stabilité d'une solution périodique, il faut pour cela utiliser d'autres approches. Deux d'entre elles sont présentées ici, à savoir une méthode basée sur la théorie de Floquet qui consiste à étudier la stabilité des équations linéaires, et une seconde basée sur les applications de Poincaré qui se résume à l'étude de la stabilité des points fixes.

Théorie de Floquet

La méthode de Floquet consiste à étudier la stabilité des équations linéarisées du système. Ainsi, on considère $\mathbf{x}_0$ une solution périodique du système autonome :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mu) \ , \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \tag{2.29}$$

On note T sa période. Si une légère perturbation $\mathbf{y}$ du système est considérée alors on a :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t) \tag{2.30}$$

En remplaçant 2.30 dans 2.29 et en supposant $f \in C^1(\Omega)$, alors l'expansion au premier ordre de la série de Taylor en $\mathbf{x}_0$ donne :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2) \tag{2.31}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\dot{\mathbf{y}} \simeq \mathbf{A}(t)\mathbf{y} \tag{2.32}$$

où **A** est la matrice des dérivées partielles d'ordre 1 de f. L'analyse de stabilité est locale puisqu'elle est uniquement valable autour de la linéarisation. La matrice **A** est périodique, de période T qui peut ne pas être la période minimale. Le système 2.32 admet $2n$ solutions $\left(\mathbf{y}_i\right)_{i\in[1,\dots 2n]}$ qu'on peut écrire sous forme d'une matrice : $\mathbf{Y}(t) = \left[\mathbf{y}_1(t)\mathbf{y}_2(t)\dots\mathbf{y}_{2n}(t)\right]$. Il est clair que **Y** vérifie 2.32. En considérant la matrice $\mathbf{Y}(t+\mathrm{T})$, on montre aisément qu'elle vérifie aussi 2.32. Or 2.32 possède uniquement $2n$ solutions linéairement indépendantes, qui sont les $\left(\mathbf{y}_i\right)_{(i)}$, la matrice $\mathbf{Y}(t+\mathrm{T})$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces fonctions, à savoir :

$$\mathbf{Y}(t+\mathrm{T}) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{\Xi} \tag{2.33}$$

où $\mathbf{\Xi}$ est une matrice constante de taille $2n \times 2n$. La matrice $\mathbf{\Xi}$ n'est pas unique et dépend de la base de $\left(\mathbf{y}_i\right)_{i\in[1,\dots 2n]}$ choisie. En considérant les conditions initiales $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$, avec **I** la matrice identité, il vient :

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{Y}(\mathrm{T}) \tag{2.34}$$

Ainsi définie, la matrice $\mathbf{\Xi}$ est appelée *matrice de monodromie*. Elle donne la transformation entre un vecteur initial de Ω et un autre vecteur de Ω à un instant $t = \mathrm{T}$, ou encore, elle donne la transition entre l'instant t et l'instant $t+\mathrm{T}$ des solutions périodiques. Les valeurs propres ρ_j de $\mathbf{\Xi}$ sont appelées *multiplicateurs de Floquet*, elles sont uniques pour une matrice **A**. Chaque valeur propre ρ_j traduit la convergence (ou la divergence) locale de l'orbite fermée dans une direction donnée. Dans le cas d'une solution périodique autonome, l'un des coefficients de Floquet est toujours égal à 1. En effet, une perturbation d'une solution périodique dans une direction tangente à son orbite est aussi une solution périodique dans le cas d'un problème autonome. La stabilité locale du cycle limite est déterminée à l'aide de la position des (ρ_j) dans le cercle unité. Si un unique coefficient est situé sur le cycle unité, alors le cycle est appelé cycle périodique hyperbolique. Il peut être stable ou instable, il sera :

— stable si l'ensemble des coefficients de Floquet sont situés à l'intérieur du cercle unité : $\forall j, |\rho_j| < 1$. Il sera qualifié d'*attracteur périodique*,

— instable s'il existe un coefficient de Floquet situé à l'extérieur du cercle unité : $\exists j, |\rho_j| > 1$. Il est qualifié de cycle limite instable de type *selle*. Si tous les coefficients excepté celui égal à 1 sont à l'extérieur du cercle unité, le cycle est qualifié de *répulseur périodique*.

Dans le cas où au moins deux des coefficients de Floquet sont situés sur le cercle unité, alors le cycle limite est une solution périodique non-hyperbolique. Si au moins un autre coefficient est à l'extérieur du cercle unité, alors la solution est instable. Si au contraire, l'intégralité des autres coefficients sont situés à l'intérieur du cercle, il est impossible de statuer sur la stabilité et il est nécessaire d'effectuer une analyse non-linéaire en considérant des termes de plus haut degré dans le développement de Taylor [101].

Section de Poincaré

Une section de Poincaré est une hypersurface transverse au flot d'un système d'équations dans l'espace des phases. Soit un système autonome $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x},\mu)$, avec $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, Γ une orbite fermée de ce système et un point **p** élément de Γ. On peut définir l'hyperplan H tel que $f(\mathbf{p},\mu) \notin \mathrm{H}$, c'est-à-dire $f(\mathbf{p},\mu).\overrightarrow{n} \neq 0$ avec $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à H. Soit $\left(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_{2n-1}\right)$ une base de H et la section transversale S_ϵ de Γ au point **p** définie par

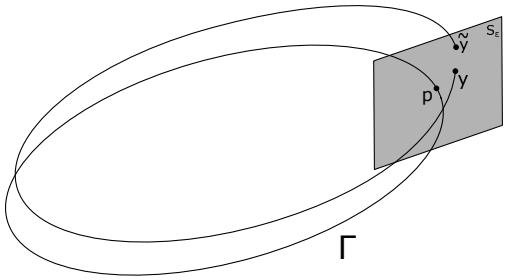


FIGURE 2.16 – Section de Poincaré

$S_\epsilon = \{\mathbf{y} \in \Omega, \mathbf{y} = \mathbf{p} + \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \ldots + \alpha_{2n-1}\mathbf{g}_{2n-1}\ , \forall i, 0 \leq |a_i| \leq \epsilon\}$. $\mathbf{p}$ est l'unique point d'intersection entre H et Γ.

On cherche à caractériser la stabilité de l'orbite périodique Γ initialisée en $\mathbf{p}$ en $t = 0$. Si l'on considère un point $\mathbf{y}$ proche de $\mathbf{p}$ initialisé dans H en $t = 0$, alors après un certain temps minimal $\tau_\mathbf{y}$, la trajectoire initialisée en $\mathbf{y}$ revient sur H en $\tilde{\mathbf{y}}$ (Figure 2.16). On note P l'application :

$$\mathrm{P} : \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \rightarrow & \mathrm{H} \\ \mathbf{y} & \rightarrow & \mathrm{P}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{y}} = \phi_{\tau_\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \end{array} \tag{2.35}$$

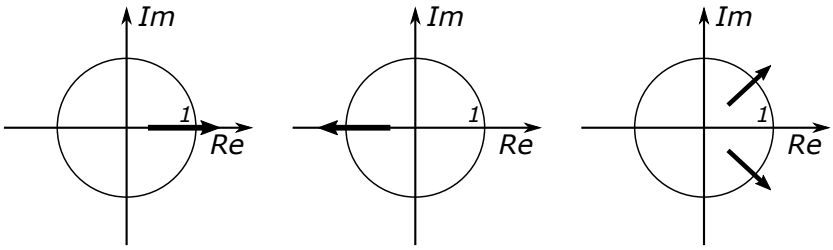
P est appelée application de Poincaré ou de premier retour. Il apparait que $\tau_\mathbf{y} = \mathrm{T}$. Par ailleurs, il est évident que $\mathbf{p}$ est un point fixe de P puisqu'il appartient à une orbite fermée. Par ailleurs, la stabilité du point fixe $\mathbf{p}$ reflète la stabilité du cycle limite Γ en $\mathbf{p}$.

L'utilisation des sections de Poincaré permet de réduire l'étude de la stabilité de cycle limite à l'étude de la stabilité de points fixes. Dans le cas d'un système périodique de période T, la section de Poincaré correspondra à un unique point. Dans le cas d'un système multi-périodique avec des fréquences commensurables, la section de Poincaré est constituée d'un ensemble fini de points, correspondant au nombre de fréquences mises en jeu. Dans le cas non-commensurable, elle correspond à une courbe fermée.

Bifurcation des solutions périodiques

Lorsqu'un cycle limite initialement stable devient instable, la façon dont ses coefficients de Floquet évoluent permet de statuer sur le type de bifurcations. Différents scénarios existent : un coefficient quitte le cercle unité en 1, un coefficient quitte le cercle en -1 ou une paire de multiplicateurs conjugués quittent le cercle simultanément (Figure 2.17)[101].

Si un coefficient de Floquet franchit le cercle unité en $+1$, la bifurcation est de type *col-nœud* et apparait lorsqu'une branche instable converge vers une branche stable pour le jeu de paramètres μ_c. Si la solution possédait une propriété de symétrie avant la bifurcation, alors la bifurcation sera de type *symmetry-breaking* sur-critique ou sous-critique selon que des solutions stables non-symétriques coexistent avec la branche de solutions instables symétriques ou non (Fig. 2.18a et Fig 2.18b). Si la solution ne possédait pas de propriété de symétrie, alors la bifurcation est de type *cyclic-fold* ou *transcritique*. Dans le cas de la bifurcation cyclic-fold, la branche stable et la branche instable convergent vers la même solution en μ_c (Fig. 2.18c). Il n'y a ensuite plus de solution périodique stable, la bifurcation est discontinue et *catastrophique* de type *explosive* ou *dangereuse*. Dans le premier cas, le système va vers un attracteur incluant le précédent. Ce nouveau cycle limite est appelé *cycle limite fantôme*. La seconde correspond au cas où le système va vers



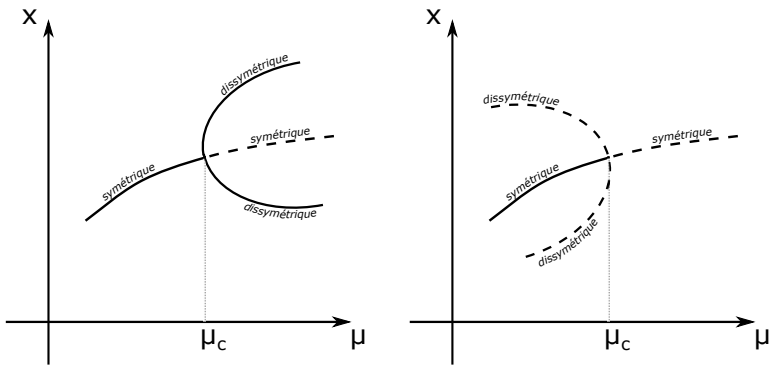
(a) Noeud col, transcritique, symmetry-breaking (b) Period-doubling (c) Neimark

FIGURE 2.17 – Type de bifurcations en fonction de la variation des coefficients de Floquet

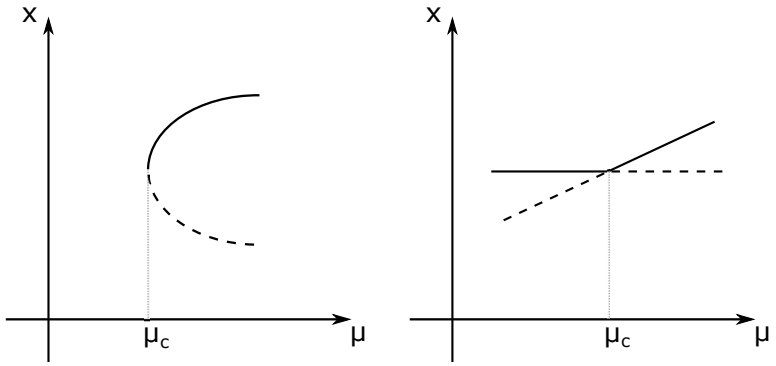
un nouvel attracteur distant, il peut être ponctuel, périodique ou apériodique. Dans le cas de la bifurcation transcritique, la branche instable et la branche stable échangent leurs propriétés de stabilité au point de bifurcation (Fig. 2.18d).

Si un coefficient de Floquet quitte le cercle unité au point -1, alors la bifurcation est de type dédoublement de période (*period-doubling* ou *flip bifurcation*). Au point de bifurcation, la branche de solution T-périodique croise une branche de solutions 2T-périodique. La branche T-périodique devient instable après la bifurcation. Si la branche 2T-périodique est stable après la bifurcation, alors cette dernière est sur-critique et le système devient 2T-périodique. A contrario, si la branche est instable après la bifurcation, alors la bifurcation est sous-critique.

Si un couple de coefficients de Floquet conjugués franchissent le cercle unité simultanément, la bifurcation est dite de *Neimark-Sacker* ou *secondaire de Hopf*. Une branche de solutions périodiques croise une branche de solutions périodiques d'une autre période. La nouvelle solution peut être périodique ou pseudo-périodique en fonction du rapport entre les périodes des deux branches qui se croisent. Comme pour les bifurcations de Hopf dans le cas des points fixes, il existe des bifurcations sur- et sous-critiques.



(a) Symmetry-breaking sur-critique (b) Symmetry-breaking sous-critique



(c) Cyclic-fold (d) Bifurcation transcritique

FIGURE 2.18 – Bifurcations possibles lorsqu'un coefficient de Floquet traverse le cercle unité en +1 : branche stable : ——— branche instable : - - - -

2.4 Modélisation des incertitudes

L'objectif de cette partie est de présenter les différents types d'incertitudes pouvant exister dans les modèles et les classifications de ces incertitudes. Une fois ces incertitudes quantifiées, différentes stratégies peuvent être mises en place pour les propager au sein des modèles afin d'aboutir à l'analyse statistique de la sortie du modèle. Dans un premier temps, quelques éléments mathématiques sont donnés pour poser le contexte puis différentes méthodes de propagation de l'incertitude sont présentées.

2.4.1 Incertitudes : sources et modélisation possible

L'ingénieur doit faire face à des phénomènes et à des systèmes où l'ensemble des paramètres ne sont pas nécessairement connus avec précision. L'aspect déterministe des modèles numériques favorise une vision *une entrée - une sortie* et les paramètres sont souvent résumés à leur valeur moyenne ou à leur valeur la plus probable. Pour des paramètres très influents, des études paramétriques sont parfois envisagées. Cependant, il s'avère que la prise en compte des incertitudes sur certains paramètres change significativement la réponse du système et peut conduire à l'amélioration notable de la qualité de la prédiction [137]. Différentes méthodes existent pour quantifier et propager l'incertitude dans des modèles. Avant de pouvoir propager l'incertitude, il est nécessaire de l'identifier et de la quantifier. Parmi les incertitudes les plus courantes auxquelles l'ingénieur doit faire face, se trouvent :

— *les paramètres incertains* : il s'agit des paramètres d'entrée décrivant un modèle numérique dont la valeur exacte est inconnue : par exemple dans notre contexte, le

coefficient de frottement à l'interface plaquette disque,

— *les variables paramétriques* : il s'agit ici des paramètres du modèle qui peuvent varier par exemple : le module du disque de frein est décrit par une unique valeur E_{disque} dans les modèles éléments finis, mais à cause des tolérances de fabrication ce paramètre peut dévier légèrement de cette valeur,

— *le biais du modèle* : l'incertitude est liée au manque de connaissance du modèle physique et du fait que les équations utilisées sont des approximations de la réalité,

— *l'incertitude algorithmique ou numérique* : il s'agit de l'incertitude sur la qualité de la résolution effectuée numériquement,

— *l'incertitude expérimentale* : elle vient de la variabilité des mesures expérimentales,

— *l'incertitude d'interpolation* : lorsque peu de données sont disponibles, il est courant de faire des interpolations afin de prédire les réponses aux points où les résultats ne sont pas connus. L'incertitude d'interpolation vient de ce manque d'information initiale.

Ceci montre la multitude d'incertitudes pouvant intervenir dans le cadre d'un problème d'ingénierie, d'où l'importance d'identifier au préalable les différentes sources et leurs natures. Cette première étape permet de classer les différentes incertitudes en fonction de leur importance, ce qui permettra pour la suite de savoir laquelle il est primordial de modéliser en priorité.

De façon plus générale, les incertitudes sont classées en deux catégories [95, 113, 122] : les incertitudes *aléatoires* et les incertitudes *épistémiques*. On appelle incertitude aléatoire (aussi appelée incertitude irréductible, incertitude stochastique ou variabilité) l'incertitude liée au caractère aléatoire inhérent à la population étudiée. Cette variabilité peut être liée à des variations spatiales ou temporelles. Ce type d'incertitude est généralement relié à une densité de probabilité (PDF) qui décrit les probabilités d'occurrence des échantillons dans une population. L'ajout d'échantillons ici ne permet pas de réduire l'incertitude mais permet de mieux connaître la PDF. L'incertitude épistémique (aussi appelée incertitude réductible) est l'incertitude liée au manque de connaissance. Si du savoir est ajouté, avec des expériences, des approximations numériques plus précises, des modèles physiques plus précis, alors l'incertitude est réduite. Le coût de la réduction de cette incertitude est souvent très élevé en temps et/ou en moyens. L'incertitude épistémique peut être représentée avec un intervalle sans PDF associée, chaque valeur est alors une réalisation possible ; ou avec une PDF qui représente le degré de confiance dans l'analyse et non plus la probabilité d'occurrence. Faire la différence entre les deux types d'incertitudes n'est pas toujours facile dans le domaine de l'ingénierie et dépend souvent du contexte.

Dans une démarche de quantification et de propagation de l'incertitude, la première étape consiste à identifier et à caractériser les différentes incertitudes et leur nature. En fonction de cette dernière, certaines méthodes sont plus adaptées que d'autres pour les propager au sein du modèle. Lorsque le système possède à la fois des incertitudes épistémiques et aléatoires, il est nécessaire de les traiter indépendamment [113, 122]. Pour chaque échantillon des incertitudes épistémiques, il est nécessaire de propager les incertitudes aléatoires dans le modèle. Les méthodes employées dépendent du type d'analyse à réaliser. En effet, la propagation et la quantification d'incertitudes permettent :

— l'analyse du premier et du second moment : détermination de la moyenne et de l'écart type de la réponse,

— l'analyse de sensibilité : caractérisation de l'impact de chaque variable d'entrée sur la variation de la sortie,

— l'analyse de fiabilité : détermination de la probabilité qu'une réponse dépasse un certain seuil,

— l'analyse de distribution : détermination de la PDF de la sortie.

Deux grandes familles de méthodes existent afin de réaliser des études de propagation d'incertitude : les méthodes stochastiques et les méthodes non-stochastiques. Les premières utilisent le fait que certaines variables sont des variables aléatoires définies avec une loi de probabilité. Les secondes utilisent plutôt le fait que les variables appartiennent à un intervalle ou qu'elles ne sont pas parfaitement définies. Ces deux familles de méthodes impliquent d'identifier l'incertitude en amont du modèle, puis de la propager à l'intérieur de celui-ci. Si les coûts numériques associés sont élevés, certaines de ces études peuvent être compliquées à réaliser. Une autre approche peut alors être envisagée afin de pouvoir prendre en compte l'incertitude dans les modèles : l'utilisation des méthodes de méta-modélisation. Il s'agit dans ce cas là de remplacer le modèle par un autre modèle mathématique beaucoup plus simple au coût numérique beaucoup plus faible sur lequel il est possible d'effectuer de nombreux calculs.

Tout ceci montre que l'interprétation des sources ainsi que les choix de modélisation des incertitudes peuvent avoir un impact de premier ordre dans une étude d'ingénierie.

Dans la suite, le modèle mathématique du système physique est décrit par une fonction déterministe $\mathscr{M} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ qui peut être vue comme une boîte noire (*black-box*). Le modèle dépend d'un ensemble de paramètres d'entrée $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_p\}$, qui représente les conditions initiales, les paramètres matériaux, le coefficient de frottement, etc. A chaque $\mathbf{x}$ est associé un ensemble de paramètres de sortie $\mathbf{y} = \mathscr{M}(\mathbf{x}) = \{y_1, \ldots, y_q\}$, qui peut représenter des déplacements, des fréquences propres etc. Dans notre contexte, l'entrée $\mathbf{x}$ est incertaine. $\mathbf{X}(\omega)$ désigne le vecteur aléatoire d'entrée ($\omega \in \Omega$) et $f_{\mathbf{X}}$ la PDF associée. La sortie est aussi une variable aléatoire $\mathbf{Y}(\omega) = \mathscr{M}(\mathbf{X}(\omega))$. L'objectif est de pouvoir caractériser l'incertitude sur $\mathbf{Y}$ en connaissant celle sur $\mathbf{X}$.

2.4.2 Quelques notions mathématiques

Quelques définitions et propriétés concernant les variables probabilistes sont données ici.

Définition 5. Soit Ω un ensemble quelconque. On dit que la famille $\mathscr{F}$ de parties de Ω est une tribu ou une σ-algèbre sur Ω si :

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $\mathscr{F}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathscr{F}, \overline{A} \in \mathscr{F}$,
3. $\mathscr{F}$ est stable par réunion dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{F}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est élément de $\mathscr{F}$.

Définition 6. Le couple $(\Omega, \mathscr{F})$ est appelé espace probabilisable.

Définition 7. Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{F})$ l'application $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints de $\mathscr{F}$, on a : $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Définition 8. On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ où $(\Omega, \mathscr{F})$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur cet espace.

$\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}} \equiv \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}; \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des variables aléatoires X définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec un moment d'ordre 2 fini, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}^2] = \int_\Omega \mathrm{X}^2(\omega) d\mathrm{P}(\omega) = \int_{\mathrm{D_X}} x^2 f_\mathrm{X}(x) dx < +\infty \tag{2.36}$$

où $\mathbb{E}$ représente l'espérance, f_X la PDF de X et $\mathrm{D_X}$ le support de X. Cet espace est un espace de Hilbert et on peut définir le produit scalaire suivant :

$$\langle \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \rangle_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}} \equiv \mathbb{E}[\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2] \equiv \int_\Omega \mathrm{X}_1(\omega) \mathrm{X}_2(\omega) d\mathrm{P}(\omega) \tag{2.37}$$

et la norme associée :

$$\|\mathrm{X}\|_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}} \equiv \sqrt{\mathbb{E}[\mathrm{X}^2]} \tag{2.38}$$

Définition 9. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{F}, \mathscr{B}_\mathrm{F})$ un espace mesurable. Une application mesurable X qui associe toute combinaison $\omega \in \Omega$ une combinaison $\mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{F}$ est appelée variable aléatoire. La loi de la variable aléatoire X est notée $\mathrm{P_X}$ et est telle que :

$$\forall y \in \mathscr{B}_\mathrm{F}, \mathrm{P_X}(y) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B})) \tag{2.39}$$

On considère maintenant une grandeur $x(t)$ fonction de $t \in \mathrm{T}$ à valeur dans F telle que $\forall t \in \mathrm{T}$, $x(t)$ est aléatoire. Alors pour tout t, $x(t)$ est modélisable avec une variable aléatoire $\mathrm{X}(t) : \omega \to \mathrm{X}(t, \omega)$. Si T est une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$ avec d un entier naturel égal à 1, alors X sera appelé processus stochastique. Si d est supérieur à 2, on peut parler de champ stochastique. Les champs stochastiques permettent d'avoir une description plus réaliste des phénomènes physiques, puisque l'aléa sur un paramètre peut dépendre de la localisation. Pour manipuler ces champs, il est possible de les décomposer sur une base de fonctions déterministes en utilisant le développement de Karhunen-Loeve. D'autres méthodes sont possibles telles que les développements orthogonaux [41, 151] ou la méthode spectrale [127].

Expansion de Karhunen-Loeve : représentation d'un processus stochastique On considère un processus aléatoire $\mathrm{Z}(x, \omega)$ du second ordre où x représente la coordonnée spatiale, on note $\mathrm{C}(x_1, x_2)$ sa fonction de covariance :

$$\mathrm{C}(x_1, x_2) = \mathbb{E}[(\mathrm{Z}(x_1, \omega) - \mathbb{E}[\mathrm{Z}(x_1, \omega)])(\mathrm{Z}(x_2, \omega) - \mathbb{E}[\mathrm{Z}(x_2, \omega)])] \tag{2.40}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance par rapport à ω. C est positive, bornée et symétrique et peut se décomposer sur sa base de vecteurs propres [134] :

$$\mathrm{C}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \phi_i(x_1) \phi_i(x_2) \tag{2.41}$$

où les (λ_i) sont les valeurs propres et les (ϕ_i) les vecteurs propres de la fonction de covariance. Ils vérifient la propriété suivante :

$$\lambda_i \phi_i(x_1) = \int_\mathrm{D} \mathrm{C}(x_1, x_2) \phi_i(x_2) dx_2 \tag{2.42}$$

Les vecteurs propres (ϕ_i) sont orthogonaux et forment une base hilbertienne de $\mathscr{L}^2$.

En écrivant $Z(x,\omega) = \mathbb{E}[Z(x,\omega)] + \alpha(x,\omega)$, alors Z et α ont le même noyau de covariance. Et le développement de Karhunen-Loeve s'écrit :

$$\alpha(x,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\xi_i(\omega)\phi_i(x) \tag{2.43}$$

où les ξ_i sont des variables aléatoires non-corrélées, d'espérances nulles, d'écarts types unitaires et égales à :

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D \alpha(x,\omega)\phi_i(x)dx \tag{2.44}$$

Le champ stochastique Z peut alors s'écrire :

$$Z(x,\omega) = \mathbb{E}[Z] + \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\xi_i(\omega)\phi_i(x) \tag{2.45}$$

2.4.3 Approches probabilistes

Les approches probabilistes se basent sur l'expression probabiliste des incertitudes. Pour cela, il est nécessaire dans un premier temps de les caractériser avec des variables aléatoires ou des champs stochastiques. Une décomposition de Karhunen-Loeve peut être utilisée à cette fin par exemple. Il est alors possible d'analyser de manière statistique et/ou probabiliste les variables de sortie. Plusieurs méthodologies sont possibles et dépendent du type de paramètres et du type d'analyses à réaliser. Ce qui suit a pour objectif de présenter succinctement différentes méthodes.

Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo (MC) est la plus simple à mettre en œuvre. Elle consiste à estimer les différents moments statistiques de la réponse **Y** en effectuant un très grand nombre de calculs déterministes. Pour cela, N tirages de **X** sont générés, ainsi N échantillons $\mathbf{x}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}\}$ sont obtenus. Les tirages sont effectués de façon à respecter la PDF $f_{\mathbf{X}}$. Pour chaque échantillon on détermine sa réponse $\mathbf{y}^{(i)} = \mathscr{M}(\mathbf{x}^{(i)})$. L'obtention de nombreuses réalisations de **Y** permet de calculer les données statistiques utiles. La convergence de cette méthode est assez lente puisqu'elle est en $1/\sqrt{N}$ et nécessite de nombreux calculs pour obtenir un niveau de confiance acceptable. Elle reste cependant très facile à mettre en œuvre ce qui explique son usage encore courant. Dans cette optique, des stratégies ont été mises en place afin de diminuer les temps de calcul (parallélisation) ou d'accélérer la convergence de la méthode en utilisant par exemple des *hypercubes latins* (LHS) [92].

La méthode des perturbations

Les méthodes de perturbations ont d'abord été employées dans le contexte de l'analyse non-linéaire [101]. Dans le contexte de traitement de l'incertitude, la méthode consiste à effectuer un développement de Taylor des fonctions autour de leur valeur moyenne [57]. Dans les faits, la méthode est utilisée pour les deux premiers moments statistiques et le développement est tronqué à l'ordre 2. Les conditions de validité d'une telle méthode sont assez contraignantes puisque les fonctions doivent vérifier des conditions de dérivabilité fortes. Pour illustrer la méthode, elle est appliquée à un cas linéaire simple [57].

Considérons le problème linéaire dépendant des variables aléatoires r :

$$(L + \Pi(r))U = F \tag{2.46}$$

où Π est la fonction aléatoire dépendant de r. Le développement de Taylor à l'ordre 2 de U et Π autour de la valeur moyenne de r (notée $\overline{r}$) donne :

$$U \simeq U_0 + \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{\overline{r}} dr + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{\overline{r}} dr^2 \tag{2.47}$$

$$L + \Pi(r) \simeq L + \left.\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right|_{\overline{r}} dr + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\right|_{\overline{r}} dr^2 \tag{2.48}$$

En injectant dans 2.46 et en égalisant les termes de même ordre, il vient :

$$LU_0 = F \tag{2.49}$$

$$L\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{\overline{r}} = -\left.\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right|_{\overline{r}} U_0 \tag{2.50}$$

$$L\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{\overline{r}} = -\left.\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right|_{\overline{r}} \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{\overline{r}} - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\right|_{\overline{r}} U_0 \tag{2.51}$$

Le développement en série de Taylor de U est alors déterminé. Les dérivées partielles de U sont évaluées pour la valeur moyenne de r. Il est clair que U_0 correspond à la valeur moyenne de U. Le second moment peut être déduit à partir de l'équation 2.47. Le développement est valable si $\|L^{-1}\Pi\| < 1$.

Des travaux similaires ont été réalisés afin d'appliquer cette méthode au calcul des modes propres et des valeurs propres aléatoires [61, 64], c'est-à-dire en l'appliquant à l'équation :

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{2.52}$$

où **M** et **K** dépendent d'un paramètre aléatoire r. Cette méthode a été largement utilisée dans le cadre des Eléments Finis Stochastiques (Perturbation SFEM) [6, 24, 62, 148]. En 2015, Nobari et al. [108] utilisent cette méthode pour étudier la stabilité d'un système de frein industriel.

Expansion de Neumann

On considère le même problème que précédemment, à savoir :

$$(L + \Pi(r))U = F \tag{2.53}$$

L'idée consiste à exprimer U comme une série $\sum U_n$ [57]. Pour cela on écrit :

$$U = (L + \Pi)^{-1} F \tag{2.54}$$

$$= (L(Id + L^{-1}\Pi))^{-1} F \tag{2.55}$$

$$= (Id + L^{-1}\Pi)^{-1} L^{-1} F \tag{2.56}$$

$$\tag{2.57}$$

Si $\|L^{-1}\Pi\| < 1$ alors on peut écrire son développement en série de Neumann et la propriété suivante est vérifiée :

$$(Id - L^{-1}\Pi)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (L^{-1}\Pi)^k \tag{2.58}$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} (L^{-1}\Pi)^k L^{-1} F \tag{2.59}$$

En considérant les premiers termes, on obtient une approximation de U. Comme pour la méthode de perturbation, le développement est valable autour de la valeur moyenne des paramètres stochastiques. Cette méthode est cependant complexe à mettre en place et est souvent limitée à un développement à l'ordre 2 [57].

Projection sur le chaos

Développé en 1938 par Wiener [145] puis étendu par Askey [4] et par Xiu et Karniadakis [146], le développement en chaos polynomial consiste à projeter une solution stochastique sur une base de polynômes orthogonaux. Le développement originel de Wiener est valable pour les variables gaussiennes. Les travaux d'Askey [4] puis de Xiu et al. [146] permettront d'étendre ce développement aux cas de variables aléatoires quelconques. La solution est alors exprimée sur une base polynomiale qui permet la détermination analytique ou numérique des différents moments statistiques, ou la distribution de la solution.

Le théorème de Cameron-Martin [20] permet d'écrire que tout processus stochastique $\mathrm{Y}(\boldsymbol{\xi})$ peut être développé sur une série de fonctions polynomiales $(\Psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ orthogonales :

$$\mathrm{Y}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathrm{J}=0}^{\infty} a_{\mathrm{J}} \Psi_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.60}$$

Avec $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur de variables aléatoires, la base des $(\Psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est déterminée en fonction de la PDF de $\boldsymbol{\xi}$, par exemple les polynômes d'Hermite sont utilisés dans le cas de variables gaussiennes. Dans la pratique, la série est tronquée à l'ordre n et les $(a_{\mathrm{J}})_{\mathrm{J}\in\mathbb{N}}$ sont des paramètres à déterminer.

Afin de résoudre le problème initial, le chaos peut être utilisé de manière intrusive ou non-intrusive. Si l'on reprend l'exemple de la partie précédente : $(\mathrm{L}+\Pi(r))\mathrm{U} = \mathrm{F}$, dans le cas intrusif, il s'agit d'écrire U avec son développement en chaos, de l'injecter dans les équations du modèle puis d'utiliser l'orthogonalité de la familles de polynômes pour obtenir des équations matricielles. Il est alors possible de déterminer les coefficients $(a_{\mathrm{J}})_{\mathrm{J}=0,\dots,n}$. Appelée méthode spectrale des éléments finis stochastiques, elle a été introduite par Spanos [57] puis largement utilisée dans le cadre des éléments finis stochastiques [54–56]. Sarrouy et al. [124] l'appliqueront au cas d'un modèle éléments finis de frein simplifié. Cette méthodologie nécessite de réécrire les équations du problème ce qui n'est pas toujours facile. Des approches non-intrusives ont alors été développées et ne nécessitent pas de manipuler les matrices du modèle pour déterminer les coefficients $(a_{\mathrm{J}})_{\mathrm{J}=0,\dots,n}$ [136]. En 2018, Nechak et al. [105] utilisent une méthode non-intrusive pour la prédiction des valeurs propres d'un modèle de frein simplifié.

Méthodes fiabilistes : FORM et SORM

Ces méthodes sont utilisées principalement pour estimer une probabilité de défaillance :

$$\mathrm{P} \equiv \mathbb{P}\left[g(\mathrm{X}) \leq 0\right] \tag{2.61}$$

où g est la fonction de défaillance telle que $g(\mathrm{X}) < 0$ s'il y a défaillance, et que $g(\mathrm{X}) > 0$ sinon. L'état limite entre le domaine de défaillance et le domaine de bon fonctionnement est donné par $g(\mathrm{X}) = 0$. Si $\mathrm{X} = \left(x_1, \dots, x_p\right)$ et de PDF f_{X}, alors le problème revient à estimer :

$$\mathrm{P} = \int_{\mathrm{X}, g(\mathrm{X})\leq 0} f_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})\, d\mathrm{X} \tag{2.62}$$

Les méthodes FORM (*First Order Reliability Method*) et SORM (*Second Order Reliability Method*) sont des techniques d'approximation de cette probabilité de défaillance et peuvent se décomposer en trois étapes. D'abord, l'espace d'origine des variables aléatoires est transformé en un espace gaussien standard à l'aide d'une transformation de

Nataf ou de Rosenblatt. Ensuite, il faut déterminer ce qu'on appelle le *point de conception*, c'est-à-dire le p-uplet où la probabilité de défaillance est maximale dans le nouvel espace. La dernière étape consiste à approcher la surface de défaillance en ce point pour obtenir une approximation de la probabilité recherchée. La méthode FORM approxime la surface par un hyperplan au point de conception, et la méthode SORM par une surface quadratique. Lü et Yu utilisent la méthode FORM pour estimer la stabilité d'un système de frein [84].

2.4.4 Approches ensemblistes

Ces méthodes ne sont pas probabilistes, c'est-à-dire qu'elle ne nécessitent pas d'identifier les lois de probabilités des paramètres incertains, tâche souvent complexe. Deux grandes méthodes sont de ce type : l'une basée sur l'arithmétique des intervalles, et l'autre sur la logique floue.

Arithmétique des intervalles

Cette méthode consiste à modéliser les paramètres incertains par des intervalles. Moore [97] développe une arithmétique des intervalles qui permet alors de propager l'incertitude dans les modèles. Un paramètres incertain est défini par un intervalle $\mathrm{I} = [\mathrm{I}^-;\mathrm{I}^+]$ et l'opération $* \in \{+,-,\times,\div,\min,\max\}$ est définie par :

$$\mathrm{I} * \mathrm{J} = \{x * y | x \in \mathrm{I}, y \in \mathrm{J}\} \tag{2.63}$$

Ainsi l'addition est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \{x + y | x \in \mathrm{I}, y \in \mathrm{J}\} = [\mathrm{I}^- + \mathrm{J}^-; \mathrm{I}^+ + \mathrm{J}^+] \tag{2.64}$$

La multiplication est :

$$\mathrm{I} \times \mathrm{J} = \{xy | x \in \mathrm{I}, y \in \mathrm{J}\} = [\min(\mathrm{I}^- \times \mathrm{J}^-, \mathrm{I}^- \times \mathrm{J}^+, \mathrm{I}^+ \times \mathrm{J}^-, \mathrm{I}^+ \times \mathrm{J}^+); \max(\mathrm{I}^- \times \mathrm{J}^-, \mathrm{I}^- \times \mathrm{J}^+, \mathrm{I}^+ \times \mathrm{J}^-, \mathrm{I}^+ \times \mathrm{J}^+)] \tag{2.65}$$

Et l'inverse d'un intervalle est :

$$1 \div \mathrm{I} = [1/\mathrm{I}^+; 1/\mathrm{I}^-], \text{ si } 0 \notin \mathrm{I} \tag{2.66}$$

Ce qui permet de définir l'opération de division de la manière suivante :

$$\mathrm{I}/\mathrm{J} = \mathrm{I} \times 1/\mathrm{J}, \text{ si } 0 \notin \mathrm{I} \tag{2.67}$$

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs, à savoir la surestimation des résultats et la perte des propriétés algébriques. En effet la soustraction n'est pas la réciproque de l'addition et la division n'est pas la réciproque de la multiplication. Elle permet cependant de résoudre des problèmes d'optimisation globale ce que d'autres arithmétiques ne sont pas capable de faire. Le lecteur intéressé pourra lire [33, 34, 36, 42] pour l'application de la méthode à l'estimation des fréquences propres d'un système mécanique.

Logique floue

Introduite en 1996 par Zadeh [150], la logique floue remplace la logique booléenne en remplaçant l'assertion *vrai* / *faux* par un degré de vérité traduit par une valeur numérique comprise entre 0 et 1. Une variable A est décrite par sa fonction d'appartenance μ_A définie sur le support de A et à valeur dans $[0,1]$. Elle permet de donner le niveau de

confiance sur le fait que la variable ait une certaine valeur. Le noyau de A correspond à l'ensemble des éléments de A tels que $\mu_A(x) = 1$. Les zones où $0 < \mu_A < 1$ sont appelées frontières. Ces fonctions d'appartenances peuvent avoir différentes formes : triangulaires, gaussiennes, sigmoïdes, etc.

Un problème en logique floue est traité en plusieurs étapes. La première consiste à décrire chaque paramètre par un ensemble de variables. Lorsque les valeurs des paramètres sont récupérées en entrée, le *fuzzyfier* les convertit en degré d'appartenance aux différentes fonctions d'appartenance. Le problème est ensuite traduit en ensemble d'assertions "SI variable EST propriété ALORS action". Ces différentes assertions sont combinées avec les opérateurs de logique floue définis comme suit :

$$\text{A ET B} \Leftrightarrow \min(\text{A},\text{B}) \tag{2.68}$$

$$\text{A OU B} \Leftrightarrow \max(\text{A},\text{B}) \tag{2.69}$$

$$\text{NON A} \Leftrightarrow 1 - \text{A} \tag{2.70}$$

$$\text{A OUEX B} \Leftrightarrow \max(\text{A},\text{B}) - \min(\text{A},\text{B}) \tag{2.71}$$

Les variables de sorties sont déterminées en appliquant ces règles aux variables d'entrée et sont caractérisées par des degrés d'appartenance à différentes fonctions. La recherche de l'intersection entre ces différentes fonctions d'appartenance puis l'utilisation d'un *defuzzyfier* permet de traduire les différents degrés d'appartenance en valeurs numériques. Do et al. [37] et Lu et al. [77] appliqueront cette méthodologie au cas de la prédiction de la stabilité d'un modèle éléments finis de frein.

2.4.5 Les méthodes d'approximation de surface de réponse : la méta-modélisation

Les différentes méthodes présentées jusqu'à présent, consistent à modéliser les paramètres incertains et à les propager dans les modèles à l'aide de différentes méthodes. Cependant, les coûts d'évaluation associés aux modèles peuvent être élevés en temps et en moyens. D'autres méthodes basées sur la méta-modélisation sont alors envisageables. Elles consistent à partir d'un jeu de données entrée/sortie, appelé *plan d'expérience*, à construire un équivalent mathématique simple $\bar{\mathcal{M}}$ d'un modèle $\mathcal{M}$, qui pour une même entrée donnera la même sortie. Une fois que le modèle équivalent est généré, son coût d'évaluation étant très faible, il est possible d'effectuer de nombreux calculs. Un simple MC peut être suffisant pour déterminer les paramètres souhaités. Par ailleurs, ces méthodes permettent de mettre en place des stratégies d'optimisation et/ou d'exploration d'espace de conception [130]. Quelques méthodes classiques sont présentées ici. Il est a noter que le développement en chaos polynomial peut aussi être utilisé à cette fin à la différence près qu'au lieu d'approximer le modèle $\mathcal{M}$, on cherche à approximer le processus aléatoire $\text{Y} = \mathcal{M}(\text{X})$.

Régression linéaire

L'une des méthodes les plus connues et les plus utilisées en terme de méta-modélisation est la régression linéaire. Elle consiste à exprimer les variables de sorties $\mathbf{Y}$ en fonction d'une combinaison linéaire des variables d'entrées $\mathbf{X}$. Ainsi, on cherche à déterminer $\boldsymbol{\beta}$ tel que :

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \simeq \mathcal{M}(\mathbf{X}) \tag{2.72}$$

avec $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{\epsilon}$ le vecteur d'erreur. La stratégie consiste alors à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \tag{2.73}$$

La solution correspond à l'estimateur des moindres carrés :

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} \tag{2.74}$$

Cependant, dans de nombreux cas, le modèle précédent n'est pas suffisant pour décrire $\mathscr{M}$. Il est alors possible de considérer une projection polynomiale, des termes d'ordre supérieurs à 1 apparaissent, en particulier des termes croisés permettant de prendre en compte les interactions entre les différentes variables. Le calcul de $\boldsymbol{\beta}$ se fait de la même manière que pour le cas linéaire. Des méthodes de régularisation telles que les méthodes Lasso, Elastic Net ou Ridge, permettent d'avoir des modèles régularisés qui contrôlent l'*overfitting*.

Cette méthode a l'intérêt d'être très facile à mettre en place et donne rapidement des tendances exploitables. Il est par ailleurs possible de choisir les interactions à prendre en compte en ne considérant que quelques termes croisés. Lu et al. [78, 85] et Treimer et al. [139] appliqueront cette méthode à la prédiction de la stabilité d'un système de frein.

Réseaux de neurones

Initialement créé par McCulloch et Pitts [90] pour tenter de modéliser le cerveau, puis repris et développé par Rosenblatt [118], les réseaux de neurones ont depuis été largement utilisés dans différents domaines. Depuis quelques années, ils sont en particulier utilisés pour traiter les bases de données qui ont des tailles toujours plus importantes.

Un réseau de neurones correspond à l'association plus ou moins complexe de neurones formels. Les différents réseaux de neurones se distinguent par la structure du graphe qui associe les neurones formels, le type de neurones utilisés et par l'objectif visé. Le nombre de couches de neurones et le nombre d'entrées définissent l'architecture du réseau de neurones et conditionnent son efficacité.

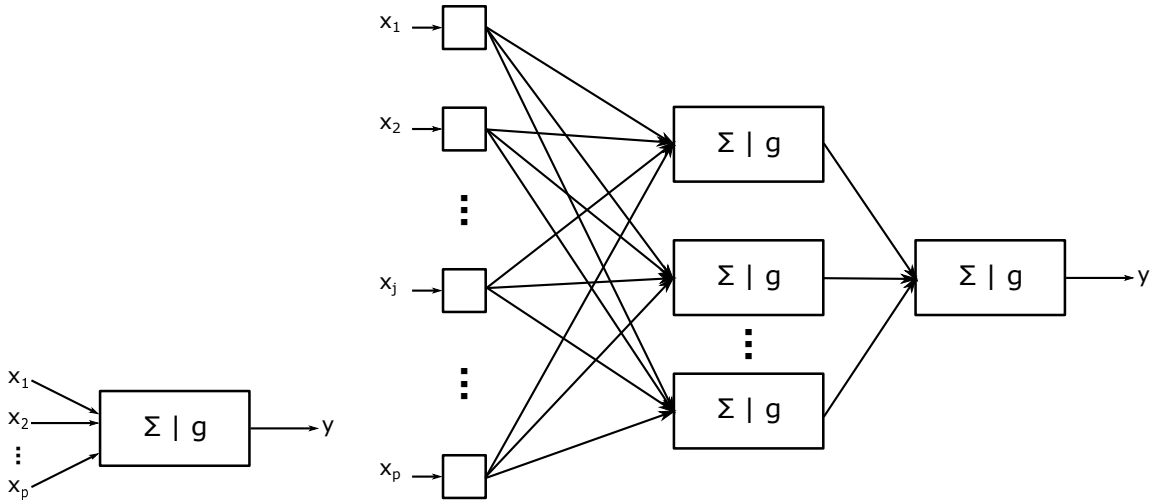
Un neurone formel, représenté Figure 2.19a, est caractérisé par :

- des valeurs d'entrée $(x_1, \ldots, x_p)$,
- un vecteur poids $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ spécifique à chaque neurone et dont les valeurs sont estimées lors de l'apprentissage,
- une fonction de combinaison Σ : on en distingue deux grands types, les réseaux MLP (Multi-Layer Perceptron) où l'on considère une combinaison linéaire des variables ; et les réseaux RBF (Radial Basis Function) où l'on considère la distance entre les entrées,
- une fonction d'activation g : parmi les plus connues : les fonctions seuil, sigmoïde, ReLU ou encore radiale,
- un état de sortie y.

Ainsi, pour chaque neurone on peut écrire :

$$y = g(\Sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})) \tag{2.75}$$

Une couche de neurones correspond à un ensemble de neurones n'ayant pas de lien entre eux. Un réseau de neurones sera alors composé de plusieurs couches. Il est toujours composé d'une couche primaire avec autant de neurones que de paramètres d'entrée, chaque neurone de cette couche lit une entrée, et d'une couche de sortie qui donne la réponse. Entre les deux, se trouvent une ou plusieurs couches cachées. Dans une couche cachée,



(a) Schéma de neurone formel (b) Schéma de réseau de neurones

FIGURE 2.19 – Schémas de réseau de neurones

chaque neurone est connecté à l'ensemble des neurones de la couche précédente et à l'ensemble des neurones de la couche suivante.

Pour la régression, il est usuel de considérer une unique couche cachée. Un exemple est schématisé Figure 2.19b avec q neurones dans la couche cachée. En considérant une fonction de combinaison MLP et un unique neurone de sortie linéaire, on peut écrire :

$$y = f(\mathbf{x};\boldsymbol{\alpha}^{(1)},\boldsymbol{\alpha}^{(2)}) = \alpha_0^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(1)'}\mathbf{z}$$
$$\text{avec } z_k = g(\alpha_{k0}^{(2)} + \boldsymbol{\alpha}_k^{(2)'}\mathbf{x}),\ k = 1,\ldots,q$$

L'apprentissage se fait à partir de N observations $\left(\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(\mathrm{N})}\right)$ et de leurs évaluations $\left(y^{(1)},\ldots,y^{(\mathrm{N})}\right)$ et consiste à déterminer les différents poids $(\boldsymbol{\alpha}_k)$ de chaque neurone k. Cette étape se fait en minimisant la fonction de perte quadratique :

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{Q}_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} [y_i - f(\mathbf{x}^{(i)};\boldsymbol{\alpha}^{(1)},\boldsymbol{\alpha}^{(2)})]^2 \tag{2.76}$$

Le lecteur intéressé pourra se référer à des ouvrages plus complets tel que [31]. L'avantage des réseaux de neurones réside dans leur grande souplesse d'utilisation puisqu'ils peuvent fonctionner sur n'importe quelle fonction. Ils sont robustes au bruit et au manque de fiabilité des données, ce qui leur confère un avantage important par rapport à d'autres méthodes. Cependant, il n'existe à ce jour aucune méthode permettant de connaitre à l'avance le nombre de couches de neurones, le nombre de neurones ou le type de neurone à utiliser. Par ailleurs, le risque de sur-apprentissage est assez fort pour les réseaux de neurones et nécessite une attention particulière. On remarquera aussi que les connaissances acquises par les réseaux de neurones (les différentes valeurs poids) sont incompréhensibles pour l'utilisateur et n'ont pas de sens "physique".

Support Vecteur Machine (SVM)

Initialement créée pour résoudre des problèmes de classification, cette méthode sera généralisée au cas de la régression dans les années 90 par Vapnik [25]. L'idée principale

consiste à passer dans un espace de plus grande dimension que celle de l'espace initial et d'effectuer une régression linéaire dans cet espace.

Pour plus de simplicité, on se place ici dans le cas où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. N échantillons $(x_1, \ldots, x_N)$ et leurs évaluations $(y_1, \ldots, y_N)$ sont déterminées. On cherche à écrire :

$$y = \bar{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i G(x_i, x) + b \simeq \mathcal{M}(x) \tag{2.77}$$

où les (β_i) sont des coefficients à déterminer, G une fonction Kernel et b un coefficient à déterminer. Différentes stratégies sont possibles pour déterminer les (β_i) et b, la fonction ϵ-insensitive étant souvent utilisée comme critère de qualité. L'idée de base repose sur la linéarité du produit scalaire dans le nouvel espace de résolution, image de la similarité, qui permet alors de revenir dans l'espace de résolution initial. Les vecteurs supports choisis comme des échantillons représentatifs du modèle constituent une base fonctionnelle réduite à même de représenter les données avec une erreur minimisée.

Le principal avantage de la méthode SVM réside dans sa capacité à gérer les problèmes de grande dimension, même non linéaires. Par ailleurs, la méthode a de bon résultats avec des plans d'expériences de petite taille et est plutôt robuste face aux points aberrants. Cependant, comme pour les réseaux de neurones, les données d'apprentissage sont difficilement exploitables par l'utilisateur et les différents paramètres peuvent être difficile à régler.

Krigeage

Initialement créé par l'ingénieur Krige pour prédire la composition des sols, le formalisme du krigeage a été posé par Matheron en 1969 [88]. Il s'agit du meilleur estimateur sans biais [119]. Le modèle $\mathcal{M}$ est approché par la somme entre un terme régressif et un processus Gaussien Z de moyenne nulle [74] :

$$y = \bar{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i g_i(x) + Z(x) \simeq \mathcal{M}(x) \tag{2.78}$$

où les q fonctions g_i sont choisies par l'utilisateur et représentent la base de régression. Il s'agit la plupart du temps de fonctions polynomiales d'ordre 0, 1 ou 2. Les β_i sont les coefficients de régression. Le processus Gaussien Z est caractérisé par sa covariance entre $Z(u)$ et $Z(v)$:

$$\mathrm{Cov}(Z(u), Z(v)) = \sigma^2 \mathbf{R}(\theta, u, v) \tag{2.79}$$

où σ est la variance du processus et $\mathbf{R}$ la fonction de corrélation qui dépend de l'hyperparamètre θ. La connaissance des données d'apprentissage permet de définir la matrice de régression $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{G}_{ij} = g_j(x_i)$ et la matrice de régression $\mathbf{R}_{ij} = R(\theta, x_i, x_j)$. Les coefficients β_i sont solutions d'un problème aux moindres carrés, θ et σ en sont eux solutions d'un problème d'optimisation.

Le krigeage est particulièrement adapté lorsqu'une vision globale du problème est recherchée, même si celui-ci est non-linéaire. Son formalisme permet d'obtenir un intervalle de confiance sur les estimations, ce qui peut servir de critère d'erreur. Cependant, la méthode reste sensible à l'estimation des paramètres, en particulier θ dont la détermination est compliquée. Par ailleurs, la méthode est peu robuste si le nombre de paramètres en

entrée est trop important.

En 2015 Nobari et al. [109] utilisent le krigeage pour prédire l'évolution des valeurs propres d'un mode instable d'un système de frein automobile en fonction de quelques paramètres. La même année, Nechak et al. [106] utilisent le krigeage pour prédire la stabilité globale d'un système de frein simplifié.

2.4.6 Les méthodes hybrides

Un problème d'ingénierie est souvent soumis à plusieurs incertitudes de différentes natures et les modélisations associées peuvent être différentes. Cependant, les méthodes présentées jusqu'ici ne permettent de prendre en compte qu'un seul type d'incertitude. Afin de remédier à cette limitation, quelques chercheurs ont développé des méthodologies permettant de traiter plusieurs types d'incertitudes à la fois. Ces méthodes sont appelées méthodes hybrides, elles permettent de combiner plusieurs sortes d'incertitudes. Ainsi Lu et Yu [85] proposent une méthode basée sur l'utilisation d'un méta-modèle construit par régression polynomiale (RMS) dépendant de variables incertaines et de paramètres de conception. Le modèle RMS décrit l'évolution d'une valeur propre instable d'un MEF de frein automobile en fonction des différents paramètres. Les paramètres incertains sont décrits avec une approche intervalle. Un algorithme génétique est alors utilisé pour effectuer une optimisation sur le modèle RMS créé, l'objectif étant de déterminer le jeu de paramètres de conception permettant de stabiliser le système en prenant en compte les variables intervalles. En 2017, les mêmes auteurs développent une méthode mêlant paramètres aléatoires et logique floue. Tout d'abord, un méta-modèle RMS des valeurs propres du système de frein obtenues par analyse aux valeurs propres complexes est construit en fonction de quatre paramètres. Ces quatre paramètres sont ensuite décrits soit comme flous, soit comme aléatoires. La méthode consiste à considérer que chaque variable aléatoire dépend des variables floues. n α-coupes sont réalisées sur les variables floues et pour chacune de ces coupes, une caractérisation par intervalles est utilisée. L'arithmétique des intervalles est alors employée pour propager l'incertitude. Un développement de Taylor de la sortie est utilisé pour avoir les expressions exactes des sorties. Cette méthode hybride est employée sur un méta-modèle RMS qui ne tient pas compte des particularités des différentes variables lors de sa construction.

Chapitre 3

Influence et prise en compte des contacts internes sur la propension au crissement

Sommaire

3.1 Présentation du modèle éléments finis étudié et analyse de stabilité 56
3.1.1 Présentation du modèle de frein étudié 56
3.1.2 Analyse de Stabilité 58
3.2 Résultats préliminaires sur l'influence du coefficient de frottement des contacts internes 60
3.2.1 Présentation des cas d'étude 60
3.2.2 Analyse des résultats 63
3.2.3 Choix de $\mu_{interne}$ 64
3.3 Une meilleure compréhension du rôle des contacts internes 66
3.3.1 Motivations 66
3.3.2 Influence des conditions de contact sur les modes instables 66
3.3.3 Influence des conditions de contact par plage de fréquences et restriction au concept de "mode le plus instable" 74
3.4 Utilisation d'un algorithme génétique pour identifier le scénario le plus défavorable 79
3.4.1 Motivation industrielle 79
3.4.2 Présentation de l'algorithme génétique et adaptation au problème étudié . 79
3.4.3 Résultats numériques 81
3.5 Conclusion et perspectives 86

Introduction

Ce chapitre présente dans un premier temps le système de frein et l'analyse de stabilité basée sur l'analyse aux valeurs propres complexes. Si traditionnellement seule l'influence des interfaces entre les plaquettes et le disque est prise en compte pour étudier la stabilité du système, on se propose ici d'étudier l'influence des autres contacts présents dans le système sur celle-ci. Différentes stratégies sont adoptées afin d'étudier leurs impacts et d'aboutir à une hiérarchisation de ceux-ci. Enfin, un algorithme génétique est mis en place afin d'identifier rapidement les contacts les plus influents.

3.1 Présentation du modèle éléments finis étudié et analyse de stabilité

Cette partie a pour objectif de présenter l'objet d'étude, à savoir le Modèle Éléments Finis (MEF) de frein à disque automobile. Un rapide rappel sur les différents composants est fait en accordant une attention particulière aux multiples interactions que les plaquettes peuvent avoir avec les autres composants du système, définissant ainsi de nombreux contacts internes. La stratégie adoptée, à savoir l'analyse aux valeurs propres complexes, est ensuite présentée pour le cas du MEF.

3.1.1 Présentation du modèle de frein étudié

Le système de frein étudié est représenté Figure 3.1. Il s'agit d'un frein à étrier flottant actionné par pression hydraulique. Il est composé de différents éléments tels que le disque, l'étrier, la chape, les plaquettes intérieure et extérieure, le moyeu, le piston et la jante. Pour rappel, lors d'une opération de freinage, la pression hydraulique entraîne le piston qui vient presser la plaquette intérieure contre le disque. Les efforts de réaction ainsi générés font coulisser l'étrier qui ramène la plaquette extérieure contre le disque. Des efforts de frottement apparaissent alors entre le disque et les plaquettes et peuvent parfois être accompagnés d'un bruit de crissement.

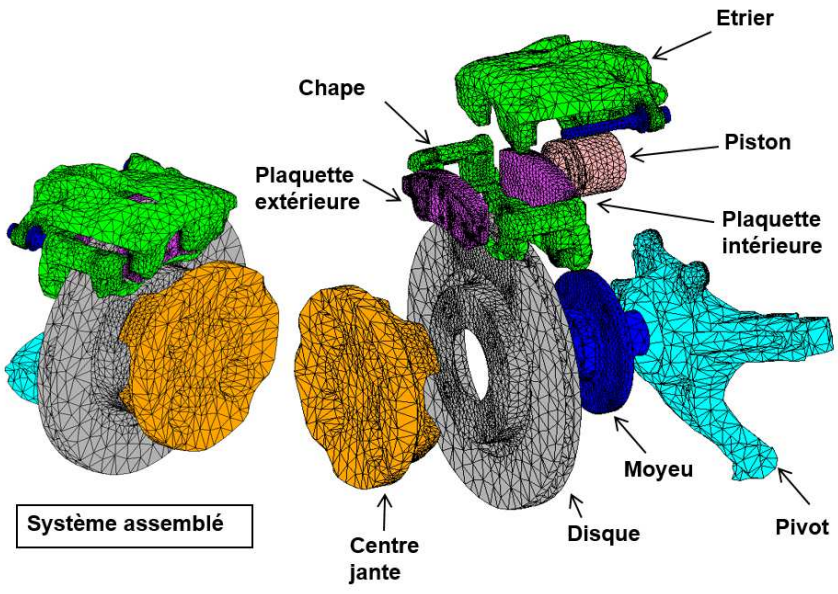


FIGURE 3.1 – Modèle éléments finis développé sous Abaqus - Vues assemblée (à gauche) et éclatée (à droite)

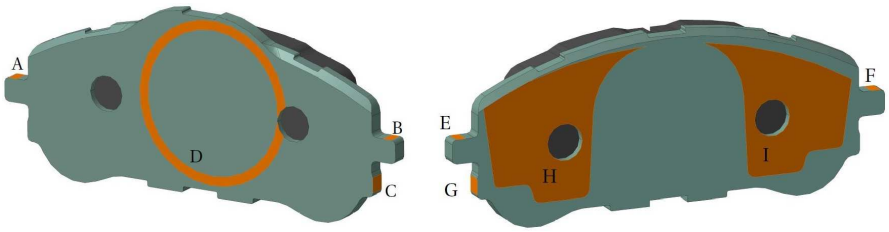


FIGURE 3.2 – Interfaces de contact sur les plaquettes intérieure (à gauche) et extérieure (à droite)

Dans une démarche de conception d'un frein, il est usuel de considérer que le paramètre le plus influent est le coefficient de frottement des interfaces plaquettes/disque $\mu_{d/p}$. Ainsi, des études paramétriques en fonction de ce paramètre sont réalisées afin de valider la robustesse du frein au crissement. Cependant, lorsque le système est considéré dans son ensemble, il apparait que les différents éléments sont en interaction les uns avec les autres via différentes interfaces de contact.

Cette observation est particulièrement vérifiée pour les plaquettes de frein qui peuvent être en contact avec l'étrier, la chape et le piston en plus du disque. Les plaquettes étant libres de se mouvoir au sein du système de frein, leur position exacte n'est pas connue et ceci influe directement le statut des différentes interfaces qui peuvent être en contact ou non. Il est à noter qu'une modification d'un de ces états de contact peut conduire à une modification de l'équilibre statique. La stabilité du système étant étudiée localement, elle peut elle aussi s'en trouver modifiée. Jusqu'à présent, ces différents contacts étaient négligés dans les études de conception de frein et étaient caractérisés par un coefficient de frottement constant choisis la plupart du temps de façon arbitraire.

La création et la validation du MEF utilisé n'est pas le sujet d'étude de cette thèse et pour plus de détails le lecteur intéressé pourra se référer à [45, 46, 100]. Il est nécessaire de retenir que le contact frottant est modélisé par une loi de pénalité linéaire et par une loi de Coulomb à coefficient de frottement constant. L'étude numérique modélise un freinage de maintien, c'est-à-dire que la pression de freinage et la vitesse de rotation du disque sont constantes. Le circuit hydraulique n'étant pas représenté, la pression est modélisée par une force répartie au dos du piston et par une force opposée à la surface du boitier. A cette étape de l'étude, aucune réduction de modèle n'est réalisée.

En considérant le MEF présenté ici, les plaquettes de frein peuvent être en interaction avec l'étrier, la chape et le piston. Ces différents contacts se font au travers de neuf interfaces qui sont représentées Figure 3.2 et identifiées par les lettres A à I. L'ensemble est résumé Table 3.1.

En considérant ces trois interactions entre le piston et la plaquette intérieure (notée p/p), l'étrier et les plaquettes (notée e/p), et la chape et les plaquettes (notée c/p), le problème dynamique non-linéaire du système de frein peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{M\ddot{X}} + \mathbf{C\dot{X}} + \mathbf{KX} + \mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{F_{ext}} \tag{3.1}$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur déplacement généralisé et le point représente la dérivée par rapport au temps. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur structurale. $\mathbf{F_{ext}}$ représente les efforts externes, à savoir la pression appliquée au piston et à l'étrier. $\mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{X})$ sont les contributions des interfaces des deux sous-systèmes considérés. Pour chacune des interfaces, le décollement est autorisé. Lorsqu'il y a contact, des efforts normaux et des efforts de frottement apparaissent. Dans

Lettre de l'interface	Type de contact	Paramètre
A	Contact Radial Haut Intérieur	RHI
B	Contact Radial Bas Intérieur	RBI
C	Reprise de Couple Intérieur	RCBI
D	Piston/Plaquette	PP
E	Contact Radial Bas Extérieur	RBE
F	Contact Radial Haut Extérieur	RHE
G	Reprise de Couple Extérieur	RCBE
H	Doigt Bas/Plaquette	DB
I	Doigt Haut/Plaquette	DH

TABLEAU 3.1 – Interfaces de contact

le cas contraire (décollement), aucun effort n'est présent au niveau de l'interface considérée. $\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X})$ représente les efforts non-linéaires et les efforts de frottement présents aux interfaces plaquettes/disque. Chaque interface est caractérisée par une loi de Coulomb classique avec un coefficient de frottement constant.

3.1.2 Analyse de Stabilité

Stratégie adoptée

Plusieurs stratégies sont possibles pour réaliser l'analyse de stabilité d'un système de frein et prédire ainsi l'apparition du crissement. On en distingue deux grandes catégories, à savoir l'analyse dynamique transitoire et l'analyse aux valeurs propres complexes (*complex eigenvalue analysis*, CEA). Quelques chercheurs utilisent les deux méthodes pour prédire le crissement [1, 83, 86]. Cependant, des travaux montrent que la CEA peut conduire à une sur- ou à une sous-estimation des modes instables présents dans la réponse dynamique du système [132]. Il est alors nécessaire de réaliser une analyse dynamique transitoire afin d'identifier correctement les différents modes impliqués dans le crissement. Cependant, ces études étant des études temporelles, les temps de calcul associés sont souvent exorbitants et ne sont pas envisageables dans un contexte industriel. On notera également que certaines études se proposent de rechercher directement des réponses stationnaires du système [23, 27, 28] mais ces dernières font des hypothèses sur l'existence et la forme de ces solutions recherchées et donc sur le nombre de modes instables impliqués dans la réponse dynamique. De plus, elles ne permettent pas non plus d'avoir une vision sur le comportement transitoire conduisant le système à sa solution stationnaire et donc la possibilité d'avoir des modes instables dans la réponse transitoire qui disparaissent dans le régime stationnaire final. La CEA reste donc la méthode largement employée pour la prédiction du crissement, en particulier dans l'industrie automobile. En effet, son temps de calcul étant relativement faible, il est possible d'étudier la stabilité du système pour de nombreux points de fonctionnement ce qui donne finalement un aperçu global de la robustesse du frein.

Présentation de la CEA

La CEA consiste à analyser les valeurs propres complexes du système autour de sa position d'équilibre. La présence des efforts de frottement peut introduire des termes non-symétriques dans les matrices du système pouvant alors conduire à l'apparition d'instabilités. La procédure complète est détaillée ci dessous.

Étape 1 : Calcul de la position d'équilibre statique La première étape de la procédure consiste à calculer la position d'équilibre statique non-linéaire $\mathbf{U_S}$ du système en résolvant l'équation :

$$\mathbf{K}\mathbf{U_S} + \mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) = \mathbf{F_{ext}} \tag{3.2}$$

L'analyse réalisée par la suite est valable uniquement autour de cette position d'équilibre $\mathbf{U_S}$.

Étape 2 : Perturbation du système Afin d'étudier la stabilité de cette solution, une légère perturbation $\delta\mathbf{X}$ est introduite autour de $\mathbf{U_S}$, on a alors :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U_S} + \delta\mathbf{X} \tag{3.3}$$

Étape 3 : Linéarisation des efforts La perturbation étant faible, il est possible de linéariser les différents efforts autour de la position d'équilibre $\mathbf{U_S}$ en utilisant un développement de Taylor au premier ordre. Il vient :

$$\mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{p/p}}\delta\mathbf{X} \tag{3.4}$$
$$\mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{e/p}}\delta\mathbf{X} \tag{3.5}$$
$$\mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{c/p}}\delta\mathbf{X} \tag{3.6}$$
$$\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{nl}}\delta\mathbf{X} \tag{3.7}$$
$$\tag{3.8}$$

où les différentes matrices $\mathbf{J_k}$ sont les matrices Jacobiennes des efforts $\mathbf{F_k}$, c'est-à-dire les matrices des dérivées partielles de premier ordre au point $\mathbf{U_S}$.

Étape 4 : Équation dynamique En injectant les équations précédentes dans l'équation dynamique 3.1, il vient :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{J_{p/p}} + \mathbf{J_{e/p}} + \mathbf{J_{c/p}} + \mathbf{J_{nl}}\right)\delta\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

Traditionnellement, seule l'influence de l'interface plaquette/disque est considérée ce qui revient à considérer uniquement l'influence de $\mathbf{J_{nl}}$. Dans le cadre de notre étude, la prise en compte des contacts internes supplémentaires rajoute donc une contribution qui peut s'écrire sous la forme d'une matrice $\mathbf{K_{nl,U_S}}$ définie comme suit :

$$\mathbf{K_{nl,U_S}} = \mathbf{J_{p/p}} + \mathbf{J_{e/p}} + \mathbf{J_{c/p}} \tag{3.10}$$

Sont pris en compte les possibilités de perte de contact, ainsi que les efforts de frottement entre les plaquettes et la chape, l'étrier et le piston. L'équation dynamique peut se réécrire de la façon suivante :

$$\mathbf{M}\delta\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\delta\dot{\mathbf{X}} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}}\right)\delta\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

Étape 5 : Analyse aux valeurs propres En supposant une solution de la forme $\delta\mathbf{X} = \mathbf{\Psi} e^{\mathbf{\lambda} t}$ où $\mathbf{\lambda}$ représente les valeurs propres du système et $\mathbf{\Psi}$ les vecteurs propres, le système 3.11 devient :

$$\left(\mathbf{\lambda}^2\mathbf{M} + \mathbf{\lambda}\mathbf{C} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}}\right)\right)\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

d'équation caractéristique :

$$\det\left(\boldsymbol{\lambda}^2\mathbf{M}+\boldsymbol{\lambda}\mathbf{C}+\mathbf{K}+\mathbf{K_{nl,U_S}}+\mathbf{J_{nl}}\right)=0 \tag{3.13}$$

Les termes de frottement ajoutent des contributions non-symétriques à la matrice $\mathbf{J_{nl}}$ ce qui implique des valeurs propres complexes $\lambda_j = a_j + i\omega_j$ et des vecteurs propres complexes $\boldsymbol{\Psi}_j$. ω_j est la pulsation du mode $\boldsymbol{\Psi}_j$ et a_j sa partie réelle. Selon la théorie de Lyapounov, il est possible de statuer sur la stabilité asymptotique du système en considérant le signe des a_j. Si au moins l'une d'entre elles a une partie réelle strictement positive, alors le système est instable. Il est important de préciser que cette analyse est valable localement puisque les différentes matrices $\mathbf{J_k}$ sont définies uniquement dans un voisinage de $\mathbf{U_S}$.

3.2 Résultats préliminaires sur l'influence du coefficient de frottement des contacts internes

3.2.1 Présentation des cas d'étude

Une stratégie classique pour étudier la propension au crissement d'un système de frein consiste à réaliser plusieurs CEA pour différentes valeurs du coefficient de frottement $\mu_{d/p}$ des interfaces plaquettes/disque. L'enjeu de l'étude présentée ici consiste à étudier l'influence des contacts entre les plaquettes et les différents éléments autre que le disque sur la stabilité du système. Ceci revient à considérer l'influence des matrices $\mathbf{J_{p/p}}$, $\mathbf{J_{e/p}}$ et $\mathbf{J_{c/p}}$ sur les valeurs propres du problème. Afin de se focaliser uniquement sur l'influence des différentes interfaces, l'amortissement est négligé. Puis, pour obtenir une première tendance de l'influence des contacts internes sur la stabilité, la stratégie suivante est adoptée : tous les contacts présentés Tableau 3.1 sont caractérisés par le même coefficient de frottement $\mu_{interne}$. Deux cas d'étude sont ensuite étudiés :

— premier cas : pour différentes valeurs de $\mu_{d/p}$, $\mu_{interne}$ varie de 0 à 1. Les différentes valeurs de $\mu_{d/p}$ considérées sont : $\mu_{d/p} = 0.3$, $\mu_{d/p} = 0.5$ et $\mu_{d/p} = 0.7$,

— second cas : pour différentes valeurs de $\mu_{interne}$, le coefficient de frottement $\mu_{d/p}$ varie de 0 à 1. Les différentes valeurs de $\mu_{interne}$ considérées sont : $\mu_{interne} = 0$, $\mu_{interne} = 0.15$, $\mu_{interne} = 0.3$ et $\mu_{interne} = 0.5$.

Le choix des valeurs de $\mu_{d/p}$ dans le premier cas et de $\mu_{interne}$ dans le second provient d'études préliminaires non discutées dans le chapitre. L'objectif ici est de présenter différents cas représentatifs des différents comportements observés vis-à-vis du crissement. Il est aussi important de notifier que l'ensemble des contacts $\mu_{interne}$ sont pris en compte avec une unique caractéristique à chaque fois, à savoir une valeur identique du coefficient de frottement $\mu_{interne}$ pour tous les contacts pour un calcul donné. Cette hypothèse, certes restrictive, va permettre d'apporter des premiers éléments d'analyse.

Pour le premier cas d'étude, les évolutions des valeurs propres dans le plan complexe sont représentées Figure 3.3 pour les différentes valeurs de $\mu_{d/p}$. Pour le second cas d'étude, les résultats sont résumés dans le Tableau 3.2. Pour chaque mode instable détecté, on donne la plage de $\mu_{d/p}$ sur laquelle il est instable (notée $\left[\boldsymbol{\mu_{u,inf}};\boldsymbol{\mu_{u,sup}}\right]$) ainsi que le maximum de la partie réelle observée et la fréquence associée.

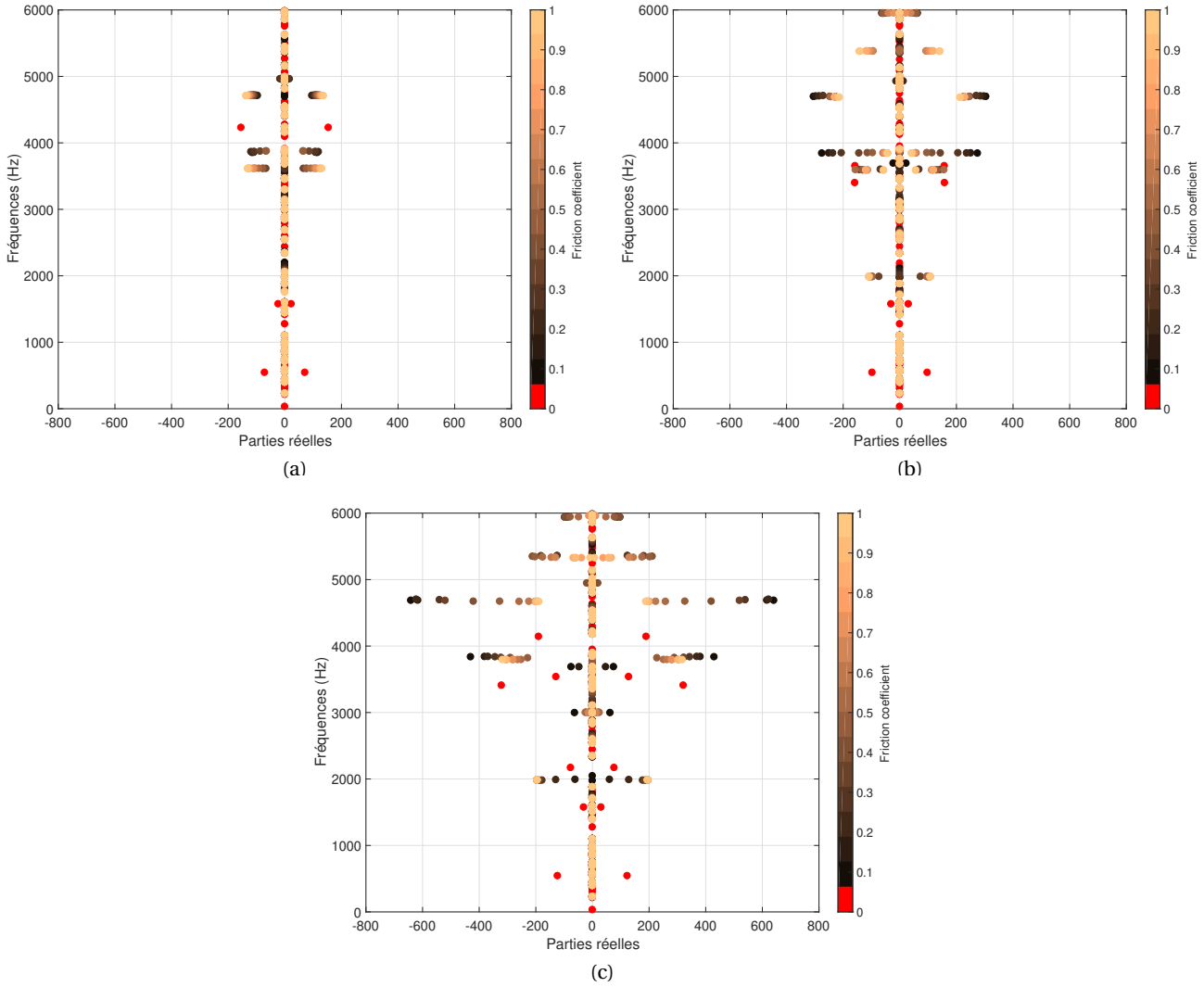


FIGURE 3.3 – Évolution des valeurs propres dans le plan complexe pour une variation du coefficient de frottement $\mu_{interne}$ des interfaces internes pour trois valeurs différentes de $\mu_{d/p}$: (a) $\mu_{d/p} = 0.3$, (b) $\mu_{d/p} = 0.5$, (c) $\mu_{d/p} = 0.7$

	Numéro de l'instabilité	Fréquence (Hz)	Maximum de la partie réelle	$\left[\mu_{u,inf};\mu_{u,sup}\right]$
$\mu_{interne} = 0$	1	540.3	133.3	[0.1;1]
	2	676.7	62.92	[0.9;1]
	3	1574	33.14	[0.2;1]
	4	2172	216.9	[0.75;1]
	5	3431	842.8	[0.45;1]
	6	3461	350.1	[0.7;1]
	7	3662	181.3	[0.35;0.55]
	8	4168	624.7	[0.7;1]
	9	4239	236.5	[0.25;0.45]
	10	4242	168.8	[0.8;0.95]
	11	4598	72.81	[0.9;1]
	12	4742	141.6	[1;1]
	13	5355	374.9	[0.7;1]
$\mu_{interne} = 0.15$	1	3119	92.08	[1;1]
	2	3446	34.52	[1;1]
	3	3633	16.06	[0.6;0.6]
	4	3810	192.8	[0.35;1]
	5	5389	658.2	[0.4;1]
$\mu_{interne} = 0.3$	1	803.4	40.52	[0.65;1]
	2	3106	100.9	[0.65;1]
	3	3443	48.27	[1;1]
	4	3669	30.38	[1;1]
	5	3816	178	[0.35;1]
	6	5365	627.6	[0.65;1]
$\mu_{interne} = 0.5$	1	802.9	72.43	[0.65;1]
	2	3002	32.95	[0.8;1]
	3	3093	82.75	[0.6;1]
	4	3681	227.5	[0.75;1]
	5	3824	145.3	[0.4;1]
	6	4331	104.3	[0.65;1]
	7	5241	133.9	[0.85;0.95]
	8	5324	302.7	[1;1]

TABLEAU 3.2 – Instabilités pour différentes valeurs du coefficient de frottement interne $\mu_{interne}$

3.2.2 Analyse des résultats

L'ensemble des résultats des deux cas d'étude démontre la forte influence du coefficient de frottement interne $\mu_{interne}$. D'après la Figure 3.3, même si $\mu_{interne}$ affecte peu les fréquences instables, il impacte fortement les parties réelles des modes instables, en particulier lorsque $\mu_{d/p}$ augmente. En effet, pour $\mu_{d/p} = 0.5$, en regardant le mode à 3900 Hz (Figure 3.3b), la partie réelle du mode instable varie d'environ 290 à environ 30 lorsque $\mu_{interne}$ augmente, cela représente une diminution d'un facteur 10. De plus, la même instabilité à $\mu_{d/p} = 0.7$ voit sa partie réelle diminuer puis augmenter lorsque $\mu_{interne}$ augmente (Figure. 3.3c). Ceci illustre le rôle de $\mu_{interne}$ qui peut être parfois stabilisant et parfois déstabilisant.

Par ailleurs, en se concentrant sur le Tableau 3.2 et en considérant uniquement le cas où $\mu_{interne}$ est non nul, il apparait qu'une augmentation de $\mu_{interne}$ tend à augmenter le nombre d'instabilités présentes. En effet, huit instabilités sont présentes lorsque $\mu_{interne} = 0.5$ alors qu'il y en a seulement cinq lorsque $\mu_{interne} = 0.15$. Ainsi, l'instabilité à 800 Hz émerge lorsque $\mu_{interne}$ est supérieur à 0.3. Cependant, certaines instabilités disparaissent lorsque $\mu_{interne}$ augmente, celle à 3446 Hz par exemple n'est plus présente lorsque $\mu_{interne}$ vaut 0.5.

Une dernière observation peut être faite sur l'influence de $\mu_{interne}$ sur le coefficient de frottement de l'interface plaquette/disque à partir duquel un mode devient instable, ce dernier est noté μ_{Hopf}. Par exemple, lorsque $\mu_{interne} = 0.15$, le mode de fréquence 5389 Hz est instable lorsque $\mu_{d/p} \geq 0.4$, c'est-à-dire que $\mu_{Hopf} = 0.4$ (voir Tableau 3.2). Lorsque $\mu_{interne}$ augmente, μ_{Hopf} augmente aussi et quand $\mu_{interne} = 0.5$ le mode est instable uniquement lorsque $\mu_{d/p} = 1$. De plus, l'effet est stabilisant, puisque la partie réelle décroît de 658.2 à 302.7. Un effet semblable, mais moins prononcé, est observable pour le mode à 3810 Hz. Cependant, la tendance n'est pas toujours la même puisque si l'on considère le mode à 3100 Hz, μ_{Hopf} vaut 1 quand $\mu_{interne} = 0.15$ puis diminue jusqu'à 0.6 lorsque $\mu_{interne} = 0.5$.

Des observations similaires peuvent être faites lorsque le rôle des deux coefficients de frottement $\mu_{interne}$ et $\mu_{d/p}$ est inversé ($\mu_{interne}$ varie et $\mu_{d/p}$ est fixé, voir Figure 3.3) : par exemple, le mode à 5300 Hz est toujours stable lorsque $\mu_{d/p} = 0.3$, puis lorsque $\mu_{d/p}$ augmente, le mode devient instable et le $\mu_{interne}$ critique à partir duquel le mode devient instable diminue. En effet, lorsque $\mu_{d/p} = 0.5$, il faut $\mu_{interne} \geq 0.6$ pour que le mode soit instable et lorsque $\mu_{d/p} = 0.7$, il faut $\mu_{interne} \geq 0.3$ pour que le mode soit instable. Cependant, la tendance inverse n'est pas observée ici, illustrant ainsi le rôle principalement déstabilisant du coefficient $\mu_{d/p}$.

Il est important de notifier que le cas $\mu_{interne} \neq 0$ se distingue fortement des autres cas. En effet, sur les Figures 3.3 la différence est flagrante lorsque les points rouges sont comparés aux autres points. Le nombre d'instabilités, mais aussi les fréquences instables et les parties réelles associées sont très différentes entre le cas $\mu_{interne} = 0$ et les cas $\mu_{interne} \neq 0$. De même pour le Tableau 3.2, le cas $\mu_{interne} = 0$ se distingue des autres cas puisqu'il fait émerger beaucoup plus d'instabilités, 13 contre 8 maximum, de fréquences très différentes : aucun mode à 800 Hz mais cinq modes entre 4000 et 5000 Hz. Cette remarque est importante car elle signifie que la dynamique du système, et sa stabilité, ne sont pas comparables si les interfaces internes sont en contact ou non.

Ces différentes remarques illustrent bien le rôle important, et donc non négligeable, que

joue le coefficient de frottement $\mu_{interne}$ sur le crissement. Parfois stabilisant, parfois déstabilisant, son rôle est complexe et il est difficile de faire émerger des tendances précises, d'autant plus que son influence dépend fortement de $\mu_{d/p}$. La stabilité du système de frein et sa propension au crissement est donc fortement liée aux deux paramètres. Une tendance importante se dégage cependant : le comportement du système est très différent si $\mu_{interne} = 0$ ou si $\mu_{interne} \neq 0$. En d'autres termes, deux cas sont facilement différentiables, le premier correspondant au cas où le coefficient de frottement $\mu_{interne}$ est non nul, le second où il est nul, ce qui correspond à des états de contact ou de non-contact. Par abus de langage, on dira que les contacts sont frottants lorsque $\mu_{interne} \neq 0$ et glissants lorsque $\mu_{interne} = 0$.

3.2.3 Choix de $\mu_{interne}$

Une première conclusion intermédiaire peut être réalisée à ce niveau d'avancement de l'analyse. Les premiers résultats ont montré qu'au regard de la stabilité, le rôle des contacts internes n'était pas forcément de second ordre par rapport au contact plaquette/disque et que par conséquent, ils ne peuvent être négligés dans une démarche de dimensionnement robuste. Cependant, le coût numérique additionnel engendré par ces nombreux paramètres supplémentaires est conséquent et il est nécessaire de trouver une stratégie pour les intégrer dans une démarche de dimensionnement global pour un coût numérique acceptable. Comme expliqué précédemment, une première tendance montre que la stabilité du système peut avoir deux comportements très différents en fonction que les contacts soient frottants ou non. Dans l'étude préliminaire, l'hypothèse était faite que l'ensemble des contacts avaient des caractéristiques identiques. Dans les faits, chaque contact peut avoir un comportement spécifique différent de celui des autres. Ainsi, si pour chaque contact deux états sont possibles, à savoir frottant ou glissant, cela représente un total de $2^9 = 512$ configurations différentes pour un coefficient $\mu_{d/p}$ donné. Les études de conception étant souvent réalisées pour différentes valeurs de $\mu_{d/p}$, le nombre de CEA requis pour la prédiction de la propension au crissement du MEF est déjà considérable si seulement deux états sont pris en compte.

A ce stade de l'étude, il est important de rappeler que le cas d'un contact frottant peut être réalisé avec différentes valeurs de $\mu_{interne}$. Ce choix ayant un impact sur la stabilité du système, il est nécessaire de choisir cette valeur avec précaution. Dans cette optique, les raisons qui ont motivé le choix de la valeur de $\mu_{interne}$ dans le reste de l'étude sont présentées rapidement ici, avant de pouvoir s'attarder sur l'influence propre aux différents contacts. Afin de déterminer la valeur de $\mu_{interne}$, l'évolution de l'amplitude de la force totale due à la pression de contact à chaque interface de contact est représentée Figure 3.4 en fonction de $\mu_{interne}$ pour différentes valeurs de $\mu_{d/p}$. L'amplitude de la force totale varie et atteint un état d'équilibre au delà d'un certain seuil. Pour quelques contacts, la variation de l'amplitude de la force entre $\mu_{interne} = 0$ et l'état d'équilibre est faible. C'est le cas des contacts PP et MU int/ext. Mais pour les autres, cette variation peut être importante et le devient de plus en plus lorsque $\mu_{d/p}$ augmente. Par exemple pour le contact RCBE lorsque $\mu_{d/p} = 0.7$, l'amplitude initiale est de 1550 N quand $\mu_{interne} = 0$ et de 500 N quand $\mu_{interne} = 1$. Deux stratégies sont alors possibles quant au choix de la valeur de $\mu_{interne}$: soit $\mu_{interne}$ est choisi de façon à ce que l'état d'équilibre soit atteint, soit de façon à ce que le système soit toujours dans une phase transitoire. Le premier choix implique de toujours connaitre la valeur seuil de $\mu_{interne}$ à partir de laquelle le système a atteint son état d'équilibre, ce qui n'est pas le cas initialement. De plus, ce seuil peut dépendre du contact. Pour ces raisons, la seconde stratégie est adoptée par la suite car il est plus facile de se pla-

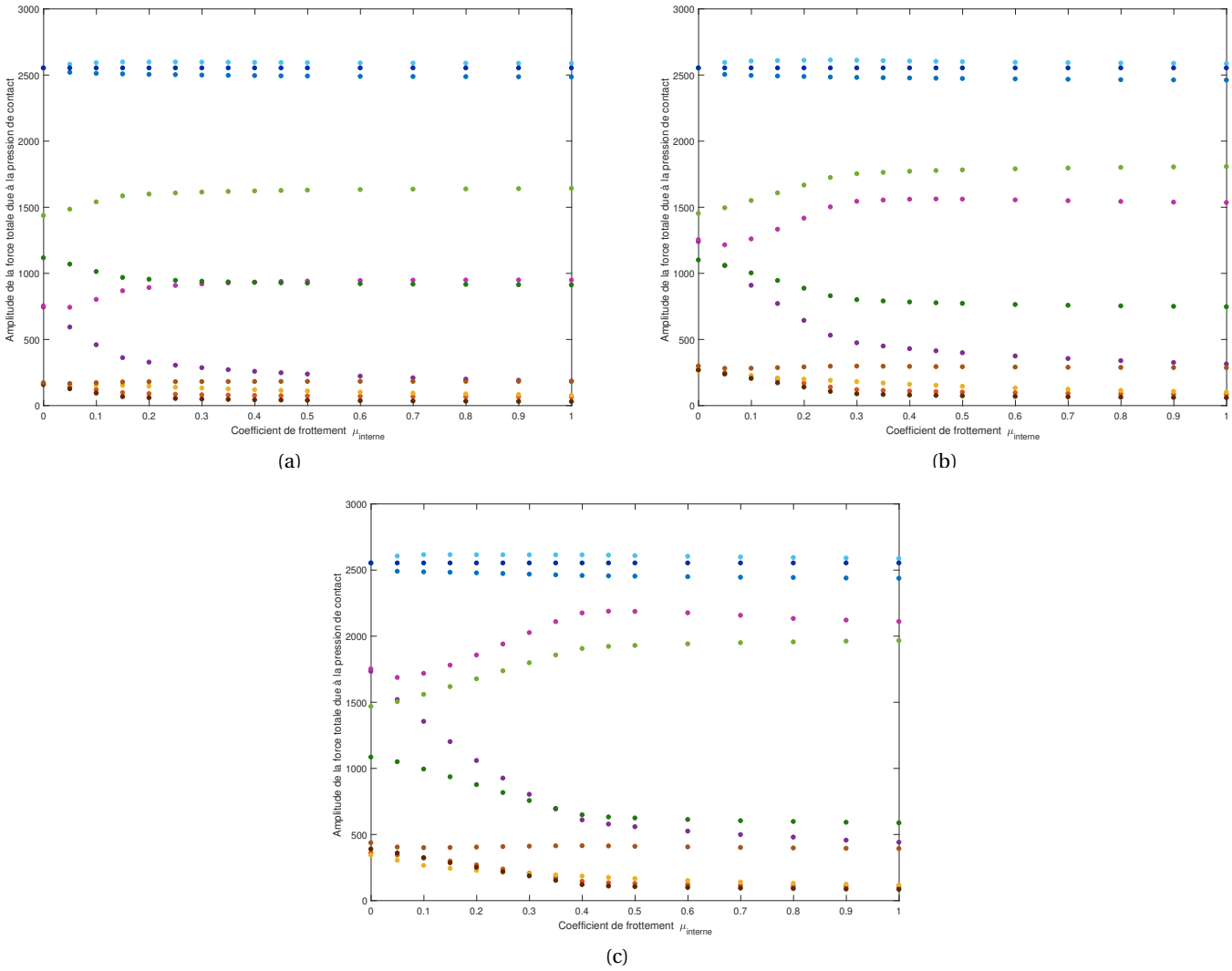
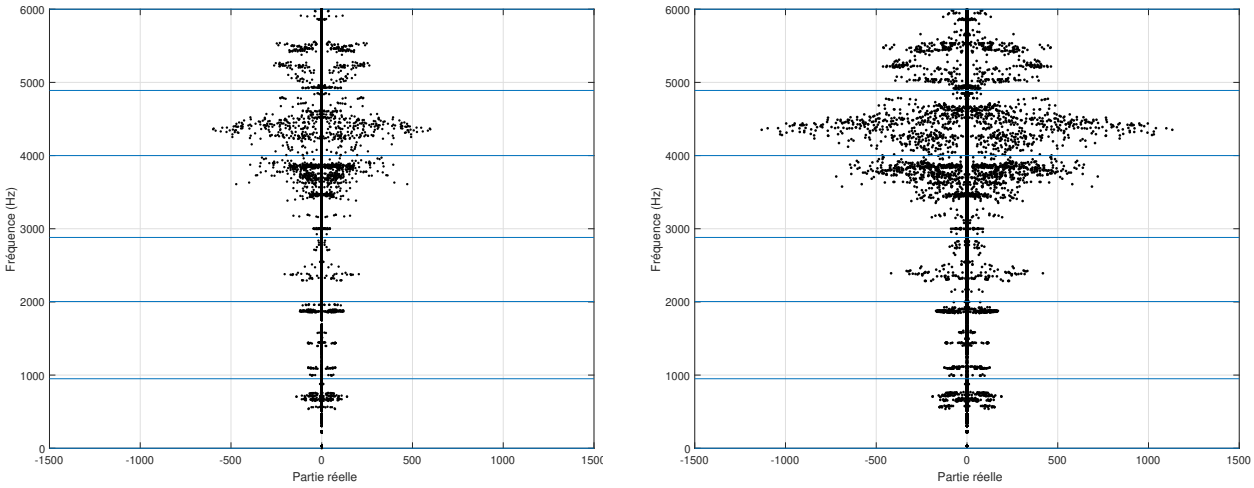


FIGURE 3.4 – Évolution de l'amplitude de la force totale due à la pression de contact aux différentes interfaces en contact en fonction du coefficient de frottement $\mu_{interne}$ pour différentes valeurs de $\mu_{d/p}$: (a) $\mu_{pad-disc} = 0.3$, (b) $\mu_{pad-disc} = 0.5$ (c) $\mu_{pad-disc} = 0.7$ - Contacts : • RCBE, • RCBI, • DB, • DH, • MU ext, • MU int, • PP, • RBE, • RBI, • RHE, • RHI

cer systématiquement dans un cas où les efforts sont encore dans une phase transitoire. La valeur de $\mu_{interne}$ choisie est 0.15. Même si elle est proche de la valeur seuil lorsque $\mu_{d/p} = 0.3$, les systèmes de frein étant conçus pour les valeurs de $\mu_{d/p}$ supérieures à 0.3, ce choix n'est pas compromettant. Par ailleurs, en prenant $\mu_{interne} = 0.15$ et en regardant la Figure 3.3, on peut voir que la grande majorité des instabilités ont déjà émergé pour cette valeur de $\mu_{interne}$. Les parties réelles étant très sensibles à une variation de $\mu_{interne}$, elles ne peuvent pas servir de critère à sa détermination. Les fréquences sont néanmoins beaucoup moins sensibles à la variation de $\mu_{interne}$, donc en prenant $\mu_{interne} = 0.15$, les modes instables et leurs fréquences sont identifiés, ce qui est en concordance avec les objectifs de l'étude.



(a) (b)

FIGURE 3.5 – Valeurs propres dans le plan complexe et plages de fréquences pour $\mu_{pad/disc} = 0.3$ (gauche) et $\mu_{pad/disc} = 0.5$ (droite)

3.3 Une meilleure compréhension du rôle des contacts internes

3.3.1 Motivations

Afin d'avoir des temps de calcul raisonnables et en se basant sur les résultats précédents, pour identifier les différentes instabilités et leur fréquence associée, il est possible de se limiter à deux états de contact pour chacune des neuf interfaces, à savoir un état glissant avec un coefficient de frottement nul et un état frottant avec un coefficient de frottement de 0.15. Si toutes les combinaisons des contacts internes sont considérées pour un coefficient $\mu_{d/p}$ donné, une différence significative sur la stabilité du système est observable. En effet, l'ensemble des valeurs propres obtenues par CEA pour les 512 configurations différentes sont superposées et représentées dans le plan complexe Figure 3.5a pour $\mu_{d/p} = 0.3$ et Figure 3.5b pour $\mu_{d/p} = 0.5$. Il est clair que l'influence des contacts sur la stabilité du système est importante et qu'ils sont un facteur clé à prendre en compte dans la détermination des fréquences de crissement d'un système de frein. Dans les deux cas, il est possible de regrouper quelques valeurs propres, par exemple sur la plage de fréquences [1080;1120] Hz ou sur [1850;2000] Hz. Mais pour des fréquences supérieures à 3300 Hz, une importante dispersion est observée ce qui rend le suivi des modes instables compliqué. Une première conclusion est la forte sensibilité des valeurs propres aux états de contact et il est nécessaire de réaliser une étude plus approfondie pour caractériser l'influence des différents contacts internes sur la stabilité du système.

L'objectif ici est de réussir à identifier les contacts qui sont systématiquement impliqués dans une ou plusieurs instabilités. Pour cela différentes stratégies sont employées, la première consiste à observer les déformées modales du système et leur variation par rapport aux conditions de contacts. La seconde consiste à déterminer les conditions de contact associées à des fréquences instables.

3.3.2 Influence des conditions de contact sur les modes instables

Une première possibilité pour analyser le rôle des différents contacts internes serait d'identifier certaines instabilités récurrentes au travers de leurs déformées modales. S'il est pos-

Configuration	Nombre d'instabilités	Nom du contact								
		RHI	RHE	RCBE	RCBI	RBE	RBI	PP	DB	DH
CFG1	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CFG2	7	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
CFG3	5	0.15	0.15	0.15	0	0.15	0	0.15	0.15	0.15
CFG4	9	0	0.15	0.15	0	0.15	0.15	0.15	0	0
CFG5	8	0	0.15	0.15	0	0.15	0.15	0	0	0
CFG6	6	0	0.15	0.15	0	0.15	0	0	0.15	0.15
CFG7	6	0.15	0	0	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
CFG8	6	0	0	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
CFG9	7	0.15	0.15	0	0	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG10	7	0.15	0.15	0	0	0	0	0.15	0	0
CFG11	6	0	0.15	0	0	0	0.15	0.15	0	0.15
CFG12	6	0	0.15	0	0	0	0.15	0.15	0.15	0
CFG13	9	0	0	0	0	0	0	0.15	0	0
CFG14	5	0	0	0	0	0	0	0.15	0	0.15
CFG15	5	0	0	0	0	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG16	6	0	0.15	0	0	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG17	6	0.15	0.15	0.15	0	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG18	8	0.15	0.15	0.15	0.15	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG19	7	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0	0.15	0.15	0.15
CFG20	6	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0	0	0
CFG21	6	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0	0	0.15
CFG22	6	0.15	0.15	0	0	0	0	0.15	0	0.15
CFG23	4	0.15	0.15	0	0	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
CFG24	6	0	0	0.15	0.15	0	0	0.15	0.15	0.15
CFG25	6	0	0	0	0	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques des 25 configurations étudiées

sible de suivre un mode instable grâce à sa déformée par rapport aux différentes configurations, il serait alors possible d'identifier les conditions de contact qui font émerger cette instabilité. Pour ce faire, un groupe de 25 configurations représentatives a été retenu, leurs caractéristiques sont données Tableau 3.3 et les fréquences instables relevées Tableau 3.4. Pour information, la première configuration correspond au cas où tous les contacts internes sont glissants et la seconde au cas où ils sont tous frottants. Les configurations 11 et 12 correspondent aux deux configurations avec les parties réelles maximales. L'objectif étant de comparer les différents modes instables, il est important de se placer dans une configuration où le maximum d'instabilités a émergé. Comme vu Tableau 3.2, le coefficient $\mu_{d/p}$ a principalement un rôle déstabilisant et plus il est élevé, plus le nombre d'instabilités est élevé. On se place donc à $\mu_{d/p} = 0.9$ pour avoir le plus de modes instables possible.

Les différents modes instables des 25 configurations sont comparés en utilisant le Modal Assurance Criterion (MAC). Il mesure le degré de linéarité entre deux modes : une valeur de MAC proche de 1 signifie que les déformées modales sont corrélées, un appairage entre les deux modes est envisageable et ils décrivent potentiellement la même instabilité. Au contraire, une valeur proche de 0 indique que les déformées sont orthogonales et qu'elles ne correspondent pas à la même instabilité. Le MAC entre deux déformées modales $\mathbf{\Phi}_1$ et $\mathbf{\Phi}_2$ est donné par :

$$\text{MAC}(\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2) = \left(\frac{|\mathbf{\Phi}_1^* \mathbf{\Phi}_2|}{\|\mathbf{\Phi}_1\| \|\mathbf{\Phi}_2\|} \right)^2 \tag{3.14}$$

où * désigne le conjugué complexe d'un vecteur.

Configuration	Numéro de l'instabilité										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
CFG1	540.76	675.46	1573.4	2172.6	3441.2	3471.2	4133.1	4244.5	4608.8	5357.4	5769.6
CFG2	1976.2	3684	3838.9	4695.3	4944	5341.4	5934.9				
CFG3	3466.4	3860.6	4231.8	4944.6	5273.6						
CFG4	733.39	2994	3456.3	3892.7	4249.3	4267.5	4630.5	4937	5161.1		
CFG5	645.31	1102.9	2543.3	3473.7	3711.3	3897.4	4939.6	5011.1			
CFG6	2447.9	2544.6	3477.2	3686.9	4121.6	4457.3					
CFG7	1877.2	3432.3	3654.5	4415.2	4692.8	5445.7					
CFG8	1859.8	3491.5	3816.3	4272	4705	4978.3					
CFG9	1974.1	3105.8	3474.6	4382.8	5140.8	5305.2	5802.7				
CFG10	713.56	2315.4	3910.9	4415	4492.1	5244.3	5435.3				
CFG11	1876.7	3889.7	4306	4500.7	4609.8	4869.1					
CFG12	1900.4	3809.6	4322.5	4608	4931	5863.9					
CFG13	698.1	2287.2	3459.3	3645.7	3862.1	4161	4946.9	539.91	5434.2		
CFG14	3496.8	3814.6	4120	4733.2	5128.4						
CFG15	1858.7	3431	3569.8	3851.5	4108.7						
CFG16	1913.8	3459.3	3533.7	3810.5	4280.3	4790.2					
CFG17	1964.4	3775.5	4248.4	4357.5	4609.9	5277.6					
CFG18	1963.4	2742.6	3626.9	3800	4656.8	4890.6	4943	5334.7			
CFG19	1975.4	3643.2	3826.7	4691.5	4943.2	5337.1	5925.2				
CFG20	669.19	1124.3	1882.5	4070.7	4653.5	5021.4					
CFG21	1881.4	2546.7	2560.6	2757.1	3677	4668.1					
CFG22	3407.6	3906.4	4361.3	4615.3	4941.6	5254.2					
CFG23	1970.3	3800.5	4552.6	4929.3							
CFG24	854.4	1851.8	3593.2	3759.1	4305.3	4689.9					
CFG25	1859.8	3491.5	3816.3	4272	4705	4978.3					

TABLEAU 3.4 – Fréquences instables des 25 configurations

Pour plus de clarté, les modes instables des 25 configurations testées sont concaténés et un AutoMAC est réalisé. La matrice d'AutoMAC obtenue est représentée Figure 3.6. Les différentes configurations sont séparées par une ligne rouge. Ainsi le bloc de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne correspond à la matrice de MAC entre les modes instables des configurations i et j. La diagonale correspond aux AutoMAC de chaque configuration.

Quelques configurations semblent partager quelques modes instables comme les configurations 2 et 19 ou 25 et 8. Cependant, ces correspondances restent anecdotiques et dans la plus grande majorité des cas, aucune correspondance ne peut être établie. Le MAC fréquentiel (FMAC), qui est un MAC avec une échelle fréquentielle, est représenté Figure 3.7. Les valeurs de MAC proches de l'unité sont situées à proximité de la diagonale, ce qui signifie que deux déformées fortement corrélées ont des fréquences propres proches. Cependant, deux modes instables de fréquences propres proches n'ont pas nécessairement des déformées modales proches puisqu'il est possible de trouver des valeurs de MAC faibles à proximité de la diagonale. Ces résultats montrent la grande sensibilité des déformées modales aux états de contact et que les différentes instabilités observées sur les différentes configurations sont différentes. Le suivi des instabilités par le suivi de modes est donc largement compromis.

Une étude complémentaire a été réalisée en comparant l'ensemble des modes (stables et instables) des différentes configurations montrant des résultats similaires, ce qui permet d'aboutir à deux conclusions importantes. Tout d'abord les modes instables d'une configuration ne correspondent pas aux modes stables d'une autre configuration. Ensuite, c'est l'intégralité de la base modale qui est affectée par les modifications des états

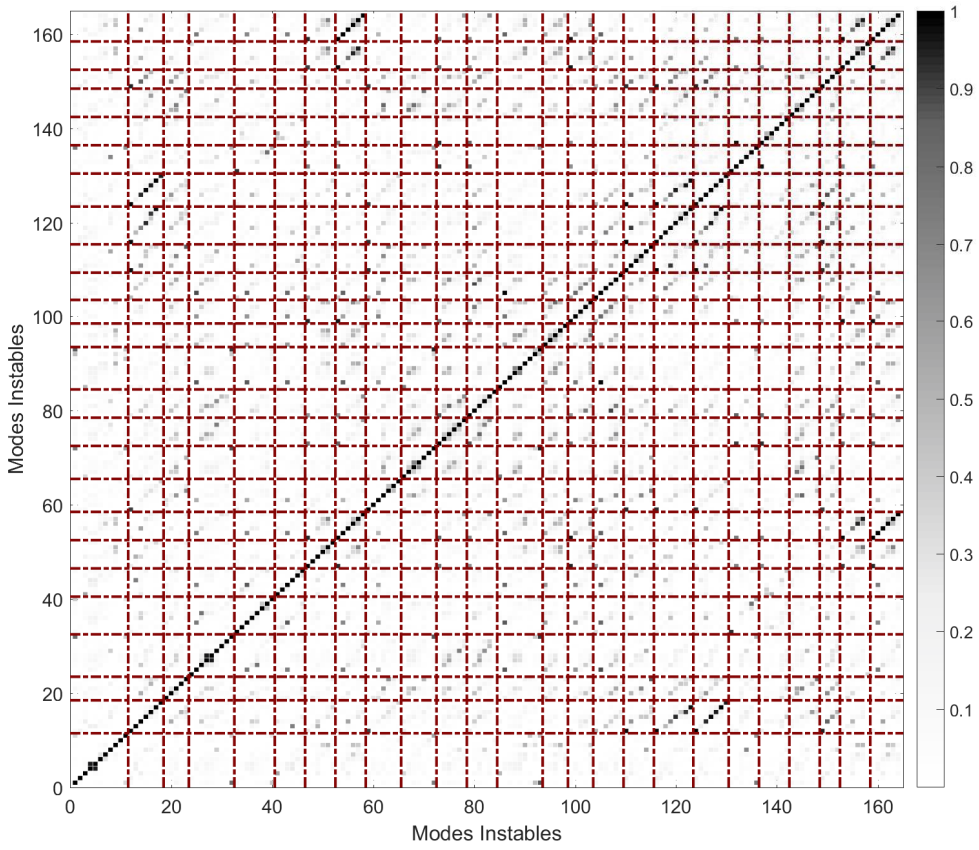


FIGURE 3.6 – AutoMAC des 25 configurations - La séparation entre les configurations est marquée par les lignes rouges

de contact.

Afin d'analyser plus précisément ces résultats, le MAC a aussi été calculé en considérant indépendamment chaque élément du système de frein. Pour chaque composant, les matrices d'AutoMAC sont déterminées et représentées Figure 3.8. Pour des soucis de clarté, les résultats sont présentés uniquement pour 12 configurations, mais ils sont assez similaires pour les autres cas. Si l'on considère uniquement le disque (Fig. 3.8a) de nombreuses corrélations peuvent être établies. En d'autres termes, les modes de vibration du disque sont communs aux différentes configurations. Cependant, lorsque deux modes sont appairés grâce à des déformées similaires au niveau du disque, il se trouve qu'au niveau des autres composants du système aucune corrélation ne peut être établie, en particulier avec l'étrier et la chape. Il s'avère que ces deux composants sont extrêmement sensibles aux états de contact des neuf interfaces considérées. Tenter d'effectuer une analyse et une compréhension des phénomènes de crissement par un suivi de mode en considérant uniquement les modes du disque pourrait conduire à une mauvaise analyse du comportement du système.

Afin d'illustrer ces propos, quelques déformées sont représentées et comparées pour des cas où le MAC du disque est élevé. Deux cas sont présentés, les déformées du premier cas sont données Figure 3.9 et celles du second Figure 3.10. Les caractéristiques sont données Tableau 3.5. Dans le premier cas, le mode instable des configurations 5 et 14 est situé

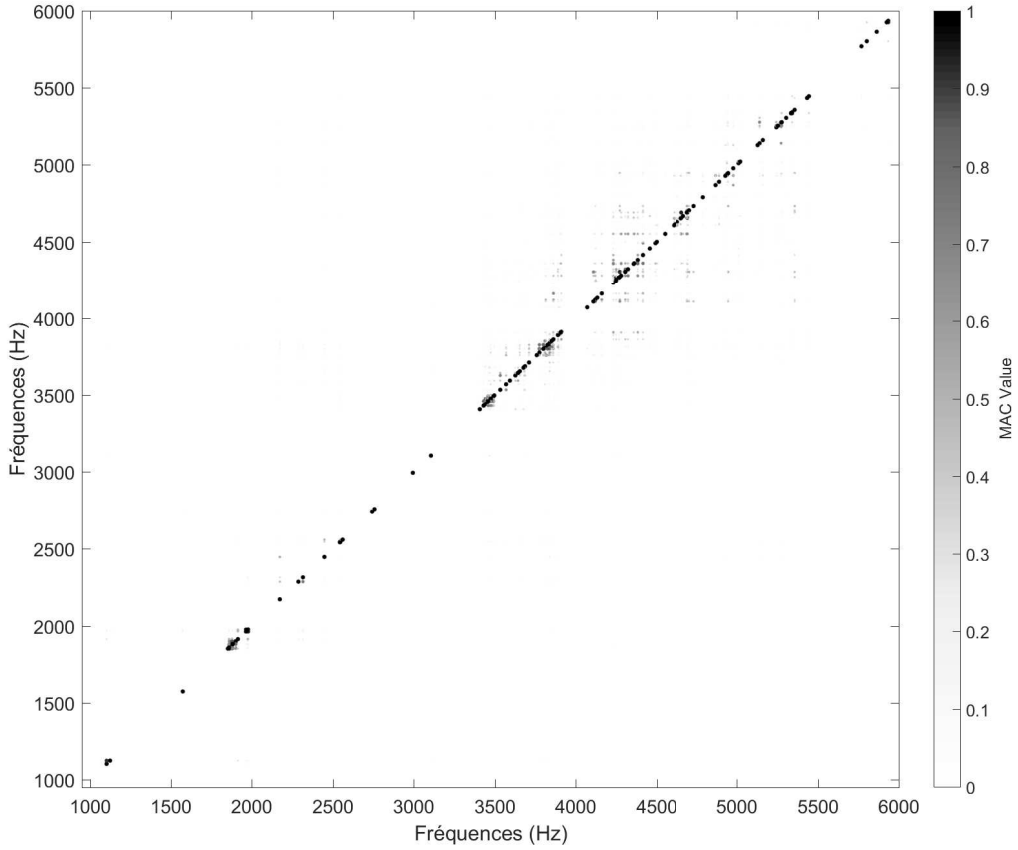


FIGURE 3.7 – FAutoMAC des 25 configurations - Valeurs de MAC avec une échelle fréquentielle

autour de 3480 Hz. Le MAC global est égal à 0.5748, mais le MAC associé au disque vaut 0.9555. En effet, lorsque les déformées du disque sont comparées, elles sont visuellement identiques. Cependant, si l'on s'attarde sur l'étrier ou la chape, les déformées sont différentes. Cette observation est confirmée par les valeurs de MAC associées qui sont relativement faibles, à savoir 0.053 et 0.088 respectivement. Pour la configuration 5 (cf Fig. 3.9a et Fig. 3.9c), il n'y a presque aucune déformation sur la chape et le maximum d'amplitude est situé sur le disque. Alors que pour la configuration 14 (cf Fig. 3.9b et Fig. 3.9d), la chape a une déformation importante qui est du même ordre de grandeur que celle du disque.

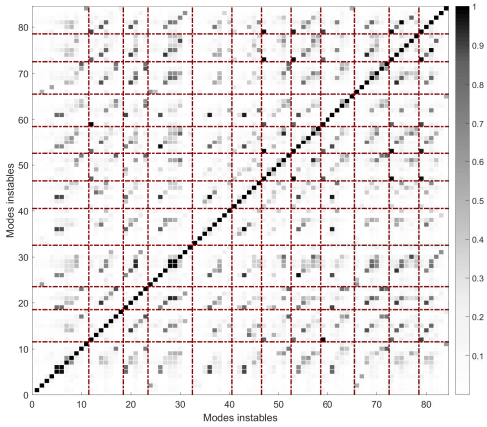
De façon similaire, en comparant les instabilités à 4250 Hz des configurations 3 et 4, le disque a la même déformée, ce qui est en adéquation avec la haute valeur du MAC pour le disque, égale à 0.9444. Mais en regardant plus attentivement les autres composants, leurs déformées sont différentes. C'est particulièrement vrai pour la chape, dont le MAC est de 0.0423. Pour les deux configurations, le maximum de déformation se situe au niveau de la poignée (cf Fig. 3.10). Cependant, pour la configuration 4, la déformation au niveau de la vis est aussi importante (cf Fig. 3.10d) ce qui n'est pas le cas pour la configuration 3 (cf Fig. 3.10c).

Pour conclure, ces résultats conduisent à une difficulté importante pour traiter les différentes conditions de contact des neuf interfaces. Cela aurait été intéressant de pouvoir identifier un ou plusieurs modes instables communs aux différentes configurations afin de pouvoir identifier les conditions de contact associées à l'émergence de ces instabilités.

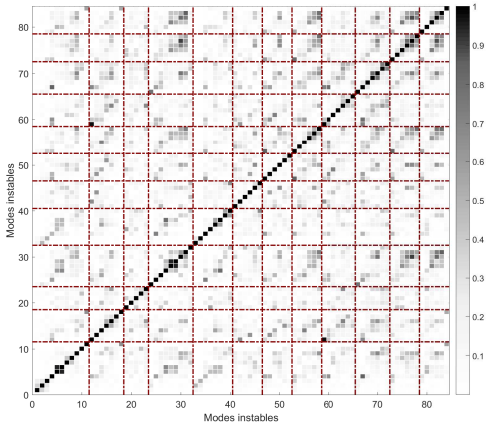
Configuration	**CFG5**	**CFG14**	**CFG3**	**CFG4**
Freq. (Hz)	3473.7	3496.8	4231.8	4267.5
Partie réelle	627.63	302.73	1429	1376.7
MAC Global	0.575		0.371	
MAC Disque	0.955		0.944	
MAC Chape	0.053		0.528	
MAC Etrier	0.088		0.042	
MAC Plaquette intérieure	0.126		0.222	
MAC Plaquette extérieure	0.203		0.566	

TABLEAU 3.5 – Caractéristiques des déformées observées

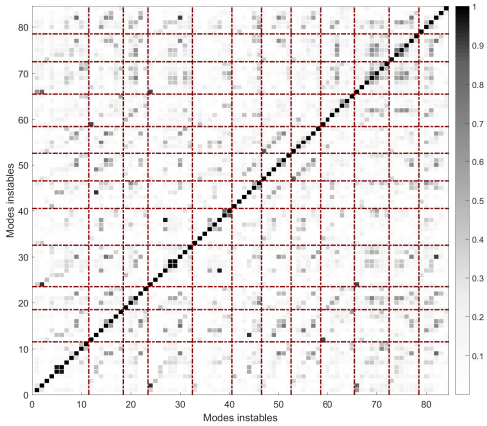
Malheureusement, les modes sont aussi sensibles aux différents états de contact des différentes interfaces et il est donc impossible de suivre un mode instable en fonction des différentes configurations. Il est alors nécessaire de trouver une autre stratégie afin d'analyser le problème et d'avoir une meilleure compréhension du rôle des différents contacts internes sur la propension au crissement.



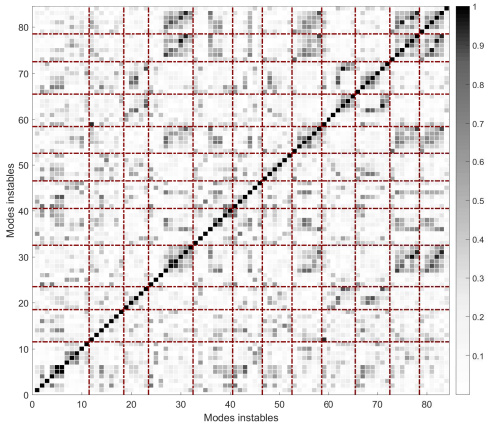
(a)



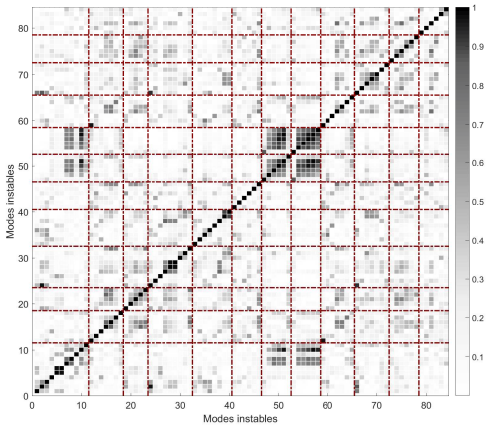
(b)



(c)

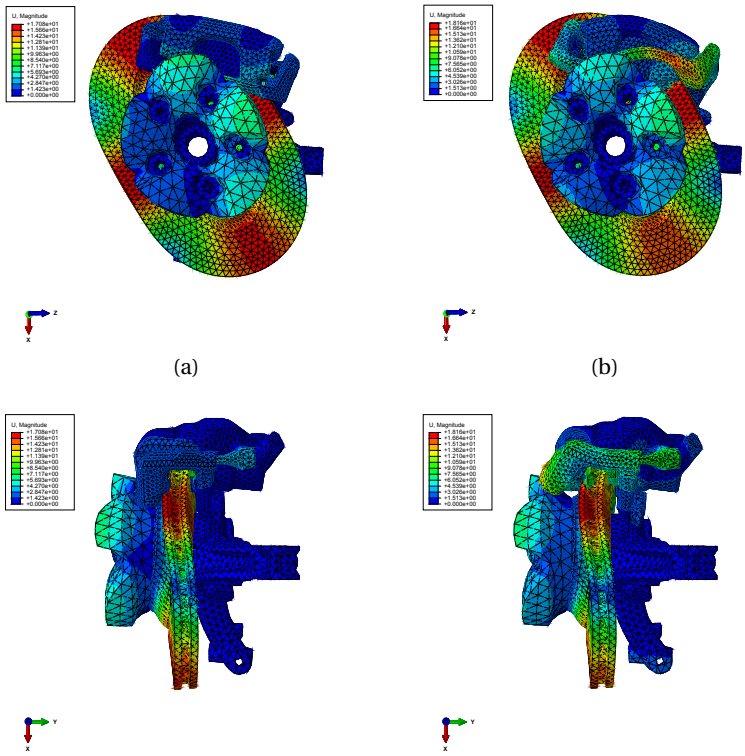


(d)



(e)

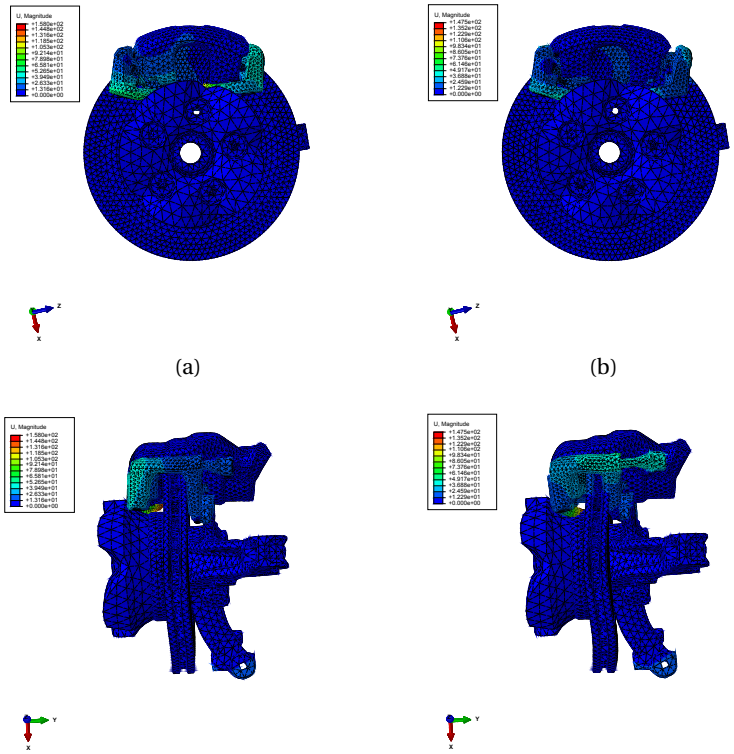
FIGURE 3.8 – Matrices d'AutoMAC des modes instables de 12 configurations pour les différents éléments du frein : (a) Disque, (b) Etrier, (c) Chape, (d) Plaquette intérieure, (e) Plaquette extérieure



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.9 – Comparaison des déformées modales des configurations 5 (gauche) et 14 (droite) - Vue de face (haut) et vue de profil (bas)



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.10 – Comparaison des déformées modales des configurations 3 (gauche) et 4 (droite) - Vue de face (haut) et vue de profil (bas)

3.3.3 Influence des conditions de contact par plage de fréquences et restriction au concept de "mode le plus instable"

La partie précédente a mis en évidence une difficulté importante : il n'est pas possible en pratique d'effectuer un suivi des modes instables par rapport aux différentes configurations. En d'autres termes, il n'est pas possible de trouver une correspondance entre l'émergence d'instabilités au travers des déformées des instabilités et certaines conditions de contact. Il est donc nécessaire de trouver une autre stratégie pour analyser le problème et comprendre le rôle que peuvent jouer les différents contacts sur l'émergence d'instabilité. Afin d'atteindre cet objectif, le choix est fait d'étudier le système de frein sur quelques plages de fréquences d'intérêt.

Afin d'illustrer cette approche, les occurrences des fréquences instables sont étudiées et représentées Figure 3.11. Douze intervalles de fréquences centrés autour d'un pic d'occurrences sont retenus. L'objectif principal étant de savoir si certaines conditions de contact sont systématiquement associées à un pic de fréquences instable donné. Les caractéristiques des différents intervalles de fréquences sont donnés Tableau 3.6. Puis, pour chaque intervalle, les répartitions des conditions de contact des neuf interfaces associées aux fréquences instables sont déterminées. Les résultats sont résumés Figure 3.12 où pour chaque intervalle de fréquences, pour chaque contact, le pourcentage de fois où il a été glissant (en bleu) ou frottant (en jaune) est donné. Dans quelques cas, l'implication de certains contacts dans l'émergence d'une instabilité sur une plage de fréquences est évident. Par exemple, sous 1140 Hz, l'existence de l'instabilité est toujours reliée à un état glissant des contacts DB et DH. Entre 1400 et 1470 Hz, les instabilités sont principalement reliées à un état frottant des contacts DB, PP et RHI et un état glissant des contacts DH, RBE, RCBE et RHE. Pour la plage [1551;1650] Hz, l'émergence de l'instabilité correspond à un état glissant des contacts RBE et RCBE. Cependant, si une telle étude donne quelques résultats et quelques tendances intéressants dans certains cas, pour la majorité d'entre eux il n'y a pas de réelle tendance à tirer. Par exemple entre [1800;2000] Hz ou [3775;3930] Hz la répartition est d'environ 50% pour chaque contact.

Cette approche est intéressante mais semble limitée puisqu'il est possible de trouver deux instabilités de fréquences propres très proches, mais de déformées dissemblables. De plus, les résultats sont largement influencés par le choix des plages de fréquences qui peut être difficile à établir lorsque les pics d'occurrence ne sont pas clairement distincts.

N^o	Intervalle de freq. (Hz)
1	[500; 800]
2	[1070; 1140]
3	[1400; 1470]
4	[1550; 1650]
5	[1800; 2000]
6	[2970; 3020]
7	[3385; 3515]
8	[3775; 3930]
9	[4200; 4320]
10	[4880; 4970]
11	[4988; 5055]
12	[5400; 5595]

TABLEAU 3.6 – Intervalles de fréquences considérés

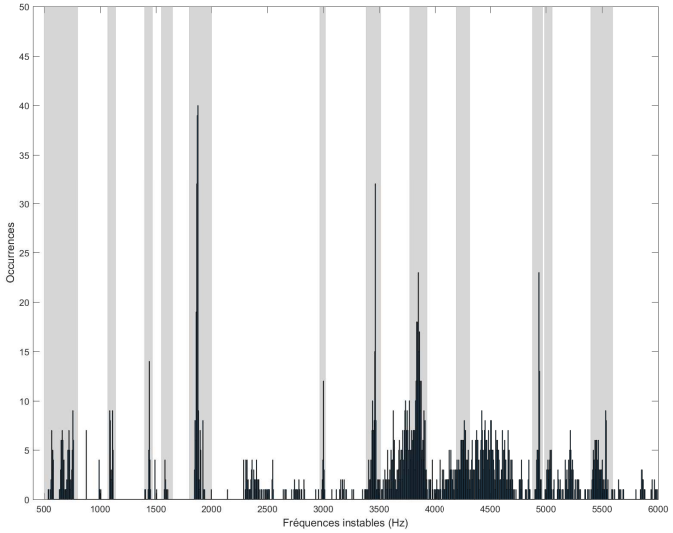


FIGURE 3.11 – Occurrences des fréquences instables et intervalles d'étude

Pour cette raison, une autre approche est nécessaire. Au lieu de caractériser les conditions d'existence des instabilités, le choix est fait de caractériser "la configuration la plus instable" sur des plages de fréquences plus larges, ce qui correspond à l'identification du scénario le plus défavorable dans le cas d'un système de frein. Ce choix peut être vu comme une simplification ou une restriction du problème général de l'étude de l'influence des contacts internes sur les "modes les plus instables".

Ceci nous conduit à identifier les états de contact qui amènent le système dans sa "configuration la plus instable". La notion de *configuration la plus instable* n'est pas nécessairement unique et universelle et peut être sujette à débat. Ici, on considère que la configuration la plus instable correspond au cas où la partie réelle est maximale (c'est-à-dire avec le taux de croissance le plus élevé). Cette considération est liée à une vision basée sur l'analyse de stabilité et non à une vision plus globale et plus juste qui serait basée sur des notions de vibrations auto-entretenues ou de niveaux vibratoires associés. Afin d'illustrer la pertinence de la méthode proposée, l'intervalle de fréquences considéré dans un premier temps est [0;6000] Hz.

L'approche méthodologique utilisée est la suivante : le statut d'un des contacts est imposé (frottant ou glissant), alors que tous les autres états de contact sont laissés libres. Puis, les résultats des $2^8 = 256$ CEA correspondantes sont considérés et la partie réelle maximale est retenue. Cette procédure est réalisée pour les neuf interfaces pour les deux états de contact possibles. Il est à noter que certains calculs CEA sont redondants et seules 512 CEA sont nécessaires. Les résultats obtenus pour $\mu_{d/p} = 0.3$ et $\mu_{d/p} = 0.5$ sont présentés Figure 3.13. Une analyse de l'impact de chaque contact interne est alors possible. Par exemple si $\mu_{d/p} = 0.5$ et si le contact entre le piston et la plaquette intérieure, contact PP, est glissant (voir Figure 3.13b point bleu au contact PP), la partie réelle maximale observable est égale à 725 alors qu'elle est égale à 1100 si le contact PP est frottant (voir point jaune). Donc la configuration "la plus instable" en fonction du contact PP correspond à l'état frottant.

Plus généralement, les deux contacts qui donnent le plus de variations sur les résultats (en terme de maximum de partie réelle) selon leur condition de contact (frottant ou glissant),

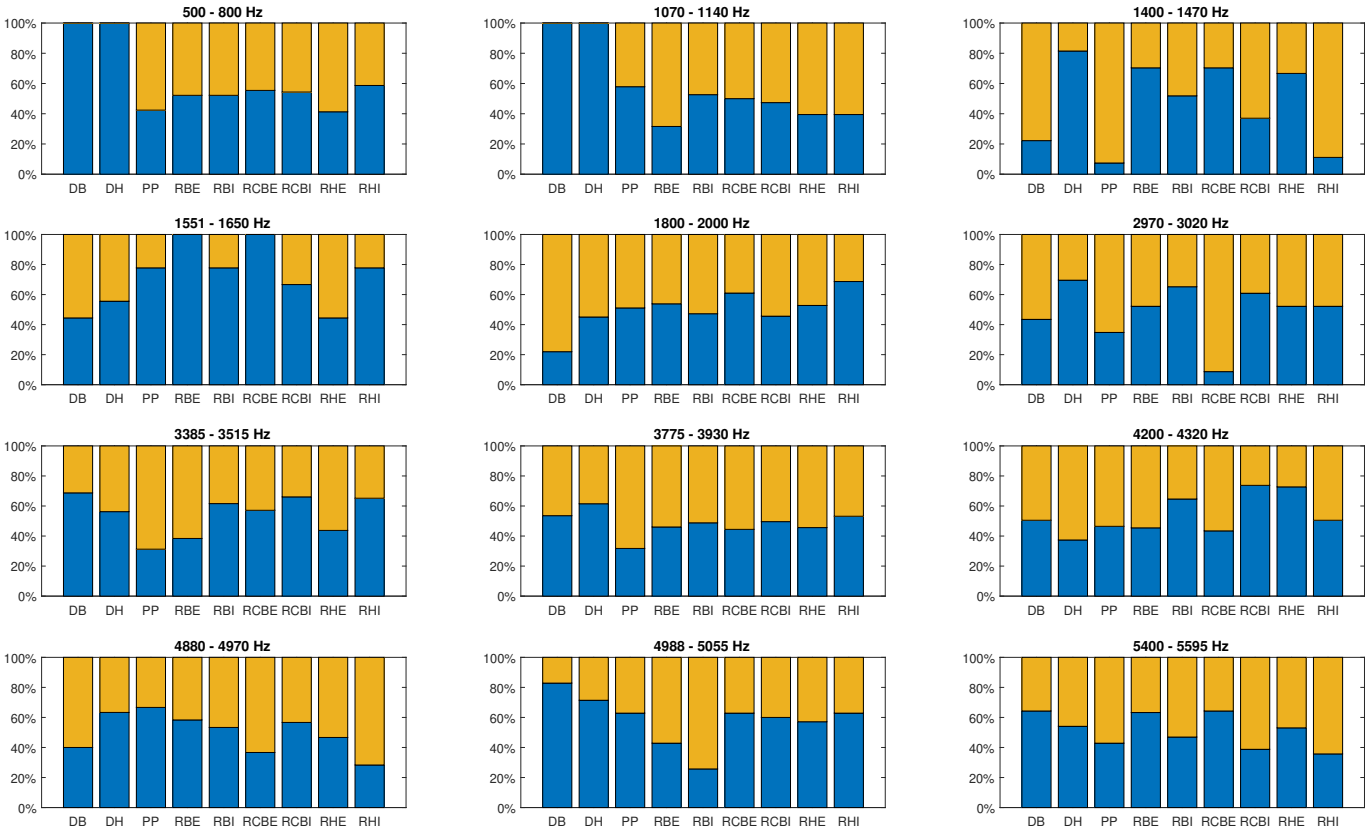
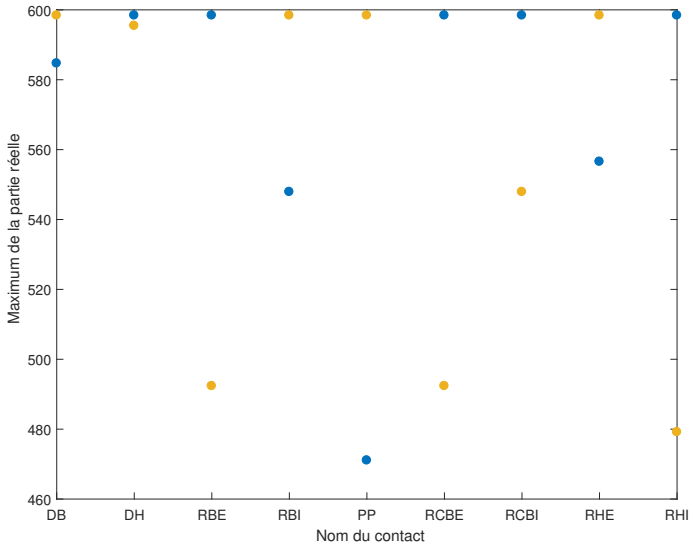


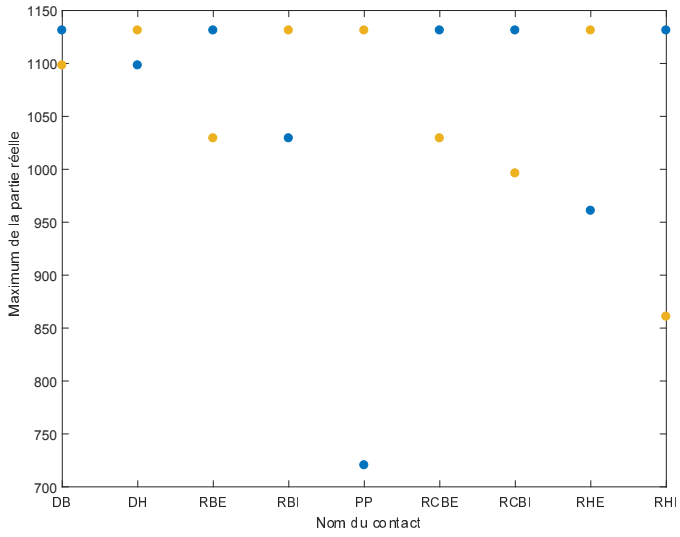
FIGURE 3.12 – Pourcentage de répartition des états de contact pour les différents intervalles de fréquences - Bleu : état glissant ($\mu_{interne} = 0$) et jaune : état frottant ($\mu_{interne} = 0.15$)

sont les contacts piston/plaquette (PP) et le contact radial haut intérieur (RHI). A la différence des contacts doigt haut/plaquette et doigt bas/plaquette (DH et DB) dont la modification de l'état de contact influe peu le maximum de la partie réelle (voir Figure 3.13). Ces résultats montrent qu'il n'est pas forcément nécessaire en première approche de prendre en compte les contacts DB et DH dans des études d'analyse et de conception futures. Par ailleurs, pour un niveau de précision souhaité, il est possible de distinguer les contacts dont il est nécessaire d'identifier correctement leur statut. Par exemple, si l'on souhaite identifier le cas le plus défavorable à 5% près, alors il est caractérisé par un état frottant des contacts PP, RHE et RBI et par un état glissant des contact RHI, RCBI, RCBE et RBE. Les états des contacts DB et DH sont dans la marge d'erreur.

La méthodologie étant expliquée, il est possible de réaliser la même analyse pour différentes plages de fréquences afin de comprendre le rôle des différents contacts sur les différentes plages de fréquences considérées. Les résultats sont présentés Figure 3.14. De la même façon que précédemment, il est possible d'établir une hiérarchie entre les différents contacts internes. On peut remarquer que les contacts les plus influents sur la configuration la plus instable dépendent de la plage de fréquences considérée. Par exemple, la contribution du contact PP est faible sur [950;2005] Hz, mais cruciale sur [4000;4890] Hz. Au contraire, la contribution des deux contacts DB et DH sur les plages de fréquences [0;950] Hz et [950;2005] Hz est importante mais faible sur [4000;4890] Hz. Il est à noter que l'influence des états de contact DB et DH en fonction de la configuration la plus instable sont inversés sur les deux premières plages de fréquences. Pour la première plage [0;950] Hz, la configuration la plus instable est obtenue en ayant DB et DH glissant alors qu'elle est obtenue avec DB et DH frottant entre 950 et 2005 Hz.



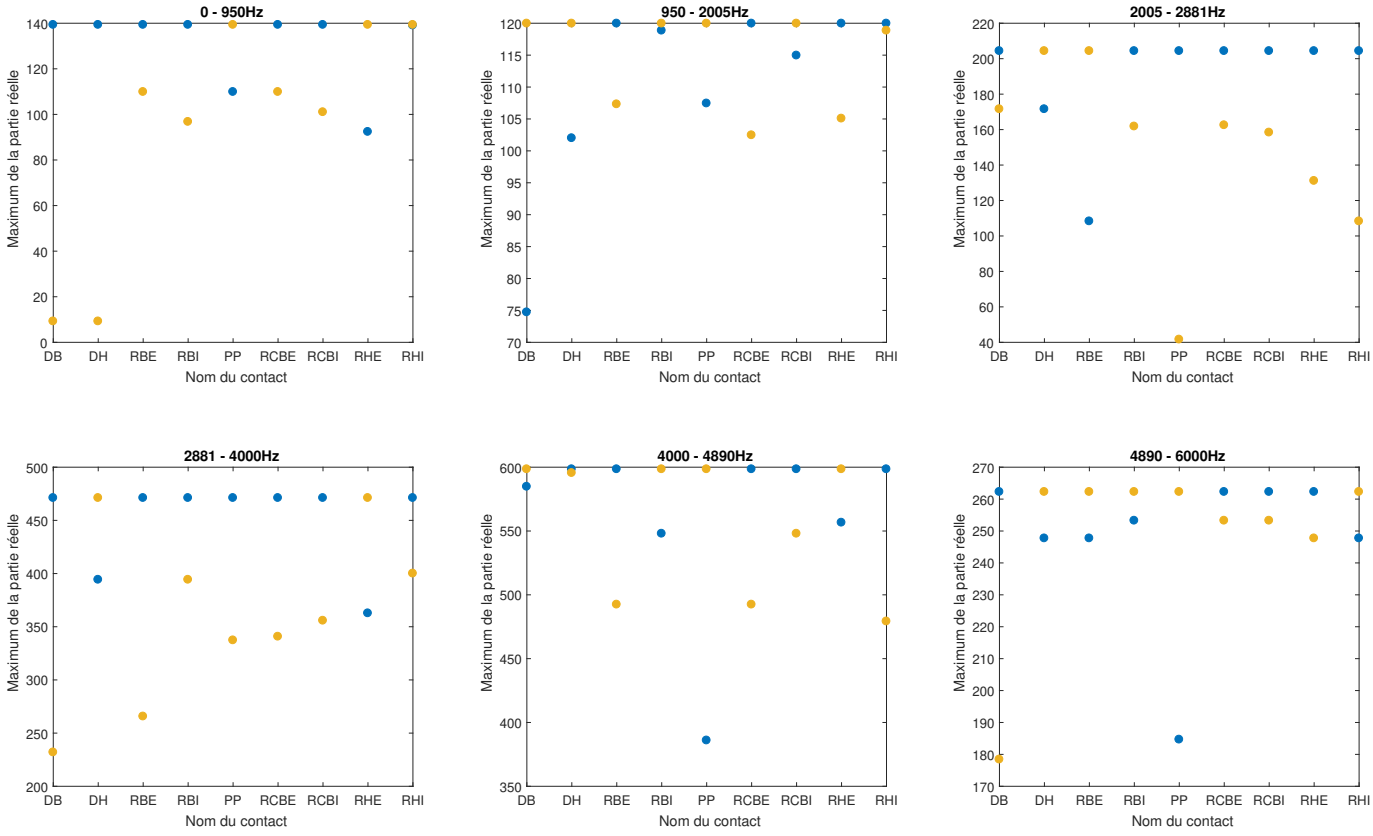
(a)



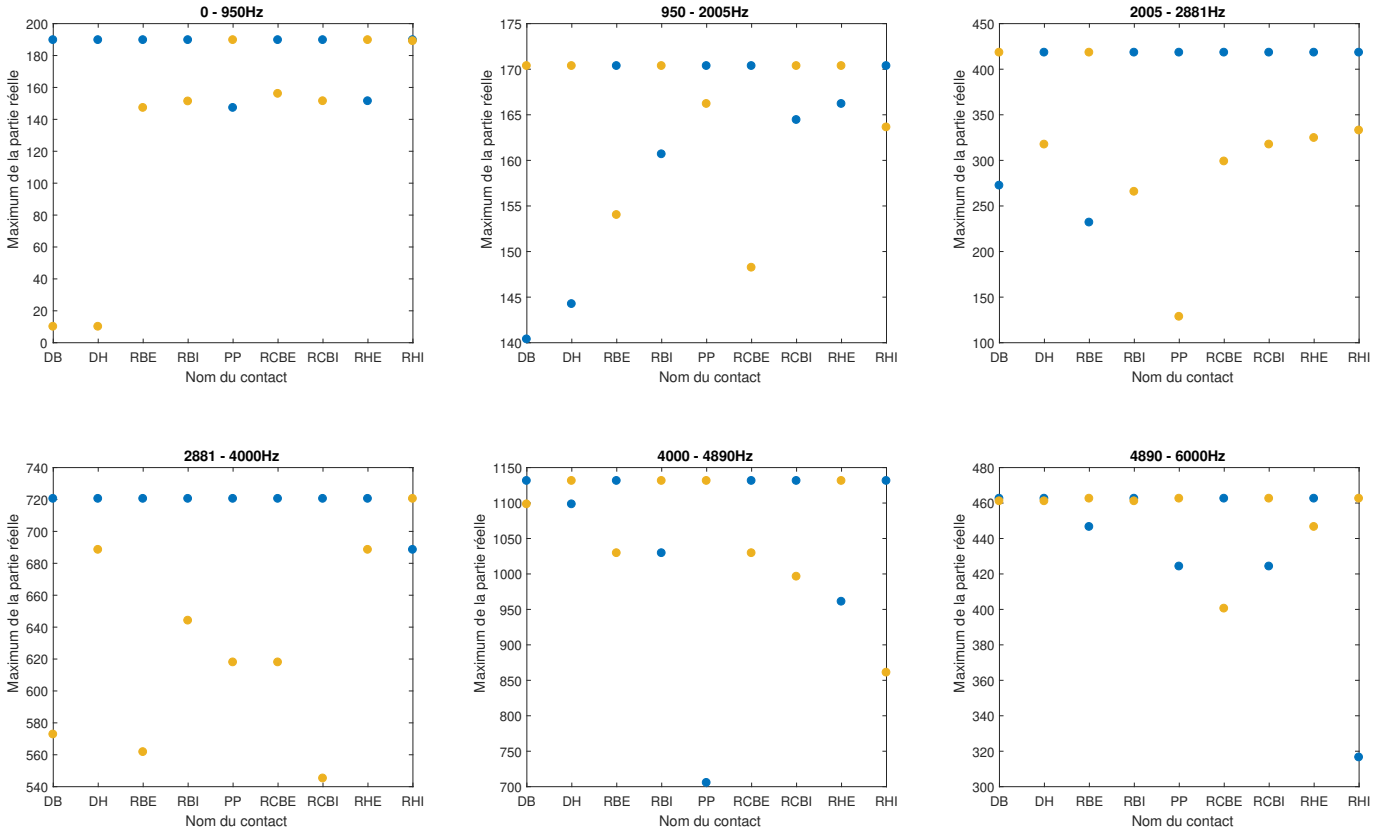
(b)

FIGURE 3.13 – Maximum de la partie réelle pour une condition de contact imposée - Bleu pour un état glissant ($\mu_{\text{interne}} = 0$) et jaune pour un état frottant ($\mu_{\text{interne}} = 0.15$) - pour $\mu_{\text{d/p}} = 0.3$ (en haut) et $\mu_{textd/p} = 0.5$ (en bas)

En conclusion, la stratégie proposée nous permet de statuer sur l'influence des différents contacts internes et d'aboutir à une hiérarchisation de ceux-ci. Certains ont une contribution importante et jouent un rôle capital sur le caractère instable du système : ils font émerger l'instabilité et amènent des parties réelles importantes. D'autres contacts ont une influence plus faible et leur contribution est de second ordre. La modification de ces états de contact conduisent à une légère variation de la partie réelle. La CEA n'étant pas une méthode exacte de détermination de la stabilité, puisque souvent sur- ou sous-prédictive, la détermination des quelques contacts les plus influents et du maximum de la partie réelle avec une certaine marge de tolérance peut être considérée comme une stratégie amplement suffisante dans une démarche de conception.



(a)



(b)

FIGURE 3.14 – Maximum de partie réelle pour un état de contact donné par plage de fréquences - Bleu pour un état glissant ($\mu_{interne} = 0$) et jaune pour un état frottant ($\mu_{interne} = 0.15$) - pour $\mu_{d/p} = 0.3$ (en haut) et $\mu_{d/p} = 0.5$ (en bas)

3.4 Utilisation d'un algorithme génétique pour identifier le scénario le plus défavorable

3.4.1 Motivation industrielle

Il s'avère que la prise en compte des contacts internes est nécessaire dans une démarche de conception complète et robuste pour un système de frein. Cependant, l'identification des différentes instabilités et des conditions de contact associées n'est pas un problème facile à traiter. Il a néanmoins été montré qu'il était possible d'établir une hiérarchie des différents contacts si l'on cherchait à caractériser la configuration la plus instable, ici celle avec la partie réelle maximale. En effet, certains contacts sont responsables de la plus grande partie de l'instabilité et amènent systématiquement le système dans une configuration avec une partie réelle positive et importante. Quelques contacts secondaires contribuent à une légère variation de la partie réelle autour de cette valeur. Identifier cette configuration la plus instable est un objectif important d'un point de vue industriel et plus particulièrement pour PSA même si cela pourrait sembler paradoxal puisqu'on pourrait s'attendre à ce que l'objectif soit de trouver la configuration la plus stable du système. Cependant, le coût numérique prohibitif rend impossible aujourd'hui la proposition d'une stratégie de conception globale prenant en compte les différents contacts. Finalement, la procédure globale adoptée est divisée en deux étapes : une première consiste à identifier le jeu de contacts internes le plus instable pour le système, c'est-à-dire trouver le scénario le plus défavorable. La seconde étape consiste à adopter une démarche de conception sur cette configuration afin de la rendre "moins crissante" d'un point de vue stabilité mais également du point de vue des niveaux vibratoires. En effet, le comportement en service des plaquettes étant inconnu et non contrôlé, la stratégie adoptée ici consiste à partir du scénario le plus défavorable et à l'améliorer en effectuant par exemple des modifications structurelles et/ou matérielles. Cependant, les résultats précédents se basaient sur les résultats des CEA des 512 configurations possibles, ce qui représente un coût numérique trop élevé dans une démarche de conception. En effet, un calcul CEA prend entre 40 min et 1h15 selon les paramètres. L'enjeu consiste donc à trouver une méthodologie permettant d'identifier la configuration la plus instable en un nombre limité de CEA. Le problème à traiter ici est discontinu puisque les variables sont discrètes et même binaires. Ces contraintes rendent l'utilisation de méta-modèles complexe voire impossible. Pour ces raisons, la méthodologie adoptée et présentée dans cette partie est basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique (GA).

Cette partie traite uniquement du problème d'identification de la configuration la plus instable, c'est-à-dire de la première étape de la procédure globale de dimensionnement. Une fois cette étape réalisée, il sera possible de mettre en place une démarche de conception en partant des résultats trouvés dans cette première étape. La seconde phase sera traitée dans des chapitres ultérieurs de ce manuscrit.

3.4.2 Présentation de l'algorithme génétique et adaptation au problème étudié

L'objectif de cette partie est de rappeler brièvement la notion d'algorithme génétique et de discuter de son utilisation pour répondre au problème posé de la recherche de la configuration la plus instable.

Les algorithmes génétiques (GA) sont une sorte d'algorithmes évolutionnistes (EA) utilisés pour approximer la solution d'un problème d'optimisation en un temps raisonnable.

N°	Intervalle de fréq. (Hz)
1	[950 ; 2005]
2	[2005 ; 2881]
3	[2881 ; 4000]
4	[4000 ; 4890]
5	[4890 ; 6000]

TABLEAU 3.7 – Intervalles de fréquences pour l'algorithme génétique

Ils s'inspirent de la sélection naturelle et font évoluer des individus au sein d'une population qui tente de s'améliorer génération après génération par rapport à des objectifs. Dans cette étude, 6 fonctions objectifs sont considérées et correspondent à la partie réelle maximale observable sur chacune des 6 plages de fréquences considérées et données Tableau 3.7. Dans notre cas, les individus correspondent aux configurations et leur génotype aux différents états de contact. À chaque individu sont associés les maxima des parties réelles sur chaque plage de fréquences. Une population regroupe un ensemble d'individus et une génération correspond à une boucle de l'algorithme. La méthodologie générale est représentée Fig. 3.15a. Les différentes étapes sont les suivantes :

— *Étape 1 :* initialisation avec un groupe de configurations initiales créées aléatoirement,
— *Étape 2 :* évaluation des maxima des parties réelles pour chaque configuration,
— *Étape 3 :* création de nouvelles configurations par sélection, croisement et mutation,
— *Étape 4 :* évaluation des maxima de parties réelles pour chaque configuration,
— *Étape 5 :* création d'une nouvelle population avec les meilleurs individus parmi les anciennes et les nouvelles configurations.

Les étapes 3 à 5 sont itérées jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

Les différents opérateurs qui caractérisent un GA sont :

— *la sélection :* elle s'apparente à la sélection naturelle. Les individus les plus adaptés gagnent la compétition, et les moins adaptés la perdent. Différentes stratégies sont proposées dans la littérature telles que la sélection par rang, la roulette, la sélection par tournoi ou encore la sélection uniforme. Dans cette étude, la sélection par tournoi est utilisée, elle consiste à créer un tournoi entre différents individus (différentes configurations) choisis aléatoirement dans la population. Les meilleurs individus sont conservés.
— *le croisement* : cet opérateur est utilisé pour créer les nouveaux gênes (des statuts de contact) des individus de la nouvelle génération à partir de ceux des anciens individus. Plusieurs techniques sont possibles, à savoir le croisement en un point, le croisement en deux points ou le croisement uniforme. Ce dernier est choisi pour la présente étude, il s'agit pour chaque enfant de tirer au sort son génotype dans celui des parents.
— *la mutation :* cet opérateur crée des modifications aléatoires des gènes (les statuts de contact). C'est un élément important des GA puisqu'il permet de remplacer les gènes "oubliés" des anciennes générations ou de tester de nouvelles combinaisons.

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [32, 144]. Les GA sont adaptés aussi bien aux problèmes d'optimisation mono-objectif (SO) qu'aux problèmes multi-objectifs (MO) et selon l'application différents algorithmes existent. Pour l'étude présente, l'objectif est

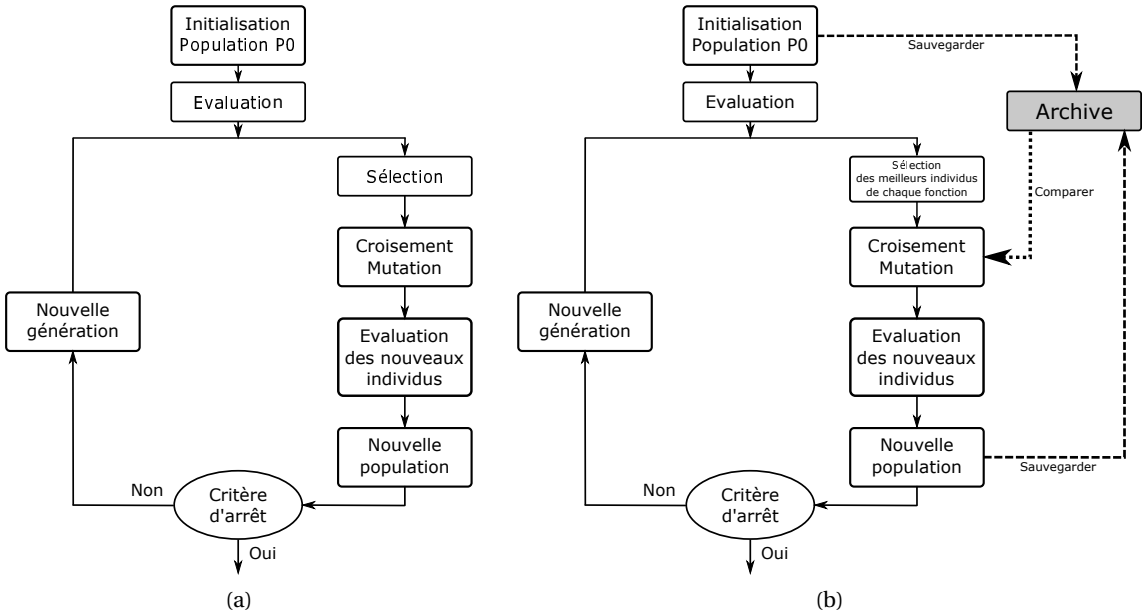


FIGURE 3.15 – Schémas des algorithmes : algorithme génétique (à gauche) et algorithme génétique multi-population (à droite)

de déterminer les statuts des contacts internes qui donnent le maximum de partie réelle sur chaque plage de fréquences. Puisqu'il y a 6 plages de fréquences et donc 6 fonctions objectifs, un algorithme MO pourrait sembler naturel. Cependant, un tel algorithme permet de déterminer le front de Pareto des différentes fonctions objectifs, ce qui n'est pas le résultat recherché ici. En fait, l'objectif est d'identifier la solution (i.e. la configuration la plus instable) sur chaque plage de fréquences et il faudrait lancer un algorithme SO sur chacune d'entre elles. Lancés les uns après les autres, cela signifie que les différentes populations ne peuvent pas apprendre les unes des autres. La proposition développée ici consiste à lancer les six algorithmes SO simultanément avec une population commune. Le schéma général de la méthode est donné Figure 3.15b. Les différentes opérations restent les mêmes et sont effectuées sur l'ensemble de la population. La différence réside dans la sélection des parents : toute la population est prise en compte et les N/N_f meilleurs individus de chaque fonction objectif sont sélectionnés, avec N le nombre de parents à sélectionner et N_f le nombre de fonctions objectifs. Afin de limiter le nombre de CEA à réaliser, une archive est créée avec l'ensemble des individus testés et les nouveaux individus ne doivent pas avoir déjà été croisés.

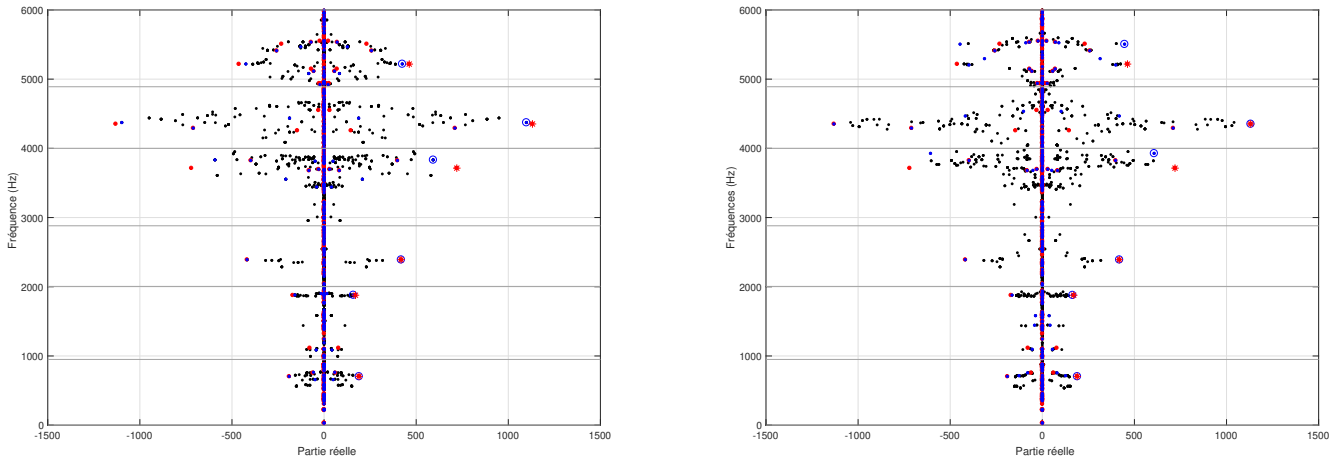
3.4.3 Résultats numériques

Deux jeux de paramètres différents sont utilisés pour le GA, ils sont donnés Tableau 3.8. Le premier jeu de paramètres est caractérisé par une population de taille plus petite et un faible nombre de parents potentiels mais plus de générations sont acceptées, ce qui laisse plus de temps à l'algorithme pour trouver le résultat. Le second jeu est caractérisé par un nombre de parents plus élevé mais le nombre de générations maximal est plus faible. Ici, on mise plus sur la capacité d'exploration de l'algorithme. Afin de comparer les performances des deux algorithmes, ils sont lancés chacun mille fois.

Un exemple de résultats obtenus est représenté Figure 3.16 pour les deux jeux de paramètres. Les différents individus testés au cours de l'algorithme sont représentés en noir, les solutions trouvées par l'algorithme sont en bleu et les solutions de référence en rouge.

N^o	1	2
Taille de la population	25	30
Nombre d'individus sélectionnés	12	20
Nombre de générations	5	4
Nombre moyen de CEA	86.3	122.8

TABLEAU 3.8 – Paramètres de l'algorithme génétique



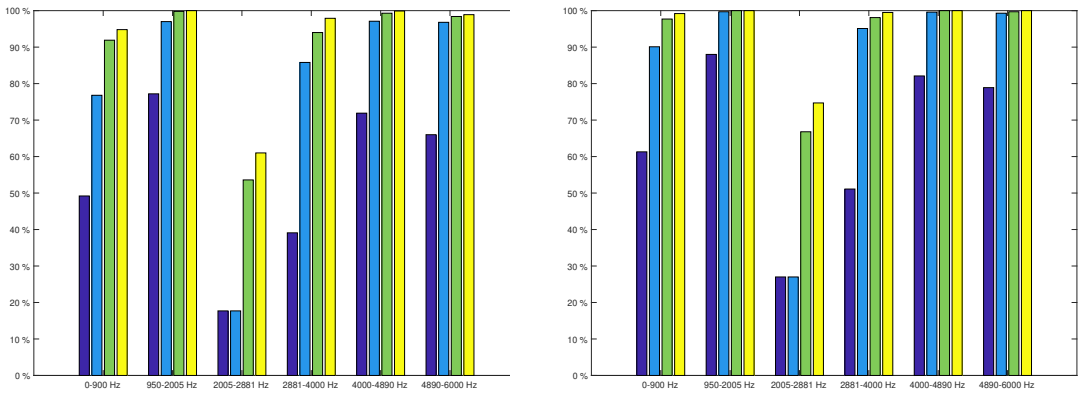
(a) (b)

FIGURE 3.16 – Valeurs propres calculées pendant l'algorithme pour le premier (a) et le second (b) jeux de paramètres - noir : valeurs propres calculées pendant l'algorithme, étoiles rouges : solution théorique, cercle bleus : solutions trouvées par l'algorithme

Dans les deux cas, les solutions identifiées par l'algorithme sont de bonnes approximations des solutions de référence. Même si la solution exacte n'est pas trouvée, la solution approchée est satisfaisante. Par ailleurs, l'ensemble des individus testés donne un bon aperçu du plan complexe complet qui aurait été obtenu si toutes les configurations avaient été testées (voir Figure 3.5).

Afin d'évaluer la robustesse de l'algorithme, sur les 1000 lancements, le pourcentage de cas où la solution a été estimée correctement sur un certain intervalle de tolérance est affiché Figure 3.17. Pour les deux jeux de paramètres, la solution est approchée correctement sauf dans le cas de la troisième plage de fréquences. En effet, pour cette plage de fréquences, en considérant les résultats de référence, les deux valeurs propres avec les parties réelles les plus grandes ont un écart de 22% sur celle ci. Pour les autres plages de fréquences, l'algorithme prouve son efficacité. Si l'on souhaite estimer précisément la partie réelle maximale, c'est-à-dire avec moins de 10% d'erreur, le second jeu de paramètres est plus pertinent. Par exemple, entre 950 et 2005 Hz, avec le premier jeu de paramètres, la solution est estimée avec moins de 10% d'erreur dans 75% des cas, alors qu'elle l'est dans 95% des cas avec le second jeu de paramètres. Cependant, les performances sont similaires pour les deux jeux de paramètres si l'on souhaite une estimation de la partie réelle maximale à 20% près.

Les répartitions des états de contact des 6×1000 solutions trouvées par les GA sont données Figure 3.18. Les résultats sont très similaires pour les deux jeux de paramètres et quelques tendances apparaissent. Par exemple, pour la seconde plage de fréquences, les solutions de l'algorithme donnent toujours DB et DH frottants et presque toujours RBI ; et



(a) (b)

FIGURE 3.17 – Précision de la solution obtenue sur 1000 lancements de l'algorithme génétique avec le jeu de paramètres 1 (a) et 2 (b) sur chaque plage de fréquences - bleu foncé : 10% d'erreur , bleu : 20% d'erreur, vert : 35% d'erreur, jaune : 30% d'erreur

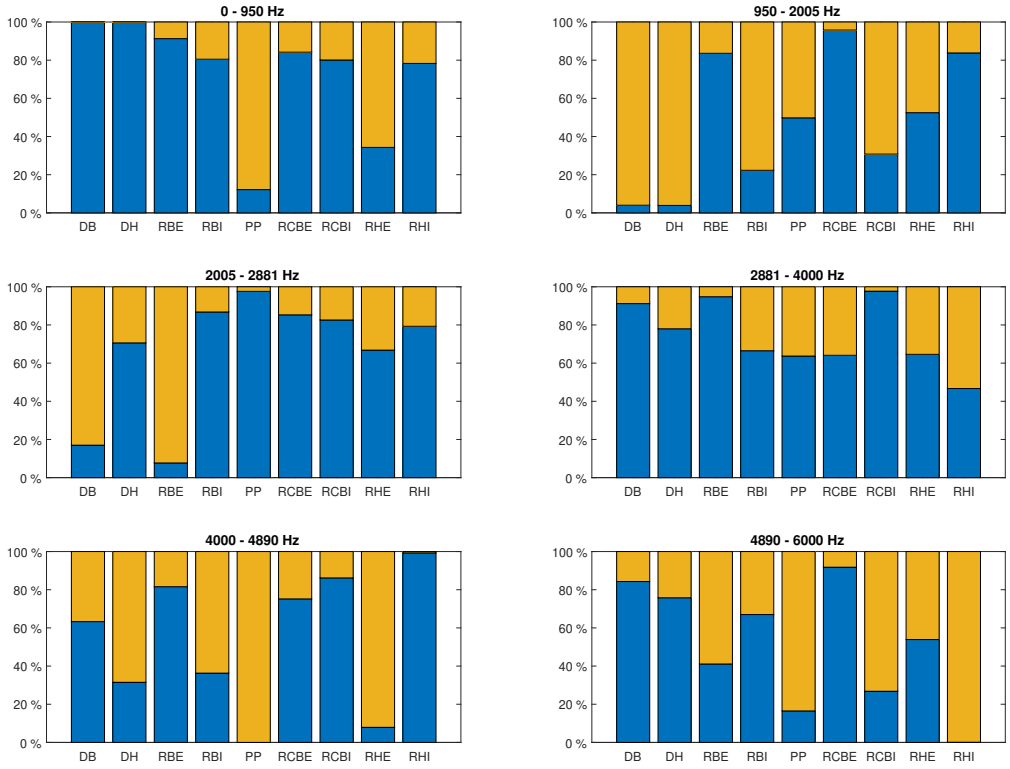
toujours un état glissant pour RCBE et presque toujours pour RBE. Ces résultats doivent être comparés avec les résultats présentés Figure 3.14b. En effet, Figure 3.14b, sur la première plage de fréquences, DB et DH sont les contacts les plus influents et ils doivent être glissants pour avoir la partie réelle maximale. Le GA a bien identifié cette forte influence puisque dans 100% des cas, ces deux contacts sont donnés glissants dans les solutions obtenues. Des analyses similaires peuvent être faites sur les autres plages de fréquences. Ces résultats montrent que le GA a su identifier rapidement les contacts les plus influents sur le maximum de la partie réelle.

Sur un plan purement numérique, le second jeu de paramètres nécessite 36 CEA additionnelles par rapport au premier. Ces calculs supplémentaires apportent une meilleure précision sur l'estimation de la partie réelle pour chaque plage de fréquences (voir Figure 3.17). Cependant, l'apport sur l'identification des contacts les plus influents est relativement faible (voir les similitudes entre les Figures 3.18a et 3.18b). En fait, les quelques contacts les plus influents sont identifiés en très peu de générations et donc très peu d'individus (moins de 90 CEA, soit moins de 90 h de calcul en moyenne), et le coût numérique supplémentaire (36 CEA, soit 36 h de calcul en moyenne) est uniquement utile si une plus grande précision est souhaitée sur l'estimation des parties réelles.

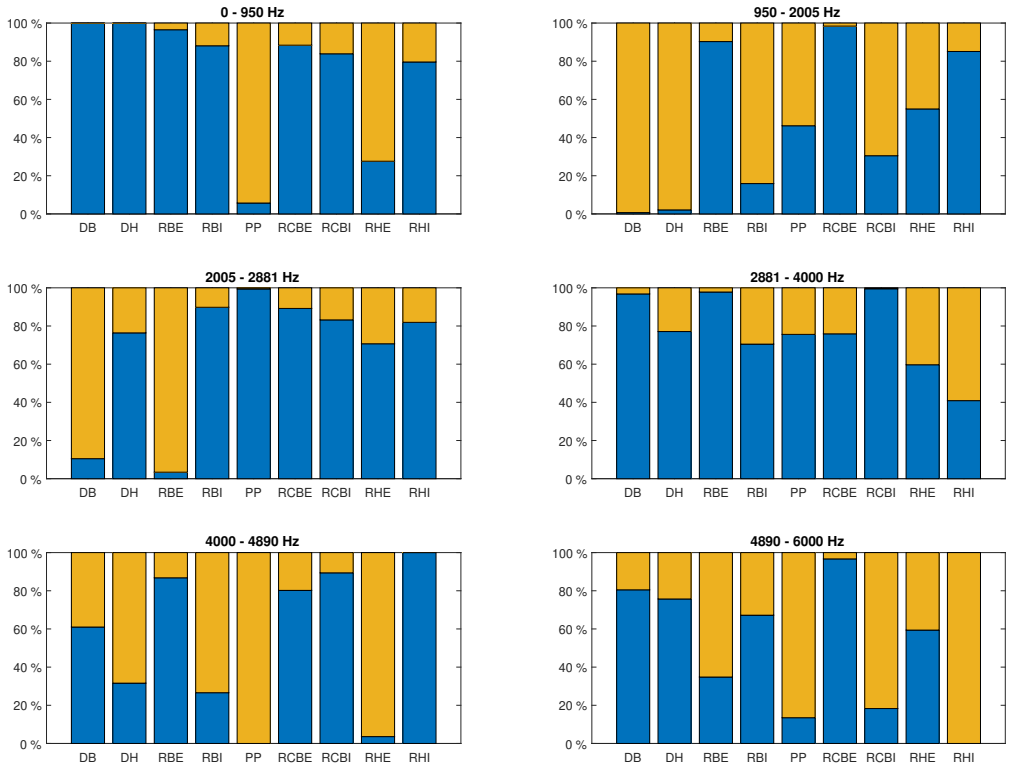
En conclusion, le GA permet d'identifier en quelques calculs CEA la zone avec la partie réelle la plus élevée ainsi que les contacts les plus influents pour les différentes plages de fréquences étudiées. En fait, c'est la détermination précise du maximum de partie réelle qui requiert un nombre élevé de calculs. Dans un contexte où la configuration la plus instable peut être estimée avec une certaine marge de tolérance, le GA donne des résultats satisfaisants. Les caractéristiques des configurations les plus instables sont estimées en seulement 86 CEA au lieu de 512, soit un temps de calcul de 86 h en moyenne contre 512 h en moyenne comme proposé dans la Section 3.3. D'un point de vue industriel, cette stratégie peut s'avérer être la stratégie gagnante pour identifier la configuration la plus défavorable pour un coût numérique maîtrisé et ainsi permettre d'envisager une démarche de conception sur cette configuration.

Avant d'aller plus loin dans le développement de cette seconde étape, il est important de remarquer que cette proposition de méthodologie à "moindre coût numérique" comporte des hypothèses fortes et discutables telles que le fait de se focaliser sur la configura-

tion la plus instable et d'envisager qu'une conception uniquement par rapport à celle-ci aura des effets bénéfiques également sur les autres configurations non sélectionnées par le GA sur le même intervalle de fréquences. Des tentatives de réponse seront apportées au travers d'un cas d'étude dans le Chapitre 5.



(a)



(b)

FIGURE 3.18 – Répartition des états de contact des solutions obtenues avec les 1000 initialisations de GA vec le premier (a) et le second (b) jeu de paramètres - bleu : état glissant et jaune : état frottant

3.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté l'importance que les différents contacts présents dans le système de frein pouvaient avoir sur la propension au crissement. En effet, la modification de ces différents états de contact impacte notablement le comportement dynamique du système. Cependant, prendre en compte l'ensemble de ces contacts en plus du contact plaquettes/disque dans une démarche de dimensionnement est actuellement impossible au vu des temps de calcul que cela nécessiterait. Afin de palier ce problème, une première analyse a permis de réduire la taille du problème en montrant qu'il était possible de se limiter à deux états pour chaque contact : frottant ou glissant. Une fois cette restriction des jeux de paramètres du problème proposée, il s'est avéré que les différentes déformées modales associées aux différentes instabilités étaient elles aussi très sensibles aux différents états de contact.

Le choix a alors été fait d'identifier le scénario le plus défavorable, c'est-à-dire trouver le jeu de paramètres qui amène le système dans l'état le plus instable possible, le critère retenu ici étant celui du maximum de la partie réelle. Il s'avère que quelques contacts sont plus influents que d'autres pour amener le système dans cette configuration et que leur influence dépend des plages de fréquences considérées. Ce choix de positionnement du problème via la configuration la plus instable a le mérite de proposer un critère simple pour l'étude d'ingénierie du crissement de frein.

Enfin, une dernière analyse a permis de montrer qu'il était possible d'identifier rapidement les paramètres les plus influents en utilisant un algorithme génétique afin de limiter le nombre de calculs CEA à réaliser et ainsi maitriser le coût numérique associé à cette étape de recherche de la configuration la plus instable.

En conclusion, dans une démarche complète de dimensionnement, une première étape permettant avec un nombre limité de calculs CEA d'identifier quelques configurations qui sont les plus défavorables pour le système a été proposée et mise en place. A partir de ces configurations identifiées comme étant les plus défavorables, il sera possible d'effectuer une démarche de conception en réalisant des modifications structurelles par exemple, permettant de diminuer la propension au crissement d'un système de frein.

D'un point de vue pratique, cette étape de conception non traitée dans ce chapitre doit permettre d'étudier l'influence de différents paramètres de conception choisis et contrôlés tout en prenant en compte la variabilité d'autres paramètres potentiellement non maitrisés. L'enjeu réside dans la détermination du jeu de paramètres "contrôlés" qui permettra de rendre le système le plus stable possible malgré la variabilité des paramètres non maitrisés. Il est alors évident que réaliser les calculs pour tous les jeux de paramètres possibles représenterait un nombre de calculs CEA considérable. Par conséquent, il est nécessaire de trouver et de mettre en place une méthodologie permettant de limiter ce nombre de calculs. Ceci fait l'objet des deux prochains chapitres de ce manuscrit.

Dans un premier temps, une étude préliminaire sera menée sur un modèle académique simple dans le Chapitre 4. Elle a pour objectif de proposer et de discuter une méthodologie permettant de répondre à cette problématique d'exploration de l'espace de conception et de traitement des incertitudes à un coût numérique maitrisé. L'avantage majeur de ce premier travail est de pouvoir tester et comparer différentes stratégies en faisant abs-

traction de la contrainte des temps de calcul. Il faut cependant rester conscient qu'une telle approche ne permet pas de se rendre compte de certaines difficultés inhérentes au traitement d'un modèle éléments finis et que la difficulté principale sera de proposer une démarche qui puisse y faire face. Ces différents aspects seront traités dans le Chapitre 5 lorsque la méthodologie proposée dans le Chapitre 4 sera appliquée au modèle éléments finis.

Finalement une démarche globale de dimensionnement et de conception de frein est proposée ici au travers de deux grandes phases. Pour rappel, vu le grand nombre de paramètres potentiellement influents, il est impossible de tous les considérer simultanément. La première phase, traitée dans ce chapitre, permet d'identifier à l'aide d'un GA le jeu de contacts internes mettant le système dans sa configuration la plus instable. Une fois ce scénario le plus défavorable identifié, la seconde phase peut être abordée et permet de trouver le jeu de paramètres de conception qui stabilise le système tout en prenant en compte l'aspect aléatoire de certains facteurs. Cependant, il est important de rappeler que la première étape identifie la "configuration la plus instable" à partir d'une analyse de stabilité basée sur la CEA. Il est néanmoins connu que cette méthode montre parfois des limitations fortes en terme de prédiction. Ainsi, dans le chapitre suivant, une caractérisation de cette "configuration la plus instable" en se basant sur une méthode allant plus loin que la CEA sera abordée. Elle sera d'abord développée sur le modèle académique simple avant d'être déployée sur le modèle éléments finis dans le Chapitre 6. L'objectif sera alors d'identifier les différentes possibilités qu'offre cette approche tout en restant dans des temps de calcul raisonnables.

Chapitre 4

Méta-modélisation pour la prédiction des valeurs propres complexes d'un modèle phénoménologique

Sommaire

4.1 Présentation du modèle phénoménologique 90
4.1.1 Système mécanique 90
4.1.2 Présentation des configurations étudiées 91
4.1.3 Paramètres incertains : choix des méthodes 93
4.2 Méthode de type krigeage 95
4.2.1 Formalisme 95
4.2.2 Application 99
4.3 Développement de type chaos polynomial 119
4.3.1 Formalisme 120
4.3.2 Application 125
4.4 Krigeage et chaos polynomial : une approche hybride 132
4.4.1 Formalisme 132
4.4.2 Application 133
4.5 Conclusion 147

Introduction

Ce chapitre a pour principal objectif de montrer la capacité de certaines méthodes, en particulier le krigeage et le chaos polynomial, à traiter du problème de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques à interfaces frottantes en prenant en compte les incertitudes paramétriques. Plus particulièrement, il s'agit d'évaluer leur potentiel à prédire précisément et efficacement l'évolution des valeurs propres caractérisant la stabilité en fonction de paramètres incertains. Avant de pouvoir utiliser de telles méthodes sur un modèle éléments finis complet correspondant au système de frein PSA, il peut s'avérer utile de les tester sur un modèle phénoménologique simple afin de s'assurer de leur capacité à traiter le problème. En effet, cela nous permet de tester différentes stratégies et de valider la pertinence de certains développements sans avoir la contrainte des temps de calculs et/ou les difficultés liées à un MEF. Cette partie est donc dédiée à l'application de différentes méthodes de méta-modélisation pour la prédiction de l'évolution des valeurs propres d'un modèle phénoménologique simple. Dans un premier temps, le modèle académique est introduit, puis différentes méthodes se basant sur le krigeage et l'expansion de type chaos polynomial sont présentées puis appliquées. Enfin, une approche hybride associant le krigeage et le chaos polynomial est présentée, permettant de traiter différents types d'incertitudes simultanément.

4.1 Présentation du modèle phénoménologique

4.1.1 Système mécanique

Le modèle phénoménologique étudié ici est un modèle à quatre degrés de liberté représenté Figure 4.1. Il tire son origine du modèle simple proposé par Hulten [66] déjà présenté dans le Chapitre 2. Ce dernier a déjà été utilisé dans des études précédentes afin de montrer le rôle de l'amortissement et le paradoxe déstabilisant [133]. Il a aussi servi de base à des études sur la prédiction des instabilités de couplage de modes soumis à des paramètres incertains [102–104, 125]. Le modèle phénoménologique présenté ici est une extension du modèle de Hulten proposée afin de traiter le cas des multi-instabilités [30]. Il s'agit de deux masses m_1 et m_2 maintenues en contact contre des bandes mobiles comme indiqué sur la Figure 4.1. Les différents contacts sont assurés par des plaques reliées à chaque masse par un ressort et un amortisseur. Les deux masses sont couplées linéairement par un ressort de raideur k_a et un amortisseur c_a. Les deux masses sont supposées être toujours en contact avec les trois bandes mobiles et les coefficients de frottement aux différentes interfaces sont identiques et notés μ. Une loi de Coulomb classique est prise pour la modélisation du contact. La vitesse des bandes est supposée constante et les vitesses de déplacement relatif entre les masses et les bandes sont supposées positives afin que la direction des efforts de frottement F_t soit toujours la même. La loi de Coulomb nous donne la relation de proportionnalité entre les efforts normaux F_n et les efforts tangentiels F_t : $F_t = \mu F_n$.

L'équation du mouvement du modèle à quatre degrés de liberté est donnée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur déplacements définit par : $\mathbf{X} = \left(x_1\ y_1\ x_2\ y_2\right)^{\mathrm{T}}$, $\dot{\mathbf{X}}$ le vecteur vitesse et $\ddot{\mathbf{X}}$ le vecteur accélération. Les matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement structural du système mécanique. La matrice $\mathbf{K}_\mu$ correspond à la matrice des contributions des efforts de frottement entre les bandes et les plaques. Les expressions des différentes matrices sont :

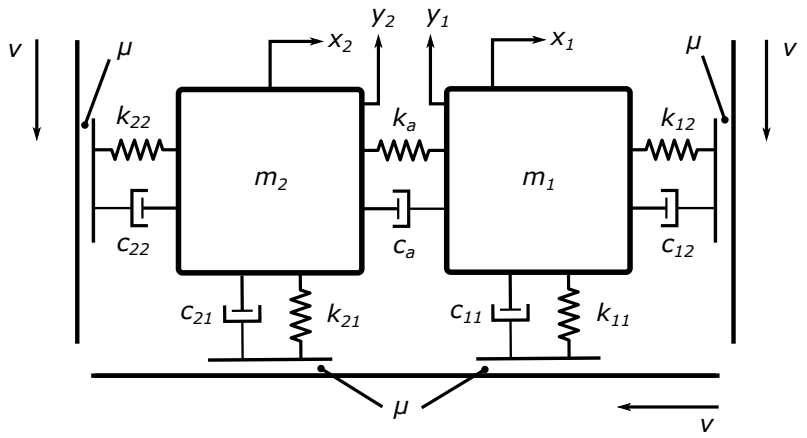


FIGURE 4.1 – Modèle phénoménologique du double Hulten

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{12}+c_a & 0 & -c_a & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 & 0 \\ -c_a & 0 & c_{22}+c_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{12}+k_a & 0 & -k_a & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 & 0 \\ -k_a & 0 & k_{22}+k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{K}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \mu k_{11} & 0 & 0 \\ -\mu k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu k_{21} \\ 0 & 0 & -\mu k_{22} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

L'analyse de stabilité du système est réalisée en effectuant une CEA sur le système. La position d'équilibre du système étant la position $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, le calcul CEA revient donc à la résolution de :

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu\right) = 0 \tag{4.6}$$

On obtient ainsi les différentes valeurs propres complexes $\lambda_j = a_j + \imath\omega_j$ et leurs vecteurs propres associés $\mathbf{\Psi}_j$. La stabilité est déterminée à partir du signe des a_j, comme explicité dans la section 2.3 du Chapitre 2.

4.1.2 Présentation des configurations étudiées

L'objectif de cette partie est d'utiliser différentes méthodes de méta-modélisation afin de prédire la stabilité du système dynamique. En d'autres termes, on cherche à prédire l'évolution des valeurs propres du système en fonction de différents paramètres dont la valeur est inconnue. Afin de valider les différentes méthodes, deux configurations du système montrant des comportements différents sont retenues. Leurs caractéristiques sont données Tableau 4.1 et les évolutions des parties réelles et des parties imaginaires en fonction

Paramètres	m_1 (kg)	m_2 (kg)	k_{11} ($N.m^{-1}$)	k_{12} ($N.m^{-1}$)	k_{21} ($N.m^{-1}$)	k_{22} ($N.m^{-1}$)	k_a ($N.m^{-1}$)	c_{11} ($N.s.m^{-1}$)	c_{12} ($N.s.m^{-1}$)	c_{21} ($N.s.m^{-1}$)	c_{22} ($N.s.m^{-1}$)	c_a ($N.s.m^{-1}$)
Config. 1	1	1	3 000	6 000	1 000	3 000	100	1	1	1	1	1
Config. 2	1	1	3 000	6 000	1 000	3 000	1000	1	1	1	1	1

TABLEAU 4.1 – Paramètres des deux configurations étudiées du modèle mécanique

du coefficient de frottement μ sont données Figure 4.2. Elles diffèrent l'une de l'autre par la complexité des différents couplages de modes ayant lieu, cette différence étant principalement due à la raideur de couplage k_a entre les deux masses $m_1$et m_2.

La première configuration peut être vue comme deux couplages de modes "classiques", c'est-à-dire comme deux systèmes de type Hulten simple quasiment "indépendants". Comme on peut le voir sur la Figure 4.2a, deux coalescences indépendantes ont lieu. Pour chacune d'entre elles, un mode est instable et l'autre stable. Ainsi, pour la première coalescence, l'instabilité est détectée à partir de $\mu = 0.34$ et la pulsation du mode instable associé est 63.02 rad.s^{-1}. Pour la seconde coalescence, l'instabilité apparait pour $\mu = 0.58$ et la pulsation instable associée est de 41.66 rad.s^{-1}.

La seconde configuration fait apparaitre des schémas de coalescence et des mécanismes de couplage de modes plus complexes avec des phénomènes de croisement entre les modes. L'origine principale de ce comportement est le fort couplage entre les deux masses m_1 et m_2. Trois phases différentes sont observables sur les Figure 4.2c et 4.2d. Une première instabilité apparait à partir de $\mu = 0.20$, la pulsation instable associée est de 58.12 rad.s^{-1}. Les deux autres couplages de modes sont détectés à $\mu = 0.48$ et $\mu = 0.81$ avec des pulsations instables respectivement égales à 66.60 rad.s^{-1} et 44.73 rad.s^{-1}. Les modes peuvent être impliqués dans différents couplages, par exemple ici on observe un croisement à $\mu = 0.55$. Cette seconde configuration présente des évolutions non monotones des parties réelles, ainsi que des phénomènes de couplage et de découplage de modes.

L'objectif de considérer ces deux configurations est de montrer la capacité ainsi que les limitations des différentes méthodes à prédire des phénomènes de couplage de modes allant des plus classiques aux plus complexes.

Suivi des modes : utilisation du MAC La finalité de l'étude consiste à prédire l'évolution des différentes valeurs propres en fonction de différents paramètres qui peuvent varier. Afin de pouvoir réaliser un tel travail, il est nécessaire de pouvoir suivre l'évolution de chacune des valeurs propres indépendamment des autres.

L'un des moyens les plus efficaces pour permettre un suivi précis de l'évolution des valeurs propres consiste à suivre l'évolution des modes propres associés. Il s'agit alors de comparer deux ensembles de modes et de réaliser un appairage entre eux en se basant sur l'utilisation d'un critère de MAC. Pour rappel, le MAC entre deux déformées $\mathbf{\Phi}_1$ et $\mathbf{\Phi}_2$ est donné par :

$$\text{MAC}(\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2) = \left(\frac{|\mathbf{\Phi}_1^* \mathbf{\Phi}_2|}{\|\mathbf{\Phi}_1\| \|\mathbf{\Phi}_2\|} \right)^2 \tag{4.7}$$

où * désigne le conjugué complexe d'un vecteur. Le critère de MAC est valable aussi bien pour des modes réels que complexes et est insensible à la phase et à la norme des vecteurs

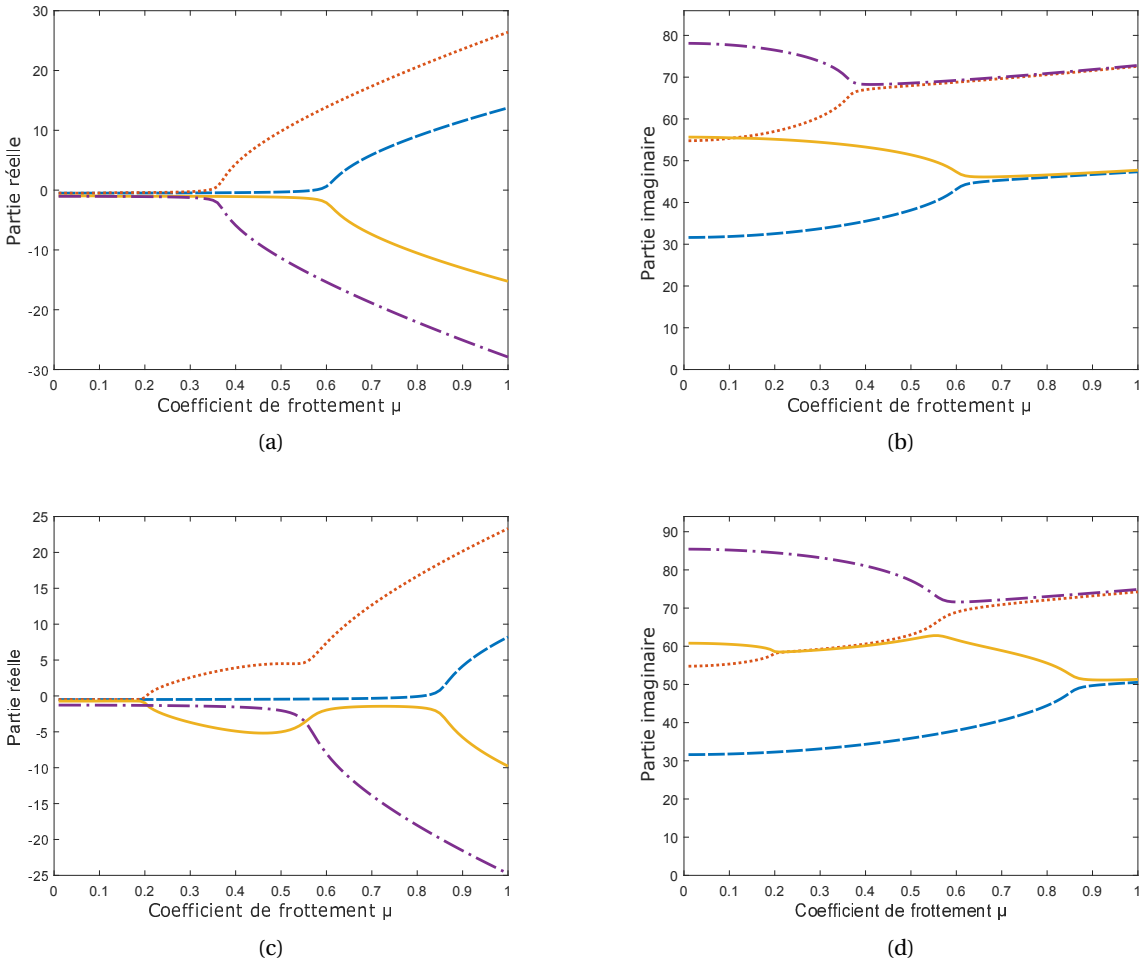


FIGURE 4.2 – Évolution des parties réelles (a-c) et des parties imaginaires (b-d) des valeurs propres en fonction de μ pour la configuration 1 (a-b) et la configuration 2 (c-d)

$\mathbf{\Phi}_1$ et $\mathbf{\Phi}_2$. Cependant, la principale limitation du MAC vient de sa sensibilité aux composantes de grandes valeurs dans les vecteurs propres.

Ce critère de MAC a déjà été utilisé par Nobari et al.[109] afin de suivre avec certitude le mode instable sur lequel le prédicteur a été construit. Les auteurs proposent de corréler les déformées issues des différents points de calculs avec le calcul de conception initial de référence. Dans notre étude, nous proposons d'étendre l'utilisation du critère de MAC au suivi des modes stables et instables afin de prédire l'évolution des parties réelles et des pulsations propres du système sur l'ensemble de la plage d'étude.

4.1.3 Paramètres incertains : choix des méthodes

L'objectif de cette partie est de tester différentes méthodes traitant de la prise en compte des incertitudes sur un modèle simple afin de montrer la capacité de ces dernières à répondre à notre problème tout en éliminant la contrainte des temps de calcul. Au sein du modèle éléments finis de frein, différents types de paramètres incertains sont identifiés. Certains sont aléatoires au sens où ils sont caractérisés par une PDF, d'autres sont des paramètres de conception et sont définis sur un intervalle. Comme vu dans le Chapitre 2, différentes méthodes peuvent être employées lorsqu'un système est soumis à un ou plu-

sieurs types d'incertitudes.

La première option est de remplacer le modèle $\mathscr{M}$ trop coûteux par un modèle approché $\widehat{\mathscr{M}}$. A partir d'un ensemble d'entrées/sorties appelé ensemble d'apprentissage, un méta-modèle $\widehat{\mathscr{M}}$ est construit. Cette approche boîte noire (*black-box*) est applicable à n'importe quel modèle et aucune hypothèse n'est faite sur ce dernier. Ces stratégies sont de plus en plus courantes ces dernières années pour la prédiction d'expériences numériques lorsque les coûts numériques du modèle $\mathscr{M}$ sont trop importants [72, 75, 123]. Une fois ce méta-modèle $\widehat{\mathscr{M}}$ au coût numérique négligeable construit, toutes les opérations peuvent être réalisées dessus, à savoir des tirages de Monte Carlo pour propager l'incertitude ou encore de l'exploration de l'espace de conception pour déterminer un jeu de paramètres répondant à un cahier des charges. L'avantage de cette approche est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur les lois de probabilité suivies par les variables aléatoires du problème. Parmi ces méthodes, les méthodes de régression régularisée, telles que le krigeage et le Support Vecteur Machine (SVM) par exemple, peuvent se montrer particulièrement adaptées à notre problème. Une étude récente de Sudret et al. [98] compare les deux méthodes sur différents cas plus ou moins complexes allant d'une fonction analytique à un modèle éléments finis de grande dimension. Il apparait dans cette étude que les deux méthodes ont des performances comparables. Selon chaque situation, une méthode se montrera plus adaptée que l'autre mais la différence reste marginale. On notera que la méthode SVM nécessite plus de paramètres à calibrer que le krigeage. Par ailleurs, le krigeage se trouve être le meilleur estimateur linéaire sans biais. De plus, cette dernière méthode a été utilisée avec succès par Nobari [109] pour prédire l'évolution d'une valeur propre instable en fonction de plusieurs paramètres. Même si dans cette application, les plages de variation des paramètres restent faibles et qu'un unique mode instable de disque est considéré, les bons résultats obtenus laissent présager la capacité de la méthode a être étendue. Pour ces différentes raisons, notre choix s'orientera vers l'utilisation du krigeage.

Cependant, les méthodes de méta-modélisation ne permettent pas de prendre en compte les différentes caractéristiques du modèle puisque ce dernier est vu comme une boîte noire. De plus, les caractéristiques probabilistes des paramètres ne sont pas non plus modélisées. Il est nécessaire de refaire des tirages de MCS sur le méta-modèle à posteriori pour avoir les différentes informations statistiques. Aussi, les méta-modèles ont pour objectif d'avoir le niveau de précision le plus grand possible sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Cependant, dans le cas de variables aléatoires caractérisées par une PDF, il n'est pas nécessaire d'avoir un niveau de précision important là où la probabilité est quasi-nulle. Une alternative consiste alors à ne pas approcher la fonction $\mathscr{M}$ mais plutôt la fonction aléatoire $\mathrm{Y} \equiv \mathscr{M}(\mathbf{X})$. On parle alors de méta-modèle stochastique. Une méthode classique est la méthode d'expansion de type chaos polynomial. Contrairement aux méthodes de perturbation, elle n'a pas de boule de convergence, ce qui lui assure une plage de validité plus grande. L'expansion en polynômes du chaos fournit une représentation explicite de la sortie en fonction des variables aléatoires d'entrée $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p\}$ qui peut permettre une analyse des résultats et des différents niveaux d'interaction pouvant exister entre les variables. De plus, cette décomposition donne directement accès aux différents moments statistiques et aux indices de Sobol de la fonction sans avoir à relancer une procédure MCS sur le modèle $\widehat{\mathscr{M}}$. Pour ces différentes raisons, le chaos polynomial sera aussi utilisé afin d'illustrer la méthode. Celui-ci a déjà été mis en place de façon intrusive à plusieurs reprises avec succès pour la prédiction des valeurs propres d'un système à deux degrés de liberté soumis à des vibrations induites par frottement [124] puis avec une approche multi-éléments sur un MEF [125]. Son utilisation dans notre cadre a pour

objectif d'illustrer succinctement le fonctionnement de la méthode.

Finalement, une idée naturelle pourrait être de trouver une méthode associant à la fois le krigeage et le chaos afin de pouvoir prendre en compte simultanément les paramètres de conception décrits par des intervalles et les paramètres aléatoires décrits par des PDF. Ainsi une méthode hybride associant le krigeage et le chaos polynomial pour traiter les variables paramétriques et les variables aléatoires simultanément sera développée et présentée. L'idée de la méthode consiste à exprimer les coefficients du chaos polynomial avec le formalisme du krigeage. La méthodologie ainsi que son application sera expliquée et validée sur le modèle phénoménologique.

4.2 Méthode de type krigeage

Cette partie est dédiée à la présentation de la technique de krigeage. L'objectif est de montrer la capacité de cette méthode à prédire correctement l'évolution des valeurs propres de notre système en fonction de différents paramètres variables. Dans un premier temps, le formalisme général est présenté puis la méthodologie est appliquée sur le modèle académique permettant d'expliquer les choix qui seront réalisés par la suite.

4.2.1 Formalisme

Krigeage universel

Le krigeage fait partie des méthodes d'apprentissage statistique. C'est-à-dire que l'on cherche à construire une fonction entre le vecteur des entrées $\mathbf{x}$ et la sortie y. La sortie y est supposée de dimension 1. Si elle est supérieure à 1, la méthode est applicable sur chaque dimension. Pour cela on dispose d'un ensemble de couples entrée/sortie $\left\{(\mathbf{x}^{(i)}, y_i)_{i=1,\dots,\mathrm{N}}\right\}$ appelé plan d'expériences. On note $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_\mathrm{N}\}$. Une limitation majeure de ces méthodes est le compromis biais/variance du prédicteur construit, noté $\widehat{\mathscr{M}}$. Un biais élevé signifie qu'en moyenne sur tous les plans d'expériences possibles de même taille, le prédicteur peut être éloigné de y. La variance du prédicteur représente sa sensibilité aux points d'apprentissage. Un estimateur sans biais peut avoir une grande variance. Afin de limiter cet effet, on peut considérer un problème de régression régularisée en ajoutant un terme de pénalisation. C'est-à-dire que l'on cherche à résoudre [10] :

$$\widehat{\mathscr{M}}(\mathbf{x}) = \underset{f \in \mathscr{H}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} c\left(y_i, f\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)\right) + p(f) \tag{4.8}$$

où c est la fonction coût, $\mathscr{H}$ un espace abstrait de solutions et p la fonction de pénalité qui permet de contrôler la régularité (i.e. la variance) du prédicteur. Le cadre mathématique offert par les ensembles à noyaux reproduisants (noté RHKS) permet de résoudre facilement ce type de problème en prenant $\mathscr{H}$ un RHKS de fonctions à valeurs réelles. On a dans ce cas $p(f) = \gamma \|f\|^2_{\mathscr{H}}$ où $\mathscr{H}$ désigne l'ensemble RHKS et γ une constante positive. Dans notre cas, nous ajoutons une contrainte supplémentaire : $f(\mathbf{x}^{(i)}) = y_i$, c'est-à-dire d'avoir une prédiction exacte aux points d'apprentissage. De plus, on considère q fonctions $(g_j)_{j=1,\dots,q}$ telles que la matrice des $\left(g_j(\mathbf{x}^{(i)})\right)_{j=1,\dots,q}^{i=1,\dots,\mathrm{N}}$ soit de rang q. On note $\mathscr{G}$ l'espace vectoriel engendré par les g_j. Le problème devient alors un problème d'interpolation sous

contraintes qui s'écrit [10] :

$$\begin{cases} \underset{f=f_{\mathscr{H}}+f_{\mathscr{G}}\in\mathscr{H}+\mathscr{G}}{\operatorname{argmin}} & \|f_{\mathscr{H}}\|^2_{\mathscr{H}} \\ f(\mathbf{x}^{(i)}) = y_i \,, \forall\ i = 1,\ldots,\mathrm{N} \end{cases} \tag{4.9}$$

Le théorème du représentant pour l'interpolation dans le cas quadratique permet de montrer l'existence, l'unicité et la forme de la solution. Combiné au théorème de l'isomorphisme isométrique de Parzen, la solution peut être écrite sous la forme suivante [10] :

$$\widehat{\mathscr{M}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q} g_j(\mathbf{x})\beta_j + \mathrm{Z}(\mathbf{x}) \tag{4.10}$$

où les g_j sont q fonctions connues à valeurs réelles, $\boldsymbol{\beta}$ un vecteur de coefficients à déterminer et Z un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle et de fonction de covariance $\mathrm{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sigma^2\mathscr{R}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$. σ^2 est la variance inconnue du processus, et $\mathscr{R}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ est la fonction de corrélation connue. La formulation contient donc un terme de régression déterministe (la moyenne) et un terme aléatoire.

Les fonctions g_j sont déterminées par notre connaissance a priori du phénomène à modéliser. La plupart du temps, il s'agit de fonctions monomiales montant jusqu'à l'ordre 2. En pratique $\mathscr{R}$ est inconnue mais est paramétrique, dépendante d'un paramètre $\boldsymbol{\theta}$ à déterminer.

En supposant que le processus Z est gaussien, alors on sait que le meilleur estimateur sans biais est linéaire. Pour obtenir le meilleur prédicteur en $\mathbf{x}_0$, noté y_0 on cherche à déterminer $\mathbf{c}_0$ tel que :

$$y_0 = \mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \tag{4.11}$$

et minimisant l'erreur quadratique moyenne

$$\mathrm{MSE}[y_0] = \mathbb{E}[\mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{y} - y_0]^2 \tag{4.12}$$

avec la contrainte de non-biais

$$\mathbb{E}[\mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{y}] = \mathbb{E}[y_0] \tag{4.13}$$

qui s'écrit aussi

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_0 = \mathbf{g}_0 \tag{4.14}$$

avec $\mathbf{G}$ la matrice $\mathrm{G}_{ji} = g_j(\mathbf{x}^{(i)})$ et $\mathbf{g}_0$ est le vecteur des $g_j(\mathbf{x}_0)$.

En remplaçant dans l'erreur quadratique moyenne

$$\mathrm{MSE}[y_0] = \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{y}\right) - \left(\mathbf{g}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+y_0\right)\right)^2\right] \tag{4.15}$$

$$= \sigma^2\left(\mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{c}_0 - 2\mathbf{c}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_0 + 1\right) \tag{4.16}$$

où $\mathbf{R}$ est la matrice $\mathrm{R}_{ij} = \mathrm{C}(\mathbf{x}^{(i)},\mathbf{x}^{(j)})$ et $\mathbf{r}_0$ le vecteur des $\mathrm{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}^{(i)})$,
la résolution donne

$$\widehat{\mathscr{M}}(\mathbf{x}_0) = y_0 = \mathbf{g}_0^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{G}\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{4.17}$$

où $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}$ et l'erreur quadratique est

$$\mathrm{MSE}(\mathbf{x}_0) = \sigma^2\left(1 - \mathbf{g}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{g}_0 + \left(\mathbf{g}_0 - \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_0\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}\right)^{-1}\left(\mathbf{g}_0 - \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_0\right)\right) \tag{4.18}$$

On remarque que les prédictions sont exactes aux points d'apprentissage et que la variance s'annule en ces points. On remarquera aussi que la variance ne dépend pas des observations mais uniquement des entrées. L'incertitude ici ne reflète pas l'incertitude sur le phénomène à modéliser, mais l'incertitude liée au manque de données, il s'agit d'incertitude épistémique.

Cas des données bruitées

Il arrive que les données soit bruitées, c'est-à-dire que pour une entrée $\mathbf{x}$, au lieu d'avoir accès à $y(\mathbf{x})$ on a accès à une approximation $y(\mathbf{x})+\epsilon$, où ϵ peut dépendre de $\mathbf{x}$ et d'autres variables. Ainsi, les $\mathbf{x}$ ne sont pas nécessairement tous différents et on peut considérer $\widehat{y}_i = y(\mathbf{x}^{(i)})+\epsilon_i$. Sous l'hypothèse que ϵ_i suit une loi normale de moyenne nulle et de variance τ_i^2 et que les (ϵ_i) sont indépendants, il est toujours possible d'utiliser le krigeage à une petite modification près : la matrice de covariance $\mathbf{R}$ est remplacée par la matrice $\mathbf{R}+\mathbf{\Delta}$ où $\mathbf{\Delta}$ est la matrice diagonale des τ_i^2. Ainsi, le modèle n'interpole plus exactement les points d'apprentissage et la variance ne s'annule plus en ces points. La variance dépend uniquement des entrées et des variances τ_i^2 et non des observations.

Noyaux de covariance

Le choix du noyau de covariance est un choix crucial dans la construction d'un méta-modèle de krigeage. Les développements précédents sont valables uniquement si la matrice de corrélation $\mathbf{R}$ est positive. La démarche classique consiste à choisir une famille de noyaux positifs paramétrés et à estimer les différents paramètres correspondants à partir des données disponibles, en maximisant la fonction de vraisemblance ou en minimisant l'erreur de validation croisée par exemple. On considère habituellement les noyaux stationnaires, c'est-à-dire qui dépendent uniquement de $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. En dimension 1, différentes familles de fonctions existent [115], quelques exemples sont donnés Tableau 4.2. On y spécifie aussi leur disponibilité sur deux Toolbox répandues, à savoir DACE (sur MATLAB) et DiceKriging (sur R). Dans le cas de dimensions supérieures à 1, on a l'habitude de prendre le produit tensoriel de ces noyaux afin d'assurer la positivité de la matrice de corrélation $\mathbf{R}$, ces noyaux sont qualifiés de séparables. Il vient ainsi :

$$\mathscr{R}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \prod_{j=1}^{p} k(d_j;\theta_j) \tag{4.19}$$

où $\mathbf{d} = \mathbf{x}-\mathbf{x}'$, d_j la composante de $\mathbf{d}$ dans la direction j et p la dimension de l'espace d'entrée. Les paramètres (θ_j) sont les paramètres caractéristiques d'échelle et sont à déterminer.

Le choix d'un noyau de covariance dépend du phénomène à modéliser et des propriétés de dérivabilité du processus souhaitées. Ainsi, un noyau Gaussien assure une sortie infiniment dérivable alors que les noyaux Matérn 5/2 assurent une fonction deux fois différentiables.

Les noyaux présentés ici, même s'ils offrent un peu de flexibilité, donnent un processus continu en sortie. Dans les faits, il peut arriver que les phénomènes à observer ne soient pas continus et qu'une petite modification de l'entrée conduise à une grande variation de la sortie, même dans des cas déterministes. Mais pour une même évaluation de l'entrée, la même sortie sera obtenue, ce qui ne nous place pas dans le cadre des données bruitées.

Noyau	$\mathbf{k(d,\theta)}$	**DACE**	**DiceKriging**
Gaussien	$k(d,\theta) = \exp(-\frac{d^2}{2\theta^2})$	✓	✓
Exponentielle	$k(d,\theta) = \exp(-\frac{\lvert d\rvert}{\theta})$	✓	✓
Exponentielle générale	$k(d,\theta) = \exp(-(\frac{\lvert d\rvert}{\theta})^p)$	✓	✓
Matérn $\nu = 5/2$	$k(d,\theta) = \left(1+\frac{\sqrt{5}\lvert d\rvert}{\theta}+\frac{5d^2}{3\theta^2}\right)\exp(-\frac{\sqrt{5}\lvert d\rvert}{\theta})$		✓
Matérn $\nu = 3/2$	$k(d,\theta) = \left(1+\frac{\sqrt{3}\lvert d\rvert}{\theta}\right)\exp(-\frac{\sqrt{3}\lvert d\rvert}{\theta})$		✓
Linéaire	$k(d,\theta) = \max\left(0, 1-\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)$	✓	
Sphérique	$k(d,\theta) = \begin{cases} 1-\frac{3}{2}\frac{\lvert d\rvert}{\theta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^3 \text{, si } \lvert d\rvert < \theta \\ 0 \text{, sinon} \end{cases}$	✓	
Cubique	$k(d,\theta) = \begin{cases} 1-3\left(\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^2+2\left(\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^3 \text{, si } \lvert d\rvert < \theta \\ 0 \text{, sinon} \end{cases}$	✓	
Spline	$k(d,\theta) = \begin{cases} 1-15\left(\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^2+30\left(\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^3 \text{, si } 0 \le \frac{\lvert d\rvert}{\theta} < 0.2 \\ 1.25\left(1-\frac{\lvert d\rvert}{\theta}\right)^3 \text{, si } 0.2 < \frac{\lvert d\rvert}{\theta} < 1 \\ 0 \text{, sinon} \end{cases}$	✓	

TABLEAU 4.2 – Exemple de noyaux de covariance en dimension 1

Une discontinuité de cette sorte peut être traitée avec ce qu'on appelle l'effet pépite (*nugget effect*) en ajoutant un terme τ^2 à $C(\mathbf{0},\mathbf{0})$, c'est-à-dire en notant δ_0 la fonction de Dirac en 0 :

$$C(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sigma^2\mathscr{R}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sigma^2\prod_{j=1}^{p} k(d_j;\boldsymbol{\theta}_j) + \tau^2\delta_0(\mathbf{d}) \tag{4.20}$$

Les conséquences de cette modification sur le noyau de covariance sont similaires à celles du cas bruité : une matrice diagonale constante est ajoutée à la matrice de covariance induisant alors un lissage de l'interpolateur et une augmentation de la variance. Les prédictions aux points extérieurs au plan d'expériences sont identiques dans les deux cas et la différence réside dans le fait que le krigeage préserve ses propriétés d'interpolation dans ce cas.

Estimation des paramètres

La détermination des différents paramètres est une tâche complexe et importante. Différentes méthodes existent telles que l'analyse du variogramme utilisée principalement en géo-statistiques, la validation croisée ou encore l'estimation bayésienne. En expériences numériques, la principale méthode utilisée est l'estimation du maximum de vraisemblance [81, 98]. C'est-à-dire qu'on cherche à déterminer $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ tel que :

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{d_k}} \psi(\boldsymbol{\theta}) \equiv \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{d_k}} \sigma^2(\boldsymbol{\theta})\det\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})^{1/N} \tag{4.21}$$

où d_k est le nombre de paramètres de la fonction de corrélation. Il est à noter que si l'hypothèse d'isotropie du noyau est faite, alors $d_k = 1$ et le paramètre d'échelle est le même dans toutes les dimensions du problème. Dans le cas anisotrope classique, on a $d_k = p$. Il existe des stratégies telles que l'isotropie par groupe permettant de réduire la valeur de d_k [11] et faciliter ainsi l'estimation des paramètres.

La résolution de ce problème est numériquement compliquée pour différentes raisons. Pour quelques valeurs de $\boldsymbol{\theta}$, la matrice d'auto-corrélation peut être mal conditionnée et

conduire à des imprécisions dans la procédure d'optimisation comme expliqué par Lophaven et al. dans [80]. De plus, la fonction $\psi(\boldsymbol{\theta})$ peut avoir plusieurs minima locaux et le grand nombre de dimensions peut conduire à des difficultés supplémentaires lors de l'optimisation. Ainsi dans la toolbox MATLAB DACE, Lophaven et al.[81] utilisent un algorithme de reconnaissance pour faire face à ce problème. Dans le package R DiceKriging, Roustant et al.[121] utilisent un algorithme génétique et/ou un algorithme BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

4.2.2 Application

Présentation des paramètres incertains et de la démarche adoptée

Le krigeage est utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse pour prédire l'évolution des valeurs propres de notre modèle en fonction de différents paramètres. Pour ce faire, on considère N échantillons $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^{(k)}\right)_{k=1,\ldots,\mathrm{N}}$ dans l'espace des paramètres de conception de dimension p et les N ensembles de valeurs propres associées $\lambda^{(k)}$. Chaque sortie est obtenue en résolvant :

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{M}^{(k)} + \lambda\mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} + \mathbf{K}_{\mu}^{(k)}\right) = 0 \tag{4.22}$$

où $\mathbf{M}^{(k)}$, $\mathbf{C}^{(k)}$, $\mathbf{K}^{(k)}$ et $\mathbf{K}_{\mu}^{(k)}$ sont les matrices du système évaluées pour le $k^{\text{ième}}$ échantillon de $\mathbf{x}$. On rappelle que le suivi des valeurs propres se fait avec l'aide d'un critère de MAC.

Dans l'étude qui suit, trois paramètres x_j sont considérés comme incertains et sont décrits par des intervalles $\left[x_{\min}^{(j)}, x_{\max}^{(j)}\right]$. Les trois paramètres choisis sont :

- le coefficient de frottement μ compris dans l'intervalle $[0,1]$,
- la raideur k_{11} qui varie de 10% autour de sa valeur moyenne k_{11}^{moy}, soit : $k_{11} = k_{11}^{\text{moy}}\left(1+0.1\eta_1\right)$ avec $\eta_1 \in [-1,1]$,
- la raideur k_{22} qui varie de 10% autour de sa valeur moyenne k_{22}^{moy}, soit : $k_{22} = k_{22}^{\text{moy}}\left(1+0.1\eta_2\right)$ avec $\eta_2 \in [1,1]$.

Afin d'étudier l'influence de la dimension de l'espace des paramètres d'entrée sur les performances du krigeage, deux études sont considérées. Une première où l'espace est de dimension 2, ainsi $\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}\}$ et k_{22} est déterministe et fixé à sa valeur moyenne. Puis une seconde étude où $\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}$. Les études sont réalisées sur les deux configurations présentées précédemment.

Pour la compréhension du lecteur, la démarche globale adoptée dans la suite est présentée ici.

- **Étape 1 :** les résultats de référence sont calculés directement à partir d'une analyse de stabilité faite par CEA sur le modèle pour les deux configurations et les différents jeux de paramètres considérés. Ces résultats constituent la référence utilisée pour analyser la validité et la performance du krigeage.
- **Étape 2 :** le krigeage est utilisé pour construire un méta-modèle prédisant l'évolution des valeurs propres. Dans ce premier cas, les plans d'expériences sont construits avec des grilles uniformes de l'espace d'entrée. Ce choix n'est pas forcément optimal, mais il est destiné à l'étude plus spécifique de l'influence des différents ordres de régression et des différentes corrélations spatiales.

— **Étape 3 :** des plans d'expériences basés sur des LHS sont utilisés pour construire des méta-modèles de krigeage. L'objectif ici est de montrer les performances du krigeage avec un plan d'expériences de taille réduite.

Résultats de référence (étape 1)

Comme expliqué précédemment, l'analyse de stabilité basée sur la CEA est réalisée sur le modèle en discrétisant l'espace paramétrique de dimension p. C'est-à-dire qu'on génère un ensemble d'échantillons $\mathbf{x}^{(k)}$ pour $k = 1, \ldots, \mathrm{N}$ et pour chaque échantillon, on résout l'équation 4.22. Le principal désavantage d'une telle méthode est son coût numérique prohibitif lié aux N solutions requises pour couvrir l'ensemble de l'espace d'entrée et ainsi permettre une analyse de stabilité fiable. Il est à noter que ce coût est encore plus important lorsque l'on traite de problèmes de grande taille (voir [106]). Une discrétisation de 100 points par dimension est choisie ici. Ainsi quand $p = 2$ $\left(\text{c'est-à-dire } \mathbf{x} = \{\mu, k_{11}\}\right)$, $\mathrm{N} = 10^4$ et lorsque $p = 3$ $\left(\text{c'est-à-dire } \mathbf{x} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}\right)$, $\mathrm{N} = 10^6$.

Tout d'abord, les résultats du cas $p = 2$ sont présentés. Pour les deux configurations, les évolutions des parties réelles et imaginaires des valeurs propres en fonction des paramètres μ et k_{11} sont représentées Figure 4.3. Les comportements différents de chaque configuration sont bien visibles. Dans le cas de la première configuration, les deux couplages de modes classiques (voir Figures 4.3a et 4.3c) sont observables et les deux paires de modes semblent évoluer indépendamment l'une de l'autre. Dans ce cas, l'augmentation de la raideur k_{11} avance l'apparition de la première instabilité, en effet lorsque $k_{11} = 2700$ N/m, la première instabilité apparait à $\mu = 0.39$ et lorsque $k_{11} = 3300$ N/m, elle apparait à $\mu = 0.29$. Ceci est clairement visible sur la Figure 4.4a qui donne le nombre d'instabilités présentes en fonction de μ et k_{11}. La première instabilité est influencée par une variation de k_{11} au contraire de la seconde instabilité qui n'est pas impactée par cette variabilité puisqu'elle émerge toujours pour $\mu = 0.57$ quelque soit la valeur de k_{11}. Les évolutions des différentes valeurs propres dans le plan complexe sont données Figure 4.5e.

Des observations similaires peuvent être faites sur la seconde configuration. Les évolutions des valeurs propres en fonction de μ et k_{11} sont données Figures 4.3b et 4.3d et dans le plan complexe Figure 4.5f. Les comportements plus complexes des différentes coalescences ainsi que les croisements entre les différents modes sont illustrés. De la même manière que pour la première configuration, l'augmentation de la raideur k_{11} tend à avancer l'apparition de la première instabilité (voir Figure 4.4b). En effet, lorsque $k_{11} = 2700$ N/m, la première instabilité apparait pour $\mu = 0.28$ et lorsque $k_{11} = 3300$ N/m, elle apparait pour $\mu = 0.11$. On observe aussi la même influence quasi-nulle de k_{11} sur la seconde instabilité.

Pour la compréhension du lecteur, on rappelle que les résultats obtenus par CEA n'utilisent pas de suivi de modes avec un critère de MAC. Cependant ce critère est utilisé ici afin de pouvoir réaliser des cartes de couleur sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres pour plus de lisibilité sur l'évolution de chacune des parties réelles et imaginaires des valeurs propres.

Afin de pouvoir évaluer les performances du méta-modèle construit par le krigeage et afin de faciliter la visualisation des valeurs propres à comparer avec le modèle de référence obtenu par CEA, les enveloppes de chaque partie réelle et chaque partie imaginaire en fonction du paramètre de contrôle μ sont tracées. C'est-à-dire que pour chaque valeur de μ et compte tenu de la variabilité de k_{11}, on considère la valeur minimale et la valeur maximale observée pour chaque valeur propre sur sa partie réelle et sa partie imaginaire.

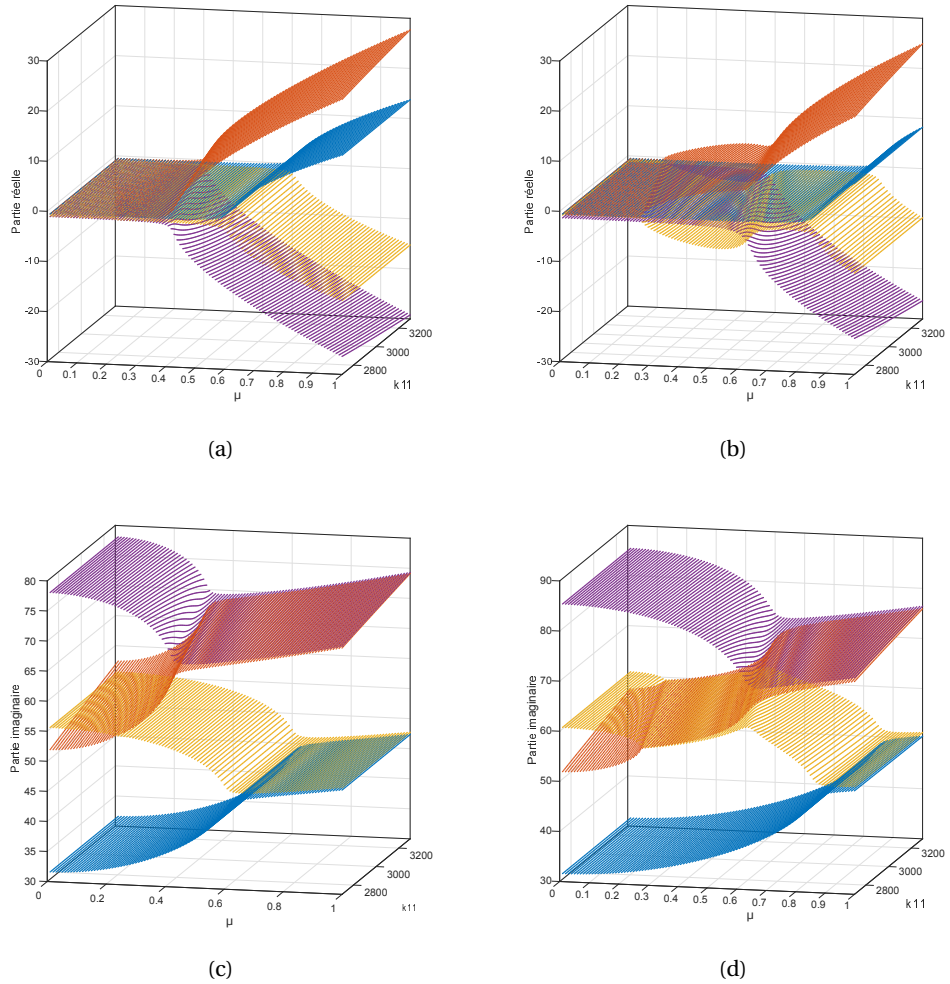
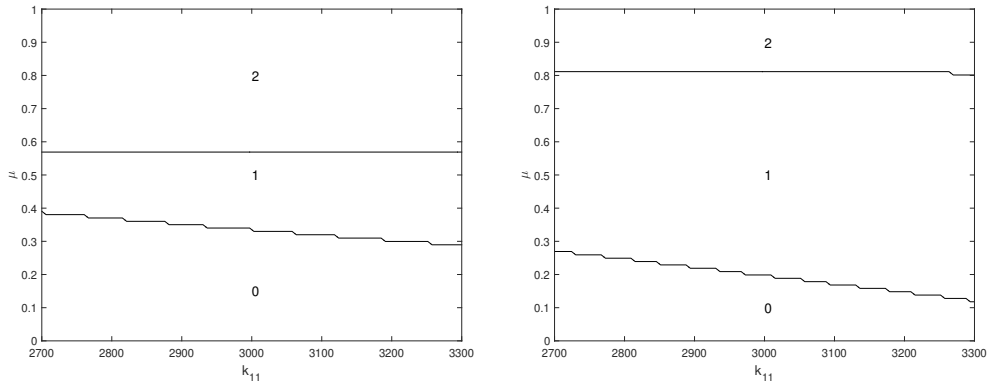


FIGURE 4.3 – Évolution des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d)

Ces enveloppes sont tracées Figures 4.5a à 4.5d pour les deux configurations. Ainsi pour chaque valeur propre et sa couleur associée, deux courbes sont représentées, l'une correspondant à la valeur maximale et l'autre à la valeur minimale. On peut remarquer que Figures 4.5a et 4.5b, les valeurs minimales et maximales associées au second couplage de mode (courbes bleues et jaunes) sont confondues. Les évolutions dans le plan complexe serviront aussi comme élément de comparaison ainsi que l'évolution du nombre d'instabilités dans le cas à deux paramètres.

Afin de tester les performances du krigeage sur des espaces de dimensions plus grandes, une étude numérique permettant d'étudier l'évolution des valeurs propres en fonction des trois paramètres considérés, à savoir μ, k_{11} et k_{22}, est aussi réalisée. Les résultats de référence obtenus à partir des calculs CEA sont donnés Figure 4.6 avec les évolutions des valeurs propres dans le plan complexe Figures 4.6e et 4.6f et les différentes enveloppes Figures 4.6a à 4.6d. Ces résultats serviront de référence pour tester la précision du méta-modèle.

La variation de la raideur k_{22} a principalement une influence sur la seconde instabilité dans le cas de la première configuration. En effet, les modes à 45 rad/s ont une enveloppe plus grande que dans le cas précédent où k_{22} était constant. Dans le cas de la seconde



(a) (b)

FIGURE 4.4 – Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a) et 2 (b)

configuration, k_{22} influe surtout la seconde instabilité, même si l'on remarque des enveloppes plus grande pour la première instabilité en comparaison au précédent.

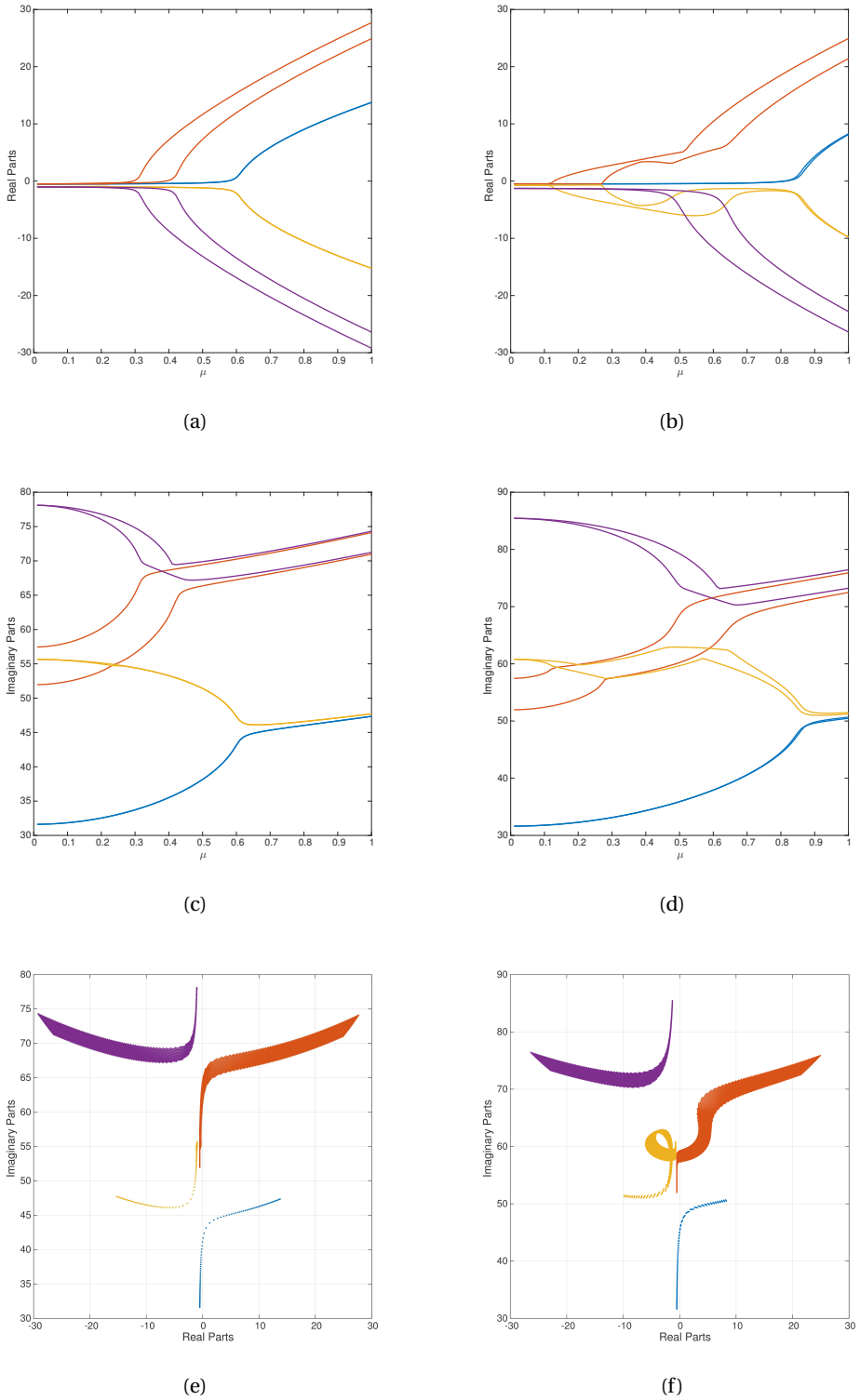


FIGURE 4.5 – Espace paramétrique de dimension deux : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et évolution dans le plan complexe (e,f) pour les configurations 1 (a,c,e) et 2 (b,d,f)

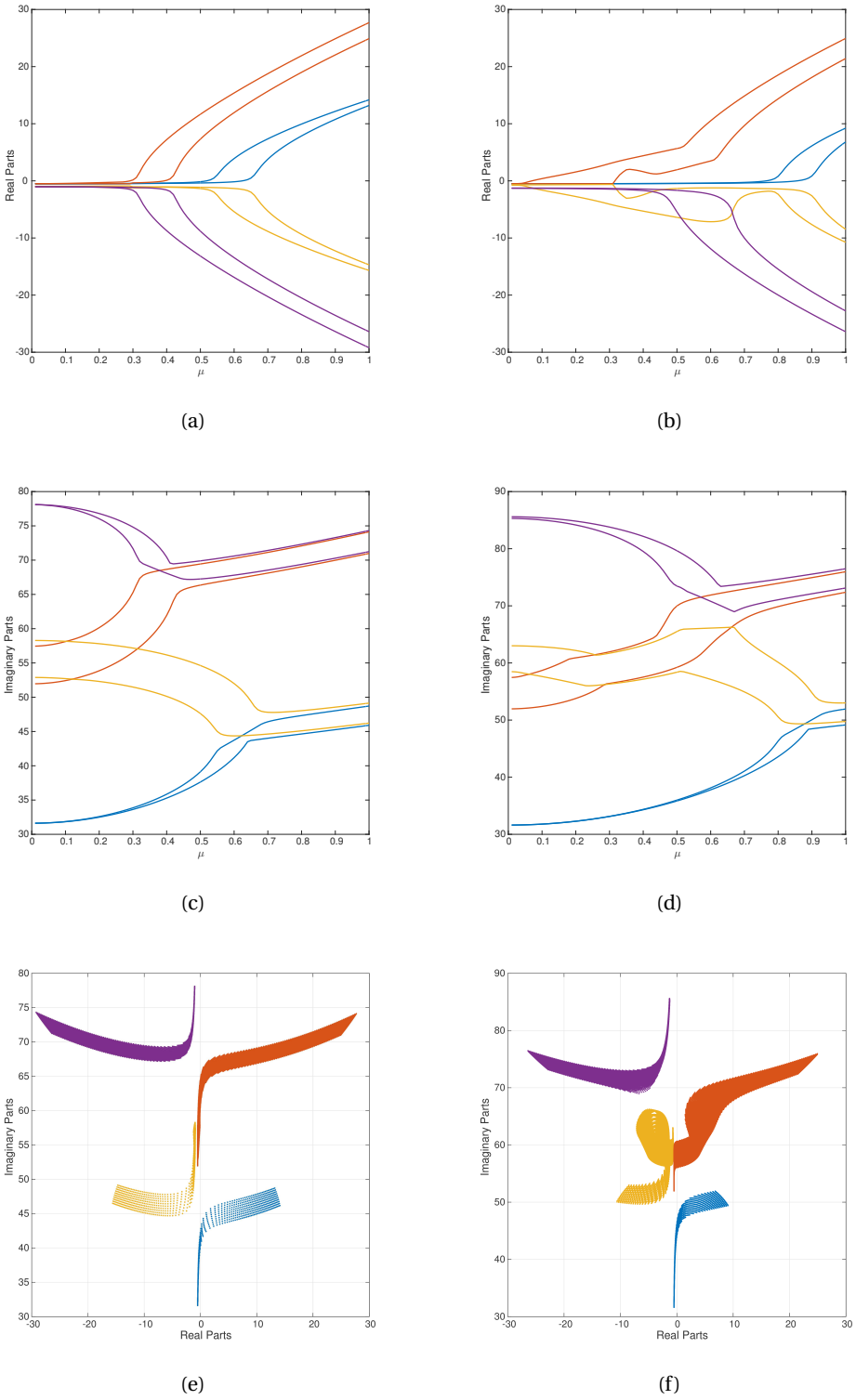


FIGURE 4.6 – Espace paramétrique de dimension trois : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et évolution dans le plan complexe (e,f) pour les configurations 1 (a,c,e) et 2 (b,d,f)

Krigeage : cas deux paramètres

L'objectif de cette partie est de montrer la capacité du krigeage à prédire l'évolution des instabilités de couplage de modes. Les performances des différents méta-modèles construits sont évaluées en fonction de leurs paramètres de réglage, à savoir l'ordre de la régression et la fonction de corrélation spatiale, et la taille du plan d'expériences. Il est à noter que dans cette partie, la toolbox Matlab DACE [81] est utilisée. Les différentes fonctions de corrélation disponibles sont les fonctions linéaire, exponentielle, exponentielle générale, gaussienne, sphérique, cubique et spline. Les méta-modèles sont construits sur chaque partie réelle et chaque partie imaginaire de chaque valeur propre pour chacune des configurations étudiées. Afin de pouvoir tester l'influence des paramètres de réglages indépendamment de la taille du plan d'expériences, deux types de plans d'expériences sont considérés dans cette étude. Un premier type correspond aux grilles linéaires, elles ne sont pas optimales en terme d'apprentissage mais sont relativement neutres et permettront de s'attarder plus spécifiquement sur l'influence des fonctions de régression et de corrélation. Un second type correspond aux hypercubes latins (LHS), méthode largement utilisée pour générer des plans d'expériences pseudo-aléatoires [92]. Le but dans ce cas sera de montrer la capacité du krigeage à construire un méta-modèle fiable avec un plan d'expériences de taille limitée. L'objectif général est de montrer la capacité du krigeage à traiter différents niveaux de complexité entrainés par les différents schémas de couplage de modes.

Étude avec $\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}\}$ et un plan d'expériences de type grille linéaire (étape 2) Une grille linéaire de taille (20×50) est générée pour couvrir l'espace paramétrique de dimension 2 défini par le coefficient de frottement μ et la raideur linéaire k_{11}. Ces dimensions ont été déterminées à partir d'une étude de convergence non présentée ici. Pour ces valeurs, l'erreur commise par le krigeage est principalement liée au paramétrage de celui-ci plus qu'à un manque d'information dans l'espace d'apprentissage. Ces points d'apprentissage sont utilisés pour construire la matrice d'apprentissage **G** et la matrice de corrélation **R** associées aux différents choix de régression (ordre zéro, un ou deux) et de corrélation spatiale (linéaire, gaussienne, exponentielle, spline, sphérique). Les valeurs prédites par les différents méta-modèles sont comparées aux valeurs de référence obtenues par CEA sur le modèle. Les points qui servent de comparaison correspondent à l'ensemble des points utilisés pour la détermination du modèle de référence, on a donc $\mathrm{N} = 10^4$ points de comparaison.

Afin de quantifier l'erreur commise par les méta-modèles, la moyenne quadratique de l'erreur absolue commise sur les parties imaginaires et les parties réelles de chaque valeur propre ainsi que le maximum de l'erreur absolue commise pour les différentes fonctions de corrélation et de régression sont déterminés et donnés Tableaux 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6 pour la première configuration et Tableaux 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 pour la seconde. La moyenne quadratique de l'erreur absolue sur la partie imaginaire est notée e^{ω}_{MQ} et $e^{\text{réelle}}_{\mathrm{MQ}}$ sur la partie réelle. Elles sont déterminées de la façon suivante :

$$e^{\omega}_{\mathrm{MQ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |\omega_{\mathrm{ref}} - \omega_{\mathrm{krigeage}}|^2}{\mathrm{N}}} \tag{4.23}$$

$$e^{\text{réelle}}_{\mathrm{MQ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |a_{\mathrm{ref}} - a_{\mathrm{krigeage}}|^2}{\mathrm{N}}} \tag{4.24}$$

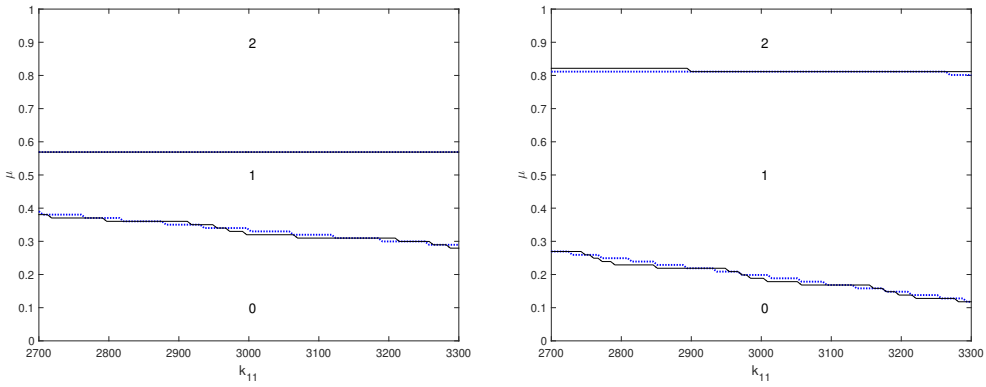
où N est le nombre d'échantillons considérés, ω_{ref} et $\omega_{\mathrm{krigeage}}$ correspondent respective-

ment aux pulsations du modèle de référence et du méta-modèle, et a_{ref} et a_{krigeage} correspondent respectivement à la partie réelle d'une valeur propre du modèle de référence et du méta-modèle.

Les différents résultats résumés dans les différents tableaux montrent que le choix des fonctions de corrélation et de régression ont une influence sur les prédictions du méta-modèle et que cette influence dépend à la fois de la valeur propre et de la configuration. Ainsi, les caractéristiques du "meilleur" krigeage sont différentes pour chaque valeur propre. Par exemple, si on considère la première configuration, pour la partie réelle de la première valeur propre le krigeage le plus performant aura une régression d'ordre 1 et une corrélation gaussienne (erreur de 5.68E-04) alors que pour la seconde valeur propre on préfèrera une corrélation de type exponentielle générale (erreur de 9.41E-04). Ces caractéristiques dépendent aussi de la configuration considérée, puisque dans le cas de la configuration 2, pour ces deux valeurs propres, les meilleures propriétés de krigeage sont une exponentielle générale avec une régression d'ordre 1 pour la première valeur propre et un spline avec une régression d'ordre 2 pour la seconde valeur propre.

Cependant, les moyennes quadratiques présentées ici montrent des niveaux d'erreur acceptables sur la précision des différents krigeages. En considérant une unique valeur propre, la précision moyenne est finalement peu sensible aux choix de paramétrage. C'est entre les différentes valeurs propres que l'on observe le plus de variation de la précision des prédictions. Un critère complémentaire est le maximum de l'erreur absolue mesurée. En effet, certains méta-modèles peuvent avoir de très hauts niveaux d'erreur de prédiction sur certaines parties de l'espace de conception et de très faibles niveaux d'erreur sur le reste de l'espace des paramètres induisant alors une erreur moyenne relativement faible. D'autres choix de paramétrage conduisent quant à eux à des méta-modèles avec des niveaux d'erreurs plus uniformes sur l'ensemble de l'espace. Dans notre contexte, il est préférable d'avoir des niveaux d'erreur sensiblement constants sur l'ensemble de l'espace afin d'assurer un niveau de précision suffisant partout. De plus, il nous faut un choix de paramètres robuste par rapport aux différentes valeurs propres. En effet, l'aspect de leur évolution n'est pas connu en amont et il ne sera pas possible dans un contexte industriel de disposer d'un ensemble de points de vérification suffisamment grand pour pouvoir comparer les différents choix de paramétrage. Pour cette raison, on considère la somme des erreurs commises sur les quatre valeurs propres. Ces différentes considérations nous amènent à choisir un noyau de corrélation de type exponentielle générale et une régression d'ordre 2 à la fois pour les parties imaginaires et les parties réelles.

Les enveloppes des parties réelles et des parties imaginaires des valeurs propres prédites par le krigeage en utilisant ces choix de paramétrage sont comparées aux enveloppes de référence Figures 4.8a et 4.8c pour la première configuration. L'évolution dans le plan complexe est donnée Figure 4.8e. Il apparait clairement que les prédictions basées sur le krigeage montrent des tendances identiques à celles de la référence et donc que le comportement de stabilité général caractérisé par les différentes coalescences est correctement représenté. En effet, l'influence de k_{11} sur la première instabilité est correctement décrite avec un étalement des parties réelles et des parties imaginaires. Les valeurs critiques de μ à partir desquelles l'instabilité apparait sont correctement prédites, la référence et le méta-modèle donnent $\mu_{\text{critique}} \in [0.29, 0.39]$. De plus, l'influence quasi-nulle sur la seconde instabilité est aussi correctement estimée. Ces observations sont confirmées par la comparaison du nombre d'instabilités en fonction de μ et k_{11} entre la référence et le méta-modèle (voir Figure 4.7). L'excellente capacité de prédiction de la stabilité du système par le méta-modèle est ainsi illustrée.



(a) (b)

FIGURE 4.7 – Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a) et 2 (b) : krigeage avec une grille linéaire 2D (–) et résultats déterministes (- -)

Par ailleurs, les résultats des prédictions dans le cas de la seconde configuration avec les mêmes choix de paramétrage du krigeage sont donnés Figure 4.8. Plus précisément, les comparaisons des enveloppes des parties réelles et imaginaires des valeurs propres sont données Figures 4.8b et 4.8d et l'évolution dans le plan complexe des différentes valeurs propres est donnée Figure 4.8f. La comparaison du nombre d'instabilités en fonction de μ et k_{11} est donnée Figure 4.7b. Là aussi les différentes prédictions faites par le krigeage sont très bonnes et les différentes coalescences sont correctement prédites. Les intervalles où les instabilités émergent sont correctement prédits : $[0.12, 0.27]$ pour la première et $[0.81, 0.82]$ pour la seconde. Ceci montre qu'augmenter la complexité du système étudié en augmentant la raideur de couplage k_a n'a pas d'impact fort sur la précision moyenne des prédictions du krigeage (voir Tableaux 4.3 et 4.9).

Il est important de faire remarquer que l'ensemble des résultats présentés ici ont pu être obtenus grâce à la mise en place du critère de MAC. En effet, pour pouvoir construire les différents méta-modèles, il est nécessaire d'avoir l'évolution de chaque valeur propre en fonction des paramètres. Par exemple, sans le critère de MAC, pour la première configuration pour $\mu \in [0, 0.2]$ (voir Figures 4.5a et 4.5c), il serait impossible de faire la différence entre les modes jaune et orange ; ou dans le cas de la seconde configuration pour $\mu \in [0.1, 0.3]$ (voir Figures 4.5b et 4.5d). Sans un suivi correct des différents modes, la construction des méta-modèles serait impossible.

L'ensemble de ces résultats montre l'efficacité du krigeage à construire un méta-modèle fiable dans notre contexte. Les différentes valeurs propres et le comportement de stabilité de notre système sont correctement prédits quelque soit son niveau de complexité. L'utilisation d'un plan d'expériences relativement dense avec une répartition homogène des points a permis de faire émerger quelques tendances sur les choix de paramétrage du krigeage qui peuvent conduire à un méta-modèle plus performant. Il a aussi été observé l'utilité de mettre en place un critère de suivi de modes se basant sur une vision de suivi de déformée physique des modes (critère de MAC dans notre cas). Maintenant que les choix de corrélation et de régression sont effectués, il va être possible d'étudier l'influence de la taille du plan d'expériences sur les performances du krigeage.

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	8,33E-02	7,07E-02	8,33E-02	6,72E-02	8,33E-02	6,03E-02
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1,18E-01	1,14E-01	1,18E-01	1,67E+00	1,18E-01	9,52E-02
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	8,35E-02	7,07E-02	8,35E-02	5,86E-01	8,35E-02	6,06E-02
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,18E-01	1,13E-01	1,18E-01	1,08E+00	1,18E-01	9,50E-02
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	4,03E-01	3,68E-01	4,03E-01	3,40E+00	4,03E-01	3,11E-01
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	8,33E-04	6,92E-04	8,33E-04	5,68E-04	8,33E-04	5,97E-04
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1,18E-03	1,12E-03	1,18E-03	2,84E-02	1,18E-03	9,41E-04
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	8,35E-04	6,92E-04	8,35E-04	1,39E-02	8,35E-04	6,00E-04
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,18E-03	1,12E-03	1,18E-03	1,87E-02	1,18E-03	9,39E-04
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	4,03E-03	3,62E-03	4,03E-03	6,16E-02	4,03E-03	3,08E-03
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	8,26E-02	6,97E-02	4,59E-01	5,53E-02	2,12E-01	5,96E-02
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1,18E-01	1,13E-01	8,76E-01	3,68E+00	3,75E-01	9,40E-02
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	8,29E-02	6,98E-02	4,61E-01	1,40E+00	2,13E-01	5,99E-02
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,18E-01	1,12E-01	8,79E-01	3,61E+00	3,76E-01	9,38E-02
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	4,01E-01	3,64E-01	2,68E+00	8,75E+00	1,18E+00	3,07E-01

TABLEAU 4.3 – Configuration 1 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	5.29E-01	3.67E-01	5.29E-01	2.98E-01	5.29E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1.01E+00	8.13E-01	1.02E+00	6.97E+00	1.02E+00	8.12E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	5.29E-01	3.68E-01	5.29E-01	2.48E+00	5.29E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1.01E+00	8.02E-01	1.01E+00	4.59E+00	1.02E+00	8.12E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3.09E+00	2.35E+00	3.09E+00	1.43E+01	3.09E+00	2.39E+00
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	5.29E-01	3.65E-01	5.29E-01	3.00E-01	5.29E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1.01E+00	8.20E-01	1.02E+00	2.21E+01	1.02E+00	8.12E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	5.29E-01	3.66E-01	5.29E-01	8.87E+00	5.29E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1.01E+00	8.09E-01	1.01E+00	1.64E+01	1.01E+00	8.12E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3.09E+00	2.36E+00	3.09E+00	4.77E+01	3.09E+00	2.39E+00
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	5.15E-01	3.66E-01	1.42E+00	3.04E-01	8.53E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1.00E+00	8.20E-01	3.43E+00	2.25E+01	1.81E+00	8.11E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	5.15E-01	3.66E-01	1.43E+00	1.19E+01	8.55E-01	3.84E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1.00E+00	8.09E-01	3.43E+00	2.35E+01	1.81E+00	8.11E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3.04E+00	2.36E+00	9.71E+00	5.82E+01	5.32E+00	2.39E+00

TABLEAU 4.4 – Configuration 1 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	7,76E-02	6,61E-02	7,76E-02	6,75E-02	7,76E-02	5,49E-02
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	1,20E-01	1,15E-01	1,20E-01	2,04E+00	1,20E-01	9,52E-02
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7,78E-02	6,60E-02	7,78E-02	1,15E+00	7,78E-02	5,48E-02
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	1,19E-01	1,13E-01	1,19E-01	3,19E+00	1,19E-01	9,48E-02
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	3,95E-01	3,60E-01	3,95E-01	6,45E+00	3,95E-01	3,00E-01
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	7,76E-02	6,61E-02	1,31E-01	5,39E-02	1,17E-01	5,46E-02
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	1,20E-01	1,15E-01	1,82E-01	2,41E+00	1,66E-01	9,51E-02
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7,78E-02	6,60E-02	1,35E-01	2,41E+00	1,17E-01	5,49E-02
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	1,19E-01	1,14E-01	1,87E-01	4,24E+00	1,84E-01	9,49E-02
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	3,95E-01	3,61E-01	6,36E-01	9,11E+00	5,83E-01	2,99E-01
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	2,21E-03	6,61E-04	1,55E-03	5,37E-04	2,95E-03	5,46E-04
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	2,16E-03	1,15E-03	1,60E-03	8,25E-02	2,92E-03	9,52E-04
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	2,15E-03	6,61E-04	1,50E-03	2,59E-02	2,86E-03	5,49E-04
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	2,15E-03	1,14E-03	1,59E-03	9,20E-02	2,90E-03	9,49E-04
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	8,67E-03	3,62E-03	6,24E-03	2,01E-01	1,16E-02	3,00E-03

TABLEAU 4.5 – Configuration 1 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	4.87E-01	3.45E-01	4.87E-01	2.87E-01	4.87E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	9.75E-01	8.13E-01	9.75E-01	8.32E+00	9.75E-01	8.06E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	4.90E-01	3.46E-01	4.90E-01	4.72E+00	4.91E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	9.83E-01	8.00E-01	9.83E-01	1.28E+01	9.83E-01	8.07E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	2.94E+00	2.30E+00	2.94E+00	2.61E+01	2.94E+00	2.33E+00
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	4.87E-01	3.47E-01	6.00E-01	2.84E-01	5.95E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	9.75E-01	8.09E-01	1.10E+00	1.81E+01	1.14E+00	8.07E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	4.90E-01	3.47E-01	6.12E-01	1.73E+01	6.29E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	9.83E-01	7.99E-01	1.13E+00	2.62E+01	1.20E+00	8.07E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	2.94E+00	2.30E+00	3.44E+00	6.19E+01	3.56E+00	2.33E+00
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	8.05E-01	3.47E-01	5.78E-01	2.84E-01	9.85E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	1.11E+00	8.09E-01	9.55E-01	4.45E+01	1.34E+00	8.07E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7.95E-01	3.47E-01	5.71E-01	1.97E+01	9.72E-01	3.59E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	1.13E+00	8.01E-01	9.67E-01	4.81E+01	1.36E+00	8.07E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	3.84E+00	2.30E+00	3.07E+00	1.12E+02	4.66E+00	2.33E+00

TABLEAU 4.6 – Configuration 1 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	4,56E-02	4,22E-02	4,56E-02	9,58E-02	4,56E-02	2,23E-02
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1,03E-01	9,73E-02	1,03E-01	2,80E-01	1,03E-01	8,06E-02
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	9,91E-02	8,57E-02	9,91E-02	1,64E-01	9,91E-02	7,36E-02
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,02E-01	8,41E-02	1,02E-01	3,23E-01	1,02E-01	6,83E-02
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3,50E-01	3,09E-01	3,50E-01	8,62E-01	3,50E-01	2,45E-01
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	4,56E-02	4,23E-02	1,01E-01	9,92E-02	1,01E-01	2,16E-02
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	1,03E-01	8,08E-02	1,84E-01	1,29E+00	1,54E-01	7,95E-02
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	9,91E-02	8,18E-02	1,11E-01	1,71E+00	1,53E-01	7,34E-02
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,02E-01	6,42E-02	1,96E-01	6,44E-01	2,05E-01	6,70E-02
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3,50E-01	2,69E-01	5,93E-01	3,75E+00	6,13E-01	2,41E-01
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	4,42E-02	4,12E-02	8,48E-02	1,04E-01	6,19E-02	2,21E-02
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	9,84E-02	7,69E-02	1,65E-01	1,66E+00	1,13E-01	7,93E-02
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	9,83E-02	7,98E-02	1,06E-01	1,96E+00	1,24E-01	7,35E-02
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	1,01E-01	6,03E-02	1,66E-01	8,24E-01	1,23E-01	6,68E-02
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	3,42E-01	2,58E-01	5,21E-01	4,55E+00	4,21E-01	2,42E-01

TABLEAU 4.7 – Configuration 2 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	3.61E-01	1.88E-01	3.61E-01	4.76E-01	3.61E-01	2.17E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	7.64E-01	6.71E-01	7.65E-01	1.37E+00	7.65E-01	6.45E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	7.23E-01	6.56E-01	7.23E-01	8.97E-01	7.23E-01	6.44E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	7.21E-01	5.02E-01	7.21E-01	1.73E+00	7.22E-01	5.08E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	2.57E+00	2.02E+00	2.57E+00	4.47E+00	2.57E+00	2.01E+00
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	3.61E-01	1.92E-01	4.89E-01	4.98E-01	4.27E-01	2.17E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	7.64E-01	5.95E-01	9.80E-01	1.12E+01	1.04E+00	6.44E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	7.23E-01	5.91E-01	5.83E-01	1.32E+01	7.53E-01	6.44E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	7.21E-01	3.85E-01	8.98E-01	4.21E+00	1.06E+00	5.09E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	2.57E+00	1.76E+00	2.95E+00	2.91E+01	3.28E+00	2.01E+00
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Re(\lambda_1)}$	3.45E-01	1.83E-01	4.30E-01	5.31E-01	4.00E-01	2.15E-01
$\mathbf{Re(\lambda_2)}$	7.27E-01	5.90E-01	9.33E-01	1.41E+01	8.18E-01	6.44E-01
$\mathbf{Re(\lambda_3)}$	6.93E-01	5.92E-01	5.41E-01	1.89E+01	7.18E-01	6.43E-01
$\mathbf{Re(\lambda_4)}$	6.84E-01	3.87E-01	8.46E-01	5.29E+00	7.75E-01	5.08E-01
$\sum(\mathbf{Re(\lambda_i)})$	2.45E+00	1.75E+00	2.75E+00	3.88E+01	2.71E+00	2.01E+00

TABLEAU 4.8 – Configuration 2 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	1,04E-01	7,51E-02	9,36E-02	6,31E-02	1,10E-01	7,72E-02
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	9,89E-02	9,57E-02	1,01E-01	5,30E-01	1,04E-01	7,60E-02
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	1,35E-01	1,04E-01	1,29E-01	5,21E-01	1,38E-01	1,03E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	9,64E-02	8,04E-02	9,70E-02	1,17E-01	1,02E-01	6,09E-02
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	4,33E-01	3,55E-01	4,20E-01	1,23E+00	4,54E-01	3,17E-01
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	1,03E-01	6,35E-02	2,43E-01	6,39E-02	1,53E-01	7,73E-02
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	9,56E-02	7,75E-02	1,59E-01	1,11E+00	1,27E-01	7,58E-02
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	1,34E-01	9,34E-02	3,08E-01	1,18E+00	1,97E-01	1,03E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	9,69E-02	5,92E-02	2,78E-01	5,03E-01	1,66E-01	6,10E-02
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	4,29E-01	2,94E-01	9,88E-01	2,85E+00	6,44E-01	3,17E-01
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	1,03E-01	7,12E-02	1,33E-01	6,46E-02	1,13E-01	7,74E-02
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	9,55E-02	7,65E-02	1,71E-01	3,08E+00	1,12E-01	7,58E-02
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	1,33E-01	9,76E-02	1,38E-01	2,92E+00	1,54E-01	1,03E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	9,58E-02	5,92E-02	1,75E-01	6,38E-01	1,24E-01	6,11E-02
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	4,27E-01	3,05E-01	6,17E-01	6,70E+00	5,02E-01	3,17E-01

TABLEAU 4.9 – Configuration 2 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

				Reg Poly 0		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	5.97E-01	4.13E-01	5.05E-01	3.79E-01	6.31E-01	4.40E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	7.30E-01	6.80E-01	7.29E-01	2.72E+00	7.04E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7.48E-01	6.51E-01	7.48E-01	3.00E+00	7.46E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	7.33E-01	4.97E-01	7.33E-01	7.76E-01	7.58E-01	5.08E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	2.81E+00	2.24E+00	2.72E+00	6.88E+00	2.84E+00	2.28E+00
				Reg Poly 1		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	5.83E-01	3.53E-01	7.94E-01	3.81E-01	7.37E-01	4.42E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	7.06E-01	6.14E-01	5.70E-01	1.04E+01	7.08E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7.61E-01	6.19E-01	1.09E+00	9.73E+00	8.34E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	7.37E-01	3.75E-01	1.16E+00	4.07E+00	9.96E-01	5.08E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	2.79E+00	1.96E+00	3.61E+00	2.46E+01	3.27E+00	2.28E+00
				Reg Poly 2		
	Sphérique	**Spline**	**Linéaire**	**Gaussienne**	**Exponentielle**	**Exponentielle générale**
$\mathbf{Im(\lambda_1)}$	5.97E-01	3.76E-01	6.72E-01	3.82E-01	6.67E-01	4.42E-01
$\mathbf{Im(\lambda_2)}$	7.10E-01	6.17E-01	7.73E-01	2.87E+01	7.22E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_3)}$	7.64E-01	6.19E-01	6.82E-01	2.84E+01	8.28E-01	6.67E-01
$\mathbf{Im(\lambda_4)}$	7.13E-01	3.79E-01	9.06E-01	7.13E+00	8.22E-01	5.08E-01
$\sum(\mathbf{Im(\lambda_i)})$	2.78E+00	1.99E+00	3.03E+00	6.47E+01	3.04E+00	2.28E+00

TABLEAU 4.10 – Configuration 2 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation

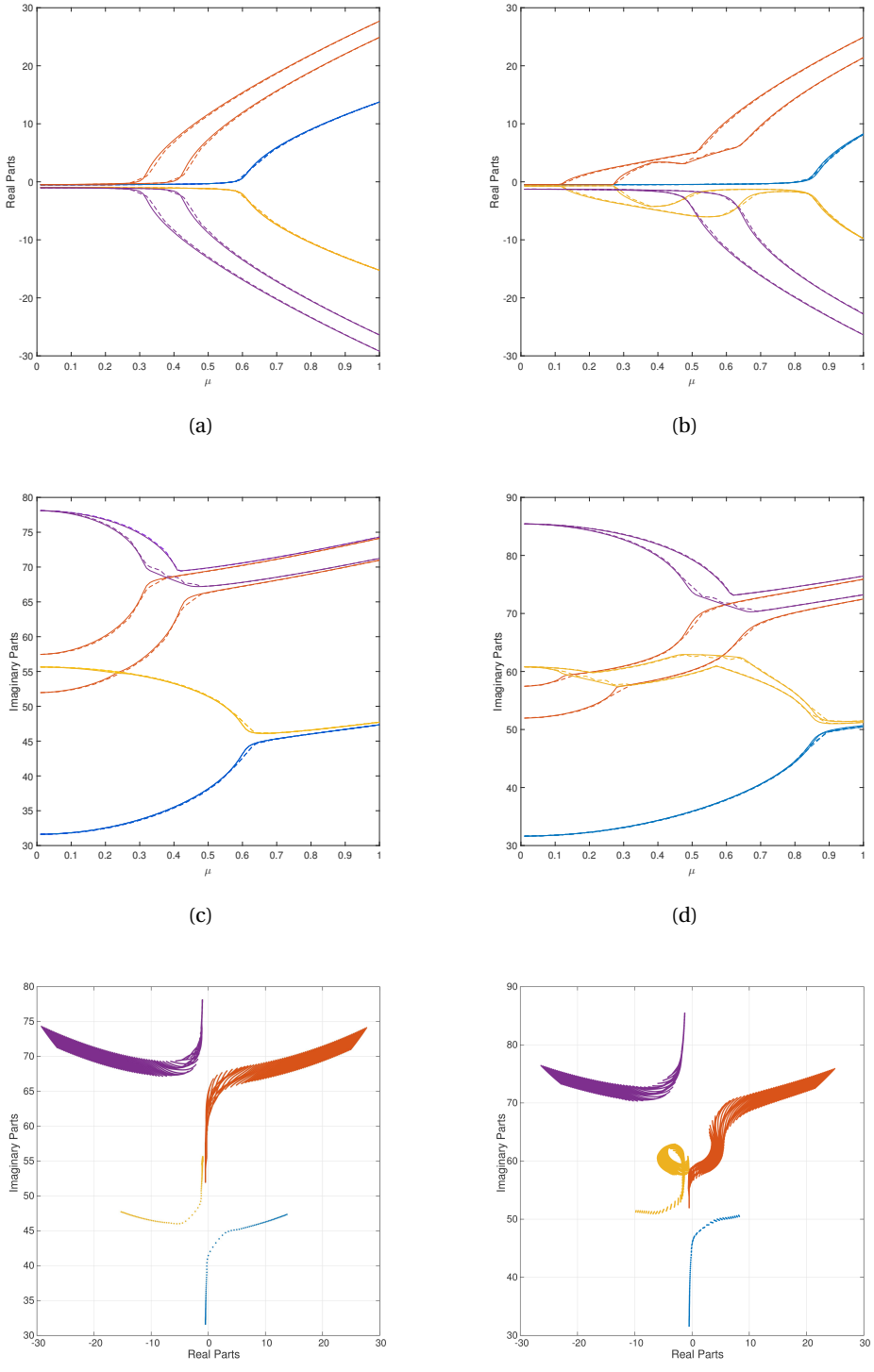
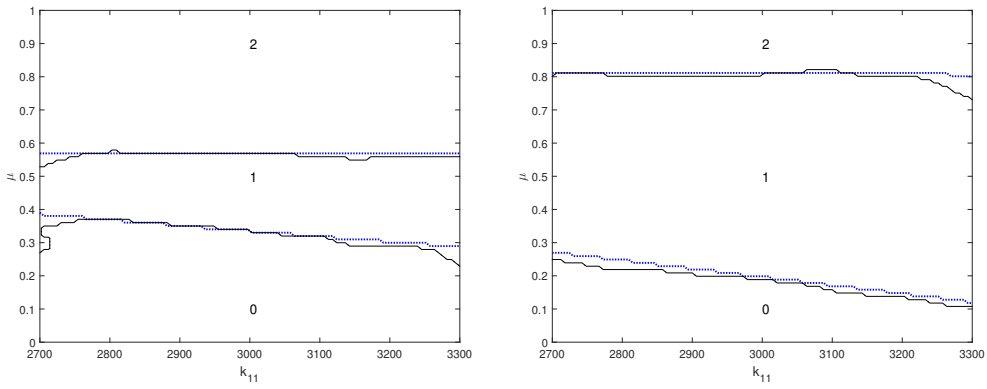


FIGURE 4.8 – Krigeage (- -) sur un espace de dimension deux avec une grille 2D linéaire de taille (20 × 50) d'échantillons d'entrée comparé aux résultats déterministes (–) : parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des prédictions du méta-modèle pour les configurations 1 (e) et 2 (f) à comparer aux Figures 4.5e et 4.5f

Étude avec x = $\{\mu, k_{11}\}$ et un plan d'expériences de type LHS (étape 3) Dans la partie précédente, les points d'apprentissage étaient générés avec des données issues d'une discrétisation linéaire de l'espace des paramètres d'entrée. Il se trouve qu'une grille linéaire n'est pas forcément le plan d'expériences optimal en terme de compromis entre la précision et le coût (nombre d'appels au modèle). Ainsi, dans cette partie, un plan d'expériences pseudo-aléatoire basé sur les LHS est utilisé [92]. Cette méthode est largement utilisée pour générer des échantillons aléatoires contrôlés. L'idée générale consiste à découper chaque intervalle de définition de chaque paramètre en sous-intervalles de probabilité identique et à effectuer un seul tirage par sous-intervalle. Contrairement aux grilles linéaires, les performances d'un LHS sont liées à sa taille et à la localisation de ses points dans l'espace d'échantillonnage puisqu'ils sont positionnés pseudo-aléatoirement. L'objectif ici est d'analyser les performances du krigeage ainsi que sa robustesse par rapport à la taille du LHS et au positionnement des points d'apprentissage. Afin de réaliser ceci, une étude statistique est menée : 50 LHS sont générés pour chaque taille de plan d'expériences considérée. La moyenne ainsi que l'écart-type de l'erreur relative commise sur les valeurs propres sont déterminés en fonction de la taille du LHS. Les résultats sont présentés Figure 4.10.

Les résultats montrent une décroissante nette de la moyenne et de l'écart-type de l'erreur relative en fonction de la taille du LHS pour les différentes valeurs propres. Ainsi l'augmentation du nombre de points implique une diminution de la moyenne de l'erreur ainsi que de l'écart-type, ce qui correspond au résultat attendu. Par exemple, pour la première valeur propre, la moyenne de l'erreur ainsi que l'écart-type n'évoluent plus au delà de N = 300. À ce stade, la précision du krigeage est faiblement dépendante de la répartition des points d'apprentissage dans l'espace de conception. L'erreur stationnaire obtenue est de 8.7% pour la partie réelle et est seulement de 0.23% pour la partie imaginaire. De plus, la taille N nécessaire pour avoir la convergence du modèle d'apprentissage est beaucoup plus faible qu'avec une grille linéaire où on avait N = 1000.

Pour les deux configurations, les prédictions des enveloppes des valeurs propres et l'évolution dans le plan complexe pour un krigeage construit avec un plan d'expériences LHS de 70 points sont données Figure 4.11. Ces résultats illustrent les très bons niveaux de précision des prédictions du krigeage pour un faible nombre de points d'apprentissage. En effet, les différentes coalescences de la première configuration sont très bien reconstruites (voir Figures 4.11a, 4.11c et 4.11e) et l'influence du paramètre k_{11} sur la première

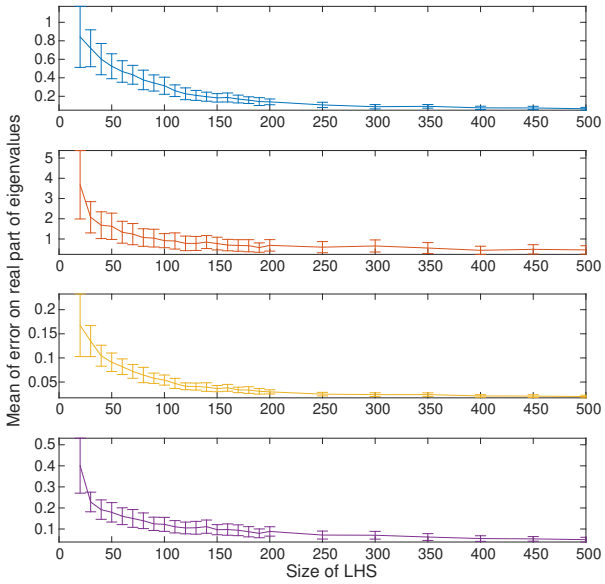


(a) (b)

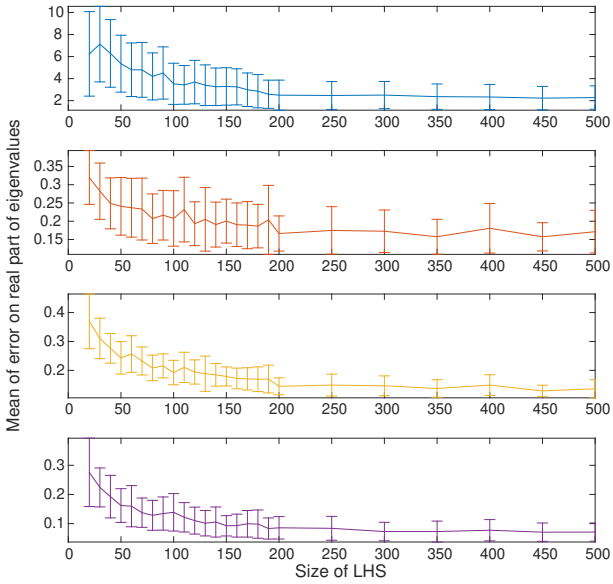
FIGURE 4.9 – Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a) et 2 (b) : krigeage avec un LHS de 70 (–) et résultats déterministes (- -)

instabilité est bien estimée. De plus, les Figures 4.11b, 4.11d et 4.11f montrent les mêmes résultats pour la seconde configuration. Même dans le cas de coalescences plus complexes, les évolutions des valeurs propres sont correctement prédites. La prédiction du nombre de modes instables en fonction des deux paramètres est donnée Figure 4.9 pour les deux configurations. Les différentes régions de stabilité et d'instabilité sont une fois de plus très bien prédites.

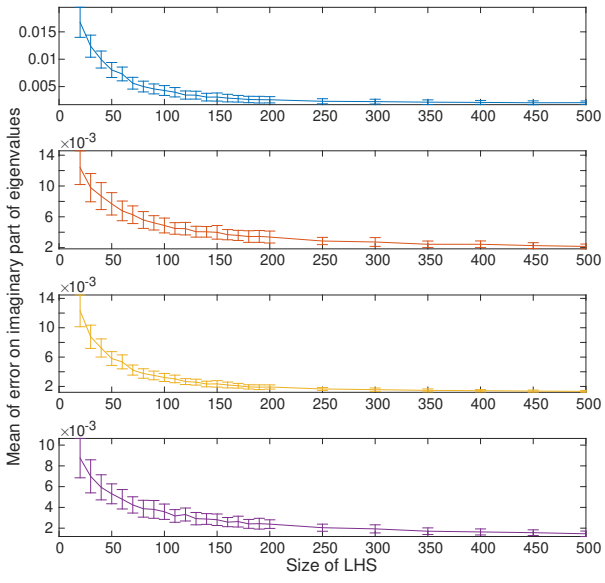
En conclusion, l'efficacité du krigeage sur l'évolution des valeurs propres du système avec un plan d'expériences de type LHS est clairement démontrée. Ce type de plan d'expériences permet de diminuer considérablement le nombre de points d'apprentissage nécessaires en comparaison à une grille linéaire pour des niveaux d'erreur similaires. Il est bon de noter que le suivi des modes par critère de MAC est naturellement mis en place pour permettre la construction des différents méta-modèles. Ces deux premières études ont montré la capacité du krigeage à prédire l'évolution de valeurs propres présentant des schémas de couplage plus ou moins complexes dans le cas d'un espace de paramètres d'entrée de dimension 2. Elles ont permis d'identifier les paramètres de calibration du krigeage permettant des niveaux d'erreur acceptables et l'intérêt des plans d'expériences LHS pour réduire le nombre de points d'apprentissage et donc le nombre d'appels au modèle. La prochaine étude a pour objectif de tester la capacité du krigeage à prédire l'évolution des valeurs propres lorsque la dimension de l'espace des paramètres d'entrée augmente.



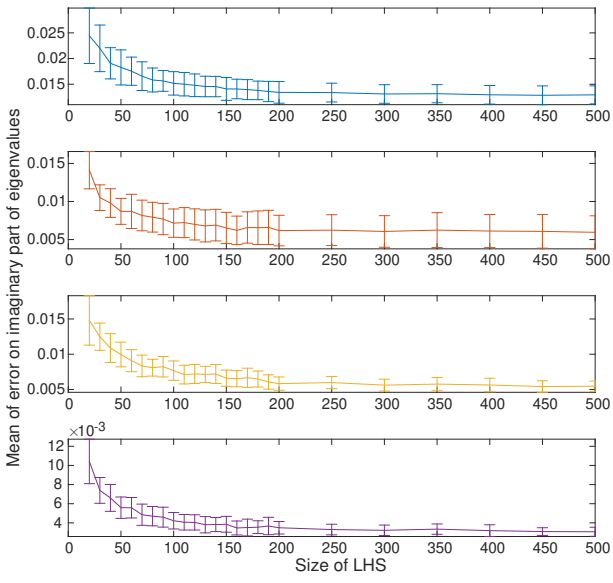
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.10 – Évolution de la moyenne de l'erreur relative et de l'écart-type en fonction de la taille du plan d'expériences sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) de chaque valeur propre pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d)

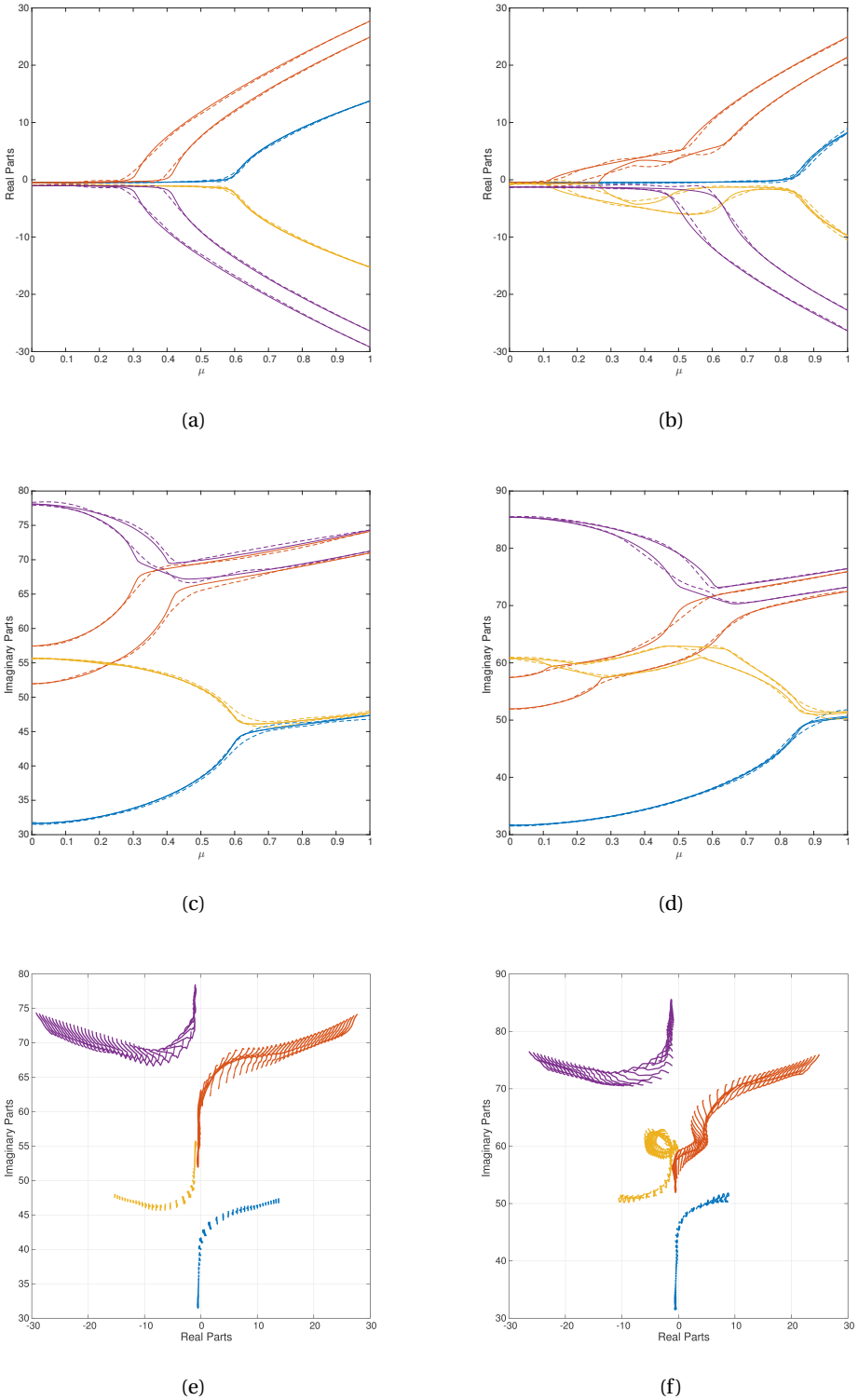


FIGURE 4.11 – Krigeage (- -) sur un espace de dimension deux avec un LHS de 70 points pour ensemble d'apprentissage comparé aux résultats déterministes (–) : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des valeurs propres prédites par le méta-modèle pour les configurations 1 (e) et 2 (f) à comparer aux Figures 4.5e et 4.5f

Krigeage : cas trois paramètres

Dans cette partie, un paramètre variable supplémentaire est considéré, augmentant ainsi la dimension de l'espace d'entrée. On a donc $\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}$ et l'objectif est de montrer la capacité du krigeage à prédire l'évolution des valeurs propres malgré une augmentation de la taille de l'espace d'entrée. Les paramètres de calibration du krigeage déterminés précédemment sont conservés, à savoir une régression d'ordre 2 et une corrélation de type exponentielle générale. Ainsi, l'effet de l'augmentation de la taille de l'espace paramétrique peut être analysé. Les points d'apprentissage sont générés à partir d'un LHS de dimension 3 composé de 200 points et les variations des différents paramètres sont celles décrites partie 4.2.2.

Les enveloppes des parties réelles et imaginaires des valeurs propres obtenues sont tracées Figure 4.12 pour les deux configurations, elles sont comparées aux enveloppes de référence. Les Figures 4.12e et 4.12f montrent l'évolution des valeurs propres dans le plan complexe et doivent être comparées aux Figures 4.6e et 4.6f.

Pour la première configuration, la comparaison des prédictions du krigeage avec les résultats de référence Figures 4.12a et 4.12c montrent la bonne capacité du krigeage à prédire l'évolution des valeurs propres ainsi que le comportement de stabilité général. L'influence de la raideur k_{22} sur la seconde instabilité est aussi bien décrite. L'augmentation de la taille de l'espace des paramètres n'a pas impacté de façon négative les performances du krigeage en terme de qualité de prédiction.

Des remarques similaires peuvent être faites pour la seconde configuration en comparant les enveloppes des valeurs propres prédites aux résultats de référence (Figures 4.12b et 4.12d). Dans ce cas, les enveloppes sont plus étalées et certains modes ont une partie réelle positive dès $\mu = 0$ rendant le système toujours instable. Ce phénomène est correctement prédit par le krigeage et ici aussi l'augmentation de la taille de l'espace paramétrique d'entrée n'a pas nuit aux performances du krigeage.

Cependant, il est important de noter que l'augmentation de la dimension de l'espace d'entrée a impliqué une augmentation du nombre de points d'apprentissage. Cette augmentation a permis de capturer l'effet de la raideur k_{22}. De façon plus générale, l'augmentation de la taille de l'espace d'entrée implique une augmentation de la taille des plans d'expérience. Cette augmentation dépend fortement de l'influence des paramètres supplémentaires, mais en général la taille des plans d'expérience explose rapidement, ce qui peut poser problème dans un cadre industriel.

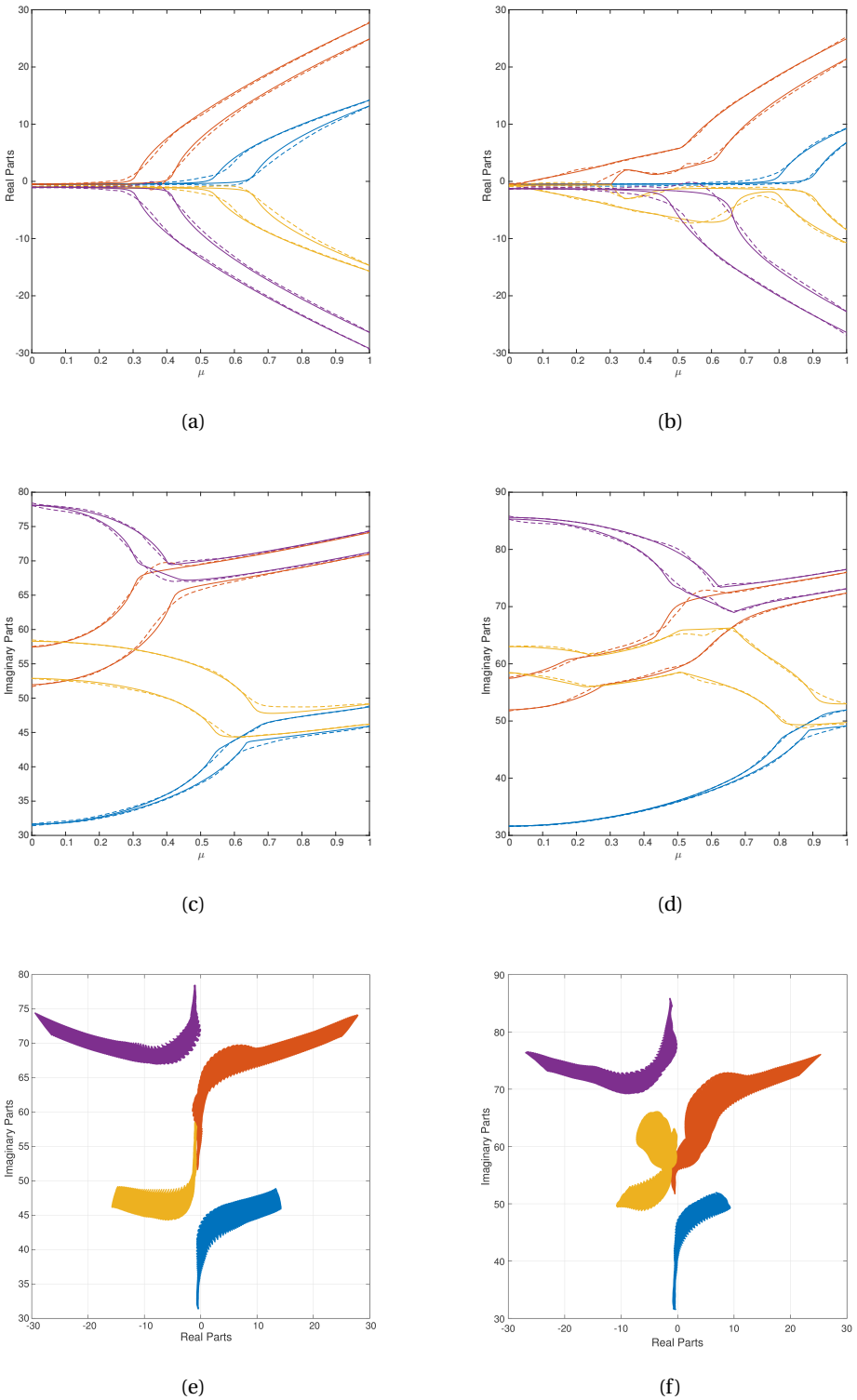


FIGURE 4.12 – Krigeage (- -) sur un espace de dimension 3 avec un LHS de 200 points comme ensemble d'apprentissage comparé aux résultats déterministes (–) : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des valeurs propres prédites par le krigeage pour les configurations 1 (e) et 2 (f)

Remarques sur les coûts numériques

Dans le but de démontrer l'intérêt du krigeage par rapport à une CEA paramétrique classique, les coûts numériques des différentes méthodes pour effectuer l'analyse de stabilité sont comparés et donnés Tableau 4.11 dans le cas deux paramètres et Tableau 4.12 dans le cas trois paramètres. Ces résultats montrent l'intérêt d'utiliser un plan d'expériences de type LHS et un méta-modèle de type krigeage. Dans le cas deux paramètres, l'intérêt du krigeage est relativement limité comparé à la CEA, ceci étant lié au coût de la construction du méta-modèle, mais dès que trois paramètres sont considérés l'utilisation d'un krigeage peut se montrer avantageuse. Par ailleurs, Tableau 4.13 donne le nombre de calculs CEA réalisés sur le modèle mécanique dans les différents cas. On remarque que l'utilisation d'un méta-modèle réduit considérablement ce nombre, en particulier lorsqu'un plan d'expériences de type LHS est utilisé. Ces résultats laissent présager des résultats prometteurs dans le cadre d'une application à un modèle éléments finis où les coûts CEA sont particulièrement élevés.

Méthode	**Temps (s)**
CEA	0.87
Krigeage avec grille linéaire 2D	4.07
Krigeage avec LHS	0.12

TABLEAU 4.11 – Comparaison des temps de calcul entre la CEA et le méta-modèle pour deux paramètres

Méthode	**Temps (s)**
CEA	9.06
Krigeage avec LHS	0.67

TABLEAU 4.12 – Comparaison des temps de calcul entre la CEA et le méta-modèle de trois paramètres

Espace paramétrique	$\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}\}$	$\mathbf{x} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}$
Méthode déterministe	10 000	1 000 000
Krigeage avec grille linéaire 2D	1000	-
Krigeage avec LHS	70	200

TABLEAU 4.13 – Comparaison du nombre d'échantillons dans chaque cas d'étude $\mathbf{p} = \{\mu, k_{11}\}$ et $\mathbf{p} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}$ (i.e. pour 2 ou 3 paramètres) pour le calcul des résultats déterministes avec la CEA ou pour construire un méta-modèle krigeage

4.3 Développement de type chaos polynomial

Cette partie est dédiée à la présentation de la méthode du développement de type chaos polynomial et à son application à la prédiction de l'évolution des valeurs propres complexes. Cette méthode diffère de la technique du krigeage par la prise en compte des PDF des paramètres aléatoires d'entrée, ce qui permet d'avoir une modélisation qui dépend intrinsèquement de la description de nos variables aléatoires. Cette description permet d'accéder directement aux descriptions statistiques (moyenne, variance) de la variable aléatoire de sortie, ce que ne permet pas le krigeage. Dans un premier temps, le forma-

lisme de la méthode est présenté ainsi que les différents choix de construction réalisés. Puis, elle est appliquée brièvement à notre problème afin d'illustrer la méthode.

4.3.1 Formalisme

Formulation

On considère notre modèle physique représenté par une réponse déterministe $\mathbf{y} = \mathscr{M}(\mathbf{x})$. Ici $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_p\}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 1$ le vecteur des variables d'entrée et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des variables de sortie. Sans perte en généralité, on peut considérer que $q = 1$, si $q > 1$ les développements suivants sont valables pour chaque composante de sortie. Si le vecteur $\mathbf{x}$ est affecté d'incertitude, un cadre probabiliste peut être utilisé.

Ainsi, le vecteur des variables d'entrée peut être représenté par un vecteur aléatoire $\mathbf{X}(\omega), \omega \in \Omega$ avec une PDF jointe $f_{\mathbf{X}}$. La sortie du modèle est alors elle aussi aléatoire et notée $\mathrm{Y}(\omega) = \mathscr{M}(\mathbf{X}(\omega))$. Par soucis de lisibilité on notera $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}(\omega)$. On suppose que Y est une variable stationnaire. On note $\mathscr{L}^2$ l'espace fonctionnel des vecteurs aléatoires de dimension p de carré intégrable par rapport à la densité jointe $f_{\mathbf{X}}$. Ce qui nous intéresse, c'est la décomposition de Y sur une base orthogonale de $\mathscr{L}^2$ (l'orthogonalité est définie par rapport à la PDF $f_{\mathbf{X}}$). On s'intéresse ici aux bases polynomiales. On suppose que les composantes du vecteur aléatoires d'entrée sont indépendantes. Puisque Y est de carré intégrable, on sait qu'il peut être exprimé sous la forme d'une série de polynômes orthogonaux comme suit [145–147] :

$$\mathrm{Y} \equiv \mathscr{M}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \Psi_j(\mathbf{X}) \tag{4.25}$$

où les a_j sont des coefficients déterministes inconnus et les Ψ_j des polynômes multivariés. Cette série converge dans le sens de la norme $\mathscr{L}^2$, c'est-à-dire :

$$\lim_{\mathrm{P}\to+\infty} \left\| \mathscr{M}(\mathbf{X}) - \sum_{j=0}^{\mathrm{P}-1} a_j \Psi_j(\mathbf{X}) \right\|_{\mathscr{L}^2}^2 \equiv \lim_{\mathrm{P}\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(\mathscr{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\boldsymbol{\alpha}=0}^{\mathrm{P}-1} a_j \Psi_j(\mathbf{X}) \right)^2 \right] = 0 \tag{4.26}$$

L'équation 4.25 est souvent appelée développement en *polynômes du chaos*. Sa construction est expliquée dans la suite.

Tout d'abord l'hypothèse d'indépendance des variables nous permet d'écrire la PDF jointe $f_{\mathbf{X}}$ de la façon suivante :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{p} f_{\mathrm{X}_i}(x_i) \tag{4.27}$$

où f_{X_i} représente la PDF marginale de la variable aléatoire X_i. On considère la famille $\left(\mathrm{P}_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux par rapport à f_{X_i}. C'est-à-dire :

$$\left\langle \mathrm{P}_j^{(i)}(\mathrm{X}_i), \mathrm{P}_k^{(i)}(\mathrm{X}_i) \right\rangle_{\mathscr{L}^2_{\mathbb{R}}} \equiv \mathbb{E}\left[\mathrm{P}_j^{(i)}(\mathrm{X}_i) \mathrm{P}_k^{(i)}(\mathrm{X}_i) \right] = \delta_{j,k} \tag{4.28}$$

Pour des raisons de clarté, le polynôme $\mathrm{P}_j^{(i)}$ est de degré j si $j > 0$ et $\mathrm{P}_0^{(i)} \equiv 1$. Ces polynômes sont déterminés avec le schéma d'Askey [76, 146].

Par tensorisation des p familles de polynômes univariés, on obtient une famille de polynômes multivariés orthogonaux $(\Psi_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^p}$ définis par :

$$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{P}_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \times \cdots \times \mathrm{P}_{\alpha_p}^{(p)}(x_p) \tag{4.29}$$

Distribution	Support	Polynômes
Gaussienne	$\mathbb{R}$	Hermite
Uniforme	$[-1,1]$	Legendre
Gamma	$[0,+\infty[$	Laguerre
Chebyshev	$[-1,1]$	Chebychev
Beta	$[0,1]$	Jacobi

TABLEAU 4.14 – Correspondance entre les distributions continues classiques et les familles de polynômes orthogonaux associées

où $\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_1, \dots \alpha_p\}$ est la notation multi-index.

Le chaos polynomial (PC) a été formulé initialement par Wiener pour des variables aléatoires gaussiennes et des polynômes d'Hermite [145], on appelle parfois ce cas particulier *chaos polynomial de Wiener*. Il a été étendu plus tard au cas des autres variables aléatoires classiques avec des bases de fonctions polynomiales issue de la famille d'Askey des polynômes hypergéométriques [76] par Xiu et al. [146, 147]. Cette décomposition est appelée chaos généralisé (*generalized polynomial chaos GPC*). Avec ce développement, chaque distribution continue est associée à une famille spécifique de polynômes orthogonaux résumés dans le Tableau 4.14.

Dans les faits, l'implémentation numérique implique une troncature de la série. L'utilisateur choisit l'ordre du chaos m, c'est-à-dire que les polynômes multivariés $\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ utilisés seront de degré inférieur ou égal à m. La taille P du chaos est alors donnée par :

$$\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c} m+p \\ p \end{array} \right) \tag{4.30}$$

La procédure générale est alors la suivante. Dans un premier temps, les familles de polynômes monovariés associées à chaque densité marginale des composantes de $\mathbf{X}$ sont construites. Une transformation linéaire des variables physiques peut être réalisée pour se ramener aux supports des distributions. Dans un second temps, les indices multivariés $\boldsymbol{\alpha}$ qui correspondent aux polynômes multivariés de degrés inférieurs ou égal à m sont déterminés, permettant alors de construire la base multivariée.

Calcul des coefficients a_j

Une fois ce contexte général posé, il s'agit de déterminer les coefficients a_j. Plusieurs méthodologies existent et dépendent du problème posé et du modèle utilisé. Deux grandes familles de méthodes se distinguent : les méthodes intrusives et les méthodes non-intrusives. Historiquement, ce sont les méthodes intrusives qui ont été développées en premier pour calculer les coefficients dans le cas de l'analyse des éléments finis stochastiques. Cette approche de résolution implique une modification parfois lourde du code éléments finis, ce qui peut s'avérer être une tâche compliquée voire impossible. Des approches non-intrusives ont alors été développées plus récemment telles que les méthodes de projection et de régression [9]. A partir de quelques évaluations de Y pour différents tirages de $\mathbf{X}$, les coefficients a_j du développement en chaos sont déduits. Au vu de l'application finale, à savoir un MEF, dont il ne sera pas possible d'exploiter les différentes matrices du système, une méthode non-intrusive sera exploitée et seules quelques unes de ces méthodes seront présentées ici.

La méthode de projection La méthode de projection est basée sur l'orthogonalité des vecteurs de la base du chaos. En partant de l'expression 4.25, en multipliant par Ψ_j et en prenant la moyenne, on obtient :

$$\mathbb{E}[Y\Psi_j] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \Psi_i \Psi_j\right] \tag{4.31}$$

L'orthogonalité de la base donne $\mathbb{E}\left[\Psi_i \Psi_j\right] = 0$, si $i \neq j$. Ainsi il vient :

$$a_j = \frac{\mathbb{E}\left[Y\Psi_j\right]}{\mathbb{E}\left[\Psi_j^2\right]} \tag{4.32}$$

Le dénominateur peut être déterminé de façon analytique et le numérateur est déterminé en calculant l'intégrale :

$$\mathbb{E}[Y\Psi_j] = \int \mathscr{M}(\mathbf{x})\Psi_j(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{4.33}$$

Le calcul de cette intégrale peut être réalisé en effectuant des tirages de Monte Carlo lorsque le modèle a un coût numérique faible. Dans les faits, cette approche est impossible et une approche avec un schéma de quadrature est adopté. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [12, 136].

La méthode de régression La méthode de régression n'est autre que le calcul de la régression de la solution exacte par rapport à la base du chaos polynomial. C'est-à-dire qu'on cherche à résoudre :

$$Y = \mathscr{M}(\mathbf{X}) = \tilde{Y}(\mathbf{X}) + \epsilon \tag{4.34}$$

avec :

$$\tilde{Y}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{P-1} a_j \Psi_j(\mathbf{X}) \tag{4.35}$$

où le résidu ϵ est supposé être une variable de moyenne nulle. On note $\mathbf{A}$ le vecteur des coefficients a_j. La minimisation de la variance du résidu par rapport aux coefficients a_j inconnus revient à résoudre :

$$\mathbf{A} = \underset{\mathbf{A}}{\operatorname{argmin}}\, \mathbb{E}\left[\left(\mathscr{M}(\mathbf{X}) - \tilde{Y}\right)^2\right] \tag{4.36}$$

Afin de résoudre 4.36, N réalisations de $\mathbf{X} = \left\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}\right\}$ sont déterminées. La minimisation aux sens des moindres carrés revient à résoudre le problème suivant :

$$\mathbf{A} = \underset{\mathbf{A}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\mathscr{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \sum_{j=0}^{P-1} a_j \Psi_j(\mathbf{x}^{(i)})\right)^2 \tag{4.37}$$

En notant $\mathbf{W}$ la matrice des coefficients $W_{ij} = \Psi_j(\mathbf{x}^{(i)})$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $j = 0, \ldots, P-1$ et $\mathbf{Y}_{ex}$ le vecteur des $\mathscr{M}(\mathbf{x}^{(i)})$, la solution de l'équation 4.37 s'écrit :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{Y}_{ex} \tag{4.38}$$

Cette méthode se rapproche de la méthode des surfaces de réponse. Dans ce contexte, les $\left(\mathbf{x}^{(i)}\right)_{i=1,\ldots,N}$ sont le plan d'expériences et $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ la matrice d'information. D'un point de vue numérique, elle peut être mal conditionnée et un solveur particulier comme celui de la SVD doit être utilisé.

Le plan d'expériences dans ce cas peut être déterminé de différentes façons. Dans le cas à une dimension ($p = 1$), le plan optimal est donné par les racines du polynôme Ψ_{p+1}. Lorsque la dimension est supérieure à 1, il suffit de faire le produit tensoriel de ces plans optimaux. Cependant, cela implique un plan d'expériences de taille considérable, souvent inabordable en terme de coût numérique. Des algorithmes ont été développés pour sélectionner un nombre limité de termes [136], mais le coût reste tout de même élevé. Il est alors possible de s'orienter vers des LHS. Une règle empirique donne un nombre de points de régression de l'ordre de $N = k * P$ avec $k = 2$ ou 3 pour avoir de bons résultats. La régression peut alors surpasser les performances de la projection dès lors que le PC est suffisamment précis (ordre m suffisamment élevé) [12, 112].

L'objectif final étant de pouvoir appliquer nos méthodes à un modèle éléments finis, les méthodes de chaos intrusif sont directement écartées car la modification du code éléments finis n'est pas envisageable dans notre contexte. Parmi les différentes méthodes non-intrusives, le coût numérique plus faible de la méthode régressive ainsi que sa facilité de mise en œuvre nous orientent vers ce choix.

Post-traitement des coefficients du chaos

On considère que le développement à l'ordre m de la réponse du modèle a été déterminé et que les coefficients $a_{\boldsymbol{\alpha}}$ ont été calculés, on a alors :

$$\tilde{\mathrm{Y}}_m = \mathscr{M}_m(\mathbf{X}) \equiv \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} a_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X}) \tag{4.39}$$

Analyse des moments statistiques Les différents moments statistiques peuvent être déterminés directement depuis le PC, en particulier la moyenne et la variance :

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathrm{Y}}_m] \equiv a_{\mathbf{0}} \tag{4.40}$$

$$\sigma^2_{\tilde{\mathrm{Y}}_m} \equiv \sum_{0<|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} a^2_{\boldsymbol{\alpha}} \|\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}\|^2_{\mathscr{L}^2} \tag{4.41}$$

Analyse de sensibilité globale : indices de Sobol Les indices de Sobol permettent de mesurer la sensibilité d'une variable de sortie à ses variables d'entrée. La méthode se base sur la décomposition de la fonction $\mathscr{M}$ dépendant de $(x_1, \ldots, x_p)$ et définie sur $\mathscr{D}_{\mathbf{X}} = [0,1]^p$ de la façon suivante :

$$\mathscr{M}(x_1, \ldots, x_p) = \mathscr{M}_0 + \sum_{i=1}^{p} \mathscr{M}_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \mathscr{M}_{ij}(x_i, x_j), + \ldots + \mathscr{M}_{1,2,\ldots,p}(x_1, \ldots, x_p) \tag{4.42}$$

En notant $\mathbf{v} = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, p\}$ et $\mathbf{x}_{\mathbf{v}}$ le sous-vecteur de $\mathbf{x}$ obtenu en considérant uniquement les indices de $\mathbf{v}$, la décomposition précédente peut aussi s'écrire :

$$\mathscr{M}(\mathbf{x}) = \mathscr{M}_0 + \sum_{\mathbf{v} \subset \{1,\ldots,p\}} \mathscr{M}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}) \tag{4.43}$$

avec les deux conditions suivantes :

— $\mathscr{M}_0$ constant et égal à la moyenne de $\mathscr{M}(\mathbf{X})$,

— les intégrales suivantes sont nulles :

$$\int_0^1 \mathscr{M}_{i_1,\ldots,i_s}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0 \text{ si } 1 \leq k \leq s \tag{4.44}$$

Cette décomposition, appelée décomposition de Sobol, existe et est unique pour toute fonction intégrable.
La variance totale de notre fonction est :

$$\mathrm{D} = \int_{\mathscr{D}_{\mathbf{X}}} \mathscr{M}^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathscr{M}_0^2 \tag{4.45}$$

et les variances partielles sont :

$$\mathrm{D}_{i_1,\ldots,i_s} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \mathscr{M}^2_{i_1,\ldots,i_s}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) dx_{i_1} \ldots dx_{i_s} \text{ pour } 1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq p \text{ et } s = 1,\ldots,p \tag{4.46}$$

Et la somme de toute les variances partielles donne la variance totale. On définit alors les mesures de sensibilité (appelées indices de Sobol) :

$$\mathrm{S}_{i_1,\ldots,i_s} = \frac{\mathrm{D}_{i_1,\ldots,i_s}}{\mathrm{D}} \tag{4.47}$$

Elles correspondent à la contribution relative de chaque groupe de variables $(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$. Les indices de Sobol de premier ordre S_i représentent l'effet de chaque variable d'entrée seule. Les indices de second ordre S_{ij} représentent les effets des interactions entre deux paramètres. Les indices de plus grand ordre sont à interpréter de la même manière.

On définit les indices de Sobol totaux comme :

$$\mathrm{S}_i^{\mathrm{T}} = \sum_{i \subset \{i_1,\ldots,i_s\}} \mathrm{S}_{i_1,\ldots,i_s} \tag{4.48}$$

Et on montre l'égalité suivante facilement :

$$\mathrm{S}_i^{\mathrm{T}} = 1 - \mathrm{S}_{\sim i} \tag{4.49}$$

où $\mathrm{S}_{\sim i}$ représente l'indice de sensibilité de tous les facteurs excepté i, c'est-à-dire $\mathrm{S}_{\sim i} = \mathrm{S}_{\mathbf{v}}$ avec $\mathbf{v} = \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,p\}$.

On a montré qu'un développement par chaos nous permettait d'écrire :

$$\mathscr{M}_m(\mathbf{X}) \equiv \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} a_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X}) \tag{4.50}$$

Il est possible de réarranger cette somme afin d'obtenir une écriture similaire à 4.42. Pour un ensemble $\mathbf{u} \subset \{1,\ldots,p\}$, on définit

$$\mathscr{A}_{\mathbf{u}} = \{\boldsymbol{\alpha} \,:\, k \in \mathbf{u} \Leftrightarrow \alpha_k \neq 0, k = 1,\ldots,p\} \tag{4.51}$$

En d'autre termes, $\mathscr{A}_{\mathbf{u}}$ contient tous les multi-indices de la série qui n'ont pas de composante nulle sur k si k est élément de $\mathbf{u}$. Le développement en chaos peut donc se réécrire de la façon suivante :

$$\mathscr{M}_m(\mathbf{X}) \equiv \mathscr{M}_0 + \sum_{\mathbf{u} \subset \{1,\ldots,p\}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}_{\mathbf{u}}} a_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{X}) \tag{4.52}$$

On remarque que cette écriture correspond à la décomposition 4.43, or cette décomposition est unique. L'orthogonalité des polynômes de la base permet de définir les variances totales et partielles comme suit :

$$\mathrm{Var}[\mathscr{M}_m(\mathbf{X})] = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} a_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \tag{4.53}$$

$$\mathrm{Var}[\mathscr{M}_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}_{\mathbf{v}})] = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}_{\mathbf{v}}} a_{\boldsymbol{\alpha}}^2 \tag{4.54}$$

Les indices de Sobol sont alors déduits en calculant les rapports définis équation 4.47.

Densité de probabilité de la sortie Pour cette analyse, il est nécessaire de faire passer un grand nombre de simulations type Monte Carlo sur le modèle. Son expression étant analytique, les temps de calculs restent limités et permettent une telle approche.

4.3.2 Application

L'objectif de cette partie est de présenter rapidement comment le chaos polynomial peut être utilisé pour la prédiction des valeurs propres. Cette méthode a déjà été utilisée dans ce but sur un modèle phénoménologique du crissement à deux degrés de liberté [124] en intrusif puis sur un MEF dans [125] avec une approche multi-éléments. L'objectif ici est surtout d'illustrer la méthode de façon succincte afin de présenter ses avantages et inconvénients par rapport au krigeage.

Pour cela, deux brèves études sont considérées, la première avec un unique paramètre incertain, à savoir le coefficient de frottement μ, et la seconde avec un second paramètre incertain, à savoir la raideur k_{11}. Seul le cas de la loi uniforme est traité, la base polynomiale associée est composée des polynômes de Legendre. Le calcul des coefficients a_j se fait avec une méthode de régression.

Cas à un paramètre aléatoire

Premièrement, seul le coefficient de frottement μ est considéré comme incertain. Dans un premier temps, le GPC est utilisé afin de pouvoir prédire l'évolution des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement μ. Différentes tailles de GPC sont considérées et chacun possède un plan d'expériences généré avec un LHS de taille 4P avec P la taille du chaos. Afin de mesurer la précision du méta-modèle, un ensemble de 50 points pour lesquels les résultats de référence sont comparés aux résultats prédits est considéré. La moyenne quadratique des erreurs absolues commises sur chaque partie réelle, notée $e_{\mathrm{Q}}^{\text{réelle}}$, et sur chaque partie imaginaire, notée $e_{\mathrm{Q}}^{\text{imaginaire}}$, de ces valeurs propres est calculée de la façon suivante :

$$e_{\mathrm{Q}}^{\text{réelle}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |a_{\text{ref}} - a_{\text{GPC}}|^2} \tag{4.55}$$

$$e_{\mathrm{Q}}^{\text{imaginaire}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{GPC}}|^2} \tag{4.56}$$

Les évolutions de ces erreurs sont tracées Figures 4.13. Lorsque la taille du chaos augmente, les erreurs diminuent. Cependant, la taille du plan d'expériences augmente avec la taille du chaos. Un compromis entre le niveau de précision et le coût numérique doit être trouvé. Les prédictions de l'évolution des valeurs propres pour les deux configurations sont données Figure 4.14 pour un chaos d'ordre 5, elles sont comparées aux résultats de référence. On remarque que le comportement global de stabilité du système est bien reproduit.

Par ailleurs, la décomposition GPC permet d'accéder directement à la moyenne et à la variance du processus en manipulant les coefficients a_j. L'évolution des moyennes et des variances des différentes valeurs propres en fonction de l'ordre du chaos sont ainsi déterminées et tracées Figure 4.15 pour la moyenne et Figure 4.16 pour la variance. Ces évolutions sont comparées à des résultats de référence obtenus en effectuant des tirages

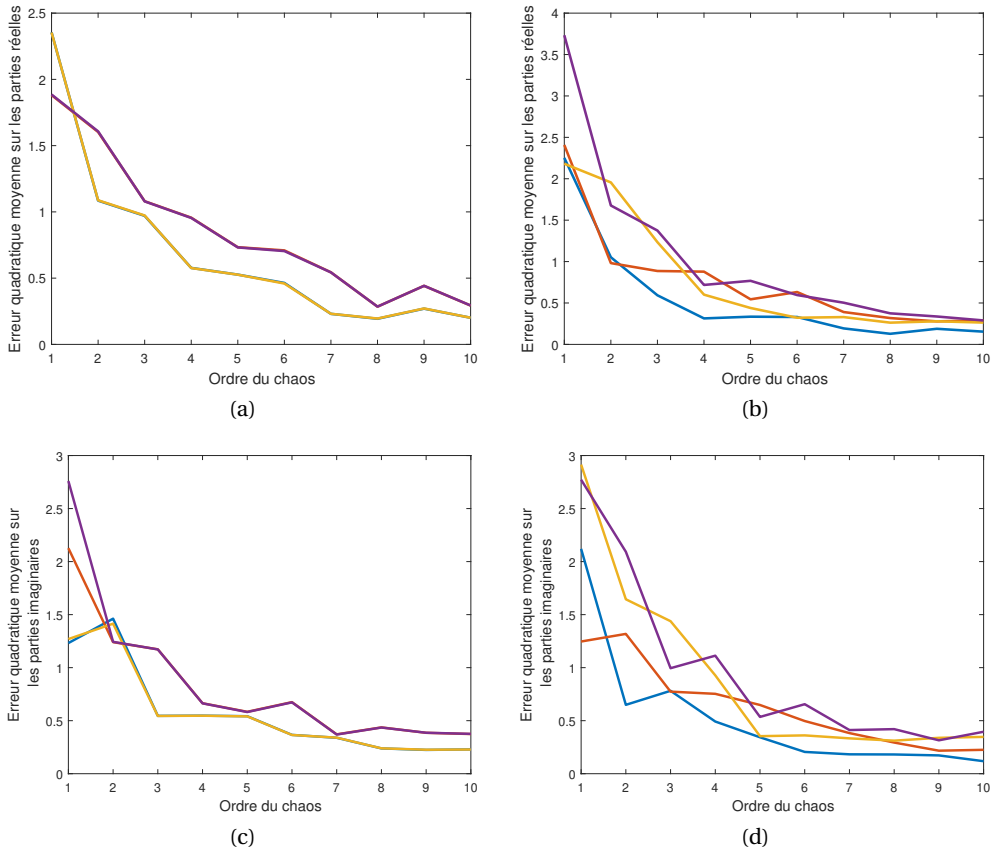
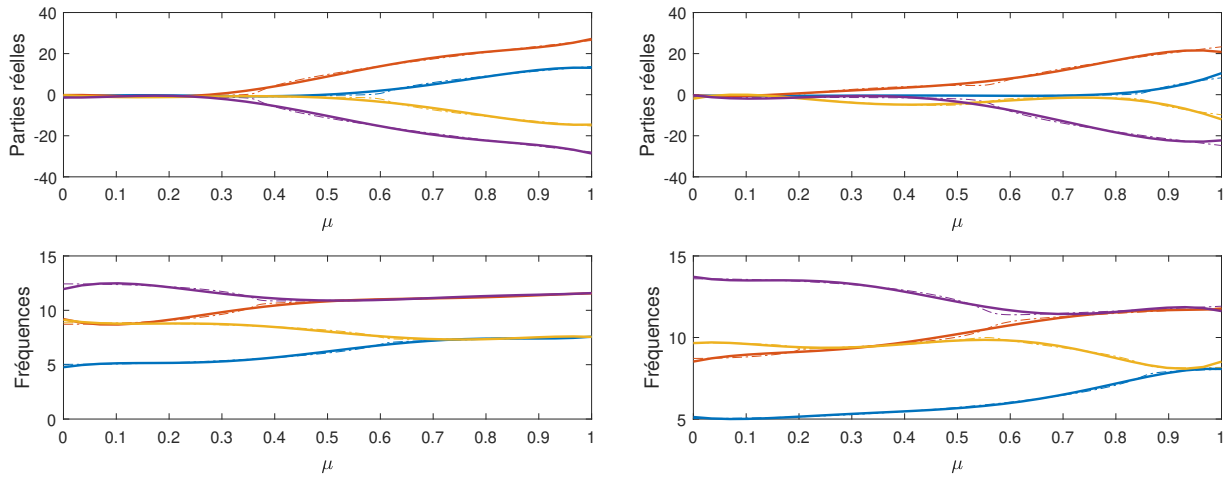


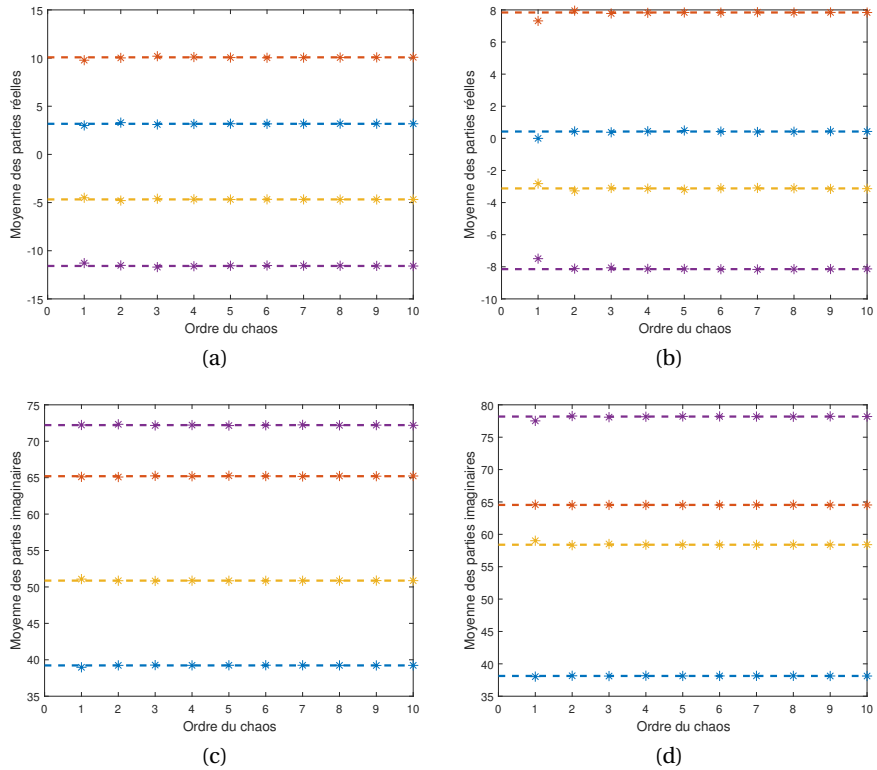
FIGURE 4.13 – Évolution de la moyenne quadratique des erreurs absolues commises sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres dans le cas de la première (a,c) et de la seconde (b,d) configuration pour différents ordres de chaos

MCS sur le modèle mécanique. Ainsi, 10^5 échantillons sont générés et les 10^5 CEA correspondantes sont réalisées afin d'obtenir les variances et les moyennes de référence. On remarque que les convergences en moyenne et en variance sont très rapides, un chaos d'ordre 2 ou 3 est suffisant pour la moyenne et un chaos d'ordre 4 ou 5 pour la variance. Si l'objectif final est de déterminer uniquement la moyenne et la variance du processus, un chaos de petite taille peut être envisagé ce qui implique un plan d'expériences lui aussi réduit et donc un coût numérique global plus faible.



(a) (b)

FIGURE 4.14 – Évolution des parties réelles (en haut) et des fréquences (en bas) des valeurs propres pour la première (a) et la seconde configuration (b) en fonction du coefficient de frottement μ - Comparaison des prédictions du chaos (-) et des références (- -)



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 4.15 – Évolution des moyennes des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos (∗)

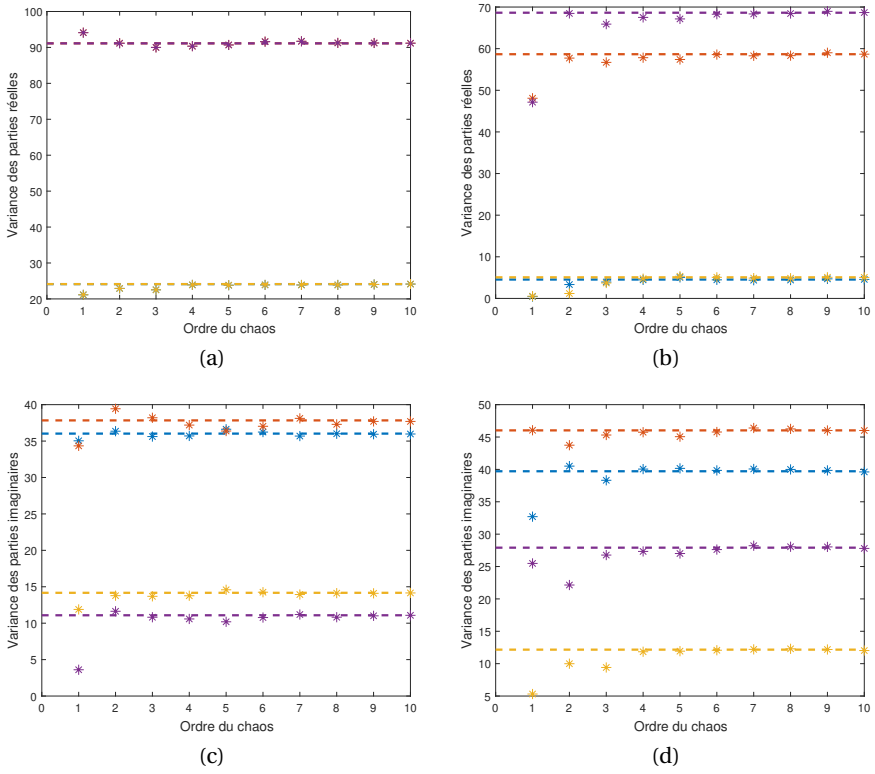


FIGURE 4.16 – Évolution des variances des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos ($*$)

Cas à deux paramètres aléatoires

On considère maintenant un second paramètre incertain : la raideur k_{11} caractérisée par une loi uniforme. La base du chaos est donc composée des polynômes multivariés obtenus par produit tensoriel des polynômes uni-variés de Legendre. De la même manière, les moyennes quadratiques des erreurs absolues commises sur les parties réelles et imaginaires par rapport à un ensemble de 50 points de référence sont calculées pour différents ordres de chaos. Les évolutions de ces erreurs sont tracées Figure 4.17. Comme dans le cas à un paramètre incertain, lorsque la taille de la base augmente, l'erreur quadratique diminue. On remarque cependant que la décroissance n'est pas stricte, mais globale. En effet, l'erreur pour un chaos d'ordre 7 est supérieure à l'erreur pour un chaos d'ordre 6 dans le cas de la seconde configuration.

De la même manière, les moyennes et les variances des parties réelles et des parties imaginaires sont obtenues directement à partir des coefficients du chaos. Une méthode MCS appliquée sur le modèle mécanique permet de déterminer les valeurs de référence. La comparaison des résultats est affichée Figure 4.18 pour la moyenne et Figure 4.19 pour la variance. Comme précédemment, la convergence en moyenne est très rapide puisque même un chaos à l'ordre 1 fournit déjà des résultats concluants. La convergence en variance est un peu plus lente, puisqu'il faut un ordre 5 pour avoir des résultats satisfaisants. Pour un ordre 5, la série est composée de 21 termes et le plan d'expériences est constitué de 84 points.

Si l'ensemble de ces résultats montre la performance du développement par chaos, ils font aussi apparaitre sa principale limitation. En effet, en augmentant la taille de l'espace des variables aléatoires, la taille du chaos explose. Ainsi, lorsque l'ordre du chaos est de 10, le développement en chaos comporte 66 termes en dimension 2. Les tailles des plans d'expériences nécessaires à la détermination des coefficients a_j augmentent elles aussi de façon exponentielle. Certaines méthodes existent afin de diminuer la taille de la base en éliminant certains termes, soit en supposant que les termes d'interaction ont une contribution faible, soit en construisant un chaos creux [13, 14].

La méthode d'expansion du chaos polynomial permet à la différence de la méthode de krigeage de déterminer directement les moments statistiques de la sortie. De plus, la prise en compte des PDF permet d'avoir un modèle très prédictif sur les zones de forte probabilité et moins sur les zones à faible densité de probabilité, contrairement au krigeage qui tend à minimiser l'erreur globale sur l'ensemble de l'espace. Cependant, l'ajout de nouvelles dimensions coûte très cher en terme de taille de la base et donc en nombre de calculs à réaliser pour déterminer les différents coefficients. Même si pour le krigeage l'ajout d'une dimension nécessite une augmentation de la taille du plan d'expériences, cette augmentation est moindre que pour le chaos (en dimension 2, 70 points pour le krigeage contre 85 points si l'on considère un chaos à l'ordre 5).

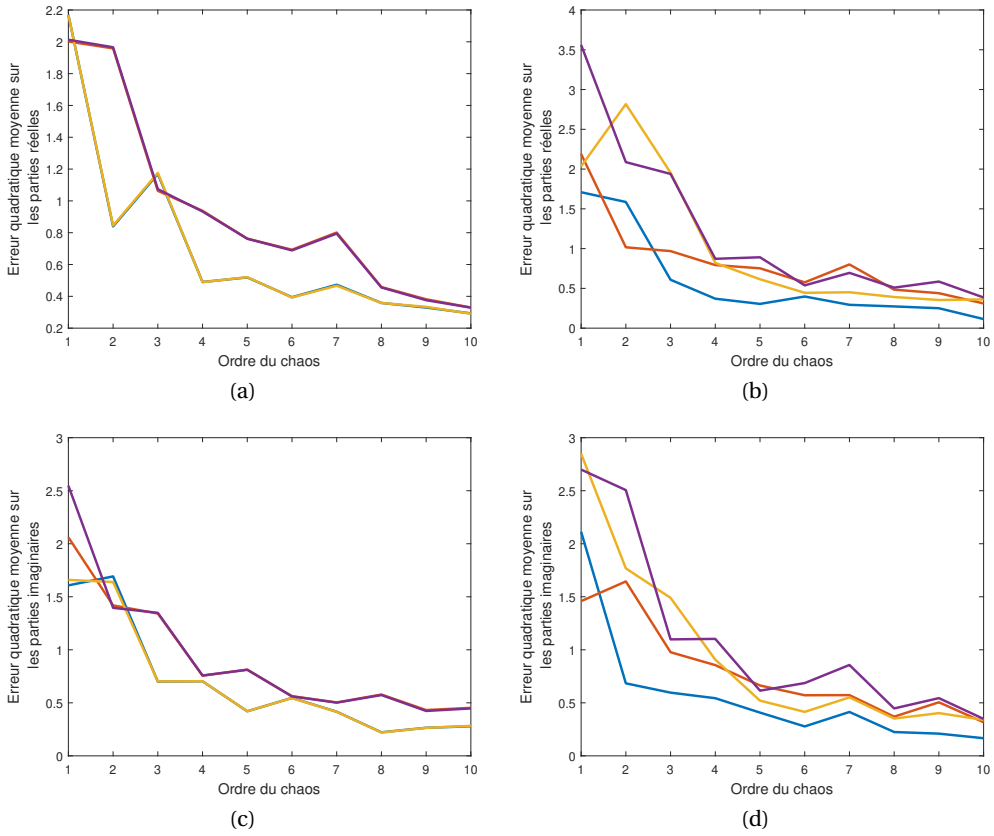


FIGURE 4.17 – Évolution de la moyenne quadratique des erreurs absolues commises sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres dans le cas de la première (a,c) et de la seconde (b,d) configuration pour différents ordres de chaos - 2 paramètres incertains

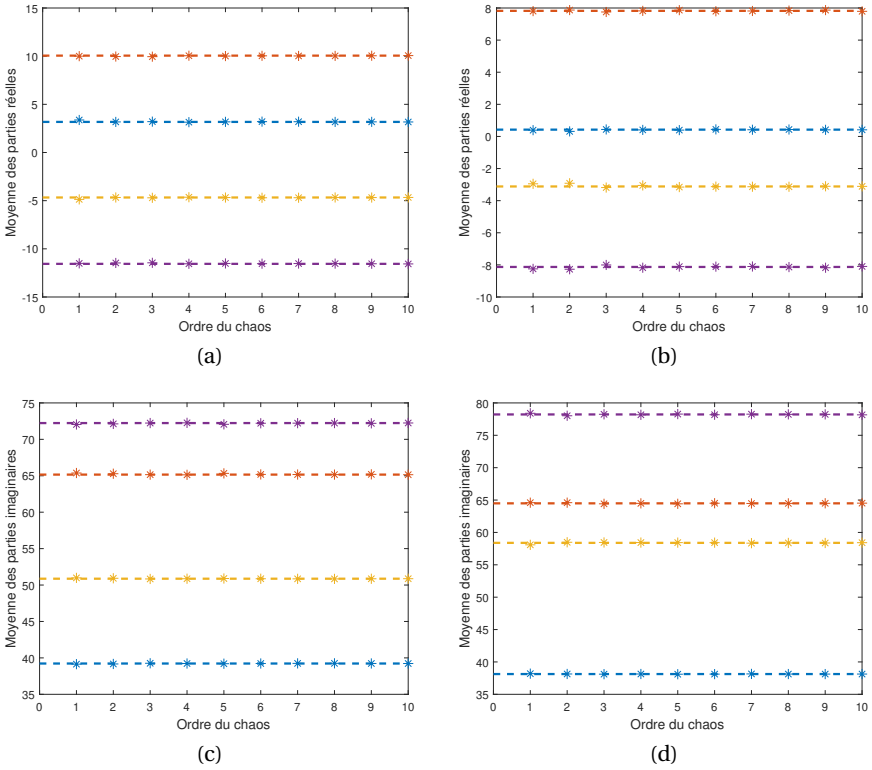


FIGURE 4.18 – Évolution des moyennes des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos ($*$) - 2 paramètres incertains

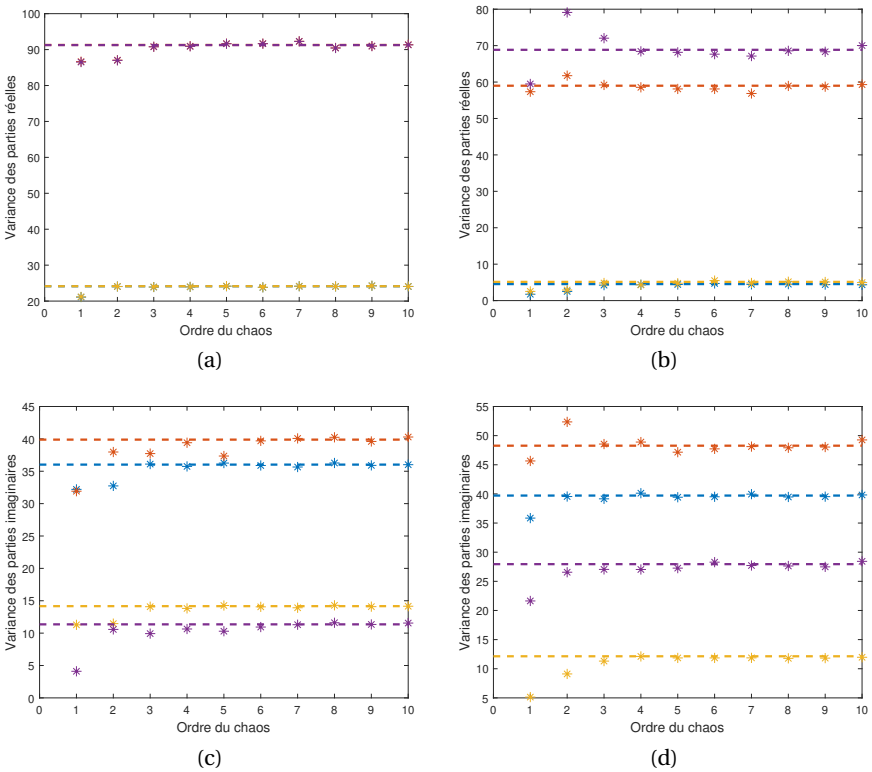


FIGURE 4.19 – Évolution des variances des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos ($*$) - 2 paramètres incertains

4.4 Krigeage et chaos polynomial : une approche hybride

Deux types de méta-modèles ont été présentés et appliqués précédemment. Le krigeage utilise des paramètres définis sur des intervalles alors que le chaos polynomial utilise des variables définies par une loi de probabilité. Dans les faits, il arrive parfois que plusieurs types d'incertitudes soient présentes dans un modèle et soient caractérisées de différentes manières : par des intervalles, des PDF, des fonctions d'appartenance, etc. Dans ces cas là, des méta-modèles capables de traiter les différents types d'incertitudes doivent être utilisés. Dans ce contexte, on propose ici une méthode qui associe le développement en chaos polynomial et le krigeage afin de propager et quantifier simultanément des incertitudes aléatoires et intervalles.

4.4.1 Formalisme

On définit deux espaces de paramètres d'entrée, l'un correspondant aux paramètres $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ décrits par des intervalles et l'autre aux paramètres aléatoires $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$. La variable de sortie $\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dépend donc des paramètres intervalles et des variables aléatoires. L'objectif est de construire un méta-modèle permettant d'approximer correctement la fonction Y.

Tout d'abord, $\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, peut être vue comme une variable aléatoire stationnaire, la théorie du chaos nous permet d'écrire :

$$\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \simeq \sum_{\mathrm{J}=0}^{\mathrm{P}-1} a_{\mathrm{J}}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.57}$$

où les $\left(\Psi_{\mathrm{J}}\right)_{\mathrm{J}=0,\ldots,\mathrm{P}-1}$ sont les polynômes multivariés orthogonaux par rapport à la loi de probabilité jointe $f_{\boldsymbol{\xi}}$. On suppose les variables ξ_i indépendantes. Les $(a_{\mathrm{J}})_{\mathrm{J}=0,\ldots,\mathrm{P}-1}$ correspondent aux coefficients stochastiques. Ils sont dans notre cas dépendants des paramètres $\mathbf{x}$. Comme ils dépendent de variables définies sur des intervalles, on peut utiliser le formalisme du krigeage pour les exprimer, il vient alors :

$$a_{\mathrm{J}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{(\mathrm{J})}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}^{(\mathrm{J})} + \mathrm{Z}^{(\mathrm{J})}(\mathbf{x}) \tag{4.58}$$

avec $\mathbf{g}^{(\mathrm{J})}$ la base de fonctions $\mathbf{g}_k^{(\mathrm{J})}$ polynomiales choisie de taille q, $\boldsymbol{\beta}^{(\mathrm{J})}$ les coefficients de régression et $\mathrm{Z}^{(\mathrm{J})}$ un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle. Chaque coefficient a_{J} possède ses caractéristiques de krigeage propres.

La stratégie pour trouver un méta-modèle de la fonction $\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ consiste alors à estimer les paramètres $(a_{\mathrm{J}}(\mathbf{x}))_{\mathrm{J}=0,\ldots,\mathrm{P}-1}$ du développement en chaos par krigeage. Cela revient finalement a écrire une approximation de $\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ de la façon suivante :

$$\mathrm{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \simeq \sum_{\mathrm{J}=0}^{\mathrm{P}-1} \left(\sum_{k=1}^{q} \boldsymbol{\beta}_k^{(\mathrm{J})} \mathbf{g}_k^{(\mathrm{J})}(\mathbf{x}) + \mathrm{Z}^{(\mathrm{J})}(\mathbf{x}) \right) \Psi_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.59}$$

La principale tâche consiste alors à estimer les paramètres de régression $\boldsymbol{\beta}^{(\mathrm{J})}$, les variances σ^{J} et les paramètres d'échelle θ^{J} pour chaque coefficient $a_{\mathrm{J}}(\mathbf{x})$. Dans ce but, deux plans d'expériences sont générés. Le premier couvre l'espace aléatoire et permet la construction du chaos. Il est généré en prenant les Q racines d'un polynôme de degré suffisant ou avec un LHS de Q points. Le second est construit avec un LHS de N points et couvre le pavage définit par les intervalles des paramètres $\mathbf{x}$. Pour chaque point $\mathbf{x}^{(i)}$ avec $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, un GPC est construit à l'aide des Q points $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$. Finalement, un plan d'expériences de $(\mathrm{Q} \times \mathrm{N})$

Paramètres	Valeur min.	Valeur max.	Types
$\boldsymbol{\mu}$	0.1	0.9	Aléatoire
$\mathbf{k_a}$	100	1000	Aléatoire
$\mathbf{k_{11}}$	2700	3300	Intervalle
$\mathbf{k_{22}}$	2700	3300	Intervalle

TABLEAU 4.15 – Plages de variations des paramètres

points est utilisé pour construire le méta-modèle hybride décrit équation 4.59.

Le principal avantage de ce méta-modèle réside dans sa capacité à traiter de deux types d'incertitudes simultanément, à savoir des variables aléatoires et des paramètres définis sur des intervalles.

4.4.2 Application

Présentation des paramètres incertains

Deux types de paramètres incertains sont considérés ici, certains sont décrits de façon probabiliste lorsque la PDF est connue, d'autres par un intervalle lorsque seule la plage de variation est connue. Les différents types d'incertitudes qui vont être considérées sont :

— les raideurs k_{11} et k_{22} sont définies par des intervalles donnés par $[k_{11}^{\min}, k_{11}^{\max}]$ et $[k_{22}^{\min}, k_{22}^{\max}]$. On a ainsi :

$$k_{11} = k_{11}^{\text{moy}}(1 + 0.1\eta_1) \tag{4.60}$$
$$k_{22} = k_{22}^{\text{moy}}(1 + 0.1\eta_2) \tag{4.61}$$

où η_1 et η_2 définissent deux variables intervalles indépendantes avec $\eta_i \in [-1, 1]$, pour $i = \{1, 2\}$.

— le coefficient de frottement μ et la raideur de couplage k_a sont choisis aléatoires :

$$\mu = \mu^{\text{moy}}(1 + \delta_\mu \xi_1) \tag{4.62}$$
$$k_a = k_a^{\text{moy}}(1 + \delta_{k_a} \xi_2) \tag{4.63}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des variables aléatoires. δ_μ et δ_{k_a} désignent respectivement les coefficients de variation du coefficient de frottement μ et de la raideur de couplage k_a. μ^{moy} et k_a^{moy} sont les valeurs moyennes respectives de μ et k_a. Dans l'étude présentée ici, deux types de distributions continues sont considérées : la distribution uniforme et la distribution beta qui est régulièrement employée pour modéliser le comportement de variables aléatoires sur des support bornés. Elle est paramétrisée par deux paramètres α et β.

Les plages de variations des différents paramètres sont récapitulées Tableau 4.15.

Le type d'incertitude de ces quatre paramètres n'a pas été choisi de façon anodine. En effet, pour un ingénieur concevant un système de frein, certains paramètres sont des paramètres de conception et sont décrits par des intervalles. Ici, il s'agit des raideurs k_{11} et k_{22}. D'autres paramètres sont des paramètres "subis", au sens où ils découlent de la physique du problème et leur valeur n'est pas toujours bien identifiée. Ici, il s'agit du coefficient de frottement et de la raideur de couplage k_a.

La loi beta est définie sur l'intervalle [0,1] par la PDF :

$$f(\xi;\alpha,\beta) = \frac{\xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\mathrm{d}u} \text{ pour } \xi \in [0,1]\,; \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \tag{4.64}$$

La fonction de densité peut prendre une grande variété de formes en fonction de la valeur des paramètres α et β. En particulier, le cas α = β = 1 correspond à la distribution uniforme. Dans la suite, trois couples de valeurs de α et β sont considérés pour étudier l'influence des différentes lois beta :

— α = β = 5, noté B(5,5), est symétrique avec une asymétrie nulle,

— α = 2 et β = 8, noté B(2,8), est asymétrique avec une asymétrie négative,

— α = 8 et β = 2, noté B(8,2), est asymétrique avec une asymétrie positive.

Les différentes lois considérées permettront de démontrer l'importance du choix de la loi des paramètres d'entrée sur les résultats de la propension de crissement dans le cadre d'une étude d'ingénierie.

Les occurrences des variables aléatoires pour chaque distribution sont tracées Figure 4.20. On remarque que la forme de la loi B(5,5) est proche d'une distribution normale, cependant les supports associés sont différents puisqu'il est borné dans le cas de la distribution beta et infini dans le cas de la distribution normale. Comme indiqué équations 4.62 et 4.63, les variables aléatoires standards $\xi_1$et ξ_2 sont utilisées pour représenter les paramètres incertains. Une transformation linéaire permet de passer de l'intervalle de chaque variable aléatoire ξ_1 et ξ_2 à l'intervalle des paramètres physiques μ et k_a.

Cas à trois paramètres incertains

Dans cette section, seulement trois paramètres sont considérés comme étant incertains : les deux raideurs k_{11} et k_{22} et le coefficient de frottement μ. Comme expliqué précédemment, les deux raideurs sont représentées par des intervalles et le coefficient de frottement par l'une des lois de probabilité données précédemment. Tous les autres paramètres sont déterministes avec les valeurs données dans le Tableau 4.1.

Le méta-modèle hybride est utilisé afin de prédire le comportement en stabilité du système pour les deux configurations considérées. Pour chacune des lois de probabilité considérées pour μ (alors que les deux autres paramètres de raideur k_{11} et k_{22} sont modélisés par des intervalles), un méta-modèle est construit pour prédire l'évolution des valeurs propres. Un méta-modèle est ainsi généré pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire en fonction des trois paramètres. Puis, le méta-modèle est utilisé pour déterminer les occurrences des parties réelles et des parties imaginaires des modes instables, ces résultats sont comparés au balayage/MCS réalisé sur le modèle mécanique qui correspond aux résultats de référence avec une grille régulière de 2500 valeurs pour les paramètres (k_{11}, k_{22}) et en considérant 10^4 valeurs aléatoires du paramètre incertain μ générées en fonction de sa loi de probabilité. Les occurrences des parties réelles et imaginaires des modes instables sont donc basées sur ces 2.5 10^7 calculs CEA. Les résultats de référence sont tracés Figures 4.22 et 4.23 pour les deux configurations. Pour chaque configuration, la loi uniforme et les trois lois beta (B(5,5), B(2,8) et B(8,2)) sont testées. La répartition des parties réelles donne des informations sur le taux de croissance de l'instabilité. Les histogrammes des parties imaginaires décrivent la répartition des fréquences instables (parties imaginaires des valeurs propres avec une partie réelle positive).

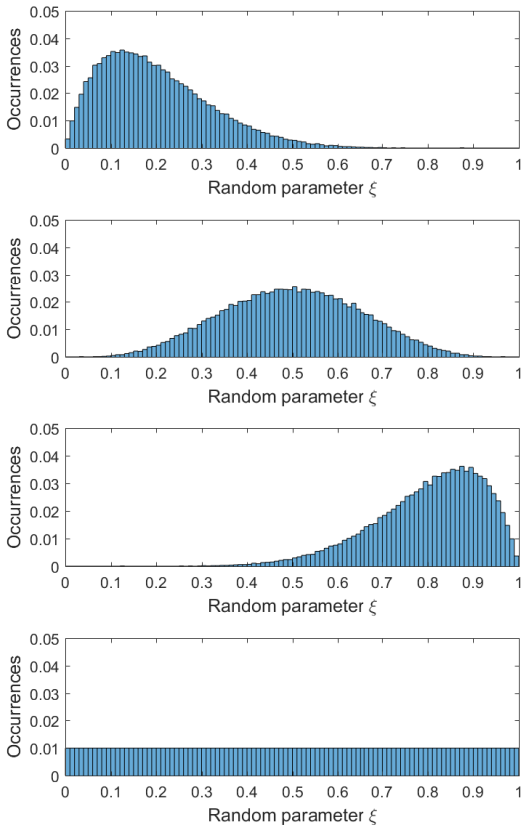


FIGURE 4.20 – Fonctions de densité de probabilité gouvernant les paramètres aléatoires - De haut en bas : loi B(2,8), loi B(5,5), loi B(8,2) et loi uniforme

Deuxièmement, le méta-modèle hybride basé sur le GPC et le krigeage est testé. La construction et la validation est faite en deux étapes. La première étape concerne le calcul des coefficients du chaos à travers le krigeage. Afin de construire les développements en chaos, les polynômes de Legendre et de Jacobi sont respectivement utilisés pour les lois uniformes et beta. Une étude de convergence non présentée ici a permis de fixer l'ordre du chaos à 20 alors que le plan d'expériences utilisé pour le calcul des coefficients est composé des racines du $30^{\text{ième}}$ polynôme de la base de polynômes choisie, le plan d'expériences est donc composé de 30 points. De plus, les coefficients du GPC qui dépendent des variables k_{11} et k_{22} sont approximés par un krigeage avec une fonction de corrélation cubique et une régression d'ordre un. Le plan d'expériences en (k_{11}, k_{22}) utilisé pour construire le méta-modèle de krigeage consiste en un LHS de 100 points. En conclusion, le méta-modèle hybride complet a nécessité $30 \times 100 = 3000$ calculs CEA, il représente les valeurs propres dépendantes des paramètres intervalles (k_{11}, k_{22}) et μ.

Les surfaces de réponse des coefficients numéro 0, 1, 2, 9, 14 et 20 du GPC pour la partie réelle de la première valeur propre (la jaune sur les figures de référence 4.2) sont données Figure 4.21 pour le cas d'une distribution B(5,5) de μ pour la première configuration. Les prédictions du krigeage sont tracées en noir et les points du plan d'expériences en rouge. Ils sont comparés au résultats de référence, tracés en bleu, qui correspondent aux coefficients obtenus pour la construction des GPC pour chaque valeur de (k_{11}, k_{22}). Le modèle de krigeage donne une prédiction fiable des coefficient du GPC.

Valeur propre		$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$	$Im(\lambda_1)$	$Im(\lambda_2)$	$Im(\lambda_3)$	$Im(\lambda_4)$
Loi B(2,8)	**Coeff 1**	2.50E-5	4.15E-4	6.39E-4	3.06E-5	2.59E-5	2.79E-4	1.91E-4	6.29E-6
	Coeff 2	1.38E-5	1.32E-4	2.18E-4	1.21E-5	1.21E-5	1.16E-4	1.25E-4	1.28E-5
Loi B(5,5)	**Coeff 1**	2.38E-5	4.75E-4	5.07E-4	1.45E-4	2.60E-5	2.75E-4	1.12E-3	1.84E-4
	Coeff 2	1.28E-5	3.26E-4	4.05E-4	9.70E-5	1.42E-5	2.32E-4	5.87E-4	1.07E-4
Loi B(8,2)	**Coeff 1**	4.61E-6	1.35E-3	1.37E-3	1.56E-4	4.90E-6	1.39E-3	1.20E-3	1.55E-4
	Coeff 2	7.12E-6	7.97E-4	7.05E-4	8.14E-5	4.03E-6	6.42E-4	6.24E-4	8.40E-5
Uniforme	**Coeff 1**	2.12E-5	4.73E-4	8.99E-4	1.45E-4	1.97E-5	5.86E-4	9.72E-4	1.19E-4
	Coeff 2	1.84E-5	8.14E-4	8.57E-4	1.00E-4	1.68E-5	8.35E-4	1.08E-4	8.92E-5

TABLEAU 4.16 – Erreur quadratique moyenne sur le premier et le second coefficient du chaos polynomial pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire de chaque valeur propre pour toutes les distributions considérées dans le cas de la première configuration

Valeur propre		$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$	$Im(\lambda_1)$	$Im(\lambda_2)$	$Im(\lambda_3)$	$Im(\lambda_4)$
Loi B(2,8)	**Coeff 1**	2.30E-4	2.98E-3	4.39E-3	3.59E-3	1.52E-4	1.05E-3	3.19E-3	3.15E-3
	Coeff 2	1,81E-04	1.17E-3	2.88E-3	2.86E-3	1.20E-4	1.79E-3	3.36E-3	2.03E-3
Loi B(5,5)	**Coeff 1**	6.74E-6	2.59E-3	3.25E-3	3.26E-3	2.29E-5	5.74E-3	5.11E-3	3.72E-3
	Coeff 2	7.64E-6	2.55E-3	3.75E-3	2.23E-3	1.53E-5	3.02E-3	4.29E-3	1.93E-3
Loi B(8,2)	**Coeff 1**	4.55E-7	1.41E-2	1.41E-2	2.07E-4	3.33E-6	1.59E-2	1.59E-2	2.10E-4
	Coeff 2	3.78E-7	5.75E-3	5.74E-3	3.49E-4	2.67E-6	6.36E-3	6.38E-3	3.24E-4
Uniforme	**Coeff 1**	4.45E-5	5.86E-3	6.01E-3	2.99E-3	3.02E-5	5.37E-3	5.52E-3	2.38E-3
	Coeff 2	7.94E-5	8.45E-3	8.98E-3	1.95E-3	4.44E-5	8.13E-3	8.45E-3	1.73E-3

TABLEAU 4.17 – Erreur quadratique moyenne sur le premier et le second coefficient du chaos polynomial pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire de chaque valeur propre pour toutes les distributions considérées dans le cas de la seconde configuration

De façon plus générale, les Tableaux 4.16 et 4.17 donnent l'erreur quadratique moyenne commise sur les deux premiers coefficients du GPC pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire des valeurs propres pour les deux configurations et pour toutes les lois de probabilité considérées pour μ. Les estimations des coefficients du GPC par le krigeage sont convenables puisque l'erreur maximale mesurée sur les parties réelles est égale à 1.41 10^{-2} et à 1.52 10^{-2} sur les parties imaginaires. On peut en conclure que le choix de modéliser les coefficients du chaos par un krigeage avec la corrélation et la régression données est un choix viable.

La seconde étape consiste en la validation du modèle hybride global pour la prédiction des occurrences des parties réelles et imaginaires des modes instables. Les histogrammes des occurrences des parties réelles et imaginaires des modes instables sont représentées Figures 4.22 et 4.23 pour la loi uniforme et les différentes loi beta pour les deux configurations. Il apparait très clairement que le méta-modèle hybride proposé reproduit très correctement le comportement du modèle de référence dans tous les cas. Par ailleurs, les Tableaux 4.18 et 4.19 donnent le pourcentage d'occurrences des modes stables et instables avec le détail du nombre de modes instables pour les deux configurations. Encore ici, on peut voir que le méta-modèle proposé donne des prédictions fiables de la propension d'instabilité.

Finalement, de nombreux commentaires peuvent être ajoutés. Toutes les différentes simulations montrent qu'une modification de de la loi de distribution du coefficient de frottement μ modifie notablement le pourcentage d'occurrences de modes stables et instables (voir Tableaux 4.18 et 4.19) ainsi que les taux de croissance et les fréquences des instabilités. Par exemple, lorsque μ suit une loi B(2,8), moins de modes instables sont

	% stable		% de cas avec un mode instable		% de cas avec deux modes instables	
	Référence	**Méta-modèle**	**Référence**	**Méta-modèle**	**Référence**	**Méta-modèle**
Loi B(2,8)	79.678	77.719	19.774	20.290	0.548	1.987
Loi B(5,5)	10.490	10.622	60.426	60.705	29.085	28.673
Loi B(8,2)	0.048	0.062	6.828	7.077	93.124	92.861
Uniforme	30.016	30.000	29.064	29.252	40.919	40.748

TABLEAU 4.18 – Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et le méta-modèle dans le cas de la première configuration

	% stable		% de cas avec un mode instable		% de cas avec deux modes instables	
	Référence	**Méta-modèle**	**Référence**	**Méta-modèle**	**Référence**	**Méta-modèle**
Loi B(2,8)	32.486	30.276	67.510	68.881	0.004	0.718
Loi B(5,5)	0.840	0.784	98.915	98.995	0.245	0.221
Loi B(8,2)	0.00	0.005	74.045	73.721	25.954	26.021
Uniforme	12.673	12.569	76.235	76.588	11.092	10.843

TABLEAU 4.19 – Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et le méta-modèle dans le cas de la seconde configuration

présents que lorsque μ suit des lois B(5,5) et B(8,2). De plus, le nombre d'occurrences de modes instables augmente (voir Tableaux 4.18 et 4.19). Ces résultats étaient attendus puisqu'ils illustrent le rôle influent bien connu du coefficient de frottement. De plus, la propension des instabilités varie de façon conséquente lorsque l'on passe d'une loi uniforme à une loi beta (ou en modifiant les valeurs α et β des lois beta). En effet, les pulsations instables dans l'intervalle $[40,50]$ rad/s qui apparaissent pour les lois uniformes, B(5,5) et B(8,2), n'apparaissent pas lorsqu'une loi B(2,8) est considérée pour la première configuration. Dans le cas de la seconde configuration, ces pulsations instables apparaissent uniquement pour des lois B(8,2) et uniforme. Aussi, cela démontre l'importance dans une étude d'ingénierie de la quantification des incertitudes en amont de la propagation associée.

Dans la plupart des cas, on peut remarquer un changement significatif dans les occurrences des probabilités associées à chaque intervalle de pulsations instables, c'est-à-dire sur $[40,50]$ rad/s et $[60,75]$ rad/s pour la première configuration et sur $[45,50]$ et $[55,65]$ et $[65,75]$ rad/s pour la seconde configuration. Par exemple, en considérant une loi B(2,8), un seul mode instable de pulsation comprise entre 60 et 70 rad/s apparait. La pulsation est localisée autour d'un pic à 68 rad/s avec une probabilité d'occurence de 0.06 (voir Figure 4.22 pour la première configuration). D'un autre côté, pour une loi B(8,2), deux modes instables sont détectés (à 48 et 70 rad/s) avec sensiblement la même occurrence. Des remarques similaires peuvent être faites en comparant la répartition des parties réelles des modes instables qui donnent une information sur le taux de croissance de l'instabilité. Par exemple, dans le cas d'une loi B(2,8) le taux de croissance est relativement faible (inférieur à 10) pour les deux configurations, alors que les taux de croissance pour des distributions uniforme ou B(8,2) sont beaucoup plus élevés (situé entre 10 et 20).

Finalement, on peut observer le comportement plus complexe de la seconde configuration qui est correctement reproduit par le méta-modèle qui prédit bien les trois pulsations instables autour de 50, 60 et 73 rad/s dans le cas de la distribution uniforme, alors que seulement deux sont détectées lorsque la première configuration est considérée.

En conclusion, l'ensemble de ces résultats tend à démontrer non seulement la validité

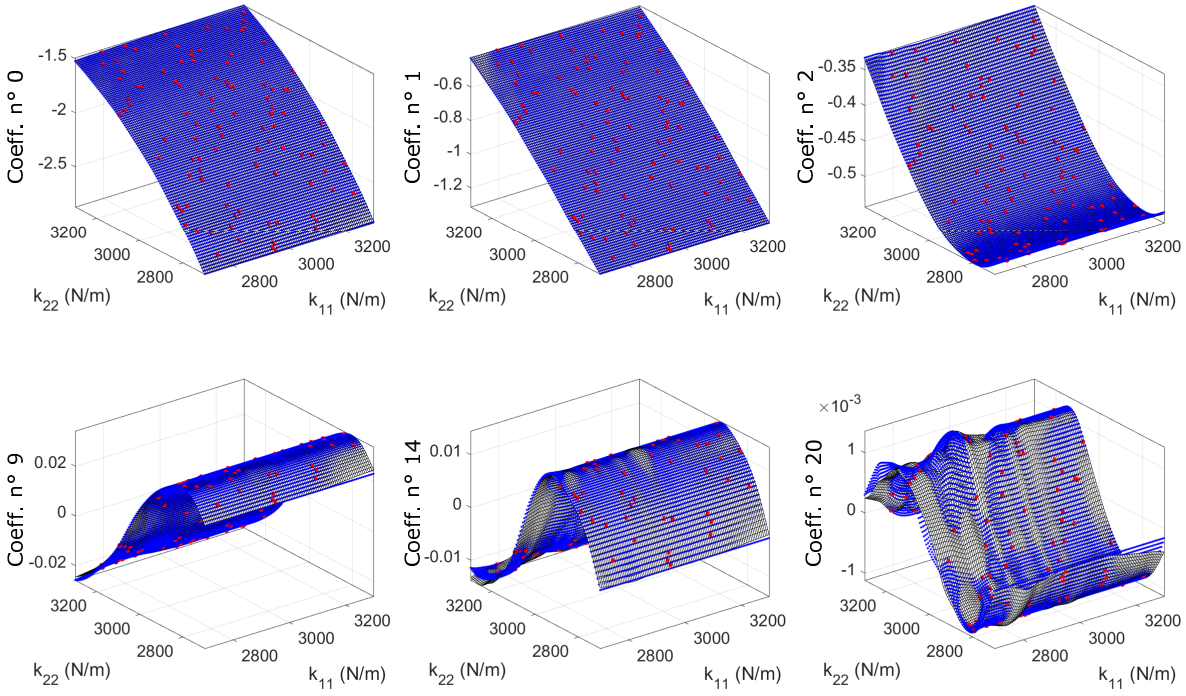
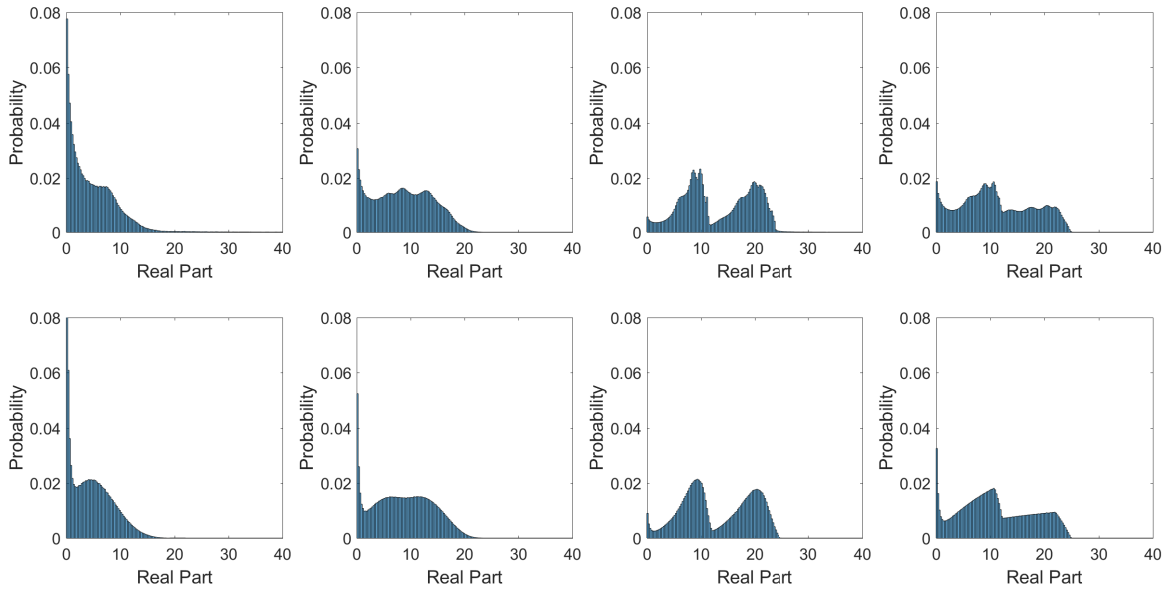
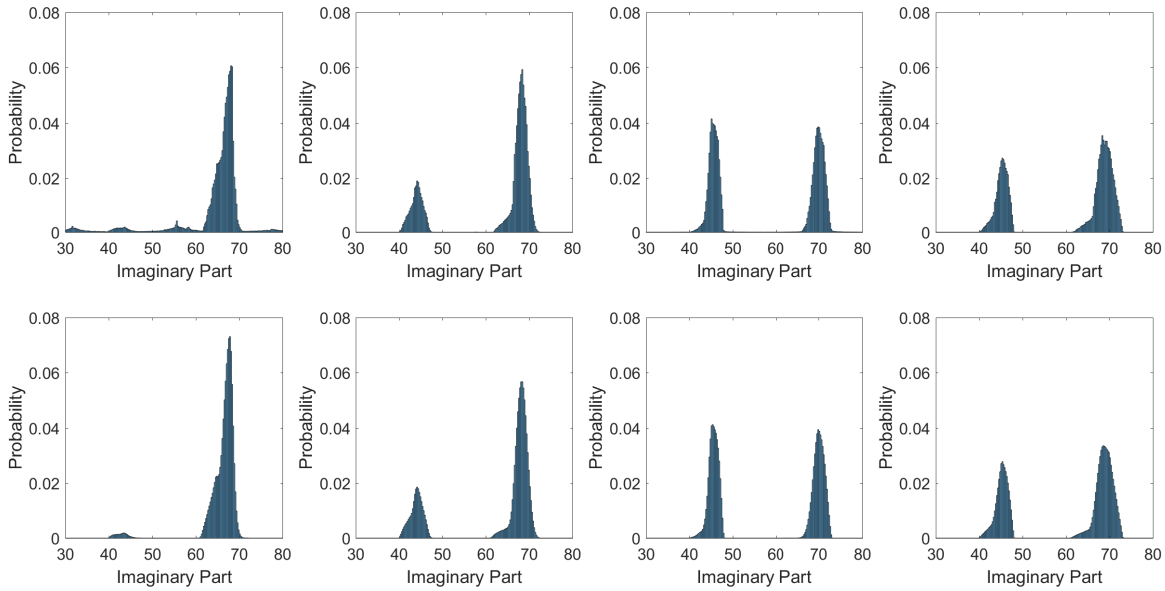


FIGURE 4.21 – Comparaison des coefficients du chaos numéro zéro, un, deux, neuf, quatorze et vingt de la partie réelle d'une valeur propre de la première configuration

du méta-modèle hybride proposé pour décrire le comportement en stabilité du système mais aussi l'effet non négligeable du choix des lois de probabilité des paramètres sur le nombre de modes instables, leurs occurrences, leurs pulsations et leurs taux de croissance. Comme cela a déjà été évoqué précédemment, cela illustre l'effort à fournir en amont dans le cadre d'une étude d'ingénierie pour identifier correctement non seulement les paramètres aléatoires à considérer mais également les lois de probabilité à associer. Les techniques numériques de propagation d'incertitude et de méta-modélisation, ainsi que la méthode hybride proposée ici basée sur l'association du krigeage et du chaos polynomial, n'ont d'intérêt dans un cadre industriel que si cette étape préliminaire est correctement menée.

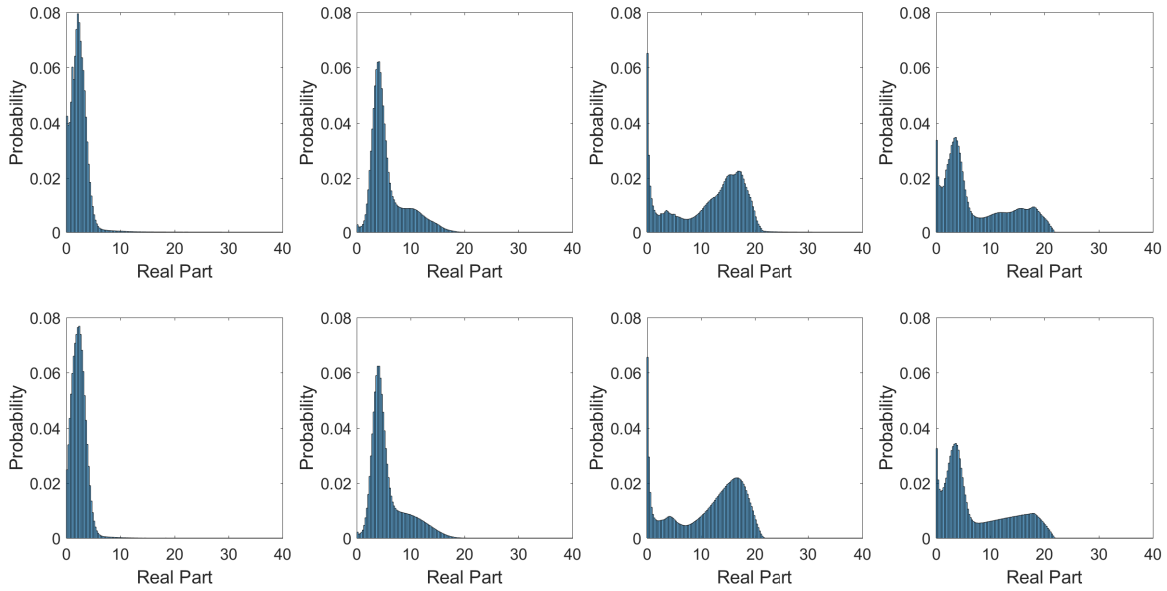


(a)

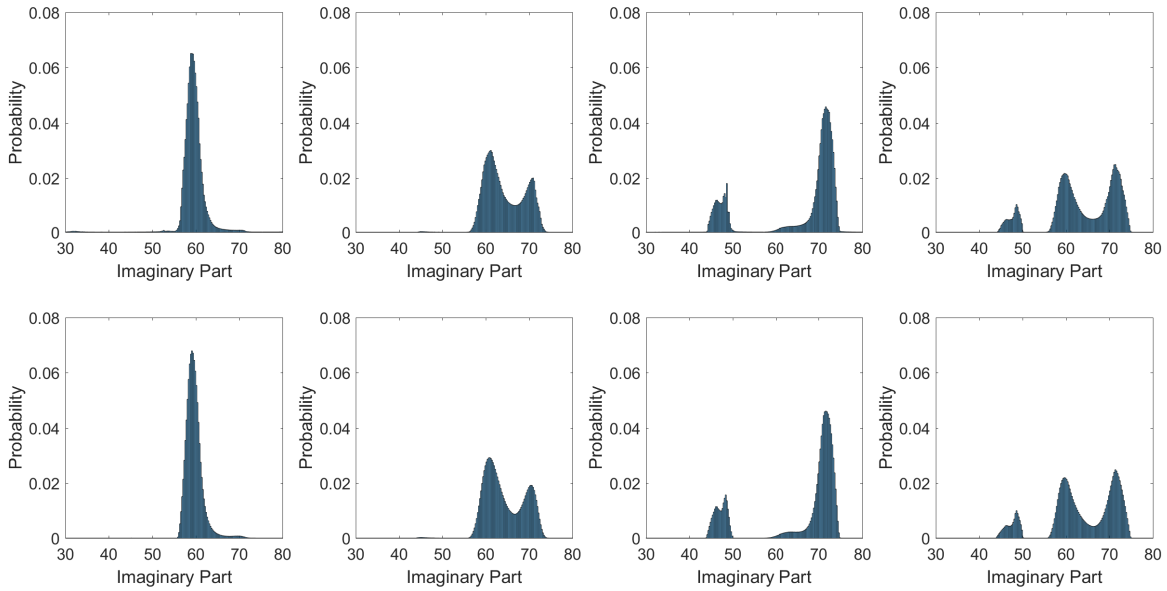


(b)

FIGURE 4.22 – Occurrences des parties réelles (a) et imaginaires (b) des modes instables pour la première configuration pour le méta-modèle (première ligne) et pour les résultats de référence (seconde ligne) et pour les différentes distributions (de gauche à droite) : Beta(2,8), Beta(5,5), Beta(8,2) et Uniforme



(a)



(b)

FIGURE 4.23 – Occurrences des parties réelles (a) et imaginaires (b) des modes instables pour la seconde configuration pour le méta-modèle (première ligne) et pour les résultats de référence (seconde ligne) et pour les différentes distributions (de gauche à droite) : Beta(2,8), Beta(5,5), Beta(8,2) et Uniforme

Cas à quatre paramètres incertains

La dernière partie est consacrée à l'extension de la méthode au cas quatre paramètres, deux étant aléatoires et deux étant des intervalles. Comme pour le cas précédent, les raideurs k_{11} et k_{22} sont respectivement décrites par les intervalles $[k_{11}^{\min}, k_{11}^{\max}]$ et $[k_{22}^{\min}, k_{22}^{\max}]$. Les paramètres aléatoires sont le coefficient de frottement μ et la raideur de couplage k_a. Les deux familles de distributions continues sont considérées, à savoir la distribution uniforme et les distributions beta.

Cette partie permet aussi d'expliquer comment surmonter les difficultés numériques dues à une dimension stochastique élevée à cause du grand nombre de variables aléatoires. En effet, en considérant la construction du méta-modèle hybride, l'ordre du GPC est choisi égal à 20 selon les résultats d'une étude de convergence. La base multivariée est construite en prenant le produit tensoriel des polynômes unidimensionnels et la série entière comporte 231 termes. La procédure de calcul basée sur la régression montre des bons résultats dans le cas d'une distribution uniforme/uniforme (μ et k_a suivent une loi uniforme) et le cas uniforme/beta (l'un des paramètres suit une loi uniforme et l'autre une loi beta). Cependant, dans le cas d'une distribution beta/beta, le GPC associé ne maintient pas les mêmes performances que dans les cas précédents. Ceci est dû aux polynômes de Jacobi. En effet, pour des ordres de chaos élevés, la matrice de Fisher issue de l'évaluation des polynômes de Jacobi multivariés aux points d'apprentissage est mal conditionnée. Ceci fait apparaitre des coefficients de GPC numériques très élevés qui conduisent à une divergence numérique de la série.

Afin de faire face à ce problème, une sélection des coefficients du GPC est réalisée. Une stratégie classique consiste à considérer que la plupart des modèles sont gouvernés par les effets de faible interaction entre les différentes variables. En d'autres termes, cela consiste à considérer les polynômes de faible ordre d'interaction [15, 96]. Ceci est fait en prenant une norme hyperbolique qui permet de construire un développement en chaos qui ne retient que les polynômes d'une variable de haut degré et des polynômes multivariés de faible interaction entre les variables. Ainsi, on utilise la norme suivante qui est caractérisée par un paramètres $0 < \gamma \leq 1$, les polynômes sélectionnés sont ceux dont le degré respecte :

$$||\mathrm{J}||_\gamma \equiv \left(\sum_{i=1}^{\gamma} \mathrm{J}_i^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq m \tag{4.65}$$

Dans cette étude, on prend $\gamma = 0.6$ ce qui mène à la convergence de la série, tout en réduisant considérablement la taille de la base (la nouvelle base est composée de 119 termes). Par ailleurs, cette troncature est appliquée aussi bien aux polynômes de Legendre que de Jacobi dans cette étude.

Pour la construction du GPC, deux types de plans d'expériences sont considérés :

— le premier est composé des racines des polynômes utilisés dans la base du GPC. Les racines d'un polynôme de degré suffisant sont utilisées pour le cas unidimensionnel. Pour le cas multidimensionnel, on considère le produit tensoriel de ces racines. Ici, on considère les racines du trentième polynôme de la base pour la cas uni-dimensionnel. Ainsi le plan d'expériences associé pour le cas deux paramètres est de 900 points.

— le second type de plan d'expériences correspond au classique LHS. Il est compliqué de connaitre la taille optimale d'un LHS *a priori* puisqu'une taille trop importante

Type de plan d'expériences	Référence	Racine de polynôme	LHS de 800 points	LHS de 300 points
Nombre de calculs CEA	2.5E7	9E4	8E4	3E4

TABLEAU 4.20 – Nombre de calculs CEA réalisés pour les différentes méthodes

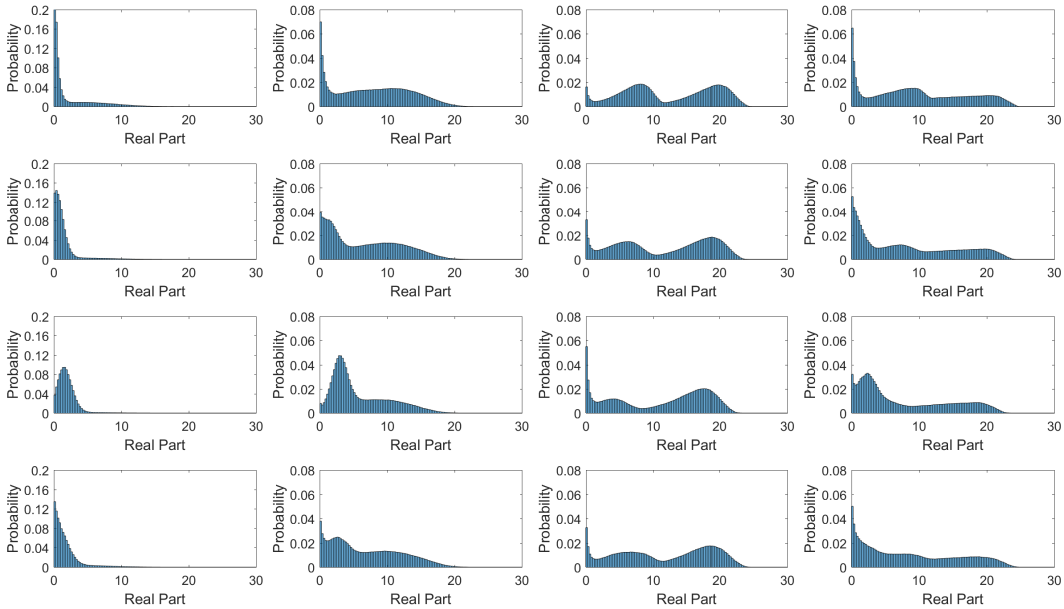


FIGURE 4.24 – Occurrences des parties réelles des modes instables du cas de référence pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

peut être coûteuse en temps de calcul et en espace de stockage, alors qu'une taille trop petite peut ne pas donner de résultats statistiques satisfaisants. Dans la suite, on envisage d'étudier l'impact de la taille du LHS en considérant deux LHS, un de 300 points et un autre de 800 points.

Le nombre total de CEA requises pour les différents plans d'expériences sont résumés Tableau 4.20. En ce qui concerne le plan d'expériences pour le krigeage, un LHS de 100 points sera utilisé. Pour rappel, les résultats de référence sont obtenus avec $2.7\ 10^7$ calculs CEA. En effet, une grille de $50 \times 50 = 2500$ points pour les raideurs k_{11} et k_{22} est construite. Pour chacun de ces points, 10000 couples (μ, k_a) sont générés avec LHS. Ces 10000 points sont générés de façon à suivre les distributions considérées et la procédure est réalisée pour tous les couples de loi de distribution considérés, ce qui représente à chaque fois 16 types de distribution. Les occurrences des parties imaginaires et des parties réelles sont respectivement données Figures 4.24 et 4.25 pour la référence. Afin de faciliter la lecture des résultats, les figures sont composées de 4×4 sous-figures, chaque colonne correspondant à la loi de distribution de μ et chaque ligne à la loi de distribution de k_a.

Les Figures 4.26 et 4.27 regroupent les résultats concernant le méta-modèle hybride construit avec un plan d'expériences composé des racines du polynômes pour le GPC. Et les Figures 4.28 et 4.29 au cas où un LHS de 300 points est utilisé. Les résultats obtenus avec un LHS de 800 points ne sont pas présentés ici puisqu'ils sont très similaires aux résultats présentés Figures 4.26 et 4.27. La Table 4.21 donne le nombre de modes instables ainsi que le pourcentage d'occurrences stables et instables.

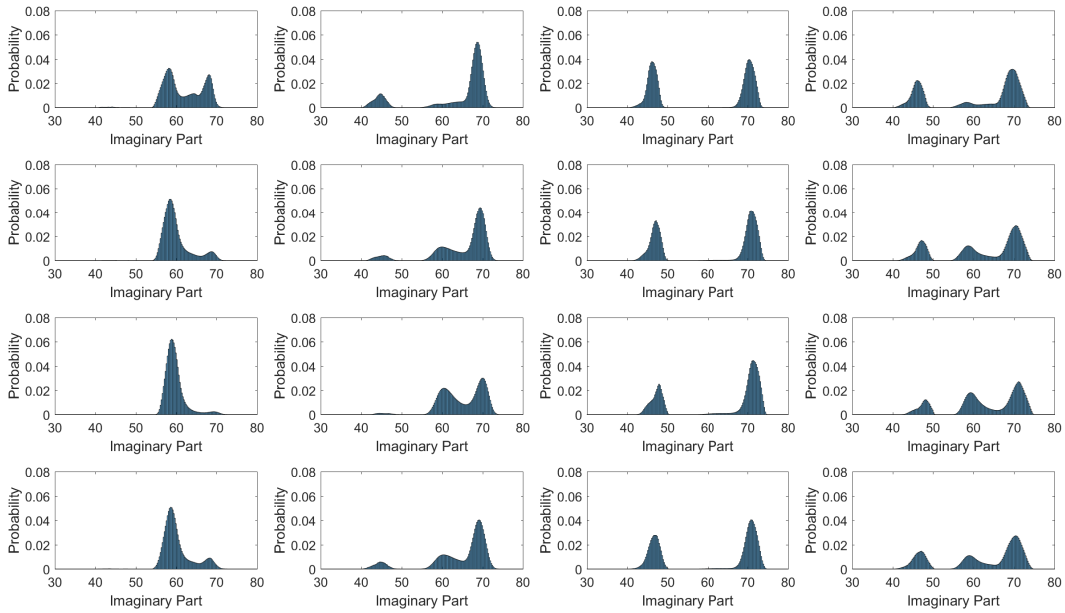


FIGURE 4.25 – Occurrences des parties imaginaires des modes instables du cas de référence pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

L'ensemble des résultats numériques basés sur l'utilisation du méta-modèle sont en parfaite adéquation avec les résultats de référence. Le nombre de modes instables, ainsi que les pourcentages d'occurrences stables et instables sont parfaitement prédits dans tous les cas considérés (voir Tableau 4.21). Ensuite, les pulsations instables autour de 48, 58 et 70 rad/s sont très bien détectées. On peut aussi noter que les pulsations instables à 48 rad/s qui sont très peu présentes dans le cas d'une distribution B(5,5) pour μ et B(8,2) pour k_a sont aussi très bien reproduites. En comparant les résultats de référence aux résultats prédits par le méta-modèle, les occurrences des différentes parties réelles et des différentes parties imaginaires sont très similaires. De plus, l'influence des lois de distribution de μ et k_a sont aussi très bien reproduites. Une modification de la distribution de μ a un effet plus important qu'une modification de la distribution de k_a pour les plages de variations considérées sur les évolutions des valeurs propre instables. En effet, quelque soit la distribution considérée pour k_a, lorsque μ suit une distribution B(2,8), le mode instable a une pulsation localisée entre 55 et 72 rad/s, avec un pic d'occurrences à 60 rad/s, alors que lorsque μ suit une loi uniforme, on distingue trois pics de pulsations instables localisés autour de 48, 60 et 72 rad/s. On en conclut que le comportement de stabilité du système est correctement représenté par le méta-modèle construit avec la méthodologie proposée.

Finalement, les résultats obtenus avec un plan d'expériences de taille limitée pour le chaos (le cas LHS 300 points) sont donnés Figures 4.28 et 4.29. En considérant uniquement la prédiction du nombre de modes instables et le pourcentage associé d'occurrences instables et stables, les résultats numériques se corrèlent très bien avec les résultats de référence. En regardant plus précisément les occurrences des parties réelles et des parties imaginaires, on voit que le comportement de stabilité global du système est très bien représenté même si de légères différences peuvent être remarquées. Tous les inter-

Distributions		**% Stable**				**% de cas avec un mode instable**				**% de cas avec deux modes instables**			
μ	**k_a**	**Ref**	**Grille**	**LHS 300**	**LHS 800**	**Ref**	**Grille**	**LHS 300**	**LHS 800**	**Ref**	**Grille**	**LHS 300**	**LHS 800**
B(2,8)	**B(2,8)**	61.76	60.70	48.45	61.42	38.06	38.55	49.61	38.31	0.18	0.71	1.94	0.27
B(2,8)	**B(5,5)**	33.36	33.02	33.50	34.22	66.58	66.40	66.43	65.73	0.06	0.50	0.06	0.05
B(2,8)	**B(8,2)**	30.41	29.03	26.15	29.16	69.59	70.40	72.21	70.61	0.01	0.49	1.62	0.23
B(2,8)	**Uniforme**	42.25	41.09	37.36	41.96	57.66	58.28	60.51	57.77	0.09	0.55	2.00	0.27
B(5,5)	**B(2,8)**	6.83	7.09	7.28	7.34	75.05	73.07	73.58	73.09	18.12	19.84	19.14	19.58
B(5,5)	**B(5,5)**	1.72	2.31	2.45	2.24	91.40	89.70	89.96	89.92	6.88	7.99	7.60	7.83
B(5,5)	**B(8,2)**	0.77	0.80	0.75	0.75	97.68	97.53	97.30	97.44	1.55	1.68	1.94	1.81
B(5,5)	**Uniforme**	3.15	3.47	3.33	3.57	87.67	86.44	86.46	85.99	9.18	10.09	10.20	10.44
B(8,2)	**B(2,8)**	3.15	3.47	3.33	3.57	87.67	86.44	86.46	85.99	9.18	10.09	10.20	10.44
B(8,2)	**B(5,5)**	0.01	0.02	0.01	0.02	29.81	28.05	28.43	28.43	70.19	71.93	71.56	71.55
B(8,2)	**B(8,2)**	0.00	0.00	0.01	0.01	53.92	54.74	48.40	54.08	46.07	45.25	51.60	45.91
B(8,2)	**Uniforme**	0.02	0.02	0.02	0.02	32.87	31.94	31.81	32.33	67.11	68.03	68.16	67.65
Uniforme	**B(2,8)**	23.42	23.83	20.72	23.39	41.76	40.17	42.14	40.82	34.83	36.00	37.07	35.79
Uniforme	**B(5,5)**	13.11	13.72	12.83	13.66	60.98	59.32	60.59	59.53	25.91	26.97	26.58	26.80
Uniforme	**B(8,2)**	11.93	11.97	10.19	11.79	71.04	70.77	72.57	71.60	17.02	17.26	17.22	16.62
Uniforme	**Uniforme**	16.22	16.40	13.24	16.11	57.66	56.92	58.32	57.30	26.12	26.68	28.32	26.59

TABLEAU 4.21 – Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et les méta-modèles

valles de pulsation instables sont parfaitement prédits et les parties réelles associées sont fidèlement estimées pour un coût de calcul moindre. La diminution du nombre d'échantillons conduit nécessairement à une diminution de la qualité de la prédiction.

Concernant l'impact des lois de probabilité sur les résultats, les remarques faites pour le cas trois paramètres restent valables : le nombre de modes instables, le pourcentage d'occurrences stables et instables, l'évolution des fréquences instables et les taux de croissance des instabilités dépendent étroitement du choix des lois de probabilité.

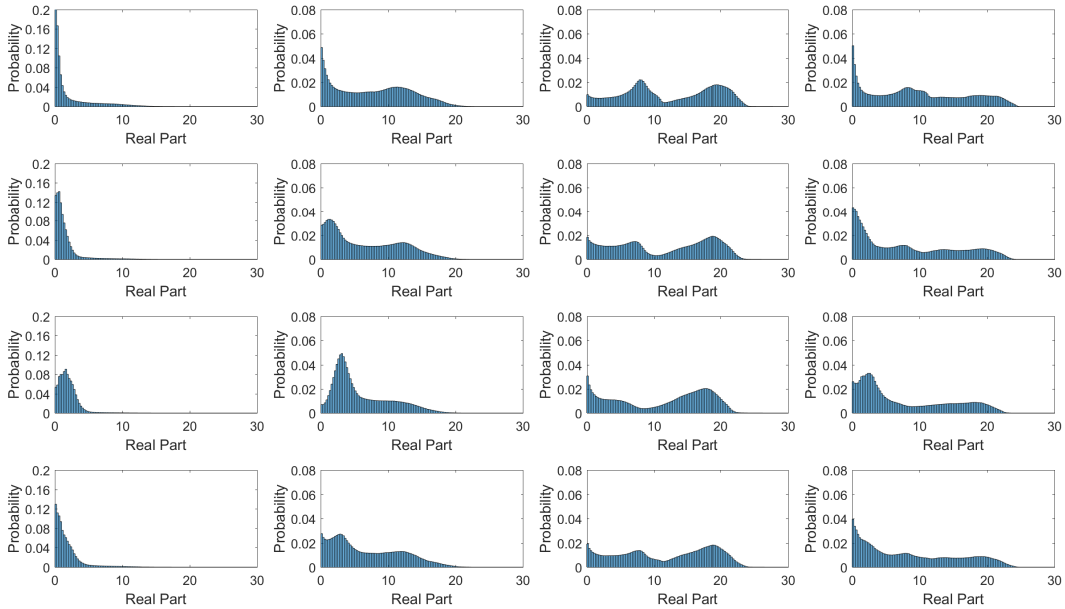


FIGURE 4.26 – Occurrences des parties réelles des modes instables pour le cas de la grille composée des racines de polynôme pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

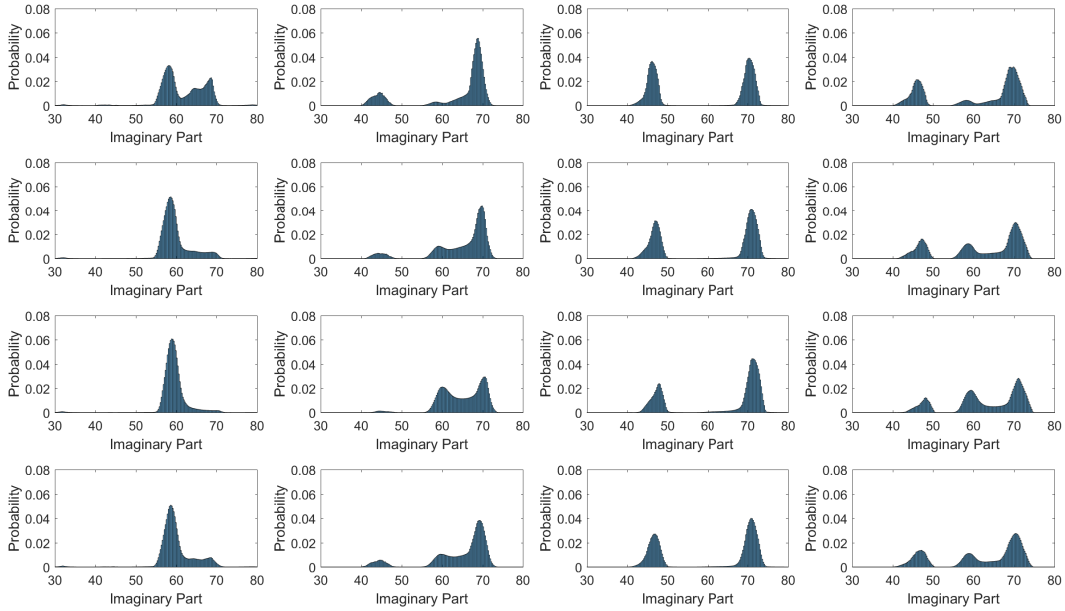


FIGURE 4.27 – Occurrences des parties imaginaires des modes instables pour le cas de la grille composée des racines de polynôme pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

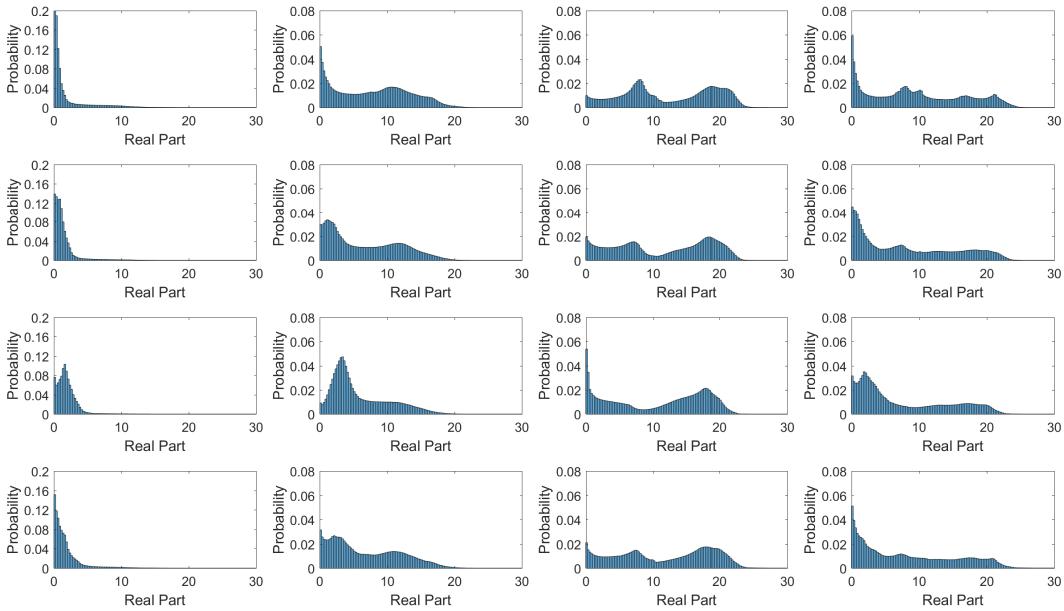


FIGURE 4.28 – Occurrences des parties réelles des modes instables pour le cas d'un LHS de 300 points pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

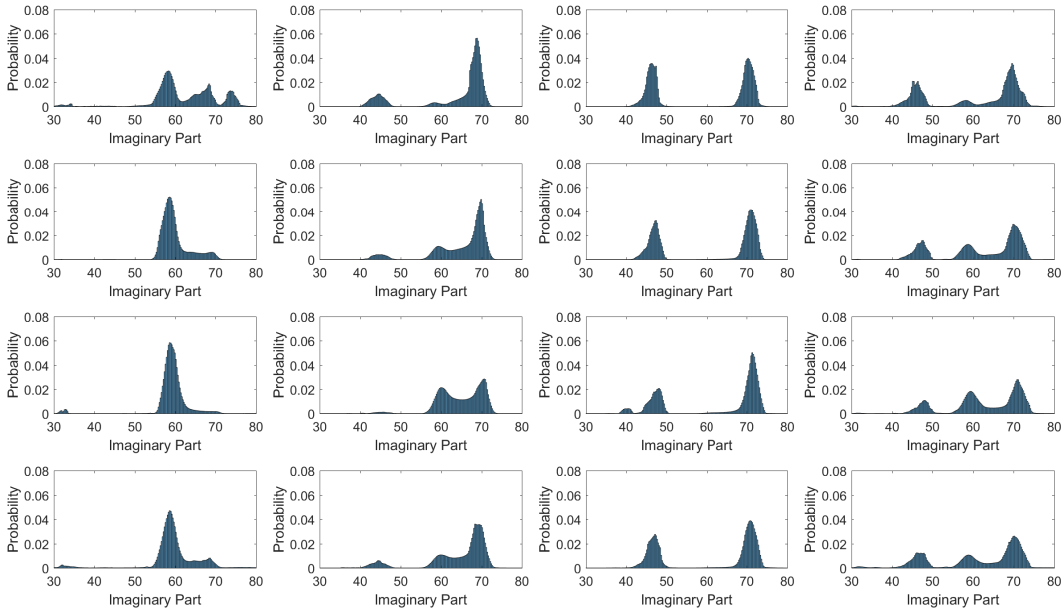


FIGURE 4.29 – Occurrences des parties imaginaires des modes instables pour le cas d'un LHS de 300 points pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a

4.5 Conclusion

Dans cette partie, différentes stratégies ont été utilisées pour prédire l'évolution des valeurs propres complexes d'un modèle académique. Le krigeage permet de construire un méta-modèle des valeurs propres en fonction de différents paramètres définis sur des intervalles. Son utilisation sur ce cas simple a permis d'illustrer les capacités de la méthode à répondre au problème posé. Quelque soit le niveau de complexité des phénomènes de couplage et la taille de l'espace des paramètres d'entrée, le krigeage présente des niveaux de prédiction acceptables. De plus, l'utilisation de plans d'expériences tels que les LHS permet de réduire considérablement le nombre de calculs CEA à réaliser sur le modèle. Cependant, l'augmentation de la taille de l'espace des paramètres d'entrée implique une augmentation relativement forte de la taille de l'ensemble d'apprentissage.

Le chaos polynomial a lui aussi été utilisé et permet de prendre en compte la description probabiliste des variables d'entrée, ce que ne permet pas le krigeage. Ainsi, l'accès aux moments statistiques de la variable de sortie est immédiat et ne nécessite pas de calculs supplémentaires. Par ailleurs, si seuls les deux premiers moments statistiques sont nécessaires, un chaos d'ordre faible peut être suffisant ce qui permet de limiter la taille du plan d'expériences associé. Cependant, l'ajout de dimensions stochastiques implique une explosion de la taille de la base, ce qui rend la méthode très vite inutilisable.

Enfin, une méthode hybride permettant de propager à la fois les variables aléatoires et les paramètres intervalles a été présentée. Cette considération permet de se rapprocher d'une problématique proche du cadre d'ingénierie et du problème réel de conception d'un système industriel pour lequel certains paramètres sont considérés comme maîtrisés sur un intervalle donné alors que d'autres sont plutôt subis et sont traduits par une variabilité associée. Cependant, la construction du plan d'expériences associé nécessite beaucoup plus de calculs, ce qui peut représenter une limitation forte dans le cadre d'une application industrielle utilisant un modèle éléments finis.

Il a aussi été discuté de la nécessité de la mise en place d'un critère de suivi de modes afin de permettre la construction des plans d'expériences indispensables à la création de méta-modèles pouvant prédire les occurrences de crissement et l'évolution des modes instables. Dans le cadre de cette étude réalisée sur un modèle académique, le critère de MAC s'est montré pertinent et suffisant. De façon plus générale, cela illustre l'une des difficultés potentielles lors de la mise en place de ce type de méta-modèle : il faut être en mesure d'assurer une concordance des données d'entrée entre elles quelque soit la variabilité des paramètres de conception et/ou aléatoires. Si cela est assez facilement réalisable sur des modèles simples à peu de degrés de liberté, la difficulté associée sur des modèles de grande taille peut s'avérer plus complexe. En effet, être capable de faire un suivi de chacune des valeurs propres sur un modèle éléments finis peut constituer un réel problème en "sciences de l'ingénieur".

Pour finir, il a aussi été illustré l'impact fort du choix des lois de probabilité des paramètres d'entrée sur les résultats de la propension au crissement. De façon plus générale, cela met en relief la problématique du choix initial de l'ingénieur sur la pertinence des paramètres de conception maîtrisés et des paramètres aléatoires subis. Cette notion de quantification en amont des incertitudes, qui reste hors de portée de ces travaux de thèse, est assez souvent négligée. Pour autant, des méthodologies et des techniques numériques similaires à ce qui a été présenté dans ce chapitre n'ont d'intérêt réel dans un cadre industriel que si cette problématique initiale est traitée avec rigueur.

En conclusion, ces différentes méthodes ont toutes montré leur capacité à prédire les évolutions des valeurs propres complexes dans un cas simple. Cependant, la tâche la plus complexe reste l'application à un modèle éléments finis de grande taille qui est plus réaliste de la problématique de crissement de frein automobile. Cet aspect sera présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Prédiction du crissement par méta-modélisation pour un modèle éléments finis de frein

Sommaire

5.1 Paramètres incertains dans le modèle de frein industriel PSA 150
5.2 La difficulté du suivi de modes pour un modèle industriel MEF – Limitation de la méthodologie proposée au Chapitre 4 152
5.3 Application de la méthode de krigeage au modèle de frein - Cas à deux paramètres incertains 161
5.3.1 Préambule et création du PLEX 161
5.3.2 Utilisation de la méthode du krigeage 163
5.3.3 Conclusion 169
5.4 Application de la méthode de krigeage au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains 177
5.4.1 Méthode du krigeage 177
5.4.2 Propagation d'incertitude et influence de la probabilité choisie 187
5.5 Application de la méthode hybride au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains 190
5.6 Retour sur le problème de multi-contact - Application de la stratégie de méta–modélisation dans un cadre de conception 200
5.7 Conclusion 202

Introduction

Le chapitre précédent a permis de montrer que différentes méthodes de méta-modélisation pouvaient être utilisées afin de prédire l'évolution des valeurs propres en fonction de différents paramètres incertains sur un système académique et ainsi de prédire la propension au crissement pour un modèle simple académique. La nature des incertitudes présentes dans le modèle détermine le type de méthode à utiliser, ainsi lorsqu'il s'agit de paramètres définis sur des intervalles une méthode telle que le krigeage sera plus appropriée, alors que s'il s'agit de variables aléatoires, un développement en chaos polynomial sera plus adapté. Enfin, une méthode hybride associant krigeage et chaos polynomial peut être utilisée lorsque les deux types d'incertitudes sont présentes dans le modèle. Les résultats obtenus dans le chapitre précédent étaient conditionnés par la création d'un plan d'expériences viable. Ainsi, l'utilisation d'un critère de MAC permettait de suivre l'évolution des valeurs propres indépendamment les unes des autres en fonction de l'évolution des paramètres variables.

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'application de ces méthodes à un système de frein industriel et d'illustrer la complexité du passage d'un modèle académique simple à un modèle éléments finis complexe. Le modèle éléments finis utilisé dans le cadre de cette étude correspond à celui déjà étudié dans le Chapitre 3. Dans un premier temps, les différents paramètres incertains pris en compte dans l'étude seront présentés. Ensuite, la difficulté de la création des plans d'expériences dans le cas du modèle industriel sera présentée. En effet, le chapitre précédent avait permis de montrer qu'il était primordial de pouvoir suivre les différents modes afin de créer des plans d'expériences viables, un critère de MAC avait été utilisé dans ce but. On illustrera ici la difficulté de passer d'un modèle académique à un modèle industriel sur ce point précis. Ensuite, la méthode du krigeage sera utilisée avec deux puis trois paramètres incertains afin de prédire la propension au crissement du modèle de frein. Enfin, la méthode développée précédemment associant le krigeage et le chaos polynomial sera utilisée et comparée au krigeage.

5.1 Paramètres incertains dans le modèle de frein industriel PSA

Comme expliqué dans le Chapitre 2, l'ingénieur doit faire face à différents types d'incertitudes dans le cadre d'une étude de dimensionnement d'un système mécanique. Tout d'abord il existe des incertitudes ou des approximations liées à la modélisation. En effet, la modélisation éléments finis ou les choix des équations régissant le problème implique un biais du modèle. Il est aujourd'hui impossible de le quantifier et un recalage à l'aide d'essais expérimentaux serait souhaitable. Cependant, les travaux réalisés ici sont destinés à des études amonts où les résultats des essais ne sont pas encore disponibles et ce biais ne peut donc pas être pris en compte.

D'autres incertitudes concernent plus spécifiquement les paramètres décrivant la physique du problème ou encore les caractéristiques du système. Les premières peuvent être vues comme des paramètres subis par le système, c'est-à-dire que l'ingénieur ne peut pas les contrôler et doit concevoir un système robuste malgré leur variabilité. Il s'agit par exemple dans notre cas du coefficient de frottement de l'interface entre les plaquettes et le disque dont la valeur est inconnue. On peut aussi intégrer dans cette catégorie les variabilités dues aux tolérances de fabrication, même si la valeur moyenne est connue, une légère variation autour de celle-ci peut être observée dans la réalité. Les secondes regroupent les différents choix de conception que l'ingénieur a à sa disposition, c'est-à-dire

le choix des formes, des matériaux, des modifications de masse ou de raideur, etc. Il s'agit alors de déterminer le jeu de ces paramètres qui permet d'avoir le système qui remplit au mieux le cahier des charges tout en prenant en compte l'incertitude sur les paramètres subis. La suite de l'étude proposée dans ce chapitre se concentre sur la prise en compte de l'incertitude ou de la variabilité de ces deux types de paramètre dans un contexte de conception et de dimensionnement d'un système de frein vis-à-vis de la propension au crissement.

Finalement dans cette étude, deux grands types d'incertitude sont considérés : les paramètres subis et les paramètres contrôlés. Tout d'abord, les paramètres subis qui peuvent être divisés en deux catégories en fonction de l'origine de l'incertitude :

— Incertitude liée aux tolérances de fabrication : il s'agit principalement des propriétés matériaux dont la valeur moyenne est connue mais dont le système réel peut présenter une légère déviation par rapport à cette valeur moyenne. Cette légère variation peut avoir une influence non négligeable sur la stabilité du système. Parmi les paramètres matériaux identifiés au sein de PSA, on retiendra plus particulièrement les variations des modules d'Young du disque, de l'étrier, de la chape et des garnitures. Les variations sont relativement faibles et se font autour de valeurs moyennes connues.

— Incertitude liée au manque de connaissance de la physique : il s'agit ici des paramètres subis qui caractérisent la physique de notre problème et dont les valeurs sont inconnues. Parmi ceux-ci se trouvent les différents états des contacts internes et le coefficient de frottement μ de l'interface plaquette/disque. On a vu précédemment que les contacts internes avaient une influence forte et une stratégie a déjà été mise en place pour concevoir un frein malgré la variabilité de ces états de contact. Le coefficient de frottement est considéré comme constant au cours d'une opération de freinage mais peut varier d'un freinage à un autre pour de multiples raisons (température, humidité, pression de freinage, état de surface des plaquettes, ...). Sa valeur exacte n'est pas connue et la détermination de la loi qui décrit ce paramètre reste un travail compliqué.

Ensuite, le second type d'incertitude correspond aux variables paramétriques qui peuvent traduire différents leviers de conception, il s'agit des paramètres contrôlés. L'objectif de l'ingénieur sera de trouver les valeurs des variables paramétriques qui permettent d'avoir le frein le moins instable possible compte tenu de la variabilité des paramètres subis. Les différentes solutions techniques les plus classiques au sein de PSA qui permettent de rendre un frein moins crissant sont les suivantes : l'ajout de chanfrein sur les garnitures, l'ajout de shims dans le système, l'ajout de masse sur les bords de la chape ou encore la modification de la raideur de la poignée de la chape.

Aussi, les paramètres à prendre en compte prioritairement pour PSA sont le coefficient de frottement μ ainsi que les leviers de conception suivant : la modification de la raideur de la poignée de la chape et l'ajout de masse sur la chape. L'ajout de shims et de chanfrein n'entrent pas dans le cadre de cette thèse. L'influence des paramètres matériaux sur la stabilité du système est jugée de second ordre par rapport aux autres paramètres compte tenu des plages de variations considérées et ne seront pas traités dans le cadre de cette thèse. Cependant, la méthodologie développée permettra dans des travaux ultérieurs à cette thèse de les prendre en compte et de hiérarchiser leurs influences.

Au final, dans le cadre de cette étude menée sur un frein industriel PSA, quatre para-

Paramètre	Notation	Type	Valeur min.	Valeur max.
Coefficient de frottement	μ	aléatoire	0	1
Masse 1	M_1	paramétrique	0 g	250 g
Masse 2	M_2	paramétrique	0 g	250 g
Raideur	E_p	paramétrique	140 GPa	200 GPa

TABLEAU 5.1 – Paramètres variables pris en compte

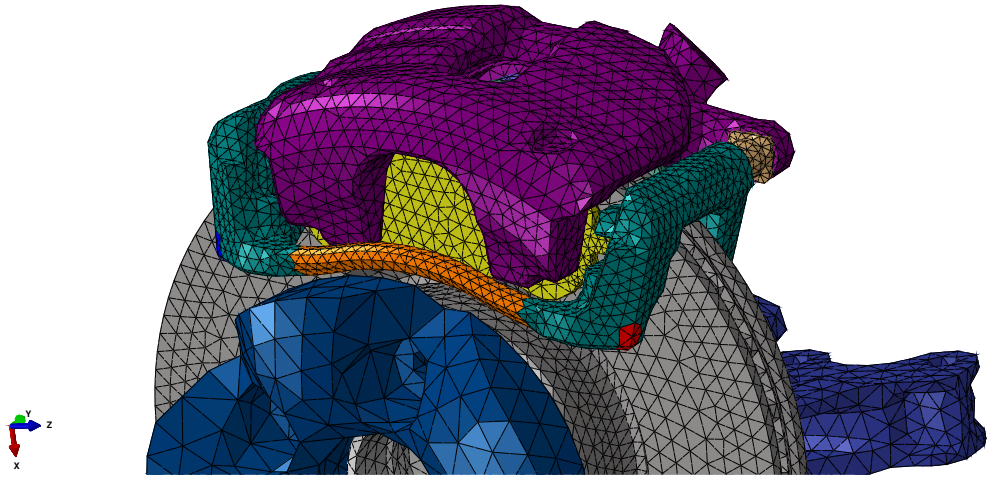


FIGURE 5.1 – Zones modifiées dans le MEF : masse 1 (rouge), masse 2 (bleu) et raideur de la poignée (orange)

mètres variables sont retenus comme indiqué dans le Tableau 5.1. La modélisation des paramètres de conception aurait pu se faire en utilisant un MEF à géométrie paramétrée mais cela n'entrait pas dans le spectre de cette thèse, d'autant plus que la géométrie générale est choisie en amont sur des critères de sécurité. L'objectif est plutôt d'identifier les tendances que ces modifications ont sur la stabilité du système afin de pouvoir envisager à terme des modifications structurales appropriées dans une phase amont. Ainsi, ces leviers de conception sont traduits par des modifications matériaux afin de laisser la géométrie du système intacte. La modification de la raideur de la poignée de la chape est ainsi modélisée par une modification du module d'Young de celle-ci. L'ajout de masse est traduit par une modification de la densité sur deux petits volumes de l'étrier. Les plages de variations de ces paramètres sont données Tableau 5.1. Les zones modifiées sur le MEF sont représentées Figure 5.1, les masses se trouvent sur les bouts de la chape. La première masse est en rouge, la seconde se trouve à l'opposé (en bleu). La partie de la poignée de la chape dont la raideur est modifiée est en orange.

5.2 La difficulté du suivi de modes pour un modèle industriel MEF – Limitation de la méthodologie proposée au Chapitre 4

Le chapitre précédent a mis en évidence l'importance du suivi des valeurs propres indépendamment les unes des autres en fonction de la variation des paramètres considérés afin d'obtenir les plans d'expériences (PLEX) nécessaires à la construction des différents méta-modèles. Une stratégie basée sur le suivi des modes à l'aide d'un critère de MAC avait été mise en place sur le modèle académique dans ce but. On se propose dans cette partie d'appliquer cette stratégie à un cas simple sur le modèle éléments finis.

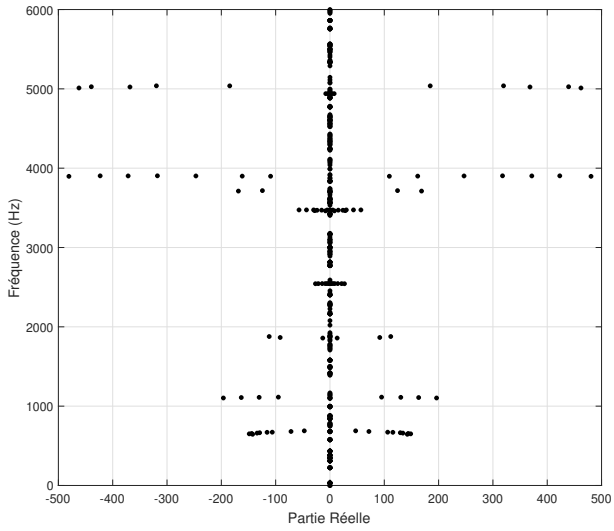
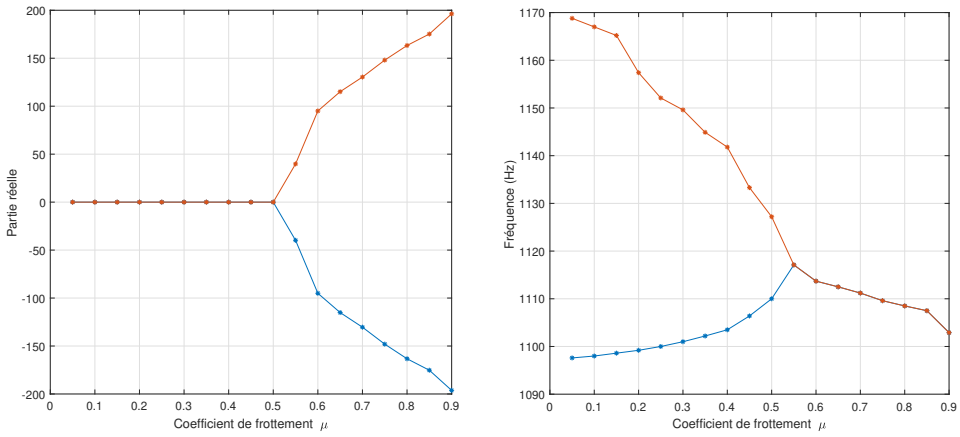


FIGURE 5.2 – Évolution des valeurs propres dans le plan complexe pour un balayage en μ sur [0, 1]



(a) (b)

FIGURE 5.3 – Évolution des parties réelles (a) et imaginaires (b) en fonction du coefficient de frottement μ pour le couplage à 1100 Hz

Une configuration quelconque du système est retenue et seul le coefficient de frottement μ est considéré comme variable ici. Son influence sur la stabilité étant de premier ordre, il est important de s'assurer que le suivi des modes par rapport à la variation de ce paramètre est réalisable. Ainsi des calculs CEA sont réalisés pour des valeurs de μ allant de 0.05 à 1 avec un pas de 0.05. Les différentes valeurs propres complexes obtenues sont tracées Figure 5.2. On peut voir que le système présente sept instabilités situées entre 800 Hz et 5050 Hz. Dans la suite, on se focalise plus particulièrement sur le couplage des deux modes à 1100 Hz. Il est à noter que le balayage fin sur μ permet de faire le suivi de ces deux modes "à la main", ainsi les évolutions des parties réelles et des fréquences de ces deux modes sont données Figure 5.3. Le mode 1 désignera le mode stable dont la partie réelle devient strictement négative et dont la fréquence varie entre 1080 et 1120 Hz, et le mode 2 le mode instable dont la partie réelle devient positive et dont la fréquence varie entre 1170 et 1100 Hz. La coalescence entre ces deux modes se fait à $\mu = 0.55$.

La stratégie présentée dans le chapitre précédent consiste à suivre les modes propres associés aux valeurs propres en comparant deux ensembles de déformées obtenus en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, avec $\mathbf{p}$ le vecteur des paramètres variables et $\Delta\mathbf{p}$ une petite variation de celui-ci.

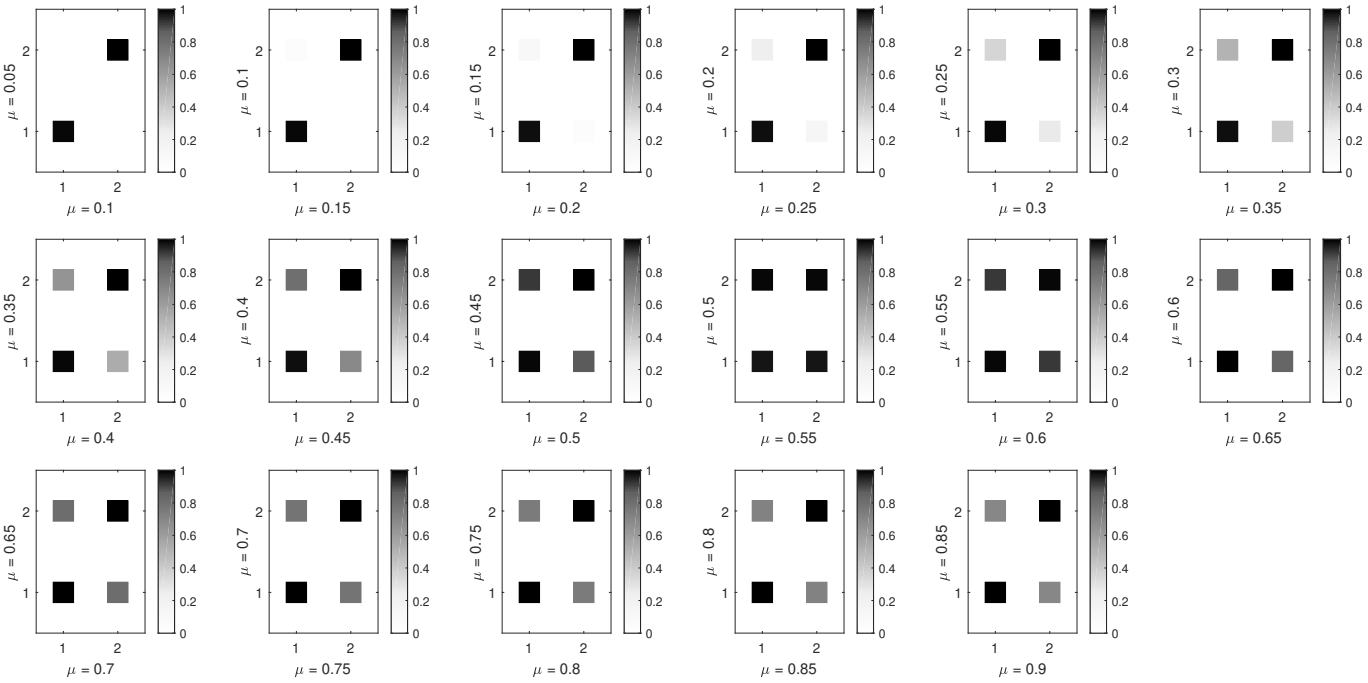


FIGURE 5.4 – Évolution des différentes matrices de MAC entre les déformées des modes 1 et 2 entre les différents μ

La comparaison entre les déformées se fait avec un critère de MAC et l'appairage se fait en associant les déformées avec les plus grandes valeurs de MAC. Afin de tester cette stratégie sur le MEF, les différentes matrices de MAC obtenues en comparant les déformées des modes 1 et 2 en μ et $\mu + \Delta\mu$ sont déterminées. Pour information, à ce niveau de l'étude le MAC est calculé en utilisant les valeurs des déformées en tous les points du modèle. Les différentes matrices de MAC successives obtenues sont tracées Figure 5.4.

On remarque qu'avant la coalescence, c'est-à-dire avant $\mu = 0.5$, les termes extra-diagonaux des différentes matrices de MAC sont faibles, indiquant alors que les déformées associées sont distinctes. Cependant, à l'approche de la coalescence, les valeurs des termes extra-diagonaux augmentent jusqu'à devenir égales à 1 au niveau de la coalescence, ainsi la matrice de MAC entre les déformées en $\mu = 0.5$ et $\mu = 0.55$ est composée uniquement de 1. Une fois la coalescence passée, les valeurs extra-diagonales diminuent légèrement mais restent de l'ordre de 0.75, ce qui signifie que les déformées sont proches. Ces résultats montrent que le suivi des déformées à l'aide d'un critère de MAC ne permettra pas de faire la distinction entre les deux déformées couplées au passage de la bifurcation. En d'autre terme, en dimension 1, sur les courbes présentées Figure 5.3, il est possible qu'au passage du point de bifurcation, les courbes bleues et orange soient inversées. Dans le cas d'une dimension supérieure à 1, il faudrait s'assurer que ce soit toujours le même mode qui soit identifié comme instable lorsque les différents paramètres évoluent.

Afin d'illustrer ces propos, les déformées des modes 1 et 2 sont affichées Figure 5.5 pour différentes valeurs de μ, à savoir $\mu = 0.1$, $\mu = 0.5$, $\mu = 0.55$ et $\mu = 0.9$. Le mode instable est celui représenté à droite. On observe que les déformées en $\mu = 0.1$ sont complètement différentes, l'une d'entre elle étant un mode de disque et l'autre un mode impliquant la chape et la plaquette extérieure. Lorsque μ augmente et atteint la valeur de 0.5, les deux déformées sont similaires au niveau de la chape et de la plaquette, la participation du disque diminue. Enfin, lorsque $\mu = 0.9$, les deux déformées sont identiques et impliquent uniquement la chape et la plaquette. On remarque qu'elles sont proches de la déformée

du mode 2 en $\mu = 0.1$ et complètement distinctes de celle du mode 1 en $\mu = 0.1$. Ceci est cohérent avec les observations précédentes faites en analysant les différentes matrices de MAC successives.

Un dernier point important est le choix du pas de discrétisation sur μ. En effet, un balayage fin a été choisi ici afin d'avoir des évolutions des déformées relativement faibles pour une variation donnée de μ afin de pouvoir assurer le suivi de celles-ci. Cependant, l'objectif final est de construire un PLEX au coût numérique le plus faible possible et donc avec le minimum de points. Il faut alors trouver le pas de discrétisation maximal qui permette tout de même d'assurer un suivi des modes. Afin d'évaluer l'influence du pas de discrétisation sur μ, l'ensemble des déformées des modes 1 et 2 pour les différentes valeurs de μ sont concaténées et la matrice d'AutoMAC est déterminée et tracée Figure 5.6. Les traits rouges correspondent à la séparation entre les différentes matrices de MAC obtenues pour les différentes valeurs de μ. Ainsi, le bloc situé ligne i et colonne j correspond à la matrice de MAC entre les déformées obtenues pour la $i^{\text{ième}}$ valeur de μ et les modes obtenus pour la $j^{\text{ième}}$ valeur de μ. Les blocs situés sur la diagonale correspondent aux matrices d'AutoMAC et les blocs situés juste au-dessus ou juste au-dessous de la diagonale correspondent aux matrices de MAC calculées entre les déformées obtenues pour deux coefficients de frottement μ successifs (i.e. celles présentées Figure 5.4).

Premièrement, on remarque que la matrice du bloc ($\mu = 0.55$,$\mu = 0.55$) est composée uniquement de valeurs de MAC égales à 1, c'est-à-dire qu'au point de coalescence, les déformées sont identiques. Par ailleurs, en regardant l'évolution des blocs situés sur la première ligne, on peut voir que seul le mode 2 a une déformée en $\mu = 0.05$ qui corrèle avec les deux déformées post-coalescence alors que le mode 1 a une déformée en $\mu = 0.55$ qui ne corrèle avec aucune des déformées observées après la coalescence. Ainsi les deux modes couplés ont, après la coalescence, une déformée proche d'une seule des deux déformées d'avant la coalescence. Cette remarque est en adéquation avec la Figure 5.5.

Par ailleurs, il apparaît qu'une fois la coalescence passée, en comparant les différentes matrices de MAC pour $\mu > 0.55$, les termes diagonaux sont toujours très proches de 1 quelle que soit la variation sur μ. Les termes extra-diagonaux sont élevés mais non égaux à 1, ce qui permet de faire la distinction entre les deux modes. Cependant, en comparant les premiers blocs de la ligne du bas pour $\mu < 0.55$, on peut voir qu'une variation de μ trop grande implique une dégradation des termes diagonaux pouvant descendre jusqu'à 0.3, voir 0.1 pour l'un des deux modes (voir le bloc ($\mu = 0.05$,$\mu = 0.5$)). Le choix du pas sur le coefficient de frottement doit se faire de façon à assurer le suivi des modes et ne peut pas être trop élevé au risque de ne plus pouvoir suivre l'évolution des déformées.

Ces différentes remarques montrent que le suivi des modes avec un simple critère de MAC s'annonce être une tâche compliquée. En effet, il serait souhaitable de pouvoir construire des PLEX de faible taille afin d'avoir un coût numérique global faible pour la construction des méta-modèles. Cependant, un trop faible nombre de points implique une difficulté pour le suivi des modes, en particulier au niveau de la zone de coalescence. En fait, il faudrait une discrétisation très fine au niveau de cette zone, en particulier sur μ car les déformées sont fortement sensibles à une faible variation de celui-ci. Afin de pouvoir suivre les modes sur l'ensemble de l'espace de conception, il faudrait pouvoir ajouter des points au PLEX à chaque zone de coalescence. Cette stratégie montre tout de suite sa limitation car elle implique l'ajout d'un trop grand nombre de points de calcul, d'autant plus que les zones de coalescences de modes sont généralement distinctes.

La conclusion de ces résultats est peu avantageuse pour nous et remet en cause la stratégie proposée dans le chapitre précédent sur un modèle académique ne comportant que quatre degrés de liberté. En effet, le cas idéal aurait été que les déformées modales soient moins sensibles à une variation du coefficient de frottement μ rendant ainsi le suivi des modes plus facile.

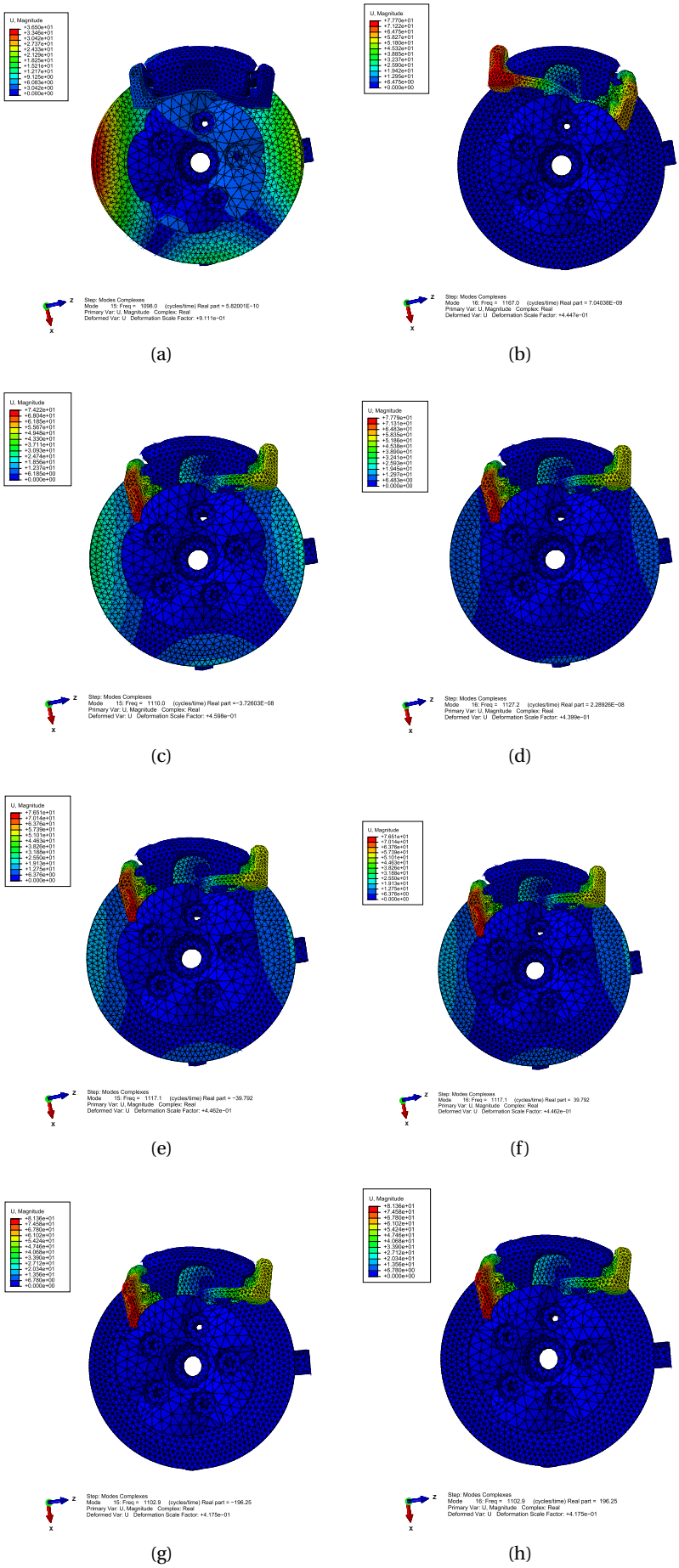
Une stratégie pour essayer de palier ce problème et statuer sur la faisabilité de l'approche précédemment proposée a été envisagée. Les remarques précédentes montrent qu'effectuer le suivi des modes lorsque les parties réelles étaient non nulles était possible, le problème consiste à réussir à suivre les modes au passage de la coalescence. Pour chaque mode $\mathbf{\Phi}$ identifié, la décomposition en valeurs singulières du sous-espace vectoriel engendré par les $[\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_i), \mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_i)]$ où les $(\mathbf{\Phi}_i)$ sont les différentes déformées du mode $\mathbf{\Phi}$ aux différents points i du PLEX est réalisée [5, 138]. L'appairage se fait alors en cherchant les points dont la distance à ce sous-espace est minimale. Afin de tester cette méthode, elle est appliquée à notre cas dont la référence est connue. Pour chaque mode, on détermine deux sous-espaces vectoriels, le premier correspondant aux déformées associées à des valeurs propres avec une partie réelle non nulle (noté SSEV1), et un second avec l'ensemble des déformées (noté SSEV2). Les deux espaces SSEV1 des deux modes sont concaténés et la matrice d'AutoMAC est déterminée, elle est affichée Figure 5.7a. On observe la présence de grandes lignes extra-diagonales de 1 qui montrent l'égalité des deux sous-espaces. Dès lors que l'on voudra réaliser un suivi des deux modes et passer le point de coalescence, tous les points qu'il sera possible d'appairer auront la même distance à ces deux sous-espaces et il sera par conséquent impossible de distinguer les deux modes à l'origine du couplage. La même procédure est appliquée aux espaces SSEV2, la matrice d'AutoMAC associée est affichée Figure 5.7b. La comparaison des deux sous-espaces engendrés par toutes les déformées montrent qu'ils sont différents si toutes les déformées des modes sont considérées.

En conclusion, les différents résultats et les différentes analyses menées montrent que les deux modes complexes qui se couplent tendent vers un unique mode réel. De plus, la forte sensibilité des déformées aux variations du coefficient de frottement μ implique un suivi des modes délicat puisque le critère de MAC est rapidement dégradé. Le choix du PLEX et de sa taille sera donc une étape cruciale car il faudra suffisamment de points afin d'assurer un suivi des modes correct. Par ailleurs, le fait que les deux modes couplés complexes tendent vers le même mode réel implique qu'il ne sera pas possible de suivre les deux modes réels à l'origine du couplage. Il serait sans doute envisageable de développer des outils plus performants que ceux présentés ici pour pouvoir suivre l'évolution des différents modes. Cependant cette tâche n'entrait pas dans les objectifs de la thèse et n'offrait aucune garantie quant à l'obtention de résultats probants, d'autant plus que les outils pour les calculs CEA au sein de PSA sont amenés à évoluer dans un avenir proche. La stratégie finale choisie pour la suite consistera donc à ne suivre les modes que lorsque ceux-ci ont des parties réelles non-nulles. L'objectif étant de caractériser le système lorsque celui-ci est instable, cette stratégie n'est pas en contradiction avec les objectifs initiaux. Par conséquent, l'approche de méta-modélisation proposée dans le cas du modèle sera restreinte à l'étude de l'espace des configurations instables pour le modèle de frein PSA.

Pour finir, l'ensemble des résultats montrés ici ont été réalisés en utilisant l'ensemble des points disponibles pour les déformées en sortie du calcul CEA. Cependant, il ne sera pas possible pour des raisons de stockage d'obtenir les déformées en tous les points du système pour toutes les valeurs propres et pour tous les points du PLEX. Il serait donc avanta-

geux de pouvoir déterminer un ensemble de points permettant d'avoir un MAC pertinent. Il serait souhaitable d'avoir un ensemble de points unique, restreint et robuste à la fois aux variations de configurations, c'est-à-dire aux différentes configurations, et aux variations des paramètres incertains considérés. La détermination d'un ensemble de points robuste aux variations des états de contact interne s'est vite avérée impossible compte tenu de la forte variation des déformées instables par rapport aux modifications des états de contact interne. Chaque configuration devra donc avoir son propre ensemble de points afin d'effectuer le suivi des modes avec un critère de MAC. De plus, sur une même configuration, il est là aussi compliqué de trouver un ensemble de points robuste aux variations des paramètres. En effet, un ensemble de points permettant un bon suivi de modes sur une certaine zone de l'espace des paramètres d'entrée ne sera pas forcément adapté à une autre zone. Il a donc été choisi de retenir un nombre assez important de points répartis sur tout le système. Ainsi sur la configuration étudiée dans la suite, ces points ont été déterminés de façon à minimiser les termes extra-diagonaux de la matrice d'AutoMAC obtenue par concaténation des modes complexes observés au point du PLEX avec le μ le plus élevé. L'idée est de se placer dans un cas où un maximum d'instabilités sont présentes afin d'avoir un ensemble de points adapté aux modes instables observés. Un ensemble de 500 points a été retenu de cette manière.

Finalement, le suivi des modes est réalisé pour les points du PLEX où les parties réelles des valeurs propres sont non nulles en utilisant un critère de MAC. Ainsi, dans un cas avec deux paramètres variables, une fois le suivi réalisé et les différentes déformées concaténées, la matrice d'AutoMAC est déterminée, elle est présentée Figure 5.8. Les différents modes sont séparés par des traits rouges. Ainsi le bloc situé ligne i et colonne j représente le MAC entre les différentes déformées observées pour le mode i et celles du mode j. Les lignes extra-diagonales composées de 1 montrent une fois de plus que les déformées entre les deux modes couplés sont pratiquement identiques. Quelques termes sont proches de 1 à certains endroits et montrent que l'ensemble de points choisis n'est pas optimal, mais ils restent marginaux et laissent conclure que l'ensemble de points choisis est acceptable. Cependant, ces quelques points peuvent entrainer potentiellement des erreurs d'appairage dans l'algorithme final et le PLEX final sera à traiter avec attention.



(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

(g) (h)

FIGURE 5.5 – Évolution des déformées modales de deux modes qui se couplent pour $\mu = 0.1$ (a,b), $\mu = 0.5$ (c,d), $\mu = 0.55$ (e,f) et $\mu = 0.9$ (g,h)

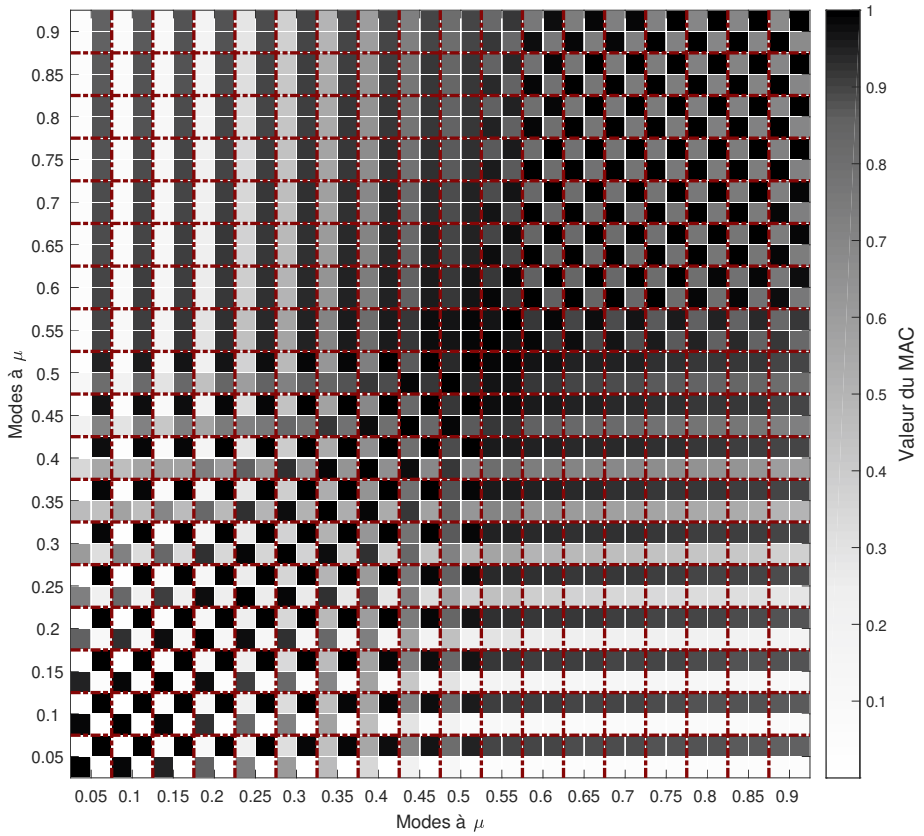
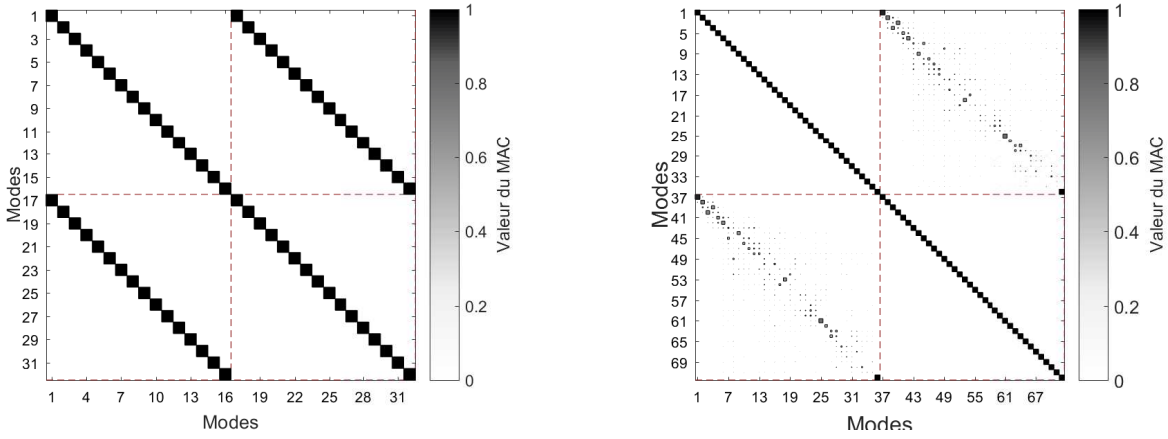


FIGURE 5.6 – Matrice d'AutoMAC entre toutes les déformées observées pour les modes 1 et 2 pour les différents µ



(a) (b)

FIGURE 5.7 – Matrices d'AutoMAC de la concaténation des modes propres des sous-espaces engendrés par les déformées observées lorsque les parties réelles des valeurs propres sont non nulles (a) et sur l'ensemble des déformées observées (b)

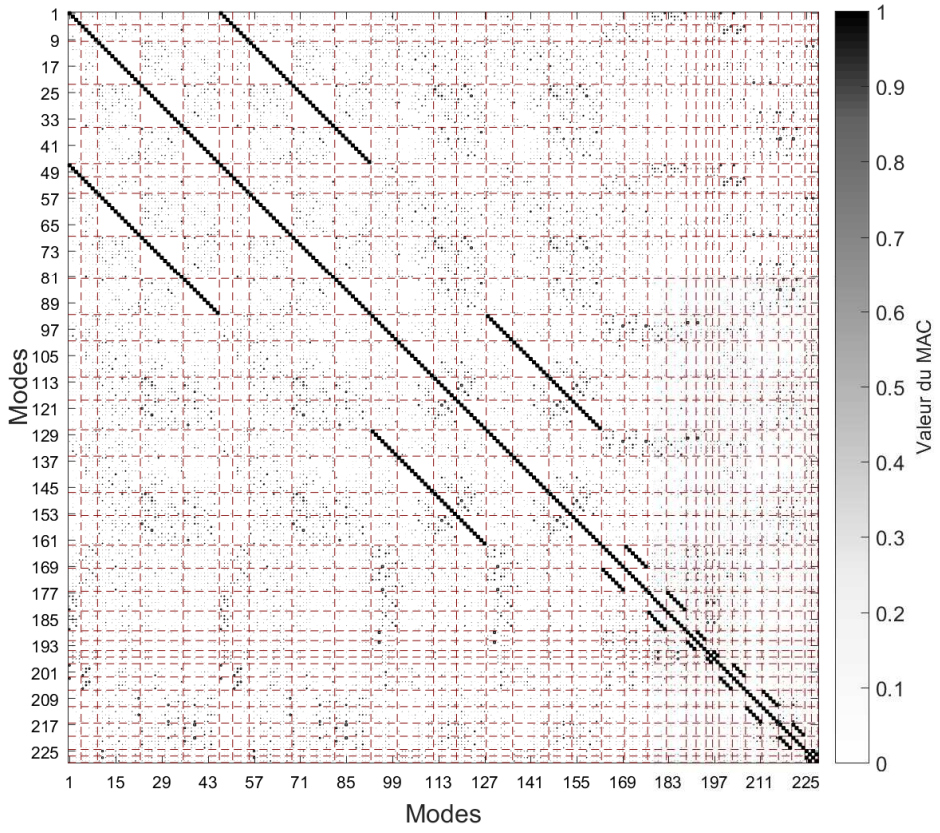


FIGURE 5.8 – Matrice d'AutoMAC obtenue avec un ensemble de 500 points pour le calcul du MAC pour appairer les différents modes (séparés par des traits rouges)

5.3 Application de la méthode de krigeage au modèle de frein - Cas à deux paramètres incertains

Dans cette partie, l'application de la technique du krigeage développée dans le chapitre précédent est illustrée et discutée sur le modèle éléments finis de frein industriel. Pour cette première étude, deux paramètres incertains sont considérés, à savoir le coefficient de frottement μ de l'interface plaquette/disque et les deux masses M_1 et M_2. On suppose ici que $M = M_1 = M_2$. Ce choix de considérer uniquement deux paramètres incertains permet pour la suite de l'étude d'analyser et de visualiser très facilement les résultats et ainsi d'illustrer au mieux les conclusions énoncées. Pour rappel, les plages de variation des paramètres sont données Tableau 5.1. La première étape primordiale consiste à créer un PLEX adapté au problème, puis le formalisme du krigeage est utilisé pour prédire l'évolution des valeurs propres complexes. Une fois le modèle validé, les indices de Sobol seront déterminés et les évolutions des valeurs propres seront analysées.

5.3.1 Préambule et création du PLEX

Comme expliqué dans le chapitre précédent, les plans d'expériences de types LHS sont un bon compromis coût/précision. De plus, les méta-modèles ont un niveau de précision plus élevé à proximité des points d'apprentissage [51]. Ainsi, afin d'avoir le meilleur niveau de fidélité possible sur l'ensemble de l'espace d'entrée, il est préférable d'avoir un LHS dont les points sont répartis uniformément dans l'espace. Afin de réaliser un tel plan d'expériences, il est possible de générer un LHS qui maximise la distance minimale entre les points du PLEX. Pour cela on utilisera une fonction disponible dans le package DiceDesign disponible sur R [39, 53]. Par ailleurs, les points des bornes des intervalles considérés sont ajoutés afin là aussi d'éviter un manque de précision du méta-modèle aux bornes du problème. En se basant sur les résultats du chapitre précédent où un PLEX de 70 points permettait d'avoir un niveau de précision acceptable pour le méta-modèle de krigeage, un PLEX de 104 points est utilisé ici afin d'assurer en plus un suivi des modes correct. Ce PLEX est représenté Figure 5.9.

Les différents calculs CEA correspondants au PLEX généré sont réalisés puis l'appairage des modes sur les zones où les parties réelles sont non nulles est effectué à l'aide du critère de MAC. Les résultats sont représentés Figure 5.10. Il est à noter que le critère de

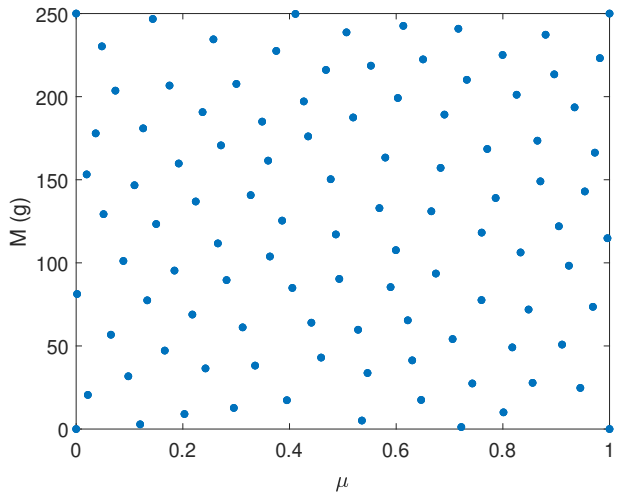


FIGURE 5.9 – Plan d'expériences pour le cas 2 paramètres

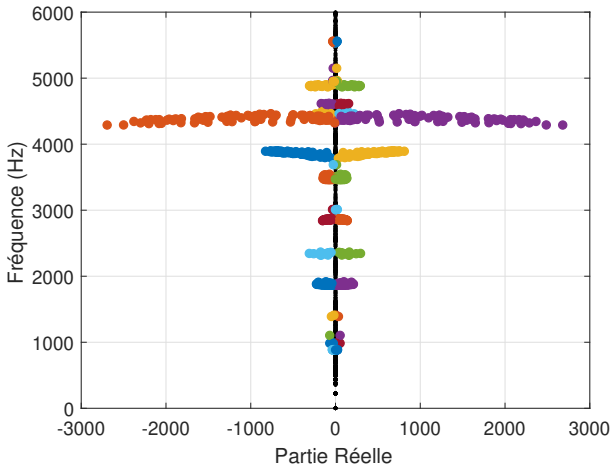


FIGURE 5.10 – Suivi des modes à partir des calculs CEA réalisés sur le PLEX

Numéro du mode	Nature	Partie réelle	Fréquence (Hz)	Nombre de points dans PLEX	Nombre de points de validation
1	Instable	218,19	1874,04	50	21
2	Instable	146,01	2832,79	31	14
3	Instable	139,11	3478,81	82	38
4	Instable	818,48	3884,33	74	35
5	Instable	2687,40	4281,27	89	41
6	Instable	299,54	4875,39	48	20
7	Stable	-218,19	1874,05	50	21
8	Stable	-146,01	2832,79	31	14
9	Stable	-139,11	3478,80	82	38
10	Stable	-818,48	3884,33	74	35
11	Stable	-2687,40	4281,27	89	41
12	Stable	-299,54	4875,39	48	20

TABLEAU 5.2 – Modes identifiés et retenus pour l'étude sur le PLEX

MAC est utilisé dans ce cas pour différencier chacun des modes instables, et non pour répondre à la problématique de suivi des modes en fonction du coefficient de frottement μ soulevée dans la partie précédente. On peut remarquer que l'utilisation d'un critère de MAC a permis de faire la différence entre les deux modes situés à 4500 Hz (voir le mode violet et le mode bleu). Un ensemble de 50 points de validation est généré aléatoirement et permettra d'avoir un ensemble de points de référence à comparer aux prédictions du krigeage. Il est à noter que chaque mode possède son propre PLEX qui correspond aux zones où la partie réelle des valeurs propres associées est non nulle. Par abus, on appellera zone d'instabilité la zone où les parties réelles d'un mode sont non nulles, qu'elles soient positives ou négatives. Certains modes ont une zone d'instabilité plus grande que d'autres et ont donc un PLEX plus grand. Pour chaque mode, les différents PLEX sont visualisés et les points aberrants retirés. Seuls les modes avec une zone d'instabilité suffisamment grande (i.e. avec plus de 15 points) sont retenus afin de pouvoir construire des méta-modèles avec des ensembles d'apprentissage de taille suffisante. Les différents modes retenus sont donnés Tableau 5.2 où sont donnés la partie réelle la plus éloignée de l'axe des imaginaires, la fréquence associée, le nombre de points dans le PLEX et le nombre de points de validation disponibles pour ce mode.

Dans la suite, chaque mode sera caractérisé par deux PLEX et trois méta-modèles. Un premier PLEX est constitué des valeurs propres où les parties réelles sont non nulles. A partir de celui-ci, deux méta-modèles seront construits, le premier noté $\mathcal{M}_a$ pour la partie réelle

et le second $\mathcal{M}_\omega$ pour la partie imaginaire. Cependant, ces méta-modèles ne sont valables que lorsque la partie réelle de la valeur propre est non nulle et cette zone ne correspond pas nécessairement à un pavage de l'espace. Il est donc indispensable d'avoir une fonction test qui permette de savoir si ces deux méta-modèles se trouvent dans leurs zones de validité ou non. Pour cela, un second ensemble d'apprentissage est créé pour la partie réelle. Aux points du PLEX total où il n'y a pas eu d'apparairage, on associe la valeur 0 pour la partie réelle. Ceci peut être justifié par le fait que le mode a été suivi correctement lorsqu'il est instable et donc que le reste du temps la partie réelle de la valeur propre est nulle. A partir de cet ensemble d'apprentissage, un troisième méta-modèle $\mathcal{M}_{a0}$ est construit. Si pour une certaine entrée, la valeur absolue de la sortie de $\mathcal{M}_{a0}$ est supérieure à une valeur seuil, alors les méta-modèles $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_\omega$ sont dans leurs zones de validité et peuvent être utilisés.

5.3.2 Utilisation de la méthode du krigeage

Dans un premier temps, le formalisme du krigeage est utilisé afin de construire les différents méta-modèles. L'objectif ici est d'illustrer l'adaptation des résultats du chapitre précédent à un cas industriel. Les limitations de la méthode, liées principalement au MEF et à la difficulté de la création d'un PLEX seront expliquées. Enfin les évolutions des valeurs propres seront prédites, permettant de calculer ensuite les indices de Sobol.

Dans cette partie, le krigeage est construit à l'aide du package DiceKriging disponible sur R [120, 121]. Il met à disposition les noyaux de covariance de type Matérn 1/2 et 5/2 ainsi que le noyau exponentiel. Au vu des mauvaises performances du noyau Gaussien vues dans le chapitre précédent, il n'est pas retenu ici. La régression peut être quelconque et trois types de régression seront considérées : la régression d'ordre 0, la régression d'ordre 1 et la régression d'ordre 2 prenant en compte l'interaction entre les variables. Ce package a une résolution du calcul des paramètres du krigeage plus robuste que celle de la toolbox Matlab DACE [80]. Par ailleurs, la construction d'un krigeage avec effet pépite est possible.

Cas des problèmes d'appairage

Comme expliqué précédemment, le suivi des modes reste un problème complexe. L'utilisation d'un seuil pour le critère de MAC a des limitations assez fortes et il n'est pas impossible que des problèmes d'appairage apparaissent. Ce problème est particulièrement vrai pour le PLEX associé au méta-modèle $\mathcal{M}_{a0}$ car si un point a été "oublié" lors de l'appairage, il sera remplacé par une valeur nulle. Il est alors important de pouvoir identifier ces points erronés pour les retirer des plans d'expériences. Le fait d'être ici dans un espace de dimension 2 permet de visualiser facilement les différentes données facilitant ainsi cette étape. Il est important de noter que des points aberrants ne sont pas toujours à retirer du PLEX car ils peuvent traduire une évolution forte des valeurs propres du système, ainsi la suppression de ces points est à effectuer avec précaution.

Un krigeage construit avec un effet pépite autorise une grande variation de la sortie pour une faible variation de l'entrée. Cette propriété peut être utile pour le traitement des points aberrants. En effet, avec un krigeage quelconque ces points aberrants impliquent une modification forte de la surface de réponse par rapport au cas où ils ne seraient pas là. Toutes les prédictions faites dans le voisinage de ces points se trouvent alors fortement modifiées. L'utilisation d'un effet pépite permet de limiter cet effet car la surface sera lissée et limitera l'influence de ces points. Cet effet est illustré Figure 5.11 où un point a été

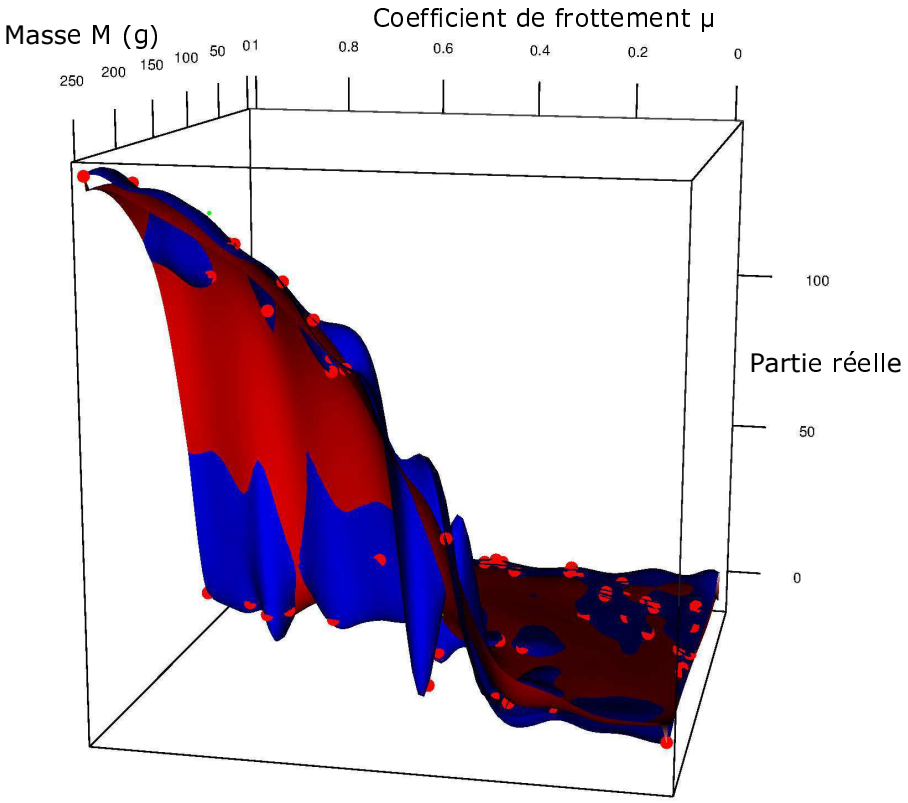


FIGURE 5.11 – Comparaison entre un krigeage avec effet pépite (courbe rouge) et sans effet pépite (courbe bleue) - cas de $\mathscr{M}_{a0}$ du mode 2

ajouté en μ = 0.5, M = 200 g avec une partie réelle nulle. La surface bleue correspond au krigeage construit sans effet pépite et la rouge avec. On peut voir que l'ajout du point influence fortement la surface de réponse bleue qui vient interpoler ce point en créant de fortes modifications dans la zone autour. La surface rouge a quant à elle tendance à le "négliger". En réalité, elle interpole aussi la prédiction en ce point, mais autorise une grande variation de la partie réelle pour une très petite variation des paramètres d'entrée autour de ce point. Il faudrait une discrétisation très fine pour observer cette propriété. Les prédictions données par le krigeage construit avec l'effet pépite sont donc moins faussés que dans l'autre cas.

L'utilisation de l'effet pépite dans la construction du krigeage permet d'identifier potentiellement des points mal appairés. Plus généralement, il permet de lisser la surface de réponse lorsque les variations sont très fortes. Son utilisation doit donc être faite avec précaution car dans un cas où les valeurs propres évoluent fortement, un krigeage construit avec effet pépite risque de gommer ces variations qui sont pourtant bien à prendre en considération. Il peut cependant servir d'indicateur pour identifier des zones à fortes variations de la sortie et/ou des points potentiellement mal appairés.

Évolution des valeurs propres

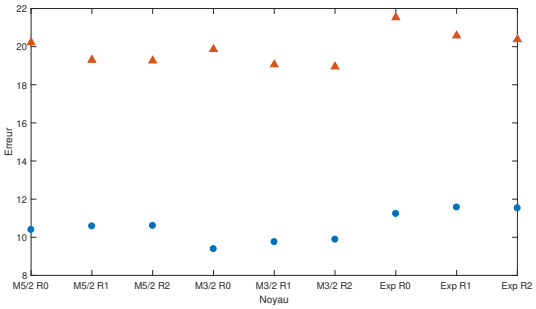
Cette partie est dédiée à la présentation des résultats obtenus sur la prédiction des valeurs propres des différents modes en fonction de la variation des deux paramètres d'entrée μ et M. Les différents PLEX ont été analysés de façon à supprimer les différents points

aberrants et les krigeages dans la suite sont construits sans effet pépite. Pour rappel, trois méta-modèles ($\mathscr{M}_{a0}$, $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$) sont créés pour chacun des modes donnés Tableau 5.2.

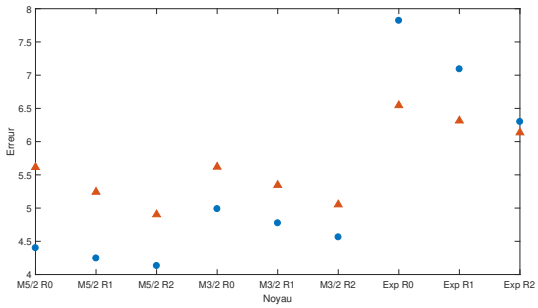
Afin de construire des krigeages performants, il est important de choisir convenablement les noyaux de covariance et les fonctions de régression. Pour cela, pour chaque mode et pour chaque méta-modèle, les différents noyaux de covariance et les différentes régressions sont comparés. Pour rappel, les noyaux sont les noyaux Matérn 1/2, Matérn 5/2 et exponentiel, et les régressions sont les régressions d'ordre 0, d'ordre 1 et d'ordre 2 avec le premier terme d'interaction. Deux erreurs sont calculées : la première à partir des points de validation et la seconde avec la méthode du Leave-One-Out (LOO). Dans le premier cas, on compare la prédiction des différents krigeages avec la valeur de référence et la moyenne quadratique de ces erreurs est déterminée. Cependant, le nombre de points de validation est relativement faible, en particulier pour les modes dont la zone d'instabilité est peu étendue. Cette erreur n'est donc pas toujours représentative du niveau d'erreur global. La seconde méthode est une stratégie classique pour estimer la qualité d'un méta-modèle sans utiliser de calcul supplémentaire. La méthode consiste à calculer N méta-modèles basés sur N plans d'expériences constitués de tous les points d'apprentissage sauf 1. Il est alors possible de comparer la prédiction du méta-modèle construit à partir du plan d'expériences constitué des N − 1 autres points à la valeur exacte en ce point. On détermine alors la moyenne quadratique de ces N erreurs. Ces deux erreurs sont calculées pour les différents noyaux et les différentes régressions considérés, soit 9 cas possibles. Les résultats pour les modes instables sont présentés Figure 5.12 pour le méta-modèle $\mathscr{M}_{a0}$, Figure 5.13 pour le méta-modèle $\mathscr{M}_a$ et Figure 5.14 pour le méta-modèle $\mathscr{M}_\omega$. Les résultats sont identiques pour les modes stables.

En comparant les erreurs LOO et la moyenne quadratique des erreurs, on remarque que l'erreur LOO est plus sensible aux variations de noyau que la moyenne quadratique de l'erreur. Plusieurs phénomènes peuvent expliquer cette différence. Tout d'abord, le faible nombre de points dans l'ensemble de validation peut conduire à une erreur qui a finalement relativement peu de sens. De plus, si les points de validation sont placés à proximité d'un point d'apprentissage, alors l'erreur en ce point sera très faible. Une autre origine peut venir de la taille relativement faible du plan d'expériences, ainsi chaque point a une importance forte pour l'apprentissage du méta-modèle. Donc dans le calcul de l'erreur LOO, le fait de retirer certains points peut changer considérablement le méta-modèle et ainsi générer une erreur forte, en particulier s'ils sont situés sur des zones où les variations de la sortie sont importantes. Cependant, lorsque les différents niveaux d'erreur ne varient plus par rapport aux noyaux, ceci signifie que l'ensemble d'apprentissage est suffisamment riche. On remarque que le minimum du LOO et le minimum de la moyenne quadratique de l'erreur sont souvent confondus. Dans un contexte où chaque appel au modèle est coûteux, l'utilisation de cette erreur LOO qui ne nécessite aucun appel supplémentaire au modèle peut être un bon compromis pour déterminer le paramétrage du krigeage. Ainsi, les caractéristiques de covariance et de régression sont choisies dans la suite afin minimiser de l'erreur LOO.

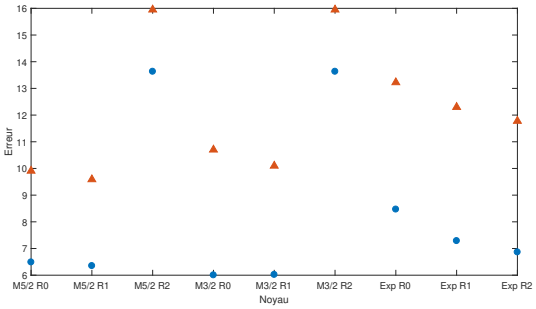
Les différents méta-modèles sont construits pour chaque mode et les surfaces de réponse obtenues avec le méta-modèle $\mathscr{M}_{a0}$ sont données Figures 5.15. Les points rouges correspondent aux points du PLEX. Certaines surfaces ont des évolutions classiques, c'est le cas par exemple de la partie réelle du mode 4 où le mode est stable pour un coefficient de frottement faible puis devient instable. D'autres surfaces ont des évolutions plus complexes et moins classiques. Par exemple, pour le mode 3, l'augmentation de μ tend à augmenter la valeur de la partie réelle. Cependant, pour une masse de 100 g, il existe un intervalle



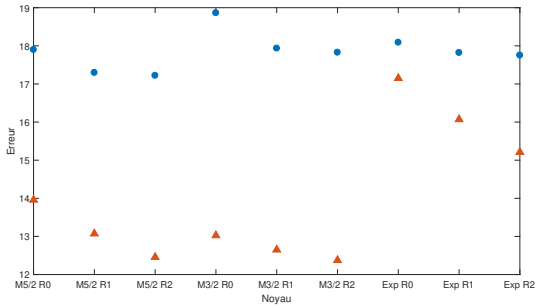
(a) Mode 1



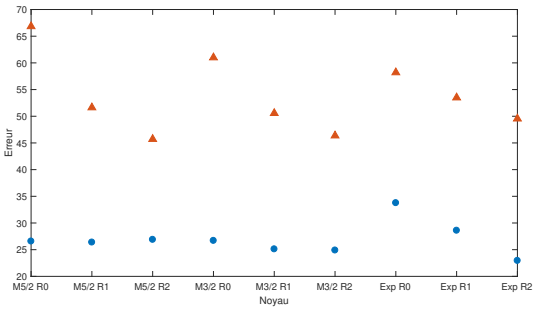
(b) Mode 2



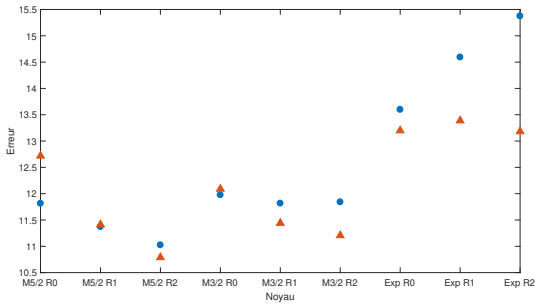
(c) Mode 3



(d) Mode 4



(e) Mode 5

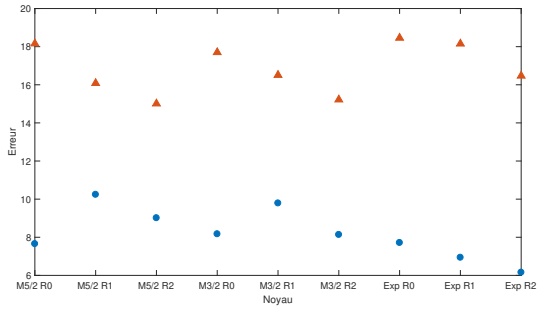


(f) Mode 6

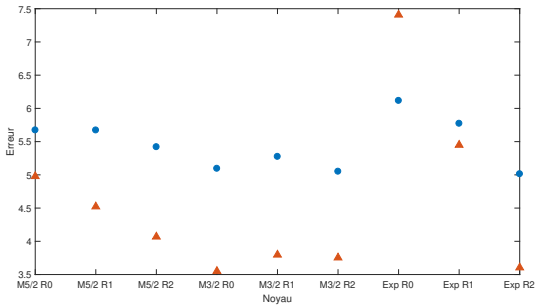
FIGURE 5.12 – Moyenne quadratique de l'erreur (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathscr{M}_{a0}$ des modes instables

de μ pour lequel la partie réelle est nulle alors qu'elle est positive pour des valeurs inférieures et supérieures aux bornes de cet intervalle. Ces évolutions qui peuvent sembler inhabituelles sont en concordances avec des évolutions de valeurs propres que l'on pourrait observer sur le modèle académique en considérant une variation de la masse. Elle s'explique tout simplement par une modification des fréquences propres initiales sans frottement, ce qui entraine nécessairement des modifications lors des calculs de stabilité avec la prise en compte du frottement.

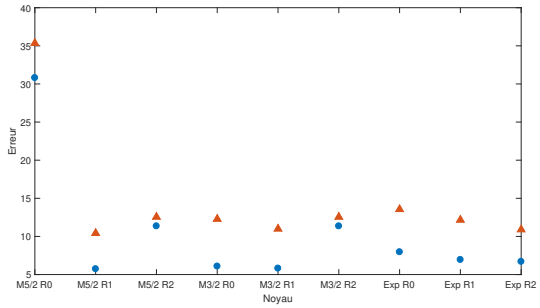
L'obtention de ces surfaces de réponse et donc des zones où les modes sont dans leur zone d'instabilité, permet d'utiliser les méta-modèles associés aux parties réelles et imaginaires. Ainsi, les évolutions des parties réelles et des parties imaginaires sur les zones d'instabilité sont respectivement données Figures 5.16 et 5.17. Les zones blanches correspondent aux zones où les méta-modèles $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$ sont en dehors de leurs plages de validité, c'est-à-dire que la partie réelle de la valeur propre associée est nulle. Il est important de noter que ces résultats peuvent être obtenus car la fonction test $\mathscr{M}_{a0}$ a de bonnes



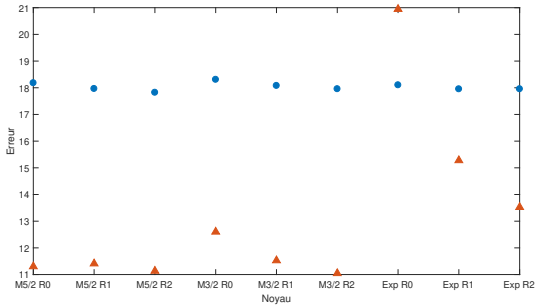
(a) Mode 1



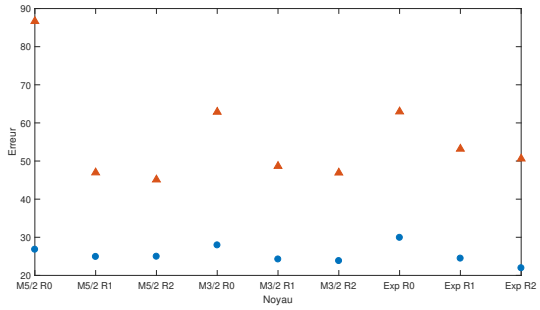
(b) Mode 2



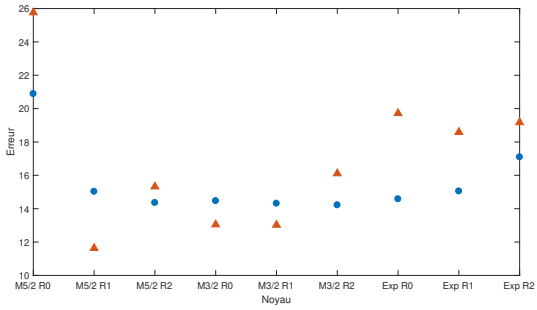
(c) Mode 3



(d) Mode 4



(e) Mode 5

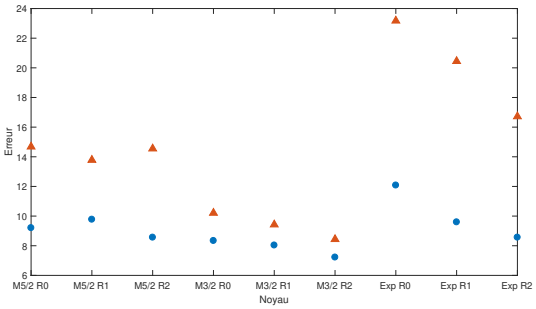


(f) Mode 6

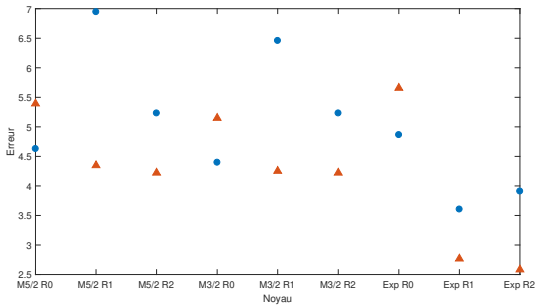
FIGURE 5.13 – Moyenne quadratique de (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathcal{M}_a$ des modes instables

capacités de prédiction et qu'elle peut être utilisée afin de savoir si les méta-modèles $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{M}_\omega$ peuvent être utilisés.

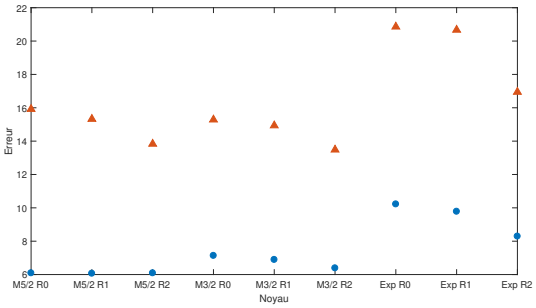
Les différents méta-modèles sont validés à l'aide de différents indicateurs : le premier consiste à comparer les valeurs prédites par LOO aux valeurs exactes, le second correspond aux résidus standardisés et le dernier au diagramme quantile-quantile. Un exemple est affiché Figure 5.18 pour le méta-modèle de la partie réelle du mode 5. Le méta-modèle construit ici est satisfaisant pour différentes raisons. Tout d'abord, les valeurs LOO sont proches des valeurs exactes comme le montre le graphique du haut. Ensuite, les résidus standardisés sont faibles (inférieurs à 3). Pour finir, la majorité des points sont situés sur la droite $y = x$ sur le graphique quantile-quantile. Un trop grand décalage des points indiquerait que le processus ne suivrait pas une loi gaussienne, indiquant alors que le méta-modèle créé n'est pas satisfaisant. L'ensemble des méta-modèles créés sont validés à l'aide de ces trois indicateurs. Par ailleurs, les prédictions du krigeage sur les points de référence sont comparées aux résultats de référence. Les résultats sont présentés Fi-



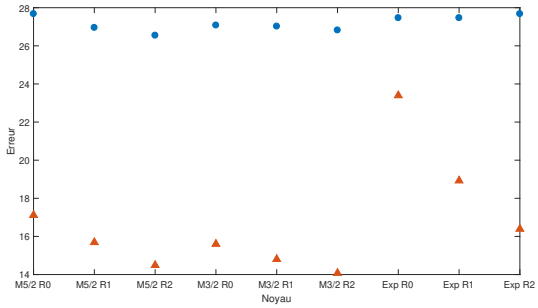
(a) Mode 1



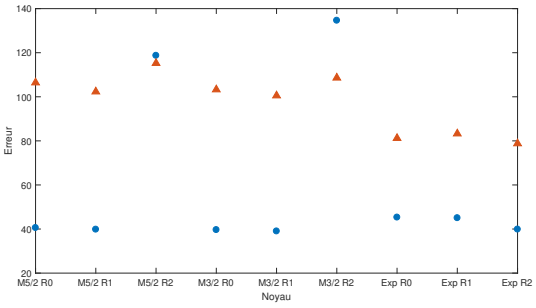
(b) Mode 2



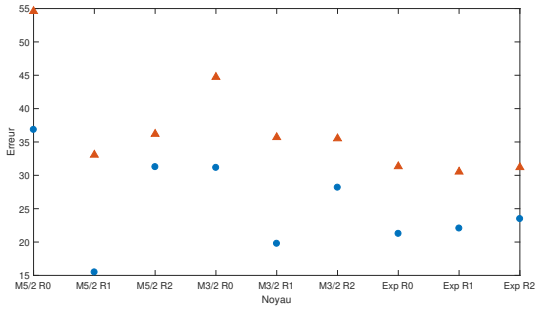
(c) Mode 3



(d) Mode 4



(e) Mode 5



(f) Mode 6

FIGURE 5.14 – Moyenne quadratique de l'erreur (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathcal{M}_\omega$ des modes instables

gure 5.19 pour les parties réelles et Figure 5.20 pour les fréquences. On remarque que les prédictions du krigeage sont très proches des valeurs de référence, ce qui nous permet de valider les différents méta-modèles.

L'ensemble de ces résultats permette de faire une analyse du problème de propension au crissement pour le modèle de frein PSA et de l'effet des deux paramètres considérés (μ,M) sur celui-ci. Les différents graphiques mettent en évidence la complexité de la forme des zones d'instabilité des différents modes. Ainsi, pour le mode 4, cette zone correspond pratiquement à un pavage de l'espace, alors que pour le mode 6, elle présente un comportement plus complexe avec plusieurs zones distinctes. L'influence de la masse est différente pour chaque mode, certains sont fortement influencés par une variation de celle-ci alors que d'autres ne sont que faiblement impactés. Par exemple, pour les modes 4 et 5, l'ajout de masse ne change pas ou peu la stabilité. Cependant, pour le mode 1, si le coefficient de frottement est égal à 0.8, alors l'ajout de masse aura un effet stabilisant si elle est inférieure à 50 g mais supérieure à 25 g, puis déstabilisant si elle est comprise entre 50 et

200 g. Au delà de 200 g, le mode 1 est toujours stable quelque soit la valeur du coefficient de frottement. Cependant, en considérant le mode 2, on peut voir que si la masse ajoutée est inférieure à 100 g, alors le mode est toujours stable, mais au delà de cette valeur le mode peut potentiellement devenir instable. La stabilisation de certains modes peut en rendre d'autres instables et les choix de conception doivent être faits en considérant l'ensemble des modes du système. Ces résultats sur l'effet de certains paramètres sur la propension au crissement démontre sans ambiguïté la nécessité de mener des études approfondies sur l'influence des paramètres et illustre au passage la complexité des zones d'instabilité pouvant être générées par chaque mode ainsi que la difficulté pour un ingénieur de trouver le jeu de paramètres le moins crissant de façon "intuitive".

L'évolution des parties imaginaires Figure 5.17 montre qu'une variation de la masse M n'a pas le même impact sur les parties imaginaires que sur les parties réelles. Par exemple, dans le cas du mode 5, l'ajout de masse n'avait que peu d'influence sur la partie réelle mais sa partie imaginaire est au contraire impactée par cette modification. En effet, l'ajout de masse tend à augmenter la fréquence propre du mode pour un coefficient de frottement compris entre 0.4 et 0.8. De plus, certains modes qui avaient des parties réelles sensibles à la variation de masse ont une partie imaginaire qui ne varie pratiquement pas en fonction de M, c'est le cas du mode 3 par exemple. Une nouvelle fois, ces derniers résultats sur l'évolution des fréquences de crissement démontrent la complexité du problème à traiter et l'intérêt de la mise en place de la stratégie développée qui permet d'obtenir les tendances pour un coût numérique raisonnable (moins de 100 h de calculs pour les résultats présentés ici).

Ces différentes observations sont confirmées par le calcul des indices de Sobol d'ordre 1 et les indices totaux sur les trois fonctions $\mathscr{M}_{a0}$, $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$ donnés Tableau 5.3. Par exemple, pour le mode 5, l'indice de Sobol de $\mathscr{M}_a$ par rapport à M est pratiquement nul, indiquant alors que l'ajout de masse n'a pas d'influence sur sa partie réelle. Pour le mode 1, on voit que la masse n'a pas la même influence sur la partie réelle et la partie imaginaire. En effet, l'indice d'ordre 1 lié à la masse M est pratiquement égal à 1 et celui lié au coefficient de frottement μ est pratiquement nul en ce qui concerne la partie imaginaire, alors qu'ils sont respectivement égaux à 0.34 et 0.45 pour la partie réelle.

Ces différents résultats ont permis d'illustrer que l'utilisation de la méthode du krigeage pour la prédiction de l'évolution des valeurs propres complexes dans le cas d'un modèle éléments finis est possible. Cependant, la stratégie utilisée sur le modèle académique n'est pas totalement applicable au modèle éléments finis et le suivi des modes est limité à leur zone d'instabilité, ce qui ne nuit pas aux objectifs initiaux qui consistent à caractériser les modes instables et la propension au crissement. Cependant, ceci implique de pouvoir caractériser les zones d'instabilité à l'aide d'une fonction test afin de connaitre les zones de validité des méta-modèles. Les résultats obtenus avec le krigeage ont permis de faire face à ces différentes contraintes et montrent des bons résultats en terme de prédiction d'évolution des valeurs propres.

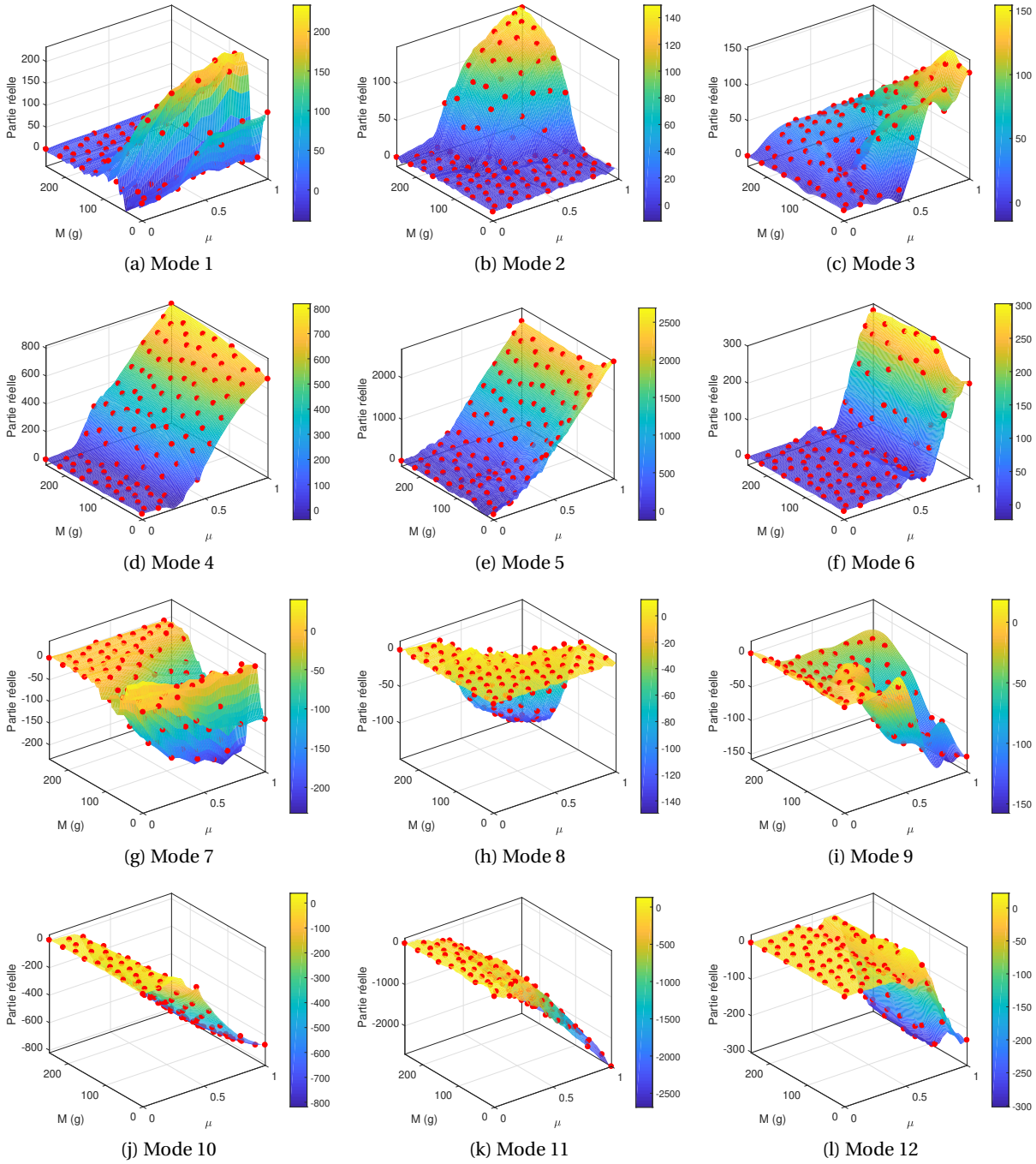
5.3.3 Conclusion

En conclusion, on a montré ici que la capacité du krigeage à prédire la propension au crissement dans le cas où deux paramètres incertains sont considérés. Si la création du plan d'expériences reste une tâche complexe, il est toutefois possible de suivre l'évolution des modes lorsqu'ils sont instables et d'adapter l'approche initialement utilisée pour le mo-

Numéro du mode		$\mathcal{M}_{a0}$		$\mathcal{M}_{a}$		$\mathcal{M}_{\omega}$	
		μ	M	μ	M	μ	M
1	**Ordre 1**	0.450	0.342	0.458	0.347	0	0.937
	Total	0.656	0.549	0.652	0.541	0.062	1.000
2	**Ordre 1**	0.405	0.333	0.399	0.381	0.160	0.760
	Total	0.665	0.592	0.618	0.599	0.239	0.840
3	**Ordre 1**	0.964	0.021	0.956	0.028	0.906	0.095
	Total	0.977	0.035	0.971	0.043	0.904	0.093
4	**Ordre 1**	0.984	0.010	0.983	0.011	0.433	0.400
	Total	0.989	0.015	0.988	0.016	0.599	0.565
5	**Ordre 1**	0.942	0.031	0.936	0.034	0.946	0.039
	Total	0.967	0.057	0.965	0.063	0.962	0.053
6	**Ordre 1**	0.233	0.571	0.195	0.621	0.229	0.799
	Total	0.427	0.766	0.378	0.805	0.200	0.768
7	**Ordre 1**	0.452	0.338	0.459	0.342	0	0.937
	Total	0.660	0.549	0.655	0.542	0.062	1.000
8	**Ordre 1**	0.404	0.334	0.397	0.381	0.160	0.759
	Total	0.664	0.594	0.617	0.601	0.239	0.839
9	**Ordre 1**	0.964	0.023	0.956	0.029	0.906	0.096
	Total	0.976	0.035	0.970	0.043	0.901	0.093
10	**Ordre 1**	0.984	0.011	0.983	0.013	0.444	0.374
	Total	0.988	0.015	0.986	0.016	0.626	0.555
11	**Ordre 1**	0.941	0.029	0.936	0.031	0.945	0.034
	Total	0.970	0.057	0.968	0.063	0.967	0.054
12	**Ordre 1**	0.234	0.569	0.198	0.619	0.231	0.798
	Total	0.429	0.763	0.379	0.802	0.201	0.767

TABLEAU 5.3 – Indices de Sobol d'ordre 1 et totaux pour les différents méta-modèles des différents modes

dèle académique au cas industriel. Les influences des paramètres sur les valeurs propres du système ne sont pas triviales et illustrent toute la complexité du dimensionnement d'un système de frein non crissant.



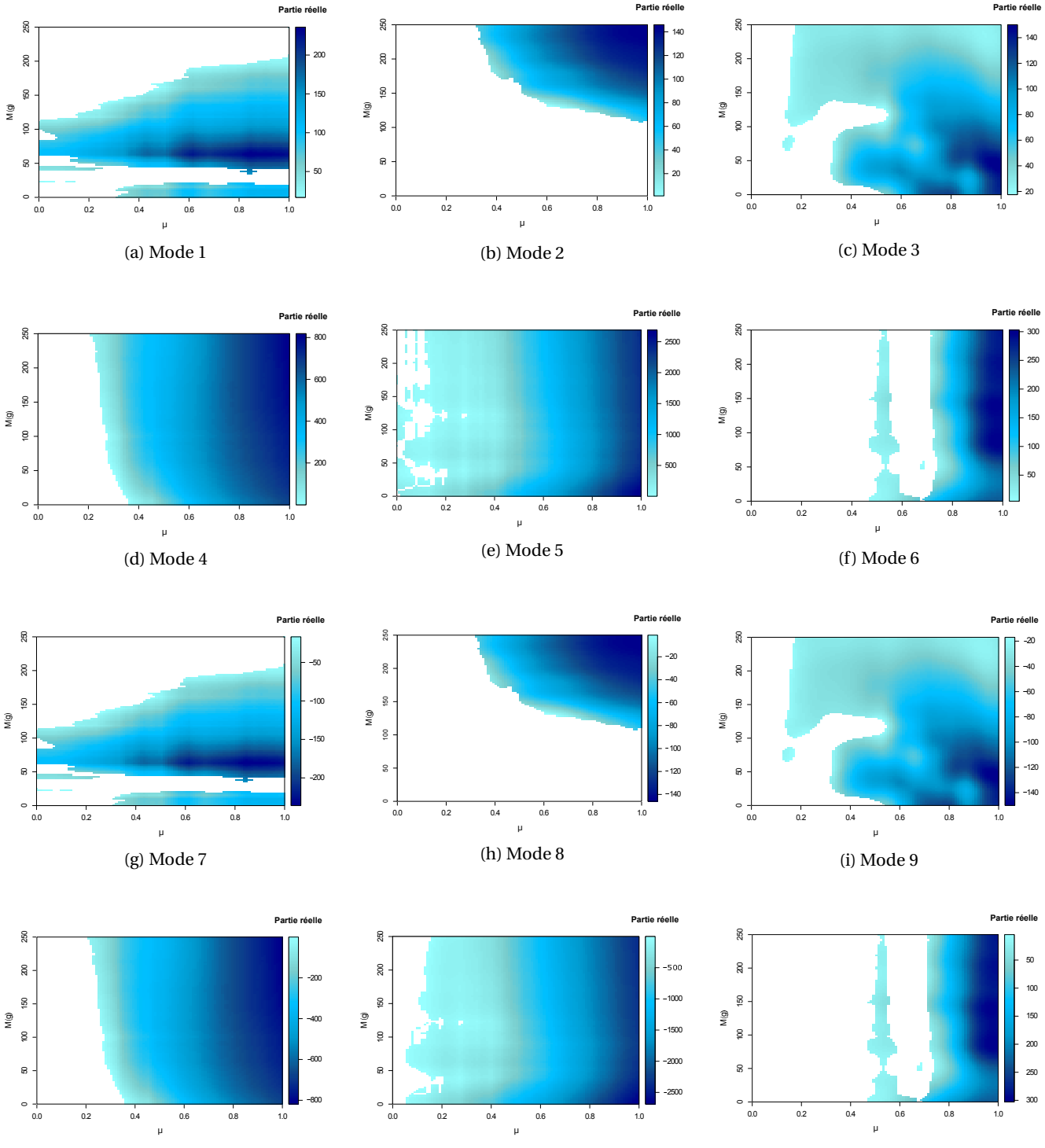
(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3

(d) Mode 4 (e) Mode 5 (f) Mode 6

(g) Mode 7 (h) Mode 8 (i) Mode 9

(j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

FIGURE 5.15 – Évolution des parties réelles obtenues avec le méta-modèle $\mathcal{M}_{a0}$ pour chaque mode avec l'ensemble d'apprentissage correspondant (•) en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M



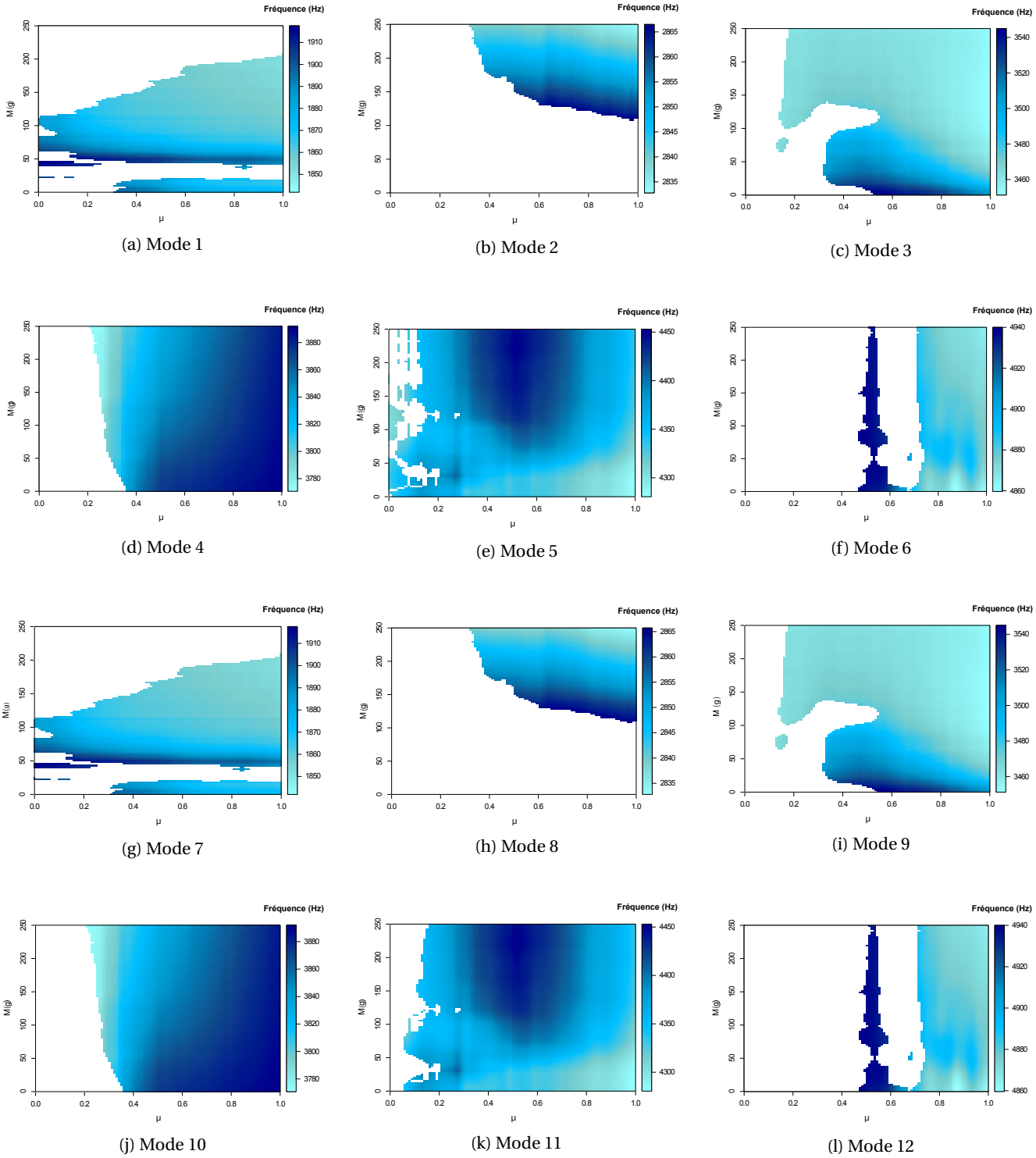
(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3

(d) Mode 4 (e) Mode 5 (f) Mode 6

(g) Mode 7 (h) Mode 8 (i) Mode 9

(j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

FIGURE 5.16 – Évolution des parties réelles obtenues avec le méta-modèle $\mathscr{M}_a$ pour chaque mode en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle)



(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3

(d) Mode 4 (e) Mode 5 (f) Mode 6

(g) Mode 7 (h) Mode 8 (i) Mode 9

(j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

FIGURE 5.17 – Évolution des parties imaginaires avec le méta-modèle $\mathcal{M}_\omega$ pour chaque mode en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle)

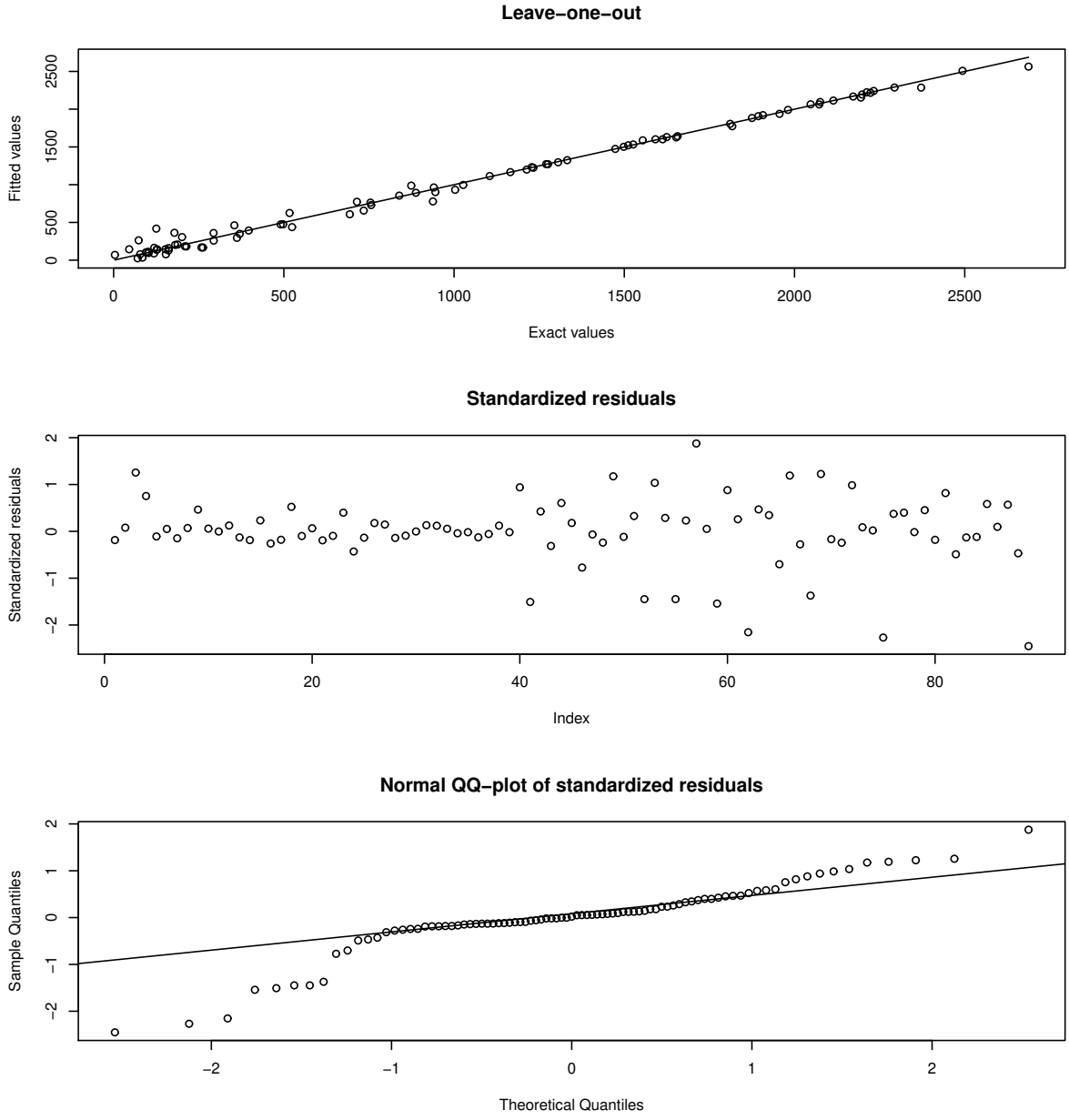
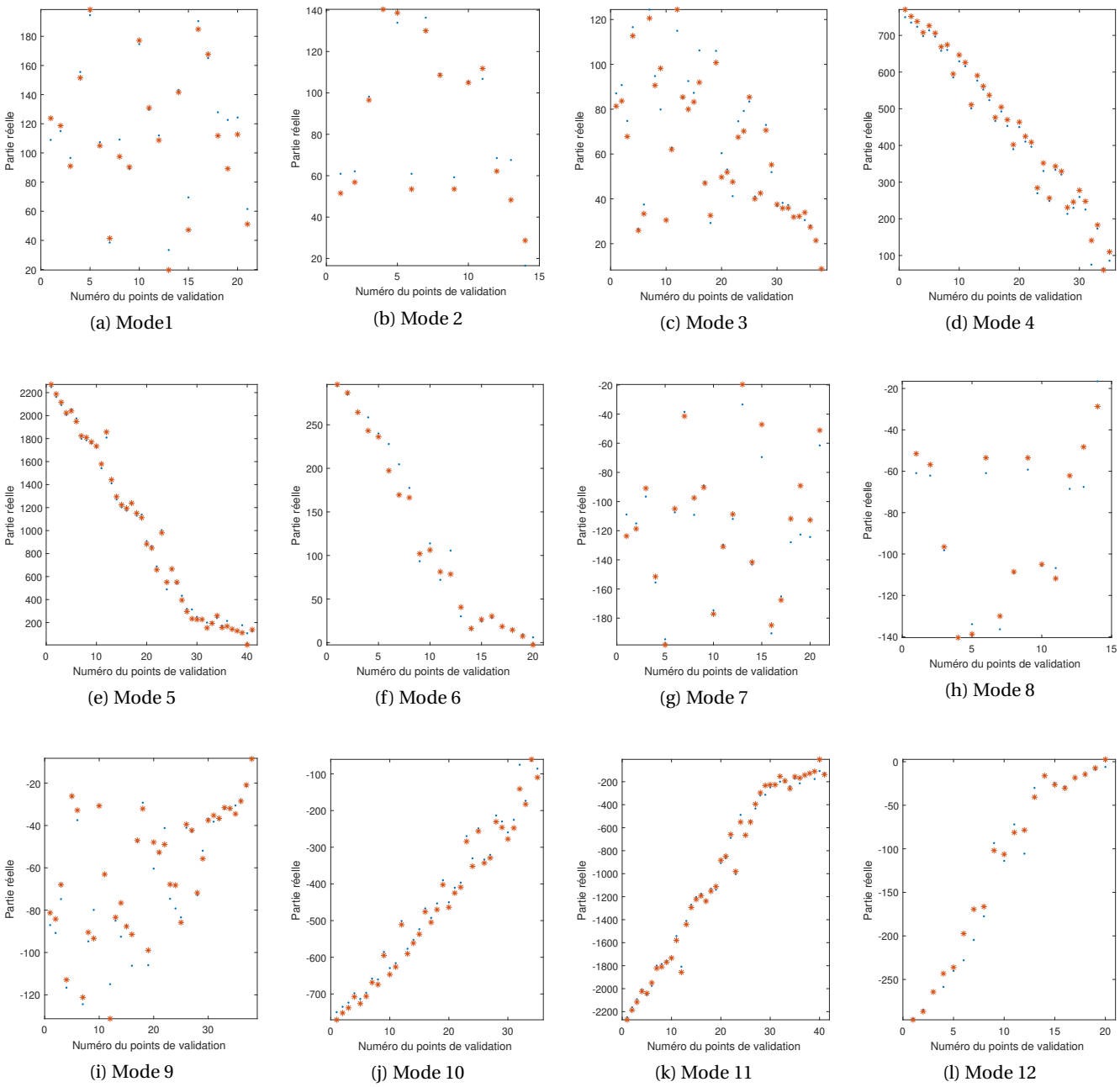


FIGURE 5.18 – Graphiques des indicateurs de qualité du méta-modèle de krigeage de la partie réelle du mode 5 - De haut en bas : Comparaison des valeurs en Leave-One-Out, résidus standardisés, diagramme quantile-quantile

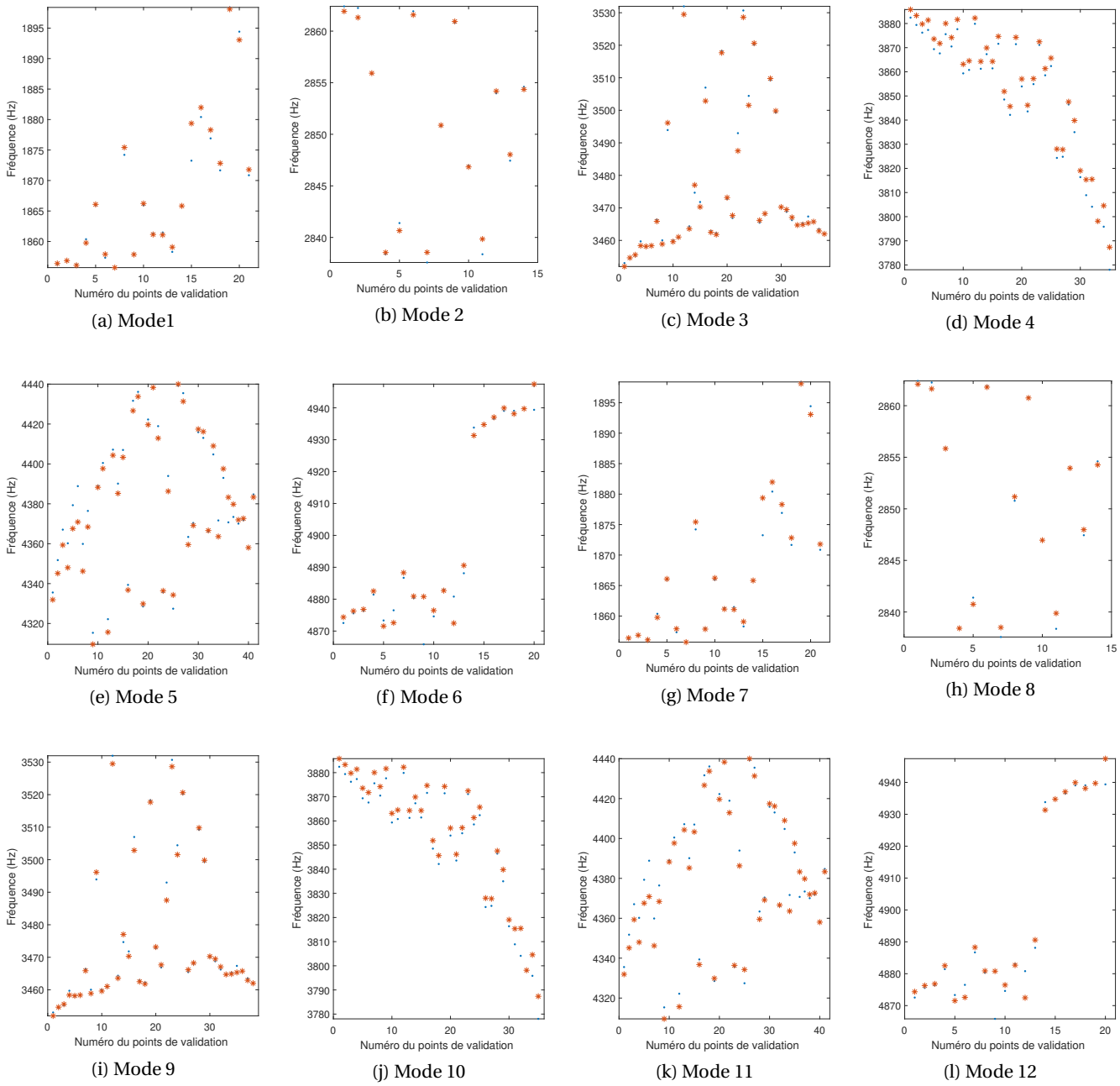


(a) Mode1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4

(e) Mode 5 (f) Mode 6 (g) Mode 7 (h) Mode 8

(i) Mode 9 (j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

FIGURE 5.19 – Comparaison des prédictions sur les parties réelles pour les points de validation pour les différents modes : (•) référence - (∗) krigeage



(a) Mode1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4

(e) Mode 5 (f) Mode 6 (g) Mode 7 (h) Mode 8

(i) Mode 9 (j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

FIGURE 5.20 – Comparaison des prédictions sur les fréquences pour les points de validation pour les différents modes : (•) référence - (∗) krigeage

5.4 Application de la méthode de krigeage au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains

Dans cette partie, un troisième paramètre variable est ajouté à l'étude : les deux masses ne sont plus considérées comme égales et les trois paramètres sont alors : μ, M_1 et M_2. Pour rappel, les plages de variations des paramètres sont données Tableau 5.1. Comme précédemment, un plan d'expériences de dimension 3 est créé. Il s'agit d'un LHS de 258 points répartis de façon uniforme dans l'espace auquel est ajouté des bornes des intervalles de variation. Les CEA correspondantes sont calculées et les modes sont appairés à l'aide d'un critère de MAC sur les zones où les parties réelles des valeurs propres sont non nulles. Les résultats sont présentés Figure 5.21 et les caractéristiques des principaux modes sont résumés Tableau 5.4.

Dans un premier temps, le krigeage sera utilisé pour prédire la propension au crissement en fonction des trois paramètres considérés. Une fois le plan d'expériences créé, les méta-modèles pourront être construits et validés puis utilisés pour prédire l'évolution des valeurs propres du système. Enfin, il sera possible de propager l'incertitude au sein du modèle à partir des méta-modèles créés.

5.4.1 Méthode du krigeage

Comme dans la partie précédente, trois méta-modèles sont construits pour chaque mode. Les deux premiers sont construits à partir du PLEX où les parties réelles des valeurs propres sont non nulles et correspondent aux parties réelles et imaginaires. Ils sont respectivement notés $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$. Ces méta-modèles sont valables uniquement lorsque la partie réelle de la valeur propre est non nulle. Afin de déterminer ces zones de validité, un méta-modèle $\mathscr{M}_{a0}$ est construit pour chaque mode. Son PLEX est constitué des parties réelles identifiées et de valeurs nulles aux points du PLEX où aucun appairage n'a été réalisé. Ainsi, si pour un point de l'espace paramétrique, la valeur absolue de la sortie de $\mathscr{M}_{a0}$ est supérieure à une valeur seuil, alors les méta-modèles $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$ peuvent être utilisés.

Le choix des caractéristiques de krigeage, à savoir le noyau de corrélation et la base de régression, se fait de façon à minimiser l'erreur LOO, ainsi chaque méta-modèle possède ses caractéristiques propres. Les trois indicateurs de validation, à savoir la comparaison LOO, les résidus standardisés et les graphiques quantile-quantile, sont vérifiés afin de s'assurer

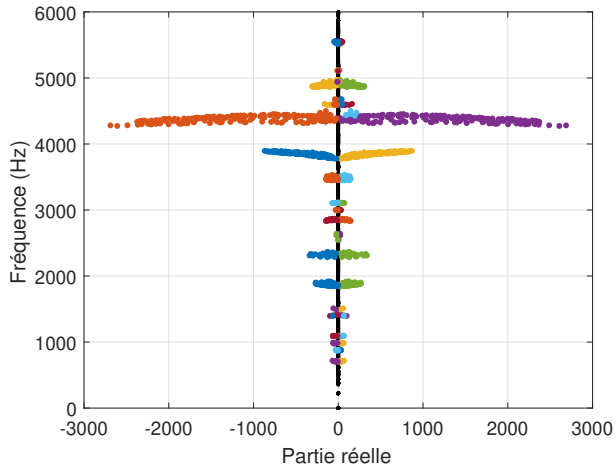


FIGURE 5.21 – Suivi des modes à partir des calculs CEA réalisés sur le PLEX - Cas trois paramètres

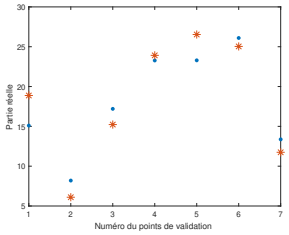
Numéro du mode	Nature	Partie réelle	Fréquence (Hz)	Nombre de points dans PLEX	Nombre de points de validation
1	Instable	30,409	877,51	27	7
2	Instable	268,51	1885,50	129	24
3	Instable	339,13	2311,72	29	4
4	Instable	146,01	2832,79	47	9
5	Instable	145,79	3468,94	203	36
6	Instable	868,25	3896,27	186	34
7	Instable	2687,40	4281,26	215	42
8	Instable	308,97	4871,73	128	19
9	Instable	48,92	5550,36	26	5
10	Stable	-30,40	877,51	27	7
11	Stable	-268,51	1885,50	129	24
12	Stable	-339,13	2311,72	30	4
13	Stable	-146,01	2832,79	47	9
14	Stable	-145,79	3468,94	203	38
15	Stable	-868,25	3896,27	186	34
16	Stable	-2687,40	4281,26	215	42
17	Stable	-308,97	4871,73	128	19
18	Stable	-48,92	5550,36	26	5

TABLEAU 5.4 – Caractéristiques des principaux modes dans le cas trois paramètres incertains

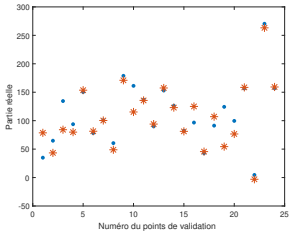
de la fiabilité des méta-modèles.

Ensuite, un ensemble de 50 points de validation a été généré aléatoirement afin de comparer les prédictions du krigeage à une référence. Le nombre de points de validation disponibles pour chaque mode est donné Tableau 5.4. Ces comparaisons permettent de valider les différents méta-modèles construits. Elles sont données Figure 5.22 pour les parties réelles et Figure 5.23 pour les fréquences. Il apparait clairement que les prédictions données par le krigeage sont très proches des valeurs exactes, aussi bien dans le cas des parties réelles que des parties imaginaires. Malgré des surfaces de réponse qui semblent parfois complexes, comme pour les modes 2 et 14, les prédictions faites par le krigeage restent très fiables. Il existe cependant quelques cas pour lesquels les prédictions peuvent être éloignées des valeurs exactes, comme dans le cas de la partie réelle du mode 18. Mais cette faible qualité de prédiction est systématiquement associée à un PLEX associé de petite taille, 26 points dans le cas du mode 13. La quantité d'information disponible pour créer le méta-modèle est trop limitée, ce qui impacte directement la qualité de la prédiction. Cependant, on peut voir que même si la qualité de la prédiction n'est pas optimale, les tendances sont correctement estimées permettant alors de prendre en compte ces méta-modèles dans la suite de l'étude.

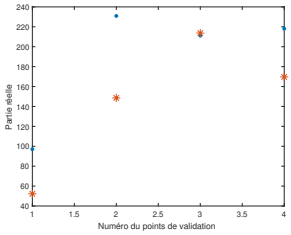
La dimension 3 rend la visualisation des données plus complexe qu'en dimension 2. Ainsi, les évolutions des parties réelles des valeurs propres et des fréquences de quelques modes sont respectivement tracées en fonction de M_1 et M_2 pour des valeurs de μ fixées, à savoir $\mu = \{0.3, 0.5, 0.7\}$, Figure 5.24 et Figure 5.25. Les zones blanches correspondent aux zones où les parties réelles des valeurs propres sont nulles.



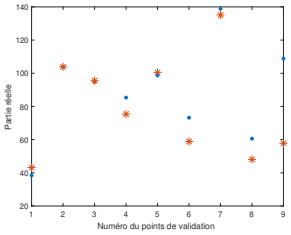
(a) Mode 1



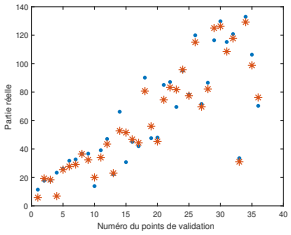
(b) Mode 2



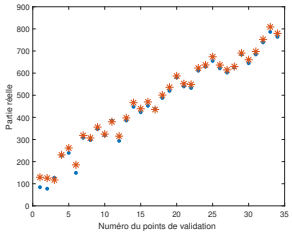
(c) Mode 3



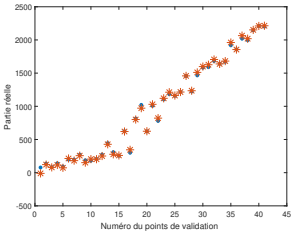
(d) Mode 4



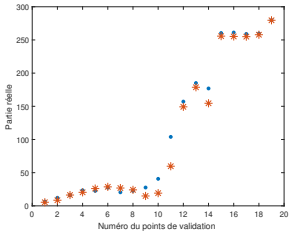
(e) Mode 5



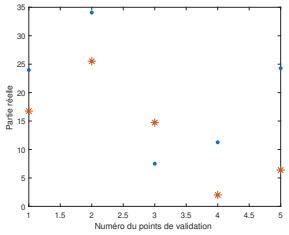
(f) Mode 6



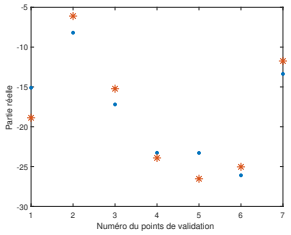
(g) Mode 7



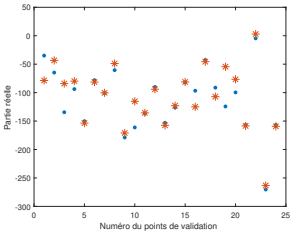
(h) Mode 8



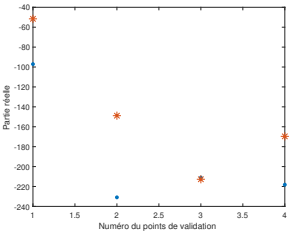
(i) Mode 9



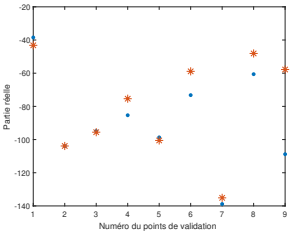
(j) Mode 10



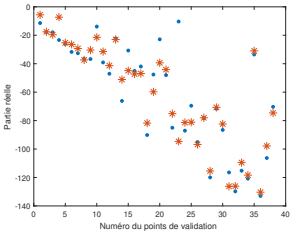
(k) Mode 11



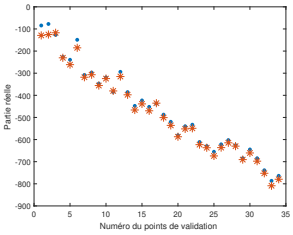
(l) Mode 12



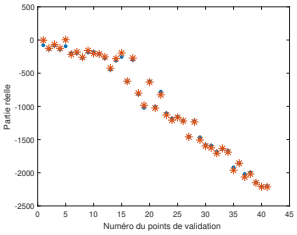
(m) Mode 13



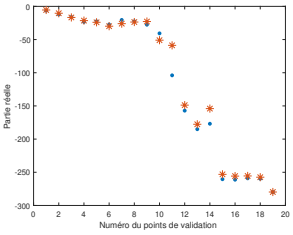
(n) Mode 14



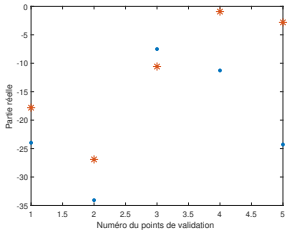
(o) Mode 15



(p) Mode 16

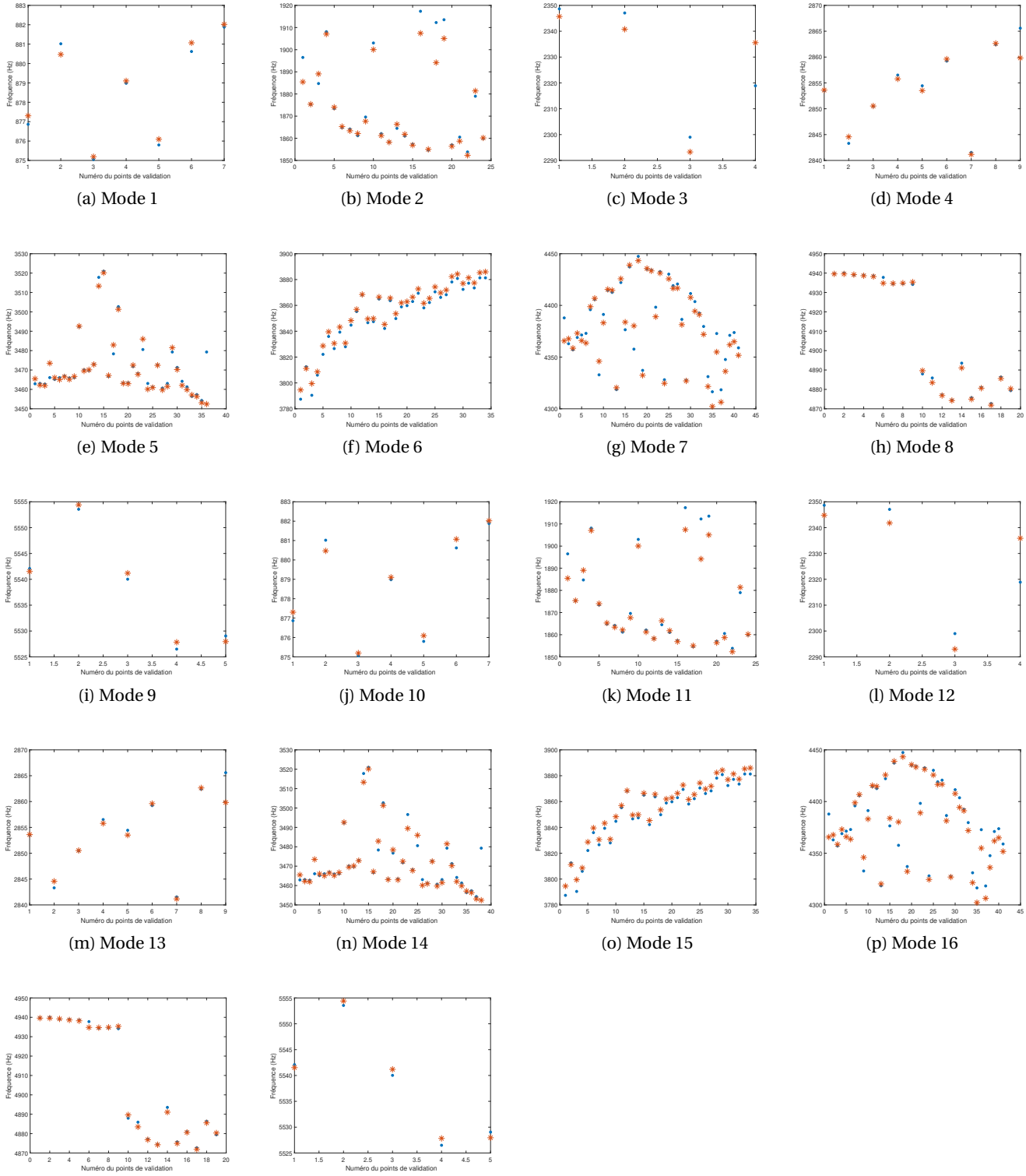


(q) Mode 17



(r) Mode 18

FIGURE 5.22 – Comparaison des parties réelles des différents modes prédites par le krigeage (∗) et celles de référence (•) dans le cas trois paramètres



(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4

(e) Mode 5 (f) Mode 6 (g) Mode 7 (h) Mode 8

(i) Mode 9 (j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

(m) Mode 13 (n) Mode 14 (o) Mode 15 (p) Mode 16

(q) Mode 17 (r) Mode 18

FIGURE 5.23 – Comparaison des fréquences des différents modes prédites par le krigeage (∗) et celles de référence (•) dans le cas trois paramètres

Les influences des masses M_1 et M_2 sur la stabilité du système dépendent des modes et de la valeur de μ. Par exemple, le mode 8 est toujours stable lorsque $\mu = 0.3$ et toujours instable lorsque $\mu = 0.5$. Dans ce dernier cas, l'ajout d'une masse M_1 tend à augmenter la partie réelle. A $\mu = 0.7$, ce mode retrouve une zone de stabilité. En particulier, si la masse M_2 est supérieure à 150 g, alors le mode est toujours stable. Cependant, la valeur maximale de la partie réelle est supérieure au cas $\mu = 0.5$ (85 contre 35). La zone où le mode est le plus instable, au sens où la partie réelle est maximale, est identique pour les cas $\mu = 0.5$ et $\mu = 0.7$. Elle est située autour du point $M_1 = 225$ g et $M_2 = 20$ g. Dans le cas du mode 2, la zone de stabilité est plus complexe et est constituée de plusieurs zones distinctes. L'augmentation de μ induit une expansion de la zone d'instabilité. Par ailleurs, M_2 a relativement peu d'influence sur la partie réelle du système, alors que l'augmentation de M_1 a tendance à stabiliser le système. Ainsi, lorsque M_1 est supérieure à 150 g et que $\mu = 0.3$ alors le système est toujours stable. Lorsque $\mu = 0.7$, si M_1 est supérieure à 220 g alors le mode est toujours stable. Le mode 4 est quant à lui presque toujours stable lorsque $\mu = 0.3$. Lorsque μ augmente, une zone d'instabilité pour ce mode apparait et le mode devient instable lorsque M_1 et M_2 augmentent simultanément. Ces différentes remarques illustrent la sensibilité propre de chaque mode à ces modifications de masse. Si certains ajouts de masse peuvent être stabilisants pour certains modes, ils sont déstabilisants pour d'autres.

En observant les parties imaginaires, des remarques similaires peuvent être faites. L'ajout d'une masse M_1 et/ou M_2 modifie plus ou moins les fréquences de chaque mode. Certains modes sont plus sensibles à une évolution de M_1, comme le mode 2, alors que d'autres sont sensibles à une évolution simultanée de M_1 et M_2, comme le mode 4. Enfin, dans certains cas, la sensibilité aux modifications de masse dépend de la valeur de μ. Par exemple, pour le mode 6, lorsque $\mu = 0.3$, la fréquence est sensible à une modification de M_1, alors que lorsque $\mu = 0.7$, les deux masses sont influentes.

Ces observations peuvent être traduites par les indices de Sobol donnés Figure 5.26 pour les parties réelles et Figure 5.27 pour les parties imaginaires. Ainsi la partie réelle du mode 6, dépend uniquement du coefficient de frottement μ et n'est pas sensible aux masses M_1 et M_2. Dans le cas du mode 2, l'indice d'ordre 1 lié à la masse M_1 est beaucoup plus élevé que les deux autres indices de Sobol de premier ordre. Ceci signifie que la partie réelle du mode 2 est surtout sensible à une variation de la masse M_1. Ceci est confirmé par les Figures 5.24 (d-f) où les variation de μ et M_2 influent peu la partie réelle alors qu'une variation de M_1 a un fort impact sur celle-ci. Dans le cas du mode 4, les trois indices de premier ordre sont relativement proches. En effet ils sont compris entre 0.19 et 0.4, montrant alors que tous les paramètres influent la partie réelle. Cependant, la différence entre les indices totaux et les indices de premier ordre est relativement importante et montre que beaucoup d'effets sont couplés.

Les influences des différents paramètres sur les fréquences sont souvent différentes de celles sur les parties réelles. Par exemple pour le mode 1, le coefficient de frottement μ est le paramètre avec le plus d'impact sur la partie réelle alors que son influence est quasiment nulle sur la fréquence. Celle-ci est principalement sensible à des variations de la masse M_2.

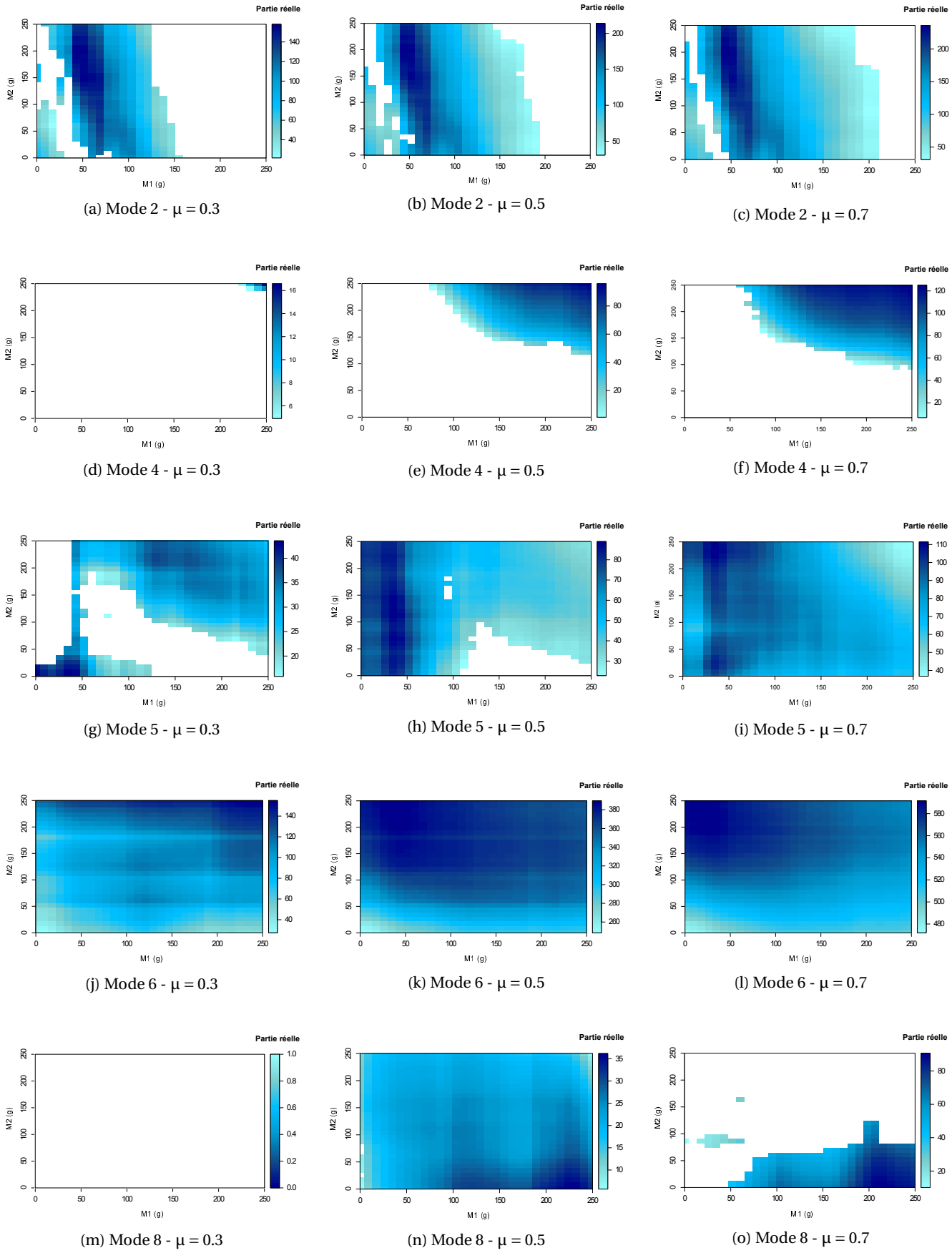
Ces résultats sur la propension au crissement montrent l'influence complexe des différents paramètres sur la stabilité du système, illustrant alors la nécessité de mener des études approfondies. Les zones d'instabilité générées par les différents modes ne sont pas triviales et mettent en évidence la difficulté pour un ingénieur de trouver intuitivement le

jeu de paramètres permettant de diminuer le crissement sur un système de frein.

Cependant, le grand nombre de paramètres à traiter et la complexité du problème soulignent tout l'intérêt de la stratégie présentée ici, basée sur la méta-modélisation, qui permet d'obtenir les différentes influences pour un coût numérique maitrisé. En effet, moins de 250 h de calculs ont été nécessaires pour obtenir les résultats présentés ici. Une étude déterministe aurait nécessité 10^6 h de calculs pour obtenir la même quantité d'information.

Par ailleurs, ces résultats illustrent la validité de la stratégie développée ici adaptée au traitement de cas industriels. En effet, les différents résultats obtenus montrent qu'il est possible d'utiliser le krigeage pour la prédiction de l'évolution des valeurs propres complexes dans le cas d'un modèle éléments finis et la capacité de la méthode à traiter des cas avec plus de paramètres dans l'espace de conception. Le suivi des modes étant limité à leur zone d'instabilité, il est nécessaire de créer une fonction permettant de déterminer cette zone afin de pouvoir par la suite utiliser les différents méta-modèles dans leur plage de validité. Les résultats obtenus avec le krigeage ont permis de faire face à ces contraintes et montrent des bons niveaux de prédiction sur les valeurs propres.

Finalement, il est bon de noter que l'utilisation de la méta-modélisation pour la prédiction de l'évolution des valeurs propres permet de plus de potentiellement réaliser des études de sensibilité sur le modèle. Ce type d'études ne serait pas envisageable sur un modèle éléments finis car cela représenterait un coût numérique trop important. L'intérêt d'une telle étude est d'identifier les paramètres les plus influents sur les différents modes. En d'autres termes, pour chaque mode il est possible d'identifier les leviers de conception les plus efficaces.



(a) Mode 2 - μ = 0.3 (b) Mode 2 - μ = 0.5 (c) Mode 2 - μ = 0.7

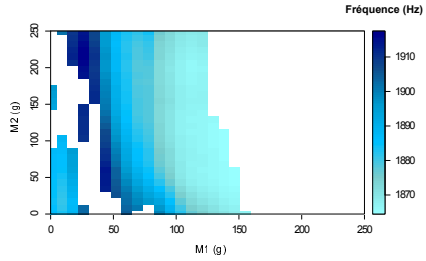
(d) Mode 4 - μ = 0.3 (e) Mode 4 - μ = 0.5 (f) Mode 4 - μ = 0.7

(g) Mode 5 - μ = 0.3 (h) Mode 5 - μ = 0.5 (i) Mode 5 - μ = 0.7

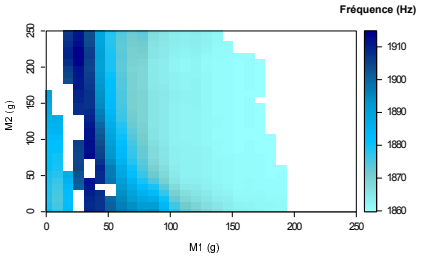
(j) Mode 6 - μ = 0.3 (k) Mode 6 - μ = 0.5 (l) Mode 6 - μ = 0.7

(m) Mode 8 - μ = 0.3 (n) Mode 8 - μ = 0.5 (o) Mode 8 - μ = 0.7

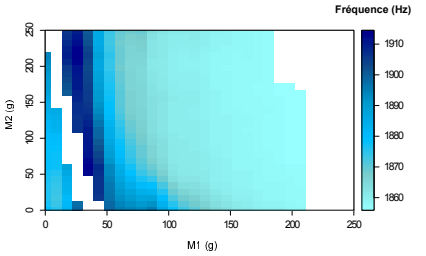
FIGURE 5.24 – Évolution des parties réelles de quelques modes instables en fonction de M_1 et M_2 pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ : de gauche à droite : μ = 0.3, μ = 0.5 et μ = 0.7 - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle)



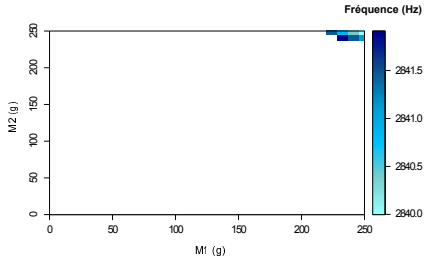
(a) Mode 2 - $\mu = 0.3$



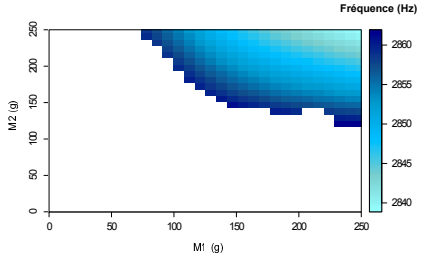
(b) Mode 2 - $\mu = 0.5$



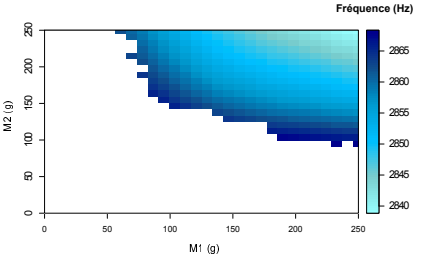
(c) Mode 2 - $\mu = 0.7$



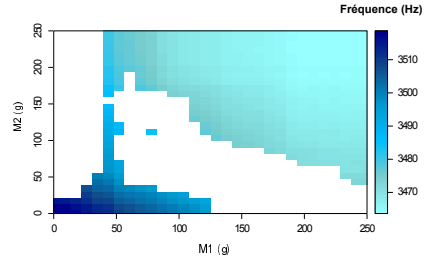
(d) Mode 4 - $\mu = 0.3$



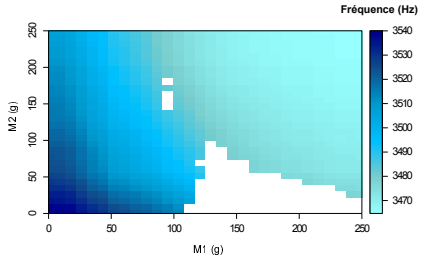
(e) Mode 4 - $\mu = 0.5$



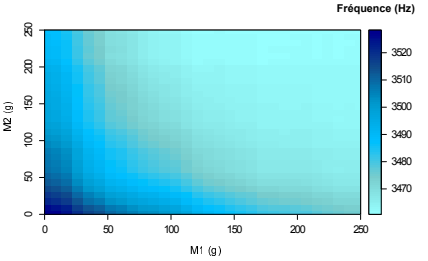
(f) Mode 4 - $\mu = 0.7$



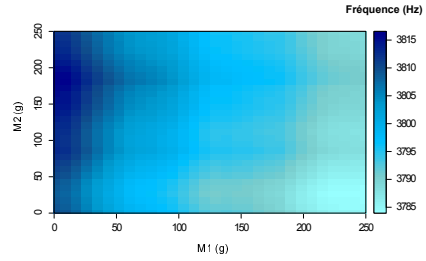
(g) Mode 5 - $\mu = 0.3$



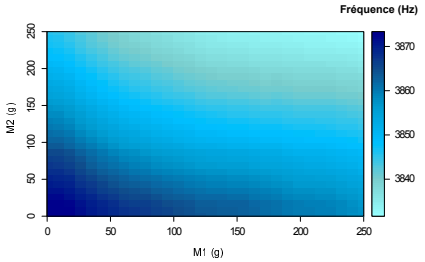
(h) Mode 5 - $\mu = 0.5$



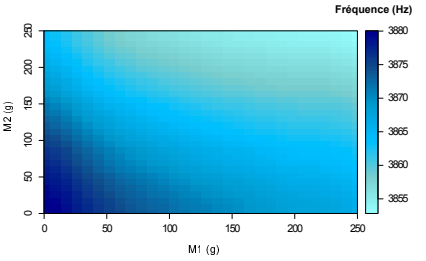
(i) Mode 5 - $\mu = 0.7$



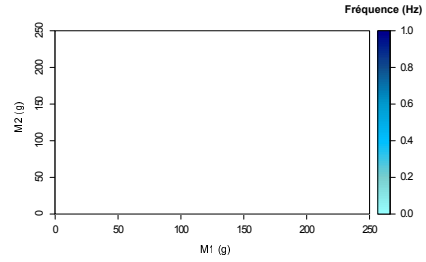
(j) Mode 6 - $\mu = 0.3$



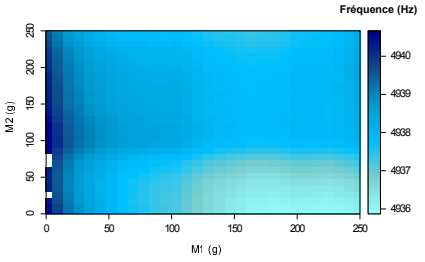
(k) Mode 6 - $\mu = 0.5$



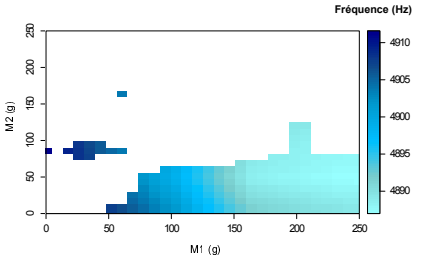
(l) Mode 6 - $\mu = 0.7$



(m) Mode 8 - $\mu = 0.3$

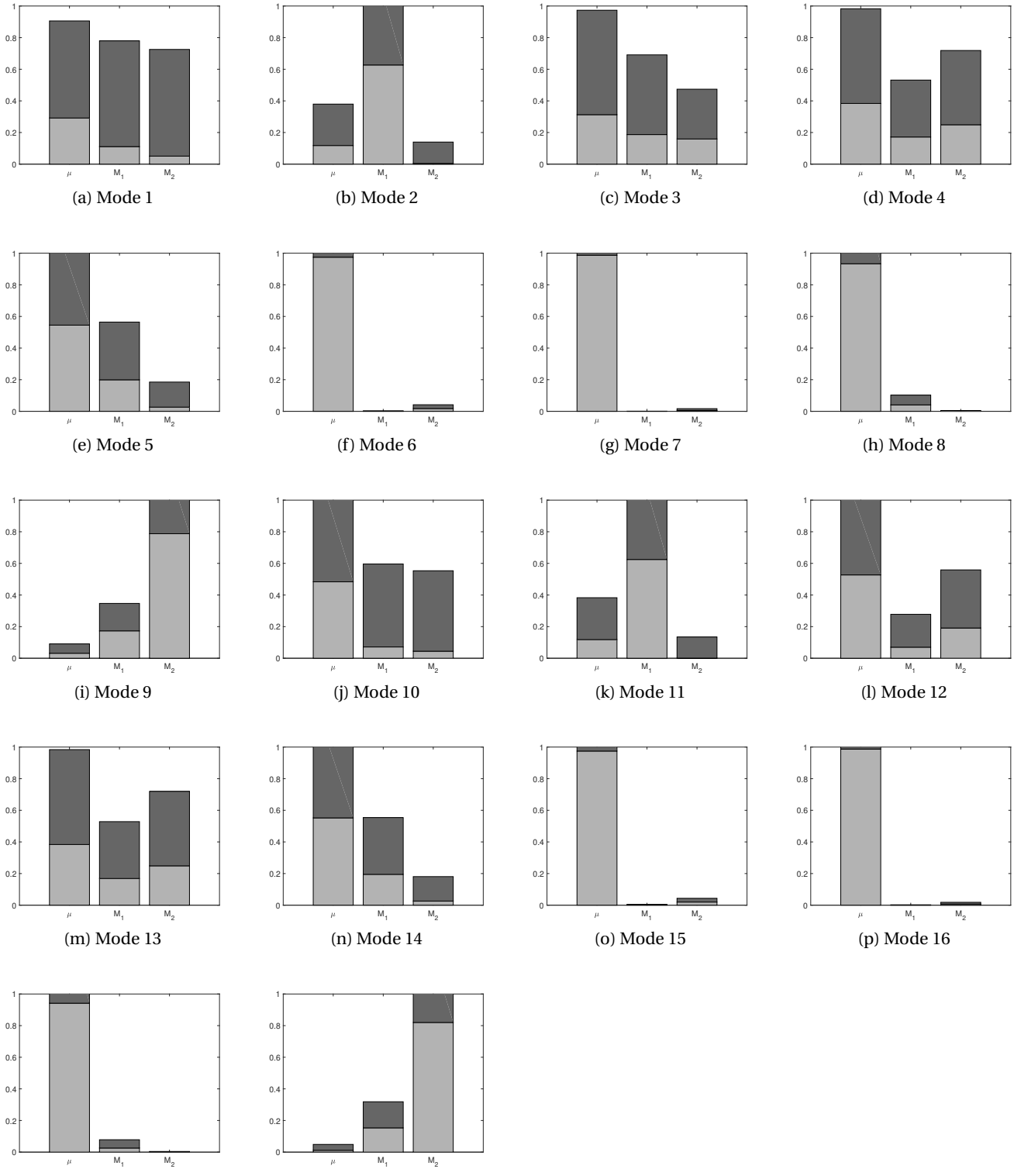


(n) Mode 8 - $\mu = 0.5$



(o) Mode 8 - $\mu = 0.7$

FIGURE 5.25 – Évolution des fréquences de quelques modes instables en fonction de M_1 et M_2 pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ : de gauche à droite : $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ et $\mu = 0.7$ - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle)



(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4

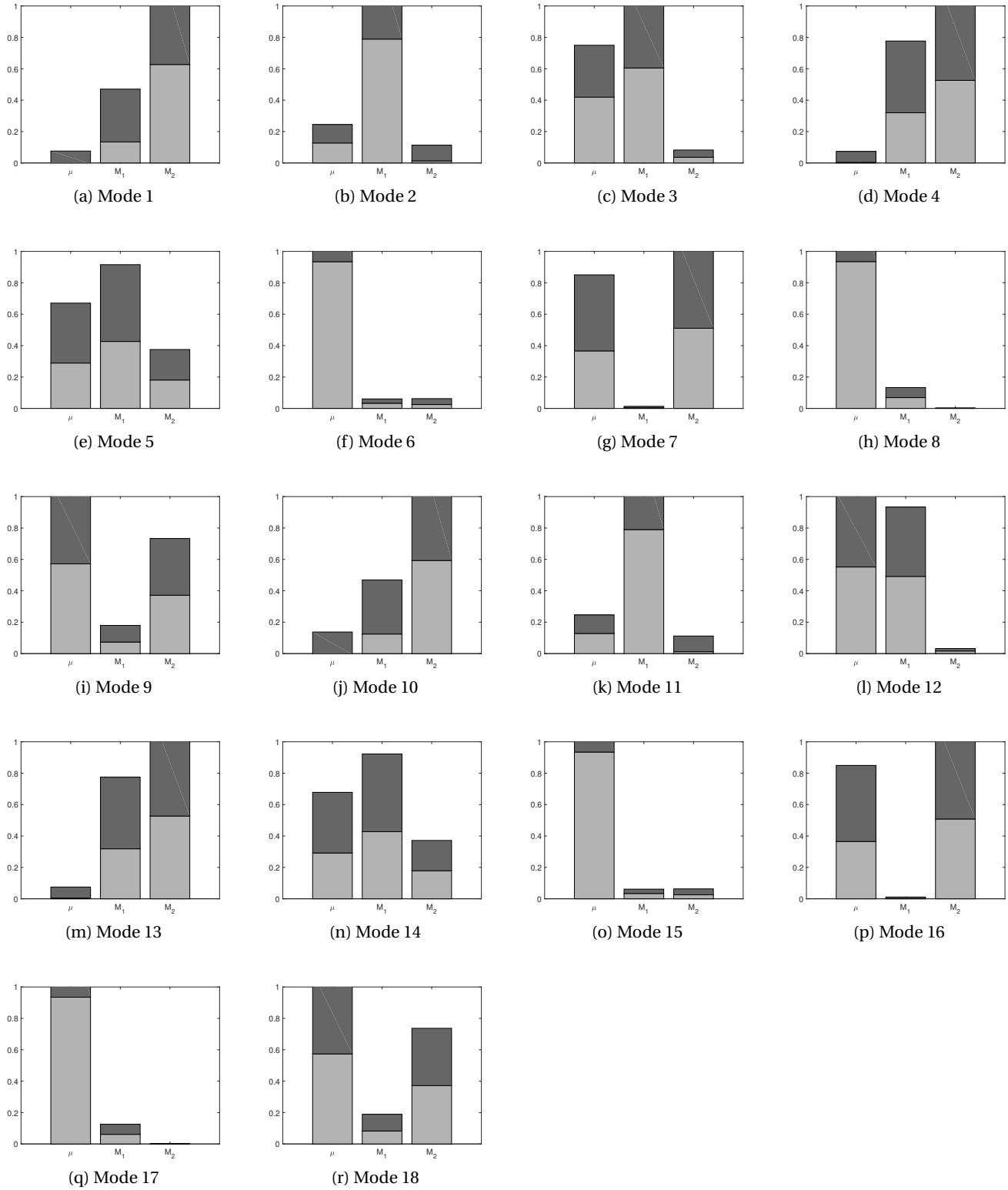
(e) Mode 5 (f) Mode 6 (g) Mode 7 (h) Mode 8

(i) Mode 9 (j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

(m) Mode 13 (n) Mode 14 (o) Mode 15 (p) Mode 16

(q) Mode 17 (r) Mode 18

FIGURE 5.26 – Indice de Sobol des parties réelles des différents modes pour les différents modes - Méta-modèle $\mathscr{M}_a$ - En gris clair indices de premier ordre, en gris foncé les indices totaux



(a) Mode 1 (b) Mode 2 (c) Mode 3 (d) Mode 4

(e) Mode 5 (f) Mode 6 (g) Mode 7 (h) Mode 8

(i) Mode 9 (j) Mode 10 (k) Mode 11 (l) Mode 12

(m) Mode 13 (n) Mode 14 (o) Mode 15 (p) Mode 16

(q) Mode 17 (r) Mode 18

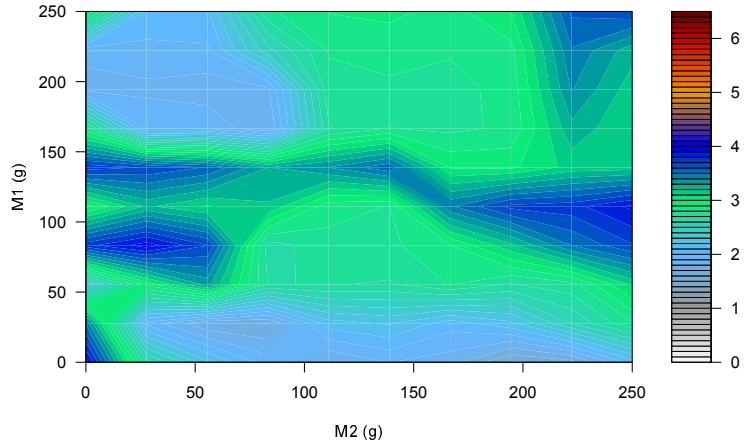
FIGURE 5.27 – Indice de Sobol des parties imaginaires des différents modes pour les différents modes - Méta-modèle $\mathscr{M}_\omega$ - En gris clair indices de premier ordre, en gris foncé les indices totaux

5.4.2 Propagation d'incertitude et influence de la probabilité choisie

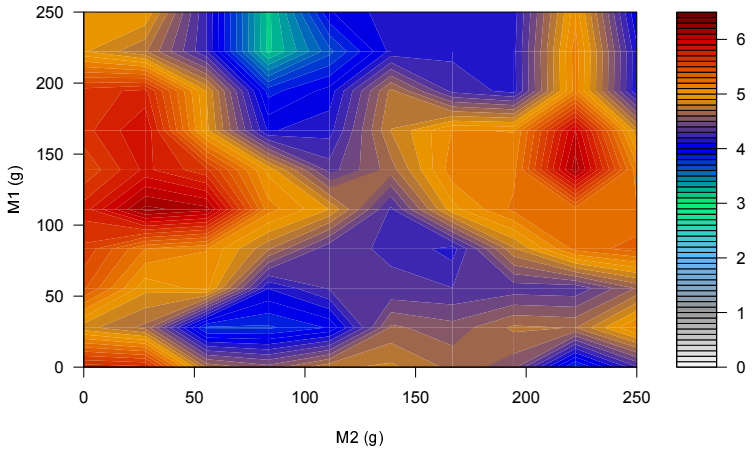
Dans la partie précédente, les différents méta-modèles permettant de prédire l'évolution des parties réelles et des parties imaginaires des valeurs propres ont été créés et validés. Ils permettent d'accéder à l'influence des différents paramètres sur les différentes sorties du modèle. Cependant, certains paramètres du problème peuvent être considérés comme aléatoires, tel que le coefficient de frottement μ. Ainsi, si celui-ci est décrit par une loi de probabilité, il est possible de propager l'incertitude au sein du modèle en effectuant des tirages de Monte Carlo directement sur le méta-modèle puisque son coût numérique est négligeable. Ici, trois distributions sont considérées pour le coefficient de frottement, à savoir une loi uniforme et deux lois beta avec les paramètres de forme (2,8) et (8,2), respectivement notée B(2,8) et B(8,2). Une grille de taille 10×10 est prise pour les masses M_1 et M_2 et pour chaque couple (M_1, M_2), 1000 tirages de μ générés par LHS et suivant les différentes distributions considérées sont réalisés. Le nombre moyen d'instabilités ainsi que la moyenne de la somme des parties réelles positives sont déterminés et donnés Figures 5.28 et 5.29.

Dans un premier temps, on remarque l'effet important de la loi choisie pour μ sur les résultats. Ainsi, avec une loi B(2,8), le système présente au maximum une moyenne de 4 instabilités et au minimum 1.5 (voir Figure 5.28a), alors que si une loi B(8,2) est choisie, alors le système a au minimum 3 instabilités en moyenne et au maximum 6 (voir Figure 5.28b). L'influence sur la moyenne de la somme des parties réelles est aussi forte. Dans le cas d'une distribution B(2,8), la moyenne varie entre 200 et 600, alors que dans le cas d'une distribution B(8,2) la moyenne varie entre 1250 et 2000. Par ailleurs, les évolutions du nombre moyen d'instabilités et de la moyenne des partie réelles positives dépend aussi de la distribution choisie. Par exemple, dans le cas d'une distribution B(2,8), d'une masse M_1 de 50 g et d'une masse M_2 de 200 g, alors le nombre moyen d'instabilités est minimal et égal à 1.5. Dans le cas d'une distribution B(8,2) ou uniforme, ce minimum sera atteint pour une masse M_1 de 100 g et une masse M_2 de 225 g. De même pour la valeur moyenne de la somme des parties réelles positives, un minimum est observé dans le cas d'une distribution B(2,8) autour du point $(M_1, M_2) = (110\,\text{g}, 250\,\text{g})$ et les évolutions autour de ce minimum sont faibles. Dans le cas des distributions B(8,2) et uniforme, ce minimum est situé autour du point $(M_1, M_2) = (80\,\text{g}, 250\,\text{g})$ avec des évolutions beaucoup plus fortes de la moyenne de la somme des parties réelles positives autour de ce point.

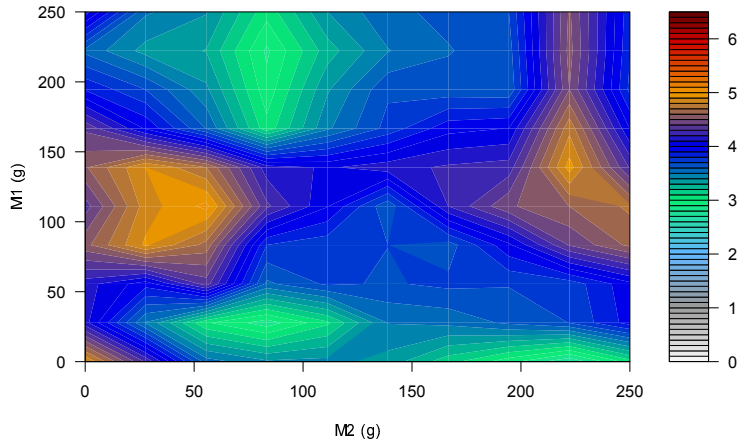
Pour conclure, ces résultats démontrent de façon évidente l'importance d'identifier dès la phase amont et de façon la plus précise possible les lois de probabilités des paramètres physiques identifiés comme aléatoires lors d'une étude de crissement.



(a)

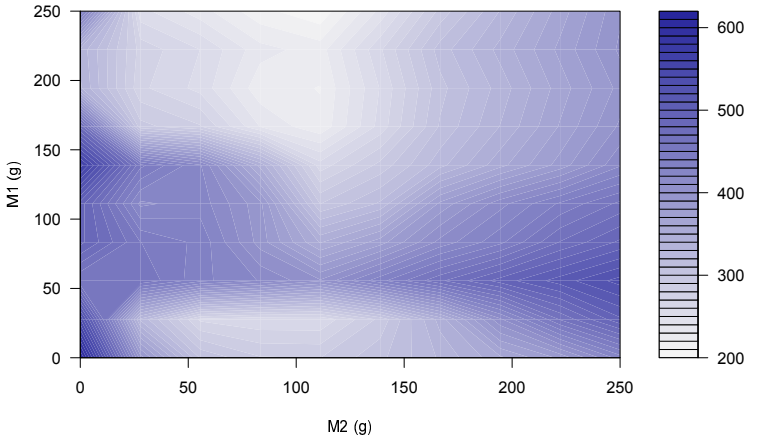


(b)

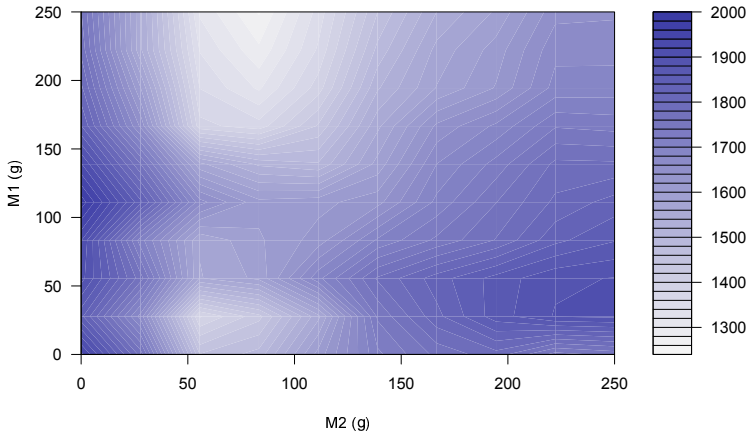


(c)

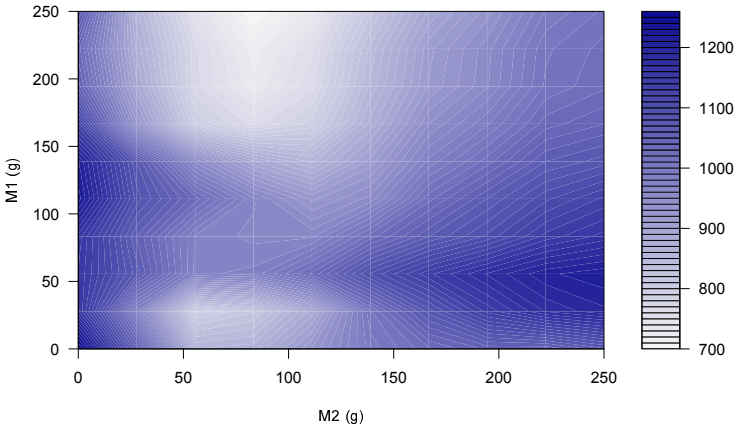
FIGURE 5.28 – Moyenne du nombre d'instabilités en fonction de M_1 et M_2 pour différentes lois de probabilité sur μ : (b) loi B(2,8) , (b) loi B(8,2), (c) loi uniforme



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.29 – Moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction de M_1 et M_2 pour différentes lois de probabilité sur μ : (b) loi B(2,8) , (b) loi B(8,2), (c) loi uniforme

5.5 Application de la méthode hybride au frein industriel - Cas à trois paramètres incertains

Dans cette partie, trois paramètres incertains sont pris en compte dans l'étude, à savoir le coefficient de frottement μ et les masses M_1 et M_2. Comme expliqué dans la partie 5.1, le coefficient de frottement μ est un paramètre subi qui dépend de l'environnement et est de nature aléatoire, alors que les masses M_1 et M_2 sont des paramètres de conception et sont paramétriques. Dans la partie précédente, les trois paramètres étaient traités identiquement pour créer un méta-modèle avec la technique du krigeage. Afin de propager l'incertitude associée au coefficient de frottement μ, il était alors nécessaire de réaliser des tirages de Monte Carlo sur le méta-modèle créé. Il s'agit ici d'utiliser la méthode associant chaos polynomial généralisé et krigeage présentée au chapitre précédent, afin de modéliser d'un côté le coefficient de frottement μ à l'aide du chaos polynomial généralisé, et de l'autre les variables paramétriques avec le krigeage.

Pour cela, trois lois sont considérées pour le coefficient de frottement μ, à savoir une loi uniforme, une loi beta de paramètres 8 et 2 (notée B(8,2)) et une loi beta de paramètres 2 et 8 (notée B(2,8)). Afin d'être en accord avec des essais expérimentaux, l'intervalle de variation de μ est restreint à $[0.3, 0.7]$. Pour rappel, les plages de variation des masses M_1 et M_2 sont données Tableau 5.1. Ainsi, un premier plan d'expériences, composé de 50 couples de masses (M_1, M_2) est créé pour le krigeage, et un plan d'expériences de 15 points pour le coefficient de frottement μ est créé pour le chaos polynomial. Au final, un total de $50 \times 15 = 750$ points est utilisé pour créer le méta-modèle hybride. Pour chaque loi, un plan d'expériences est généré et les CEA associées sont calculées. Les plans complexes obtenus après le suivi des modes pour les trois cas sont présentés Figure 5.30. Les différents modes à partie réelle non nulle relevés dans les trois cas sont résumés Tableau 5.5. Pour chaque loi, on donne la partie réelle la plus éloignée de l'axe des imaginaires relevée ainsi que le nombre de points disponibles dans le plan d'expériences général. Seuls les modes avec plus de 50 points sont conservés.

L'influence de la loi associée au coefficient de frottement μ sur la stabilité du système est évidente. En effet, certains modes ne sont identifiés que pour certaines lois, par exemple le mode à 4880 Hz n'est instable que pour les lois uniforme et B(2,8). De même, le nombre de points disponibles dans le PLEX varie selon la loi considérée.

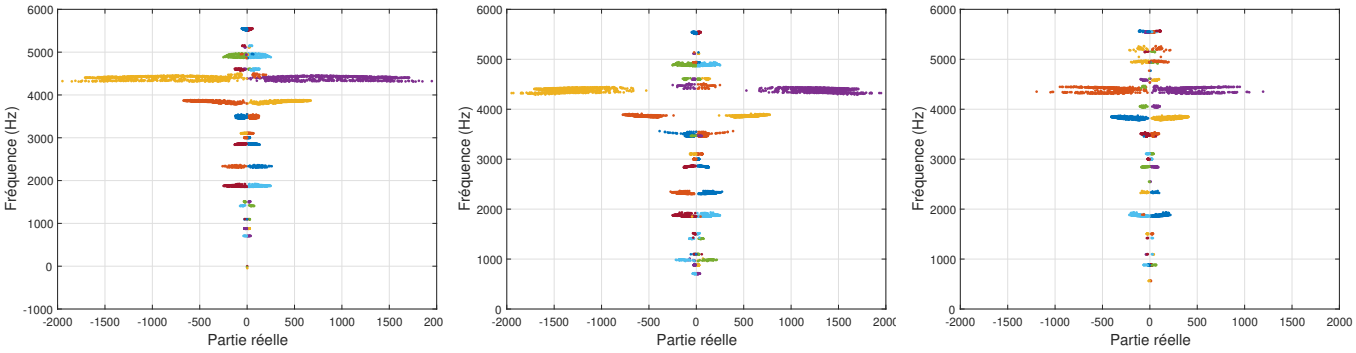


FIGURE 5.30 – Suivi des modes à partir des CEA réalisées sur les PLEX - Loi uniforme (a) - Loi B(8,2) (b) - Loi B(2,8) (c)

N° mode	Fréquence (Hz)	Nature	Loi Uniforme		Loi B(8,2)		Loi B(2,8)	
			Partie réelle	Nb. pts PLEX	Partie réelle	Nb. pts PLEX	Partie réelle	Nb. pts PLEX
1	879,69	Instable	-	-	27,513	112	22,915	100
2	1855,11	Instable	248,27	403	248,27	475	217,04	324
3	2853,17	Instable	131,1	168	131,1	220	89,53	80
4	3460,82	Instable	124,06	601	387,79	696	96,55	459
5	3863,48	Instable	670,17	741	774,23	750	406,45	678
6	4395,70	Instable	1948,9	739	1948,9	750	1194,9	674
7	4879,53	Instable	249,94	409	-	-	82,575	275
8	5541,13	Instable	-	-	-	-	54,925	144
9	879,69	Stable	-	-	-27,513	112	-22,915	100
10	1855,11	Stable	-248,27	403	-248,27	475	-217,04	324
11	2853,17	Stable	-131,1	168	-131,1	220	-89,53	80
12	3460,82	Stable	-124,06	601	-387,79	696	-96,55	459
13	3863,48	Stable	-670,17	741	-774,23	750	-406,45	678
14	4395,70	Stable	-1948,9	739	-1948,9	750	-1194,9	674
15	4879,53	Stable	-249,94	409	-	-	-82,575	275
16	5541,13	Stable	-	-	-	-	-54,925	144

TABLEAU 5.5 – Modes instables identifiés pour les différents plan d'expériences avec leur fréquence, leur partie réelle et le nombre de points dans chaque plan d'expériences pour chaque loi

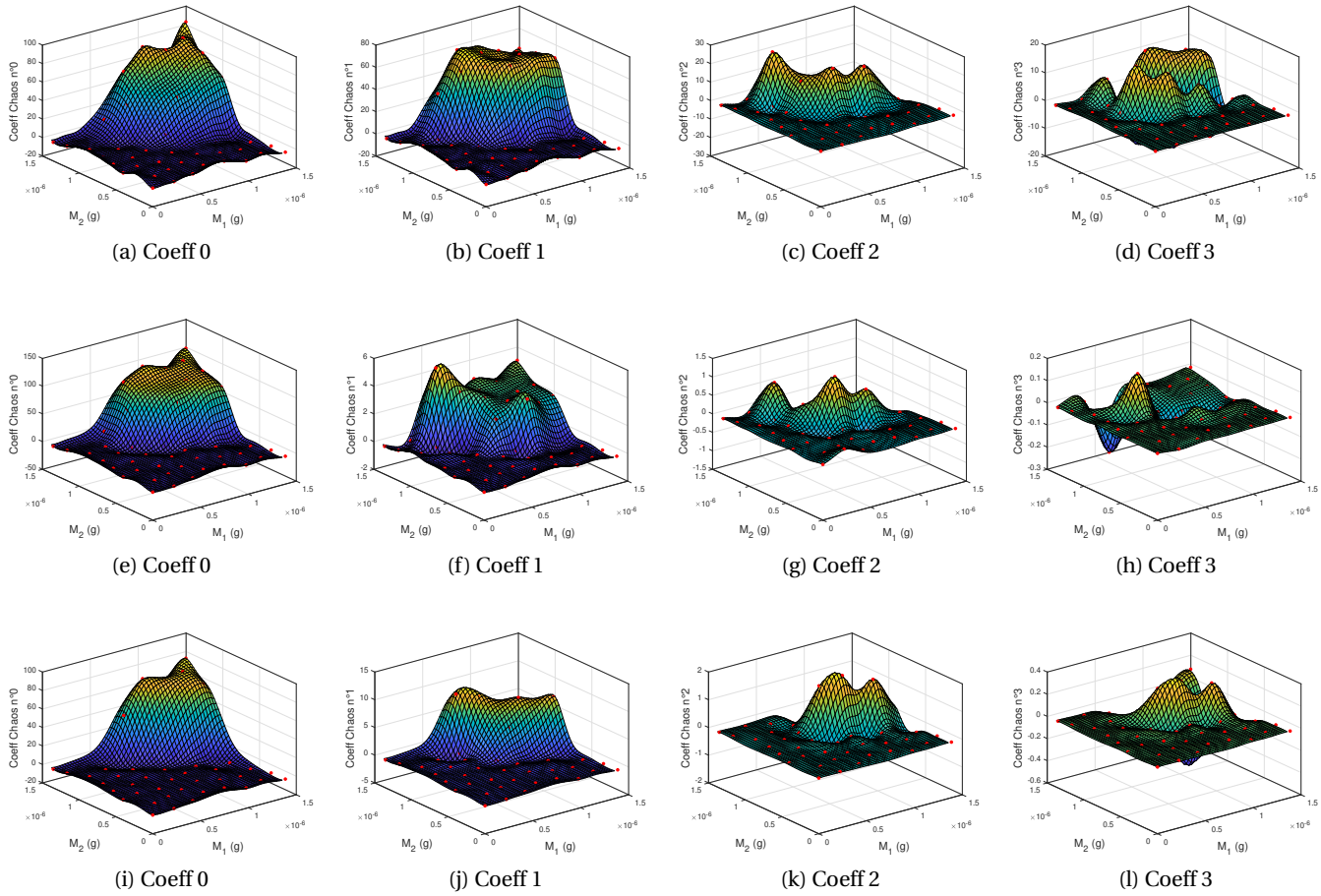
	$\mathscr{M}_\omega$	$\mathscr{M}_a$	$\mathscr{M}_{a0}$
Loi uniforme	4	5	7
Loi B(8,2)	5	5	3
Loi B(2,8)	3	3	3

TABLEAU 5.6 – Degré du chaos polynomial pour les différentes lois et les différents méta-modèles

Une stratégie similaire à celle employée dans les parties précédentes est employée, c'est-à-dire que pour chaque mode, un second plan d'expériences est créé pour la partie réelle en ajoutant des 0 aux points où aucun appairage n'avait été réalisé. Ainsi, pour chaque mode, trois méta-modèles sont créés : $\mathscr{M}_\omega$, $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_{a0}$. Les deux premiers pour les fréquences et les parties réelles des valeurs propres sur les zones d'instabilité des modes, à savoir où les parties réelles des valeurs propres sont non nulles, et le troisième pour la partie réelle sur tout l'espace des paramètres. Ce dernier sert à identifier les zones de validité des deux premiers méta-modèles.

Le méta-modèle hybride est construit en deux étapes. Tout d'abord, la méthode du chaos polynomial est utilisée pour estimer l'évolution des fréquences et des parties réelles des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement μ. Ainsi, pour chaque couple (M_1, M_2), pour chaque fréquence et chaque partie réelle, un développement en chaos polynomial est construit. Pour la loi uniforme et les lois beta, les polynômes de Legendre et de Jacobi sont respectivement utilisés. Les différents degrés du chaos sont choisis de façon à être égaux pour tous les modes dans un même cas (même loi et même méta-modèle) et de façon à avoir la meilleure qualité de prédiction. Ces derniers sont résumés Tableau 5.6. Pour chaque couple (M_1, M_2), le nombre de points disponibles dans le PLEX associé au chaos polynomial peut être relativement faible en fonction du mode considéré, en particulier si ce dernier est principalement stable sur l'intervalle considéré, ce qui explique les faibles degrés retenus pour le chaos polynomial généralisé.

Une fois les différents développements en chaos polynomial construits, pour chaque coefficient du chaos, un méta-modèle avec la technique du krigeage est construit avec une régression d'ordre 0 et une corrélation de type Matérn 5/2. Les évolutions des quatre premiers coefficients du chaos polynomial pour les trois lois considérées pour les modes 3



(a) Coeff 0 (b) Coeff 1 (c) Coeff 2 (d) Coeff 3

(e) Coeff 0 (f) Coeff 1 (g) Coeff 2 (h) Coeff 3

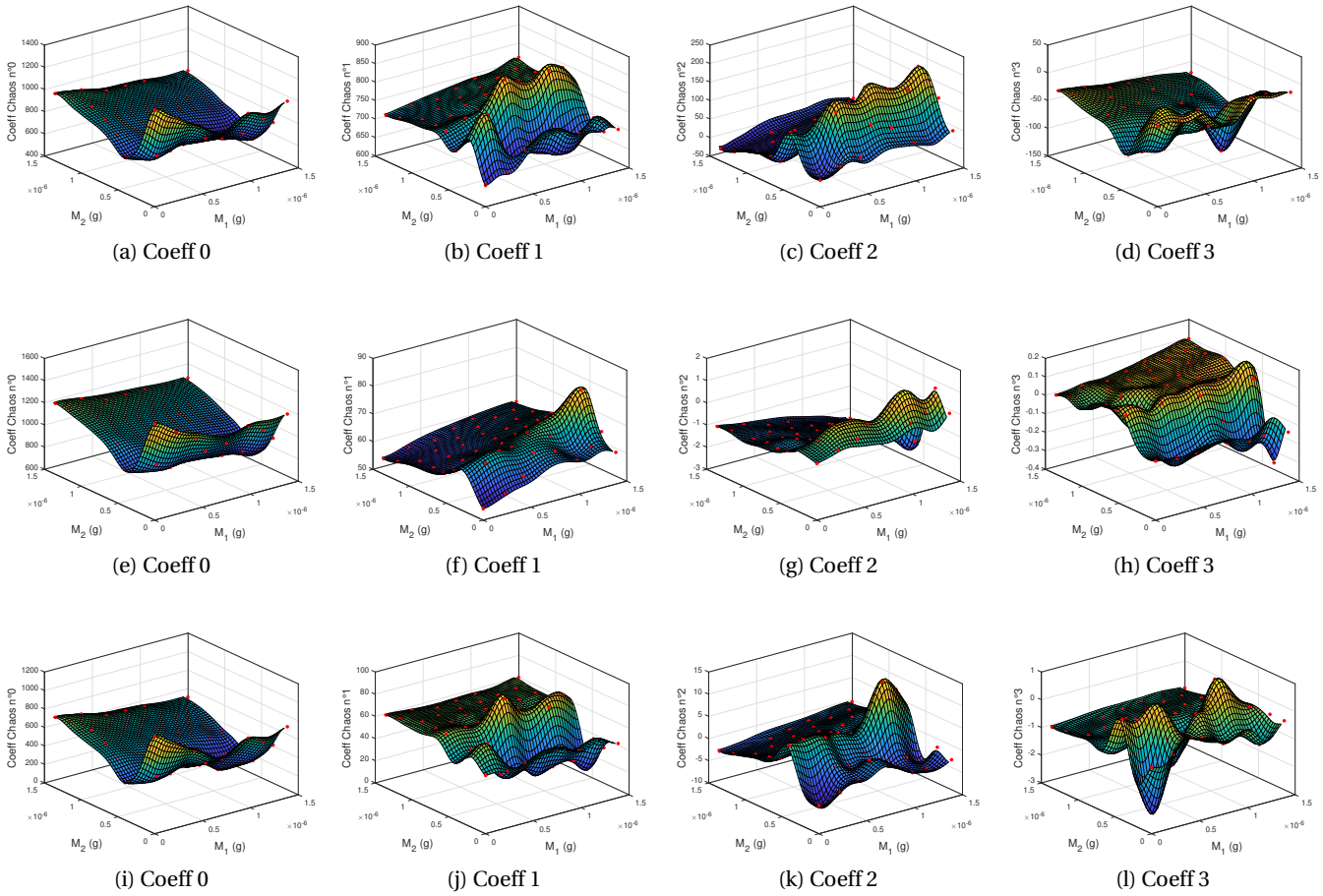
(i) Coeff 0 (j) Coeff 1 (k) Coeff 2 (l) Coeff 3

FIGURE 5.31 – Prédiction par krigeage des quatre premiers coefficients des développements en chaos polynomial de la partie réelle du mode 3 pour les trois lois en fonction des masses M_1 et M_2 - PLEX (•) - Loi uniforme (a,b,c,d) - Loi B(8,2) (e,f,g,h) - Loi B(2,8) (i,j,k,l)

et 6 dans le cas $\mathscr{M}_{a0}$ sont respectivement représentées Figures 5.31 et 5.32. On remarque que les évolutions sont complexes et varient d'un mode à l'autre et d'une loi à une autre. En effet, pour les coefficients 1 à 3, les surfaces sont complètement différentes d'une loi à une autre (comparer les différentes lignes). Dans le cas du coefficient 0, directement relié à la moyenne du processus, les surfaces ont des formes assez similaires, mais les valeurs numériques sont différentes. Par exemple, pour le mode 3, le maximum du coefficient 0, vaut respectivement 90, 100 et 75 pour les lois uniforme, B(8,2) et B(2,8). Le méta-modèle complet est validé par comparaison avec les points de référence utilisés dans la partie 5.4, par soucis de concision, la comparaison n'est pas présentée ici mais elle permet de valider les différents méta-modèles construits.

Une fois les différents méta-modèles hybrides construits, il est possible de reconstruire l'évolution des parties réelles et des fréquences des différents modes. Pour illustrer ceci, les évolutions des parties réelles et des fréquences obtenues avec les méta-modèles hybrides $\mathscr{M}_a$ et $\mathscr{M}_\omega$ construits à partir d'une loi uniforme sur le coefficient de frottement μ pour les modes 2, 3 et 4 sont tracées Figure 5.33 dans le cas d'un coefficient de frottement égal à 0.5. Ces évolutions sont à comparer aux évolutions données Figures 5.24 et 5.25 et sont à comparer aux modes 2, 4 et 5 respectivement. On peut voir que les évolutions sont similaires, ainsi que les zones de stabilité (zones blanches).

Le principal intérêt de la méthode hybride est de pouvoir obtenir directement les coef-



(a) Coeff 0 (b) Coeff 1 (c) Coeff 2 (d) Coeff 3

(e) Coeff 0 (f) Coeff 1 (g) Coeff 2 (h) Coeff 3

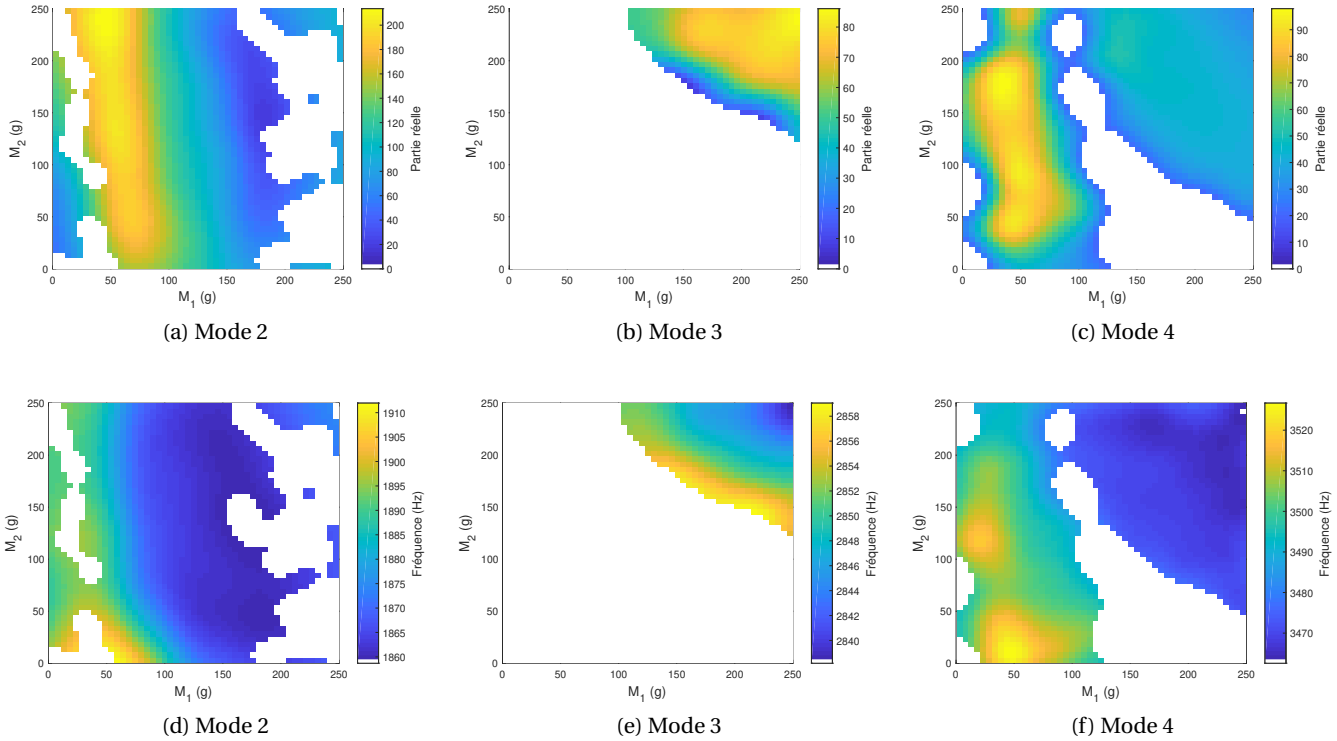
(i) Coeff 0 (j) Coeff 1 (k) Coeff 2 (l) Coeff 3

FIGURE 5.32 – Prédiction par krigeage des quatre premiers coefficients des développements en chaos polynomial de la partie réelle du mode 6 pour les trois lois en fonction des masses M_1 et M_2 - PLEX (•) - Loi uniforme (a,b,c,d) - Loi B(8,2) (e,f,g,h) - Loi B(2,8) (i,j,k,l)

ficients du chaos polynomial avec le krigeage, ce qui permet d'estimer directement les moments statistiques (qui dépendent de la loi sur le coefficient de frottement μ) des valeurs propres. Cette estimation ne nécessite pas de calcul supplémentaire, à la différence d'un méta-modèle construit à l'aide du krigeage uniquement où il aurait fallut relancer un Monte Carlo sur le méta-modèle. Ainsi, les moyennes et les variances en fonction des masses M_1 et M_2 peuvent être directement évaluées. Par exemple, les moyennes et les variances du méta-modèle $\mathscr{M}_{a0}$ pour différents modes sont données Figures 5.34 et 5.35 pour les différentes lois de probabilité considérées.

En ce qui concerne les moyennes, on remarque que les évolutions sont globalement similaires. Cependant, il existe tout de même quelques différences selon la loi sur le coefficient de frottement considérée. En effet, dans le cas du mode 3, on remarque que la zone d'instabilité est moins étendue dans le cas d'une loi B(2,8) que dans les deux autres cas. Dans le cas du mode 4, une zone de stabilité apparait pour M_2 faible et M_1 élevée, alors qu'elle est pratiquement inexistante dans le cas des deux autres lois. De plus, pour tous les modes, on remarque que les valeurs moyennes sont fortement impactées par la loi choisie, par exemple, dans le cas du mode 6, le maximum relevé varie entre 1000 et 1250 en fonction de la loi considérée.

Si pour les moyennes des parties réelles des valeurs propres, les évolutions étaient semblables, cette observation n'est pas avérée dans le cas des variances. En effet, on remarque



(a) Mode 2 (b) Mode 3 (c) Mode 4

(d) Mode 2 (e) Mode 3 (f) Mode 4

FIGURE 5.33 – Évolutions prédites par le méta-modèle des parties réelles (en haut) et des fréquences (en bas) pour $\mu = 0.50$ pour les modes 2, 3, et 4

que les maxima et minima des variances ne sont pas localisés aux mêmes endroits et que les évolutions sont complètement différentes (comparer les différentes lignes de la Figure 5.35). Ceci signifie que la loi choisie sur le coefficient de frottement μ impacte la valeur moyenne des parties réelles mais également et de façon encore plus significative la dispersion associée.

Enfin, comme dans la section 5.4, il est possible de propager l'incertitude et de déterminer le nombre moyen d'instabilités et la moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction des masses M_1 et M_2. Les évolutions du nombre moyen d'instabilités et de la moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction des deux masses sont respectivement données Figures 5.36 et 5.37 pour chaque loi. L'intervalle de variation étant légèrement différent de celui choisi dans la partie 5.4, les résultats ne sont pas identiques, mais des tendances similaires peuvent être observées.

L'influence de la loi de probabilité associée au coefficient de frottement μ est une fois de plus démontrée. En effet, le nombre moyen d'instabilités est fortement impacté par la loi choisie. Par exemple, dans le cas d'une loi uniforme, entre 2.5 et 5 instabilités sont observées en moyenne, alors que pour une loi B(8,2) jusqu'à 6 instabilités en moyenne sont relevées. Par ailleurs, les zones avec le maximum et le minimum d'instabilités moyennes sont différentes selon la loi. Par exemple, dans le cas d'une loi uniforme, si l'une des deux masses est nulle et que l'autre vaut 250 g alors moins d'instabilités seront présentes en moyenne, alors que dans le cas d'une loi B(2,8), une masse M_1 inférieure à 20 g et une masse M_2 inférieure à 100 g sera préférable.

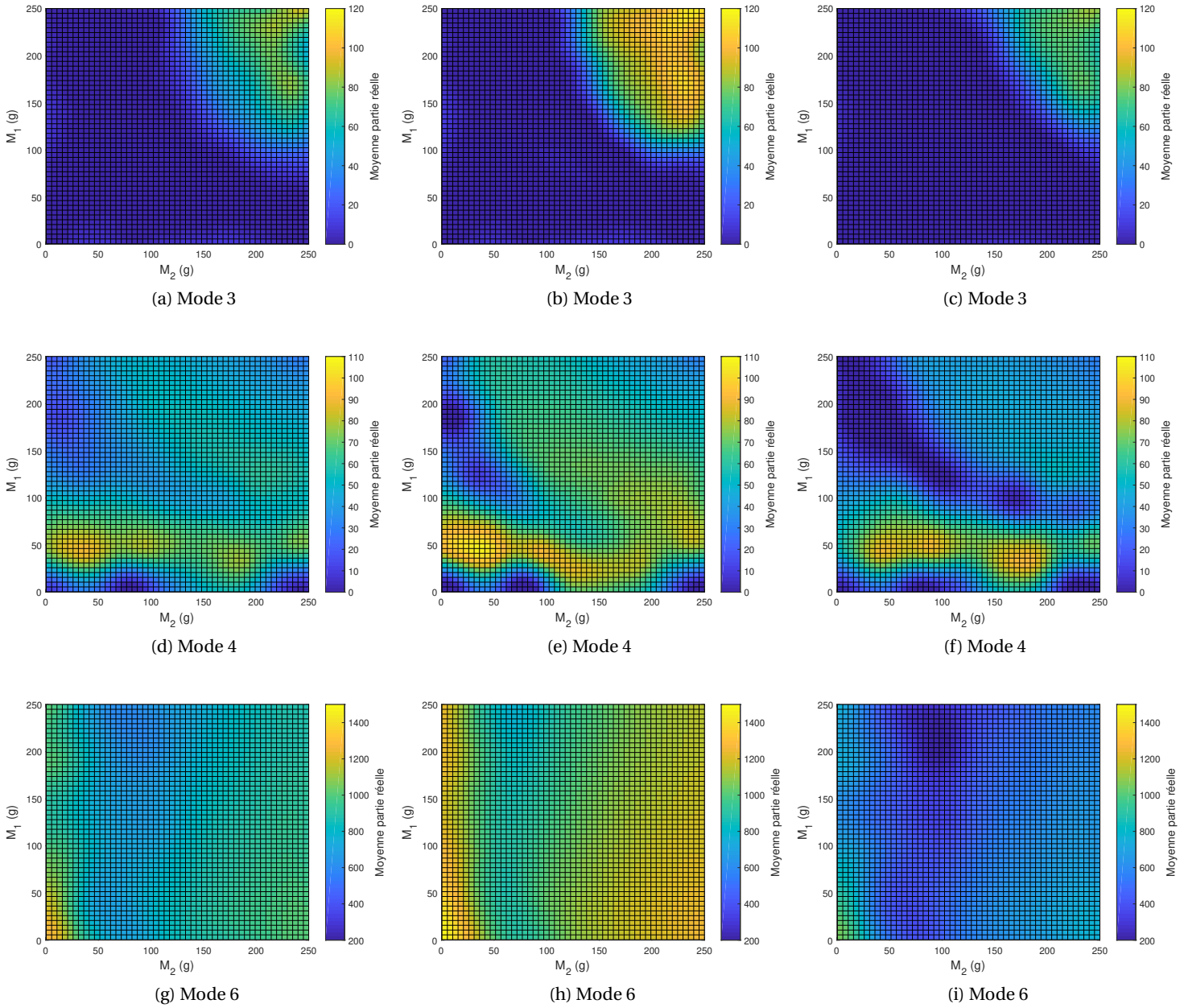
Des remarques similaires peuvent être faites pour l'évolution de la moyenne de la somme des parties réelles positives. En effet, les valeurs moyennes sont fortement impactées

puisque dans le cas d'une loi B(2,8), une masse M_1 égale à 40 g associée à une masse M_2 égale à 50 g permettra d'avoir le système avec le taux de divergence global moyen le moins élevé, alors que dans le cas d'une loi uniforme, une masse $M_1 = 240$ *g* associée à une masse $M_2 = 75$ g sera le couple de masses le moins déstabilisant pour le système. Par ailleurs, les valeurs des moyennes sont fortement impactées puisque le maximum varie entre 700 pour une loi B(2,8) et 2600 pour une loi B(8,2).

Les résultats obtenus ici montrent une fois de plus l'influence complexe des différents paramètres sur la stabilité du système, ce qui illustre la nécessité de mener des études approfondies pour aboutir à une compréhension juste des phénomènes de propension de crissement. Les zones d'instabilité générées par les différents modes ne sont pas triviales et montrent la difficulté pour un ingénieur de trouver de façon instinctive le jeu de paramètres permettant de diminuer la propension au crissement d'un système de frein. De plus, l'importance d'identifier en amont et de façon la plus juste possible les lois de probabilités des paramètres physiques lors d'une étude de crissement est démontrée une fois de plus.

Par ailleurs, ces résultats illustrent la validité de la méthode mise en place ici adaptée au traitement d'un cas industriel. En effet, les différents résultats obtenus montrent qu'il est possible d'utiliser la méthode hybride développée pour la prédiction de l'évolution des valeurs propres complexes dans le cas d'un modèle éléments finis. Comme dans le cas de l'utilisation du krigeage seul, le suivi des modes étant limité à leur zone d'instabilité, il est nécessaire de mettre en place une fonction permettant de déterminer ces zones afin de pouvoir utiliser les différents méta-modèles dans leur zone de validité. Les résultats obtenus avec la méthode hybride ont permis de répondre à ces difficultés.

Le méta-modèle mis en place ici nécessite l'utilisation de deux plans d'expériences superposés ce qui représente un plan d'expériences total d'une taille supérieure au cas où seul le krigeage est utilisé (258 points contre 750). Cependant, ce coût représente tout de même un faible coût numérique face à une étude paramétrique où plus de 10^6 h de calcul auraient été nécessaires alors que moins de 700 h de calcul ont été utiles ici. De plus, ce coût supplémentaire par rapport au krigeage seul et à un plan d'expériences unique permet par la suite d'avoir une estimation directe des différents moments statistiques sans calculs supplémentaires. Dans le cas d'un méta-modèle construit avec la seule méthode du krigeage, il serait nécessaire de faire des simulations MCS supplémentaires qui peuvent rapidement s'avérer coûteuses et chronophages s'il faut en effectuer un grand nombre. Ainsi, selon le type d'application finale, une méthode peut être plus adaptée qu'une autre.

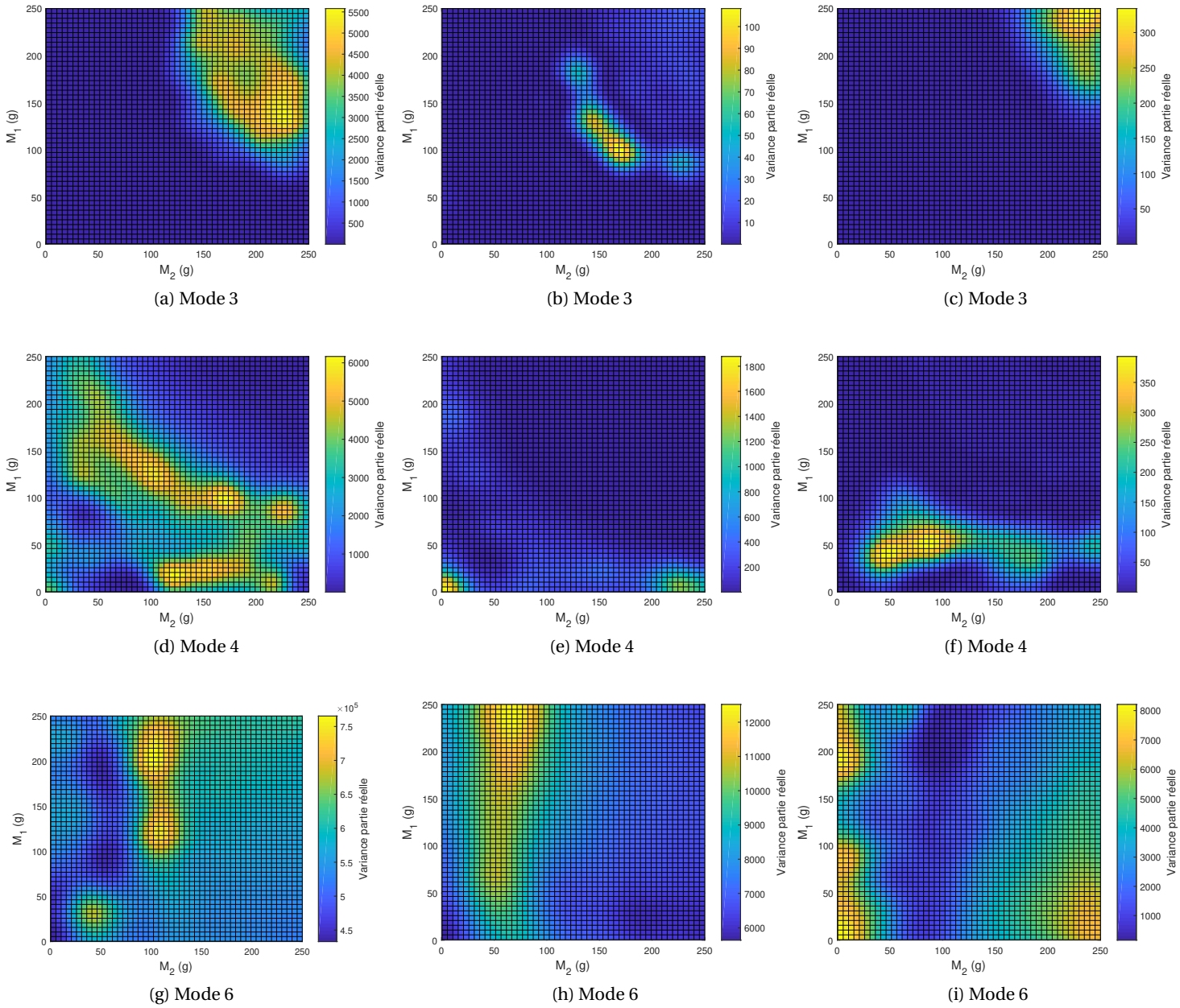


(a) Mode 3 (b) Mode 3 (c) Mode 3

(d) Mode 4 (e) Mode 4 (f) Mode 4

(g) Mode 6 (h) Mode 6 (i) Mode 6

FIGURE 5.34 – Évolution des moyennes des parties réelles en fonction des masses M_1 et M_2 de différents modes pour les lois uniforme (à gauche), B(8,2) (au milieu) et B(2,8) (à droite)

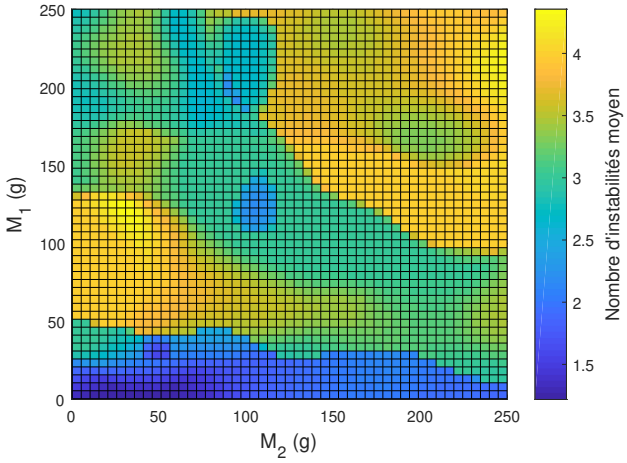


(a) Mode 3 (b) Mode 3 (c) Mode 3

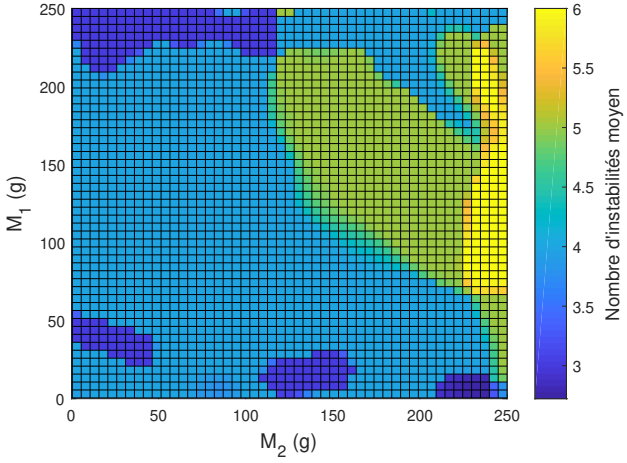
(d) Mode 4 (e) Mode 4 (f) Mode 4

(g) Mode 6 (h) Mode 6 (i) Mode 6

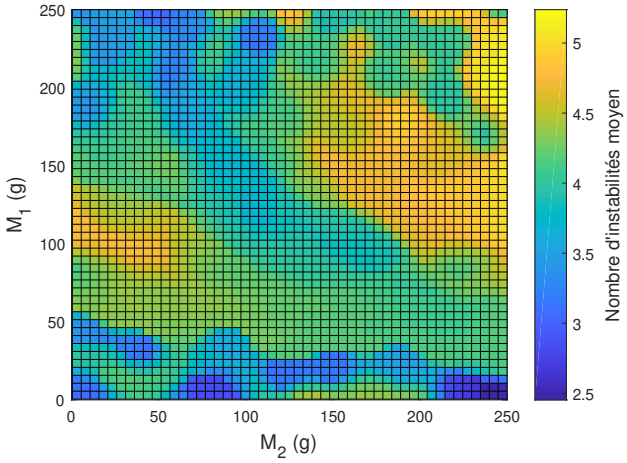
FIGURE 5.35 – Évolution des variances des parties réelles en fonction des masses M_1 et M_2 de différents modes pour les lois uniforme (à gauche), B(8,2) (au milieu) et B(2,8) (à droite)



(a)

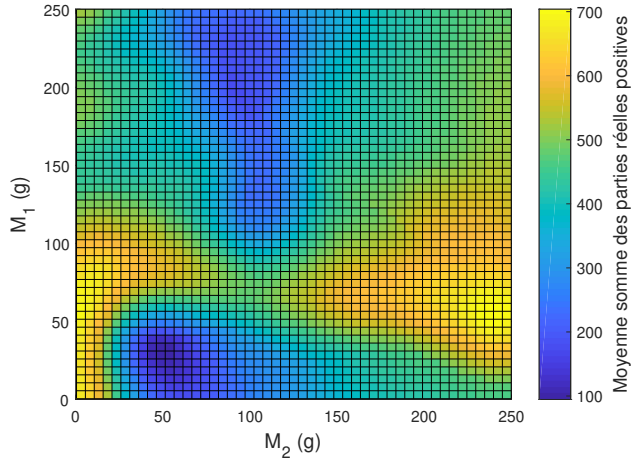


(b)

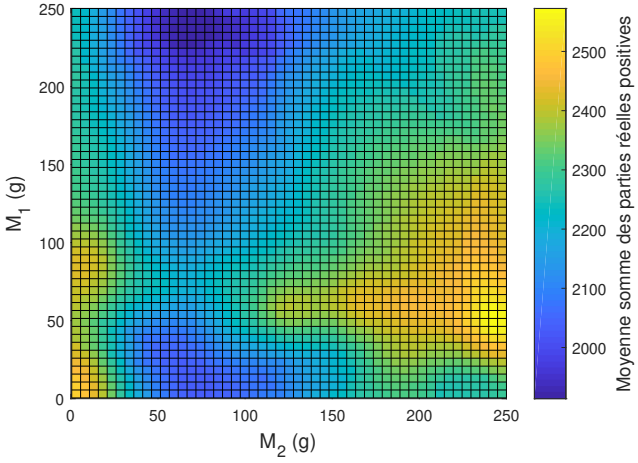


(c)

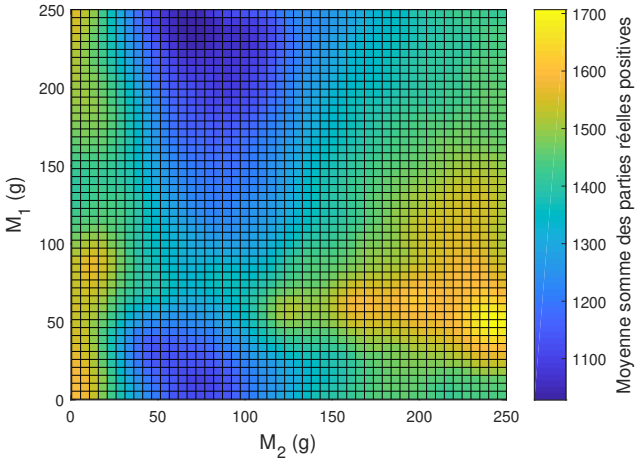
FIGURE 5.36 – Nombre d'instabilités moyennes en fonction des masses M_1 et M_2 pour la loi B(2,8) (a), la loi B(8,2) (b) et la loi uniforme (c)



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.37 – Moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction des masses M_1 et M_2 pour la loi B(2,8) (a), la loi B(8,2) (b) et la loi uniforme (c)

5.6 Retour sur le problème de multi-contact - Application de la stratégie de méta-modélisation dans un cadre de conception

Pour rappel et comme précédemment étudié dans le Chapitre 3, le système de frein est soumis à de nombreux paramètres incertains, parmi ceux-ci les contacts internes au système de frein qui sont traduits dans le cadre de cette thèse par neuf paramètres supplémentaires. Ce nombre étant trop important pour adopter une démarche de conception globale, le choix a été fait d'adopter une stratégie en deux étapes. Ainsi, comme expliqué dans le Chapitre 3, la première étape consiste à sélectionner le jeu de contacts internes qui rend le système le plus instable possible, ici la configuration avec la partie réelle maximale, c'est-à-dire avec une instabilité au taux de croissance maximal. Une fois cette configuration déterminée, il s'agit de trouver le jeu de paramètres de conception qui permette de stabiliser le système. Cependant, les coût numériques associés à cette étape restent élevés. Ainsi, une stratégie basée sur la mise en place d'un méta-modèle a été mise en place et présentée dans les parties précédentes et permet de déterminer le jeu de paramètres de conception permettant de "diminuer les instabilités" du système avec une approche choisie consistant à diminuer les valeurs des parties réelles positives. L'hypothèse avait été faite que si cette configuration était rendue "plus stable", alors l'ensemble des autres configurations se verraient elles aussi être stabilisées. L'étude qui suit a pour simple objectif de vérifier la véracité de cette hypothèse.

Afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux obtenus Chapitre 3, le coefficient de frottement μ est choisi égal à 0.5. Le travail précédemment proposé dans ce chapitre permet alors de construire les différents méta-modèles dans le cas de deux paramètres variables M_1 et M_2 et d'obtenir les valeurs de M_1 et M_2 qui minimisent la somme des parties réelles positives lorsque $\mu = 0.5$, c'est-à-dire $M_1 = 250$ g et $M_2 = 77$ g. Ce nouveau système est ensuite utilisé pour relancer les CEA correspondantes à tous les jeux de contacts internes comme effectué dans le Chapitre 3. Les valeurs propres obtenues sur ces 512 configurations avant et après modification sont affichées Figure 5.38. La configuration après modification correspond par conséquent à la proposition de choix de design "le plus stable" par l'intermédiaire de la stratégie proposée.

La principale instabilité qui était située autour de 4500 Hz et qui présentait des parties réelles élevées sur un grand nombre de configurations se trouve atténuée après la modification du système. En effet, avant la modification, 116 valeurs propres ont une partie réelle supérieure à 500 entre 4000 et 5000 Hz, alors que seulement 32 valeurs propres sont dans ce cas là après la modification. De plus, quelques instabilités présentes avant la modification ont disparu après la modification comme celles à 3000 Hz, 1440 Hz ou 1100 Hz. Cependant, pour les autres instabilités, les modifications restent marginales. Si la modification choisie n'a pas amélioré les autres instabilités, elle ne les a pas déstabilisées pour autant.

Ces observations sont confirmées en regardant la moyenne des parties réelles positives par plage de fréquences, voir Figure 5.39. On remarque qu'entre 4000 et 5000 Hz, la moyenne des parties réelles a beaucoup diminué après la modification puisqu'avant la valeur maximale est de 700, alors qu'après la modification le maximum est de 400. De plus, les instabilités sont aussi atténuées autour de 3000 Hz, les parties réelles passant de 150 maximum à 25 maximum. Cependant, sur le reste de la plage de fréquences, les résultats entre les deux restent similaires.

En conclusion, la configuration sur laquelle a été réalisée le dimensionnement a permis

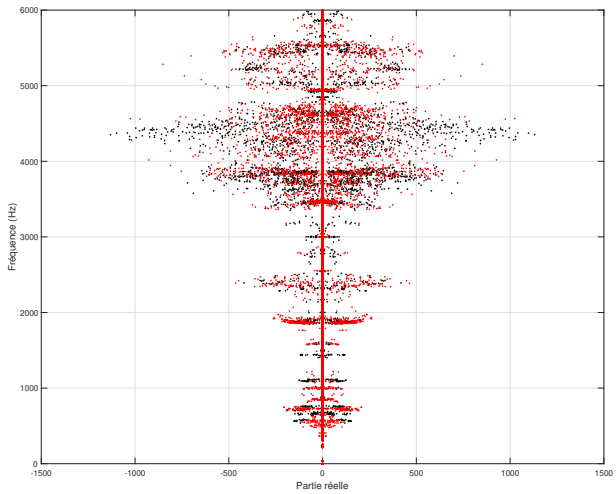


FIGURE 5.38 – Valeurs propres obtenues pour tous les jeux de contacts avant la modification (•) et après la modification (•)

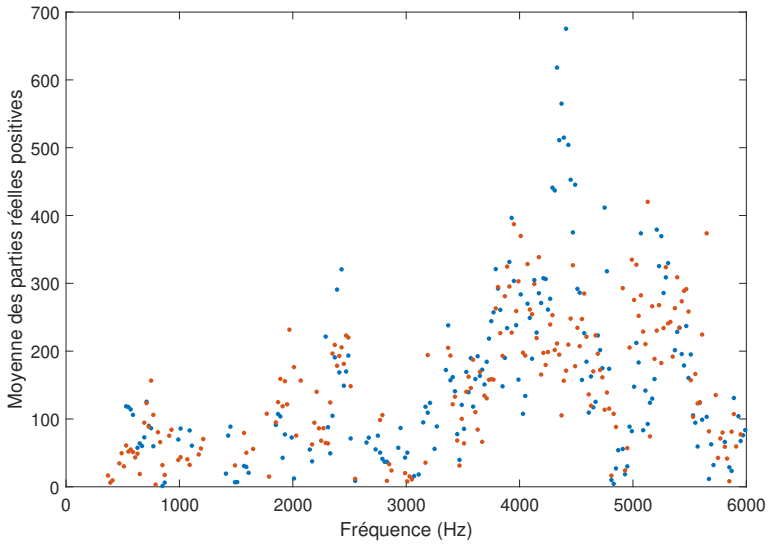


FIGURE 5.39 – Moyenne des parties réelles positives par plage de fréquences avant la modification (•) et après la modification (•)

de déterminer le jeu de masses M_1 et M_2 qui permet de minimiser la somme des parties réelles positives et de diminuer la propension au crissement du système de frein PSA. Il se trouve que l'instabilité située à 4500 Hz est prépondérante dans ce cas et cela revient donc à minimiser la partie réelle associée à ce mode. Une fois la modification réalisée, les différentes CEA permettant de prendre en compte les multi-contacts dans le système permettent de montrer que le mode à 4500 Hz est atténué pour l'ensemble des configurations. De plus, l'atténuation de ce mode pour une configuration n'a pas entrainé une déstabilisation flagrante d'autres modes pour les autres configurations. Même si cette démarche est discutable d'un point de vue purement théorique, cet exemple permet d'illustrer l'utilité de la stratégie complète proposée au Chapitre 3, à savoir identifier la configuration "la plus instable" par sélection d'une configuration de contacts puis construire un méta-modèle sur cette configuration pour identifier les jeux de paramètres permettant de rendre le système "plus stable".

5.7 Conclusion

Cette partie a illustré l'application des méthodes de méta-modélisation présentées dans le chapitre précédent à un modèle éléments finis de frein automobile. Le chapitre précédent avait permis de mettre en avant la nécessité de trouver un critère permettant de suivre l'évolution des différentes valeurs propres en fonction des paramètres afin de pouvoir créer des plans d'expériences viables. Il a été montré ici que la stratégie mise en place sur le modèle académique ne peut pas s'appliquer telle quelle sur le modèle éléments finis de frein. Par conséquent, les méta-modèles sont construits uniquement sur les zones où les modes ont une partie réelle non nulle.

La méthode du krigeage a été appliquée dans un premier temps au cas où deux paramètres étaient incertains, à savoir le coefficient de frottement de l'interface plaquette/disque et une modification de la masse en deux points de la chape, puis dans un second temps au cas où trois paramètres étaient incertains, à savoir le coefficient de frottement et deux modifications de la masse de la chape. Elle a montré sa capacité à prédire l'évolution des valeurs propres complexes en fonction des paramètres d'entrée malgré la limitation du nombre de points utilisés liée à la construction du plan d'expériences. En effet, seul le suivi des modes lorsque leur partie réelle est non nulle est possible, les méta-modèles sont alors construits uniquement sur ces zones aux formes complexes. La détermination de celles-ci impose la mise en place d'une fonction test permettant de les identifier et de pouvoir alors utiliser les différents méta-modèles construits dans leur plage de validité. Finalement, les évolutions des valeurs propres du système en fonction de deux paramètres sont obtenues avec seulement 104 appels au modèle (environ 104 h de calculs) alors qu'il aurait fallu une grille d'au moins $100 \times 100 = 10000$ points pour avoir le niveau de précision souhaité dans un cadre déterministe (soit 10^4 h de calculs environ). Pour le cas d'étude avec trois paramètres, les résultats sont obtenus en 250 h de calcul environ, contre 10^6 h pour une étude paramétrique avec le même niveau de précision.

Ensuite, la méthode hybride développée dans le chapitre précédent et basée sur l'utilisation du krigeage et du chaos polynomial a été appliquée dans le cas où trois paramètres sont incertains, le coefficient de frottement étant choisi aléatoire (loi uniforme et deux lois beta) et les deux masses paramétriques. La méthode montre de bons résultats et permet d'obtenir l'évolution des valeurs propres sur leur zone d'instabilité. Si cette méthode nécessite plus de calculs CEA pour l'obtention du plan d'expériences que dans le cas où seule la méthode du krigeage est utilisée (750 contre 258), la description statistique des valeurs propres en fonction des variables paramétriques est immédiate et ne nécessite pas de simulations de Monte Carlo supplémentaires qui peuvent s'avérer coûteuses si de nombreuses études de ce type sont nécessaires. Ainsi, cette méthode un peu plus coûteuse initialement, peu s'avérer économique sur la chaîne de calcul globale si de nombreuses études statistiques sont à réaliser.

Ces deux méthodes de méta-modélisation ont permis de mettre en évidence plusieurs résultats concernant plus spécifiquement la problématique du crissement de frein dans le cadre d'étude d'ingénierie. Tout d'abord, les évolutions des valeurs propres et leur zone de validité sont complexes, ceci illustre la nécessité de mener des études approfondies et la difficulté pour un ingénieur de trouver le meilleur jeu de paramètres de conception de façon instinctive. De plus, les différents résultats obtenus par propagation de l'incertitude montrent l'influence forte des lois de probabilité choisies pour décrire les paramètres aléatoires sur la propension au crissement du système de frein. Aussi, il est primordial d'identifier en amont de la phase de conception les lois de probabilité des paramètres

physiques à considérer lors des études de crissement.

En conclusion, la prédiction de l'évolution des valeurs propres complexes d'un modèle de frein éléments finis par méta-modélisation est possible et montre de bons résultats en terme de qualité de la prédiction malgré une restriction de la zone d'étude à la zone d'instabilité des différents modes. Il est alors possible d'identifier l'influence de chaque paramètre sur chaque mode du système et ainsi identifier les leviers de conception les plus efficaces pour un coût numérique maîtrisé. Des études de propagation de l'incertitude sont aussi possibles et aident à trouver les jeux de paramètres qui permettent d'identifier une solution technologique robuste par rapport aux variations des paramètres environnementaux.

Chapitre 6

Prédiction des instabilités de crissement en dynamique non-linéaire via une technique d'approximation fréquentielle : la Modal Amplitude Stability Analysis (MASA)

Sommaire

6.1 Méthodes de résolution et d'analyse des systèmes dynamiques auto-entretenus 206
6.1.1 L'analyse aux valeurs propres complexes . . . 206
6.1.2 Les méthodes d'intégration temporelle . . . 207
6.1.3 La recherche de régime stationnaire . . . 208
6.1.4 Vers de nouveaux outils . . . 211
6.2 Méthode MASA : Modal Amplitude Stability Analysis . . . 211
6.2.1 Formalisme de la méthode MASA dans le cas mono-fréquentiel . . . 212
6.2.2 Formalisme de la méthode MASA dans le cas multi-fréquentiel . . . 216
6.2.3 Réduction du modèle éléments finis de frein . . . 221
6.3 Préambule - Analyse non-linéaire du système du double Hulten . . . 222
6.3.1 Présentation du système étudié . . . 222
6.3.2 Analyse des résultats obtenus par intégration temporelle . . . 225
6.4 Application de la méthode MASA pour la prédiction des modes instables en dynamique non-linéaire . . . 230
6.4.1 Cas mono-instable - Cas 1 et 2 . . . 230
6.4.2 Cas multi-instable - Cas 3 à 6 . . . 233
6.4.3 Prédiction d'une réponse stationnaire approchée par la méthode MASA . . . 240
6.4.4 Bilan . . . 242
6.5 Prédiction des instabilités de crissement d'un modèle éléments finis de frein . . . 243
6.5.1 Préambule - Identification des instabilités potentielles à l'aide de la CEA . . . 243
6.5.2 Application de la méthode MASA dans un cas mono-instable . . . 243
6.5.3 Prédiction de la stabilité lorsqu'un second mode instable émerge avec la méthode MASA . . . 246
6.6 Conclusion . . . 249

Introduction

La littérature recense de nombreuses méthodes pour l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires. Le choix de la méthode se fait selon certains critères tels que le type de non-linéarités impliquées ou encore le type de solution recherchée. En effet, ce ne sont pas les mêmes outils et les mêmes formalismes qui sont utilisés pour traiter des non-linéarités régulières ou non, fortes ou faibles, avec ou sans hystérésis et des solutions périodique, quasi-périodique, transitoire ou chaotique. Dans le cadre du crissement, il est nécessaire d'utiliser des méthodes permettant de traiter des systèmes autonomes non-linéaires dont les réponses sont souvent considérées comme étant périodiques ou quasi-périodiques. La taille des systèmes étudiés, les non-linéarités impliquées et les différents couplages rendent la résolution analytique des équations associées inenvisageable. Il existe tout de même des méthodes numériques en mesure d'analyser ces systèmes. Certaines permettent de statuer sur la stabilité de la position d'équilibre, telle que la CEA, d'autres permettent de rechercher une solution périodique ou quasi-périodique du régime stationnaire. Néanmoins, la majorité de ces méthodes reste souvent complexe à mettre en place et nécessite des temps de calcul importants ce qui les rend difficilement exploitables dans un contexte industriel. Ces différentes raisons ont poussé chercheurs et industriels à trouver des méthodes alternatives afin d'identifier les modes instables du système. Dans un premier temps, quelques méthodes classiques d'analyse et de résolution des systèmes dynamiques autonomes sont présentées. Ensuite, la méthode de la Modal Amplitude Stability Analysis (MASA) sera présentée. Une fois le formalisme posé, cette dernière sera appliquée dans un premier temps au modèle académique du double Hulten présenté dans les chapitres précédents, puis dans un second temps au modèle éléments finis de frein automobile du groupe PSA.

6.1 Méthodes de résolution et d'analyse des systèmes dynamiques auto-entretenus

Cette première partie a pour objectif de présenter rapidement différentes méthodes classiques d'analyse du crissement. Les principes généraux ainsi que les limitations de chaque méthode seront présentés. L'objectif principal de cette partie est de pouvoir positionner dans la suite de ce chapitre la méthode MASA proposée.

6.1.1 L'analyse aux valeurs propres complexes

La méthode de la CEA a déjà été largement présentée dans les précédents chapitres de ce manuscrit et le formalisme ne sera pas développé à nouveau ici. On se contentera de rappeler que la méthode consiste à déterminer les valeurs propres du système autour de sa position d'équilibre afin de statuer sur la stabilité de ce point d'équilibre. Les modes qui possèdent une valeur propre à partie réelle positive sont considérés comme instables puisqu'une légère perturbation de l'équilibre entrainera un taux d'accroissement positif des oscillations associées à ces modes.

Cette méthode est relativement simple à mettre en œuvre et ses résultats sont faciles à analyser puisque les modes instables identifiés sont potentiellement les modes instables présents dans la réponse dynamique du système. Cependant, la CEA est souvent sur- ou sous-prédictive [132], c'est-à-dire que l'ensemble des modes instables identifiés par la CEA ne sont pas nécessairement présents dans la réponse dynamique et que cette dernière peut être constituée de fréquences non identifiées par la CEA. La principale question

qui reste ouverte à ce jour consiste à trouver un critère et/ou une méthode permettant d'identifier les modes instables qui sont responsables du crissement à partir des résultats CEA. Par ailleurs, cette méthode permet uniquement d'identifier des modes potentiellement impliqués dans la réponse dynamique, mais elle ne donne aucune indication sur les niveaux vibratoires et les fréquences d'excitation du système.

Cette méthode présente tout de même quelques avantages certains qui la rendent largement répandue dans des contextes industriels. En effet, les temps de calcul associés restent raisonnables et permettent d'effectuer plusieurs calculs pour différents jeux de paramètres du système ce qui permet d'obtenir un aperçu global de la propension au crissement, comme cela a pu être illustré dans les chapitres précédents.

L'obtention de la réponse dynamique et des niveaux vibratoires associés doit se faire avec d'autres méthodes numériques qui viennent compléter la CEA et qui permettent d'approximer la réponse dynamique. Deux classes de méthodes se distinguent, à savoir les méthodes d'intégration temporelle et les méthodes de recherche du régime stationnaire.

6.1.2 Les méthodes d'intégration temporelle

Les méthodes d'intégration temporelle ont l'avantage de pouvoir traiter n'importe quel type de problème sans faire d'hypothèses sur la forme de la solution tout en étant plutôt simple d'utilisation puisque de nombreux codes de calculs proposent déjà une implémentation de ces méthodes. Ainsi, il s'agit de résoudre le système suivant à chaque instant t :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t) = \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{X}}(0), \dot{\mathbf{X}}(0), \mathbf{X}(0), \text{ les conditions initiales sur } \mathbf{X} \text{ et ses dérivées par rapport au temps} \end{cases} \tag{6.1}$$

où $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système supposées constantes dans le temps. $\mathbf{X}$, $\dot{\mathbf{X}}$ et $\ddot{\mathbf{X}}$ sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération du système. $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ sont les efforts externes au système et $\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}$ les efforts non-linéaires internes au système. $\ddot{\mathbf{X}}(0), \dot{\mathbf{X}}(0), \mathbf{X}(0)$ correspondent aux conditions initiales du problème.

Cette méthode permet de calculer les niveaux vibratoires mais aussi tout le transitoire de la solution à partir de conditions initiales proches de l'équilibre statique ou par chargement progressif [82, 83, 86, 110, 140]. Différents schémas d'intégration sont possibles et le lecteur intéressé pourra se référer à [140] pour une description détaillée de ces méthodes.

Le principal avantage de l'intégration temporelle est qu'elle permet d'accéder à la fois au régime transitoire et au régime stationnaire du système. Il est alors possible d'étudier l'histoire de la dynamique du système et d'identifier les différentes interactions modales qui ont pu avoir lieu en utilisant des ondelettes par exemple. Par ailleurs, aucune hypothèse sur la solution n'est faite, ce qui ne limite pas l'espace des solutions à un champ restreint. Seules les conditions initiales ont potentiellement un impact sur la solution non-linéaire obtenue.

Cependant, les temps de calcul associés à ces méthodes sont prohibitifs et mener une étude pour différents points de fonctionnement ou différentes initialisations est impossible. Par ailleurs, la stabilité des schémas d'intégration peut être un problème supplémentaire à l'utilisation de la méthode.

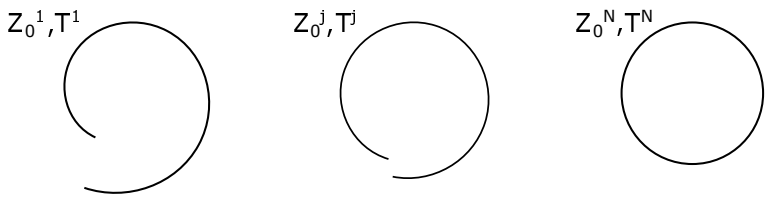


FIGURE 6.1 – Schéma du principe de la méthode de tir

6.1.3 La recherche de régime stationnaire

Le calcul du régime transitoire dans l'intégration temporelle peut être coûteux et parfois le régime stationnaire de la solution correspond à une information pertinente et suffisante. Différentes approches ont été développées et nécessitent toutes de poser des hypothèses sur la forme de la solution afin de pouvoir résoudre le problème. Il est à noter que dans le cas des systèmes auto-entretenus, la fréquence d'excitation n'est pas connue et est par conséquent une inconnue à part entière du problème.

La méthode de tir

La méthode de tir est une méthode temporelle qui permet de rechercher une solution périodique à un problème en reformulant le problème en un problème de conditions aux limites[101]. Dans le cas des systèmes autonomes, la fréquence d'excitation est inconnue et devient une variable supplémentaire du problème. La méthode consiste alors à itérer sur les conditions initiales $\mathbf{Z}_0$ et la période T jusqu'à obtention d'un cycle limite comme schématisé Figure 6.1. A chaque itération, le système doit être intégré sur une période. L'un des inconvénients majeur de cette approche réside dans le choix des conditions initiales du problème qui peut entrainer des problèmes de convergence. Charroyer [22] propose une méthode basée sur une analyse énergétique pour initialiser la méthode de tir en proposant des conditions initiales proches de la réponse stationnaire du système. Cette méthode possède cependant les limitations inhérentes aux méthodes temporelles. Par ailleurs, elle n'a à ce jour pas été développée pour des cas à multi-instabilités.

La méthode de la balance harmonique sous contrainte

D'autres types de méthodes basées sur des méthodes fréquentielles sont aussi envisageables. La solution recherchée est supposée périodique ou quasi-périodique et peut donc être approchée par une série de Fourier tronquée. Dans le cas de systèmes dynamiques non-linéaires, cette approche a montré de très bons résultats et Coudeyras l'étend au cas des systèmes auto-entretenus [27, 28]. Les aspects théoriques de la balance harmonique (HBM) sont rapidement présentés par la suite puis la contrainte supplémentaire permettant de traiter le cas des systèmes autonomes est ensuite introduite.

Méthode de la balance harmonique La méthode de la balance harmonique consiste à rechercher une solution périodique à un problème sous la forme d'une série de Fourier

tronquée à l'harmonique N_h, c'est-à-dire que la solution $\mathbf{X}$ s'écrit :

$$\mathbf{X}(t) \approx \sum_{k=0}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{X}_k^{\mathrm{C}} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{X}_k^{\mathrm{S}} \sin(k\omega t) \tag{6.2}$$

De la même manière, les efforts extérieurs et les efforts non-linéaires sont décomposés en séries de Fourier, c'est-à-dire :

$$\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(t) \approx \sum_{k=0}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{F}_{\mathrm{ext},k}^{\mathrm{C}} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{F}_{\mathrm{ext},k}^{\mathrm{S}} \sin(k\omega t) \tag{6.3}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(t) \approx \sum_{k=0}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{F}_{\mathbf{NL},k}^{\mathrm{C}} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_h} \mathbf{F}_{\mathbf{NL},k}^{\mathrm{S}} \sin(k\omega t) \tag{6.4}$$

Le système 6.1 peut alors être approximé par le système :

$$\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}}) = \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} \tag{6.5}$$

où $\mathbf{\Lambda}$ désigne la matrice de rigidité dynamique composée des matrices structurelles du système, $\tilde{\mathbf{z}}$ désigne le vecteur des coefficients de Fourier de $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}})$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}$ sont les composantes des efforts non-linéaires et des efforts extérieurs dans la base de Fourier. Ainsi, les nouvelles inconnues du problème sont les composantes $\tilde{\mathbf{z}}$ des déplacements dans la base de Fourier. La matrice $\mathbf{\Lambda}$ s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{N}_h} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

où chaque bloc $\mathbf{\Lambda}_k$ s'écrit :

$$\mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} -(k\omega)^2\mathbf{M} + \mathbf{K} & (k\omega)\mathbf{C} \\ -(k\omega)\mathbf{C} & -(k\omega)^2\mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix}, \text{ pour } k \in [1, \mathrm{N}_h] \tag{6.7}$$

Et les vecteurs $\tilde{\mathbf{z}}$, $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}})$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{z}} = \left[\mathbf{X}_0^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \mathbf{X}_1^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \mathbf{X}_1^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \dots \mathbf{X}_{\mathrm{N}_h}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \mathbf{X}_{\mathrm{N}_h}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \right] \tag{6.8}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}} = \left[\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL},0}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL},1}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL},1}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \dots \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL},\mathrm{N}_h}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL},\mathrm{N}_h}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \right] \tag{6.9}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = \left[\tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext},0}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext},1}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext},1}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \dots \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext},\mathrm{N}_h}^{\mathrm{C}^{\mathrm{T}}} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext},\mathrm{N}_h}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \right] \tag{6.10}$$

Le calcul des efforts non-linéaires peut se faire avec une méthode AFT[27, 28] qui utilise la transformée de Fourier discrète (DFT). La méthode consiste à utiliser la transformée de Fourier inverse sur le vecteur $\tilde{\mathbf{z}}$ pour obtenir l'expression des déplacements $\mathbf{X}(t)$ dans le domaine temporel sur une période. Ensuite, les efforts non-linéaires $\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(t)$ sont calculés explicitement à partir de $\mathbf{X}(t)$. Enfin, $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}})$ est déterminé en appliquant la transformée de Fourier à $\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(t)$.

Le principe de la résolution consiste ensuite à résoudre le problème suivant à l'aide d'une méthode itérative de Newton :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n*(2*\mathrm{N}_h+1)} \text{ tel que :} \\ &\mathbf{J}_1(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.11}$$

où n est le nombre de degrés de liberté du problème.

Contrainte supplémentaire Le cas des systèmes auto-entretenus diffère légèrement des systèmes non-autonomes puisque la fréquence d'excitation est inconnue. Ainsi, la pulsation ω qui sert à écrire les développements en série de Fourier est elle-même une inconnue du problème. Il est alors nécessaire d'avoir une équation supplémentaire afin d'obtenir la réponse stationnaire de la solution dynamique. Pour cela, l'équation 6.1 exprimée dans l'espace d'état donne :

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{Y}(t)) \tag{6.12}$$

avec :

$$\mathbf{Y}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{X}(t) \\ \dot{\mathbf{X}}(t) \end{array} \right\} \qquad \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{Y}(t)) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, t)) \end{array} \right\} \tag{6.13}$$

et $\mathbf{A}$ la matrice dynamique égale à :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{array} \right] \tag{6.14}$$

En linéarisant les efforts non-linéaires, la théorie des systèmes dynamiques permet d'écrire la solution de l'équation 6.12 sous la forme :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 \mathbf{\Phi} e^{(\mathbf{\lambda} t)} \mathbf{\Phi}^{-1} \tag{6.15}$$

où $\mathbf{\Phi}$ est la matrice des vecteurs propres $\boldsymbol{\phi}_j$ et $\mathbf{\lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres complexes associées $\lambda_j = a_j + i\omega_j$ où a_j est la partie réelle et ω_j la pulsation du mode $\boldsymbol{\phi}_j$. La solution générale peut alors s'écrire sous une somme d'exponentielles, c'est-à-dire :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j \boldsymbol{\phi}_j e^{(a_j t)} e^{(i\omega_j t)} \tag{6.16}$$

où les termes $\mathbf{c}_j$ sont les amplitudes modales. Le terme $e^{(i\omega_j t)}$ produit des oscillations de pulsation ω_j et le terme $e^{(a_j t)}$ caractérise les amplitudes des oscillations à un facteur près. Ainsi, s'il existe au moins un a_j strictement positif alors les oscillations associées vont croitre indéfiniment et la solution n'est pas bornée, le système est alors instable. Au contraire, si tous les a_j sont strictement négatifs, alors pour un temps infini, les oscillations vont s'évanouir, le système est alors stable. S'il existe m a_j nuls, les autres parties réelles étant négatives, alors la sortie va osciller indéfiniment tout en restant bornée. La solution $\mathbf{Y}$ est quasi-périodique et s'écrit comme une combinaison linéaire des m solutions périodiques $\mathbf{c}_j \boldsymbol{\phi}_j e^{(i\omega_j t)}$ pour lesquelles les parties réelles a_j sont nulles. La solution finale peut alors s'écrire :

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{c}_j \boldsymbol{\phi}_j e^{(i\omega_j t)} \tag{6.17}$$

avec m le nombre de modes à partie réelle nulle. Si $m = 1$, la solution est mono-harmonique de pulsation ω_m, sinon il s'agit d'une solution multi-fréquentielle.

Puisque l'on recherche les solutions quasi-périodiques gouvernées par les modes instables du système, l'idée est d'ajouter une contrainte sur la nullité des parties réelles des modes instables. Ceci est traduit numériquement par une fonctionnelle supplémentaire $\mathbf{J}_2(\tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{j=1}^{m} |a_j| = 0$. Cette contrainte supplémentaire permet d'ajouter une condition supplémentaire permettant la résolution du problème. Dans le cas $m = 1$, le problème général consiste alors à résoudre :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{\theta} = \left[\tilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}, \omega\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n*(2*\mathrm{N}_h+1)+1} \\ \text{Tel que : } \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\theta}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \end{array} \tag{6.18}$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Lambda}(\omega)\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{NL}}(\tilde{\mathbf{z}}) - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\theta}) = \Re(\lambda_j(\boldsymbol{\theta})) \end{cases} \tag{6.19}$$

Pour plus de détails sur les développements mathématiques, le calcul des différents éléments et l'extension au cas multi-fréquentiel, le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Coudeyras [26]. L'initialisation du problème se fait en considérant que la réponse périodique est principalement pilotée par le mode instable linéarisé autour d'une position dynamique. Les coefficients de Fourier liés à la fréquence fondamentale sont ainsi initialisés en prenant $\tilde{\mathbf{z}}_{0,k=1} = \eta\left(\boldsymbol{\Phi}_j + \overline{\boldsymbol{\Phi}}_j\right)$ avec η un coefficient déterminé arbitrairement par l'utilisateur.

Cette méthode a déjà été utilisée par Coudeyras [27, 28] pour prédire les réponses stationnaires d'un système de frein éléments finis. Cependant, l'initialisation de la méthode ainsi que sa convergence sont des facteurs encore mal maitrisés limitant son utilisation. Par ailleurs, les hypothèses faites sur la forme de la solution sont très fortes puisque le choix de la troncature et des modes instables impliqués dans la réponse dynamique peuvent fortement influer la solution trouvée par l'algorithme.

6.1.4 Vers de nouveaux outils

Les méthodes temporelles et fréquentielles présentées ici ont des avantages certains et permettent d'obtenir les niveaux vibratoires du système et des réponses périodiques. Cependant, la sensibilité des solutions trouvées à l'initialisation et au choix du type de solution, leur mise en œuvre complexe et les coûts numériques associés souvent élevés rendent alors leur utilisation dans un contexte industriel compliqué. Ces différentes raisons font que la CEA reste l'outil principalement utilisé à ce jour, en particulier dans l'industrie automobile, malgré ses défauts. Cependant, cette dernière ne permet pas d'identifier les modes réellement impliqués dans la réponse dynamique du système. Pour cette raison, des nouvelles méthodes commencent à émerger afin de compléter les résultats CEA et d'identifier les modes à l'origine du crissement.

Une méthode développée par Massi et al. [16] consiste à calculer les indices d'absorption modale (Modal Absorption Index, MAI) des différents modes. Il s'agit du rapport entre la variation totale d'énergie sur une période d'oscillation et la période d'oscillation. Ils permettent de décrire la capacité de chaque mode à absorber l'énergie et à générer du crissement. Cette méthode a été appliquée sur un système académique et a montré de bons résultats de prédiction.

La seconde méthode, appelée méthode MASA, a été développée par Nacivet et Sinou [100]. Elle est présentée et appliquée dans la suite de ce chapitre.

6.2 Méthode MASA : Modal Amplitude Stability Analysis

La méthode de la CEA permet d'identifier les modes potentiellement instables, cependant elle ne permet pas de statuer sur les modes qui seront présents dans la réponse dynamique du système et ne permet pas non plus de prédire l'émergence de nouvelles instabilités. La méthode MASA proposée ici a pour objectif de fournir une analyse complémen-

taire à la CEA. La MASA permet de déterminer les occurrences de crissement en estimant une approximation de la solution dynamique initiale linéarisée autour d'un point d'équilibre pour une amplitude modale fixée ainsi que la contribution des différents modes potentiellement instables en évaluant la montée en divergence ou l'atténuation de ces derniers. L'objectif n'est pas de trouver ou d'approximer le comportement dynamique non-linéaire mais de fournir une analyse complémentaire à la CEA.

6.2.1 Formalisme de la méthode MASA dans le cas mono-fréquentiel

En reprenant les notations du Chapitre 3, l'équation dynamique du système est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{X}) + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F_{ext}} \tag{6.20}$$

avec $\mathbf{X}$ le vecteur des déplacements généralisés et où le point représente la dérivée par rapport au temps. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur structurelles du système. $\mathbf{F_{ext}}$ sont les efforts extérieurs appliqués au système, à savoir la pression appliquée au piston et à l'étrier. $\mathbf{F_{p/p}}$, $\mathbf{F_{e/p}}$ et $\mathbf{F_{c/p}}$ sont les contributions apportées par les interfaces des deux sous-systèmes considérés où pour chaque interface le décollement est autorisé. Enfin, $\mathbf{F_{nl}}$ représente les efforts non-linéaires de contact et de frottement à l'interface plaquette/disque.

Analyse de stabilité

La position d'équilibre statique $\mathbf{U_S}$ est déterminée en résolvant :

$$\mathbf{K}\mathbf{U_S} + \mathbf{F_{p/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{e/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{c/p}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) = \mathbf{F_{ext}} \tag{6.21}$$

La matrice $\mathbf{K_{nl,U_S}}$ est définie de la même manière que dans le Chapitre 3, c'est-à-dire :

$$\mathbf{K_{nl,U_S}} = \mathbf{J_{p/p}} + \mathbf{J_{e/p}} + \mathbf{J_{c/p}} \tag{6.22}$$

où les $\mathbf{J_k}$ sont les matrices Jacobiennes des efforts $\mathbf{F_k}$ au point $\mathbf{U_S}$.

Ainsi, en considérant une légère perturbation $\mathbf{\Delta U}$ autour de $\mathbf{U_S}$, l'équation 6.20 devient :

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}})\Delta\mathbf{U} + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S} + \Delta\mathbf{U}) - \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) = \mathbf{0} \tag{6.23}$$

Le développement de Taylor au premier ordre des efforts non-linéaires autour de la position d'équilibre donne :

$$\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S} + \Delta\mathbf{U}) = \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{nl}}\Delta\mathbf{U} + \mathscr{O}(\Delta\mathbf{U}^2) \tag{6.24}$$

et le problème aux valeurs propres associé est :

$$\left(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}}\right)\right)\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{6.25}$$

Ces développements correspondent à la CEA classique et permettent de déterminer les valeurs propres complexes λ_j et leur mode propre associé $\mathbf{\Psi}_j$. La stabilité du système est déduite en fonction de la partie réelle des valeurs propres λ_j.

Nouvelle linéarisation du problème

A partir de l'équation 6.24, on pose $\mathbf{\Omega}$ tel que :

$$\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}+\mathbf{\Delta U}) = \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) + \mathbf{J_{nl}}\mathbf{\Delta U} + \mathbf{\Omega} \tag{6.26}$$

$\mathbf{\Omega}$ représente l'erreur commise sur le développement de Taylor à l'ordre 1. Ainsi, l'équation 6.23 peut se réécrire :

$$\mathbf{M}\mathbf{\Delta\ddot{U}} + \mathbf{C}\mathbf{\Delta\dot{U}} + (\mathbf{K}+\mathbf{K_{nl,U_S}}+\mathbf{J_{nl}})\mathbf{\Delta U} + \mathbf{\Omega} = \mathbf{0} \tag{6.27}$$

Lorsque $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, le problème aux valeurs propres associé à l'équation 6.27 correspond à l'équation 6.25 et permet d'assurer la continuité de la méthode.

La solution recherchée du problème est une solution périodique, elle peut donc être approximée par une série de Fourier tronquée à l'ordre N_h. En d'autres termes, $\mathbf{\Delta U}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{\Delta U}(t) = \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{\Delta U}_k(t) = \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{\Delta U}_k^{\mathrm{C}} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{\Delta U}_k^{\mathrm{S}} \sin(k\omega t) \tag{6.28}$$

où $\mathbf{\Delta U}_k(t)$ est la $k^{\text{ième}}$ harmonique de $\mathbf{\Delta U}(t)$ dans le domaine temporel et de coefficients de Fourier associés $\mathbf{\Delta U}_k^{\mathrm{C}}$ et $\mathbf{\Delta U}_k^{\mathrm{S}}$. ω correspond à la pulsation des cycles limites non-linéaires.

De la même manière, les efforts non-linéaires $\mathbf{\Omega}$ peuvent être décomposés sous la forme d'une série de Fourier tronquée :

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{k=0}^{N_h} \mathbf{\Omega}_k^{\mathrm{C}} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{\Omega}_k^{\mathrm{S}} \sin(k\omega t) \tag{6.29}$$

L'expression des efforts non-linéaires $\mathbf{F_{nl}}$ en fonction du temps est connue de façon analytique. Ainsi, les efforts $\mathbf{\Omega}(t)$ peuvent être exprimés dans le domaine temporel et l'utilisation d'un algorithme AFT [27] permet de déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{\Omega}_k^{\mathrm{C}}$ et $\mathbf{\Omega}_k^{\mathrm{S}}$.

La méthode part du postulat que le caractère stable ou instable d'un mode est lié à sa première harmonique et que donc l'étude de la seule stabilité d'un système peut se faire en se limitant à une unique harmonique. L'injection des équations 6.28 et 6.29 dans l'équation 6.27 et la troncature à la première harmonique donne le système dynamique suivant :

$$\mathbf{M}\mathbf{\Delta\ddot{U}}_1 + \mathbf{C}\mathbf{\Delta\dot{U}}_1 + (\mathbf{K}+\mathbf{K_{nl,U_S}}+\mathbf{J_{nl}})\mathbf{\Delta U}_1 + \mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{0} \tag{6.30}$$

où :

$$\mathbf{\Delta U}_1 = \mathbf{\Delta U}_1^{\mathrm{C}} \cos(\omega t) + \mathbf{\Delta U}_1^{\mathrm{S}} \sin(\omega t) \tag{6.31}$$

et :

$$\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{\Omega}_1^{\mathrm{C}} \cos(\omega t) + \mathbf{\Omega}_1^{\mathrm{S}} \sin(\omega t) \tag{6.32}$$

L'originalité de la méthode réside dans la linéarisation de $\mathbf{\Omega}$ sous la forme :

$$\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{K}_1\mathbf{\Delta U} + \mathbf{C}_1\mathbf{\Delta\dot{U}} \tag{6.33}$$

Cette linéarisation composée d'un terme de raideur équivalente et d'amortissement équivalent permet de considérer le déphasage entre les composantes de chargement de $\mathbf{\Omega}_1$ et les déplacements $\mathbf{\Delta U}_1$. De plus, les matrices $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{C}_1$ peuvent être déterminées analytiquement, leur expression est donnée ultérieurement.

Stabilité du nouveau système

En injectant l'équation 6.33 dans l'équation 6.30, il vient :

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 + (\mathbf{C}+\mathbf{C}_1)\,\Delta\dot{\mathbf{U}}_1 + \left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_{\mathbf{nl},\mathbf{U_S}}+\mathbf{J}_{\mathbf{nl}}+\mathbf{K}_1\right)\Delta\mathbf{U}_1 = \mathbf{0} \tag{6.34}$$

qui peut être réécrit en utilisant la variable d'état $\mathbf{Y} = \left(\Delta\mathbf{U}_1\ \Delta\dot{\mathbf{U}}_1\right)^{\mathrm{T}}$ sous la forme :

$$\dot{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{Y}_1 \tag{6.35}$$

avec la matrice dynamique $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{K}+\mathbf{K}_{\mathbf{nl},\mathbf{U_S}}+\mathbf{J}_{\mathbf{nl}}+\mathbf{K}_1\right) & -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{C}+\mathbf{C}_1\right) \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Conformément à la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques, la stabilité du système 6.35 est déterminée en calculant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. Ainsi, la partie réelle associée à la valeur propre du mode instable j permet de statuer sur la divergence du mode j et la partie imaginaire associée correspond à la pulsation du mode j qui participe à la dynamique de la solution linéarisée autour du point d'équilibre pour une amplitude modale initiale fixée. Si d'autres valeurs propres ont une partie réelle qui devient positive, alors il y a un potentiel risque de divergence des modes correspondants, aussi il est nécessaire d'utiliser dans ces conditions une MASA avec une approche multi-fréquentielle afin de prendre en considération ces modes dans la solution approchée et de statuer sur leur divergence.

Expression des déplacements

Le principe de la méthode MASA consiste à étudier la stabilité du système pour des niveaux de vibration donnés. C'est-à-dire que $\mathbf{\Delta U}$ est fixé et que $\mathbf{\Omega}$, et donc $\mathbf{A}$, sont déterminés. La linéarisation et l'analyse de stabilité faite sur $\mathbf{A}$ sont valables uniquement pour les niveaux de vibration considérés. Il s'agit ici d'expliciter l'écriture des déplacements $\mathbf{\Delta U}$.

Supposons que le $j^{\text{ième}}$ mode soit instable et de valeur propre $\lambda_j = a_j + i\omega_j$ alors l'écriture 6.31 est équivalente à l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U}_1 = \mathbf{X}_1 e^{\lambda_j t} + \overline{\mathbf{X}_1} e^{\overline{\lambda_j} t} \\ \Re(\lambda_j) = 0 \end{cases} \tag{6.37}$$

où $\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{U}_1^{\mathrm{C}} - i\Delta\mathbf{U}_1^{\mathrm{S}})$ et $\omega = \omega_j$. On notera au passage que l'écriture de la solution à la première harmonique introduit naturellement la condition de stabilité donnée par $\Re(\lambda_j) = 0$.

Si les déplacements $\mathbf{\Delta U}$ sont non nuls et connus, alors λ_j est déduit de la matrice $\mathbf{A}$ en résolvant :

$$\lambda_j = \mathbf{\Psi}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{\Psi}_j \tag{6.38}$$

avec :

$$\mathbf{\Psi}_j = \frac{1}{\eta}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ i\omega_j \mathbf{X}_1 \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

où :

$$\eta = \left\| \begin{matrix} \mathbf{X}_1 \\ i\omega_j \mathbf{X}_1 \end{matrix} \right\| \tag{6.40}$$

La réponse périodique d'un tel système est principalement pilotée par le mode instable identifié linéarisé autour de la position d'équilibre, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\mathbf{\Delta U}(t) \approx c\left(\mathbf{\Phi}_j e^{i\omega_j t} + \overline{\mathbf{\Phi}_j} e^{-i\omega_j t}\right)$ où c est un coefficient réel et $\mathbf{\Phi}_j$ la déformée. L'idée ici consiste à considérer différents niveaux d'amplitude de ce mode et pour chacun de ces niveaux d'amplitude à statuer sur la stabilité de la solution linéarisée pour le niveau d'amplitude considéré.

Ainsi, si un mode instable j de mode propre $\mathbf{\Psi}_j^0$ a été identifié au cours de la CEA avec une valeur propre associée $\lambda_j = a_j + i\omega_j^0$, où a_j est la partie réelle supposée positive ici et ω_j^0 sa pulsation, alors on considère différents niveaux d'amplitude modale (p_j^m), où m fait référence à l'indice de balayage. On fait l'hypothèse que les niveaux d'amplitude restent faibles et que l'on cherche principalement à étudier l'influence des micro-impacts sur la stabilité. Alors, on peut supposer que la déformée du mode ainsi que sa pulsation évoluent peu. En d'autres termes, la déformée $\mathbf{\Psi}_j^0$ et la pulsation ω_j^0 n'évoluent pas avec p_j^m. Ainsi, $\mathbf{X}_1^m$ se déduit de :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^m \\ i\omega_j^0 \mathbf{X}_1^m \end{pmatrix} = p_j^m \mathbf{\Psi}_j^0 \tag{6.41}$$

La déformée restant constante, λ_j^m est déduite à partir du calcul des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}^m$.

Expression des matrices $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{C}_1$

Les matrices $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{C}_1$ sont définies à partir de l'équation 6.33 et peuvent être déterminées analytiquement. En effet, pour chaque élément de contact n, le déplacement relatif normal δ^n peut s'écrire :

$$\delta^n(t) = \delta_c \cos(\omega t) + \delta_s \sin(\omega t) \tag{6.42}$$

Par ailleurs, les efforts dans la direction d, qui peut être tangentielle ou normale, entre deux nœuds en contact sont :

$$\mathbf{\Omega}_1^{n,d}(t) = \tau_c \cos(\omega t) + \tau_s \sin(\omega t) \tag{6.43}$$

Ainsi, pour chaque direction d, ces efforts doivent vérifier l'équation :

$$\mathbf{\Omega}_1^{n,d}(t) = \mathbf{k}^{n,d}\delta^n(t) + \mathbf{c}^{n,d}\dot{\delta}^n(t) \tag{6.44}$$

La résolution des équations donne :

$$\begin{cases} \mathbf{k}^{n,d} = \frac{\delta_c\tau_c + \delta_s\tau_s}{\delta_c^2+\delta_s^2} & \mathbf{c}^{n,d} = \frac{\delta_s\tau_c - \delta_c\tau_s}{\omega(\delta_c^2+\delta_s^2)} & \text{si } \delta_c \neq 0 \text{ ou } \delta_s \neq 0 \\ \mathbf{k}^{n,d} = 0 & \mathbf{c}^{n,d} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.45}$$

Bilan

En résumé, la démarche générale de la méthode peut être synthétisée de la façon suivante :

— Initialisation : on réalise une CEA classique sur le système initial. Le mode instable j est identifié ainsi que sa déformée $\mathbf{\Psi}_j^0$ et sa pulsation associée ω_j^0. Cette étape correspond à un facteur d'amplitude modale $p_j^0 = 0$.
— Étape 1 : à partir de l'amplitude modale p_j^m, $\mathbf{X}_1^m$ est déterminé à partir de l'équation 6.41.
— Etape 2 : $\mathbf{\Delta U}_1^{C,m}$ et $\mathbf{\Delta U}_1^{S,m}$ sont calculés à partir de l'équation 6.37.
— Etape 3 : $\mathbf{\Delta U}_1^m(t,\omega_j^0)$ est déterminé en appliquant la transformée de Fourier inverse.
— Etape 4 : les efforts non-linéaires $\mathbf{\Omega}_1^m(\mathbf{\Delta U}_1^m(t),\omega_j^0)$ sont calculés à partir de l'équation 6.26 et exprimés dans l'espace de Fourier.
— Etape 5 : les matrices $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{C}_1$ sont déterminées à partir de l'équation 6.45.
— Etape 6 : les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}^m$ sont déterminées.

Les étapes 2 à 6 sont répétées pour toutes les valeurs d'amplitude modale p^m considérées.

6.2.2 Formalisme de la méthode MASA dans le cas multi-fréquentiel

Dans de nombreux systèmes auto-entretenus, plusieurs instabilités sont identifiées lors d'un calcul CEA et les réponses des systèmes dynamiques peuvent être quasi-périodiques. Il est alors nécessaire de développer des méthodes permettant de traiter le cas multi-instable. Cette partie propose une généralisation de la méthode présentée précédemment au cas où N_i instabilités sont identifiées à la CEA.

Écriture des déplacements dans le cas multi-fréquentiel

La solution recherchée ici est supposée quasi-périodique, c'est-à-dire qu'elle est caractérisée par N_i fréquences d'excitations incommensurables, c'est-à-dire que les N_i fréquences sont telles que $\forall i \neq j, (i,j) \in [1,N_i]^2, f_i/f_j \notin \mathbb{N}$. Dans le cas des systèmes non-linéaires, le contenu fréquentiel des oscillations s'écrit comme une combinaison linéaire de toutes les fréquences fondamentales incommensurables. Ainsi, si N_h harmoniques de la solution sont retenues, alors les différentes fréquences observables sont de la forme :

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_j\omega_j + \ldots + k_{N_i}\omega_{N_i} \tag{6.46}$$

où $k_j \in [-N_h, +N_h]$ et $j \in [1,N_i]$. Ainsi, la réponse du système peut être décomposée comme dans le cas mono-fréquentiel en une série de Fourier généralisée, à savoir :

$$\mathbf{\Delta U}(t) = \sum_{k_1=-N_h}^{N_h} \ldots \sum_{k_{N_i}=-N_h}^{N_h} \left(\mathbf{\Delta U}^C_{k_1\ldots k_{N_i}} \cos((k_1\omega_1 + \ldots + k_{N_i}\omega_{N_i})t) + \mathbf{\Delta U}^S_{k_1\ldots k_{N_i}} \sin((k_1\omega_1 + \ldots + k_{N_i}\omega_{N_i})t) \right) \tag{6.47}$$

Où les $\mathbf{\Delta U}^C_{k_1\ldots k_{N_i}}$ et les $\mathbf{\Delta U}^S_{k_1\ldots k_{N_i}}$ correspondent aux coefficients de Fourier associés à toutes les combinaisons linéaires possibles des composantes fréquentielles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{N_i}$. Une écriture plus condensée consiste à introduire la base $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{N_i}\end{bmatrix}$ et à poser :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} t \tag{6.48}$$

où $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_{N_i}\end{bmatrix}$ est appelée variable d'hyper-temps, elle est 2π périodique sur chaque dimension τ_j. On peut alors définir $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \ldots & k_{N_i}\end{bmatrix}$ le vecteur du nombre d'harmoniques dans chaque dimension τ_j. Avec ces notations, l'équation 6.47 peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{\Delta U}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{\Delta U}_0 + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Delta U}^C_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Delta U}^S_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) \tag{6.49}$$

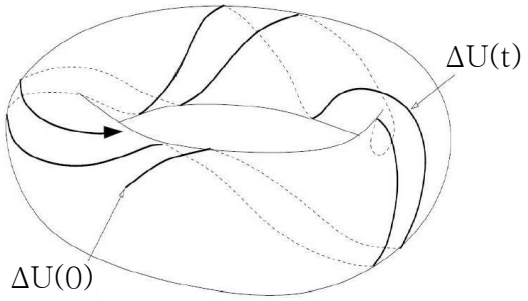


FIGURE 6.2 – Trajectoire sur un tore invariant de dimension 2

Il est à noter que cette transformation permet de passer d'un domaine temporel $t \in \mathbb{R}_+$ à un domaine temporel multi-périodique $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^{N_i}$ où chaque dimension τ_j est caractérisée par une fréquence fondamentale f_j du système dynamique. Ainsi, l'équation 6.49 est 2π périodique dans chaque dimension et $\mathbf{\Delta U}(\boldsymbol{\tau})$ est une fonction de temps multi-dimensionnelle qui décrit l'évolution temporelle de la fonction multi-fréquentielle $\mathbf{\Delta U}(t)$. Cette fonction est souvent appelée fonction tore. Par exemple, dans le cas de la dimension 2, la fonction $\mathbf{\Delta U}(t)$ est bi-périodique et évolue dans $\mathbb{R}^3$ sur un tore formé par les deux paramètres d'hyper-temps (τ_1, τ_2). Un exemple est donné Figure 6.2.

L'espace de temps physique est remplacé par un espace multi-dimensionnel dont la paramétrisation suivante permet de trouver $\boldsymbol{\tau}$ correspondant à un instant t :

$$\begin{cases} \tau_1 \equiv \omega_1 t [2\pi] \\ \vdots \\ \tau_{N_i} \equiv \omega_{N_i} t [2\pi] \end{cases} \tag{6.50}$$

De ce fait, il existe une bijection entre le temps t et les paramètres τ_j. Dans le cas de la dimension 2, l'illustration du passage du domaine temporel au domaine hyper-temps est représenté Figure 6.3. Ainsi, pour tout instant t, il est possible d'associer un unique point dans l'ensemble $[\tau_1 \ \dots \ \tau_{N_i}] \in [0, 2\pi]^{N_i}$. Il n'existe à ce jour aucune méthode d'approximation permettant de faire le passage inverse, c'est-à-dire trouver l'instant t correspondant à un point de l'ensemble $[\tau_1 \ \dots \ \tau_{N_i}] \in [0, 2\pi]^{N_i}$. La conservation de l'orthogonalité de la série de Fourier permet cependant d'utiliser une transformée de Fourier multi-dimensionnelle dans une procédure AFT.

Ainsi les différentes équations écrites dans le domaine de Fourier mono-fréquentiel restent valables dans le domaine multi-fréquentiel et les déplacements $\mathbf{\Delta U}$ et les efforts non-linéaires $\mathbf{\Omega}$ peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{\Delta U}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{\Delta U}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{k}}^{C} \cos(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{k}}^{S} \sin(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) \tag{6.51}$$

et

$$\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{\Omega}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}}^{C} \cos(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{N_i}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}}^{S} \sin(\mathbf{k}.\boldsymbol{\tau}) \tag{6.52}$$

Comme précédemment, seuls les termes de première harmonique sont retenus. C'est-à-

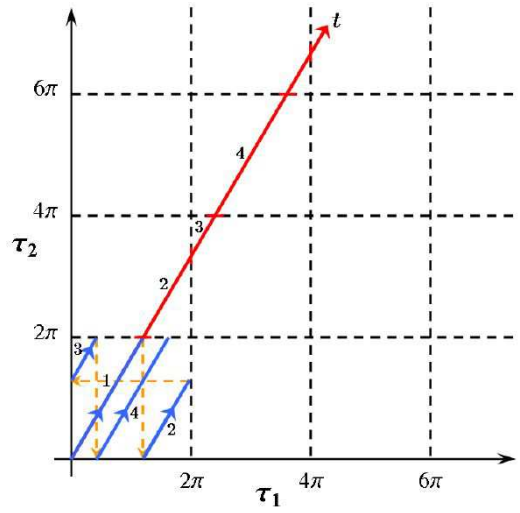


FIGURE 6.3 – Domaine temporel bidimensionnel

dire que :

$$\mathbf{\Delta U_1} = \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta U}^{C}_{\mathbf{v}_k} \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta U}^{S}_{\mathbf{v}_k} \sin(\omega_k t) \tag{6.53}$$

$$\mathbf{\Omega_1} = \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Omega}^{C}_{\mathbf{v}_k} \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Omega}^{S}_{\mathbf{v}_k} \sin(\omega_k t) \tag{6.54}$$

où $\mathbf{v}_k$ est un vecteur nul de taille N_i dont seule la $k^{\text{ième}}$ composante est égale 1.

Linéarisation

L'équation du mouvement 6.27 projetée sur les termes de première harmonique s'écrit alors :

$$\mathbf{M} \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta \ddot{U}}_{\mathbf{v}_k} + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta \dot{U}}_{\mathbf{v}_k} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}}\right) \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k} + \sum_{k=1}^{N_i} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{0} \tag{6.55}$$

L'orthogonalité de la série de Fourier permet d'écrire les N_i équations suivantes :

$$\forall k \in [1, N_i],\ \mathbf{M \Delta \ddot{U}}_{\mathbf{v}_k} + \mathbf{C \Delta \dot{U}}_{\mathbf{v}_k} + \left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}}\right) \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k} + \mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{0} \tag{6.56}$$

Et sur chaque harmonique, $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k}$ est linéarisé de la façon suivante :

$$\mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{K}_{\mathbf{v}_k} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k} + \mathbf{C}_{\mathbf{v}_k} \mathbf{\Delta \dot{U}}_{\mathbf{v}_k} \tag{6.57}$$

Ainsi, on aboutit à N_i sous-systèmes de la forme :

$$\forall k \in [1, N_i],\ \dot{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_k \tag{6.58}$$

où $\mathbf{Y}_k = \left(\mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k}\ \mathbf{\Delta \dot{U}}_{\mathbf{v}_k}\right)^{T}$ et les matrices dynamiques $\mathbf{A}_k$ sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{K} + \mathbf{K_{nl,U_S}} + \mathbf{J_{nl}} + \mathbf{K}_{\mathbf{v}_k}\right) & -\mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\mathbf{v}_k}\right) \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

Ainsi, à chaque instabilité est associé un sous-système dynamique sur lequel il est possible de réaliser une analyse de la divergence ou de l'atténuation de la solution dynamique

linéarisée autour d'un point d'équilibre pour un jeu d'amplitude modale choisie. L'analyse de la divergence de chaque mode k se fait à partir de la partie réelle de la valeur propre associée au mode k dans le sous-système k. En effet, chaque $\mathbf{Y}_k$ est lié uniquement à ω_k et il n'y a donc pas de contribution modale des modes j avec $j \neq k$ dans $\mathbf{Y}_k$. De plus, la projection sur la première harmonique ne fait pas apparaitre de terme en $\mathbf{A}_j * \mathbf{Y}_k$. Dans le cas où un sous-système k ferait émerger une instabilité sur le mode j, pour savoir si la divergence associée au mode j se traduit effectivement par une divergence dans l'équation du mouvement 6.55, il est nécessaire de considérer le sous-système j qui est le seul à donner la contribution du mode j dans l'équation du mouvement. Dans le cas où le mode j est identifié stable par la CEA, il serait nécessaire de l'ajouter à la base utilisée pour MASA.

Calcul des amplitudes modales

Comme précédemment, on peut écrire $\mathbf{\Delta U_1}$ sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta U_1} = \sum_{k=1}^{N_i} \left(\mathbf{X}_k e^{\lambda_k t} + \overline{\mathbf{X}_k} e^{\overline{\lambda_k} t} \right) \\ \forall k \in [1, N_i],\ \Re(\lambda_k) = 0 \end{cases} \tag{6.60}$$

où chaque $\mathbf{X}_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{\Delta U}^{C}_{\mathbf{v}_k} - i \mathbf{\Delta U}^{S}_{\mathbf{v}_k} \right)$.

Si les déplacements $\mathbf{\Delta U_1}$ sont non nuls et connus, alors chaque λ_j est déduit de la matrice $\mathbf{A}_j$ associée au sous-système j correspondant de la façon suivante :

$$\lambda_j = \mathbf{\Psi}_j^{T} \mathbf{A}_j \mathbf{\Psi}_j \tag{6.61}$$

La réponse quasi-périodique d'un tel système est pilotée principalement par les modes instables identifiés linéarisés autour de la position d'équilibre, c'est-à-dire que l'on peut approcher les déplacements par : $\mathbf{\Delta U}(t) \approx \sum_{k=1}^{N_i} c_k \left(\mathbf{\Psi}_k e^{i\omega_k t} + \overline{\mathbf{\Psi}_k} e^{-i\omega_k t} \right)$ où les c_k sont des coefficients réels.

De la même manière que précédemment, si N_i modes instables de modes propres $\left(\mathbf{\Psi}^0_k\right)_{k\in[1,N_i]}$ sont identifiés lors de la CEA et de valeur propre $\lambda^0_k = a^0_j + i\omega^0_k$, alors on considère les différents vecteurs d'amplitude modale $\mathbf{p}^m = [p^m_1 \ \dots \ p^m_k \ \dots \ p^m_{N_i}]$ où chaque p^m_k correspond à l'amplitude modale associée au mode k pour le pas de balayage numéro m. On suppose ici aussi que les niveaux d'amplitude restent suffisamment faibles afin que les déformées $\mathbf{\Psi}^0_k$ et les pulsation ω^0_k n'évoluent pas avec $\mathbf{p}^m$. Ainsi, pour chaque mode on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^m_k \\ i\omega_k \mathbf{X}^m_k \end{pmatrix} = p^m_k \mathbf{\Psi}^0_k \tag{6.62}$$

Puis chaque λ_k est obtenu en déterminant les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}_k$.

Il est envisageable dans un premier temps de considérer une grille pour pouvoir effectuer le balayage sur $\mathbf{p}$ mais cette approche serait coûteuse numériquement. Pour cette raison, une approche plus restrictive, mais qui propose une vision "physique" du développement des réponses vibratoires est considérée et consiste à revenir dans le temporel afin d'établir un lien entre les différentes amplitudes modales. Ainsi, si chaque mode est caractérisé par

une amplitude $p_k(t_n)$ en un instant t_n et une valeur propre λ_k^n, alors l'amplitude $p_k(t_{n+1})$ à l'instant $t_{n+1} = t_n + \delta t$ sera liée à $p_k(t_n)$ et à λ_k^n de la façon suivante :

$$p_k^{n+1} = p_k^n \exp(\Re(\lambda_k^n)\delta t) \tag{6.63}$$

Cette équation est équivalente à :

$$\forall (i,j) \in [1, \mathrm{N}_i]^2, \left(\frac{p_j^{n+1}}{p_j^n}\right)^{1/\Re(\lambda_j^n)} = \left(\frac{p_i^{n+1}}{p_i^n}\right)^{1/\Re(\lambda_i^n)} \tag{6.64}$$

Ainsi, les différentes amplitudes modales sont liées les unes aux autres et avec cette approche le balayage ne se fait plus en amplitude modale mais en temps. Le choix du pas de temps doit se faire de façon à ce que l'équation 6.63 soit valable, c'est-à-dire que considérer un accroissement constant $\Re(\lambda_k^n)$ entre les instants t_n et t_{n+1} soit une approximation valide. Il est à noter que chaque λ_k^n est déterminé à partir de la matrice $\mathbf{A}_k^n$ associée au système du mode k à l'instant t_n.

Calcul des $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k}$

Les efforts non-linéaires $\mathbf{\Omega}$ sont définis comme précédemment par :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S} + \mathbf{\Delta U}) - \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) - \mathbf{J_{nl}}\mathbf{\Delta U} \tag{6.65}$$

L'utilisation d'un algorithme AFT permet de les calculer directement à partir de l'expression de $\mathbf{\Delta U}(t)$. Ils sont ensuite projetés sur chaque harmonique et les coefficients de Fourier sont déterminés.

Il est important de remarquer que le couplage entre les différents modes se fait à travers ces efforts non-linéaires. En effet, en considérant une troncature à l'harmonique 1, l'équation 6.65 devient :

$$\mathbf{\Omega_1} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{v}_k} = \mathbf{F_{nl}}\left(\mathbf{U_S} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k}\right) - \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S}) - \mathbf{J_{nl}} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k} \tag{6.66}$$

Et plus précisément, c'est le terme $\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{U_S} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i} \mathbf{\Delta U}_{\mathbf{v}_k})$ qui couple les différents modes entre eux.

Bilan

En résumé, la démarche générale de la méthode dans le cas multi-fréquentiel peut être résumée de la façon suivante :

— Initialisation : on réalise une CEA classique sur le système initial. Les N_i modes instables sont identifiés ainsi que leur déformée $(\mathbf{\Psi}_k^0)_{k\in[1,\mathrm{N}_i]}$ et leur pulsation associée $(\omega_k^0)_{k\in[1,\mathrm{N}_i]}$. Cette étape correspond à un facteur d'amplitude modale $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$. Une initialisation avec une perturbation $\mathbf{\Delta p}$ est considérée.

— Étape 1 : les amplitudes modales p_j^m sont déterminées à partir de l'équation 6.63 si $m > 1$, ou à partir de la perturbation $\mathbf{\Delta p}$ si $m = 1$.

— Étape 2 : à partir de chaque amplitude modale p_j^m, les $\mathbf{X}_k^m$ sont déterminés à partir de l'équation 6.62.

— Étape 3 : les $\mathbf{\Delta U}^{\mathrm{C},m}_{\mathbf{v}_k}$ et $\mathbf{\Delta U}^{\mathrm{S},m}_{\mathbf{v}_k}$ sont calculés à partir de l'équation 6.37.

— Étape 4 : chaque $\mathbf{\Delta U}^{m}_{\mathbf{v}_k}(t,\omega^0_k)$ est déterminé en appliquant la transformée de Fourier inverse.

— Étape 5 : les efforts non-linéaires $\mathbf{\Omega}^{m}_{\mathbf{1}}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}_i}\mathbf{\Delta U}^{m}_{\mathbf{v}_k}(t),\omega^0_k\right)$ sont calculés à partir de l'équation 6.66 et exprimés dans l'espace de Fourier.

— Étape 6 : les matrices $\mathbf{K}_{\mathbf{v}_k}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{v}_k}$ sont déterminées à partir de l'équation 6.57.

— Étape 7 : les valeurs propres des différentes matrices $\mathbf{A}^m_k$ sont déterminées.

Les étapes 1 à 7 sont répétées pour toutes les valeurs d'amplitude modale $\mathbf{p}^m$ considérées où chaque $\mathbf{p}^m$ est déterminé à partir de l'équation 6.63.

L'analyse de la divergence de chaque mode instable k se fait à partir de l'analyse de l'évolution de sa valeur propre λ_k dans le sous-système k. Si une divergence du mode j est observée dans le sous-système k, alors il faut se référer au sous-système j pour voir si cette divergence se traduit effectivement par une divergence dans l'équation du mouvement. Si le mode j était identifié comme stable initialement par la CEA, il serait alors nécessaire d'ajouter ce mode à la base MASA afin de pouvoir statuer sur sa stabilité. Cependant, les questions liées à l'initialisation de la perturbation en amplitude modale restent ouvertes à ce jour. En effet, déterminer l'initialisation en amplitude modale associée à ce mode qui permet de faire ressortir ce mode instable n'est pas intuitif. Une initialisation trop faible serait inutile puisque la partie réelle de la valeur propre de ce mode est nulle, l'amplitude modale n'évoluerait pas. Une amplitude modale non nulle ajoute des problèmes de continuité pour les efforts non-linéaires définis équation 6.66. Il est tout de même envisageable d'identifier à partir d'une première application de la méthode les N_s instabilités supplémentaires qui pourraient émerger et d'appliquer à nouveau la méthode MASA sur les $\mathrm{N}_i + \mathrm{N}_s$ modes. De même, il serait envisageable de retirer de l'analyse MASA multi-fréquentielle un mode dont l'amplitude se serait stabilisée.

6.2.3 Réduction du modèle éléments finis de frein

Afin de pouvoir appliquer la méthode sur un modèle éléments finis de frein industriel, il est nécessaire de réduire la taille du problème. Ainsi, le modèle utilisé dans la suite pour illustrer la méthode est un modèle réduit du modèle présenté Chapitre 3 et 5. La méthode de réduction n'a pas été l'objet d'étude dans le cadre de cette thèse et seul le principe général est donné ici. Comme expliqué dans [46], la surface de contact plaquette/disque est réduite en un nombre limité de nœuds sur chaque surface de contact. Ces nœuds sont utilisés par la suite en tant que nœud de condensation et en tant que nœud de définition pour des contacts node-to-node. Une fois la surface réduite générée, le modèle réduit est construit en générant un assemblage de Super Eléments (SE). Pour une description complète de la génération, de la définition et de l'assemblage des SE, le lecteur pourra se référer à [45, 46]. De plus, une réduction de Craig et Bampton classique est réalisée où les points de réduction de l'interface plaquette/disque sont conservés comme nœuds de réduction. De cette manière, les efforts non-linéaires de contact peuvent être pris en compte dans notre modèle.

Selon les données expérimentales [27], les non-linéarités à l'interface frottante entre le disque et les plaquettes sont composées d'un terme de raideur linéaire, d'un terme de raideur cubique et d'une possible perte de contact. La formulation peut être résumée

comme suit :

$$\mathbf{F}_{\text{contact, disque/plaquettes}} = \begin{cases} k_l(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j) + k_{nl}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j)^3 & \text{si } \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j > 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.67}$$

où $\mathbf{U}_i$ et $\mathbf{U}_j$ sont les déplacements des deux nœuds i et j coïncidents des côtés maître et esclave du contact. k_l et k_{nl} sont respectivement les raideurs linéaires et non-linéaires au point de contact. Comme expliqué dans [27, 46], un champ de vitesse correspondant à la rotation du disque est appliqué sur la surface de celui-ci. Ainsi, les efforts de frottement de l'interface plaquette/disque sont déduits des efforts de contact normaux en utilisant une loi de Coulomb classique avec un coefficient de frottement constant.

Cette méthode de réduction est utilisée afin de réduire la taille de notre modèle éléments finis. Elle a déjà été appliquée et validée sur ce modèle à plusieurs reprise dans [45, 46, 100]. La validation a été réalisée en deux étapes avec dans un premier temps la validation de la position d'équilibre statique et des contraintes par comparaison avec les résultats du modèle complet. Dans un second temps, les résultats de la prédiction de la stabilité, c'est-à-dire du calcul des valeurs propres, ont été validés par comparaison avec les résultats donnés par la CEA appliquée au modèle complet sans réduction. La description en détail de ces étapes de validation sont données dans [45, 46, 100]. La qualité de la prédiction des valeurs propres est étroitement liée à la taille de la surface réduite de l'interface plaquette/disque. En effet, plus il y a de points de réduction, meilleure est la réduction. Dans les études présentées dans [45, 46, 100], différentes tailles ont été considérées. Le modèle retenu ici pour la suite est le modèle RM212, c'est-à-dire que la surface réduite est composée de 212 points, il s'agit du modèle qui présentait les meilleurs résultats en terme de prédiction des valeurs propres et de temps de calcul acceptable.

6.3 Préambule - Analyse non-linéaire du système du double Hulten

Afin d'illustrer la méthode MASA dans le cas mono- et multi-fréquentiel, la méthode sera appliquée dans le paragraphe 6.4 au modèle académique du double Hulten déjà étudié Chapitre 4. La petite taille du système permet d'obtenir les réponses temporelles de référence et d'effectuer une analyse non-linéaire des phénomènes associés. Cela permettra d'effectuer une comparaison avec les prédictions faites par la méthode MASA dans le paragraphe 6.4 et d'identifier les conditions de validité de la méthode MASA mais aussi ses limitations et d'effectuer ensuite une analyse des résultats obtenus sur le modèle éléments finis du frein PSA de plus grande taille pour lequel il est impossible d'obtenir les résultats temporels.

Dans ce qui suit, le système non-linéaire étudié est d'abord brièvement présenté. Deux configurations du système sont retenues et analysées pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ en utilisant la CEA et une technique d'intégration temporelle.

6.3.1 Présentation du système étudié

Dans cette partie, le système étudié est le modèle académique déjà présenté dans le Chapitre 4 représenté Figure 6.4. Afin de rendre le système non-linéaire, les raideurs k_{11}, k_{12}, k_{21} et k_{22} sont remplacées par des raideurs non-linéaires $\underline{k}_{11}$, $\underline{k}_{12}$, $\underline{k}_{21}$ et $\underline{k}_{22}$ définies de façon à ce que les efforts au niveau d'une raideur $\underline{k}_i$ s'écrivent $k_i u + k_{i,\text{nl}} u^3$ où u représente les déplacements. Par ailleurs, afin d'avoir une matrice Jacobienne des efforts non-

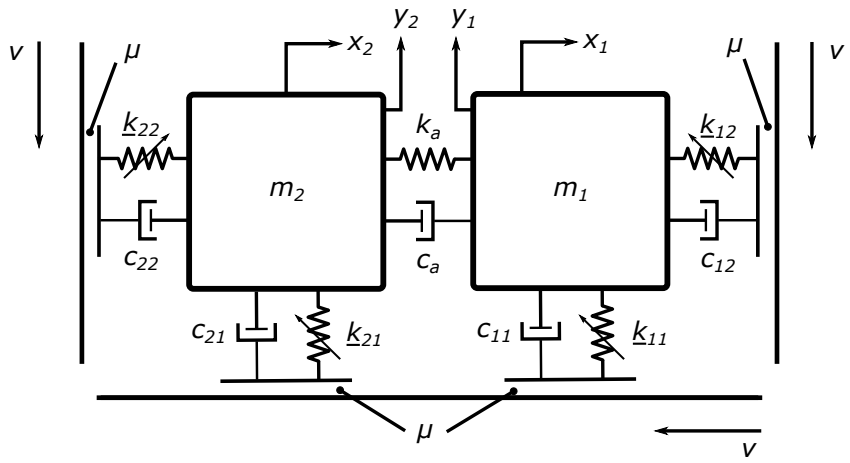


FIGURE 6.4 – Schéma du modèle étudié

linéaires à la position d'équilibre statique non nulle, un effort **P** est appliqué initialement au système.

Ainsi, en reprenant les notations du Chapitre 4, l'équation du mouvement du système s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu)\mathbf{X} + \mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X}) = \mathbf{P} \tag{6.68}$$

avec le vecteur des efforts non-linéaires définit comme suit :

$$\mathbf{F_{nl}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} k_{12,\mathrm{nl}} x_1^3 + \mu k_{11,\mathrm{nl}} y_1^3 \\ k_{11,\mathrm{nl}} y_1^3 - \mu k_{12,\mathrm{nl}} x_1^3 \\ k_{22,\mathrm{nl}} x_2^3 + \mu k_{21,\mathrm{nl}} y_2^3 \\ k_{21,\mathrm{nl}} y_2^3 - \mu k_{22,\mathrm{nl}} x_2^3 \end{pmatrix} \tag{6.69}$$

La matrice Jacobienne des efforts non-linéaires au point $\mathbf{X}_0 = \left[x_1^0\ y_1^0\ x_2^0\ y_2^0\right]$ vaut :

$$\mathbf{J_{nl}}(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} 3k_{12,\mathrm{nl}} x_1^{0^2} & 3\mu k_{11,\mathrm{nl}} y_1^{0^2} & 0 & 0 \\ -3\mu k_{12,\mathrm{nl}} x_1^{0^2} & 3k_{11,\mathrm{nl}} y_1^{0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3k_{22,\mathrm{nl}} x_2^{0^2} & 3\mu k_{21,\mathrm{nl}} y_2^{0^2} \\ 0 & 0 & -3\mu k_{22,\mathrm{nl}} x_2^{0^2} & 3k_{21,\mathrm{nl}} y_2^{0^2} \end{bmatrix} \tag{6.70}$$

L'objectif de cette partie est d'illustrer les capacités de la méthode MASA à prédire la stabilité des systèmes frottants en considérant tout d'abord un modèle académique simple où il est possible d'obtenir la réponse dynamique par intégration temporelle. Dans ce but, deux configurations du système aux comportements dynamiques différents sont considérées et étudiées. Leurs caractéristiques sont données Table 6.1 et une pression initiale $\mathbf{P} = [100; -100; -100; -100]$ est appliquée au système. La démarche globale est la suivante, sur chaque configuration et pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ, une intégration temporelle est réalisée et permet d'obtenir la réponse dynamique du système. Ensuite, la méthode de la CEA est utilisée afin d'identifier les modes potentiellement instables et statuer sur la stabilité de la position d'équilibre statique. Enfin, la méthode MASA est appliquée, en mono ou en bi-fréquentiel, et permet de statuer sur la divergence de la solution dynamique.

Les évolutions des valeurs propres obtenues par CEA sont données Figure 6.5 pour chaque configuration. La principale différence entre les deux configurations réside dans la différence de la raideur de couplage k_a entre les masses m_1 et m_2. La première configuration peut être vue comme deux couplages de modes classiques, c'est-à-dire comme

	m_1	m_2	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_a	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	c_a	$k_{11,\mathbf{nl}}$	$k_{12,\mathbf{nl}}$	$k_{21,\mathbf{nl}}$	$k_{22,\mathbf{nl}}$
Cfg.1	1	2	2000	4000	1000	3000	100	1	1	1	1	1	1E4	1E6	1E4	1E6
Cfg.2	1	2	2000	4000	1000	3000	1000	1	1	1	1	1	1E4	1E6	1E4	1E6

TABLEAU 6.1 – Jeux de paramètres des configurations étudiées

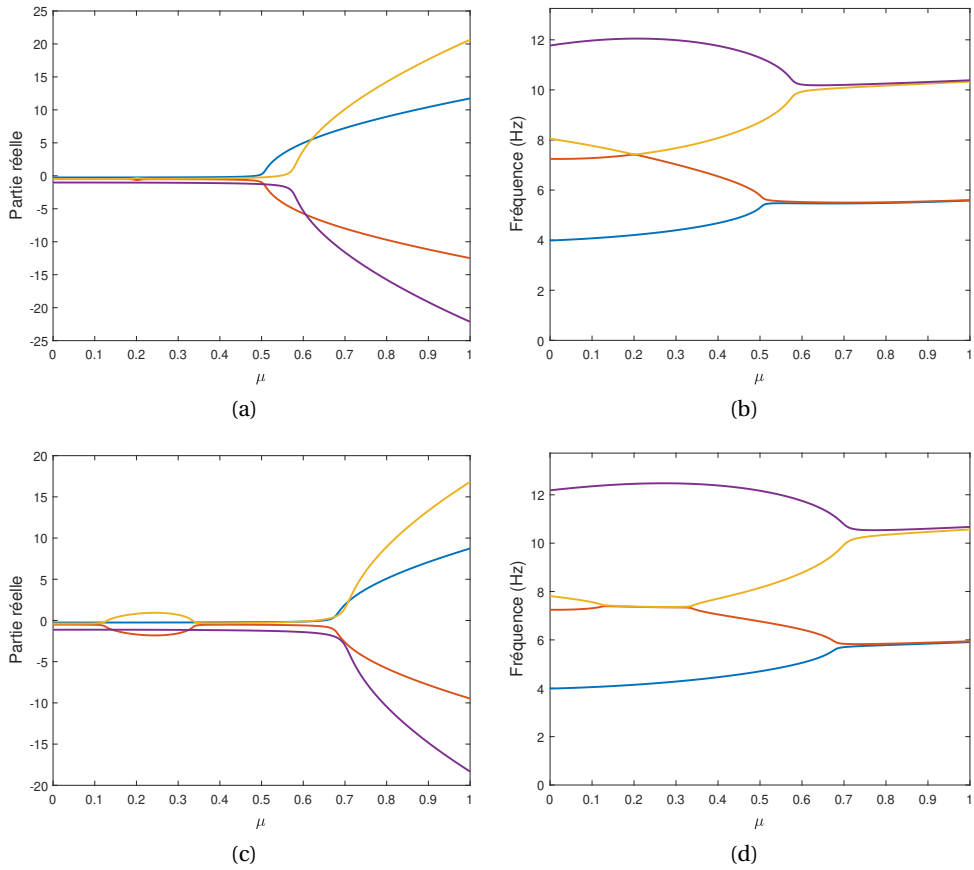


FIGURE 6.5 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences (b,d) obtenues par CEA en fonction du coefficient de frottement pour la première (a,b) et la seconde (c,d) configuration

deux systèmes de type Hulten simple quasiment indépendants. Comme on peut le voir Figure 6.5a et 6.5b, deux coalescences indépendantes ont lieu. Ainsi, pour la première coalescence, l'instabilité est détectée à partir de $\mu = 0.48$ à la fréquence de 5.8 Hz. Pour la seconde coalescence, l'instabilité apparait à partir de $\mu = 0.54$ à une fréquence d'environ 10 Hz.

La seconde configuration fait apparaitre différents couplages entre les modes. Ainsi, un premier mode est instable entre $\mu = 0.13$ et $\mu = 0.33$, il est couplé avec un second mode autour de 7 Hz. Passé $\mu = 0.33$, ce mode se stabilise et le système est stable jusqu'à $\mu = 0.64$. Au delà, deux instabilités sont présentes, une première autour de 6 Hz et une seconde autour de 10 Hz. Le mode qui était instable entre $\mu = 0.31$ et $\mu = 0.33$ ne se couple pas avec le même mode lorsque $\mu > 0.64$, cet échange de mode est dû au fort couplage entre les deux masses m_1 et m_2.

Différents cas de figure sont étudiés par la suite pour chacune des configurations de façon à illustrer la capacité de la méthode MASA à prédire la stabilité de la solution dynamique du système linéarisé autour du point d'équilibre. Dans un premier temps, deux cas avec une unique instabilité sont étudiés, un premier avec un faible couplage et un second

N° Cas	μ	k_a	Nb ins.	f_1^{ins}	Re(λ_1^{ins})	f_2^{ins}	Re(λ_2^{ins})
1	0.5	100	1	5.29 Hz	0.24		
2	0.18	1000	1	7.39 Hz	0.684		
3	0.55	100	2	5.47 Hz	3.3	9.27 Hz	0.007
4	0.63	100	2	5.47 Hz	5.75	10 Hz	5.75
5	0.7	1000	2	5.7 Hz	1.9	9.93 Hz	1.5
6	0.65	100	2	5.46 Hz	6.21	10.03 Hz	7.48

TABLEAU 6.2 – Cas d'étude retenus

N° Cas	Nb. fondamentales	Nb. harmoniques	Nb. combinaisons
Cas 1	1	3	-
Cas 2	1	4	-
Cas 3	2	3	7
Cas 4	2	5	8
Cas 5	1	8	-
Cas 6	2	2	28

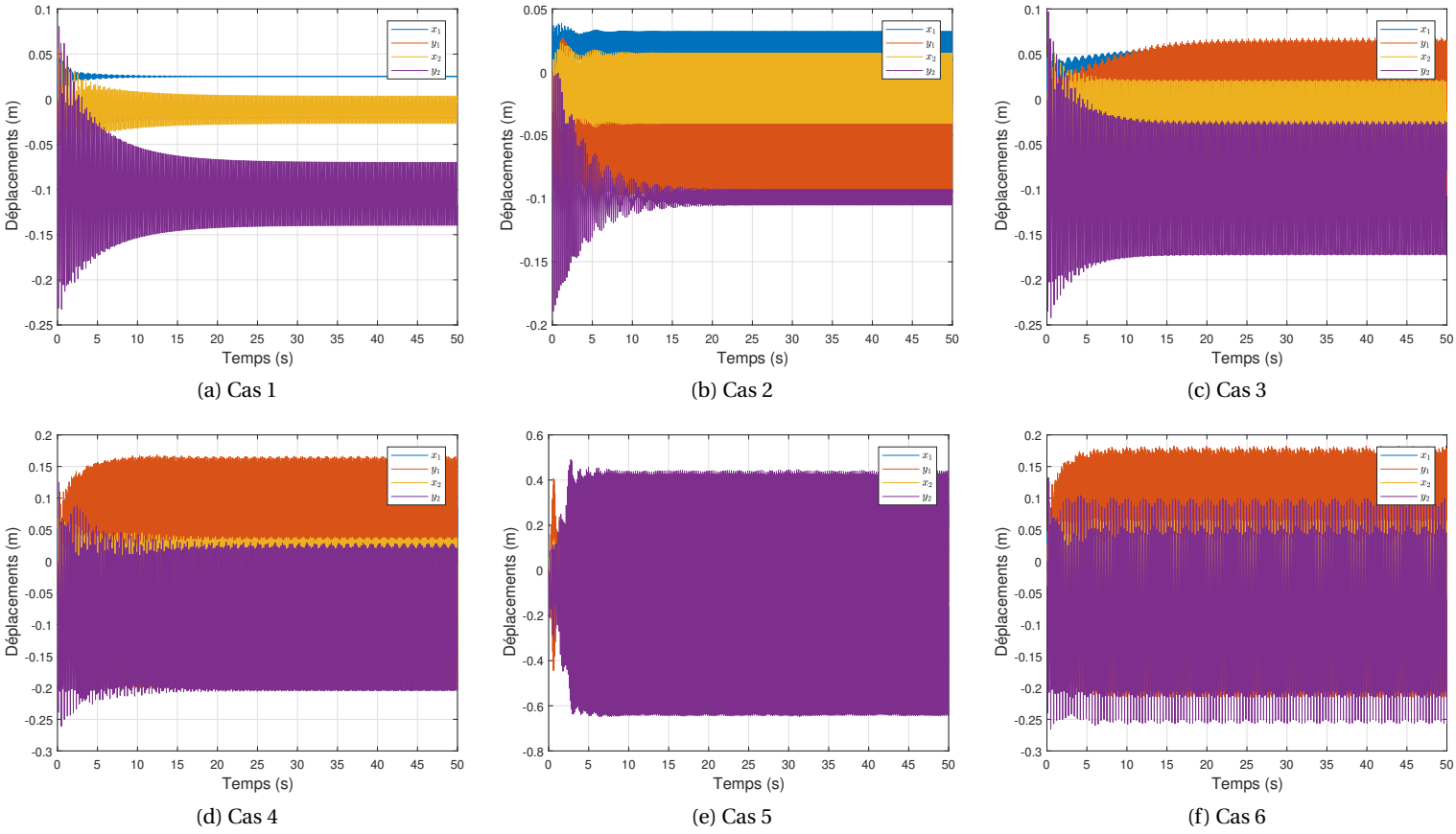
TABLEAU 6.3 – Nombres de fondamentales, d'harmoniques et de combinaisons linéaires présentes dans les FFT entre 0 et 30 Hz pour les différents cas

avec un fort couplage. Puis plusieurs cas à multi-instabilités seront présentés dont le premier permettra de calibrer les différents paramètres de la méthode MASA. L'objectif ici est d'illustrer différents cas d'application de la méthode MASA afin de montrer sa capacité à prédire le comportement dynamique d'un système frottant et d'identifier ses limitations. Les différents cas retenus sont donnés Tableau 6.2, les caractéristiques du système ainsi que les fréquences instables et les parties réelles associées obtenues par calcul CEA y sont résumées.

6.3.2 Analyse des résultats obtenus par intégration temporelle

Dans un premier temps, les réponses dynamiques pour les différents cas d'étude sont déterminées. Pour cela, une légère perturbation de la position d'équilibre est considérée et un calcul par intégration temporelle permet d'obtenir la réponse transitoire et stationnaire du système. L'évolution des déplacements par rapport au temps est donnée Figure 6.6. Les FFT des différents déplacements sont calculées sur les dix dernières secondes et sont respectivement données Figures 6.7 et 6.8 pour les déplacements x_1 et y_2, les cycles limites associés sont représentés Figures 6.9 et 6.10. Pour chaque cas, les fréquences identifiées entre 0 et 30 Hz dans les FFT des quatre degrés de liberté sont relevées et les résultats sont traduits Tableau 6.3 où sont donnés le nombre de fondamentales identifiées, le nombre d'harmoniques identifiées impliquées dans la réponse temporelle ainsi que le nombre de combinaisons linéaires des deux fréquences présentes dans les FFT.

Les comportements temporels entre les différentes configurations sont différents et sont plus ou moins complexes. En effet, les formes des cycles limites peuvent être très différentes (voir Figures 6.9 et 6.10) et les FFT font apparaitre plus ou moins de pics avec parfois plusieurs fréquences fondamentales, leurs harmoniques et leurs combinaisons linéaires. Certains cas ont des spectres relativement simples avec une unique fondamentale et ses harmoniques (voir Tableau 6.3 pour les deux premiers cas), alors que d'autres ont des spectres impliquant plusieurs fondamentales et de nombreuses combinaisons de



(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

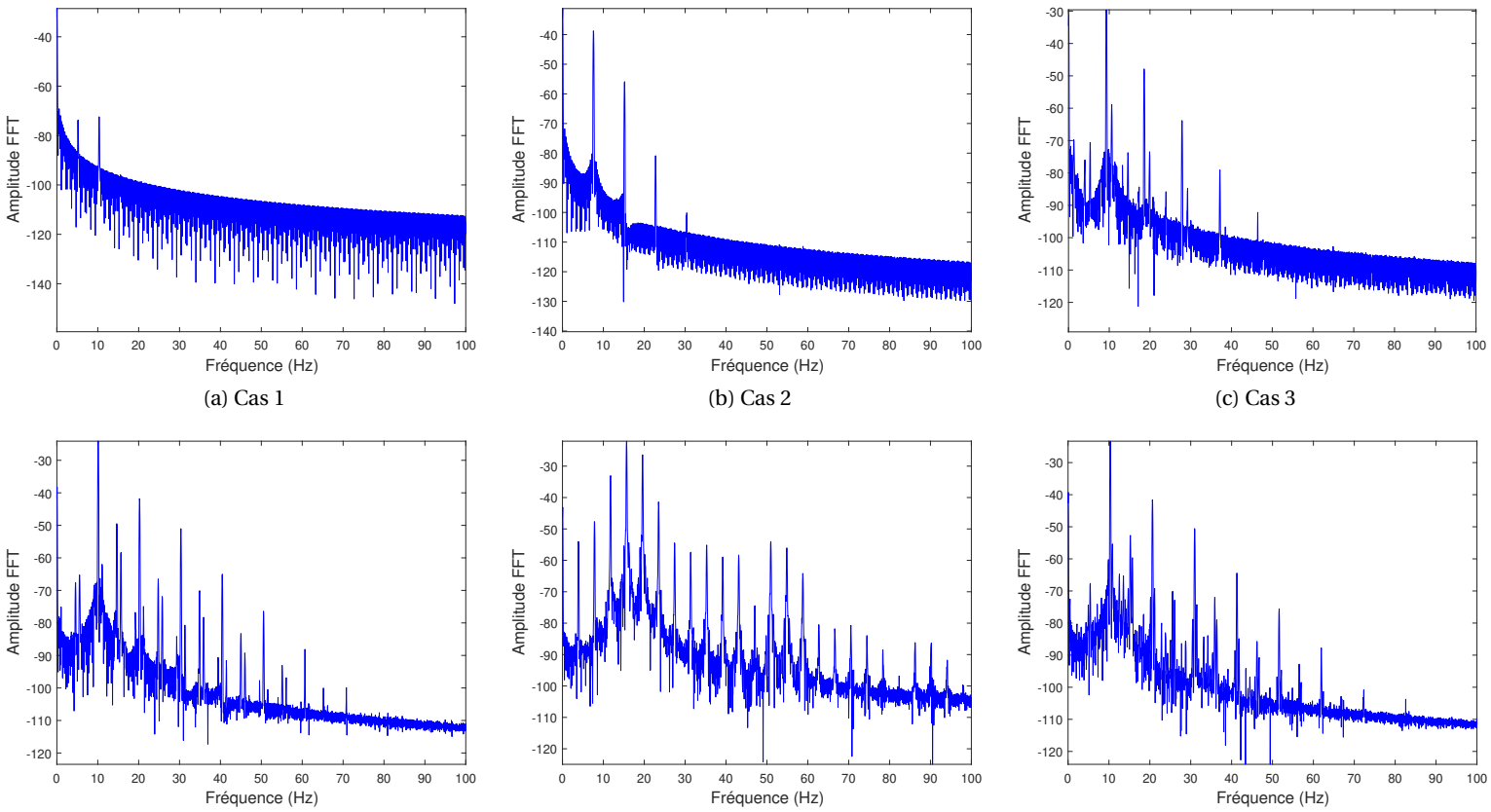
(d) Cas 4 (e) Cas 5 (f) Cas 6

FIGURE 6.6 – Déplacements en fonction du temps pour les différents cas d'étude

ces fondamentales (voir Tableau 6.3 pour les derniers cas).

Dans les deux premiers cas, une unique instabilité est détectée avec la CEA et une unique fréquence fondamentale est présente au temporel. Par exemple, sur le premier cas, les FFT font apparaitre un pic fondamental à 5.18 Hz et ses harmoniques (voir Figures 6.7a et 6.8a). Les réponses vibratoires associées font clairement apparaitre les contributions d'une fréquence fondamentale et potentiellement de sa seconde harmonique avec la formation d'une boucle interne sur le degré de liberté x_1 (voir Figure 6.9a). Sur le second cas, les différentes FFT montrent que la dynamique du système est contrôlée par une fondamentale à 7.57 Hz et ses harmoniques (voir Figures 6.7b et 6.8b), la fréquence a légèrement évolué par rapport à celle donnée par la CEA, à savoir 7.39 Hz contre 7.57 Hz. Le degré de liberté x_1 fait intervenir les harmoniques 2 à 5 alors que le degré de liberté y_2 fait apparaitre les harmoniques 2 et 3 uniquement. Le pic avec la plus grande contribution est le pic de la première harmonique dans les deux cas.

Dans le troisième cas, deux instabilités sont identifiées par la CEA, une à 5.47 Hz avec une partie réelle de 3.3 et une à 9.27 Hz avec une partie réelle de 0.007, très inférieure à la première et pratiquement nulle. On observe que les cycles limites obtenus, en particulier pour le degré de liberté x_1, ont beaucoup évolué par rapport au premier cas. L'analyse des FFT données Figures 6.7c et 6.8c montre que de nombreux pics sont présents dans la réponse temporelle avec deux fondamentales identifiées à 5.31 Hz et 9.27 Hz. Les différents pics correspondent à des combinaisons linéaires de ces deux fréquences. Les différentes fréquences relevées entre 0 et 30 Hz ainsi que leur décomposition sont résumées Tableau 6.4. Ces résultats sont aussi résumés Tableau 6.3 où sont donnés le nombre de



(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

(d) Cas 4 (e) Cas 5 (f) Cas 6

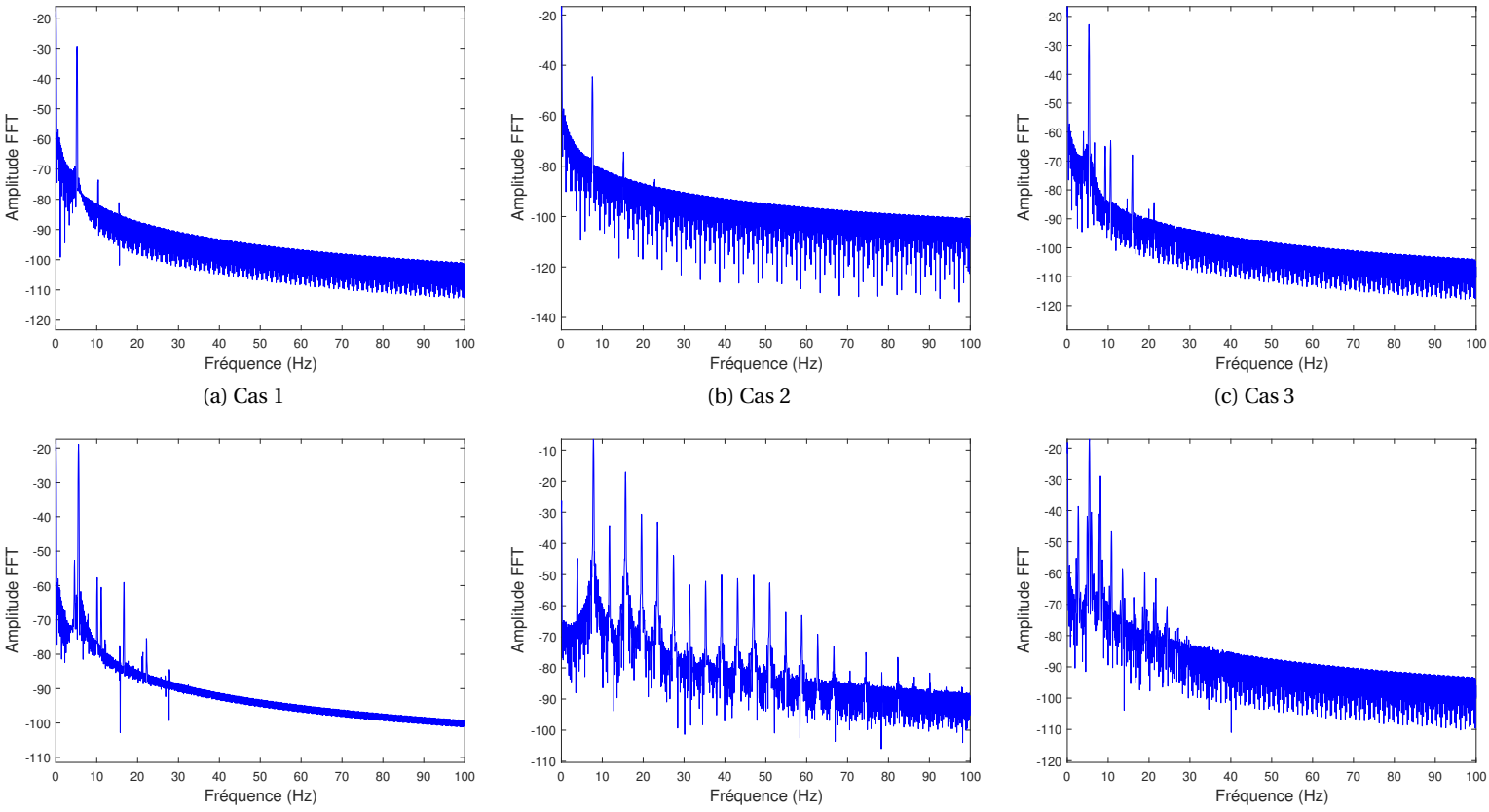
FIGURE 6.7 – FFT du déplacement x_1 pour les différents cas d'étude

Freq (Hz)	**4.028**	**5.31**	**6.65**	**9.27**	**10.62**	**14.59**	**15.93**	**18.55**	**19.9**	**21.18**	**27.89**	**29.24**
Décomposition	$6f_1-3f_2$	f_1	$3f_1-f_2$	f_2	$2f_1$	f_1+f_2	$3f_1$	$2f_2$	$-5f_1+5f_2$	$-3f_1+4f_2$	$7f_1-f_2$	$9f_1-2f_2$

TABLEAU 6.4 – Fréquences comprises entre 0 Hz et 30 Hz relevées dans les FFT et leur décomposition - Troisième cas

fondamentales, le nombre d'harmoniques et le nombre de combinaisons linéaires présentes dans la FFT entre 0 et 30 Hz. Ainsi, sur ce cas, deux fondamentales sont identifiées et trois harmoniques interviennent dans la réponse dynamique, à savoir $2f_1$, $3f_1$ et $2f_2$, et 7 pics correspondants à des combinaisons linéaires des deux fondamentales sont présents. On remarque tout de même que pour x_1, les pics prépondérants correspondent à la fondamentale à 9.27 Hz et à ses harmoniques (voir Figure 6.7c), une analyse similaire peut être faite pour y_1. Pour x_2 et y_2, les pics prépondérants correspondent à la fondamentale à 5.31 Hz et à ses harmoniques (voir Figure 6.8c). Ainsi, chaque masse oscille principalement à une fréquence et les contributions liées à l'autre masse sont relativement faibles.

Dans le quatrième cas, la CEA met en évidence deux instabilités avec une partie réelle identique égale à 5.75 et de fréquences égales à 5.47 Hz et 10 Hz. Comme dans le cas précédent, les FFT sont composées de nombreux pics engendrés par deux fondamentales égales à 5.5 Hz et 10.13 Hz et leurs combinaisons linéaires. La répartition entre le nombre d'harmoniques et le nombre de combinaisons linéaires est donnée Tableau 6.3. On voit que le nombre d'harmoniques impliquées dans la réponse temporelle par rapport au troisième cas a augmenté. Dans le cas précédent, chaque masse oscillait principalement à une fréquence et ses harmoniques et la contribution des combinaisons linéaires



(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

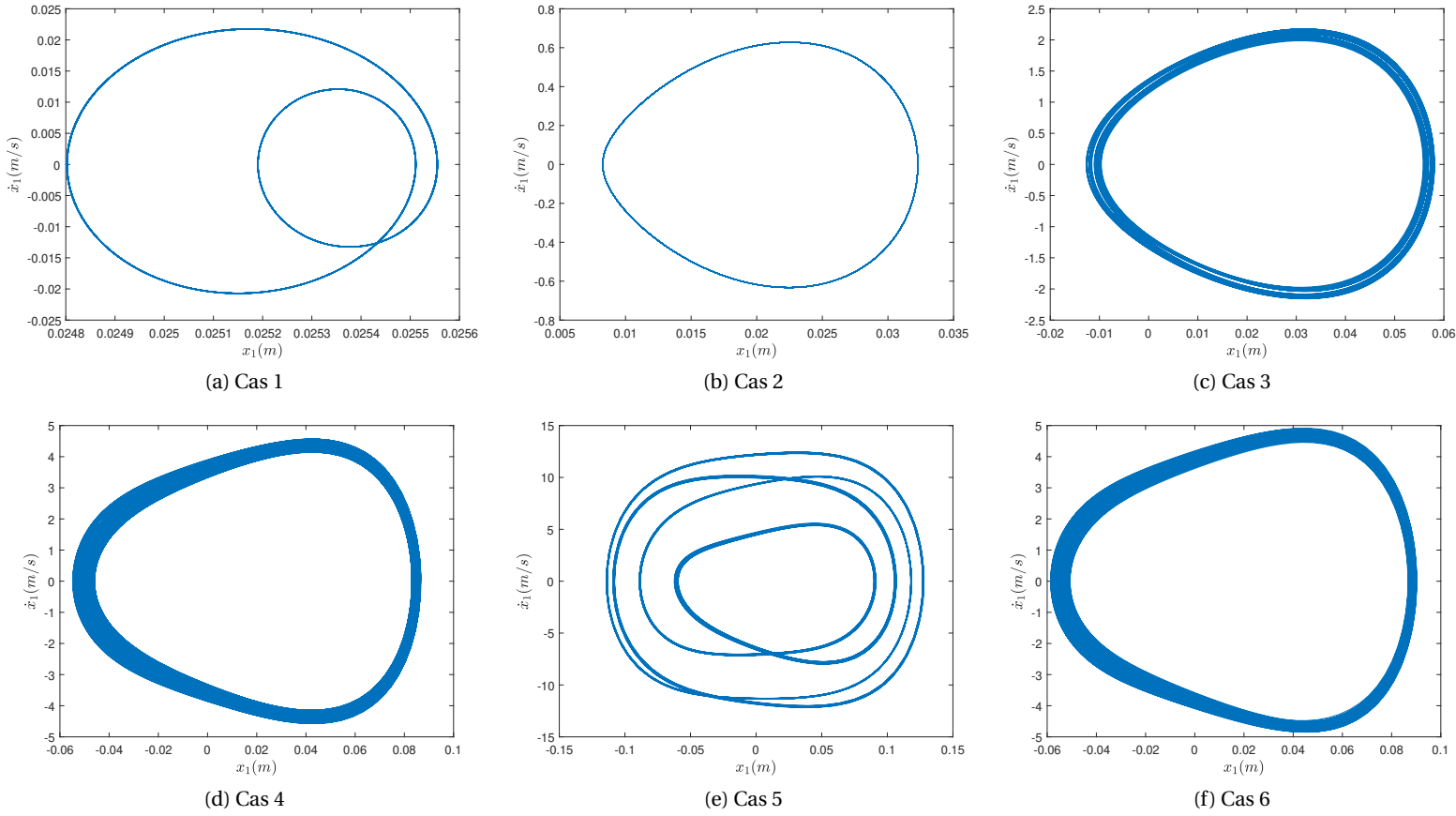
(d) Cas 4 (e) Cas 5 (f) Cas 6

FIGURE 6.8 – FFT du déplacement y_2 pour les différents cas d'étude

des deux fréquences était relativement faible. Dans ce quatrième cas, la contribution des pics correspondants aux combinaisons linéaires est beaucoup plus importante (comparer Figure 6.7c avec Figure 6.7d). Toutefois, la première harmonique de chaque fondamentale reste l'harmonique qui pilote le plus la dynamique du système. Les cycles limites obtenus sont de forme similaire au cas précédent, même si leur amplitude a augmenté.

Le cinquième cas est situé à proximité des points de bifurcation de Hopf et deux instabilités avec des parties réelles du même ordre de grandeur sont identifiées à la CEA, la première à 5.7 Hz avec une partie réelle de 1.92 et la seconde à 9.93 Hz avec une partie réelle de 1.5. On remarque que les cycles limites sont très différents du second cas (comparer les Figures 6.9b et 6.10b aux Figures 6.9e et 6.10e), et que leur forme est complexe indiquant que le spectre de la réponse temporelle est riche. Cette observation est confirmée par les FFT données Figures 6.7e et 6.8e qui sont composées de nombreux pics correspondants à une fondamentale à 3.9 Hz et ses harmoniques, 8 entre 0 et 30 Hz (voir Tableau 6.3). Deux pics se démarquent tout de même, un premier à 15.69 Hz pour le déplacement x_1 et un second à 7.8 Hz pour le déplacement y_2.

Dans le dernier cas, la CEA identifie deux instabilités, une première à 5.46 Hz avec une partie réelle de 6.21 et une seconde à 10.03 Hz avec une partie réelle de 7.48. Les déplacements sont donnés Figure 6.6f, et les FFT sont données Figures 6.7f et 6.8f. Les cycles limites associés sont donnés Figures 6.9f et 6.10f. La forme du cycle limite du degré de liberté y_2 est très différente des autres cas laissant présager l'émergence d'autres fréquences et/ou d'autres harmoniques dans la réponse temporelle. La même analyse peut être faite concernant le degré de liberté x_2. La FFT associée à x_1 présente le même com-



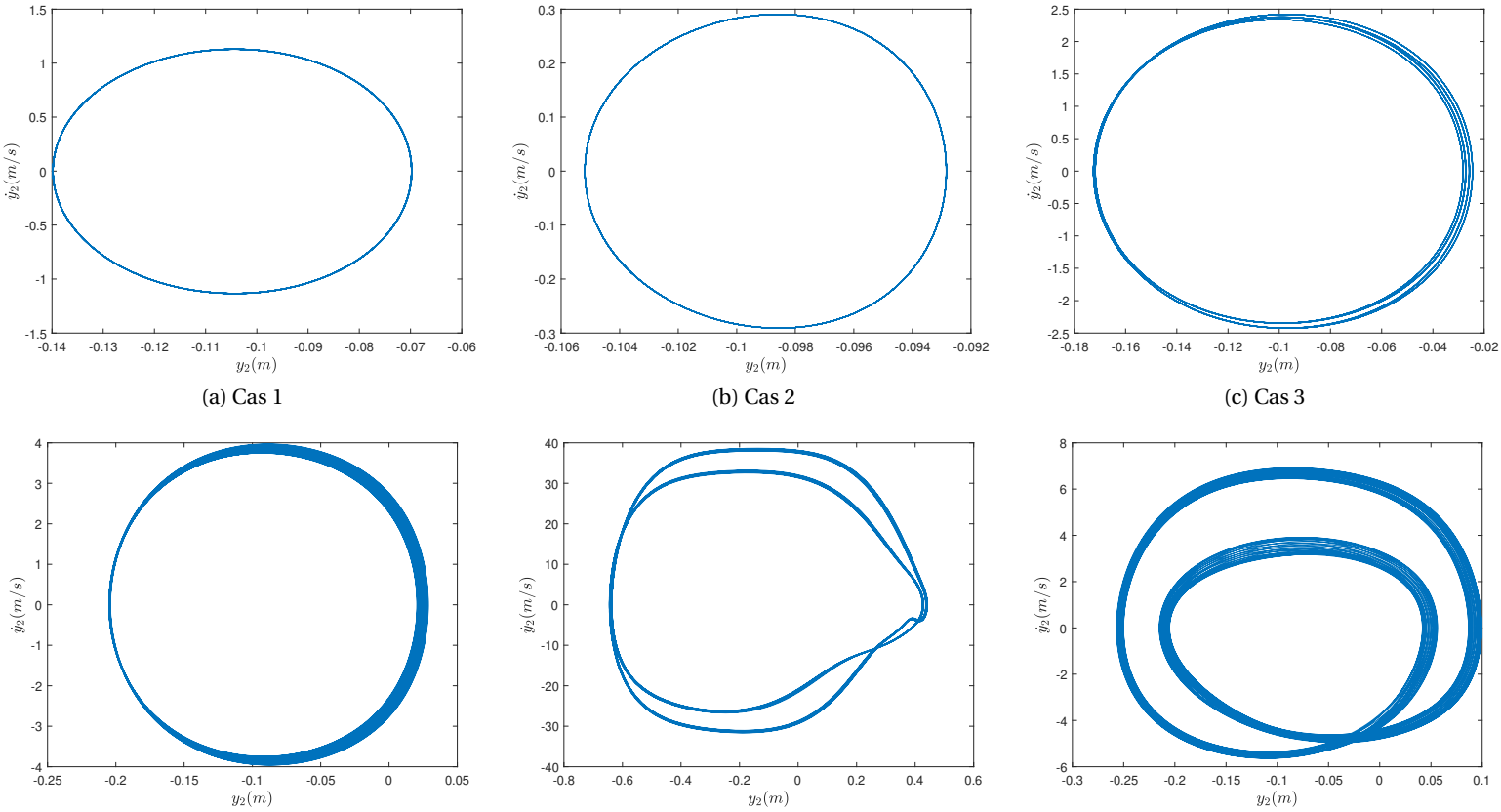
(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

(d) Cas 4 (e) Cas 5 (f) Cas 6

FIGURE 6.9 – Cycles limites du degré de liberté x_1 pour les différents cas d'étude

portement que les cas un, trois et quatre, c'est-à-dire qu'elle est générée par deux fréquences incommensurables égales à 5.43 Hz et 10.31 Hz, les pics prépondérants correspondants à la fréquence 10.31 Hz et ses harmoniques. On observe que les deux fréquences sont pratiquement commensurables. La FFT de y_2 présente les mêmes fréquences dans son spectre, c'est-à-dire une combinaison linéaire des deux fréquences fondamentales. Cependant, deux pics sont largement prépondérants, un premier à 5.43 Hz et un second situé à 8.11 Hz. En d'autres termes, les deux pics prépondérants correspondent à la première harmonique d'une des fondamentales et à la combinaison linéaire suivante des deux fréquences fondamentales : $-8\times5.43+5\times10.31 = 8.11$ Hz. Dans la FFT de x_2, il s'agit du pic prépondérant.

En conclusion, les six cas proposés et étudiés par l'intermédiaire de la CEA et par intégration temporelle illustrent des comportements vibratoires non-linéaires plus ou moins complexes. Ils représentent un panel assez caractéristique des résultats pouvant être obtenus et observés pour les instabilités de crissement, et vont servir de références pour tester la technique MASA proposée et appréhender ses avantages, mais également ses limitations.



(a) Cas 1 (b) Cas 2 (c) Cas 3

(d) Cas 4 (e) Cas 5 (f) Cas 6

FIGURE 6.10 – Cycles limites du degré de liberté y_2 pour les différents cas d'étude

6.4 Application de la méthode MASA pour la prédiction des modes instables en dynamique non-linéaire

La méthode de la CEA permet d'identifier les modes divergents autour de la position d'équilibre, cependant ces modes ne sont pas nécessairement impliqués dans la réponse dynamique non-linéaire du système alors que d'autres non identifiés par la CEA le sont. L'objectif premier de la méthode MASA est de pouvoir identifier ces modes instables qui apportent une contribution lors de la génération des phénomènes vibratoires non-linéaires. Pour cela, la méthode est appliquée sur les différents cas considérés et les résultats sont comparés aux résultats de référence obtenus par intégration temporelle afin d'évaluer ses capacités dans différents contextes. Le but de cette partie est d'illustrer l'application de la méthode et le type de résultats obtenus. Dans un premier temps elle sera appliquée sur des cas mono-instables puis dans un second temps sur des cas multi-instables. Le calibrage de certains paramètres propres à la méthode MASA sera réalisé et discuté sur l'un des cas d'étude.

6.4.1 Cas mono-instable - Cas 1 et 2

Tout d'abord, on s'intéresse aux deux premiers cas, c'est-à-dire où une unique instabilité est détectée à la CEA. Dans les deux cas, on voit que la fréquence évolue légèrement entre la CEA et l'intégration temporelle puisqu'elle passe de 5.29 Hz à 5.18 Hz dans le premier cas et de 7.39 Hz à 7.57 Hz dans le second cas. Pour les deux cas, une unique fréquence fondamentale apparait dans le spectre de la réponse temporelle et peu d'harmoniques

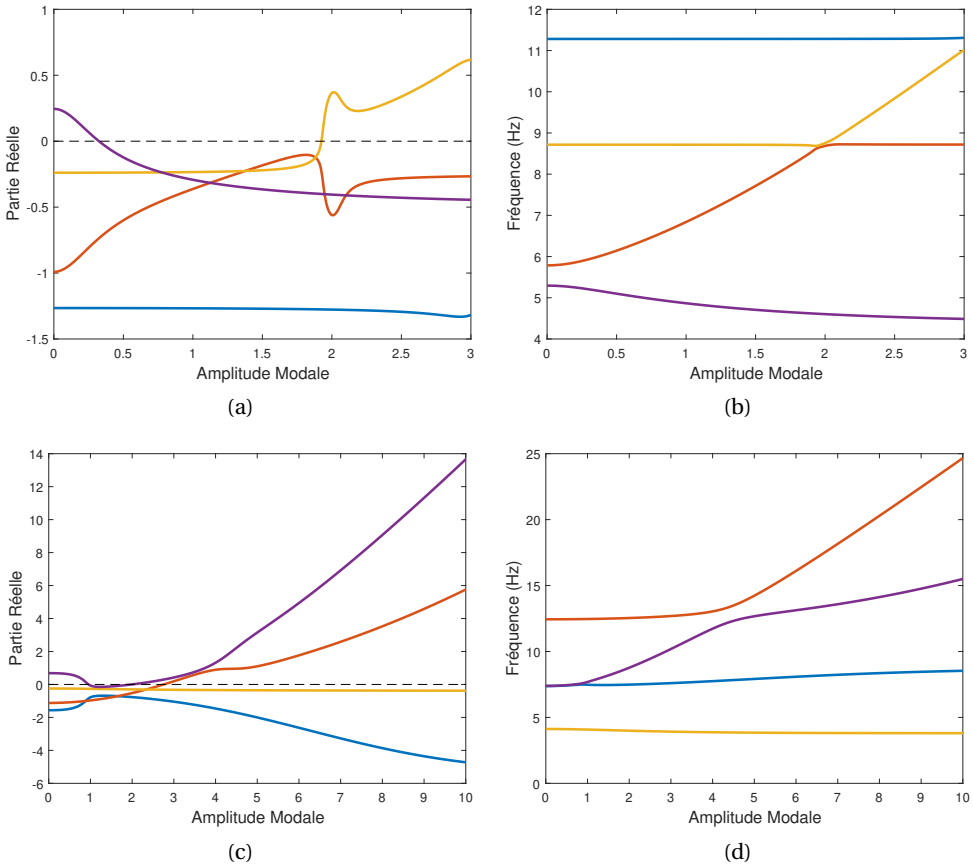


FIGURE 6.11 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences propres (b,d) des matrices dynamiques successives en fonction de l'amplitude modale pour le premier cas (a,b) et le second cas (c,d)

sont impliquées puisque seulement les harmoniques 2 à 5 sont identifiées dans la réponse.

Dans le cas mono-instable, la méthode MASA est initialisée avec la pulsation et la déformée du mode instable identifiées par la CEA et un balayage en amplitude modale sur $[0,3]$ est réalisé. Pour chaque valeur de l'amplitude modale p, les efforts non-linéaires équivalents et la matrice dynamique associée sont déterminés et les valeurs propres de cette dernière sont calculées. Les évolutions des parties réelles des valeurs propres et des fréquences obtenues dans le premier cas sont données Figure 6.11, des évolutions similaires sont obtenues pour le second cas.

Le mode instable correspond au mode violet sur la figure et l'évolution de la partie réelle de la valeur propre associée permet de statuer sur la divergence de la solution dynamique approchée pour chaque niveau d'amplitude. Ainsi, tant que l'amplitude modale est inférieure à $p = 0.33$, la partie réelle de la valeur propre associée au mode instable est positive. Ceci signifie que la solution approchée considérée pour ce niveau d'amplitude augmente en vibration. Si l'amplitude est supérieure à $p = 0.33$, alors la partie réelle de la valeur propre est négative et la solution approchée voit ses niveaux de vibration s'atténuer. Lorsque $p = 0.33$, alors la partie réelle est nulle et les niveaux d'amplitude restent constants. Par ailleurs, on observe des évolutions complexes des valeurs propres jaune et orange avec des parties réelles et des fréquences qui se croisent. De plus, lorsque l'amplitude modale du mode initialement instable est supérieure à $p = 1.93$, alors le mode

jaune a une valeur propre à partie réelle positive et peut potentiellement devenir instable. Cependant, pour savoir statuer sur la divergence de ce mode dans le système global, il faudrait appliquer la méthode MASA sur ce mode. Cette étape n'est pas réalisée ici car le mode instable se stabilise avant $p = 0.33$. En effet, une légère perturbation du mode va entrainer dans un premier temps une croissance des niveaux de vibration puisque la partie réelle de sa valeur propre est positive. Ces niveaux de vibration vont continuer à croitre, mais de moins en moins vite puisque la partie réelle diminue, puis vont se stabiliser lorsque la partie réelle deviendra nulle et la fréquence associée est de 5.19 Hz.

Ainsi, dans ce cas, la méthode MASA identifie une solution dynamique stationnaire approchée à $p = 0.33$ du problème linéarisé et tronqué pour laquelle la partie réelle de la valeur propre s'annule. Pour cette valeur de l'amplitude modale, la fréquence associée du mode est de 5.19 Hz. Ici la méthode MASA prédit la fréquence du système identifiée par intégration temporelle, à savoir 5.18 Hz, de façon plus précise que la CEA. La notion de cycle limite et d'approximation de la réponse vibratoire par l'intermédiaire de la méthode MASA sera présentée dans le paragraphe 6.4.3.

Dans le second cas, le même type d'analyse peut être mené et les évolutions des valeurs propres sont données Figure 6.11. Lorsque l'amplitude modale est inférieure à 0.95, alors la solution dynamique approchée est divergente et lorsqu'elle est supérieure à 0.95, alors la solution dynamique approchée s'atténue. Dans ce cas aussi, la méthode MASA identifie un niveau d'amplitude $p = 0.95$ pour lequel la partie réelle de la valeur propre s'annule, ce qui signifie qu'une solution stationnaire approchée est identifiée par la méthode MASA, ceci sera illustré et discuté en détail au paragraphe 6.4.3. La fréquence associée à cette solution est de 7.64 Hz. Ici aussi, la prédiction en fréquence donnée par la méthode MASA est meilleure que celle prédite par la CEA, à savoir 7.64 Hz contre 7.39 Hz pour une fréquence de la solution temporelle égale à 7.57 Hz.

Dans ces deux cas mono-instables, la méthode MASA a permis d'évaluer la divergence de la solution dynamique approchée considérée. Pour chaque niveau d'amplitude étudié, il est possible de statuer sur la divergence ou l'atténuation de cette solution et d'identifier les contributions potentielles des modes instables dans la solution dynamique non-linéarisée. Dans ces cas précis, la méthode a identifié une valeur de l'amplitude modale qui permet d'annuler la partie réelle de la valeur propre associée. La fréquence associée est une meilleure estimation de la fréquence obtenue par intégration temporelle du système complet que celle de la CEA .

Dans les cas où une unique instabilité est identifiée à la CEA, la méthode MASA identifie un mode présent dans la réponse dynamique du système, ce qui est cohérent avec les observations faites sur le régime temporel. Dans ces cas, la prédiction en fréquence donnée par la méthode MASA est de meilleure qualité que la prédiction faite par la méthode CEA. Cette qualité de la prédiction peut être liée au fait que la dynamique du système dans ces deux cas reste simple et est principalement pilotée par la fondamentale et que très peu d'harmoniques sont présentes. Ainsi, même en effectuant une troncature au premier ordre pour exprimer une solution approchée du système linéarisé, l'estimation reste très correcte. D'ailleurs, dans le premier cas, moins d'harmoniques sont impliquées dans la réponse dynamique que dans le second cas et l'estimation en fréquence est meilleure.

6.4.2 Cas multi-instable - Cas 3 à 6

Dans un second temps, la méthode MASA est appliquée sur les cas 3 à 6 où deux instabilités sont identifiées lors du calcul CEA. L'ensemble des résultats en dynamique non-linéaire via l'intégration temporelle a été proposé au paragraphe 6.4. Dans un premier temps, différents paramètres doivent être calibrés afin d'utiliser la méthode, cette étape est présentée sur le troisième cas et les résultats obtenus seront montrés en détail afin d'expliciter la démarche appliquée sur les autres cas.

Calibrage des paramètres de la méthode MASA - Cas 3

Pour rappel, les caractéristiques associées au troisième cas sont données Tableau 6.2. La méthode de la CEA identifie deux instabilités, une à 5.47 Hz et une à 9.27 Hz. La partie réelle associée à la seconde instabilité vaut 0.07, elle est proche de zéro et est largement inférieure à la première qui vaut 3.3. Les deux instabilités ressortent dans le temporel avec des fréquences qui ont légèrement évolué égales à 5.31 Hz et 9.27 Hz. Dans un premier temps, la méthode MASA est appliquée pour des valeurs prédéfinies des amplitudes modales p_1 et p_2 associées à chacune des instabilités. Ainsi, pour chaque couple d'amplitudes modales (p_1, p_2), les matrices dynamiques $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ de chaque sous-système sont calculées et leurs valeurs propres sont déterminées. Les évolutions des valeurs propres de chaque sous-système sont données Figure 6.12. On remarque que les évolutions sont différentes dans chaque sous-système. En effet, dans le premier sous-système, la partie réelle du mode violet reste sensiblement constante et égale à -1.5 alors que dans le second sous-système, elle augmente lorsque $p_1 > 2.3$. De même, la fréquence de ce même mode n'est pas sensible à une variation de p_1 dans le premier sous-système alors que dans le second sous-système, lorsque $p_1 > 2.3$ la fréquence se met à augmenter et est moins sensible à une évolution de p_2. Dans les deux sous-systèmes, les évolutions des valeurs propres sont complexes, par exemple les parties réelles des modes jaune et orange évoluent brusquement sur certaines zones alors qu'elles sont sensiblement constantes sur le reste de l'espace. Il semble compliqué d'après ces graphiques d'identifier les zones où le système va évoluer et donc de statuer sur la potentielle stabilité du système. Par ailleurs, l'obtention de ce type de résultats nécessite un grand nombre de calculs qu'il ne sera pas possible de fournir sur un modèle de plus grande taille ou lorsque plus d'instabilités seront présentes. C'est pourquoi il est primordial de développer une relation entre les différents p_i sous la forme de l'équation 6.63 afin de pouvoir suivre l'évolution du système.

L'utilisation d'une formule de récurrence telle que l'équation 6.63 nécessite le choix de deux paramètres, à savoir la discrétisation en temps, c'est-à-dire le choix du δt, et le choix des conditions initiales. L'influence de ces deux paramètres va être analysée dans la suite.

Tout d'abord, l'influence de l'initialisation de l'amplitude modale sur les résultats est étudiée. Pour cela différentes initialisations sont considérées, les différentes valeurs utilisées dans l'étude sont : $(p_1^0, p_2^0) = \{(0.1, 0.1), (0.001, 0.01), (0.01, 0.001), (0.5, 0.5)\}$. Ces initialisations correspondants à des perturbations, elles sont volontairement faibles. Les évolutions des différents paramètres caractérisant l'évolution des modes sont données Figure 6.13. Il s'agit pour chaque mode de l'évolution de son amplitude modale p_i, de la partie réelle de sa valeur propre et de sa fréquence en fonction du temps. Il est à noter que les parties réelles et les fréquences sont extraites à partir des valeurs propres des matrices du sous-système dynamique associé au mode. Par ailleurs, en $t = 0$, les valeurs des parties réelles et des fréquences correspondent à celles obtenues par la CEA, c'est-à-dire

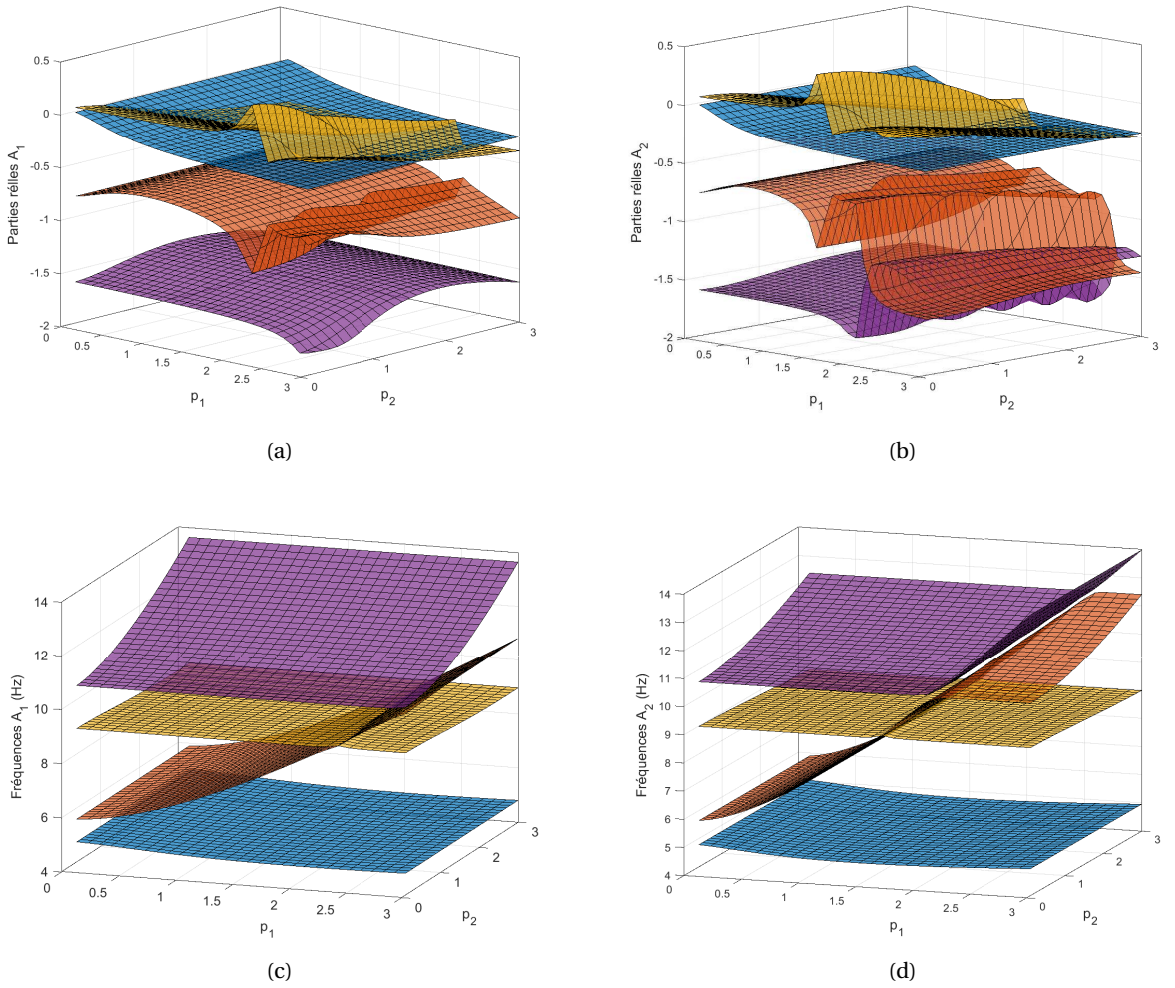


FIGURE 6.12 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,b) et des fréquences (c,d) du sous-système associé au premier (a,c) et au second mode (b,d) pour une grille d'amplitudes modales (p_1, p_2) - Troisième cas

lorsque $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Le problème étant discontinu en $\mathbf{0}$ dans le cas multi-instable, de grandes variations peuvent être observées.

On remarque tout d'abord que quelque soit l'initialisation, qu'elle soit identique ou non pour les deux modes, les différents paramètres convergent toujours vers la même valeur. En effet, les deux parties réelles tendent vers 0, le premier mode voit sa fréquence converger vers 4.76 Hz et le second vers 9.13 Hz. L'amplitude modale du premier mode converge toujours vers 0.47 et celle du second mode vers 0.97.

Cependant, on constate que le temps nécessaire pour converger vers la solution est fortement impacté par le choix des conditions initiales. En effet, une initialisation de (0.1,0.1) ou de (0.5,0.5) conduira à une convergence plus rapide de la méthode. En d'autres termes, moins de calculs seront nécessaires pour obtenir le résultat. Cependant, le cas de l'initialisation (0.5,0.5) semble légèrement différent : le premier mode voit son amplitude modale décroitre et l'évolution de la partie réelle du second mode est différente des autres. Ceci montre qu'initialiser avec une perturbation trop loin de l'origine implique que le système "parcourt" un chemin différent sur les surfaces présentées Figure 6.12. En effet, on voit qu'en ce point, le mode à 5 Hz a déjà une valeur propre à partie réelle négative. Pour

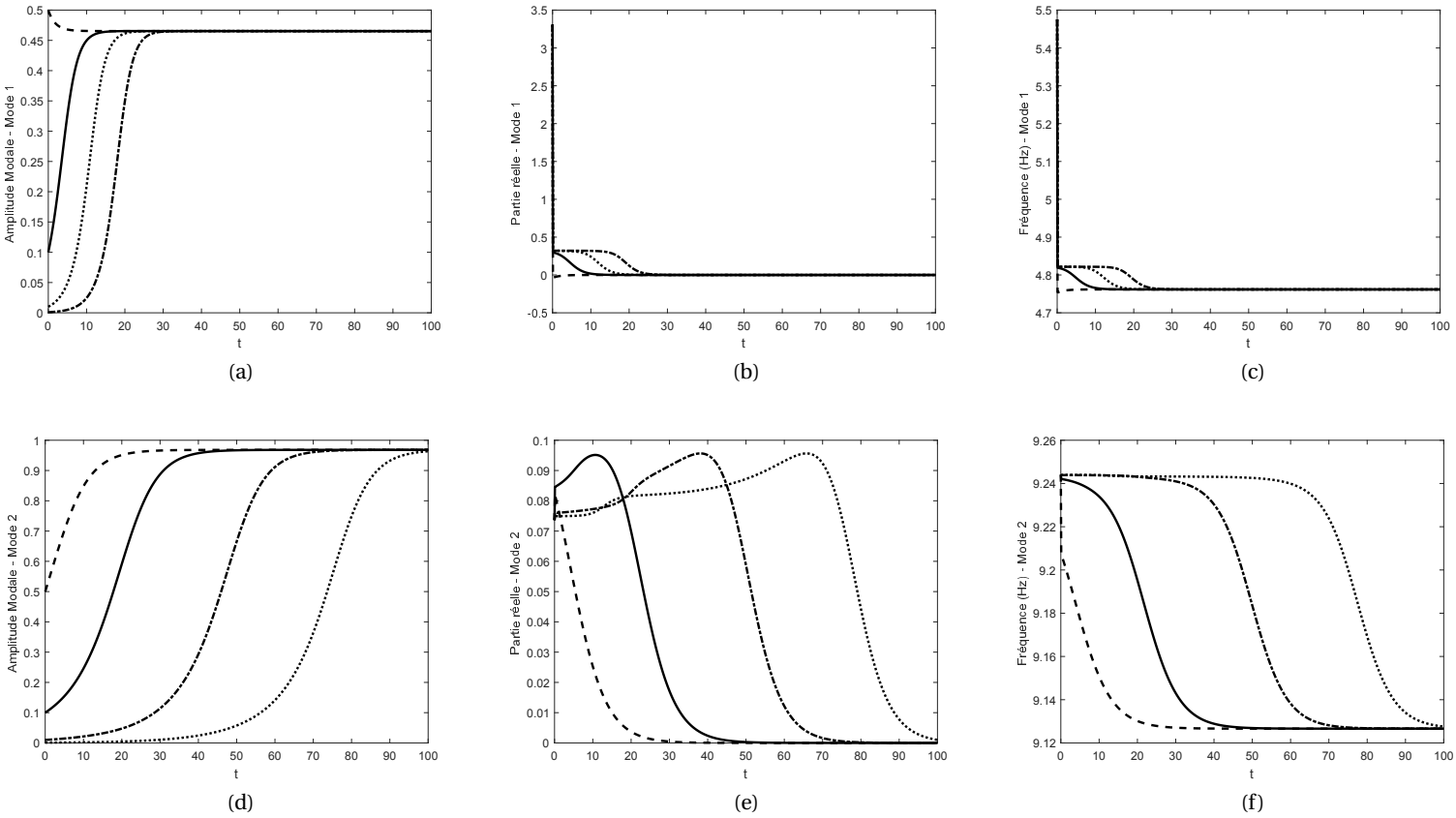


FIGURE 6.13 – Influence de l'initialisation en amplitude modale (p_1^0, p_2^0) sur l'évolution des amplitudes modales (a,d), des parties réelles (b,e) et des fréquences (c,f) du premier mode (en haut) et du second mode (en bas) - Initialisation 1 : (0.1 ; 0.1) (▬▬) - Initialisation 2 : (0.001 , 0.01) (▬ ▪ ▬ ▪) - Initialisation 3 : (0.01 , 0.001) (▪ ▪ ▪) - Initialisation 4 : (0.5 , 0.5) (▬ ▬) - Troisième cas

information, des cas avec des initialisations plus importantes ont été testés, conduisant systématiquement à une divergence de la méthode. Par ailleurs, l'influence de l'initialisation dépend du mode considéré. Par exemple, pour le premier mode, quelque soit l'initialisation, le système a convergé en moins de 40 s alors que seules deux initialisations permettent une telle performance avec le second mode.

Ainsi le choix de l'initialisation en amplitude est important. Prendre une amplitude modale suffisamment grande permet de limiter le nombre de calculs à réaliser et permet d'arriver plus rapidement à la solution. Cependant, une initialisation trop éloignée de l'origine peut conduire à des évolutions différentes des paramètres, voire à une divergence de la solution. Ainsi, dans la suite de cette partie, une initialisation de $(0.1, 0.1)$ est choisie.

Dans un second temps, l'influence de la discrétisation en temps est étudiée, c'est-à-dire l'influence du choix de δt dans l'équation 6.63. Pour cela différentes valeurs sont considérées, à savoir $[0.01, 0.1, 1, 10]$ s. La méthode MASA est appliquée sur ces différents cas et les différents paramètres caractérisant les modes sont déterminés et tracés Figure 6.14.

On remarque tout d'abord que le choix d'un δt trop grand entraine une divergence de la solution, comme l'illustre le cas $\delta t = 10$ s sur la Figure 6.14. En effet, lorsque ce dernier est trop grand, considérer que l'accroissement est constant pendant cet intervalle de temps

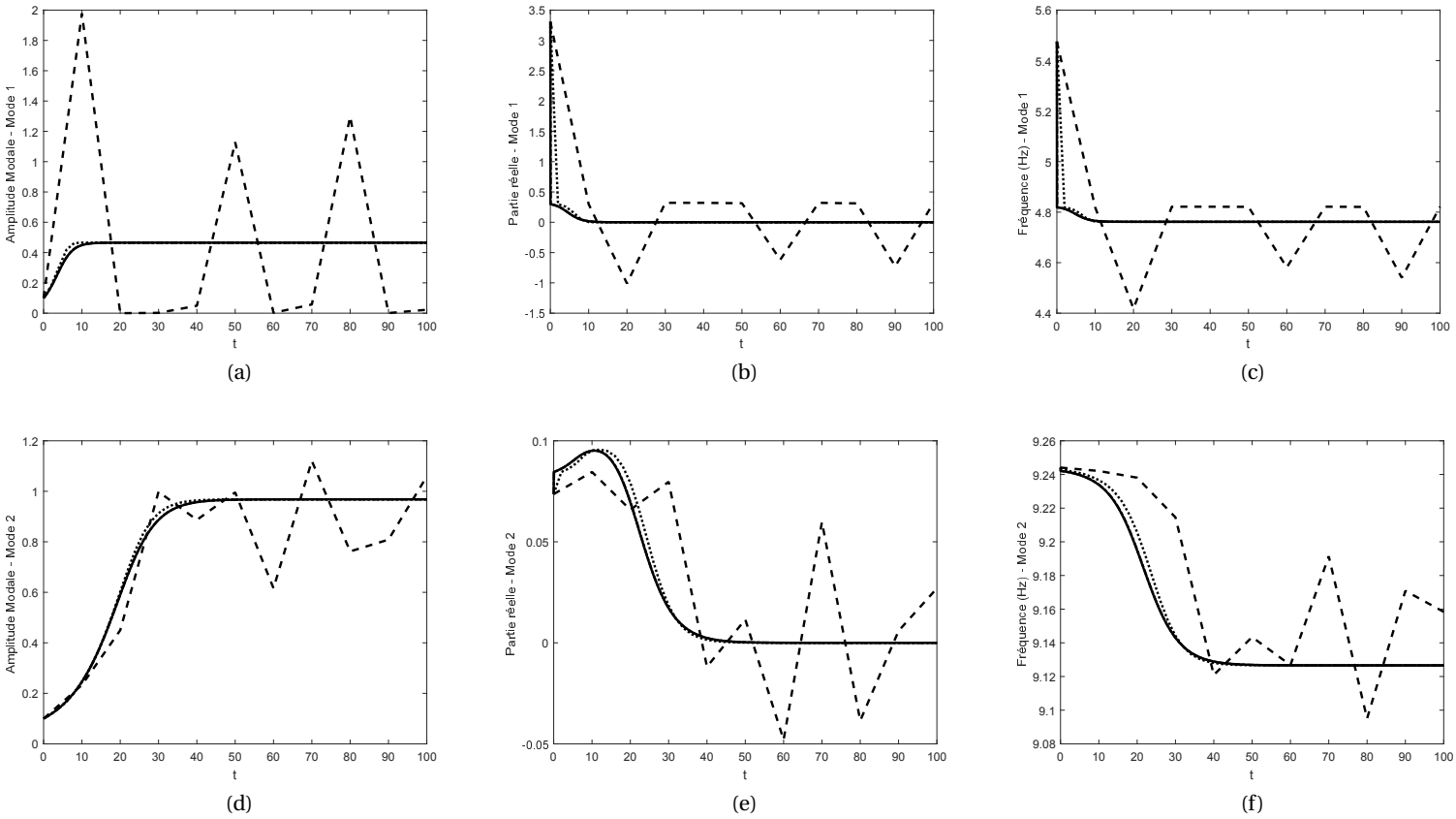


FIGURE 6.14 – Influence de la discrétisation en temps sur l'évolution des amplitudes modales (a,d), des parties réelles (b,e) et des fréquences (c,f) du premier mode (en haut) et du second mode (en bas) - $\delta t = 0.01$ (——) - $\delta t = 0.1$ (- - -) - $\delta t = 1$ (·····) - $\delta t = 10$ (– – –) - Troisième cas

est une hypothèse trop grossière qui ne permet pas de suivre l'évolution des modes. Pour les autres intervalles de temps considérés, une variation de la discrétisation n'a pas d'impact sur la solution. En effet, quelque soit le δt choisi parmi $[0.01, 0.1, 1]$ s, les différents paramètres convergent vers la même valeur à la même vitesse. Cependant, entre le cas $\delta t = 1$ s et $\delta t = 0.01$ s, il aura fallu 100 fois moins de calcul pour aboutir au même résultat.

En conclusion, le choix de la discrétisation en temps est primordial. Un intervalle de temps trop grand ne permet pas de suivre correctement l'évolution des différents modes, et un intervalle de temps trop petit entraînera un nombre de calculs à réaliser élevé. Dans la suite de l'étude, une discrétisation de 0.1 s est choisie.

Une fois ces paramètres fixés, il est possible d'obtenir les évolutions des valeurs propres dans chaque sous-système, elles sont données Figure 6.15. Pour rappel, le comportement divergent ou non de chaque mode dans la solution dynamique globale est donné par son comportement dans son sous-système. Si un sous-système fait apparaitre une divergence sur un autre mode, il est nécessaire de se référer au sous-système de ce mode afin de savoir si cette divergence se traduit effectivement par une divergence dans le système global. On peut voir ici que dans chaque sous-système, la partie réelle associée à chaque mode instable diminue jusqu'à se stabiliser à une valeur nulle.

Finalement, les différents résultats obtenus montrent que les amplitudes modales évoluent jusqu'à ce que les deux parties réelles des valeurs propres associées au modes in-

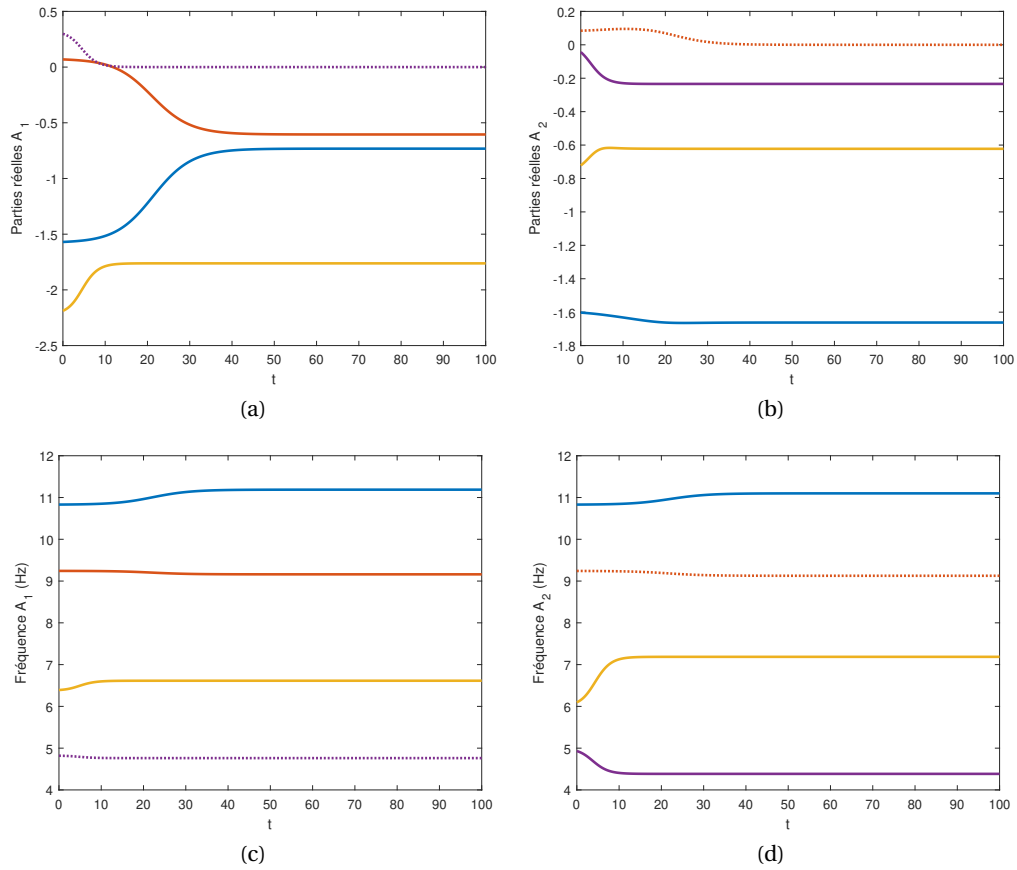


FIGURE 6.15 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,b) et des fréquences (c,d) en fonction du temps des sous-systèmes associés aux modes instables 1 (à gauche) et 2 (à droite) - Mode associé au sous-système : (▬▬▬) - Troisième cas

stables s'annulent. Tant que les deux ne s'annulent pas et qu'au moins l'une des deux est positive, la réponse dynamique approchée par la méthode MASA est divergente et les amplitudes modales des modes instables évoluent. Au bout d'un certain temps, les différents paramètres n'évoluent plus et se stabilisent. Les deux parties réelles étant nulles, ceci signifie que les deux modes "instables" participent à la réponse dynamique non-linéaire du système global avec un niveau de vibration constant, ce qui est cohérent avec les résultats du temporel où les deux instabilités sont présentes (voir Figures 6.7 et 6.8). Ainsi, le premier mode se stabilise à 4.76 Hz avec une amplitude de 0.46 et le second à 9.13 Hz avec une amplitude de 0.97.

Dans le cas présenté ici, la MASA permet de suivre les contributions des deux modes instables pour différentes amplitudes modales et amène à statuer sur la participation (ou non) de chaque mode instable initialement identifié par la CEA dans la solution stationnaire finale du système. Sur ce cas, les fréquences estimées des deux modes instables qui contribuent dans la réponse stationnaire approchée par la méthode MASA sont proches de celles du temporel, à savoir 4.76 Hz et 9.13 Hz contre 5.31 Hz et 9.27 Hz. De plus, la CEA fait ressortir deux instabilités dont une avec une partie réelle quasiment nulle et largement inférieure à l'autre, la méthode MASA a bien réussi à identifier que les deux modes étaient présents dans la réponse dynamique avec des amplitudes modales du même ordre de grandeur. Ceci démontre la pertinence de la méthode proposée pour obtenir la contribution des modes instables. Par ailleurs, dans le cas présent, la méthode MASA a identifié une solution approchée de la réponse stationnaire du système. La comparaison de la so-

lution dynamique approchée par la méthode MASA aux résultats obtenus par intégration temporelle sera discutée au paragraphe 6.4.3.

Discussion sur les autres cas - Cas 4 à 6

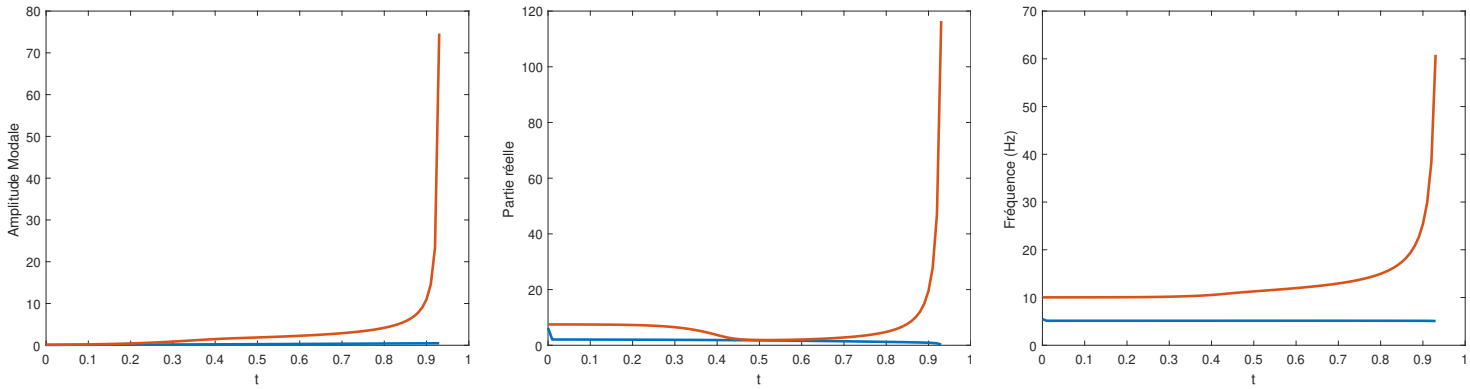
La méthode MASA est appliquée sur les autres cas et les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 6.5 où sont donnés les résultats CEA avec les parties réelles et les fréquences des modes instables, les fréquences fondamentales identifiées au temporel ainsi que le nombre de pics de fréquences relevés entre 0 et 30 Hz sur les différentes FFT, et les résultats MASA, à savoir les amplitudes modales, les fréquences et les parties réelles vers lesquelles converge la méthode.

Pour le quatrième et le cinquième cas, lorsque la méthode MASA est appliquée, les parties réelles des valeurs propres des deux modes instables tendent vers 0 pour un certain couple d'amplitudes modales. Les fréquences associées ont évolué par rapport à celles de la CEA. Pour le quatrième cas, les fréquences des modes instables restent très proches des deux fréquences fondamentales trouvées dans la solution temporelle. Ceci démontre la capacité de la méthode à proposer une estimation des contributions des modes instables même lorsque la réponse dynamique non-linéaire est complexe. Pour le cinquième cas, la méthode MASA prédit une solution dynamique avec deux modes impliqués, cependant une unique fréquence fondamentale est identifiée au temporel avec de nombreuses harmoniques. Ce dernier résultat vient contrebalancer la performance de la méthode MASA mise en avant sur le quatrième cas et illustre les limitations de cette technique MASA qui ne semble pas être en mesure de prédire correctement les résultats des évolutions et des contributions des modes instables lorsque la dynamique du système est complexe. La comparaison des réponses dynamiques stationnaires identifiées par la technique MASA avec l'intégration temporelle sera proposée au prochain paragraphe. Le dernier cas est différent du précédent puisqu'ici la méthode ne permet pas d'identifier un jeu d'amplitudes modales permettant d'annuler les parties réelles des valeurs propres des modes instables. Les parties réelles restant positives, les amplitudes associées augmentent et l'une d'entre elles finit par croitre très fortement et très rapidement. Dans ce cas, la réponse dynamique du système montre que les fréquences qui pilotent la dynamique du système sont l'une des fondamentales et une combinaison linéaire de ces fondamentales. La réponse dynamique approchée du système linéarisé utilisée dans la méthode est tronquée au premier ordre, ce qui ne permet pas d'estimer les phénomènes mis en jeux ici. Ainsi, lorsque des phénomènes dynamiques complexes sont mis en jeux, avec par exemple des systèmes dynamiques qui sont pilotés par des harmoniques supérieures ou des combinaisons linéaires complexes des fondamentales, alors la méthode MASA ne permet pas d'estimer le comportement dynamique du système.

En conclusion, pour le quatrième cas, et de façon similaire au troisième cas présenté au paragraphe 6.4.2, la méthode MASA prédit la présence des deux modes dans la réponse dynamique du système, ce qui est ici aussi en accord avec les résultats obtenus par intégration temporelle. Les fréquences estimées par la méthode MASA restent proches des fréquences du temporel. Dans ce cas, la réponse dynamique du système est pilotée principalement par les deux fondamentales ce qui peut justifier que la troncature au premier ordre réalisée sur la solution approchée est viable. Pour le cinquième cas, on peut voir que la méthode MASA a prédit une réponse dynamique avec deux instabilités présentes à 4.8 Hz et 9.5 Hz. Cependant, la réponse temporelle ne fait apparaitre qu'une seule fondamentale à 3.9 Hz. De nombreuses harmoniques sont présentes dans la solution et la

Cas	μ	k_a	CEA		Intégration		MASA		
			Freq. (Hz)	Partie réelle	Freq. (Hz)	Nb. pics	Freq. (Hz)	Partie réelle	p
1	0.5	100	5.29	0.24	5.18	4	5.19	0	0.33
2	0.18	1000	7.39	0.684	7.57	5	7.64	0	0.95
3	0.55	100	5.47 9.27	3.3 0.007	5.31 9.27	12	4.76 9.13	0 0	0.47 0.97
4	0.63	100	5.47 10	5.75 5.75	5.5 10.13	15	4.98 10.32	0 0	0.64 1.34
5	0.70	1000	5.7 9.93	1.9 1.5	3.9	9	4.8 9.5	0 0	0.345 1.714
6	0.65	100	5.46 10.03	6.21 7.48	5.43 10.31	32	-		

TABLEAU 6.5 – Comparaison des résultats obtenus avec la CEA, l'intégration temporelle et la méthode MASA sur les différents cas



(a) (b) (c)

FIGURE 6.16 – Évolution de l'amplitude modale (a), de la partie réelle de la valeur propre (b) et de la fréquence (c) du mode instable 1 (en bleu) et 2 (en orange) en fonction du temps - Sixième cas

réponse dynamique est pilotée par les harmoniques 2 et 4 de la fondamentale. La réponse dynamique du système est complexe et les phénomènes mis en jeu, à savoir l'émergence d'une unique fondamentale plus faible que les fréquences identifiées à la CEA, sont inconnus. Cependant, la méthode MASA identifie deux fréquences qui sont pratiquement commensurables.

Enfin, dans le sixième cas, les évolutions des amplitudes modales, des parties réelles et des fréquences sont données Figure 6.16. On observe que les parties réelles des valeurs propres restent positives entrainant une augmentation des amplitudes modales. La réponse dynamique approchée reste divergente. Finalement, lorsque $t > 0.8$, la partie réelle de la valeur propre du second mode instable augmente très rapidement et très fortement, son amplitude modale et sa fréquence suivent la même évolution. Ce résultat illustre la limitation de la méthode MASA qui ne permet dans ce cas précis de donner une information sur l'évolution des modes instables en vibratoire. Ce résultat n'est pas incohérent avec la complexité du comportement vibratoire précédemment illustré Figures 6.7 et 6.8 pour ce cas.

DDL	Amplitude	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
x_1	**MASA**	0,00023	0,01201	0,02619	0,04227
	Temporel	0,00075	0,02402	0,07082	0,14149
$\dot{x}_1$	**MASA**	0,00765	0,55752	1,51316	2,65519
	Temporel	0,04258	1,26093	4,33761	9,14504
y_1	**MASA**	0,00075	0,07319	0,06262	0,07586
	Temporel	0,00148	0,10960	0,17567	0,36757
$\dot{y}_1$	**MASA**	0,02492	3,39852	3,60705	4,73850
	Temporel	0,07522	5,21510	10,12070	22,57380
x_2	**MASA**	0,01781	0,03375	0,02899	0,04061
	Temporel	0,03066	0,05558	0,06312	0,09324
$\dot{x}_2$	**MASA**	0,59262	1,56743	1,02129	1,44349
	Temporel	1,00677	2,62256	2,24527	3,51839
y_2	**MASA**	0,03475	0,00732	0,04613	0,06294
	Temporel	0,07014	0,01236	0,14809	0,23388
$\dot{y}_2$	**MASA**	1,15611	0,34004	1,60115	2,20116
	Temporel	2,26607	0,58159	4,84827	7,93199

TABLEAU 6.6 – Comparaison des amplitudes des cycles limites MASA et temporels en déplacement et en vitesse pour les différents degrés de liberté

6.4.3 Prédiction d'une réponse stationnaire approchée par la méthode MASA

Comme précédemment indiqué, l'objectif principal de la méthode MASA est initialement de suivre l'évolution des modes instables et de statuer sur leur contribution ou non via les divergences et atténuations associées à chaque mode.

Pour les quatre premiers cas, la méthode MASA a identifié en plus des valeurs d'amplitude modale qui correspondent à une solution approchée stationnaire du système. En effet, dans ces cas précis, il a été observé que les parties réelles des modes instables suivis par la méthode MASA atteignent une valeur nulle pour une certaine amplitude modale, ce qui caractérise l'obtention d'une solution stationnaire constituée des participations des modes instables.

Comme discuté précédemment, pour ces quatre cas, la méthode MASA montre de bons résultats en terme de prédiction des modes impliqués dans la réponse dynamique du système et donne une bonne approximation en fréquence. La méthode MASA estime dans ces quatre cas des couples d'amplitudes modales pour lesquels la solution approchée du système linéarisé est stationnaire. L'une des questions posées est donc de savoir si la prédiction de la réponse stationnaire proposée par la méthode MASA est cohérente avec les résultats de référence de l'intégration temporelle. Pour ce faire, les cycles limites associés aux cas 1 à 4 sont calculés à partir des équations 6.60 et 6.62 et sont tracés Figure 6.17 pour les quatre degrés de liberté (colonne de gauche sur la figure). Pour chaque degré de liberté, les quatre cycles limites correspondants aux quatre cas sont superposés. Les cycles limites obtenus par intégration temporelle sont tracés Figure 6.17 sur la colonne de droite pour comparaison. Les amplitudes maximales en déplacement et en vitesse sont calculées et données Tableau 6.6.

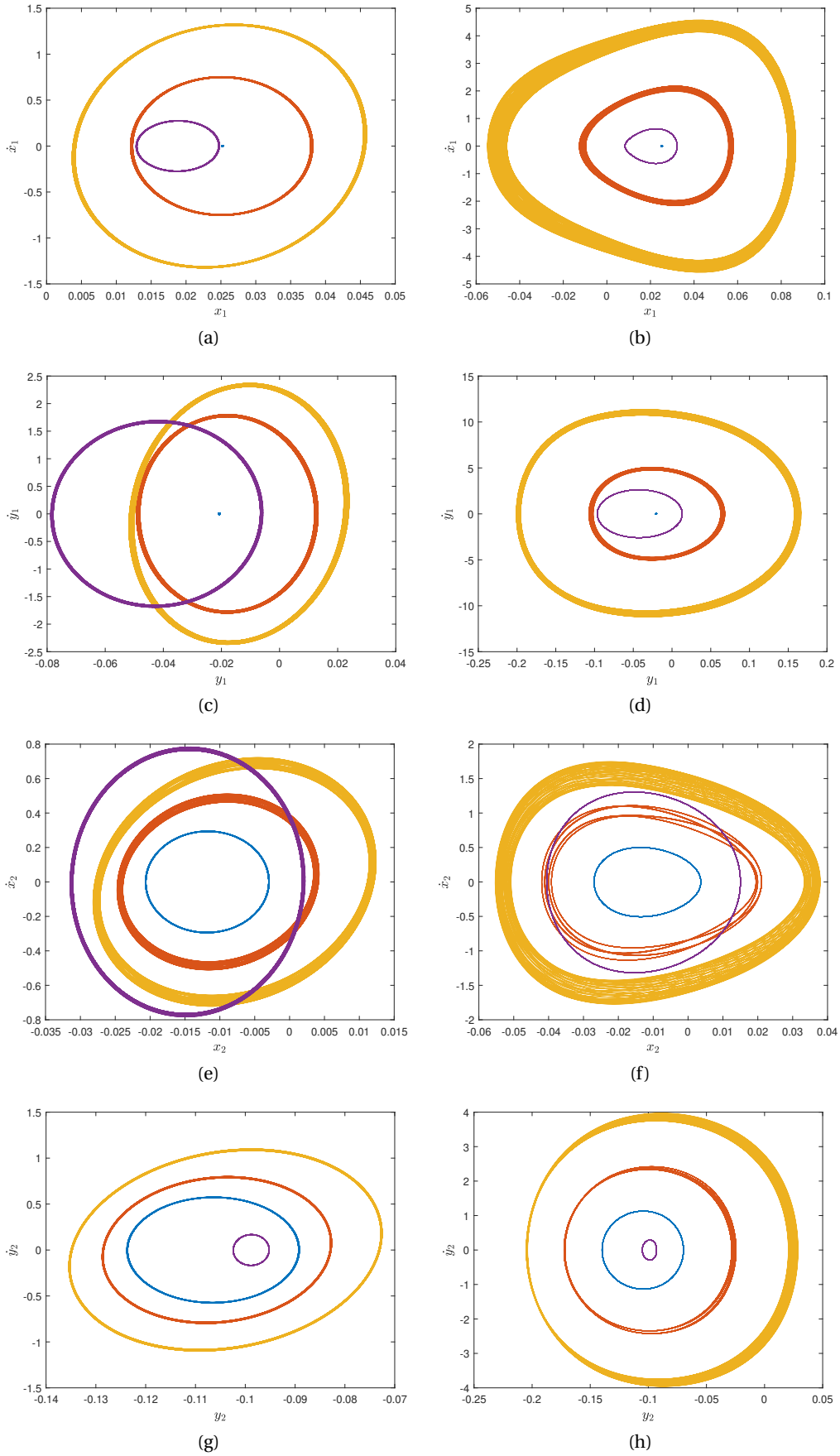


FIGURE 6.17 – Comparaison des cycles limites obtenus avec la méthode MASA (à gauche) et par intégration temporelle (à droite) pour les quatre degrés de liberté : x_1 (a,b), y_1 (c,d), x_2 (e,f), y_2 (g,h) pour le cas 1 (bleu), le cas 2 (violet) le cas 3 (orange) et le cas 4 (jaune)

Les cycles limites obtenus par la méthode MASA montrent la même évolution que ceux obtenus par intégration temporelle. Par exemple, pour les deux premiers degrés de liberté, le cycle limite bleu n'est qu'un point comparé aux autres alors que pour les deux derniers ce n'est pas le cas. D'ailleurs, pour le dernier degré de liberté, le cycle bleu est plus grand que le cycle violet, ce qui est correctement estimé par la méthode MASA. Pour les second et troisième degrés de liberté, la tendance pour le cycle limite violet est moins bien évaluée comparée aux autres cas, mais l'ordre de grandeur est tout de même respecté. Ceci démontre donc la pertinence de la méthode MASA pour donner des tendances d'évolution des cycles limites et des premières estimations des niveaux vibratoires des réponses non-linéaires de système sujet à une ou plusieurs instabilités.

La comparaison des amplitudes maximales en déplacement et en vitesse confirme l'analyse précédente (voir Tableau 6.6). En effet, pour le premier cas, l'amplitude est pratiquement nulle pour les deux premiers degrés de liberté, ce qui est bien identifié par la méthode MASA. De plus, les tendances sont bien identifiées par la méthode, par exemple pour le degré de liberté x_2, l'amplitude en déplacement augmente d'un facteur 0.18 entre les cas 1 et 2, d'un facteur 2.1 entre les cas 1 et 3 et d'un facteur 3.1 entre les cas 1 et 4 pour le temporel. Les amplitudes en déplacement pour les cycles limites MASA augmentent respectivement d'un facteur 0.19, 1.6 et 2.2 entre le premier cas et les cas 2, 3 et 4. En conclusion, si la méthode ne permet pas de prédire exactement les cycles limites et les niveaux vibratoires, elle permet tout de même d'arriver à une estimation de ceux-ci et permet de classer les niveaux vibratoires du système non-linéaire pour différents jeux de paramètres.

Ainsi, sur ces différents cas, la méthode MASA permet de prédire un comportement dynamique approché du système, c'est-à-dire d'identifier les modes qui seront présents dans la réponse dynamique du système et leur contribution en amplitude modale. Les fréquences prédites par la méthode restent une bonne estimation des fréquences obtenues dans le temporel. Par ailleurs, la méthode permet aussi d'obtenir un ordre de grandeur des niveaux vibratoires du système et conserve les tendances d'accroissement ou de diminution des niveaux vibratoires du fait de la variation de paramètres d'entrée.

6.4.4 Bilan

En conclusion, la méthode MASA permet dans les cas où les réponses dynamiques sont principalement pilotées par les premières harmoniques, d'estimer le nombre de modes présents dans la réponse dynamique et leur fréquence. Elle permet aussi d'avoir une approximation des niveaux vibratoires obtenus qui peuvent être comparés entre différents systèmes lorsque la dynamique non-linéaire du système reste principalement gouvernée par les fondamentales des modes instables. En effet, dans des cas plus complexes où la dynamique du système est pilotée par des harmoniques et/ou des combinaisons linéaires d'ordre supérieur, la méthode ne permet pas d'estimer le comportement dynamique du système. Bien entendu, l'une des difficultés majeures étant que cette réponse non-linéaire et sa complexité ne sont pas connues *a priori*.

6.5 Prédiction des instabilités de crissement d'un modèle éléments finis de frein

La partie précédente a permis d'identifier les capacités de la méthode MASA ainsi que ses limitations sur un modèle simple. Il est dès lors possible d'utiliser cette méthode sur un modèle de frein industriel pour lequel il n'est pas possible d'obtenir le résultat temporel de référence. La méthode est appliquée sur le modèle éléments finis utilisés dans les chapitres 3 et 5 de ce manuscrit. Afin que les temps de calcul soient raisonnables, la méthode a été appliquée sur le modèle réduit selon la méthodologie présentée en 6.2.3.

6.5.1 Préambule - Identification des instabilités potentielles à l'aide de la CEA

Une configuration quelconque du système de frein est retenue pour cette étude. Dans un premier temps, une analyse CEA est réalisée pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ afin de statuer sur la stabilité de la position d'équilibre et d'identifier les modes instables potentiellement à l'origine de l'instabilité de crissement. Les fréquences instables relevées pour quelques valeurs du coefficient de frottement de l'interface plaquette/disque μ sont données Tableau 6.7.

Le système présente jusqu'à 6 instabilités entre 1960 Hz et 5960 Hz. La première instabilité émerge entre $\mu = 0.01$ et $\mu = 0.15$, une seconde émerge entre $\mu = 0.15$ et $\mu = 0.25$, des calculs plus précis montrent qu'elle émerge à $\mu = 0.23$.

Dans ce qui suit, la méthode MASA va être appliquée sur deux cas différents :

— Cas 1 : $\mu = 0.15$ où une unique instabilité est présente,

— Cas 2 : $\mu = 0.22$ où une instabilité est présente initialement et il sera montré par la suite qu'une seconde instabilité émerge lorsque l'amplitude modale du premier mode augmente en utilisant la méthode MASA.

6.5.2 Application de la méthode MASA dans un cas mono-instable

Dans un premier temps, la méthode MASA est appliquée dans un cas où une unique instabilité est présente avec un coefficient de frottement $\mu = 0.15$. Le calcul CEA identifie une instabilité située à $f_{\text{ins}} = 3878.3$ Hz avec une partie réelle d'environ 50. La méthode MASA est appliquée sur ce mode, c'est-à-dire que l'on considère différents niveaux d'amplitude du mode instable $\mathbf{\Psi}^0$. Le paramètre d'amplitude modale varie entre 0 et 700 et 75 points de calculs sont considérés dans un premier temps.

μ	0.01	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
Ins. n°1	-	3878.3 Hz	3869.9 Hz	3861.9 Hz	3856.6 Hz	3850.4 Hz	1987.8 Hz	1979.6 Hz	1971.7 Hz	1968.2 Hz
Ins. n°2	-	-	4728.3 Hz	4725.3 Hz	4721.1 Hz	4714.4 Hz	3851.4 Hz	3854.7 Hz	3854.1 Hz	3661.4 Hz
Ins. n°3	-	-	-	-	-	4930.5 Hz	4742.5 Hz	4785.7 Hz	4753.9 Hz	3856.8 Hz
Ins. n°4	-	-	-	-	-	-	4919.3 Hz	5384.8 Hz	5359.7 Hz	4750.3 Hz
Ins. n°5	-	-	-	-	-	-	4944.1 Hz	-	5963.9 Hz	5340.2 Hz
Ins. n°6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5962.8 Hz

TABLEAU 6.7 – Fréquences instables relevées à la CEA pour une configuration du frein pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ

Les évolutions des parties réelles et des fréquences en fonction du paramètre d'amplitude modale p sont données Figure 6.18(a,c), seules les fréquences des modes ayant une valeur propre à partie réelle non nulle pour un certain p sont affichées par soucis de lisibilité. Un critère de MAC est utilisé afin de pouvoir appairer les différents modes, ainsi il est possible de suivre l'évolution des fréquences et des parties réelles des valeurs propres de chaque mode, qu'il soit instable ou non. L'utilisation de ce critère permet de suivre l'évolution en fréquence des deux modes avant leur couplage.

Les résultats obtenus ici montrent que lorsque le niveau d'amplitude du mode augmente, alors la partie réelle de sa valeur propre diminue. En d'autres termes, la solution dynamique approchée estimée par l'intermédiaire de la méthode MASA a un accroissement en amplitude de plus en plus lent. Enfin, pour $p = 80$, la partie réelle de la valeur propre s'annule et sa fréquence vaut 3900 Hz. Conformément aux résultats obtenus sur le modèle académique, le système se stabilise sur une solution stationnaire périodique de fréquence d'excitation 3900 Hz. On remarque par ailleurs, que si l'amplitude modale du mode continuait d'augmenter, alors une autre instabilité émergerait à la fréquence de 5200 Hz. On peut noter que la fréquence fondamentale de la réponse approchée estimée est légèrement différente de celle prédite par la CEA.

Au vu des résultats obtenus sur le modèle académique, la réponse stationnaire périodique du système peut être approchée par :

$$\mathbf{\Delta U_1}(t) = \mathbf{U_S} + p_1 \mathbf{\Psi}_1^0 e^{i\omega_1^0 t} + p_1 \overline{\mathbf{\Psi}_1^0} e^{-i\omega_1^0 t} \tag{6.71}$$

avec $p_1 = 80$, $\omega_1^0 = 2.44\,10^4$ rad/s et $\mathbf{\Psi}^0$ la déformée modale obtenu au calcul CEA.

Différentes hypothèses sont faites dans la méthode MASA, parmi lesquelles la faible évolution de la déformée des modes lorsque l'amplitude modale augmente. Afin de valider cette hypothèse, les déformées en $p = 0$ sont comparées aux déformées en $p = p_{\max}$. Les déformées en $p = 0$ correspondent aux déformées obtenues par calcul CEA et celles en $p = p_{\max}$ correspondent aux modes propres de la matrice $\mathbf{A}_{p=p_{\max}}$. La comparaison entre les deux est faite à l'aide d'un critère de MAC et la matrice de MAC obtenue est donnée Figure 6.19. La ligne correspondant au mode sur lequel la méthode MASA est employée est encadrée en rouge et seuls les modes entre 0 et 6000 Hz sont retenus.

On remarque que pour chaque mode il existe une unique valeur de MAC proche de 1. En d'autres termes, pour chaque mode en $p = 0$, il est possible d'identifier un unique mode en $p = p_{\max}$ pour lequel la valeur du MAC est élevée. Par exemple, pour le mode instable utilisé dans la méthode MASA, le MAC entre la déformée en $p = 0$ et $p = p_{\max}$ est égal à 0.7. Ceci signifie que les déformées évoluent relativement peu avec l'amplitude modale ce qui permet de valider l'hypothèse initiale qui était faite.

Par ailleurs, les déformées évoluant peu avec l'amplitude p, il est possible de réaliser un balayage avec moins de points en amplitude modale tout en réalisant un suivi des déformées à l'aide d'un critère de MAC afin de suivre l'évolution des différentes valeurs propres. La diminution du nombre de points de balayage est un élément important en contexte industriel car cela permet de diminuer le coût de calcul de la méthode. Ainsi, différents pas de balayage sont considérés et le suivi des modes est assuré à l'aide d'un critère de MAC. Les temps de calculs associés à ces différents pas de balayage sont donnés Tableau 6.8. On remarque que le passage de 75 points à 11 points permet de réduire le temps de calcul d'un facteur 6.

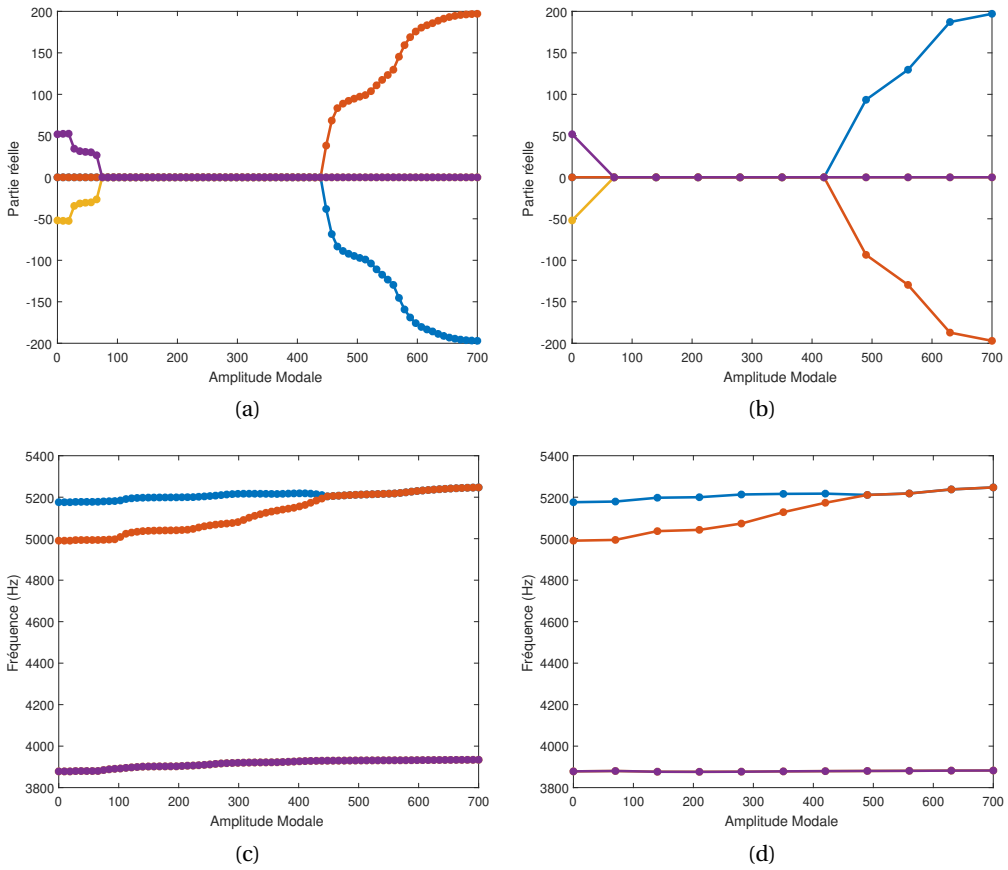


FIGURE 6.18 – Évolution des parties réelles (a,b) et des fréquences (c,d) en fonction de l'amplitude modale pour 75 points de balayage (a,c) et 11 points de balayage (b,d)

Nb de points de balayage sur p	11	21	31	41	51	61	75
Temps de calcul (s)	459,83	784,48	1153,37	1518,21	1887,47	2261,19	2840,08

TABLEAU 6.8 – Temps de calcul pour différents pas de discrétisation de l'amplitude modale

Les résultats obtenus pour un balayage en 11 points sont donnés Figure 6.18(b,d). On peut voir que le suivi des modes permet de suivre l'évolution et le comportement des différentes valeurs propres. En effet, le mode instable initialement voit la partie réelle de sa valeur propre devenir nulle. Puis pour une amplitude modale beaucoup plus élevée, un autre mode à 5200 Hz a une partie réelle qui devient positive. Pour connaitre son influence sur la dynamique globale du système, il faudrait appliquer la méthode MASA sur ce mode, mais cette étape n'est pas nécessaire ici puisque le mode instable initialement a la partie réelle de sa valeur propre qui s'annule avant. Il serait possible d'envisager encore moins de points de calcul, il est toutefois nécessaire d'avoir suffisamment de points de calcul afin de pouvoir analyser correctement le comportement global de la structure.

Dans le cas présenté ici, l'utilisation d'un critère de MAC peut sembler peu utile puisque les deux modes sont clairement distincts dans le plan complexe. Cependant, il permet tout d'abord d'estimer les fréquences des modes qui deviennent instables avant qu'ils ne le soient. De plus, la méthode MASA mono-instable est encore utilisée sur des cas à plusieurs instabilités au sein de PSA [100] le temps que la méthode généralisée soit implémentée. Ainsi, sur chaque mode instable identifié, la méthode MASA est appliquée. Dans certains cas, de nombreuses instabilités sont présentes et réaliser le suivi des modes "à la

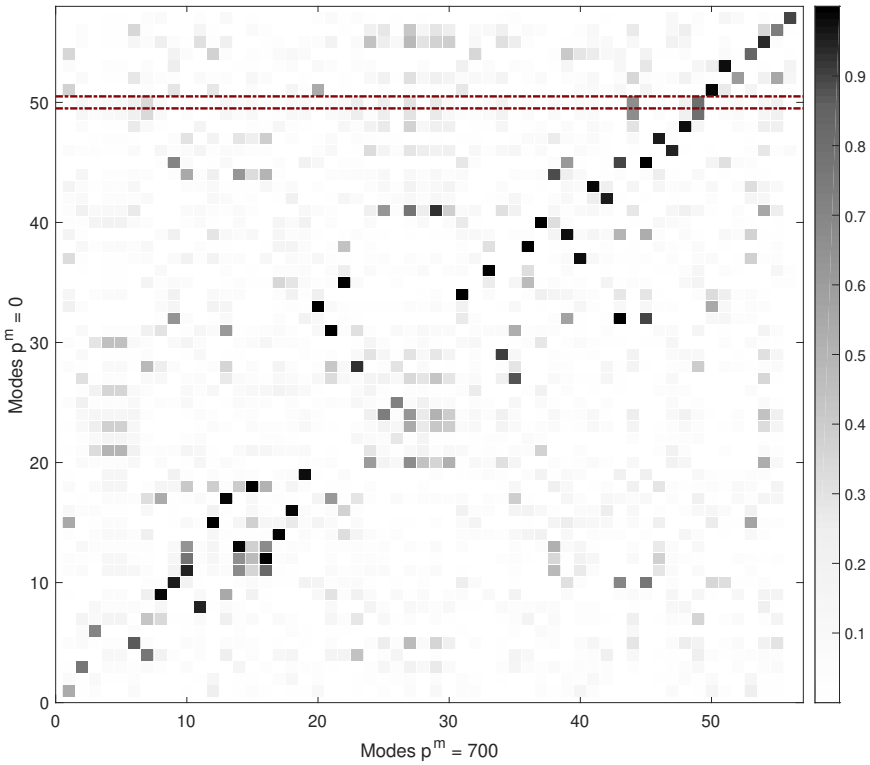


FIGURE 6.19 – Matrice de MAC entre les déformées en $p = 0$ et $p = p_{\max}$ pour le cas $\mu = 0.15$ - En rouge, le mode instable à la CEA

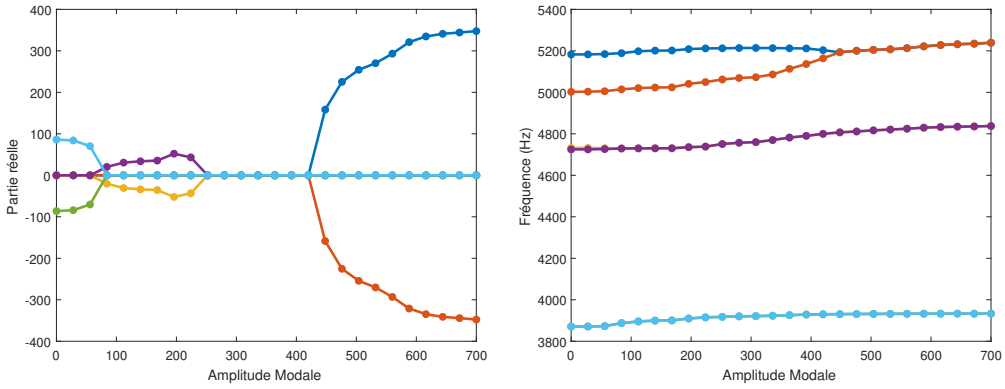
main" est impossible, en particulier lorsque le pas en amplitude modale est élevé. L'utilisation du critère de MAC permet d'assurer le suivi de ces modes dans des cas complexes.

6.5.3 Prédiction de la stabilité lorsqu'un second mode instable émerge avec la méthode MASA

Un second cas est considéré, plus proche de la seconde bifurcation, c'est-à-dire à $\mu = 0.22$. La CEA identifie une unique instabilité à 3870 Hz avec une partie réelle de 87. La méthode MASA mono-instable est appliquée sur ce cas, un balayage en amplitude modale est réalisé et les évolutions des parties réelles des valeurs propres et des fréquences obtenues sont représentées Figure 6.20. On remarque ici que le mode initialement instable voit sa partie réelle s'annuler lorsque ses amplitudes de vibration augmentent. Cependant, avant que ce mode ne se stabilise, un autre mode instable émerge à 4750 Hz environ. Ainsi, lorsque $p = 80$, deux modes instables sont présents dans le système et pour pouvoir statuer sur le comportement dynamique global et la contribution des modes instables sur la divergence ou atténuation de la réponse dynamique du système, il est nécessaire d'ajouter ce second mode instable à l'analyse MASA.

Ainsi, une seconde analyse est réalisée avec la méthode MASA multi-instable (avec deux modes dans ce cas précis). La méthode est initialisée avec le mode instable et le mode qui devient potentiellement instable. Une faible amplitude modale initiale est affectée aux deux initialement. Les évolutions des amplitudes modales, des parties réelles des valeurs propres et des fréquences sont données Figure 6.21, et les évolutions des valeurs propres de chaque sous-système sont données Figure 6.22.

Au départ, seul un mode est instable avec une partie réelle de 87 et une fréquence de



(a) (b)

FIGURE 6.20 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a) et des fréquences (b) en fonction de l'amplitude modale pour $\mu = 0.22$

3880 Hz. Jusqu'à $t = 0.045$, sa partie réelle reste sensiblement constante et son amplitude modale augmente. Puis, à partir de $t = 0.045$ s, le second mode voit la partie réelle de sa valeur propre augmenter et devenir positive et le premier mode a sa partie réelle qui s'annule rapidement. A partir de $t = 0.05$ s, le premier mode a une partie réelle nulle et s'est stabilisé à une amplitude d'environ 65. Le second mode a sa partie réelle qui reste constante et égale à 21 de $t = 0.05$ s jusqu'à $t = 0.17$ s et son amplitude modale augmente. A partir de $t = 0.17$ s, la partie réelle augmente à nouveau et croît plus fortement à partir de $t = 0.21$ s. L'amplitude modale associée augmente rapidement. Puis à $t = 0.22$ s, la partie réelle diminue brusquement et à $t = 0.23$ s elle s'annule. L'amplitude modale se stabilise alors à $p = 195$.

Les évolutions des valeurs propres des deux sous-systèmes données Figure 6.22 montrent qu'aucune autre instabilité potentielle émerge dans l'un des sous-systèmes et qu'il n'est donc pas nécessaire d'appliquer la méthode MASA avec un plus grand nombre d'instabilités. Pour résumer, la méthode MASA indique les contributions suivantes :

- $t < 0.045$: un seul mode instable à une fréquence d'environ 3880 Hz qui amène une divergence d'amplitude de la réponse vibratoire,
- $0.045 < t < 0.05$: deux modes instables à des fréquences de 3880 Hz et 4730 Hz qui amènent une divergence en amplitude de la solution,
- $0.05 < t < 0.23$: un mode instable à 3880 Hz à partie réelle nulle et un second mode instable à 4730 Hz qui amène une divergence de la réponse vibratoire du système,
- $t > 0.23$: deux modes instables à 3880 Hz et 4730 Hz à parties réelles nulles qui caractérisent une solution stationnaire quasi-périodique approchée.

Conformément aux résultats présentés sur le modèle académique, il est possible de dire que le système global a une réponse dynamique pilotée par deux modes à 3880 Hz et 4750 Hz avec des amplitudes respectives de 65 et de 195. Ce résultat illustre l'importance de l'utilisation de la méthode MASA en complément d'un calcul CEA. En effet, seule une instabilité était détectée avec le calcul CEA alors que deux sont présentes dans la dynamique du système.

De plus, la réponse dynamique stationnaire quasi-périodique du système peut être approchée par :

$$\mathbf{\Delta U_1}(t) = \mathbf{U_S} + p_1 \mathbf{\Psi}_1^0 e^{i\omega_1^0 t} + p_1 \overline{\mathbf{\Psi}_1^0} e^{-i\omega_1^0 t} + p_2 \mathbf{\Psi}_2^0 e^{i\omega_2^0 t} + p_2 \overline{\mathbf{\Psi}_2^0} e^{-i\omega_2^0 t} \tag{6.72}$$

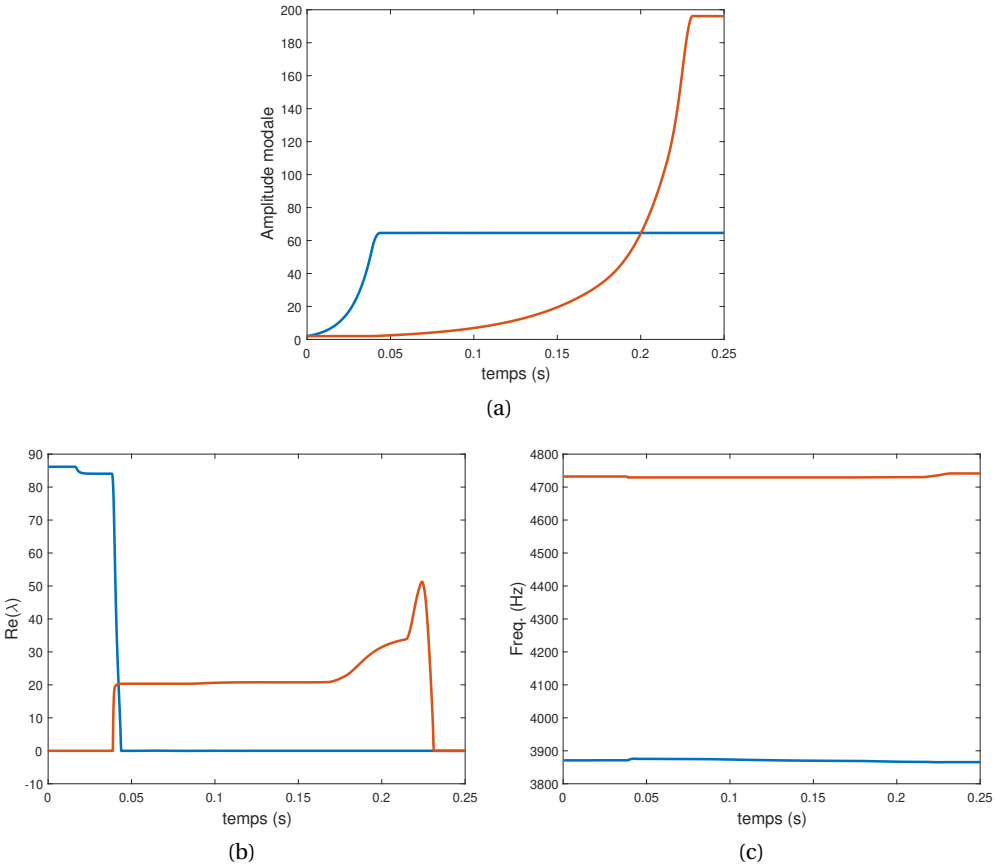


FIGURE 6.21 – Évolution des amplitudes modales (a), des parties réelles des valeurs propres (b) et des fréquences (c) pour le premier (bleu) et le second (orange) mode instable

avec $p_1 = 65$ et $p_2 = 195$, $\omega_1^0 = 2.44\ 10^4$ rad/s et $\omega_2^0 = 2.97\ 10^4$ rad/s et $\mathbf{\Psi}_1^0$ et $\mathbf{\Psi}_2^0$ les déformées modales des deux modes obtenues au calcul CEA.

Par ailleurs, ces résultats illustrent aussi l'importance d'utiliser une méthode MASA avec une approche multi-instabilité plutôt que de superposer les résultats de plusieurs approches mono-instables. En effet, dans le cas mono-instable, le premier mode se stabilisait pour une amplitude de 80 alors que l'approche multi-instable prédit une amplitude de 65.

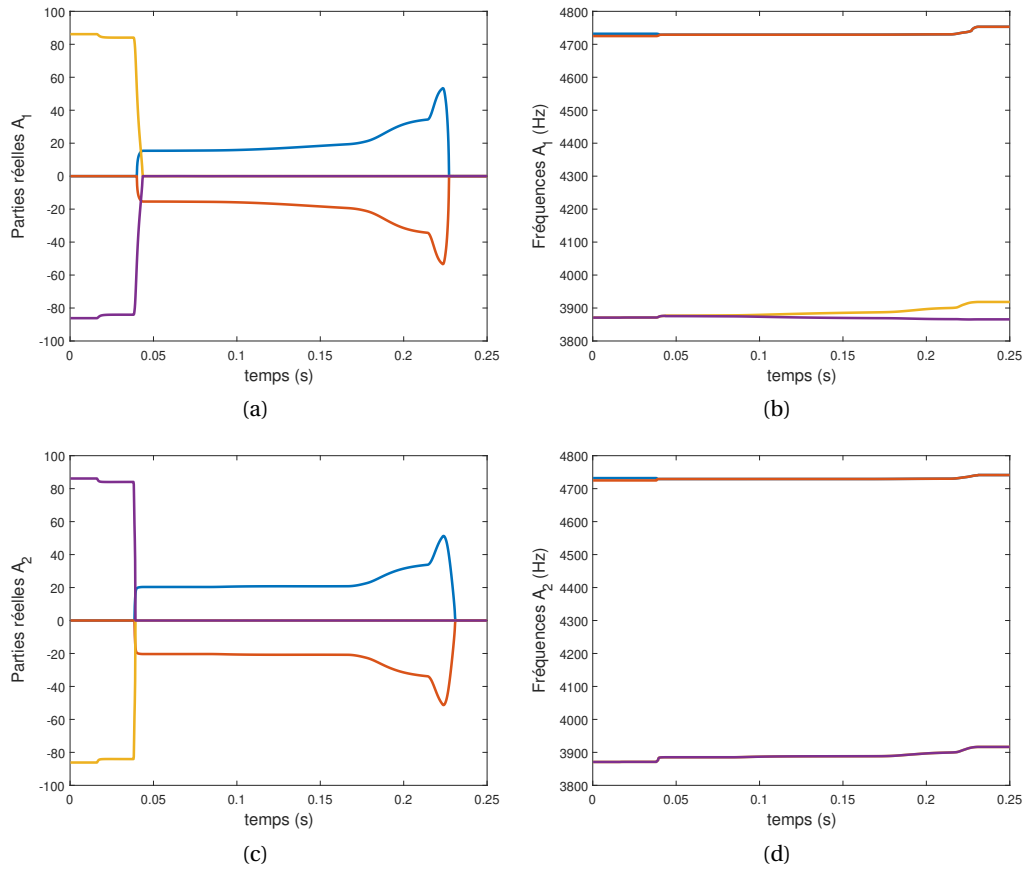


FIGURE 6.22 – Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences (b,d) du sous-système associé au premier mode (a,b) et au second mode (c,d)

6.6 Conclusion

Cette partie a présenté la méthode de la Modal Amplitude Stability Analysis (MASA) qui propose une linéarisation sous une nouvelle forme des efforts non-linéaires. Cette méthode est un complément de la méthode de la CEA et permet d'avoir un indicateur supplémentaire permettant de statuer sur le comportement dynamique du système et les contributions potentielles des différents modes instables. La méthode MASA permet donc d'apporter des informations complémentaires vis-à-vis de la CEA pour déterminer les occurrences de crissement. Pour cela, la solution dynamique initiale linéarisée autour d'un point d'équilibre est approximée pour une amplitude modale fixée et il est possible d'étudier la montée en divergence ou l'atténuation de cette solution.

La méthode a d'abord été appliquée sur un modèle académique pour lequel il est possible de déterminer une solution dynamique de référence par intégration temporelle. La comparaison des résultats obtenus avec la méthode MASA et des résultats du temporel permet d'identifier les capacités et les limitations de la méthode. La méthode, appliquée sur des systèmes dont les solutions dynamiques sont contrôlées principalement par la première harmonique des fréquences fondamentales, permet d'estimer le nombre de modes impliqués dans la réponse dynamique et les fréquences associées. A partir des niveaux d'amplitude modale associés, il est possible de reconstruire les cycles limites MASA et d'obtenir des niveaux de vibrations. On a pu voir que les niveaux de vibrations obtenus sont du même ordre de grandeur que les niveaux de vibrations obtenus par intégration temporelle et que les tendances étaient conservées. En d'autres termes, il est possible

de comparer des résultats MASA et notamment les niveaux vibratoires obtenus pour un système suivant différents jeux de paramètres. Cependant, lorsque la dynamique du système est complexe et qu'elle fait intervenir de nombreuses harmoniques et combinaisons linéaires au rôle prépondérant, alors la méthode MASA ne permet pas de caractériser le comportement dynamique du système.

Une fois validée sur un modèle simple, la méthode a été appliquée sur le modèle éléments finis de frein industriel PSA. Deux cas ont été étudiés, un premier avec une unique instabilité. Une stratégie de suivi de modes à l'aide d'un critère de MAC a permis de diminuer le nombre de points de balayage en amplitude modale nécessaires et ainsi diminuer significativement les temps de calcul. Puis la méthode MASA a été appliquée dans un cas où un unique mode est identifié par la CEA et où un second mode émerge lors du calcul MASA. Il a alors été possible de prédire le comportement dynamique du système de frein via l'approche MASA multi-modes et d'identifier une instabilité présente dans la réponse dynamique du système et pourtant non identifiée via la CEA. Les résultats proposés permettent alors de fournir des indications sur les potentielles évolutions des contributions des modes instables en fonction des amplitudes modales propres à chaque mode instable.

En conclusion, la méthode MASA permet d'avoir une analyse complémentaire à la CEA et fournit des informations sur les modes présents ou non dans la réponse dynamique du système. Par ailleurs, la méthode permet aussi d'estimer les différentes fréquences instables et les niveaux vibratoires. Si la prédiction de ces derniers n'est pas exacte, l'ordre de grandeur fourni est satisfaisant et la comparaison des niveaux vibratoires obtenus sur différents systèmes est possible. Cette comparaison étant faisable, il est alors possible d'envisager pour la suite une démarche de conception basée sur la MASA permettant premièrement de limiter le nombres d'instabilités présentes mais aussi d'atténuer les niveaux de vibrations associés.

Conclusion générale et perspectives

Les objectifs de ces travaux de thèse étaient de proposer tout d'abord une méthode permettant de traiter de la variabilité de différents paramètres dans un modèle éléments finis de frein automobile pour la prédiction de la propension au crissement par l'analyse de stabilité, puis de développer une méthode complémentaire de celle-ci afin d'améliorer la prédiction du comportement dynamique non linéaire du système de frein.

Une première contribution a été apportée sur l'étude de l'influence des contacts entre les différents composants du système de frein sur la propension au crissement. Il a été montré que leur impact sur la stabilité du système est fort et qu'il est nécessaire de les prendre en compte dans une démarche de dimensionnement. Cependant, le nombre de contacts internes étant important, il a été nécessaire de trouver une stratégie permettant de les traiter indépendamment des autres paramètres de conception. Afin de réduire la complexité du problème, seuls deux états de contact sont retenus, à savoir frottant ou glissant, pour chaque interface. Les résultats ont montré que la propension au crissement ainsi que les déformées du système étaient très sensibles à ces variations des états de contact. Le choix a été fait de retenir le scénario le plus défavorable en terme de crissement pour le système de frein afin d'essayer ensuite d'améliorer cette configuration dans une phase de conception vis-à-vis du problème de crissement. Pour cela, une stratégie basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique a été développée afin d'identifier, pour un coût numérique maîtrisé, ce scénario le plus défavorable et le jeu de contact interne associé.

Un deuxième objectif de ces travaux de thèse était de proposer une méthode basée sur la méta-modélisation pour prédire la propension au crissement du système de frein en fonction de différents paramètres pour un coût numérique limité. Pour cela, la méthode du krigeage et une méthode hybride associant chaos polynomial et krigeage ont été utilisées afin de prédire l'évolution des valeurs propres complexes du système de frein en fonction des différents paramètres variables. L'utilisation de ces méthodes permet de réduire de façon importante le coût numérique et d'avoir les influences des différents paramètres sur la stabilité des différents modes. Les résultats obtenus montrent que les influences des différents paramètres sur la propension au crissement sont complexes et que les zones d'instabilité des différents modes ne sont pas triviales. Ceci illustre la nécessité de mettre en place des études poussées et la difficulté pour un ingénieur de trouver de façon intuitive le meilleur jeu de paramètres pour le dimensionnement par rapport au crissement. Par ailleurs, l'obtention de ces différents méta-modèles permet de propager l'incertitude associée à quelques paramètres et donc d'envisager une conception robuste par rapport à la variabilité des paramètres environnementaux. Les résultats obtenus montrent l'influence forte des lois de probabilité choisies et la nécessité de déterminer dès la phase amont et de façon précise les lois associées aux différents paramètres.

Le dernier objectif de ces travaux de thèse était de proposer une méthodologie d'analyse

non linéaire complémentaire de l'analyse de stabilité qui permette d'identifier les modes instables impliqués dans la réponse dynamique non linéaire du système lors du crissement. La méthode de la Modal Amplitude Stability Analysis (MASA) a été développée dans les cas mono- et multi-instables et propose une linéarisation équivalente du problème dynamique non-linéaire et d'approcher une solution vibratoire auto-entretenue du problème en fonction d'un niveau d'amplitude modale donné des modes instables. La méthode a été appliquée dans un premier temps à un système académique pour lequel il était possible de comparer les résultats de la méthode MASA aux résultats obtenus par intégration temporelle. Les résultats obtenus ont montré que la méthode MASA permet d'identifier les modes impliqués dans la réponse dynamique non-linéaire du système ainsi que les fréquences associées lorsque la dynamique du système est principalement pilotée par les premières harmoniques des fréquences fondamentales. Par ailleurs, les prédictions en amplitude vibratoire données par la méthode MASA permettent d'avoir une estimation des niveaux de vibration obtenus par intégration temporelle. Cependant, lorsque la réponse dynamique non-linéaire du système est complexe, la méthode ne permet pas de caractériser la dynamique du système. La méthode a ensuite été appliquée sur le modèle éléments finis complet du frein industriel PSA afin de prédire les contributions des modes instables lors de la génération des vibrations non linéaires. Il a été montré que des phénomènes de participation de modes instables non prédits par un simple calcul CEA peuvent apparaitre.

Perspectives

Les résultats et les méthodes numériques développées au cours de ces travaux de thèse ouvrent plusieurs perspectives sur l'efficacité des stratégies développées dans le cadre d'une filière de conception globale, sur le développement de la méthode MASA proposée ainsi que sur l'amélioration des modèles utilisés. L'objectif, à long terme, est d'avoir une méthodologie de dimensionnement qui permette d'avoir une meilleure prédiction des instabilités de crissement tout en traitant de l'incertitude et de la variabilité associées à certains paramètres.

Application de la stratégie proposée au dimensionnement complet d'un système de frein Les méthodes développées dans ce manuscrit se veulent être des méthodes d'aide à la conception pour l'ingénieur afin de rendre le dimensionnement des systèmes de frein performants par rapport au crissement malgré l'incertitude présente sur certains paramètres. Il serait intéressant dans un premier temps d'appliquer la méthode MASA sur le système de frein avec des jeux de contacts internes différents et d'identifier avec un critère plus pertinent que le taux de divergence maximal la configuration la plus défavorable du système de frein par rapport au crissement. Ensuite, il serait intéressant de vérifier la validité de la stratégie générale appliquée au dimensionnement d'un frein complet en accompagnant cette démarche de campagnes d'essais. Plusieurs étapes de la démarche devraient être validées, avec tout d'abord la vérification que l'approche proposée qui consiste à sélectionner la configuration la plus défavorable du système puis à identifier le jeu de paramètres de conception qui permette de diminuer sa propension au crissement conduit effectivement au choix d'une technologie efficace contre le crissement. Par ailleurs, il serait intéressant de mener une campagne d'essais afin de comparer les résultats numériques obtenus par la méthode MASA à des résultats expérimentaux en portant une attention particulière sur l'estimation des différents paramètres dont l'influence forte a été

démontrée aussi bien en terme de propension au crissement que du niveau des vibrations auto-entretenues engendrées : la détermination du coefficient de frottement de l'interface plaquette/disque, l'identification des états de contacts internes et leur coefficient de frottement, la pression de freinage, etc.

Développement de la méthode MASA La méthode MASA développée et appliquée dans ces travaux de thèse a montré des résultats satisfaisants en terme de prédiction des modes instables responsables du crissement et des niveaux vibratoires associés. Cependant elle a été utilisée uniquement dans un cadre déterministe alors que de nombreux paramètres du système sont aléatoires. Il serait intéressant de mettre en place des approches de propagation de l'incertitude et de méta-modélisation afin de pouvoir étudier l'influence de la variabilité des différents paramètres sur les résultats obtenus par la méthode MASA, et ainsi aboutir à une démarche de dimensionnement complète associant l'analyse de stabilité et la MASA avec des paramètres incertains. Cependant, les temps de calcul associés à la méthode MASA dans le cas multi-instable restent conséquents sur un modèle éléments finis. Deux approches sont envisageables, tout d'abord une approche basée sur de la méta-modélisation qui pourra être mise en place de façon similaire à ce qui a été proposé pour prédire les résultats de l'analyse de stabilité. Une seconde possibilité serait de développer une méthode MASA stochastique de façon intrusive permettant ainsi de propager directement l'incertitude.
De plus, la méthode MASA ne permet pas d'estimer le comportement dynamique d'un système de frein lorsque la réponse dynamique non-linéaire de celui-ci est complexe. Il serait intéressant d'étendre la méthode afin de pouvoir caractériser le comportement dynamique non linéaire du système dans ces cas. Une possibilité serait de mettre à jour dans la méthode les déformées des modes instables ainsi que leur fréquence afin de se rapprocher d'une notion de "mode non linéaire".

Perspective générale L'étude du crissement est un sujet complexe en dynamique des structures et comporte toujours de nombreux verrous scientifiques liés aux aspects multi-physiques du problème. Les résultats obtenus ont montré que les modifications de quelques états de contacts internes au système, qui étaient jusqu'à présent écartés des études de conception car jugés de second ordre, ont en réalité une influence très forte sur la propension au crissement d'un système de frein. Ceci montre que la prise en compte et la modélisation des différents contacts est une tâche primordiale dans l'étude du crissement. Il serait pertinent d'améliorer la modélisation du contact frottant et de ne plus se limiter aux simples lois de Signorini et Coulomb qui résument l'ensemble des phénomènes à l'interface à un unique coefficient de frottement local constant. L'amélioration de la modélisation du contact nécessite de prendre en compte de nombreux autres caractéristiques telles que la géométrie, l'élasticité et la plasticité des rugosités du contact normal, des coefficients de frottement variables dépendant de l'historique, l'usure aux interfaces ainsi que les variations de température. La prise en compte de l'ensemble de ces variables fait intervenir différents champs disciplinaires tels que la tribologie ou la thermomécanique.

Liste des figures

1.1 Architecture du système de freinage d'une voiture . . . 6
1.2 Schéma de frein à tambour . . . 7
1.3 Exemples de freins à disque . . . 8
1.4 Schéma de frein à disque . . . 8
1.5 Disque ventilé et schémas de quelques technologies d'ailettes pour les disques de frein ventilés [114] . . . 9
1.6 Schémas de quelques plaquettes [114] . . . 9
1.7 Technologies d'étrier . . . 11
1.8 Classification des bruits de freinage [2] . . . 12
1.9 Observation de la déformée opérationnelle d'un frein par interférométrie laser [49, 50] . . . 14
1.10 Phénomènes ayant lieu aux différentes échelles du contact [2] . . . 15

2.1 Modèle de stick-slip (a) et visualisation des phases d'adhérence et de glissement (b) . . . 21
2.2 Loi de frottement (a) et trajectoires dans l'espace des phases (b) pour $\mu_d < \mu_s$ 21
2.3 Loi de frottement (a) et trajectoires dans l'espace des phases (b) pour $\mu = f(v_r)$ 22
2.4 Modèle de Sprag-Slip . . . 24
2.5 Modèle de Hulten . . . 25
2.6 Évolution des parties réelles (a) et des fréquences (b) en fonction du coefficient de frottement - Cas d'un amortissement faible . . . 26
2.7 Système mécanique . . . 26
2.8 Contact unilatéral : Modèle de Signorini . . . 27
2.9 Loi de frottement : modèle de Coulomb . . . 28
2.10 Cône de Coulomb . . . 29
2.11 Stabilité des points fixes au sens de Lyapunov . . . 32
2.12 Illustration des différents types de points fixes dans le cas de la dimension 2 33
2.13 Bifurcations statiques d'un point fixe : branche stable : —— branche instable : - - - - . . . 35
2.14 Bifurcations de Hopf : branche stable : —— branche instable : - - - - . . . 36
2.15 Cycles limites stable, instable et semi-stable . . . 37
2.16 Section de Poincaré . . . 39
2.17 Type de bifurcations en fonction de la variation des coefficients de Floquet 40
2.18 Bifurcations possibles lorsqu'un coefficient de Floquet traverse le cercle unité en +1 : branche stable : —— branche instable : - - - - . . . 41
2.19 Schémas de réseau de neurones . . . 51

3.1 Modèle éléments finis développé sous Abaqus - Vues assemblée (à gauche) et éclatée (à droite) . . . 56

3.2 Interfaces de contact sur les plaquettes intérieure (à gauche) et extérieure (à droite) . . . 57
3.3 Évolution des valeurs propres dans le plan complexe pour une variation du coefficient de frottement $\mu_{interne}$ des interfaces internes pour trois valeurs différentes de $\mu_{d/p}$: (a) $\mu_{d/p} = 0.3$, (b) $\mu_{d/p} = 0.5$, (c) $\mu_{d/p} = 0.7$ . . . 61
3.4 Évolution de l'amplitude de la force totale due à la pression de contact aux différentes interfaces en contact en fonction du coefficient de frottement $\mu_{interne}$ pour différentes valeurs de $\mu_{d/p}$: (a) $\mu_{pad-disc} = 0.3$, (b) $\mu_{pad-disc} = 0.5$ (c) $\mu_{pad-disc} = 0.7$ - Contacts : • RCBE, • RCBI, • DB, • DH, • MU ext, • MU int, • PP, • RBE, • RBI, • RHE, • RHI . . . 65
3.5 Valeurs propres dans le plan complexe et plages de fréquences pour $\mu_{pad/disc} = 0.3$ (gauche) et $\mu_{pad/disc} = 0.5$ (droite) . . . 66
3.6 AutoMAC des 25 configurations - La séparation entre les configurations est marquée par les lignes rouges . . . 69
3.7 FAutoMAC des 25 configurations - Valeurs de MAC avec une échelle fréquentielle . . . 70
3.8 Matrices d'AutoMAC des modes instables de 12 configurations pour les différents éléments du frein : (a) Disque, (b) Etrier, (c) Chape, (d) Plaquette intérieure, (e) Plaquette extérieure . . . 72
3.9 Comparaison des déformées modales des configurations 5 (gauche) et 14 (droite) - Vue de face (haut) et vue de profil (bas) . . . 73
3.10 Comparaison des déformées modales des configurations 3 (gauche) et 4 (droite) - Vue de face (haut) et vue de profil (bas) . . . 73
3.11 Occurrences des fréquences instables et intervalles d'étude . . . 75
3.12 Pourcentage de répartition des états de contact pour les différents intervalles de fréquences - Bleu : état glissant ($\mu_{interne} = 0$) et jaune : état frottant ($\mu_{interne} = 0.15$) . . . 76
3.13 Maximum de la partie réelle pour une condition de contact imposée - Bleu pour un état glissant ($\mu_{interne} = 0$) et jaune pour un état frottant ($\mu_{interne} = 0.15$) - pour $\mu_{d/p} = 0.3$ (en haut) et $\mu_{textd/p} = 0.5$ (en bas) . . . 77
3.14 Maximum de partie réelle pour un état de contact donné par plage de fréquences - Bleu pour un état glissant ($\mu_{interne} = 0$) et jaune pour un état frottant ($\mu_{interne} = 0.15$) - pour $\mu_{d/p} = 0.3$ (en haut) et $\mu_{d/p} = 0.5$ (en bas) . . . 78
3.15 Schémas des algorithmes : algorithme génétique (à gauche) et algorithme génétique multi-population (à droite) . . . 81
3.16 Valeurs propres calculées pendant l'algorithme pour le premier (a) et le second (b) jeux de paramètres - noir : valeurs propres calculées pendant l'algorithme, étoiles rouges : solution théorique, cercle bleus : solutions trouvées par l'algorithme . . . 82
3.17 Précision de la solution obtenue sur 1000 lancements de l'algorithme génétique avec le jeu de paramètres 1 (a) et 2 (b) sur chaque plage de fréquences - bleu foncé : 10% d'erreur , bleu : 20% d'erreur, vert : 35% d'erreur, jaune : 30% d'erreur . . . 83
3.18 Répartition des états de contact des solutions obtenues avec les 1000 initialisations de GA vec le premier (a) et le second (b) jeu de paramètres - bleu : état glissant et jaune : état frottant . . . 85

4.1 Modèle phénoménologique du double Hulten . . . 91
4.2 Évolution des parties réelles (a-c) et des parties imaginaires (b-d) des valeurs propres en fonction de μ pour la configuration 1 (a-b) et la configuration 2 (c-d) . . . 93

4.3 Évolution des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d) 101
4.4 Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a) et 2 (b) 102
4.5 Espace paramétrique de dimension deux : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et évolution dans le plan complexe (e,f) pour les configurations 1 (a,c,e) et 2 (b,d,f) 103
4.6 Espace paramétrique de dimension trois : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ et évolution dans le plan complexe (e,f) pour les configurations 1 (a,c,e) et 2 (b,d,f) 104
4.7 Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11}pour les configurations 1 (a) et 2 (b) : krigeage avec une grille linéaire 2D (–) et résultats déterministes (- -) 107
4.8 Krigeage (- -) sur un espace de dimension deux avec une grille 2D linéaire de taille (20 × 50) d'échantillons d'entrée comparé aux résultats déterministes (–) : parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des prédictions du méta-modèle pour les configurations 1 (e) et 2 (f) à comparer aux Figures 4.5e et 4.5f 112
4.9 Nombre de modes instables en fonction de μ et k_{11} pour les configurations 1 (a) et 2 (b) : krigeage avec un LHS de 70 (–) et résultats déterministes (- -) . 113
4.10 Évolution de la moyenne de l'erreur relative et de l'écart-type en fonction de la taille du plan d'expériences sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) de chaque valeur propre pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d) 115
4.11 Krigeage (- -) sur un espace de dimension deux avec un LHS de 70 points pour ensemble d'apprentissage comparé aux résultats déterministes (–) : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des valeurs propres prédites par le méta–modèle pour les configurations 1 (e) et 2 (f) à comparer aux Figures 4.5e et 4.5f 116
4.12 Krigeage (- -) sur un espace de dimension 3 avec un LHS de 200 points comme ensemble d'apprentissage comparé aux résultats déterministes (- –) : valeurs maximales et minimales des parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres en fonction de μ pour les configurations 1 (a,c) et 2 (b,d). Évolution dans le plan complexe des valeurs propres prédites par le krigeage pour les configurations 1 (e) et 2 (f) 118
4.13 Évolution de la moyenne quadratique des erreurs absolues commises sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres dans le cas de la première (a,c) et de la seconde (b,d) configuration pour différents ordres de chaos 126
4.14 Évolution des parties réelles (en haut) et des fréquences (en bas) des valeurs propres pour la première (a) et la seconde configuration (b) en fonction du coefficient de frottement μ - Comparaison des prédictions du chaos (-) et des références (- -) 127
4.15 Évolution des moyennes des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos (∗) 127

4.16 Évolution des variances des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos (∗) 128

4.17 Évolution de la moyenne quadratique des erreurs absolues commises sur les parties réelles (a,b) et imaginaires (c,d) des valeurs propres dans le cas de la première (a,c) et de la seconde (b,d) configuration pour différents ordres de chaos - 2 paramètres incertains 130

4.18 Évolution des moyennes des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos (∗) - 2 paramètres incertains 131

4.19 Évolution des variances des parties réelles (a,b) et des parties imaginaires (c,d) de chaque valeur propre en fonction de l'ordre du chaos pour la première (a,c) et la seconde (b,d) configuration - Comparaison entre la référence (- -) et la prédiction du chaos (∗) - 2 paramètres incertains 131

4.20 Fonctions de densité de probabilité gouvernant les paramètres aléatoires - De haut en bas : loi B(2,8), loi B(5,5), loi B(8,2) et loi uniforme 135

4.21 Comparaison des coefficients du chaos numéro zéro, un, deux, neuf, quatorze et vingt de la partie réelle d'une valeur propre de la première configuration 138

4.22 Occurrences des parties réelles (a) et imaginaires (b) des modes instables pour la première configuration pour le méta-modèle (première ligne) et pour les résultats de référence (seconde ligne) et pour les différentes distributions (de gauche à droite) : Beta(2,8), Beta(5,5), Beta(8,2) et Uniforme 139

4.23 Occurrences des parties réelles (a) et imaginaires (b) des modes instables pour la seconde configuration pour le méta-modèle (première ligne) et pour les résultats de référence (seconde ligne) et pour les différentes distributions (de gauche à droite) : Beta(2,8), Beta(5,5), Beta(8,2) et Uniforme 140

4.24 Occurrences des parties réelles des modes instables du cas de référence pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a 142

4.25 Occurrences des parties imaginaires des modes instables du cas de référence pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a . . . 143

4.26 Occurrences des parties réelles des modes instables pour le cas de la grille composée des racines de polynôme pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a 145

4.27 Occurrences des parties imaginaires des modes instables pour le cas de la grille composée des racines de polynôme pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a 145

4.28 Occurrences des parties réelles des modes instables pour le cas d'un LHS de 300 points pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a 146
4.29 Occurrences des parties imaginaires des modes instables pour le cas d'un LHS de 300 points pour différentes distributions pour μ et k_a : des colonnes de gauche à droite : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour μ et des lignes de haut en bas : distributions B(2,8), B(5,5), B(8,2) et Uniforme pour k_a 146

5.1 Zones modifiées dans le MEF : masse 1 (rouge), masse 2 (bleu) et raideur de la poignée (orange) 152
5.2 Évolution des valeurs propres dans le plan complexe pour un balayage en μ sur [0,1] 153
5.3 Évolution des parties réelles (a) et imaginaires (b) en fonction du coefficient de frottement μ pour le couplage à 1100 Hz 153
5.4 Évolution des différentes matrices de MAC entre les déformées des modes 1 et 2 entre les différents μ 154
5.5 Évolution des déformées modales de deux modes qui se couplent pour μ = 0.1 (a,b), μ = 0.5 (c,d), μ = 0.55 (e,f) et μ = 0.9 (g,h) 158
5.6 Matrice d'AutoMAC entre toutes les déformées observées pour les modes 1 et 2 pour les différents μ 159
5.7 Matrices d'AutoMAC de la concaténation des modes propres des sous-espaces engendrés par les déformées observées lorsque les parties réelles des valeurs propres sont non nulles (a) et sur l'ensemble des déformées observées (b) 159
5.8 Matrice d'AutoMAC obtenue avec un ensemble de 500 points pour le calcul du MAC pour appairer les différents modes (séparés par des traits rouges) . 160
5.9 Plan d'expériences pour le cas 2 paramètres 161
5.10 Suivi des modes à partir des calculs CEA réalisés sur le PLEX 162
5.11 Comparaison entre un krigeage avec effet pépite (courbe rouge) et sans effet pépite (courbe bleue) - cas de $\mathcal{M}_{a0}$ du mode 2 164
5.12 Moyenne quadratique de l'erreur (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathcal{M}_{a0}$ des modes instables . 166
5.13 Moyenne quadratique de (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathcal{M}_a$ des modes instables 167
5.14 Moyenne quadratique de l'erreur (•) et erreur LOO (▲) pour les différents paramétrages de krigeage pour le méta-modèle $\mathcal{M}_\omega$ des modes instables . 168
5.15 Évolution des parties réelles obtenues avec le méta-modèle $\mathcal{M}_{a0}$ pour chaque mode avec l'ensemble d'apprentissage correspondant (•) en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M 171
5.16 Évolution des parties réelles obtenues avec le méta-modèle $\mathcal{M}_a$ pour chaque mode en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle) 172
5.17 Évolution des parties imaginaires avec le méta-modèle $\mathcal{M}_\omega$ pour chaque mode en fonction du coefficient de frottement μ et de la masse M - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle) 173
5.18 Graphiques des indicateurs de qualité du méta-modèle de krigeage de la partie réelle du mode 5 - De haut en bas : Comparaison des valeurs en Leave-One-Out, résidus standardisés, diagramme quantile-quantile 174

5.19 Comparaison des prédictions sur les parties réelles pour les points de validation pour les différents modes : (•) référence - (∗) krigeage 175
5.20 Comparaison des prédictions sur les fréquences pour les points de validation pour les différents modes : (•) référence - (∗) krigeage 176
5.21 Suivi des modes à partir des calculs CEA réalisés sur le PLEX - Cas trois paramètres 177
5.22 Comparaison des parties réelles des différents modes prédites par le krigeage (∗) et celles de référence (•) dans le cas trois paramètres 179
5.23 Comparaison des fréquences des différents modes prédites par le krigeage (∗) et celles de référence (•) dans le cas trois paramètres 180
5.24 Évolution des parties réelles de quelques modes instables en fonction de M_1 et M_2 pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ : de gauche à droite : $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ et $\mu = 0.7$ - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle) 183
5.25 Évolution des fréquences de quelques modes instables en fonction de M_1 et M_2 pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ : de gauche à droite : $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ et $\mu = 0.7$ - En blanc les zones de non validité du méta-modèle (i.e. partie réelle nulle) 184
5.26 Indice de Sobol des parties réelles des différents modes pour les différents modes - Méta-modèle $\mathscr{M}_a$ - En gris clair indices de premier ordre, en gris foncé les indices totaux 185
5.27 Indice de Sobol des parties imaginaires des différents modes pour les différents modes - Méta-modèle $\mathscr{M}_\omega$ - En gris clair indices de premier ordre, en gris foncé les indices totaux 186
5.28 Moyenne du nombre d'instabilités en fonction de M_1 et M_2 pour différentes lois de probabilité sur μ : (b) loi B(2,8) , (b) loi B(8,2), (c) loi uniforme 188
5.29 Moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction de M_1 et M_2 pour différentes lois de probabilité sur μ : (b) loi B(2,8) , (b) loi B(8,2), (c) loi uniforme 189
5.30 Suivi des modes à partir des CEA réalisées sur les PLEX - Loi uniforme (a) - Loi B(8,2) (b) - Loi B(2,8) (c) 190
5.31 Prédiction par krigeage des quatre premiers coefficients des développements en chaos polynomial de la partie réelle du mode 3 pour les trois lois en fonction des masses M_1 et M_2 - PLEX (•) - Loi uniforme (a,b,c,d) - Loi B(8,2) (e,f,g,h) - Loi B(2,8) (i,j,k,l) 192
5.32 Prédiction par krigeage des quatre premiers coefficients des développements en chaos polynomial de la partie réelle du mode 6 pour les trois lois en fonction des masses M_1 et M_2 - PLEX (•) - Loi uniforme (a,b,c,d) - Loi B(8,2) (e,f,g,h) - Loi B(2,8) (i,j,k,l) 193
5.33 Évolutions prédites par le méta-modèle des parties réelles (en haut) et des fréquences (en bas) pour $\mu = 0.50$ pour les modes 2, 3, et 4 194
5.34 Évolution des moyennes des parties réelles en fonction des masses M_1 et M_2 de différents modes pour les lois uniforme (à gauche), B(8,2) (au milieu) et B(2,8) (à droite) 196
5.35 Évolution des variances des parties réelles en fonction des masses M_1 et M_2 de différents modes pour les lois uniforme (à gauche), B(8,2) (au milieu) et B(2,8) (à droite) 197
5.36 Nombre d'instabilités moyennes en fonction des masses M_1 et M_2 pour la loi B(2,8) (a), la loi B(8,2) (b) et la loi uniforme (c) 198
5.37 Moyenne de la somme des parties réelles positives en fonction des masses M_1 et M_2 pour la loi B(2,8) (a), la loi B(8,2) (b) et la loi uniforme (c) 199

5.38 Valeurs propres obtenues pour tous les jeux de contacts avant la modification (•) et après la modification (•) . . . 201
5.39 Moyenne des parties réelles positives par plage de fréquences avant la modification (•) et après la modification (•) . . . 201

6.1 Schéma du principe de la méthode de tir . . . 208
6.2 Trajectoire sur un tore invariant de dimension 2 . . . 217
6.3 Domaine temporel bidimensionnel . . . 218
6.4 Schéma du modèle étudié . . . 223
6.5 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences (b,d) obtenues par CEA en fonction du coefficient de frottement pour la première (a,b) et la seconde (c,d) configuration . . . 224
6.6 Déplacements en fonction du temps pour les différents cas d'étude . . . 226
6.7 FFT du déplacement x_1 pour les différents cas d'étude . . . 227
6.8 FFT du déplacement y_2 pour les différents cas d'étude . . . 228
6.9 Cycles limites du degré de liberté x_1 pour les différents cas d'étude . . . 229
6.10 Cycles limites du degré de liberté y_2 pour les différents cas d'étude . . . 230
6.11 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences propres (b,d) des matrices dynamiques successives en fonction de l'amplitude modale pour le premier cas (a,b) et le second cas (c,d) . . . 231
6.12 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,b) et des fréquences (c,d) du sous-système associé au premier (a,c) et au second mode (b,d) pour une grille d'amplitudes modales (p_1, p_2) - Troisième cas . . . 234
6.13 Influence de l'initialisation en amplitude modale (p_1^0, p_2^0) sur l'évolution des amplitudes modales (a,d), des parties réelles (b,e) et des fréquences (c,f) du premier mode (en haut) et du second mode (en bas) - Initialisation 1 : (0.1 ; 0.1) (——) - Initialisation 2 : (0.001 , 0.01) (- - -) - Initialisation 3 : (0.01 , 0.001) (·····) - Initialisation 4 : (0.5 , 0.5) (- · - ·) - Troisième cas . . . 235
6.14 Influence de la discrétisation en temps sur l'évolution des amplitudes modales (a,d), des parties réelles (b,e) et des fréquences (c,f) du premier mode (en haut) et du second mode (en bas) - $\delta t = 0.01$ (——) - $\delta t = 0.1$ (- - -) - $\delta t = 1$ (·····) - $\delta t = 10$ (- · - ·) - Troisième cas . . . 236
6.15 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,b) et des fréquences (c,d) en fonction du temps des sous-systèmes associés aux modes instables 1 (à gauche) et 2 (à droite) - Mode associé au sous-système : (·····) - Troisième cas . . . 237
6.16 Évolution de l'amplitude modale (a), de la partie réelle de la valeur propre (b) et de la fréquence (c) du mode instable 1 (en bleu) et 2 (en orange) en fonction du temps - Sixième cas . . . 239
6.17 Comparaison des cycles limites obtenus avec la méthode MASA (à gauche) et par intégration temporelle (à droite) pour les quatre degrés de liberté : x_1 (a,b), y_1 (c,d), x_2 (e,f), y_2 (g,h) pour le cas 1 (bleu), le cas 2 (violet) le cas 3 (orange) et le cas 4 (jaune) . . . 241
6.18 Évolution des parties réelles (a,b) et des fréquences (c,d) en fonction de l'amplitude modale pour 75 points de balayage (a,c) et 11 points de balayage (b,d) . . . 245
6.19 Matrice de MAC entre les déformées en $p = 0$ et $p = p_{\max}$ pour le cas $\mu = 0.15$ - En rouge, le mode instable à la CEA . . . 246
6.20 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a) et des fréquences (b) en fonction de l'amplitude modale pour $\mu = 0.22$ . . . 247

6.21 Évolution des amplitudes modales (a), des parties réelles des valeurs propres (b) et des fréquences (c) pour le premier (bleu) et le second (orange) mode instable 248
6.22 Évolution des parties réelles des valeurs propres (a,c) et des fréquences (b,d) du sous-système associé au premier mode (a,b) et au second mode (c,d) . . 249

Liste des tableaux

3.1 Interfaces de contact . . . 58
3.2 Instabilités pour différentes valeurs du coefficient de frottement interne $\mu_{interne}$ 62
3.3 Caractéristiques des 25 configurations étudiées . . . 67
3.4 Fréquences instables des 25 configurations . . . 68
3.5 Caractéristiques des déformées observées . . . 71
3.6 Intervalles de fréquences considérés . . . 74
3.7 Intervalles de fréquences pour l'algorithme génétique . . . 80
3.8 Paramètres de l'algorithme génétique . . . 82

4.1 Paramètres des deux configurations étudiées du modèle mécanique . . . 92
4.2 Exemple de noyaux de covariance en dimension 1 . . . 98
4.3 Configuration 1 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 108
4.4 Configuration 1 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . 108
4.5 Configuration 1 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 109
4.6 Configuration 1 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 109
4.7 Configuration 2 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 110
4.8 Configuration 2 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties réelles des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . 110
4.9 Configuration 2 : Moyenne quadratique de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 111
4.10 Configuration 2 : Maximum de l'erreur absolue sur les parties imaginaires des valeurs propres pour différentes fonctions de régression et de corrélation . . . 111
4.11 Comparaison des temps de calcul entre la CEA et le méta-modèle pour deux paramètres . . . 119
4.12 Comparaison des temps de calcul entre la CEA et le méta-modèle de trois paramètres . . . 119
4.13 Comparaison du nombre d'échantillons dans chaque cas d'étude $\mathbf{p} = \{\mu, k_{11}\}$ et $\mathbf{p} = \{\mu, k_{11}, k_{22}\}$ (i.e. pour 2 ou 3 paramètres) pour le calcul des résultats déterministes avec la CEA ou pour construire un méta-modèle krigeage . . 119

4.14 Correspondance entre les distributions continues classiques et les familles de polynômes orthogonaux associées . . . 121
4.15 Plages de variations des paramètres . . . 133
4.16 Erreur quadratique moyenne sur le premier et le second coefficient du chaos polynomial pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire de chaque valeur propre pour toutes les distributions considérées dans le cas de la première configuration . . . 136
4.17 Erreur quadratique moyenne sur le premier et le second coefficient du chaos polynomial pour chaque partie réelle et chaque partie imaginaire de chaque valeur propre pour toutes les distributions considérées dans le cas de la seconde configuration . . . 136
4.18 Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et le méta-modèle dans le cas de la première configuration . . . 137
4.19 Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et le méta-modèle dans le cas de la seconde configuration . . . 137
4.20 Nombre de calculs CEA réalisés pour les différentes méthodes . . . 142
4.21 Pourcentage de nombre de modes stables ou instables pour la référence et les méta-modèles . . . 144

5.1 Paramètres variables pris en compte . . . 152
5.2 Modes identifiés et retenus pour l'étude sur le PLEX . . . 162
5.3 Indices de Sobol d'ordre 1 et totaux pour les différents méta-modèles des différents modes . . . 170
5.4 Caractéristiques des principaux modes dans le cas trois paramètres incertains . . . 178
5.5 Modes instables identifiés pour les différents plan d'expériences avec leur fréquence, leur partie réelle et le nombre de points dans chaque plan d'expériences pour chaque loi . . . 191
5.6 Degré du chaos polynomial pour les différentes lois et les différents méta–modèles . . . 191

6.1 Jeux de paramètres des configurations étudiées . . . 224
6.2 Cas d'étude retenus . . . 225
6.3 Nombres de fondamentales, d'harmoniques et de combinaisons linéaires présentes dans les FFT entre 0 et 30 Hz pour les différents cas . . . 225
6.4 Fréquences comprises entre 0 Hz et 30 Hz relevées dans les FFT et leur décomposition - Troisième cas . . . 227
6.5 Comparaison des résultats obtenus avec la CEA, l'intégration temporelle et la méthode MASA sur les différents cas . . . 239
6.6 Comparaison des amplitudes des cycles limites MASA et temporels en déplacement et en vitesse pour les différents degrés de liberté . . . 240
6.7 Fréquences instables relevées à la CEA pour une configuration du frein pour différentes valeurs du coefficient de frottement μ . . . 243
6.8 Temps de calcul pour différents pas de discrétisation de l'amplitude modale 245

Bibliographie

[1] ABUBAKAR, A. R. et H. OUYANG. 2006, «Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal», *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, vol. 2, p. 143–155.
(Referenced on page 58.)

[2] AKAY, A. 2002, «Acoustics of friction», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 111, nº 4, p. 1525–1548.
(Referenced on pages 11, 12, and 15.)

[3] AKAY, A., O. GIANNINI, F. MASSI et A. SESTIERI. 2009, «Disc brake squeal characterization through simplified test rigs», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, nº 8, p. 2590 – 2607.
(Referenced on page 14.)

[4] ASKEY, R. et J. A. WILSON. 1985, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, vol. 319, American Mathematical Soc.
(Referenced on page 47.)

[5] BALMES, E. 1996, «Parametric families of reduced finite element models. theory and applications», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 10, nº 4, p. 381–394.
(Referenced on page 156.)

[6] BENAROYA, H. et M. REHAK. 1988, «Finite element methods in probabilistic structural analysis : a selective review», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 41, nº 5, p. 201–213.
(Referenced on page 46.)

[7] BERGMAN, F., M. ERIKSSON et S. JACOBSON. 1999, «Influence of disc topography on generation of brake squeal1», *Wear*, vol. 225, p. 621–628.
(Referenced on page 15.)

[8] BERGMAN, F., M. ERIKSSON et S. JACOBSON. 2000, «The effect of reduced contact area on the occurrence of disc brake squeals for an automotive brake pad», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, vol. 214, nº 5, p. 561–568.
(Referenced on page 15.)

[9] BERVEILLER, M., B. SUDRET et M. LEMAIRE. 2006, «Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression», *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 15, nº 1-3, p. 81–92.
(Referenced on page 121.)

[10] BETTINGER, R. 2009, *Inversion d'un système par krigeage : application à la synthèse des catalyseurs à haut débit*, thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis.
(Referenced on pages 95 and 96.)

[11] BLANCHET-SCALLIET, C., C. HELBERT, M. RIBAUD et C. VIAL. 2017, «A specific kriging kernel for dimensionality reduction : Isotropic by group kernel», .
(Referenced on page 98.)

[12] BLATMAN, G. 2009, *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*, thèse de doctorat, Clermont-Ferrand 2.
(Referenced on pages 122 and 123.)

[13] BLATMAN, G. et B. SUDRET. 2008, «Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach», *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 336, nº 6, p. 518–523.
(Referenced on page 129.)

[14] BLATMAN, G. et B. SUDRET. 2011, «Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression», *Journal of Computational Physics*, vol. 230, nº 6, p. 2345–2367.
(Referenced on page 129.)

[15] BLATMAN, G. et B. SUDRET. 2011, «Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression», *Journal of Computational Physics*, vol. 230, nº 6, p. 2345–2367.
(Referenced on page 141.)

[16] BRUNETTI, J., F. MASSI, Y. BERTHIER et collab.. 2016, «A new instability index for unstable mode selection in squeal prediction by complex eigenvalue analysis», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 377, p. 106–122.
(Referenced on page 211.)

[17] BUTLIN, T. et J. WOODHOUSE. 2010, «Friction-induced vibration : Quantifying sensitivity and uncertainty», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, nº 5, p. 509–526.
(Referenced on page 16.)

[18] BUTLIN, T. et J. WOODHOUSE. 2011, «A systematic experimental study of squeal initiation», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, nº 21, p. 5077–5095.
(Referenced on page 14.)

[19] BUTLIN, T. et J. WOODHOUSE. 2013, «Friction-induced vibration : model development and comparison with large-scale experimental tests», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, nº 21, p. 5302–5321.
(Referenced on page 14.)

[20] CAMERON, R. H. et W. T. MARTIN. 1947, «The orthogonal development of nonlinear functionals in series of fourier-hermite functionals», *Annals of Mathematics*, p. 385–392.
(Referenced on page 47.)

[21] CANTONE, F. et F. MASSI. 2011, «A numerical investigation into the squeal instability : Effect of damping», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, nº 5, p. 1727 – 1737.
(Referenced on page 16.)

[22] CHARROYER, L. 2017, *Méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues liées au frottement : Application au bruit de crissement ferroviaire*, thèse de doctorat, Lyon.
(Referenced on page 208.)

[23] CHARROYER, L., O. CHIELLO et J.-J. SINOU. 2018, «Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method», *International Journal of Mechanical Sciences*.
(Referenced on page 58.)

[24] CONTRERAS, H. 1980, «The stochastic finite-element method», *Computers & Structures*, vol. 12, nº 3, p. 341–348.
(Referenced on page 46.)

[25] CORTES, C. et V. VAPNIK. 1995, «Support-vector networks», *Machine learning*, vol. 20, nº 3, p. 273–297.
(Referenced on page 51.)

[26] COUDEYRAS, N. 2009, *Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein*, thèse de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon.
(Referenced on page 211.)

[27] COUDEYRAS, N., S. NACIVET et J.-J. SINOU. 2009, «Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 328, nº 4-5, p. 520–540.
(Referenced on pages 58, 208, 209, 211, 213, 221, and 222.)

[28] COUDEYRAS, N., J.-J. SINOU et S. NACIVET. 2009, «A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal», *Journal of sound and vibration*, vol. 319, nº 3-5, p. 1175–1199.
(Referenced on pages 58, 208, 209, and 211.)

[29] CULLA, A. et F. MASSI. 2009, «Uncertainty model for contact instability prediction», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 126, nº 3, p. 1111–1119.
(Referenced on page 16.)

[30] DAKEL, M. et J.-J. SINOU. 2017, «Stability and nonlinear self-excited friction-induced vibrations for a minimal model subjected to multiple coalescence patterns», *Journal of Vibroengineering*, vol. 19, nº 1.
(Referenced on page 90.)

[31] DAVALO, E. et P. NAÏM. 1990, *Des réseaux de neurones*, Eyrolles.
(Referenced on page 51.)

[32] DEB, K., A. PRATAP, S. AGARWAL et T. MEYARIVAN. 2002, «A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii», *IEEE transactions on evolutionary computation*, vol. 6, nº 2, p. 182–197.
(Referenced on page 80.)

[33] DESSOMBZ, O. 2000, *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*, thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon.
(Referenced on page 48.)

[34] DESSOMBZ, O., F. THOUVEREZ, J.-P. LAÎNÉ et L. JÉZÉQUEL. 2001, «Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 239, nº 5, p. 949–968.
(Referenced on page 48.)

[35] DHATT, G. et G. TOUZOT. 1981, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Presses Université Laval.
(Referenced on page 29.)

[36] DIMAROGONAS, A. D. 1995, «Interval analysis of vibrating systems», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 183, nº 4, p. 739–749.
(Referenced on page 48.)

[37] DO, H., F. MASSA, T. TISON et B. LALLEMAND. 2017, «A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter variations», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 84, p. 346 – 364.
(Referenced on page 49.)

[38] DUNLAP, K. B., M. A. RIEHLE et R. E. LONGHOUSE. 1999, «An investigative overview of automotive disc brake noise», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on page 16.)

[39] DUPUY, D., C. HELBERT, J. FRANCO et collab.. 2015, «DiceDesign and DiceEval : two R packages for design and analysis of computer experiments», *Journal of Statistical Software*, vol. 65, nº 11, p. 1–38.
(Referenced on page 161.)

[40] EARLES, S. et C. LEE. 1976, «Instabilities arising from the frictional interaction of a pin-disk system resulting in noise generation», *Journal of Engineering for industry*, vol. 98, nº 1, p. 81–86.
(Referenced on pages 14 and 24.)

[41] ELISHAKOFF, I. 1979, «Simulation of space-random fields for solution of stochastic boundary-value problems», *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 65, nº 2, p. 399–403.
(Referenced on page 44.)

[42] ELISHAKOFF, I. 2000, *Whys and hows in uncertainty modelling*, Springer.
(Referenced on page 48.)

[43] ERIKSSON, M., F. BERGMAN et S. JACOBSON. 1999, «Surface characterisation of brake pads after running under silent and squealing conditions», *Wear*, vol. 232, nº 2, p. 163–167.
(Referenced on page 15.)

[44] ERIKSSON, M., A. LUNDQVIST et S. JACOBSON. 2001, «A study of the influence of humidity on the friction and squeal generation of automotive brake pads», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, vol. 215, nº 3, p. 329–342.
(Referenced on page 15.)

[45] FAZIO, O. 2016, *Amélioration de la prédictivité des calculs de crissement de frein*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
(Referenced on pages 57, 221, and 222.)

[46] FAZIO, O., S. NACIVET et J.-J. SINOU. 2015, «Reduction strategy for a brake system with local frictional non-linearities–application for the prediction of unstable vibration modes», *Applied Acoustics*, vol. 91, p. 12–24.
(Referenced on pages 57, 221, and 222.)

[47] FELSKE, A., G. HOPPE et H. MATTHÄI. 1978, «Oscillations in squealing disk brakes-analysis of vibration modes by holographic lnterferometry», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on pages 13 and 16.)

[48] FESTJENS, H., C. GAËL, R. FRANCK, D. JEAN-LUC et L. REMY. 2012, «Effectiveness of multilayer viscoelastic insulators to prevent occurrences of brake squeal : A numerical study», *Applied Acoustics*, vol. 73, nº 11, p. 1121–1128.
(Referenced on page 10.)

[49] FIELDHOUSE, J. D. et P. NEWCOMB. 1993, «The application of holographic interferometry to the study of disc brake noise», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on pages 14 and 16.)

[50] FIELDHOUSE, J. D. et T. NEWCOMB. 1996, «Double pulsed holography used to investigate noisy brakes», *Optics and lasers in Engineering*, vol. 25, n° 6, p. 455–494.
(Referenced on pages 14 and 16.)

[51] FORRESTER, A., A. KEANE et collab.. 2008, *Engineering design via surrogate modelling : a practical guide*, John Wiley & Sons.
(Referenced on page 161.)

[52] FOSBERRY, R. et Z. HOLUBECKI. 1961, *Disc brake squeal : its mechanism and suppression*, Motor Industry Research Association.
(Referenced on pages 13 and 16.)

[53] FRANCO, J., D. DUPUY, O. ROUSTANT, G. DAMBLIN et B. IOOSS. «DiceDesign : Designs of computer experiments, 2014», *R package version*, vol. 1.
(Referenced on page 161.)

[54] GHANEM, R. 1999, «Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 168, n° 1-4, p. 19–34.
(Referenced on page 47.)

[55] GHANEM, R. et J. RED-HORSE. 1999, «Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach», *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 133, n° 1-4, p. 137–144.

[56] GHANEM, R. G. et R. M. KRUGER. 1996, «Numerical solution of spectral stochastic finite element systems», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 129, n° 3, p. 289–303.
(Referenced on page 47.)

[57] GHANEM, R. G. et P. D. SPANOS. 1991, «Stochastic finite element method : Response statistics», dans *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer, p. 101–119.
(Referenced on pages 45, 46, and 47.)

[58] GIANNINI, O. et F. MASSI. 2008, «Characterization of the high-frequency squeal on a laboratory brake setup», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, n° 1, p. 394 – 408.
(Referenced on page 14.)

[59] GRAF, M. et G.-P. OSTERMEYER. 2011, «Instabilities in the sliding of continua with surface inertias : An initiation mechanism for brake noise», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 22, p. 5269–5279.
(Referenced on page 14.)

[60] GUCKENHEIMER, J. et P. HOLMES. 2013, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42, Springer Science & Business Media.
(Referenced on page 36.)

[61] HASSELMAN, T. K. et G. C. HART. 1972, «Modal analysis of random structural systems», *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 98, n° 3, p. 561–579.
(Referenced on page 46.)

[62] HE, J.-H. 2000, «A new perturbation technique which is also valid for large parameters», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 5, nº 229, p. 1257–1263.
(Referenced on page 46.)

[63] HERTZ, H. R. 1882, «Uber die beruhrung fester elastischer korper und uber die harte», *Verhandlung des Vereins zur Beforderung des GewerbefleiBes, Berlin*, p. 449.
(Referenced on page 27.)

[64] HIEN, T. et M. KLEIBER. 1990, «Finite element analysis based on stochastic hamilton variational principle», *Computers & Structures*, vol. 37, nº 6, p. 893–902.
(Referenced on page 46.)

[65] HOFFMANN, N., M. FISCHER, R. ALLGAIER et L. GAUL. 2002, «A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations», *Mechanics Research Communications*, vol. 29, nº 4, p. 197–205.
(Referenced on page 24.)

[66] HULTÉN, J. 1993, «Brake squeal-a self-exciting mechanism with constant friction», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on pages 24 and 90.)

[67] IBRAHIM, R. 1994, «Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—part i : mechanics of contact and friction», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, nº 7, p. 209–226.
(Referenced on pages 15 and 20.)

[68] IBRAHIM, R. 1994, «Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—part ii : dynamics and modeling», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 47, nº 7, p. 227–253.
(Referenced on page 15.)

[69] ICHIBA, Y. et Y. NAGASAWA. 1993, «Experimental study on disc brake squeal», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on page 16.)

[70] JARVIS, R. et B. MILLS. 1963, «Vibrations induced by dry friction», *Proceedings of the Institution of mechanical Engineers*, vol. 178, nº 1, p. 847–857.
(Referenced on page 13.)

[71] JARVIS, R. et B. MILLS. 1963, «Vibrations induced by dry friction», *Proceedings of the Institution of mechanical Engineers*, vol. 178, nº 1, p. 847–857.
(Referenced on pages 23 and 24.)

[72] JONES, D. R., M. SCHONLAU et W. J. WELCH. 1998, «Efficient global optimization of expensive black-box functions», *Journal of Global Optimization*, vol. 13, nº 4, p. 455–492.
(Referenced on page 94.)

[73] KINKAID, N., O. O'REILLY et P. PAPADOPOULOS. 2003, «Automotive disc brake squeal», *Journal of sound and vibration*, vol. 267, nº 1, p. 105–166.
(Referenced on page 16.)

[74] KLEIJNEN, J. P. 2009, «Kriging metamodeling in simulation : A review», *European journal of operational research*, vol. 192, nº 3, p. 707–716.
(Referenced on page 52.)

[75] KLEIJNEN, J. P. 2015, «Design and analysis of simulation experiments», , p. 3–22.
(Referenced on page 94.)

[76] KOEKOEK, R. et R. F. SWARTTOUW. 1996, «The askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue», *arXiv preprint math/9602214*.
(Referenced on pages 120 and 121.)

[77] LÜ, H., W.-B. SHANGGUAN et D. YU. 2017, «Uncertainty quantification of squeal instability under two fuzzy-interval cases», *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 328, p. 70 – 82. Theme : Uncertainty and Decision.
(Referenced on page 49.)

[78] LÜ, H. et D. YU. 2014, «Brake squeal reduction of vehicle disc brake system with interval parameters by uncertain optimization», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, nº 26, p. 7313 – 7325.
(Referenced on pages 17 and 50.)

[79] LIU, S., M. OZBEK et J. GORDON. 1996, «A nonlinear model for aircraft brake squeal analysis. part i : model description and solution methodology», dans *ASME design engineering technical conferences*, vol. 3, p. 406–416.
(Referenced on page 23.)

[80] LOPHAVEN, S. N., H. B. NIELSEN et J. SØNDERGAARD. 2002, «Aspects of the matlab toolbox DACE», cahier de recherche.
(Referenced on pages 99 and 163.)

[81] LOPHAVEN, S. N., H. B. NIELSEN et J. SONDERGAARD. 2002, «Dace a Matlab Kriging Toolbox», cahier de recherche, Technical University of Denmark.
(Referenced on pages 98, 99, and 105.)

[82] LORANG, X. et O. CHIELLO. 2008, «Stability and transient analysis in the modelling of railway disc brake squeal», dans *Noise and vibration mitigation for rail transportation systems*, Springer, p. 447–453.
(Referenced on page 207.)

[83] LOYER, A., J.-J. SINOU, O. CHIELLO et X. LORANG. 2012, «Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems. application to an elastic layer», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, nº 5, p. 1011–1041.
(Referenced on pages 58 and 207.)

[84] LÜ, H. et D. YU. 2015, «Stability analysis and improvement of uncertain disk brake systems with random and interval parameters for squeal reduction», *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 137, nº 5, p. 051 003.
(Referenced on page 48.)

[85] LU, H. et D. YU. 2016, «Optimization design of a disc brake system with hybrid uncertainties», *Advances in Engineering Software*, vol. 98, p. 112–122.
(Referenced on pages 50 and 53.)

[86] MASSI, F., L. BAILLET, O. GIANNINI et A. SESTIERI. 2007, «Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, nº 6, p. 2374 – 2393.
(Referenced on pages 14, 58, and 207.)

[87] MASSI, F., Y. BERTHIER et L. BAILLET. 2008, «Contact surface topography and system dynamics of brake squeal», *Wear*, vol. 265(11-12), p. 1784–1792.
(Referenced on page 14.)

[88] MATHERON, G. 1962, *Traité de géostatistique appliquée. 1 (1962)*, vol. 1, Editions Technip.
(Referenced on page 52.)

[89] MATSUZAKI, M. et T. IZUMIHARA. 1993, «Brake noise caused by longitudinal vibration of the disc rotor», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on page 16.)

[90] MCCULLOCH, W. S. et W. PITTS. 1943, «A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity», *The bulletin of mathematical biophysics*, vol. 5, nº 4, p. 115–133.
(Referenced on page 50.)

[91] MCDANIEL, J. G., J. MOORE, S. CHEN et C. L. CLARKE. 1999, «Acoustic radiation models of brake systems from stationary ldv measurements», *Proceedings of IMEC*, vol. 99, nº 1999, p. 14–19.
(Referenced on page 16.)

[92] MCKAY, M. D., R. J. BECKMAN et W. J. CONOVER. 1979, «Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code», *Technometrics*, vol. 21, nº 2, p. 239–245.
(Referenced on pages 45, 105, and 113.)

[93] MILLS, H. 1938, «1939 research report n9000b and research report n9162b of the institution of automobile engineers», *Brake Squeal*, vol. 1939.
(Referenced on page 13.)

[94] MILLS, H. 1938, «Brake squeal. institution of automobile engineers», cahier de recherche, Research Report 9000b and Research Report.
(Referenced on page 22.)

[95] MÖLLER, B. et M. BEER. 2008, «Engineering computation under uncertainty–capabilities of non-traditional models», *Computers & Structures*, vol. 86, nº 10, p. 1024–1041.
(Referenced on page 42.)

[96] MONTGOMERY, D. 2008, *Design and analysis of experiments*, John Wiley & Sons.
(Referenced on page 141.)

[97] MOORE, R. E. 1969, «Interval analysis. 1966», *Prince-Hall, Englewood Cliffs, NJ*.
(Referenced on page 48.)

[98] MOUSTAPHA, M., J.-M. BOURINET, B. GUILLAUME et B. SUDRET. 2018, «Comparative study of kriging and support vector regression for structural engineering applications», *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, vol. 4, nº 2, p. 04018 005.
(Referenced on pages 94 and 98.)

[99] MURAKAMI, H., N. TSUNADA et T. KITAMURA. 1984, «A study concerned with a mechanism of disc-brake squeal», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on pages 14 and 16.)

[100] NACIVET, S. et J.-J. SINOU. 2017, «Modal amplitude stability analysis and its application to brake squeal», *Applied Acoustics*, vol. 116, p. 127–138.
(Referenced on pages 57, 211, 222, and 245.)

[101] NAYFEH, A. H. et B. BALACHANDRAN. 2008, *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods*, John Wiley & Sons.
(Referenced on pages 31, 33, 37, 38, 39, 45, and 208.)

[102] NECHAK, L., S. BERGER et E. AUBRY. 2011, «A polynomial chaos approach to the robust analysis of the dynamic behaviour of friction systems», *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 30, nº 4, p. 594–607.
(Referenced on page 90.)

[103] NECHAK, L., S. BERGER et E. AUBRY. 2013, «Non-intrusive generalized polynomial chaos for the stability analysis of uncertain dynamic friction systems», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, nº 5, p. 1204–1215.

[104] NECHAK, L., S. BERGER et E. AUBRY. 2014, «Wiener askey and wiener haar expansions for the analysis and prediction of limit cycle oscillations in uncertain nonlinear dynamic friction systems», *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 9, nº 2, p. 021 007.
(Referenced on page 90.)

[105] NECHAK, L., S. BESSET et J.-J. SINOU. 2018, «Robustness of stochastic expansions for the stability of uncertain nonlinear dynamical systems – application to brake squeal», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 111, p. 194 – 209.
(Referenced on page 47.)

[106] NECHAK, L., F. GILLOT, S. BESSET et J.-J. SINOU. 2015, «Sensitivity analysis and kriging based models for robust stability analysis of brake systems», *Mechanics Research Communications*, vol. 69, p. 136 – 145.
(Referenced on pages 53 and 100.)

[107] NISHLWAKL, M., H. HARADA, H. OKAMURA et T. IKEUCHI. 1989, «Study on disc brake squeal», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on pages 15 and 16.)

[108] NOBARI, A., H. OUYANG et P. BANNISTER. 2015, «Statistics of complex eigenvalues in friction-induced vibration», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 338, p. 169–183.
(Referenced on page 46.)

[109] NOBARI, A., H. OUYANG et P. BANNISTER. 2015, «Uncertainty quantification of squeal instability via surrogate modelling», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 60, p. 887–908.
(Referenced on pages 17, 53, 93, and 94.)

[110] OBERST, S. et J. LAI. 2015, «Nonlinear transient and chaotic interactions in disc brake squeal», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 342, p. 272–289.
(Referenced on page 207.)

[111] OHTA, K., K. KAGAWA, T. ETO et S. NISHIKAWA. 1984, «Study on the disc brake squeal (simulation using modal analysis technique and experiments).», *Tans. Japan Soc. Mech. Eng.*, vol. 50, nº 457, p. 1585–1593.
(Referenced on page 14.)

[112] OWEN, A. B. 1998, «Detecting near linearity in high dimensions», cahier de recherche.
(Referenced on page 123.)

[113] PATÉ-CORNELL, M. 1996, «Uncertainties in risk analysis : Six levels of treatment», *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 54, nº 2, p. 95 – 111. Treatment of Aleatory and Epistemic Uncertainty.
(Referenced on page 42.)

[114] RASHID, A. 2014, «Overview of disc brakes and related phenomena-a review», *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, vol. 10, nº 4, p. 257–301.
(Referenced on page 9.)

[115] RASMUSSEN, C. E. et C. K. WILLIAMS. 2006, «Gaussian processes for machine learning. 2006», *The MIT Press, Cambridge, MA, USA*, vol. 38, p. 715–719.
(Referenced on page 97.)

[116] RENAUD, F., G. CHEVALLIER, J.-L. DION et G. TAUDIÈRE. 2012, «Motion capture of a pad measured with accelerometers during squeal noise in a real brake system», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 33, p. 155–166.
(Referenced on page 14.)

[117] RENAULT, A., F. MASSA, B. LALLEMAND et T. TISON. 2016, «Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 367, p. 37–55.
(Referenced on page 17.)

[118] ROSENBLATT, F. 1958, «The perceptron : a probabilistic model for information storage and organization in the brain.», *Psychological review*, vol. 65, nº 6, p. 386.
(Referenced on page 50.)

[119] ROSENBLATT, M. 2012, *Gaussian and non-Gaussian linear time series and random fields*, Springer Science & Business Media.
(Referenced on page 52.)

[120] ROUSTANT, O., D. GINSBOURGER et Y. DEVILLE. 2010, «DiceKriging : Kriging methods for computer experiments», *R package version*, vol. 1.
(Referenced on page 163.)

[121] ROUSTANT, O., D. GINSBOURGER et Y. DEVILLE. 2012, «DiceKriging, DiceOptim : Two R packages for the analysis of computer experiments by kriging-based metamodeling and optimization», .
(Referenced on pages 99 and 163.)

[122] ROY, C. J. et W. L. OBERKAMPF. 2011, «A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, nº 25, p. 2131 – 2144.
(Referenced on page 42.)

[123] SACKS, J., W. J. WELCH, T. J. MITCHELL et H. P. WYNN. 1989, «Design and analysis of computer experiments», *Statistical science*, p. 409–423.
(Referenced on page 94.)

[124] SARROUY, E., O. DESSOMBZ et J.-J. SINOU. 2013, «Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, nº 3, p. 577 – 594.
(Referenced on pages 47, 94, and 125.)

[125] SARROUY, E., O. DESSOMBZ et J.-J. SINOU. 2013, «Stochastic study of non-linear self-excited system with friction», *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 40, nº 2, p. 1–10.
(Referenced on pages 90, 94, and 125.)

[126] SHERIF, H. A., J. BLOUET, J. F. CRETEGNY, R. GRAS et S. VIALARD. 1989, «Experimental investigation of self-excited squeal», cahier de recherche, SAE Technical Paper.
(Referenced on page 16.)

[127] SHINOZUKA, M. et G. DEODATIS. 1991, «Simulation of stochastic processes by spectral representation», *Applied Mechanics Reviews*, vol. 44, nº 4, p. 191–204.
(Referenced on page 44.)

[128] SIGNORINI, A. 1960, *Questioni Di Elasticita'Non Linearizzata*, Cremonese.
(Referenced on page 27.)

[129] SIMO, J. C. et T. LAURSEN. 1992, «An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction», *Computers & Structures*, vol. 42, nº 1, p. 97–116.
(Referenced on page 29.)

[130] SIMPSON, T. W., J. POPLINSKI, P. N. KOCH et J. K. ALLEN. 2001, «Metamodels for computer-based engineering design : survey and recommendations», *Engineering with computers*, vol. 17, nº 2, p. 129–150.
(Referenced on page 49.)

[131] SINCLAIR, D. et N. MANVILLE. 1955, «Frictional vibrations», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 22, nº 1, p. 207–214.
(Referenced on page 20.)

[132] SINOU, J.-J. 2010, «Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal – on the need to consider both stability and non-linear analysis», *Mechanics Research Communications*, vol. 37, p. 96–105.
(Referenced on pages 58 and 206.)

[133] SINOU, J.-J. et L. JÉZÉQUEL. 2007, «Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 26, nº 1, p. 106 – 122.
(Referenced on pages 16 and 90.)

[134] SOIZE, C. 1993, *Méthodes mathématiques en analyse du signal*, Masson, Paris.
(Referenced on page 44.)

[135] SPURR, R. T. 1961, «A theory of brake squeal», *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers : Automobile Division*, vol. 15, nº 1, p. 33–52.
(Referenced on pages 13, 16, 23, and 24.)

[136] SUDRET, B. 2008, «Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions», *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 93, nº 7, p. 964–979.
(Referenced on pages 47, 122, and 123.)

[137] TISON, T., A. HEUSSAFF, F. MASSA, I. TURPIN et R. NUNES. 2014, «Improvement in the predictivity of squeal simulations : Uncertainty and robustness», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, nº 15, p. 3394–3412.
(Referenced on pages 16 and 41.)

[138] TOURNEAU, P., F. MERCIER et M. KLEIN. 1994, «Applications of scatter analyses in satellite development», *CNES/ESA International Conference*.
(Referenced on page 156.)

[139] TREIMER, M., B. ALLERT, K. DYLLA et G. MÜLLER. 2017, «Uncertainty quantification applied to the mode coupling phenomenon», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 388, p. 171 – 187.
(Referenced on page 50.)

[140] VERMOT DES ROCHES, G. 2011, *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes.*, thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
(Referenced on page 207.)

[141] VON WAGNER, U., T. JEARSIRIPONGKUL, T. VOMSTEIN, G. CHAKRABORTY et P. HOGEDORN. 2003, «Brake squeal : Modeling and experiments», *VDI-Berichte*, p. 173–186.
(Referenced on page 14.)

[142] WANG, D., J. MO, M. LIU, H. OUYANG et Z. ZHOU. 2016, «Noise performance improvements and tribological consequences of a pad-on-disc system through groove-textured disc surface», *Tribology International*, vol. 102, p. 222–236.
(Referenced on page 14.)

[143] WANG, D., J. MO, Z. ZHU, H. OUYANG, M. ZHU et Z. ZHOU. 2017, «How do grooves on friction interface affect tribological and vibration and squeal noise performance», *Tribology International*, vol. 109, p. 192–205.
(Referenced on page 14.)

[144] WHITLEY, D. 1994, «A genetic algorithm tutorial», *Statistics and computing*, vol. 4, n° 2, p. 65–85.
(Referenced on page 80.)

[145] WIENER, N. 1938, «The homogeneous chaos», *American Journal of Mathematics*, vol. 60, n° 4, p. 897–936.
(Referenced on pages 47, 120, and 121.)

[146] XIU, D. et G. E. KARNIADAKIS. 2002, «The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations», *SIAM journal on scientific computing*, vol. 24, n° 2, p. 619–644.
(Referenced on pages 47, 120, and 121.)

[147] XIU, D. et G. E. KARNIADAKIS. 2003, «Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos», *Journal of computational physics*, vol. 187, n° 1, p. 137–167.
(Referenced on pages 120 and 121.)

[148] YAMAZAKI, F., M. SHINOZUKA et G. DASGUPTA. 1988, «Neumann expansion for stochastic finite element analysis», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 114, n° 8, p. 1335–1354.
(Referenced on page 46.)

[149] YOUNG, E. . 2016, «Analyse bibliographique des travaux français et européens : le coût social des pollutions sonores», cahier de recherche, ADEME.
(Referenced on page 11.)

[150] ZADEH, L. A. 1996, «Fuzzy sets», dans *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, And Fuzzy Systems : Selected Papers by Lotfi A Zadeh*, World Scientific, p. 394–432.
(Referenced on page 48.)

[151] ZHANG, J. et B. ELLINGWOOD. 1994, «Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis», *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 120, n° 12, p. 2660–2677.
(Referenced on page 44.)

Publications personnelles

Revues internationales avec comité de lecture

— E. Denimal, L. Nechak, J-J. Sinou and S. Nacivet, Kriging surrogate models for predicting the complex eigenvalues of mechanical systems subjected to friction-induced vibration, Shock and Vibration, 2016.

— E. Denimal, L. Nechak, J-J. Sinou and S. Nacivet, A New Surrogate Modeling Method Associating Generalized Polynomial Chaos Expansion and Kriging for Mechanical Systems Subjected to Friction-Induced Vibration, Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6 (pp. 17-23), Springer, Cham, 2017.

— E. Denimal, S. Nacivet, L. Nechak and J-J. Sinou, On the influence of multiple contact conditions on brake squeal, Procedia engineering, 199, 3260-3265, 2017.

— E. Denimal, L. Nechak, J-J. Sinou, J. J. and S. Nacivet, A novel hybrid surrogate model and its application on a mechanical system subjected to friction-induced vibration, Journal of Sound and Vibration, 2018.

— E. Denimal, J-J. Sinou, S. Nacivet and L. Nechak, Squeal analysis based on the effect and determination of the most influential contacts between the different components of an automotive brake system, International journal of mechanical sciences, En révision.

Conférences nationales et internationales

— E. Denimal, S. Nacivet, L. Nechak, J-J. Sinou, Influence of contact conditions on squeal noise, Journées Jeunes Chercheurs en Acoustique, Vibration et Bruit, Marseille (France), 17-18 novembre 2016.

— E. Denimal, L. Nechak, J-J. Sinou, S. Nacivet, A New Surrogate Modeling Method Associating Generalized Polynomial Chaos Expansion and Kriging for Mechanical Systems Subjected to Friction-Induced Vibration, IMAC XXXVth, Los Angeles (California, USA), Février 2017.

— E. Denimal, S. Nacivet, L. Nechak, J-J. Sinou, Influence of contact conditions on squeal noise, Colloque national en calcul des structures, Giens (France), 15-19 mai 2017.

— E. Denimal, S. Nacivet, L. Nechak, J-J. Sinou, On the influence of multiple contact conditions on brake squeal, Eurodyn, Rome (Italie), 10-13 septembre 2017.

— E. Denimal, S. Nacivet, J-J. Sinou, L. Nechak, A strategy based on genetic algorithm to deal with influent internal contacts, Eurobrake, La Haye (Pays-Bas), 22-24 mai 2018.

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur J-J. SINOU

et les rapports de

M. T. TISON
Professeur - LAMIH - UMR CNRS-UVHC 8201 - Université de Valenciennes - Le Mont Houy - Bâtiment CISIT - 59313 Valenciennes cedex 9

et de

M. G. CHEVALLIER
Professeur - FEMTO ST - 24 chemin de l'Epitaphe - 25000 Besançon

Madame DENIMAL Enora

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 29 novembre 2018

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes

Service Scolarité

M-A. GALLAND