Institut Camille Jordan
Laboratoire de recherche en mathématiques Lyon/Saint-Étienne

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et son supremum : quelques résultats théoriques et application au risque climatique

Laura Gay

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

ÉCOLE CENTRALE LYON

ÉCOLE
CENTRALE LYON

Numéro d'ordre NNT : 2019LYSEC25

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON opérée au sein de l'École centrale de Lyon

École Doctorale 512

École Doctorale InfoMaths

Spécialité de doctorat : Mathématiques et applications

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 23/09/2019 par

Laura Estelle GAY

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et son supremum : quelques résultats théoriques et application au risque climatique

---

Devant le jury composé de :

Mme Laure Coutin	Professeur des universités, Université de Toulouse	Présidente
M. Emmanuel Gobet	Professeur des universités, École polytechnique	Examinateur
M. Samuel Herrmann	Professeur des universités, Université de Bourgogne	Rapporteur
M. Pierre Patie	Associate professor, Cornell University	Rapporteur
Mme Christophette Blanchet-Scalliet	Maître de conférences, École centrale de Lyon	Directrice
Mme Diana Dorobantu	Maître de conférences, ISFA Université de Lyon	Co-directrice

Remerciements

N'étant pas l'as de la prose, ces remerciements ne sont pas à la hauteur de ce que je voudrais exprimer et sont probablement trop longs[1].

Je remercie en premier lieu mes directrices Christophette et Diana qui m'ont accompagnée dans cet ascenseur émotionnel qu'est la thèse. Je les remercie tout d'abord de m'avoir prise en stage puis pour leur encadrement extraordinaire en thèse. Elles ont fait preuve d'immenses patience, gentillesse et surtout bienveillance. Merci pour votre disponibilité, votre pédagogie et vos nombreuses relectures méticuleuses. Je ne pourrais pas vous dire à quel point cette thèse a été enrichissante pour moi. Je ne pensais (naïvement) pas que tous les domaines mathématiques étaient aussi intimement reliés, tous ces résultats que j'avais oubliés pensant qu'ils ne serviraient jamais et qui ressurgissent à un moment. Le moindre petit détail amène un nouveau point de vue, une nouvelle idée, une nouvelle technique. J'ai tant appris sur beaucoup de plans. Grâce à vous, je ressors grandie humainement et mathématiquement de ces trois ans.

Je souhaite ensuite remercier vivement Samuel Herrmann et Pierre Patie d'avoir rapporté ma thèse. Les remarques, questions et corrections faites m'ont permis d'améliorer ce travail et d'envisager d'autres perspectives. Je remercie également Laure Coutin et Emmanuel Gobet d'avoir accepté de participer au jury.

I was very touched by the warm welcome of Ilya Pavlyukevich and Stefan Ankirchner during my two stays in Jena. Thank you for our fruitful exchanges which lead me to the last chapter of this manuscript.

Je remercie Pierre Ribereau et Véronique Maume-Deschamps pour leur aide et leur disponibilité sur le premier travail. Je voudrais aussi remercier Laurent Azema, Roland Denis, Benoît Fabrèges et également Francis Chavanon et Colette Vial-Buil pour leurs nombreuses aides m'ayant notamment permis de mener à bien mes simulations numériques.

Un grand merci à tous les mathématicien·ne·s du couloir qui m'ont chacun aidée à un moment ou à un autre, toujours avec le sourire ; et plus particulièrement Grégory pour un des chapitres de cette thèse. Un autre grand merci à Isabelle, sans qui ce département ne serait rien. Travailler dans une telle ambiance donne la volonté de se motiver tous les matins.

Merci à mes cobureaux qui étaient toujours disponibles et motivé·e·s pour m'aider (sur des questions d'ordre pratique, sur l'enseignement, sur des bugs liés à la thèse ou encore à la dernière minute sur des relectures !) mais aussi souvent partant·e·s pour tous types d'activités "extrasco-

1. J'espère que vous ne m'en tiendrez pas rigueur.

laires" : Alexis, Angèle, Antoine, Benjamin, Mona, Reda, Thierry et mes potineurs adorés qui sont devenus bien plus que des collègues. Mélinouche, Nicoco et évidemment over bro's Mathmath, vous êtes le sang de l'artère du platypus, vous avez été là pour les fous rires, les coups de mous (<3), les fondues à la fourme et les aides mathématiques ou informatiques : keur keur love. Et même si on n'a jamais partagé un bureau, un grand merci à Loïc pour tous ses conseils.

Il me tenait à cœur de mentionner les enseignant·e·s ou encadrant·e·s qui m'ont motivée, inspirée, accompagnée et surtout donné l'envie (des maths ou de l'enseignement!) : mesdames Loup, Chambert, Chambost, Navarro, Dupraz-Durrafourg, Mauron puis celles et ceux de l'enseignement supérieur, C. Kumar, C. Guillot, J.P. Berne, M. Simon, B. Cadre, T. Deheuvels, A. Debussche, M. Gradinaru et F. Mehats.

Comme vous l'avez compris, j'ai eu la chance d'avoir toujours été encadrée par des personnes incroyablement bienveillantes mais j'aimerais accorder une attention plus particulière à Bruno Arsac et Vincent Borrelli, qui ont cru en moi il y a maintenant quelques années et qui ont maintenu leur soutien moral jusqu'à aujourd'hui. Cela m'a été très précieux.

Merci à tous mes camarades de Rennes, avec qui j'ai pu notamment échanger et surtout déprimer pendant l'agrégation (et en thèse!) : Arnaud le koala et son sphinx, Cam's la référence séries et cahier :x, Caro la meilleure mollusque d'Hanabi pour décompresser, FloFlo Monsieur Bon mais Excellent, Fred le lyonnais de dernière minute, May car un jour on arrivera à s'appeler, Solana avec ses chats alliés et Vinké mais sans messages vocaux. Merci vraiment pour tout, de nombreux souvenirs que je n'oublierai pas, des jeudis d'agreg à l'Ardèche en passant par les soirées filles.

Je n'oublie pas KichKich, Béa et Eniluap, présentes depuis le collège (et plus!). On a pris des directions différentes mais je jure solennellement que nos intentions sont bonnes!

Évidemment, pour de nombreux moments divertissants, je peux dire merci à toute la fine épique des pignoufs! Un merci bonus pour Nicoach et JG pour leur aide sur ma thèse. Plus particulièrement, pour des vacances corses et des conversations toujours au top, merci Ari (et pas la méritocratie d'Ariane), Janin (et les courgettes pour les followers), Juju (le capitaine des processus parfaitement parfumé), Moumoune (et Nono le décisionnaire de mon année!), Yannchou (december $92 \geqslant$ #4) et encore plus spécialement mes fifilles préférées, Anne-Chachou ma binôme de step et Chamille ma partenaire de balades boisées, avec qui j'ai pu et je peux discuter de tout (tout, c'est le bon terme, et c'est d'ailleurs jalousé #hikinglovers) pendant des heures et surtout "L'amitié, ce n'est pas être là tout le temps, c'est être là quand il le faut".

Enfin, le plus grand des mercis à mes parents qui sont incroyables, pour leur soutien moral et matériel. Ils m'ont élevée, appris, encouragée et aimée. Sans eux, rien de tout ça n'aurait été possible et je ne serais pas en train d'écrire ces mots. Un gros merci, aromatisé à la glace de Grom pour

certain·e·s, à toute ma (petite) famille d'amour (avec une grosse pensée pour ceux qui nous ont quittés).
J'en arrive à mon petit puffin, qui a su me supporter (dans tous les sens du terme !) et m'encourager pendant toutes ces longues études. Meowrci d'amour.
Je finis ces remerciements avec une pensée très très particulière pour mes deux mamies, qui sont parties pendant ces trois ans, et femmes les plus fortes que j'ai eu la chance de connaître. Cette thèse est pour elles.

Table des matières

Introduction **5**

1 Quelques rappels sur les processus stochastiques **11**

1.1 Rappels sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck 11

1.2 Résultats autour du pont de Bessel 13

1.2.1 Rappels utiles sur les processus de Bessel 13

1.2.2 Définition et loi d'un pont de Bessel 15

1.2.3 Espérance du pont de Bessel 17

1.2.4 Équation différentielle stochastique vérifiée par le pont de Bessel 19

1.3 Temps d'atteinte d'une diffusion 27

1.3.1 Mouvement brownien 27

1.3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck 28

2 Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir d'observations du supremum **31**

2.1 Introduction 32

2.2 Estimation Problem 33

2.3 Theoretical Tools 34

2.3.1 Cdf of the supremum 34

2.3.2 Mixing property 36

2.3.3 Consistency of the estimation 37

2.4 Numerical Applications 38

2.4.1 Cdf Numerical Computation 39

2.4.2 Bounding parameters 39

2.4.3 Parameters estimation on simulated data 40

2.4.4 Real data 41

2.4.4.1 Parameters estimation 41

2.4.4.2 Estimation validation 42
2.4.5 Risk measures 43
2.4.5.1 Definitions 43
2.4.5.2 Simulated data 44
2.4.5.3 Real data 45
2.5 Conclusion and future research directions 45
2.6 Appendix 46
2.7 Existence des moments du supremum 46
2.8 Perspectives 49

3 Loi jointe d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum 51
3.1 Introduction 52
3.2 Results 53
3.2.1 Context and notations 53
3.2.2 Main theorem 53
3.2.3 Numerical results 55
3.2.4 Particular case $m = 0$ 56
3.3 Proof of the main theorem 57
3.4 Law of the supremum and its joint density with the process 63
3.4.1 Cumulative distribution function of the supremum 63
3.4.2 Results on the joint density 64
3.5 Appendix 66
3.5.1 Definitions and well-known properties on Hermite functions and parabolic cylinder functions 66
3.5.2 Useful results 67
3.6 Conclusion et perspectives 71

4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant 73
4.1 Introduction 73
4.2 Quelques propriétés du processus stationnaire 74
4.3 Loi du temps d'atteinte 76
4.3.1 Existence de la densité du temps d'atteinte 77
4.3.2 Transformée de Laplace du temps d'atteinte 79
4.4 Probabilité que le processus soit positif en un temps donné 81
4.5 Conclusion et perspectives 87

Table des figures

1.1 Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de coefficients $\phi = 1$, $k = 1$, $\beta = 1$ et partant de $X_0 = 1$. 12

1.2 Trajectoire d'un pont de Bessel partant de $r_0 = 1$ et arrivant en $r_T = 0$ en $T = 1$. 16

2.1 Boxplots of the estimated parameters, the real value is indicated by the blue line. . . 41

2.2 Quantile-Quantile plot 42

2.3 Confidence limits at 95% for the maxima between 15/06/1985 and 24/06/1985 . . . 43

2.4 Boxplot of the risk measure E for the different estimated parameters. The level of the blue line (19.57) indicates the value for the real parameter θ_0 44

2.5 Different trajectories of Ornstein-Uhlenbeck processes for different parameters. When not precised, the other parameters are $\mu_0 = 22$, $l_0 = 0.02$ and $\beta_0 = 47.5$. The time scale is $\mathrm{d}t = 10^{-4}$ days. For each trajectories, $X_0 = \mu_0$. 46

3.1 Comparison of expression (3.2) and a Monte Carlo method when $m = 1$, $X_0 \sim \mathscr{U}([-10,0])$ and $k = 2$. 55

3.2 Comparison of expression (3.3) and a Monte Carlo method when $m = -1$, $X_0 = -2$ and $k = 1$. 55

4.1 Probabilité que le processus soit positif pour un temps donné $t \in [1,6]$ et pour différentes valeurs de x. Comparaison avec la probabilité stationnaire. Les simulations ont été faites en sommant sur les 100 premières racines. 86

Introduction

Dès 1930, Ornstein et Uhlenbeck ([UO30]) proposent un processus permettant de décrire la vitesse d'une particule. Ce processus à temps continu est solution d'une équation différentielle stochastique, l'équation de Langevin pour le mouvement brownien d'une particule avec friction ([Lan08]). Une décennie plus tard, Doob ([Doo42]) étudie les propriétés de ses trajectoires à partir de celles du mouvement brownien en utilisant un changement de temps déterministe. En effet, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut être représenté comme une transformation affine du mouvement brownien changé de temps. Depuis, ce processus a été utilisé pour plusieurs autres applications : biologie ([MI08]), finance ([Vas77]), climatologie ([Dis98a]) etc.

Cette thèse s'intéresse à différents aspects du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. La première partie s'inscrit dans l'étude de la statistique des processus et est motivée par l'estimation des mesures de risques climatiques. La deuxième concerne l'étude de certaines quantités liées au processus.

Dans la littérature, deux méthodes ont été proposées pour modéliser la dynamique des températures : l'utilisation de processus discrets ou continus (voir [AZ13] pour les détails). Nous suivons ici la modélisation introduite par [Dis98a] ou [Dis98b] de la température comme diffusion via une équation différentielle stochastique. Comme les températures présentent une forte et claire saisonnalité, le processus utilisé est généralement un processus de retour à la moyenne comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Les paramètres dépendent alors du temps. Les auteurs de [MD99] simplifient le modèle précédent en supposant la volatilité constante. Ce modèle s'ajuste bien à leurs données (modélisation des températures de l'aéroport Heathrow). L'article [DQ00] utilise un modèle ARMA plus général. Le modèle de [Dis98a] est amélioré dans [ADS02] en utilisant le modèle ARMA précédent. Notamment, la fonction représentant la moyenne du processus tient compte de la saisonnalité en utilisant une fonction sinusoïdale. Les auteurs de [BSZ02] ont discuté la pertinence du mouvement brownien dans les précédentes modélisations et ont donc proposé un modèle où le processus est dirigé par un mouvement brownien fractionnaire. Plus récemment, un processus de Lévy a été envisagé dans [BŠB05]. Cette liste n'est pas exhaustive et l'ensemble des modèles existants est détaillé dans [AZ13].

Pour notre étude, nous considérons le cas le plus simple où le processus est dirigé par un mouvement brownien et où les paramètres sont constants. En effet, afin d'avoir notamment des moments constants et indépendants du temps, il est nécessaire de supposer le processus stationnaire. Pour que cette hypothèse soit raisonnable, nous considérons donc des courtes périodes de temps annuelles (par exemple l'été).

Ainsi, le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ modélisant la dynamique des températures est solution de l'équation stochastique suivante

$$\mathrm{d}X_t = l\beta(\mu - X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta}\mathrm{d}B_t$$

où $\mu \in \mathbb{R}, l, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, et X_0 suit la loi stationnaire $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{2l}\right)$ et est indépendant de $(B_t)_{t\geqslant 0}$, un mouvement brownien standard.

Prévoir et estimer les mesures de risque liées aux canicules par exemple est un enjeu important. Il serait possible d'estimer ces mesures en connaissant la température en temps continu ou des observations discrètes du processus. Ce type d'estimation est par exemple proposé dans [Fra03] par une méthode de maximum de vraisemblance. Plus récemment, dans le contexte des activités neuronales, le papier [MI08] a par exemple utilisé les données de temps d'atteinte pour estimer les paramètres du processus. Cependant, les données disponibles dépendent des stations météorologiques et la plupart ne disposent pas des données citées précédemment. Par exemple, le papier [SÖK$^+$10] propose d'évaluer la probabilité d'apparition de la canicule de 2003 grâce aux moyennes de températures mensuelles. Nous nous intéressons au cas de certaines stations qui ne disposent que des extrema journaliers. Nous proposons donc une méthode d'estimation des paramètres du modèle d'origine en se basant sur les données disponibles (un échantillon des extrema, et par exemple des maxima). Ainsi, par la suite, il est possible de procéder à des simulations, des estimations, des prévisions.

Nous exprimons la loi du processus des maxima en fonction des paramètres l, μ et β. Cette expression est complexe mais nous permet ensuite de trouver les-dits paramètres via un estimateur de type moindres carrés. Il s'agit d'une nouvelle approche utilisant directement la fonction de répartition du supremum du processus et non son inverse comme classiquement en estimation par quantiles ([CHBS05] ou [Pek14]). En effet, utiliser les méthodes classiques d'estimation (estimation du maximum de vraisemblance ou inversion de la fonction de répartition) est trop coûteux dans notre cas.

Pour obtenir la fonction de répartition du supremum du processus, nous utilisons le lien entre ce dernier et le temps d'atteinte du processus. Récemment, de nombreux résultats autour du temps d'atteinte d'un niveau fixé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck ont été obtenus. Dif-

férentes expressions pour la densité de ce processus ont été données dans [Lin04], [LK18] ainsi que [APP05]. De ce dernier article, nous utilisons une expression de la densité du temps d'atteinte faisant intervenir le pont de Bessel.

Nous montrons également l'existence des moments de tout ordre du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck conditionné par sa valeur initiale. Il est en effet assez fréquent de regarder l'existence des moments d'un processus (cf. [Küh17], [LM02]). Cela peut permettre ensuite de calculer les moments et donner une nouvelle méthode d'estimation des paramètres.

Nous procédons dans cette thèse à une estimation des moindres carrés en minimisant la somme des carrés des différences entre les fonctions de répartition théorique et empirique. L'estimateur ainsi défini est consistant et ce résultat est obtenu grâce à la propriété de mélange du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et au théorème ergodique pour ce type de processus ([Bil65]). Cette propriété de ρ-mélange est montrée en adaptant la démonstration de [GM16] dans le cas du processus directement. La pertinence de cette estimation est confirmée numériquement bien que l'implémentation soit technique et coûteuse en temps de calcul. Le paramètre de volatilité est le moins bien estimé, en cohérence avec les résultats de [MBS95] et [MI08]. L'estimation sur données réelles est faite sur la ville de Paris ([Ta02]).

Une fois l'estimation des paramètres faite, n'importe quelle mesure de risque peut être évaluée via une méthode de Monte Carlo (en simulant la dynamique des températures comme processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec les paramètres estimés). Le risque de canicule est celui qui nous intéresse. Les définitions de canicules varient selon les lieux et les conventions. Pour [Gri68], les températures extérieures doivent dépasser un seuil de 26.67°C pendant 3 jours. Nous utiliserons plutôt la convention de [LPL$^+$04] qui place deux seuils de dépassement : l'un pour la température de jour, l'autre pour la nuit. Nous pouvons ensuite par exemple regarder la probabilité de canicule ou la durée moyenne de celle-ci. Une autre mesure intéressante est l'aire de dépassement de seuil lorsque l'on utilise la convention de [Gri68]. Des applications numériques sur les données de Paris sont proposées en estimant les paramètres du processus à partir des températures d'été entre 1950 et 1984. On compare ensuite par exemple la probabilité de canicule avec ces estimateurs à la proportion de canicule entre 1985 et 2011 et soulignons ainsi la déviation des températures ces dernières décennies.

Pour obtenir des expressions explicites de ces mesures de risque, il peut être utile d'avoir la loi jointe du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum. L'interêt pour ce type de loi est apparu dès la fin du dix-neuvième siècle (voir [Som94]). Pour un mouvement brownien, le résultat est connu depuis longtemps (voir par exemple [KS91]). Plus récemment, les articles [CPN18] et [Ngo16] traitent le cas d'un processus de Lévy, somme d'un mouvement brownien drifté et d'un

processus de Poisson composé. La loi jointe d'un processus de diffusion n-dimensionnel et du supremum courant de sa première composante est étudiée dans [CP19]. Les auteurs de [DK06] abordent le cas d'un processus de Lévy avec sauts.

Pour cette étude, nous supposons que la loi du processus initial est à support majoré par un certain $m \in \mathbb{R}$. Nous regardons tout d'abord la fonction de répartition / densité jointe du point final du processus et de son supremum :

$$\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} X_u \leqslant m\right) \tag{$*$}$$

où $m, x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant m$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. Ce type de loi a par exemple été étudié récemment dans [EH14] où les auteurs donnent une méthode permettant de trouver la densité / fonction de distribution jointe pour le minimum et les points finaux d'un mouvement brownien n-dimensionnel drifté. Dans [HKR98], la solution explicite du cas bi-dimensionnel ($n = 2$) est donnée. Pour $n > 2$, la méthode de [EH14] n'est pas toujours applicable. Dans le cas d'un processus Ornstein-Uhlenbeck, cette fonction de répartition / densité jointe est connue dans certains cas particuliers. Le cas $m = 0$ est traité dans [BS15]. L'expression de la quantité $\mathbb{P}\left(X_\tau \in \mathrm{d}x, \sup_{0 \leqslant u \leqslant \tau} X_u \geqslant m\right)$ lorsque τ est une variable aléatoire de loi exponentielle indépendante du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est également donnée dans [BS15].

Grâce à un résultat de [DIRT13], nous montrons que la probabilité $(*)$ admet une densité p. Cette densité est solution de l'équation de Fokker-Planck (cf. [JYC09]).

L'opérateur de Fokker-Planck n'est pas hermitien donc nous introduisons un autre opérateur auto-adjoint compact qui lui est lié spectralement. Avec les résultats sur ce type d'opérateurs (voir [Bré83] par exemple), on obtient une base hilbertienne de $L^2(]-\infty, m])$ faisant intervenir les fonctions spéciales paraboliques cylindriques (directement liées aux fonctions de Hermite, voir [LS72]). En décomposant sur cette base, nous obtenons ensuite une expression explicite de la densité p. Ce type de méthode spectrale a été par exemple utilisée pour la résolution de l'équation de Fokker-Planck dans [BD08], [Gar04] et [RH89] mais sans condition au bord. Même si l'expression de la probabilité $(*)$ est une série de fonctions spéciales, elle est facilement évaluable numériquement et plus rapide qu'une méthode de Monte Carlo comme le montrent des simulations. Le cas $m = 0$ peut être simplifié et on retrouve ainsi le résultat de [BS15] pour le cas $m = 0$.

En intégrant l'expression de p et en utilisant les résultats sur les fonctions spéciales, nous exprimons la fonction de répartition du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Nous comparons celle-ci avec celle pouvant être obtenue en utilisant les résultats de [APP05] et le lien entre temps d'atteinte et supremum.

Avec les mêmes techniques, on montre que la densité jointe du processus et de son supremum vérifie un système d'équations aux dérivées partielles. Ce système a été obtenu dans [CP19] pour un processus dont les hypothèses n'étaient pas vérifiées par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (drift borné).

Dans la dernière partie de ce manuscrit, nous étudions un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont les coefficients ne sont plus constants. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck a été à l'origine introduit pour décrire la vitesse d'une particule de masse avec friction. Lorsque le potentiel est nul, la vitesse V de la particule vérifie l'équation stochastique suivante (voir [Sch09, Chapitre 8]) :

$$\mathrm{d}V_t = -\gamma V_t \mathrm{d}t + \sqrt{2\gamma\varepsilon}\mathrm{d}B_t$$

où ε est la force du bruit (dépendant de la température et de la masse de la particule), γ le coefficient de friction (aussi appelé d'amortissement), $\varepsilon, \gamma > 0$ et $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard. Lorsque la friction dépend de la direction du mouvement, on parle de friction anisotropique (cf. [Zmi89]). Dans ce cas, on peut par exemple supposer que le coefficient γ est différent selon le signe de la vitesse. Ce sera donc également le cas pour le coefficient de diffusion. Ainsi, nous étudions le cas plus général d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont les coefficients de drift et de diffusion sont constants par morceaux selon le signe du processus. Ce type d'étude existe déjà pour le mouvement brownien ([KW78]) et pour le mouvement brownien géométrique ([LP17]). Dans ces deux cas, le processus est appelé oscillant et c'est donc ainsi que nous proposons, dans cette thèse, de nommer le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants par morceaux selon le signe du processus.

Les processus de diffusion à coefficients discontinus apparaissent dans plusieurs domaines. En dynamique des populations par exemple, l'article [CC99] utilise un mouvement brownien "déformé" (skew Brownian motion). [LP17] propose de modéliser le prix d'actifs boursiers par un mouvement brownien géométrique oscillant. D'autres exemples d'utilisation de tels processus dans des domaines variés sont donnés dans [Lej18] .

Nous nous intéressons dans le Chapitre 4 au processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geqslant 0}$ oscillant vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= -\left(k_- \mathbb{1}_{X_t\leqslant 0} + k_+ \mathbb{1}_{X_t>0}\right) X_t \mathrm{d}t + \left(\sigma_- \mathbb{1}_{X_t\leqslant 0} + \sigma_+ \mathbb{1}_{X_t>0}\right) \mathrm{d}W_t, \qquad t \geqslant 0 \\ X_0 &\in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard et $k_-, k_+, \sigma_-, \sigma_+ \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour cette étude, nous supposons que la volatilité est constante c'est à dire $\sigma_- = \sigma_+$. Ce processus admet une densité invariante calculée grâce aux fonction échelle et mesure de vitesse ([KS91]). Il est ainsi possible de calculer l'espérance du processus stationnaire ou encore la probabilité que celui-ci soit positif en un temps donné.

Comme mentionné plus haut, l'article [APP05] étudie la loi du temps d'atteinte du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire dans le cas où $k_- = k_+$ et $\sigma_- = \sigma_+$. Nous regardons comment s'adaptent ces résultats dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant. Pour montrer que le temps d'atteinte admet une densité, on adapte la preuve de [Pau87] faite dans le cas où la diffusion a des coefficients de drift et de diffusion bornés. La transformée de Laplace du temps d'atteinte de ce processus oscillant est obtenue. Elle s'exprime comme une série faisant intervenir les fonctions paraboliques cylindriques, à l'instar de [APP05].

Nous nous intéressons ensuite à la probabilité que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant soit positif en un temps donné. Lorsque le processus est à coefficients constants, cette probabilité est connue car le processus est gaussien. Par une méthode de contrôle, comme celle proposée dans [ABSJ17] pour une martingale exponentielle, on exprime la transformée de Laplace de cette probabilité dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant. Cette transformée est ensuite inversée pour obtenir la probabilité souhaitée.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante. Dans le Chapitre 1, nous rappelons quelques définitions et résultats sur certains processus stochastiques utiles dans la suite du manuscrit. Le Chapitre 2 s'intéresse à l'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck lorsque celui-ci représente la dynamique des températures en un lieu donné à partir des maxima journaliers observés. L'expression de la densité / fonction de répartition jointe du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum est donnée dans le Chapitre 3. Enfin, le Chapitre 4 détaille quelques résultats sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant.

Chapitre 1

Quelques rappels sur les processus stochastiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats sur certains processus stochastiques que nous utiliserons dans la suite de ce manuscrit. Nous commençons par définir un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et en donner ses premières propriétés. Nous proposons ensuite quelques résultats sur le pont de Bessel qui seront nécessaires dans le Chapitre 2. Enfin, nous rappelons des résultats connus sur les temps d'atteinte de différentes diffusions.

1.1 Rappels sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Donnons tout d'abord la définition du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Définition 1.1. *On définit l'équation de Langevin*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= (\phi - kX_t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta}\mathrm{d}B_t, \qquad t \geqslant 0 \\ X_0 &\sim \mu \end{cases} \tag{1.1}$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard et μ est une loi de probabilité à valeurs réelles. Le paramètre ϕ est réel et les paramètres k et β sont des réels positifs. Les variables X_0 et $(B_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendantes.

Proposition 1.2. *L'unique solution forte de l'équation de Langevin* (1.1) *partant de X_0 est donnée*

par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, défini par

$$X_t := X_0 \mathrm{e}^{-kt} + \frac{\phi}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) + \sqrt{\beta}\int_0^t \mathrm{e}^{k(u-t)}\mathrm{d}B_u, \qquad t \geqslant 0.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô au processus $\left(\mathrm{e}^{kt}X_t\right)_{t\geqslant 0}$ pour résoudre l'équation (1.1). Les coefficients étant des fonctions continues et lipschitziennes, on a existence et unicité forte de la solution. ■

Ce processus a été introduit par Ornstein et Uhlenbeck dès 1930 ([UO30]) pour décrire le mouvement d'une particule avec friction ([Lan08]). Une trajectoire de celui-ci est présentée en Figure 1.1.

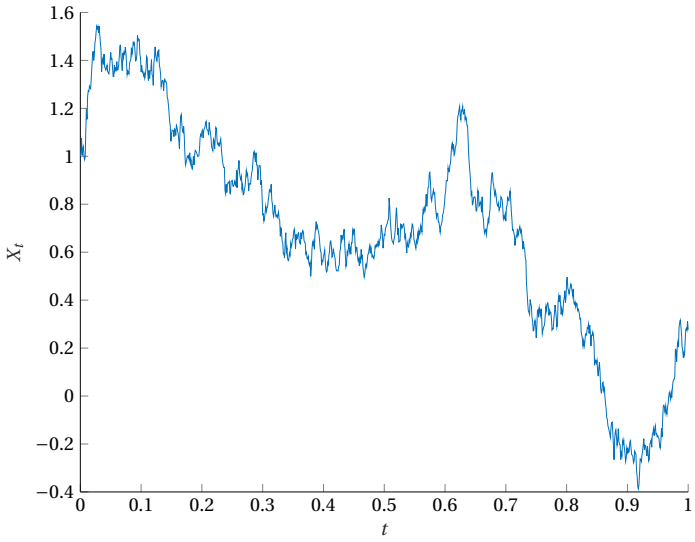

FIGURE 1.1 – Trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de coefficients $\phi = 1$, $k = 1$, $\beta = 1$ et partant de $X_0 = 1$.

Remarque 1.3. *On peut représenter le processus comme une transformation affine du mouvement brownien changé de temps ([Doo42]). On a, pour $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$X_t = X_0 \mathrm{e}^{-kt} + \frac{\phi}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) + \sqrt{\frac{\beta}{2k}}\tilde{B}_{\mathrm{e}^{2kt}-1}\mathrm{e}^{-kt},$$

où $(\tilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.

L'espérance, la variance et la covariance du processus sont également rappelées dans la proposition suivante.

Proposition 1.4. *On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \frac{\phi}{k} + \mathrm{e}^{-kt}\left(\mathbb{E}[X_0] - \frac{\phi}{k}\right), \\
\mathrm{Var}(X_t) &= \frac{\beta}{2k} + \left(\mathrm{Var}(X_0) - \frac{\beta}{2k}\right)\mathrm{e}^{-2kt}, \\
\mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \left[\mathrm{Var}(X_0) + \frac{\beta}{2k}\left(\mathrm{e}^{2k(t\wedge s)} - 1\right)\right]\mathrm{e}^{-k(t+s)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.5. *Si μ est la loi normale de moyenne $\frac{\phi}{k}$ et de variance $\frac{\beta}{2k}$, alors $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien stationnaire de même espérance et variance.*

Remarque 1.6. *Par simple transformation, le modèle peut s'écrire :*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{X}_t &= -\tilde{k}\tilde{X}_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{B}_t, \qquad t \geqslant 0 \\ \tilde{X}_0 &= X_0 - \frac{\phi}{k}, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\tilde{X}_t := X_{\frac{t}{\beta}} - \frac{\phi}{k}$, $\tilde{k} := \frac{k}{\beta}$ et $\tilde{B}_t := \sqrt{\beta}B_{\frac{t}{\beta}}$ (qui est encore un mouvement brownien).

1.2 Résultats autour du pont de Bessel

Dans le Chapitre 2, nous nous intéressons à la loi du supremum d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cette loi fait intervenir le pont de Bessel. Pour cela, nous rappelons dans cette section la définition du pont de Bessel ainsi que des propriétés qui lui sont liées. Nous commençons par quelques rappels sur les processus de Bessel. Puis, nous donnons la définition d'un pont de Bessel ainsi que sa loi. Enfin, nous montrons qu'il est l'unique solution forte d'une équation différentielle stochastique. Ceci nous permet de montrer l'identité d'inversion vérifiée par le processus.

1.2.1 Rappels utiles sur les processus de Bessel

Nous commençons tout d'abord par la définition d'un processus de Bessel. Nous donnons ensuite l'équation stochastique qu'il vérifie ainsi que sa loi.

Définition 1.7 (Processus de Bessel de dimension d)**.** *Soient $d > 1$ un entier et $B = (B_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. Le processus de Bessel de dimension d est défini par $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, R_t := \|B_t\| = \sqrt{B_{1,t}^2 + \cdots + B_{d,t}^2}$ et $R_0 = \|B_0\| = x \in \mathbb{R}_+$.*

Le processus de Bessel vérifie l'équation différentielle stochastique donnée dans la proposition suivante.

Proposition 1.8. *Le processus de Bessel $(R_t)_{t\geqslant 0}$ de dimension $d > 1$ est l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{cases} \mathrm{d}R_t = \mathrm{d}W_t + \dfrac{d-1}{2R_t}\mathrm{d}t, \quad t \geqslant 0 \\ R_0 = x > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

où $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard de dimension 1.

Démonstration. On montre que le processus vérifie l'équation puis qu'il en est l'unique solution.

1. Soit ρ le processus défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \rho_t := R_t^2 = \sum_{i=1}^{d} B_{i,t}^2.$$

On applique la formule d'Itô au processus ρ :

$$\mathrm{d}\rho_t = \sum_{i=1}^{d} 2B_{i,t}\mathrm{d}B_{i,t} + d\mathrm{d}t, \quad t \geqslant 0.$$

Soit $t > 0$. L'ensemble $\{s \in [0,t],\ R_s = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle $\mathbb{P}$-presque sûrement (cf. [KS91] Proposition 3.3.21 et Théorème 2.9.6). On peut donc définir $(W_t)_{t\geqslant 0}$, le processus tel que

$$W_t = \int_0^t \frac{1}{R_s}\sum_{i=1}^{d} B_{i,s}\mathrm{d}B_{i,s}, \quad t \geqslant 0.$$

Ce processus est une martingale continue comme somme de martingales continues et son crochet vaut t (en effet, le processus $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale). Ainsi, $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien de dimension 1 et on peut écrire

$$\mathrm{d}\rho_t = 2R_t\mathrm{d}W_t + d\mathrm{d}t = 2\sqrt{\rho_t}\mathrm{d}W_t + d\mathrm{d}t, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

On applique une nouvelle fois la formule d'Itô pour obtenir

$$\mathrm{d}R_t = \mathrm{d}W_t + \frac{d-1}{2R_t}\mathrm{d}t, \quad t \geqslant 0.$$

2. On montre l'unicité de la solution pour l'équation (1.4) et on en déduit l'unicité pour (1.3).

Pour tous réels positifs z et z', on a $\left|\sqrt{z} - \sqrt{z'}\right| < \sqrt{|z - z'|}$ (la racine est $\frac{1}{2}$-Holdërienne). Ainsi, par le Théorème 3.5 de [RY13, chapitre IX], et comme le drift est constant, on a unicité trajectorielle (et même unicité de la solution forte) pour l'équation satisfaite par ρ.

D'après la Proposition 3.22 de [KS91], et comme $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}(R_t > 0, \forall\, t \geqslant 0) = 1.$$

On obtient ensuite l'unicité forte de l'équation par [Che00].

■

Le processus de Bessel est un processus markovien dont la densité du semi-groupe est connue. L'expression de celle-ci se trouve dans [RY13, Chapitre XI p.446] ou [JYC09, Section 6.2.2]. Pour plus de facilité, nous la rappelons dans la proposition suivante.

Proposition 1.9 (Loi d'un processus de Bessel de dimension d)**.** *Les densités du semi-groupe d'un processus de Bessel en t partant de a en 0 sont*

- $p_t^d(a,y) = \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{d}{2}-1} y \exp\left(-\dfrac{a^2+y^2}{2t}\right) I_{\frac{d}{2}-1}\left(\dfrac{ay}{t}\right)$, *pour* $a \neq 0$,
- $p_t^d(0,y) = \lim\limits_{a\to 0} p_t^d(a,y) = \dfrac{1}{2^{\frac{d}{2}-1} t^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} y^{d-1} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2t}\right)$,

où I est la fonction de Bessel modifiée de première espèce définie par $I_\nu(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$.

Plus particulièrement, lorsque $d = 3$, on a $I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\mathrm{sh}x$ *et donc*

- $p_t^3(a,y) = \dfrac{y}{a}\sqrt{\dfrac{2}{t\pi}} \exp\left(-\dfrac{a^2+y^2}{2t}\right) \mathrm{sh}\left(\dfrac{ay}{t}\right)$,
- $p_t^3(0,y) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} y^2 \exp\left(-\dfrac{y^2}{2t}\right)$.

1.2.2 Définition et loi d'un pont de Bessel

Nous introduisons maintenant le pont de Bessel, intervenant dans la loi du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Chapitre 2). Nous rappelons sa définition et quelques propriétés dont une propriété élémentaire d'inversion.

Définition 1.10 (Pont de Bessel)**.** *Un pont de Bessel $(r_t)_{t\in[0,T]}$ partant de $r_0 = a$ en 0 et arrivant en $r_T = b$ en T a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3 partant de a en 0 et conditionné à valoir b en T.*

Une trajectoire de ce processus est présentée en Figure 1.2.

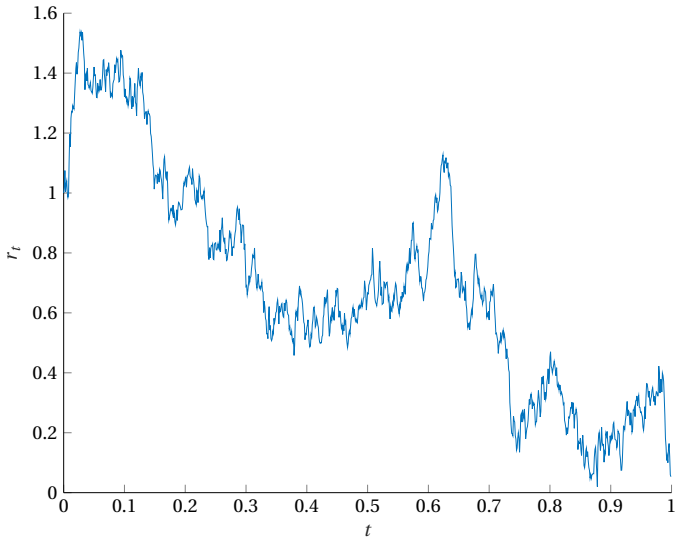

FIGURE 1.2 – Trajectoire d'un pont de Bessel partant de $r_0 = 1$ et arrivant en $r_T = 0$ en $T = 1$.

Nous souhaitons obtenir la densité de la variable aléatoire r_t lorsque t fixé pour $(r_t)_{t\in[0,T]}$ un pont de Bessel. Pour cela, on rappelle le théorème suivant énoncé pour un processus de Markov (cf. [JYC09, Théorème 4.3.5.1] pour la preuve).

Théorème 1.11. *Soit* $\left((X_t)_{t\geqslant 0}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P}_x\right)$ *un processus de Markov à valeurs réelles de semi-groupe* $P_t(x, \mathrm{d}y) = p_t(x,y)\mathrm{d}y$ *i.e.* $\mathbb{P}_x(X_{t+s} \in A|\mathscr{F}_s) = P_t(X_s, A)$. *On note* $\mathbb{P}^{(T)}_{a\to b}$ *la mesure de probabilité du pont associé i.e. du processus* X *partant de* a *et conditionné à valoir* b *en* T.

Alors, pour tout $s \in [0, T[$,

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^{(T)}_{a\to b}|_{\mathscr{F}_s} = \frac{p_{T-s}(X_s, b)}{p_T(a,b)}\mathrm{d}\mathbb{P}_a|_{\mathscr{F}_s}.$$

A l'aide de ce théorème et des densités du semi-groupe du processus de Bessel (Proposition 1.9), nous pouvons calculer les densités du pont de Bessel. Dans toute la suite, on considérera sans perte de généralités que $T = 1$.

Proposition 1.12 (Densité d'un pont de Bessel)**.** *Soit* $(r_t)_{t\in[0,1]}$ *un pont de Bessel partant de* a *en* 0 *et arrivant en* b *en* 1. *Pour* $t \in [0,1]$, *la densité* $f^t_{(a,0)\to(b,1)}$ *de la variable aléatoire* r_t *est donnée dans*

le tableau suivant :

a	b	$\forall y \in \mathbb{R}_+, f^t_{(a,0)\to(b,1)}(y) =$
>0	>0	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{1-t}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}-\frac{a^2(1-t)}{2t}-\frac{b^2t}{2(1-t)}\right)$
>0	0	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\frac{y}{a}\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{t}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}-\frac{a^2(1-t)}{2t}\right)$
0	>0	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t}}\frac{y}{b}\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{1-t}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}-\frac{b^2t}{2(1-t)}\right)$
0	0	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(t(1-t))^{\frac{3}{2}}}y^2\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}\right)$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.11 avec la Proposition 1.9. Nous traitons le cas $a>0, b>0$. Les autres cas se traitent en passant à la limite. Soit $(R_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Bessel partant de a. On note $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration associée et $\mathbb{P}_a$ sa mesure de probabilité.
Soit $t\in[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}|_{\mathscr{F}_t} &= \frac{p^3_{1-t}(R_t,b)}{p^3_1(a,b)}\mathbb{P}_a|_{\mathscr{F}_t}\\
&= \frac{\frac{b}{R_t}\sqrt{\frac{2}{(1-t)\pi}}\exp\left(-\frac{R_t^2+b^2}{2(1-t)}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{R_tb}{1-t}\right)}{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{2}\right)\mathrm{sh}(ab)}\mathbb{P}_a|_{\mathscr{F}_t}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{a}{R_t}\exp\left(-\frac{R_t^2+b^2}{2(1-t)}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{R_tb}{1-t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}\mathbb{P}_a|_{\mathscr{F}_t}.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne la densité du pont. Pour $y\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
f^t_{(a,0)\to(b,1)}(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{a}{y}\exp\left(-\frac{y^2+b^2}{2(1-t)}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{1-t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}p^3_t(a,y)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{a}{y}\exp\left(-\frac{y^2+b^2}{2(1-t)}+\frac{a^2+b^2}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{1-t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}\frac{y}{a}\sqrt{\frac{2}{t\pi}}\exp\left(-\frac{a^2+y^2}{2t}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{t}\right)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{1-t}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{ay}{t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}\exp\left(-\frac{y^2}{2t(1-t)}-\frac{a^2(1-t)}{2t}-\frac{b^2t}{2(1-t)}\right).
\end{aligned}$$

■

1.2.3 Espérance du pont de Bessel

Dans le Chapitre 2, nous aurons besoin de l'espérance d'un pont de Bessel sur $[0,u]$ partant de $a=0$ en 0 et arrivant en $b>0$ en u. Nous donnons son expression dans la proposition suivante.

Proposition 1.13. *Soit $(r_t)_{t\in[0,u]}$ un pont de Bessel sur $[0,u]$ partant de $a=0$ en 0 et arrivant en $b>0$ en u. Pour tout $t\in[0,u[$, on a :*

$$\mathbb{E}[r_t]=\frac{2(u-t)}{b\sqrt{\pi}}\left(\alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+2\alpha_{u,t,b}^2\right]\mathrm{erf}\left(\alpha_{u,t,b}\right)\right),$$

où $\alpha_{u,t,b}:=b\sqrt{\dfrac{t}{2u(u-t)}}$.

Démonstration. Soit $t\in[0,u]$. Lorsque $(r_t)_{t\in[0,u]}$ est un pont de Bessel partant de 0 en 0 et arrivant en b en u, nous donnons la densité de r_t grâce [1] à la Proposition 1.12. En effet, dans ce cas, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}r_{tu}\right)_{t\in[0,1]}$ est un pont de Bessel partant de 0 en 0 et arrivant en $\dfrac{b}{\sqrt{u}}$ en 1. On a, $\forall\, y\geqslant 0$,

$$f^t_{(a,0)\to(b,u)}(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{u-t}}\frac{y}{b}\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{u-t}\right)\exp\left(-\frac{y^2u}{2t(u-t)}-\alpha_{u,t,b}^2\right).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_t]&=\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{u-t}}\frac{y^2}{b}\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{u-t}\right)\exp\left(-\frac{y^2u}{2t(u-t)}-\alpha_{u,t,b}^2\right)\mathrm{d}y\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{b\sqrt{u-t}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2}\int_0^\infty y^2\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{u-t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{y^2u}{2t(u-t)}}\mathrm{d}y}_{:=I}.\end{aligned}$$

On regarde :

$$\begin{aligned}2I&=2\mathrm{e}^{-\frac{b^2t}{2(u-t)u}}\int_0^\infty y^2\mathrm{sh}\left(\frac{yb}{u-t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{y^2u}{2t(u-t)}}\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{-\frac{b^2t}{2(u-t)u}}\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2u}{2t(u-t)}+\frac{yb}{u-t}}\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{-\frac{b^2t}{2(u-t)u}}\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-\frac{y^2u}{2t(u-t)}-\frac{yb}{u-t}}\mathrm{d}y\\&=\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-\left(y\sqrt{\frac{u}{2t(u-t)}}-\alpha_{u,t,b}\right)^2}\mathrm{d}y-\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{-\left(y\sqrt{\frac{u}{2t(u-t)}}+\alpha_{u,t,b}\right)^2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $w=y\sqrt{\dfrac{u}{2t(u-t)}}\pm\alpha_{u,t,b}$.

$$2I=\frac{\sqrt{\frac{2t(u-t)}{u}}}{\frac{u}{2t(u-t)}}\left[I_1-I_2\right],$$

où

$$I_1:=\int_{-\alpha_{u,t,b}}^\infty\left(w+\alpha_{u,t,b}\right)^2\mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w,$$

1. Par la propriété de *scaling* du mouvement brownien.

$$I_2 := \int_{\alpha_{u,t,b}}^{\infty} \left(w - \alpha_{u,t,b}\right)^2 \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w.$$

On calcule I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\alpha_{u,t,b}}^{\infty} \left(w + \alpha_{u,t,b}\right)^2 \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2}\alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[1 + 2\alpha_{u,t,b}^2\right] \mathrm{erfc}\left(-\alpha_{u,t,b}\right). \end{aligned}$$

En substituant $-b$ à b, on obtient I_2.

$$I_2 = \frac{-1}{2}\alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[1 + 2\alpha_{u,t,b}^2\right] \mathrm{erfc}\left(\alpha_{u,t,b}\right).$$

Et finalement

$$I_1 - I_2 = \alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + 2\alpha_{u,t,b}^2\right] \mathrm{erf}\left(\alpha_{u,t,b}\right),$$

car $\mathrm{erfc}(-x) - \mathrm{erfc}(x) = 2\mathrm{erf}(x)$.

On a alors

$$2I = \left(\frac{2t(u-t)}{u}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + 2\alpha_{u,t,b}^2\right] \mathrm{erf}\left(\alpha_{u,t,b}\right)\right).$$

Finalement,

$$\mathbb{E}[r_t] = \frac{2(u-t)}{b\sqrt{\pi}} \left(\alpha_{u,t,b}\mathrm{e}^{-\alpha_{u,t,b}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + 2\alpha_{u,t,b}^2\right] \mathrm{erf}\left(\alpha_{u,t,b}\right)\right).$$

■

1.2.4 Équation différentielle stochastique vérifiée par le pont de Bessel

Le pont de Bessel vérifie une équation différentielle stochastique. Celle-ci dépend des points de départ et d'arrivée du pont.

Proposition 1.14 (Pont de Bessel solution d'une EDS)**.** *Un pont de Bessel $(r_t)_{t\geqslant 0}$ partant de $r_0 = a$ (éventuellement nul) en $t = 0$ et arrivant en $r_1 = b$ en $t = 1$ est l'unique*[2] *solution forte de*

- *si $b = 0$,*

$$\mathrm{d}r_t = \left(-\frac{r_t}{1-t} + \frac{1}{r_t}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad t < 1.$$

2. sur la classe des solutions strictement positives continues

- *si* $b>0$,

$$\mathrm{d}r_t=\left(-\frac{r_t}{1-t}+\frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{r_t b}{1-t}\right)}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t,\quad t<1. \tag{1.5}$$

Nous commençons par un lemme technique nécessaire à la preuve.

Lemme 1.15. *Soient b et t des réels positifs non nuls. On définit la fonction* $\gamma_{t,b}$ *par :*

$$\gamma_{t,b}:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ y & \longmapsto & -\dfrac{1}{y}+\dfrac{b}{t\mathrm{th}\left(\frac{yb}{t}\right)}\end{array}\right. .$$

Alors,

$$0\leqslant\gamma'_{t,b}(y)\leqslant\frac{b^2}{t^2}.$$

Démonstration du Lemme 1.15. On montre une inégalité sur la fonction cosinus hyperbolique pour déduire l'inégalité souhaitée.

Étape 1 : On commence par montrer, d'après la démonstration de [Mit70], le fait suivant :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x^3\leqslant\frac{\mathrm{sh}^3x}{\mathrm{ch}x}. \tag{1.6}$$

Posons

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x-\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)^{-\frac{1}{3}}\end{array}\right. .$$

Par calculs élémentaires, on obtient

$$f'(x)=1-\mathrm{ch}(x)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}\mathrm{sh}(x)^2\mathrm{ch}(x)^{-\frac{4}{3}},$$
$$f''(x)=-\frac{4}{9}\mathrm{sh}(x)^3\mathrm{ch}(x)^{-\frac{7}{3}}\leqslant 0\ \text{ si } x\geqslant 0.$$

Donc la fonction f' est décroissante sur $[0,+\infty[$ et comme $f'(0)=0$ on a $f'\leqslant 0$. Ainsi, la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$ et comme $f(0)=0$ on a $f\leqslant 0$. Donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $x^3\leqslant\dfrac{\mathrm{sh}(x)^3}{\mathrm{ch}(x)}$.

Étape 2 : Posons, pour $y>0$, $g(y):=\gamma'_{t,b}(y)-\dfrac{b^2}{t^2}$. On a

$$g(y)=\frac{1}{y^2}-\frac{b^2}{t^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{yb}{t}\right)}-\frac{b^2}{t^2},$$

$$g'(y) = -\frac{2}{y^3} + 2\frac{b^3}{t^3}\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{yb}{t}\right)}{\mathrm{sh}^3\left(\frac{yb}{t}\right)}.$$

En utilisant (1.6) avec $x = \dfrac{yb}{t} > 0$, on obtient $g'(y) \leqslant 0$. Donc la fonction g est décroissante. Or, par développement limité, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \dfrac{-b^2}{t^2}$ donc $g \leqslant 0$ et finalement $\gamma'_{t,b}(y) \leqslant \dfrac{b^2}{t^2}$.

Pour la positivité, il s'agit de remarquer que

$$\gamma'_{t,b}(y) = \frac{b^2}{t^2\mathrm{sh}^2\left(\frac{yb}{t}\right)}\Upsilon\left(\frac{yb}{t}\right)$$

où $\Upsilon : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{x^2} - 1$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}^+$.

■

Démonstration de la Proposition 1.14. On va montrer le cas $a > 0$ et $b > 0$. Les autres cas se traitent de manière similaire. On montre que le pont vérifie l'équation puis qu'il est l'unique solution de cette équation.

1. La démonstration est inspirée de l'exercice 3.11 du chapitre XI de [RY13].

   Soit $(R_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Bessel de dimension 3, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration naturelle et $\mathbb{P}_a = \mathbb{P}(\cdot|R_0 = a)$. Le processus $\left((R_t)_{t\geqslant 0}, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P}_a\right)$ est un processus de Markov et vérifie l'équation

   $$\begin{cases} \mathrm{d}R_t &= \mathrm{d}W_t + \dfrac{1}{R_t}\mathrm{d}t, \qquad t \geqslant 0 \\ R_0 &= a, \end{cases}$$

   où $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un $\left(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P}_a\right)$-mouvement brownien.

   Le processus $(R_t)_{t\in[0,1]}$ sous $\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}$ est conditionné à valoir a en 0 et b en 1. C'est donc un pont de Bessel noté $(r_t)_{t\in[0,1]}$. Le but est donc de réécrire l'équation stochastique de $(R_t)_{t\in[0,1[}$ sous $\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}$.

   On définit $(Z_t)_{t\in[0,1[}$ tel que, pour $t \in [0,1]$, $Z_t = \dfrac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}|_{\mathscr{F}_t}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_a|_{\mathscr{F}_t}}$. On a alors, par le Théorème 1.11, $Z_t = h(t, R_t)$ où $h : (t,x) \mapsto \dfrac{p^3_{1-t}(x,b)}{p^3_1(a,b)} = \underbrace{\dfrac{a}{\sqrt{1-t}}}_{:=u(t,x)}\dfrac{1}{x}\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{x^2+b^2}{2(1-t)}+\frac{a^2+b^2}{2}}}_{:=w(t,x)}\underbrace{\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}{\mathrm{sh}(ab)}}_{:=z(t,x)}$.

Les dérivées partielles des fonctions u, w, z sont données dans le tableau ci-dessous.

$\partial_t u = \dfrac{u}{2(1-t)}$	$\partial_t w = -\dfrac{x^2+b^2}{2(1-t)^2} w$	$\partial_t z = \dfrac{xb}{(1-t)^2 \mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)} z$
$\partial_x u = -\dfrac{u}{x}$	$\partial_x w = -\dfrac{x}{1-t} w$	$\partial_x z = \dfrac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)} z$
$\partial^2_{x^2} u = 2\dfrac{u}{x^2}$	$\partial^2_{x^2} w = \left(-\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{x^2}{(1-t)^2}\right) w$	$\partial^2_{x^2} z = \dfrac{b^2}{(1-t)^2} z$

On obtient :

$$\partial_t h(t,x) = h(t,x)\left[\frac{1}{2(1-t)} - \frac{x^2+b^2}{2(1-t)^2} + \frac{xb}{(1-t)^2\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}\right],$$

$$\partial_x h(t,x) = h(t,x)\left[-\frac{1}{x} - \frac{x}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}\right],$$

$$\partial^2_{x^2} h(t,x) = h(t,x)\left[\frac{1}{1-t} + \frac{x^2+b^2}{(1-t)^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{2b}{(1-t)x\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)} - \frac{2xb}{(1-t)^2\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}\right].$$

On applique la formule d'Itô au processus $(Z_t)_{t\in[0,1[}$. Soit $t \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t = {} & \underbrace{\partial_t h(t,R_t)}_{Z_t\left[\frac{1}{2(1-t)} - \frac{R_t^2+b^2}{2(1-t)^2} + \frac{R_t b}{(1-t)^2\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]}\mathrm{d}t + \underbrace{\partial_x h(t,R_t)}_{Z_t\left[-\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]}\frac{1}{R_t}\mathrm{d}t \\
& + \underbrace{\partial_x h(t,R_t)}_{Z_t\left[-\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]}\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\underbrace{\partial^2_{x^2} h(t,R_t)}_{Z_t\left[\frac{1}{1-t} + \frac{R_t^2+b^2}{(1-t)^2} + \frac{2}{R_t^2} - \frac{2b}{(1-t)R_t\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)} - \frac{2R_t b}{(1-t)^2\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]}\mathrm{d}t, \\
\mathrm{d}Z_t = {} & Z_t\left[-\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]\mathrm{d}W_t.
\end{aligned}$$

Comme pour $t \in [0,1[$, $Z_t > 0$, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[\ln Z_t] &= \frac{1}{Z_t}\mathrm{d}Z_t - \frac{1}{2Z_t^2}\mathrm{d}\langle Z\rangle_t \\
&= \left[-\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]^2\mathrm{d}t \\
&= S_t\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}S_t^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

où $(S_t)_{t\in[0,1[}$ est le processus défini par $S_t := -\frac{1}{R_t} - \frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\text{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}$.

Finalement,

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t S_u \mathrm{d}W_u - \frac{1}{2}\int_0^t S_u^2 \mathrm{d}u\right).$$

On pose, pour $t \in [0,1[$, $B_t := W_t - \int_0^t S_u \mathrm{d}u$.

Alors, par le théorème de Girsanov, le processus $(B_t)_{t\in[0,1[}$ est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}|_{\mathscr{F}_t}$.

Le drift est donc modifié dans l'équation du pont et on a finalement

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_t &= \mathrm{d}W_t + \frac{1}{R_t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}B_t + S_t\mathrm{d}t + \frac{1}{R_t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}B_t + \left[-\frac{R_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\text{th}\left(\frac{R_t b}{1-t}\right)}\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant que, sous $\mathbb{P}^{(1)}_{a\to b}|_{\mathscr{F}_t}$, le processus $(R_t)_{t\in[0,1[}$ est un pont de Bessel.

2. Unicité : L'idée est tirée de [Zam03]. On va montrer l'unicité trajectorielle sur la classe des solutions $(U_t)_{t\in[0,1[}$ continues et strictement positives.

   Montrons que les solutions faibles sont positives : Soit $\left((U_t)_{t\in[0,1]}, (\hat{B}_t)_{t\in[0,1]}\right)$ une solution faible de

   $$\mathrm{d}U_t = \left(-\frac{U_t}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\text{th}\left(\frac{U_t b}{1-t}\right)}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\hat{B}_t, \quad t<1$$

   vérifiant $U_0 = a$ où $(\hat{B}_t)_{t\in[0,1[}$ est un mouvement brownien.

   Par le Théorème IX.3.5 de [RY13], il existe un unique processus $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ adapté à la filtration de $(\hat{B}_t)_{t\in[0,1[}$ tel que $Q_0 = 0$ et solution de

   $$\mathrm{d}Q_t = -\frac{2Q_t}{1-t}\mathrm{d}t + 3\mathrm{d}t + 2\sqrt{Q_t}\mathrm{d}\hat{B}_t, \quad t\in[0,1[. \tag{1.7}$$

   Par la formule d'Itô, le carré module d'un pont brownien de dimension 3 allant de 0 à 0 sur $[0,1]$ est également solution faible de (1.7) pour un autre mouvement brownien. Notons ce processus $(\tilde{Q}_t)_{t\in[0,1]}$. Par unicité trajectorielle, on a unicité en loi donc $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ et $(\tilde{Q}_t)_{t\in[0,1]}$ sont des processus égaux en loi. En particulier, par le Chapitre XI de [RY13], $Q_t > 0$ pour $t \in]0,1[$.

Posons, pour tout $t \in [0,1]$, $\hat{U}_t = \sqrt{Q_t}$. Alors $\hat{U}_t > 0$ pour $t \in]0,1[$. Par la formule d'Itô,

$$\mathrm{d}\hat{U}_t = \left(\frac{1}{\hat{U}_t} - \frac{\hat{U}_t}{1-t}\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\hat{B}_t.$$

Par continuité, $H_0 := \inf\{t \in]0,1[\mid U_t = 0\}$ est strictement positif presque sûrement. Ainsi, sur $[0, H_0[$, le processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ est strictement positif.

Pour tout $t \in [0, H_0[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left([\hat{U}_t - U_t]^+\right)^2 &= \left(-\frac{\hat{U}_t - U_t}{1-t} - \underbrace{\frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{U_t b}{1-t}\right)}}_{\geqslant \frac{1}{U_t}} + \frac{1}{\hat{U}_t}\right)[\hat{U}_t - U_t]^+ \\
&\leqslant \left(-\frac{\hat{U}_t - U_t}{1-t} - \frac{\hat{U}_t - U_t}{U_t \hat{U}_t}\right)[\hat{U}_t - U_t]^+ \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Comme $U_0 \geqslant 0 = \hat{U}_0$, on obtient, par le lemme de Gronwall, $U_t \geqslant \hat{U}_t > 0$ pour $t \in [0, H_0[$. Si H_0 était différent de 1, alors le processus $(\hat{U}_t)_{t\in[0,1[}$ serait contraint de toucher 0 ce qui est absurde. Ainsi, le processus $(U_t)_{t\in[0,1[}$ est strictement positif. Toutes les solutions faibles arrivant en un point strictement positif restent positives.

Conclusion sur l'unicité : Soient $\left(U_{1,t}\right)_{t\in[0,1[}$ et $\left(U_{2,t}\right)_{t\in[0,1[}$ deux solutions faibles de l'équation (1.5) associées au même mouvement brownien, et partant du même point. On a, en utilisant la positivité des processus $\left(U_{1,t}\right)_{t\in[0,1[}$ et $\left(U_{2,t}\right)_{t\in[0,1[}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{1,t}-U_{2,t})^2}{2(U_{1,t}-U_{2,t})} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{1,t}-U_{2,t})\right] \\
&= \left[\left(-\frac{U_{1,t}}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{U_{1,t}b}{1-t}\right)}\right) - \left(-\frac{U_{2,t}}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{U_{2,t}b}{1-t}\right)}\right)\right] \\
&= \left[-\frac{U_{1,t}}{1-t} + \gamma_{1-t,b}(U_{1,t}) + \frac{1}{U_{1,t}} + \frac{U_{2,t}}{1-t} - \gamma_{1-t,b}(U_{2,t}) - \frac{1}{U_{2,t}}\right] \\
&= \underbrace{-\frac{(U_{1,t}-U_{2,t})^2}{U_{1,t}U_{2,t}} - \frac{(U_{1,t}-U_{2,t})^2}{1-t}}_{\leqslant 0} + \left[\gamma_{1-t,b}(U_{1,t}) - \gamma_{1-t,b}(U_{2,t})\right] \\
&\leqslant \left[\gamma_{1-t,b}(U_{1,t}) - \gamma_{1-t,b}(U_{2,t})\right] \\
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{1,t}-U_{2,t})^2 &\leqslant \left|\gamma_{1-t,b}(U_{1,t}) - \gamma_{1-t,b}(U_{2,t})\right|\left|U_{1,t}-U_{2,t}\right|.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité des accroissements finis et le Lemme 1.15,

$$\left|\gamma_{1-t,b}(U_{1,t}) - \gamma_{1-t,b}(U_{2,t})\right| \leqslant \frac{b^2}{(1-t)^2}\left|U_{1,t} - U_{2,t}\right|.$$

Finalement,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_{1,t} - U_{2,t})^2 \leqslant \frac{b^2}{(1-t)^2}(U_{1,t} - U_{2,t})^2.$$

Par le lemme de Gronwall,

$$(U_{1,t} - U_{2,t})^2 \leqslant 2(U_{1,0} - U_{2,0})^2 \exp\Big(\int_0^t \frac{b^2}{(1-s)^2}\,\mathrm{d}s\Big) = 0.$$

Donc pour tout $t \in [0,1[$, $U_{1,t} = U_{2,t}$. On conclut avec le théorème de Yamada-Watanabe : toute solution faible est une solution forte.

■

Remarque 1.16.

- *En utilisant le fait que* $I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} + \mathrm{ch}(x)\right)$*, on retrouve l'expression donnée dans [DB08].*
- *En prenant* $\delta = 3$*, nous retrouvons également l'expression donnée pour le pont de Bessel allant de a en a dans [Zam03].*

Si l'on souhaite simuler le pont de Bessel par son équation différentielle stochastique, nous risquons de rencontrer un problème si le pont part de 0 (division par 0). Pour pallier ce problème, nous allons utiliser l'identité suivante, nommée "Switching identity" dans [APP05] :

Proposition 1.17. *Pour* $y \in \mathbb{R}_+$*, le processus* $(r_t)_{t\leqslant 1}$ *conditionné par* $r_0 = x$ *et* $r_1 = y$ *et le processus* $(\bar{r}_t)_{t\geqslant 0} := (r_{1-t})_{t\leqslant 1}$ *conditionné par* $\bar{r}_0 = y$ *et* $\bar{r}_1 = x$ *ont même loi.*

Démonstration. Pour montrer l'égalité en loi des processus, nous allons prouver qu'ils sont tous deux solutions de l'équation stochastique (donnée dans la Proposition 1.14) ; le résultat suivra par unicité. La preuve repose sur le Théorème 2.1. de [HP86]. L'hypothèse du théorème porte sur la densité $x \mapsto f^t_{(a,0)\to(b,1)}(x)$ de r_t. Il faut vérifier que pour tout $t_0 > 0$ et tout ouvert borné $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_{t_0}^1 \int_{\mathcal{O}} \left|f^t_{(a,0)\to(b,1)}(x)\right|^2 + \left|\partial_x f^t_{(a,0)\to(b,1)}(x)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty.$$

Nous allons prendre un ouvert borné $\mathcal{O} =]u,v[$, avec $u, v \in \mathbb{R}_+$ et nous allons traiter le cas $a > 0$ et $b > 0$ pour faire les calculs. Les autres cas se traitent similairement.

- Montrons que la fonction $g : (t,x) \mapsto f^t_{(a,0)\to(b,1)}$ est intégrable sur $]t_0,1[\times]u,v[$. Pour cela, on va montrer que la fonction g est continue sur $[t_0,1]\times[u,v]$. On a :

$$g : (t,x) \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{xb}{1-t}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{ax}{t}\right)}{\mathrm{sh}\,(ab)}\exp\left(-\frac{x^2}{2t(1-t)}-\frac{a^2(1-t)}{2t}-\frac{b^2t}{2(1-t)}\right).$$

En x, cette fonction est continue sur $[u,v]$. Pour étudier la continuité en t, on réécrit

$$g(t,x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{ax}{t}\right)}{2\sqrt{t(1-t)}\mathrm{sh}\,(ab)}\mathrm{e}^{-\frac{a^2(1-t)}{2t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-bt)^2}{2t(1-t)}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+bt)^2}{2t(1-t)}}\right].$$

On pose $s := \dfrac{1}{1-t}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1} g(t,x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{t\to1}\frac{\mathrm{sh}\,(ax)}{2\sqrt{1-t}\mathrm{sh}\,(ab)}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2(1-t)}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+b)^2}{2(1-t)}}\right]\\ &= C_{a,b,x}\lim_{s\to+\infty}\sqrt{s}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s(x-b)^2}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s(x+b)^2}\right]\\ &= C_{a,b,x}\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{s}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s(x-b)^2}}-\frac{\sqrt{s}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}s(x+b)^2}}\right],\end{aligned}$$

où $C_{a,b,x}$ est une constante dépendant de a,b,x. Pour presque tout x, cette limite est nulle et la fonction peut être prolongée par continuité. Ainsi, la fonction g^2 est intégrable sur $[t_0,1]\times[u,v]$ car continue sur cet ensemble.

- Nous nous intéressons maintenant à l'intégrabilité sur $]t_0,1[\times]u,v[$ de la fonction $\psi : (t,x) \mapsto \partial_x g(t,x)$. On a

$$\psi(t,x)=g(t,x)\left(\frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}+\frac{a}{t\mathrm{th}\left(\frac{ax}{t}\right)}-\frac{x}{t(1-t)}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to1}\psi(t,x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lim_{t\to1}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{ax}{t}\right)}{2\sqrt{t(1-t)}\mathrm{sh}\,(ab)}\mathrm{e}^{-\frac{a^2(1-t)}{2t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-bt)^2}{2t(1-t)}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+bt)^2}{2t(1-t)}}\right]\\ &\quad\times\left(\frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}+\frac{a}{t\mathrm{th}\left(\frac{ax}{t}\right)}-\frac{x}{t(1-t)}\right)\\ &= K_x\lim_{t\to1}\frac{b-x}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2(1-t)}{2t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2(1-t)}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+b)^2}{2(1-t)}}\right]\end{aligned}$$

avec K_x constante dépendant éventuellement de x. Pour presque tout x, cette limite est nulle et la fonction peut être prolongée par continuité. Ainsi, la fonction ψ^2 est intégrable sur $[t_0,1]\times[u,v]$ car continue sur cet ensemble.

L'hypothèse pour appliquer le Théorème 2.1. de [HP86] est donc vérifiée. Le processus renversé $(\bar{r}_t)_{t\in[0,1]}$ où $\bar{r}_t = r_{1-t}$ est lui aussi un processus de diffusion dont on connait l'expression du drift $\bar{b}$ et du coefficient de diffusion $\bar{\sigma}$.

On a déjà $\bar{\sigma} = 1$. De plus, l'identité (2.3) donnée dans [HP86] devient :

$$\begin{aligned}\bar{b}(t,x) &= -b(1-t,x) + \frac{\partial_x f^{1-t}_{a\to b}(x)}{f^{1-t}_{a\to b}(x)} \\ &= -b(1-t,x) + \partial_x\left(\ln\left[f^{1-t}_{(a,0)\to(b,1)}(x)\right]\right).\end{aligned}$$

Nous faisons les calculs dans les différents cas pour le pont de Bessel $(r_t)_{t\in[0,1]}$ pour obtenir :

a	b	$\partial_x\left(\ln\left[f^{1-t}_{(a,0)\to(b,1)}(x)\right]\right)$	$b(t,x)$ le drift de r_t	$\bar{b}(t,x)$ le drift de r_{1-t}
>0	>0	$\frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)} + \frac{a}{t\mathrm{th}\left(\frac{ax}{t}\right)} - \frac{x}{t(1-t)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{a}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{ax}{1-t}\right)}$
>0	0	$\frac{1}{x} + \frac{a}{t\mathrm{th}\left(\frac{ax}{t}\right)} - \frac{x}{t(1-t)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{1}{x}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{a}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{ax}{1-t}\right)}$
0	>0	$\frac{1}{x} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)} - \frac{x}{t(1-t)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{b}{(1-t)\mathrm{th}\left(\frac{xb}{1-t}\right)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{1}{x}$
0	0	$\frac{2}{x} - \frac{x}{t(1-t)}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{1}{x}$	$-\frac{x}{1-t} + \frac{1}{x}$

On peut maintenant facilement vérifier que les coefficients de l'équation stochastique sont les mêmes pour le processus de a à b et pour le processus à temps inversé de b à a. ■

1.3 Temps d'atteinte d'une diffusion

Nous énonçons dans cette section quelques résultats connus sur le temps d'atteinte d'une diffusion. Ces résultats seront utilisés ou comparés dans les chapitres suivants.

1.3.1 Mouvement brownien

Définition 1.18 (Temps d'atteinte)**.** *Pour $a \in \mathbb{R}$ et B un mouvement brownien, on note $\tau_a := \inf\{t > 0 \mid B_t = a\}$ le temps d'atteinte de a.*

Proposition 1.19 (Densité du temps d'atteinte)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$, la loi de τ_a admet la densité g_a définie par :*

$$g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & |a|\dfrac{\exp\left(\frac{-a^2}{2t}\right)}{\sqrt{2\pi t^3}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t). \end{array}\right.$$

Démonstration. On utilise le principe de réflexion. La preuve est en Section 2.6.A de [KS91]. ■

Remarque 1.20. *Considérons un mouvement brownien issu de $x \in [0, a[$, c'est à dire un processus de la forme $Z_t = x + B_t$ où la condition initiale x est indépendante du brownien B. On note $\tilde{\tau}_a$ son temps d'atteinte de a. Alors $\tilde{\tau}_a = \inf\{t > 0 \mid Z_t = a\} = \inf\{t > 0 \mid B_t = a - x\} = \tau_{a-x}$.*
Ainsi, la densité de $\tilde{\tau}_a$ est

$$\tilde{g}_{x,a} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \dfrac{|a-x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(\dfrac{-(a-x)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t). \end{array} \right. \tag{1.8}$$

On a également la transformée de Laplace du temps d'atteinte pour le mouvement brownien standard.

Proposition 1.21. *On a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_a}\right] = \mathrm{e}^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

1.3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

L'article [APP05] est à la base du résultat principal du Chapitre 2. Les auteurs de ce papier expriment de plusieurs manières la densité du temps d'atteinte du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ainsi que sa transformée de Laplace. Nous rappelons ici ces principaux résultats.
Considérons un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t \geqslant 0}$ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= -kX_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 &= x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $(B_t)_{t \geqslant 0}$ mouvement brownien standard. On définit, pour $a \in \mathbb{R}$, le temps d'atteinte $T_a := \inf\{s > 0 \mid X_s = a\}$. On commence par donner la transformée de Laplace du temps d'atteinte du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Proposition 1.22 (Proposition 2.1 de [APP05])**.** *Pour tout $x < a$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, la transformée de Laplace u_a^λ de T_a en λ est donnée par*

$$u_a^\lambda(x,k) := \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\lambda T_a}\right] = \mathrm{e}^{k\frac{x^2-a^2}{2}} \frac{D_{-\frac{\lambda}{k}}\left(-x\sqrt{2k}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k}}\left(-a\sqrt{2k}\right)} \tag{1.9}$$

où $D_\nu(\cdot)$ est la fonction parabolique cylindrique. Cette fonction est la solution de

$$y''(x) + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \nu\right) y(x) = 0 \tag{1.10}$$

vérifiant $y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\nu \mathrm{e}^{-x^2/4}$ (cf. [LS72] pour plus de détails).

Remarque 1.23. *Certaines propriétés de la fonction parabolique cylindrique sont données en Section 3.5.1 du Chapitre 3.*

L'article [APP05] donne ensuite plusieurs expressions de la densité de ce premier temps d'atteinte. Nous rappelons ici deux de ces expressions qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Proposition 1.24 (Théorèmes 3.1 et 5.1 de [APP05])**.** *Lorsque $x < a$, $x, a \in \mathbb{R}$, on note $p_{x\to a}$ la densité de T_a. On a, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,*

1. $$p^{(k)}_{x\to a}(t) = -k\mathrm{e}^{k\frac{x^2-a^2}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{\nu_{j,-a\sqrt{2k}}}(-x\sqrt{2k})}{\partial_\nu D_{\nu_{j,-a\sqrt{2k}}}(-a\sqrt{2k})} \mathrm{e}^{-k\nu_{j,-a\sqrt{2k}}t} \tag{1.11}$$

   où, pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, $(\nu_{j,b})_{j\geqslant 1}$ désigne la suite des zéros positifs ordonnés de $\nu \mapsto D_\nu(b)$.

2. $$p^{(k)}_{x\to a}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}(a^2-x^2-t)} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}\int_0^t (r_s - a)^2 \mathrm{d}s\right)\right] \tilde{g}_{x,a}(t) \tag{1.12}$$

   où la fonction $\tilde{g}_{x,a}$ est définie par (1.8)*, et où r est un pont de Bessel partant de $r_0 = 0$ et arrivant en $r_t = a - x$.*

Chapitre 2

Estimation des paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à partir d'observations du supremum

La modélisation de la dynamique des températures en un lieu donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck a motivé l'étude de ce problème. En effet, comme les températures se répartissent autour d'un axe moyen, il est naturel de modéliser leur évolution par un processus de retour à la moyenne (voir par exemple [Dis98a], [ADS02] ou [BSZ02]).

Prévoir et estimer les mesures de risque liées aux canicules par exemple est un enjeu important. Il serait possible d'estimer ces mesures en connaissant la température en temps continu ou des observations discrètes du processus, comme proposé dans [Fra03]. Cependant, la plupart des stations météo ne disposent pas de ces données mais n'ont que les extrema journaliers. Nous proposons donc une méthode d'estimation des paramètres du modèle d'origine en se basant sur les données disponibles (un échantillon des extrema, et par exemple des maxima). Ainsi, par la suite, il est possible de procéder à des simulations, des estimations, des prévisions.

Pour ce faire, nous exprimons la loi du processus des maxima en fonction des paramètres. Cette expression est complexe mais nous permet ensuite de trouver les-dits paramètres via un estimateur de type moindres carrés. Il s'agit d'une nouvelle approche utilisant directement la fonction de répartition du supremum du processus et non son inverse comme classiquement en estimation par quantiles ([CHBS05] ou [Pek14]).

Nous formalisons dans la Section 2.2 le problème d'estimation. Nous donnons ensuite la fonction de répartition du supremum du processus ainsi que d'autres outils théoriques comme la consistance de l'estimation grâce à la propriété de mélange du processus ([Bil65]). Des illustrations nu-

mériques, notamment sur les mesures de risques liées aux canicules ([Gri68]) sont proposées dans la Section 2.4.

Pour finir, la Section 2.7 montre l'existence des moments du supremum d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Dans ce chapitre uniquement, nous effectuerons un léger changement de notation. Nous posons $l = \frac{k}{\beta}$ et $\mu = \frac{\phi}{k} = \frac{\phi}{l\beta}$. Ainsi, le processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ décrit dans le chapitre précédent s'écrit

$$\mathrm{d}X_t = l\beta(\mu - X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta}\mathrm{d}B_t$$

où $\mu \in \mathbb{R}, l, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, et $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard.

Pour l'estimation des paramètres, nous faisons l'hypothèse que X_0 a pour loi la densité invariante de sorte que le processus est stationnaire.

Le travail présenté dans ce chapitre a été publié dans Stochastic Environmental Research and Risk Assessment [BSDG+ 18].

2.1 Introduction

Forecasting and assessing the risk of heat waves is a crucial public policy stake. It requires measure tools in order to evaluate the probability of heat waves and their severity. For example, the paper [SÖK+10] is interested in assessing the likelihood of occurrence of the heat wave of 2003. For that purpose, they model annual maximum temperatures thanks to mean monthly data. However, the available information depends on meteorological stations. Daily extremes (maximum and / or minimum) might be the only available data. Since temperature does not deviate from its mean level, a mean-reverting process such as an Ornstein-Uhlenbeck (OU) process is commonly used to model temperature process (see [Dis98a], [Dis98b] for example). The authors of [DQ00] and [ADS02] propose to use an ARMA version of the OU process while [BSZ02] propose a fractional Brownian motion (to take into account the long range dependence) instead of the classical Brownian motion in the OU process. In [CIM06], the OU process is the basic model used to model the local temperature (of air, of ocean water).

The main purpose of this paper is to estimate the parameters of this OU process. Estimation of OU parameters has been done using observations of the process (see [Fra03]) or more recently using hitting time data in [MI08] for the neuronal activity. However, weather stations do not record either of these data. That's why we propose an estimation based on daily observed suprema of temperatures. Once the parameter estimation is done, risk measures related to heat waves may

be obtained from Monte Carlo simulations of the dynamic of temperatures with the estimated parameters. For example, we would like to estimate the probability of heat waves, namely the probability for outdoor air temperature to exceed a threshold (26.67°C during 3 days, see [Gri68]) or two thresholds (one during night and one during day, see [LPL+04]). Other interesting measures would be the corresponding expected area over the threshold or the mean time over the threshold. Recently, lots of results on the first passage time of the process have been obtained. In [APP05], different expressions for the density function of the first hitting time to a fixed level by an OU process are given. Since hitting time and suprema are related, the cumulative distribution function (cdf) of the supremum is obtained.

Unlike classical quantile estimation (such as done in [CHBS05] or [Pek14]), we do not use the cdf inverse and propose though a new approach to estimate the parameters. Thanks to the cdf, we perform a least square method to estimate the OU parameters.

The paper is organized as follows. In the next section, the estimation problem is presented. Section 3 is concerned with the theoretical tools. Finally, Section 4 is devoted to the numerical illustrations of the estimation and the related risk measures thanks to the only available data : the daily suprema of temperatures.

2.2 Estimation Problem

Since temperature does not deviate from its mean level, a mean-reverting process such as an OU process is commonly used to model temperature process (see [Dis98a], [Dis98b] for example). Here, we use a stationary OU process. The temperature variations process $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ is given by :

$$\mathrm{d}X_t = l_0\beta_0(\mu_0 - X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta_0}\mathrm{d}B_t, \quad X_0 \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{1}{2l_0}\right)$$

where $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $l_0, \beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$, and $(B_t)_{t\geqslant 0}$ is a standard Brownian motion. Suppose that X_0 and $(B_t)_{t\geqslant 0}$ are independent. We recall that the measure $\mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{1}{2l_0}\right)$ is the stationary measure. This modelling is reasonable, as, in the applications, we consider observations only from a sub-period of annual observations (e.g. from summer). Let us note $\theta_0 = (\beta_0, \mu_0, l_0)$. We say that X is a stationary OU with parameter θ_0.

The parameter μ_0 is the mean of the stationary process. The parameter $\sqrt{\beta_0}$ is the volatility of the process. It indicates the degree of variation. For the temperature, it reveals a tendency to change quickly and unpredictably. If $\beta_0 = 0$, the process is purely deterministic and well-known then. Finally, the parameter l_0 shows the "speed" of mean-reversion. The parameter $l_0\beta_0$ is sometimes

called the relaxation parameter. If $l_0 = 0$, the process is just a Brownian motion, standard if $\beta_0 = 1$. The influence of these parameters is shown on Figure 2.5 in Appendix 2.6.

Let us note for $s, r \in \mathbb{R}^+$, $S_{[s,r[} = \sup_{s \leqslant t < r} X_t$ and $I_{[s,r[} = \inf_{s \leqslant t < r} X_t$.

Assume that we observe the suprema on a period $[0, T]$ with a partition $(t_i)_{i \geqslant 0}$ of constant step $h \geqslant 0$. We then have n suprema $S_{[t_{i-1},t_i[}$ for $i \in [\![1, n]\!]$ on disjoint intervals. Let us remark here that in our problem of daily observations we will take $h = 1$.

Classical estimation methods are not well suited for the parameter estimation from the supremum observations. Indeed, the likelihood maximization requires the probability density function of the supremum and in order to use quantile methods, one needs to know the supremum's cdf inverse. These two functions can only be obtained by numerical approximations that are more time consuming than numerical methods to get the cdf itself.

This is why we propose to use the cdf of the supremum, denoted F^*, whose expression is given in Proposition 2.2.

Let $N_q \in \mathbb{N}^*$ and s_j, $j = 1, \ldots, N_q$ be real numbers. Let us denote F_n^* the empirical distribution function on the sample $S_{[t_{i-1},t_i[}$, $i = 1, \ldots, n$. We recall that, for $t \in \mathbb{R}$, $F_n^*(t) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{S_{[t_{i-1},t_i[} \leqslant t}$.

A way to estimate θ_0 is to use a least square method by minimizing the sum of squares of the differences between theoretical and empirical cdf. Then, we want to minimize the following function Q_n :

$$Q_n(\theta) = \sum_{j=1}^{N_q} \left[F^*\left(s_j, \theta, h\right) - F_n^*(s_j) \right]^2$$

where θ is the parameter of the OU process, $F^*(a, \theta, h) = \mathbb{P}\left(S_{[0,h[} \leqslant a\right)$ and $s_1, \ldots, s_{N_q}$ are real numbers (to be chosen later).

Thus, θ_0 is estimated by

$$\widehat{\theta_n} = \left(\widehat{\beta_n}, \widehat{\mu_n}, \widehat{l_n}\right) = \underset{\theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}{\operatorname{argmin}} \; Q_n(\theta). \tag{2.1}$$

Remark 2.1. *The problem is stated here with suprema but the same reasoning may be applied to the infima (or both infima and suprema) to deduce the estimation.*

2.3 Theoretical Tools

In this section, we present some useful results to estimate the parameters.

2.3.1 Cdf of the supremum

To minimize the function Q_n, we need to compute the cdf F^* of the supremum. As the cdf of the supremum is directly linked with the one of the hitting time, we can find F^* thanks to [APP05].

Proposition 2.2. *For $t \in \mathbb{R}^+$ and $a \in \mathbb{R}$, the cdf F^* of the supremum of the stationary OU process X with parameter $\theta = (\beta, \mu, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ is given by*

$$\begin{aligned} F^*(a,\theta,t) &= \mathbb{P}\left(S_{[0,t[} \leqslant a\right) \\ &= \Phi\left(\left(a-\mu\right)\sqrt{2l}\right) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{a}\int_{0}^{t\beta} \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}\left[(a-\mu)^2+(x-\mu)^2-u\right]} \frac{a-x}{\pi\sqrt{\frac{2u^3}{l}}} \mathrm{e}^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{2}\int_0^u (r_s-a+\mu)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}x \end{aligned}$$

where r is a 3-dimensional Bessel bridge over the interval $[0,u]$ between 0 and $a-x$ and Φ is the cdf of the standard normal distribution.

We first need the following lemma.

Lemma 2.3. *For $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ and $a > x$, the cdf F^c of the conditional supremum of the OU process X with parameter $\theta = (\beta, \mu, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ starting at $X_0 = x$ is given by*

$$\begin{aligned} F^c(a,\theta,t,x) &= \mathbb{P}\left(S_{[0,t[} \leqslant a \mid X_0 = x\right) \\ &= 1 - \int_0^{t\beta} \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}\left[(a-\mu)^2-(x-\mu)^2-u\right]} \frac{a-x}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathrm{e}^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{2}\int_0^u (r_s-a+\mu)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u \end{aligned}$$

where r is a 3-dimensional Bessel bridge over the interval $[0,u]$ between 0 and $a-x$.
For $a \leqslant x$, $F^c(a,\theta,t,x) = 0$.

Using the hitting time density for an OU process (see [APP05]), we can deduce this result on the conditional cdf.

Proof. Let $a > x$ be given and fixed.
Let set $U_t = X_{\frac{t}{\beta}} - \mu$ and $W_t = \sqrt{\beta} B_{\frac{t}{\beta}}$ (which is thus a standard Brownian motion). Then the dynamic of $(U_t)_{t \geqslant 0}$ is

$$\mathrm{d}U_t = -lU_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \quad U_0 = u_0 = x - \mu \in \mathbb{R}.$$

For $b > u_0$, we introduce the first passage time $T_b = \inf\{s \geqslant 0; U_s = b\}$.
Since $\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant u < t} U_u \leqslant b \mid U_0 = u_0\right) = \mathbb{P}(T_b > t \mid U_0 = u_0)$, we have :

$$\mathbb{P}\left(S_{[0,t[} \leqslant a \mid X_0 = x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant u < t\beta} U_u \leqslant a - \mu \mid U_0 = u_0\right) = \mathbb{P}\left(T_{a-\mu} > t\beta \mid U_0 = u_0\right).$$

We conclude using the density f_{T_b} of T_b given (in [APP05] written in (1.12)) by :

$$f_{T_b}(u) = \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}(b^2-u_0^2-u)} \frac{b-u_0}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathrm{e}^{-\frac{(b-u_0)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\frac{-\mu^2}{2}\int_0^u (r_s-b)^2 \mathrm{d}s}\right]$$

where r is a 3-dimensional Bessel bridge over the interval $[0,u]$ between 0 and $b-u_0$. Then, we have

$$\mathbb{P}\left(S_{[0,t[} \leqslant a \mid X_0 = x\right) = 1 - \int_0^{t\beta} \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}\left[(a-\mu)^2-(x-\mu)^2-u\right]} \frac{a-x}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathrm{e}^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\frac{l^2}{2}\int_0^u (r_s-a+\mu)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u$$

with r a 3-dimensional Bessel bridge over the interval $[0,u]$ between 0 and $a-x$. ■

Remark 2.4. *Similarly, we can obtain the cdf F_c of the conditional infimum of X. For $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $a < x$ and $\theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, we have*

$$\begin{aligned} F_c(a,\theta,t,x) &= \mathbb{P}\left(I_{[0,t[} \leqslant a \mid X_0 = x\right) \\ &= \int_0^{t\beta} \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}\left[(a-\mu)^2-(x-\mu)^2-u\right]} \frac{x-a}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathrm{e}^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{2}\int_0^u (r_s+a-\mu)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u \end{aligned}$$

with r a 3-dimensional Bessel bridge over the interval $[0,u]$ between 0 and $x-a$.
For $x \leqslant a$, $F_c(a,\theta,t,x) = 0$.

Proof of Proposition 2.2. Integrating with respect to the law of X_0, we can express the cdf F^* of the supremum of the OU process X with parameter $\theta = (\beta,\mu,l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F^*(a,\theta,t) &= \mathbb{P}\left(S_{[0,t[} \leqslant a\right) \\ &= \int_{-\infty}^{a} F^c(a,\theta,t,x)\mathrm{d}x \\ &= \Phi\left(\left(a-\mu\right)\sqrt{2l}\right) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{a}\int_0^{t\beta} \mathrm{e}^{-\frac{l}{2}\left[(a-\mu)^2+(x-\mu)^2-u\right]} \frac{a-x}{\pi\sqrt{\frac{2u^3}{l}}} \mathrm{e}^{-\frac{(a-x)^2}{2u}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{l^2}{2}\int_0^u (r_s-a+\mu)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

■

Remark 2.5. *Note that the cdf F^* is decreasing with respect to β. Numerically, the cdf seems to be decreasing with respect to l and μ.*

2.3.2 Mixing property

In order to get statistical properties of estimators, some mixing properties are usually required. Indeed, statistics beyond independence have received a deep attention from the 90's. Mixing is used instead of independence and results such as Laws of Large Numbers or Central Limit Theorems

may still hold. There is a very large literature on that subject and we refer to [Bil65, Dou94, Rio93] and the references therein for definitions and main results.

Roughly speaking, mixing properties of a process $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ quantify the convergence to 0 as r goes to infinity of

$$\mathrm{Cov}\big(f(Y_{z_1},\dots,Y_{z_j}),g(Y_{z_{j+1}},\dots,Y_{z_\ell})\big)$$

for f and g in an appropriate class of measurable functions and $0<z_1<\cdots<z_j\leqslant z_j+r\leqslant z_{j+1}<\cdots<z_\ell$. The following proposition means that $(S_{[s,t[})_{0\leqslant s<t}$ is exponentially ρ-mixing.

Proposition 2.6 (Mixing property)**.** *Let us consider an OU with parameter $\theta=(\beta,\mu,l)$. For any $s,r\geqslant 0$, for any function $f:\mathscr{C}^0([0,s],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $g:\mathscr{C}^0([s+r,+\infty],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ such that f, g are square-integrable with respect to the law of S, and for any $0\leqslant u\leqslant s\leqslant s+r\leqslant v$, we have*

$$\left|\mathrm{Cov}\left[f\left(\left(S_{[0,u[}\right)_{u\leqslant s}\right),g\left(\left(S_{[s+r,v[}\right)_{v\geqslant s+r}\right)\right]\right|\leqslant \mathrm{e}^{-l\beta r}\sqrt{\mathrm{Var}\left[f\left(\left(S_{[0,u[}\right)_{u\leqslant s}\right)\right]\mathrm{Var}\left[g\left(\left(S_{[s+r,v[}\right)_{v\geqslant s+r}\right)\right]}.$$

Proof. We can easily adapt the proof of Theorem 2.1 in [GM16] in the one-dimensional case of the OU process satisfying the equation

$$\mathrm{d}X_t=l\beta(\mu-X_t)\mathrm{d}t+\sqrt{\beta}\mathrm{d}B_t,\quad X_0\sim\mathcal{N}\left(\mu,\frac{1}{2l}\right).$$

Then, keeping the notation from [GM16], one may take $\varphi=f\circ\sup$ and $\phi=g\circ\sup$ which are square-integrable with respect to the law of X by hypothesis. ■

2.3.3 Consistency of the estimation

Following the idea of the proof of Theorem II.5.1 in [ABC92], we may prove the consistency of our estimation of the parameter θ_0 provided that the s_j, $j=1,\dots,N_q$ are chosen such that the function

$$\Psi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & [0,1]^{N_q}\\ \theta & \longmapsto & \big(F^*(s_j,\theta,h)\big)_{j=1,\dots,N_q}\end{array}$$

is injective and that the parameter θ belong to a compact subset of $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 2.7. *Consider an OU process with parameters $\theta_0=(\beta_0,\mu_0,l_0)$. Assume that the parameters θ_0 belong to Θ a compact subset of $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. For any $n\in\mathbb{N}^*$, let $\widehat{\theta}_n=\left(\widehat{\beta}_n,\widehat{\mu}_n,\widehat{l}_n\right)$ be given by (2.1). Then, any a.s. limit point θ^* of $(\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfies $\Psi(\theta^*)=\Psi(\theta_0)$.*

Proof. We adapt the lines of the proof of Theorem II.5.1 in [ABC92] and use the ergodic theorem for mixing sequences (see [Bil65] e.g.).

We denote

$$\widehat{\theta}_n = \text{argmin}_{\theta\in\Theta} Q_n(\theta).$$

Since Θ is a compact set, the sequence $\widehat{\theta}_n$ has limit points. Let θ^* be any limit point of $\widehat{\theta}_n$. Since no confusion can be made, and in order to simplify notations, we use $F^*(\cdot,\cdot)$ instead of $F^*(\cdot,\cdot,h)$ for this proof. For $j = 1,\dots N_q$, let $\varepsilon_n(s_j) = F^*(s_j,\theta_0) - F_n(s_j)$ we write

$$Q_n(\theta) = \sum_{j=1}^{N_q} \varepsilon_n(s_j)^2 + \sum_{j=1}^{N_q} (F^*(s_j,\theta_0) - F^*(s_j,\theta))^2 - 2\sum_{j=1}^{N_q} \varepsilon_n(s_j)(F^*(s_j,\theta_0) - F^*(s_j,\theta)). \tag{2.2}$$

The ergodic theorem for mixing sequences implies that $\varepsilon_n(s_j)$ goes to 0 a.e. as n goes to infinity for $j = 1,\dots,N_q$. Now,

$$Q_n(\widehat{\theta}_n) \leqslant Q_n(\theta_0).$$

Let n_k be a subsequence such that $\widehat{\theta}_{n_k}$ goes to θ^*, using (2.2), we have

$$Q_{n_k}(\widehat{\theta}_{n_k}) \longrightarrow \sum_{j=1}^{N_q} (F^*(s_j,\theta_0) - F^*(s_j,\theta^*))^2 \text{ a.e.}$$

and $Q_n(\theta_0) \longrightarrow 0$ a.e. We deduce that

$$F^*(s_j,\theta_0) - F^*(s_j,\theta^*) = 0,\ j = 1,\dots,N_q$$

which gives the announced result. ■

Remark 2.8. *Of course, if the application Ψ is injective, then Proposition 2.7 implies that $\theta^* = \theta_0$ and thus $\widehat{\theta}_n$ goes to θ_0 a.s. as n goes to infinity. From some numerical tests, it seems that the injectivity is satisfied.*

2.4 Numerical Applications

In this section, we want to estimate the parameters, first on some simulated data, and then on real ones. First of all, we need to implement the cdf of the supremum of the OU process X with 3 parameters.

We want to make an estimation on real data with daily suprema observations. This is why without any precision, h will be equal to 1 for numerical applications in the rest of the paper.

2.4.1 Cdf Numerical Computation

We describe here the used method for the numerical computation. The process r is the unique solution of the following SDE ([DB08])

$$\mathrm{d}r_s = \left(-\frac{r_s}{u-s} + \frac{a-x}{(u-s)\tanh\left(\frac{r_s(a-x)}{u-s}\right)} \right) \mathrm{d}s + \mathrm{d}B_s, \quad 0 < s < u, \quad r_0 = 0.$$

Since the process starts from 0 here, the Euler scheme cannot be applied for this SDE. Recall that the process $(r_s)_{s\leqslant u}$ with $r_0 = 0$ and $r_u = a - x$ and the process $(\tilde{r}_s)_{s\leqslant u}$ defined by $\tilde{r}_s = r_{u-s}$ with $\tilde{r}_0 = a - x$ and $\tilde{r}_u = 0$ have same distributions (Exercise XI.3.7 of [RY13]). Therehence, we can use the Euler scheme on the switched Bessel bridge $(\tilde{r}_s)_{s\leqslant u}$ which verifies the SDE ([RY13])

$$\mathrm{d}\tilde{r}_s = \left(-\frac{\tilde{r}_s}{u-s} + \frac{1}{\tilde{r}_s} \right) \mathrm{d}s + \mathrm{d}B_s, \quad 0 < s < u, \quad \tilde{r}_0 = a - x.$$

Finally, the integrals are computed by considering the corresponding Riemann sum and the expectation by a Monte-Carlo method with $M = 10000$ simulations.

The code is written in C++ and the evaluation of the function is very long. Consequently, we had to make a parallel code. Yet, the function "rand" in C++ is not thread safe. Thus, we propose to use the Mersenne Twister generator for the simulation of the random numbers. With the parallelisation, the time for one evaluation of the function Q_n to be minimized has been divided approximately by 5 but is still long (around 52 secs for $N_q = 4$, $\theta = (47.5, 22, 0.02)$, with a 40 cores machine). The duration is not a problem since the optimisation needs to be done once and for all.

2.4.2 Bounding parameters

The problem (2.1) is solved by an algorithm which performs a Nelder-Mead method. More precisely, we use `optim` procedure on the software R. Initial values for the parameters to be optimized over are required. To set those initial values, we propose to bound each parameter. For each of them, we give here a lower and an upper bound.

As well as we observe the maxima, suppose we also have the minima : $I_{[t_{i-1},t_i[}$ (still for $(t_i)_{i\geqslant 0}$ a partition of $[0,T]$ of constant step $h \geqslant 0$). Then, the available quantities for bounding the parameters are the minima mean, denoted $m_{\min}$; the maxima mean, denoted $m_{\max}$; the smallest observed temperature, denoted $\mathrm{rec}_{\min}$ and the largest one, denoted $\mathrm{rec}_{\max}$.

Let us recall the OU process is assumed to be stationary, then we have, for all $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu_0 \qquad \mathrm{Var}[X_t] = \frac{1}{2l_0}$$

The expectation gives us natural bounds for the parameter μ_0 :

$$m_{\min} \leqslant \mu_0 \leqslant m_{\max}.$$

Moreover, we have $l = \dfrac{1}{2\mathrm{Var}[X_t]}$. As for all i, $\left|X_{t_i} - \bar{X}\right| \leqslant \max\left(|\mathrm{rec}_{\min} - m_{\max}|\,;|\mathrm{rec}_{\max} - m_{\min}|\right)$, one may say that it is natural to upper bound the variance by

$$\mathrm{Var}[X_t] \leqslant \left(\max\left(|\mathrm{rec}_{\min} - m_{\max}|\,;|\mathrm{rec}_{\max} - m_{\min}|\right)\right)^2.$$

It then gives us a lower-bound $l_{\min}$ for l_0.

For the upper-bound, we use Theorem 2.7 of [LS01]. For all $x > 0$, we have

$$p_x := \mathbb{P}\left(S_{[0,1[} - \mathbb{E}\left[S_{[0,1[}\right] \geqslant x\right) \leqslant \exp\left(-l_0 x^2\right).$$

Hence

$$l_0 \leqslant l_{\max} = \inf_{x>0}\left[\frac{-\ln(p_x)}{x^2}\right].$$

It remains to find the domain of β_0. First of all, $\beta_0 > 0$.

Since $\beta_0 = \dfrac{\langle X\rangle_T}{T}$, a classical estimator of β_0 (see [LBM84]) is $\hat{\beta}_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2$.

Then,

$$\beta_0 \leqslant \beta_{\max} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n-1}\max\left[\left(S_{[t_i,t_{i+1}[} - I_{[t_{i-1},t_i[}\right)^2, \left(I_{[t_i,t_{i+1}[} - S_{[t_{i-1},t_i[}\right)^2\right].$$

Finally, $\widehat{\theta}_n = \mathrm{argmin}_{\theta\in C} Q_n(\theta)$ where $C = \left[0, \beta_{\max}\right] \times [m_{\min}, m_{\max}] \times [l_{\min}, l_{\max}] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2.4.3 Parameters estimation on simulated data

We are going to test our method on simulated data. To choose realistic parameters, we use some temperatures data. The mean temperature leads us to take $\mu_0 = 22$. Using the difference between the maximal (respectively minimal) temperature and the mean temperature, we take $\sqrt{\dfrac{1}{2l_0}} = 5$. The hourly correlation allows us to set $l_0\beta_0 = 0.95$ (see e.g. [Gri68] and [BSZ02]). Then, $\theta_0 = (47.5, 22, 0.02)$.

We made several tests to make a compromise between the algorithm complexity and the precision of the estimation (with RMSE) which lead us to take $N_q = 4$ here. Then, we take s_1, s_2, s_3, s_4 the empirical quantiles on the sample for $0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 respectively so that there are uniformly distributed on the interval $[0,1]$. The s_j values are settled and fixed for the whole estimation procedure.

50 samples are simulated over $T = n = 1000$ days for each, with an Euler Scheme (time scale

$dt = 10^{-3}$ days), with $X_0 \sim \mathcal{N}(22,25)$. The algorithm is launched on R twice on those 50 samples, once with the truncated samples over 100 days and one with the whole samples. The parameters found minimizing Q_{100} and Q_{1000} are presented in the following boxplots :

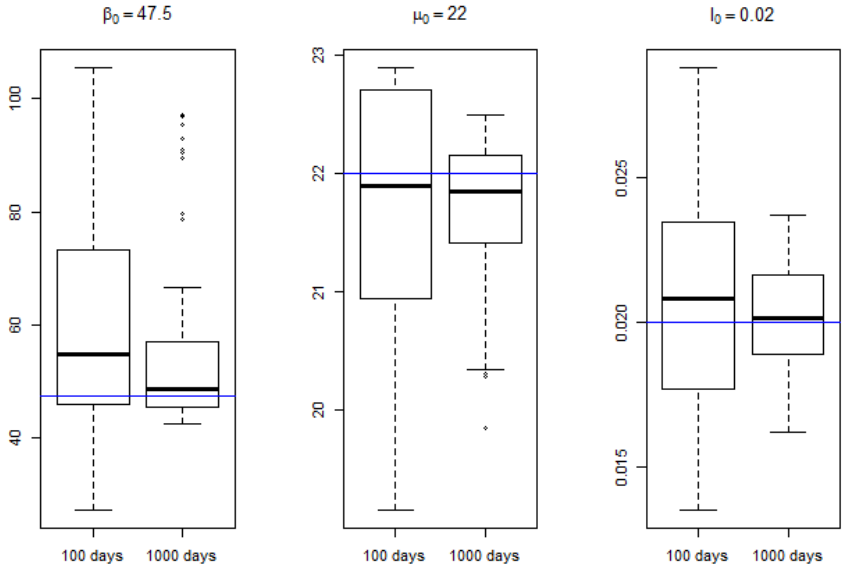

FIGURE 2.1 – Boxplots of the estimated parameters, the real value is indicated by the blue line.

As we expected, the estimations are better on a larger sample. The relative RMSE for β_0, μ_0 and l_0 are respectively equal 0.4955, 0.04759 and 0.2194 for the small samples (100 days) and 0.4205, 0.03453 and 0.08928 for the larger samples (1000 days). The median parameters are satisfying. However, the parameters β_0 and μ_0 seem biased. It appears that β_0 tends to be overestimated and on the contrary μ_0 underestimated. Moreover, we observe a big variation in the estimators of β_0. It is confirmed by the relative RMSE (see above). Better results are obtained if β_0 is fixed and performing a 2D-estimation, as in [MI08]. Indeed, the relatives RMSE for μ_0 and l_0 are then respectively equal to 0.0107 and 0.0929. It is consistent with the results in [MBS95] where β_0 is assumed to be known.

2.4.4 Real data

2.4.4.1 Parameters estimation

In [Ta02], daily temperature dataset in Paris through the ECA&D project is provided (Data and metadata available at http://www.ecad.eu). This dataset is one of the longest in temperature measurement since it begins in 1900 but it records only maximum, minimum and mean daily temperature. In our application, we study daily summer temperature. In that way, we select maxi-

mal and minimal temperatures from 15th of june to the 14th of august (61 days) each year between 1950 and 1984 included, representing 35 years of records and 2135 days. These years are selected in order to avoid climate change influence so we can consider the dataset as maximum observations of a stationary process (see [PAB+14]). This is our train sample. We will keep the years after 1985 for the test sample.

When we apply the estimation procedure presented in Section 2.2, we find $\widehat{\theta_0} = (34.35, 19.04, 0.02633)$. In order to assess the quality of this estimation, we propose to compare some theoretical quantities with empirical ones. That is done in the next section.

2.4.4.2 Estimation validation

To verify the estimation, we propose two models validation indicators : : comparison of quantiles and prediction. The first validation indicator is just to check the quantile-quantile matching over our train sample. The second one is a validation using prediction and then does not use the train sample.

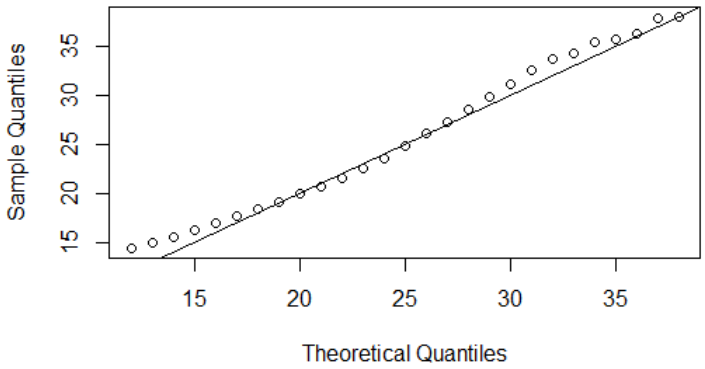

FIGURE 2.2 – Quantile-Quantile plot

The first thing to check is the match of quantiles. To this aim, we draw a quantile-quantile plot (see Figure 2.2). The plotted points fall near the line $y = x$ which indicates that the quantiles of the theoretical and data distributions agree.

We also want to assess the estimation quality by a prediction method. The estimation ends on the 14/08/1984. We take the mean temperature of the 14/06/1985 as an initial point to simulate processes (time scale $\mathrm{d}t = 10^{-3}$ days) on 10 days with the estimated parameters. Then, we make a confidence interval by Monte Carlo simulations (1000 simulations) for the maxima over each of those days and compare it with the real values (between 15/06/1985 and 24/06/1985, in the test

sample).

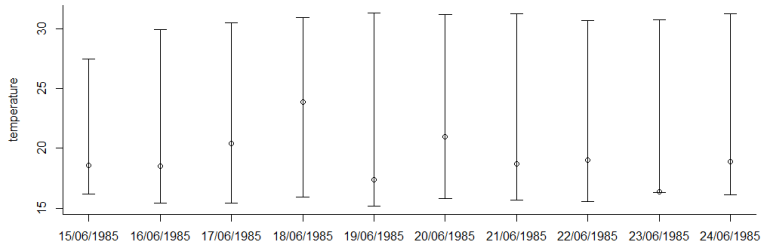

FIGURE 2.3 – Confidence limits at 95% for the maxima between 15/06/1985 and 24/06/1985

We observe that the real values (the dots) are all in the confidence interval which confirms the pertinence of our model. We also made this test with 30 days and the results were also very good.

2.4.5 Risk measures

2.4.5.1 Definitions

Let us recall the goal of our study. We want to estimate some risk measures related to heat waves. Let us note that one may estimate any risk measure of his choice. Indeed, once the minimisation is performed, we can use a Monte-Carlo method simulating independent processes with estimated parameters.

There is two classical definition for a heat wave. The first one (see [LPL$^+$04]) is a sequence of consecutive days (Δ days) for which the maximum daily temperature is larger than a high-level threshold ($a_{\max}$) and the minimum daily temperature is greater than a low level one ($a_{\min}$). Those temperatures thresholds ($a_{\max}$, $a_{\min}$) depend on the geographical zone. The second definition (see [Gri68]) is a sequence of consecutive days (Δ days) for which the minimum daily temperature is greater than a level (a).

As we have daily observations, to simplify the expression, we take $t_i = i \in [\![0, n]\!]$ and $S_{[0,1[}$ is then the supremum on the first day for example.

We define the two random variables

$$m^S_{[i,i+\delta[} = \min\left(S_{[i,i+1[}, \ldots, S_{[i+\delta-1,i+\delta[}\right)$$

and

$$m^I_{[i,i+\delta[} = \min\left(I_{[i,i+1[}, \ldots, I_{[i+\delta-1,i+\delta[}\right)$$

for $\delta \in [\![1, n-i]\!]$.

Then, we can express the probability of heat wave (for the first definition) :

$$\mathbb{P}\left(\exists i \in [\![0, n-\Delta]\!],\ m^S_{[i,i+\Delta[} \geqslant a_{\max}, m^I_{[i,i+\Delta[} \geqslant a_{\min}\right).$$

Another interesting measure is the duration of an heat wave. Let us note, when there exists

$$\tau_{\text{in}} = \min\{i \in [\![0, n-\Delta]\!],\ m^S_{[i,i+\Delta[} \geqslant a_{\max}, m^I_{[i,i+\Delta[} \geqslant a_{\min}\}$$

and

$$\tau_{\text{out}} = \tau_{\text{in}} + \max\{\delta \geqslant \Delta,\ m^S_{[i,i+\delta[} \geqslant a_{\max}, m^I_{[i,i+\delta[} \geqslant a_{\min}\}.$$

Then, the mean duration of an heat wave is

$$\mathbb{E}\left[\tau_{\text{out}} - \tau_{\text{in}} \mid\ m^S_{[\tau_{\text{in}},\tau_{\text{out}}[} \geqslant a_{\max}, m^I_{[\tau_{\text{in}},\tau_{\text{out}}[} \geqslant a_{\min}\right].$$

Using the second definition, we can also measure the severity of a heat wave with the area over the threshold for the first Δ days. Let i_0 be the first moment of a heat wave. This area is :

$$E = \mathbb{E}\left[\int_{i_0}^{i_0+\Delta} (X_s - a)\mathrm{d}s \mid\ m^I_{[i_0,i_0+\Delta[} \geqslant a\right].$$

As the process is assumed to be stationary, this quantity does not depend on i_0.

2.4.5.2 Simulated data

Since our goal is to estimate risk measures, we would like to see how they are impacted by the estimation of the parameters. We propose here to look at the last one, E, which uses the process itself.

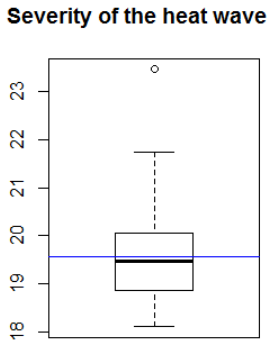

FIGURE 2.4 – Boxplot of the risk measure E for the different estimated parameters. The level of the blue line (19.57) indicates the value for the real parameter θ_0

Figure 2.4 shows the boxplot of the risk measure obtained by Monte-Carlo simulation (7×10^6

simulations) for the estimated parameters found in Section 2.4.3 with $\Delta = 3$ and $a = 26.67$ (see [Gri68]). The relative RMSE for E is 0.05291 which is satisfying.

2.4.5.3 Real data

We use the markers of Météo France for Paris (see [LPL$^+$04]), we take $\Delta = 3$, $a_{\min} = 21°C$ and $a_{\max} = 31°C$. As we want to estimate the measures for a summer, we take $n = 61$ days. Those measures are calculated with the estimated parameters on the real data, namely $\widehat{\theta_0} = (34.35, 19.04, 0.02633)$.

For the probability of heat wave, the Monte-Carlo method is performed with the simulation of 10^8 years of 61 days and we obtain a probability of 2.57×10^{-2} for a summer. There were 2 heat waves between 1985 to 2011 then a proportion of 7.41×10^{-2}. This highlights the deviation of the temperatures in the last decades, due to climate change ([PAB$^+$14]).

With 10^6 simulations for the Monte-Carlo, we obtain a mean duration for an heat wave of 3.2 days. The 2 heat waves had lasted respectively 3 and 10 days.

2.5 Conclusion and future research directions

In this paper, a new method to estimate the parameters of an OU process is proposed. Indeed, the proposed method includes a least square estimation based on the suprema observations. To this aim, the cdf of the suprema of an OU is given and theoretical results, including consistency of model parameter estimation, are established.

The numerical applications on real and simulated data prove the goodness of the estimation and its relevance. Risk measures such as the probability of heat wave or the duration of one have been studied and compared with the reality. The proposed model is also able to predict temperatures for a few days.

Some directions for further investigations are summarized as follows. For example, in continuity with this work, obtaining explicit expressions of risk measures may be interesting in the model. To this aim, one may know the joint law of the supremum and the process. Moreover, another interesting estimation for the parameters of the process might be done using Maximum Simulated Likelihood Estimation (see [JL11]).

2.6 Appendix

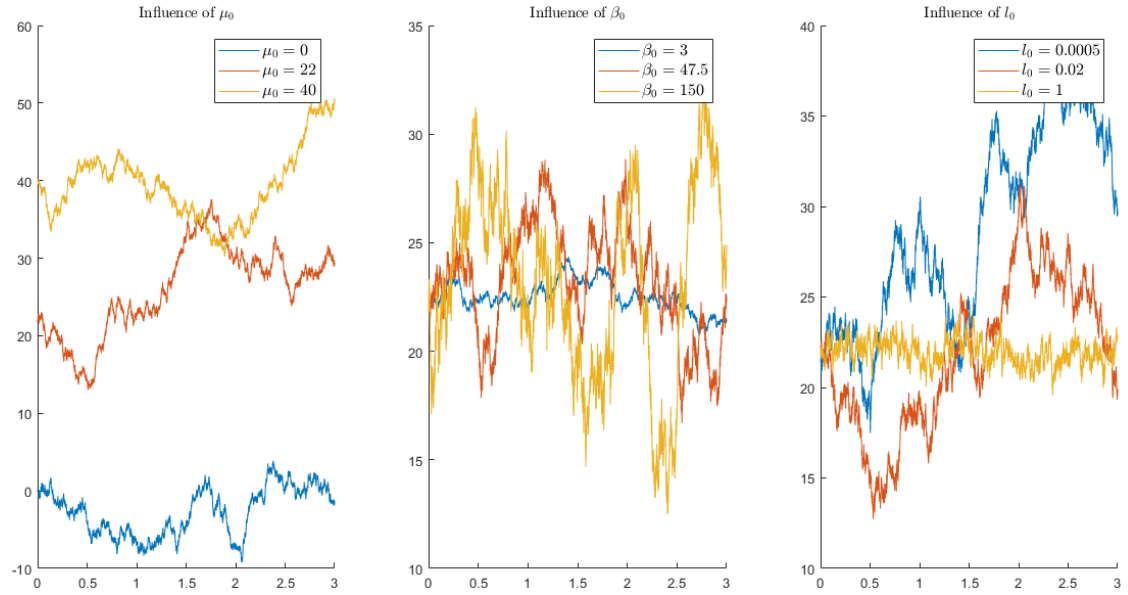

FIGURE 2.5 – Different trajectories of Ornstein-Uhlenbeck processes for different parameters. When not precised, the other parameters are $\mu_0 = 22$, $l_0 = 0.02$ and $\beta_0 = 47.5$. The time scale is $\mathrm{d}t = 10^{-4}$ days. For each trajectories, $X_0 = \mu_0$.

2.7 Existence des moments du supremum

Dans un souci de clarté, on suppose dans cette section que $l = 1$, $\mu = 0$ et $\beta = 1$. Il est aisé de revenir au cas général avec (1.2).

Il est assez fréquent de regarder l'existence des moments d'un processus (cf. [Küh17], [LM02]). Cela peut servir à obtenir dans un deuxième temps l'expression des moments. Ceux-ci permettent de calculer la fonction génératrice des moments pour procéder à une estimation des paramètres si celle ci s'exprime plus simplement que la fonction de répartition par exemple.

On montre l'existence des moments de tout ordre du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck conditionné par sa valeur initiale $X_0 = x \in \mathbb{R}$, noté $\left(S^x_{[0,t[}\right)_{t>0}$. Pour cela, on exprime sa densité grâce au Lemme 2.3.

Proposition 2.9. *Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. La variable $S^x_{[0,t[}$ admet des moments de tout ordre.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction de répartition F^c du supremum $S^x_{[0,t[}$ du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geqslant 0}$ conditionné à valoir x en 0 est donnée dans le Lemme 2.3. On a ici $\theta = (1,0,1)$. On pose $\theta^x = (1,x,1)$. Pour tout $(a,x) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $F^c(a,\theta,t,0) = F^c(a+x,\theta^x,t,x)$. Ainsi, il suffit de montrer le résultat dans le cas $x = 0$.

La fonction de répartition F^c du supremum $S^0_{[0,t[}$ du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geqslant 0}$ conditionné à valoir 0 en 0 lorsque $\theta = (1,0,1)$ est donnée par :

- si $a > 0$,

$$F^c(a,\theta,t,0) = 1 - \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[a^2-u]-\frac{a^2}{2u}} \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^u (r_s-a)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}u, \tag{2.3}$$

  où r est un pont de Bessel de dimension 3 sur l'intervalle $[0,u]$ entre 0 et a.

- si $a \leqslant 0$,

$$F^c(a,\theta,t,0) = 0. \tag{2.4}$$

On déduit des expressions (2.3) et (2.4) la densité du supremum $S^0_{[0,t[}$ du processus pour $t > 0$. Celle-ci est donnée, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par

$$f_{S^0_{[0,t[}}(a) = -\mathbb{1}_{a\geqslant 0} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2-u)-\frac{a^2}{2u}}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^u (r_s-a)^2 \mathrm{d}s}\left[1 - \frac{a^2}{u}(u^2+u+1) + a\int_0^u r_s \mathrm{d}s\right]\right] \mathrm{d}u.$$

On regarde l'existence du moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a

$$\mathbb{E}\left[\left(S^0_{[0,t[}\right)^n\right] = \int_0^\infty a^n f_{S^0_{[0,t[}}(a)\mathrm{d}a = I_1 + I_2 + I_3,$$

où, par théorème de Fubini car les quantités sont positives,

$$\begin{aligned}
I_1 &:= -\int_0^t \int_0^\infty \frac{a^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2-u)-\frac{a^2}{2u}}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^u (r_s-a)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}a\mathrm{d}u, \\
I_2 &:= \int_0^t \int_0^\infty \frac{a^{n+2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2-u)-\frac{a^2}{2u}}(u^2+u+1)}{\sqrt{2\pi u^5}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^u (r_s-a)^2 \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}a\mathrm{d}u, \\
I_3 &:= -\int_0^t \int_0^\infty \frac{a^{n+1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a^2-u)-\frac{a^2}{2u}}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^u (r_s-a)^2 \mathrm{d}s}\int_0^u r_s \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}a\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Nous devons montrer que ces 3 quantités sont finies. Pour cela, on commence par les borner en majorant grossièrement les intégrandes.

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-3/2} \int_0^\infty a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{u+1}{2u}\right)} \mathrm{d}a\mathrm{d}u, \\
|I_2| &\leqslant \frac{(t^2+t+1)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t u^{-5/2} \int_0^\infty a^{n+2} \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{u+1}{2u}\right)} \mathrm{d}a\mathrm{d}u, \\
|I_3| &\leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{a^{n+1} \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\int_0^u r_s \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}a\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On effectue ensuite pour les deux premières quantités le changement de variable dans la deuxième intégrale $b = \sqrt{\frac{u+1}{2u}}a$ et on pose, pour $m \in \mathbb{N}$, $A_m := \int_0^\infty b^m \mathrm{e}^{-b^2} \mathrm{d}b < \infty$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} A_n \int_0^t u^{-3/2} \left(\frac{2u}{u+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{n+1}{2}} A_n \int_0^t u^{\frac{n-2}{2}} \mathrm{d}u < \infty, \\
|I_2| &\leqslant \frac{(t^2+t+1)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} A_{n+2} \int_0^t u^{-5/2} \left(\frac{2u}{u+1}\right)^{\frac{n+3}{2}} \mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{(t^2+t+1)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{n+3}{2}} A_{n+2} \int_0^t u^{\frac{n-2}{2}} \mathrm{d}u < \infty.
\end{aligned}
$$

Il reste donc à traiter le cas de I_3. La variable d'intégration a est cachée dans $\mathbb{E}\left[\int_0^u r_s \mathrm{d}s\right]$ car le pont de Bessel arrive en a et rend donc cette intégrale moins évidente à appréhender que les précédentes.

Rappelons que nous avons

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{a^{n+1}\mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}\left[\int_0^u r_s \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}a\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^u \frac{a^{n+1}\mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{\sqrt{2\pi u^3}} \mathbb{E}[r_s] \mathrm{d}s\mathrm{d}a\mathrm{d}u,
\end{aligned}
$$

par le théorème de Fubini.

Soit $s \in [0,u]$. La Proposition 1.13 implique

$$
\mathbb{E}[r_s] \leqslant \frac{\sqrt{2}(u-s)}{a\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{\sqrt{u-s}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{a^2}{u-s}\right]\right),
$$

où nous avons majoré les fonctions erreur et exponentielle par 1 et le terme $a\sqrt{\dfrac{s}{2u(u-s)}}$ par $\dfrac{a}{\sqrt{2}\sqrt{u-s}}$.
Ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^u \frac{a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{u^{\frac{3}{2}}} (u-s) \left(\frac{a}{\sqrt{u-s}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{a^2}{u-s}\right]\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}a\mathrm{d}u \\
&\leqslant k_1 J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3,
\end{aligned}
$$

où k_1, k_2, k_3 des constantes positives et

$$
\begin{aligned}
J_1 &:= \int_0^t \int_0^\infty \int_0^u \frac{(u-s)a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{\sqrt{u-s}} \mathrm{d}s\mathrm{d}a\mathrm{d}u \\
&\leqslant t \int_0^\infty a^{n+1} \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)} \mathrm{d}a < \infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 :&= \int_0^t \int_0^\infty \int_0^u \frac{(u-s)a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{u^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}s\mathrm{d}a\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^t \sqrt{u} \int_0^\infty a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)} \mathrm{d}a\mathrm{d}u < \infty \\
J_3 :&= \int_0^t \int_0^\infty \int_0^u \frac{(u-s)a^n \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)}}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{a^2}{u-s} \mathrm{d}s\mathrm{d}a\mathrm{d}u \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} \int_0^\infty a^{n+2} \mathrm{e}^{-a^2\left(\frac{t+1}{2t}\right)} \mathrm{d}a\mathrm{d}u < \infty.
\end{aligned}
$$

Finalement, on a également $|I_3| < \infty$.

On peut donc conclure que le moment d'ordre n existe. ■

2.8 Perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié le cas où les paramètres sont constants, en considérant une courte période de temps. Cependant, le comportement des températures n'est évidemment pas le même en hiver et en été par exemple. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme il a été exprimé ici ne comprend pas cette tendance saisonnière. Une première amélioration de l'étude serait de considérer le processus où les coefficients sont des fonctions du temps constantes par morceaux. Une deuxième étape serait d'arriver à ajouter des coefficients dépendant du temps et donc tenant compte de la saisonnalité en considérant par exemple des coefficients sinusoïdaux (voir [ADS02]).

Nous avons fait ici le choix de ne considérer que des observations du supremum pour faire l'estimation. Comme nous avons également pu obtenir la fonction de répartition de l'infimum du processus, nous pourrions également envisager une estimation se basant sur les infima ou une estimation considérant les infima et les suprema pour le problème de minimisation (2.1). Il faudrait réfléchir au nombre de quantiles à utiliser pour chacune de ces estimations. Dans l'application numérique, nous avons pris 4 quantiles uniformément répartis sur $[0,1]$. La pertinence de cette répartition serait à détailler plus amplement en faisant d'autres analyses.

Nous avons vu dans la Proposition 2.7 que, sous certaines propriétés, l'estimateur était consistant. Nous avons essayé d'obtenir l'asymptotique normalité de cet estimateur, notamment en utilisant le théorème central limite pour des processus ρ-mélangeants mais sans succès. Cette étude serait donc à poursuivre. En effet, des informations sur la vitesse de convergence de notre estimateur seraient souhaitables. Un autre parti a été de minimiser la fonction des moindres carrés en minimisant la distance absolue entre N_q points des fonctions de répartition. Nous pourrions envisager d'autres distances pour minimiser l'écart entre les fonctions de répartition théorique et empi-

rique. Une distance possible serait celle de Wasserstein définie par exemple dans [BFK19]. Grâce à cette distance, il serait peut être possible de quantifier la convergence du nouvel estimateur.
Une autre méthode pour estimer les paramètres serait d'utiliser l'estimateur du maximum de vraisemblance simulée ([JL11]). Il s'agit d'un algorithme d'optimisation des paramètres sur une fonction de vraisemblance simulée. A chaque étape, cette fonction calcule la vraisemblance sur un échantillon simulé à partir de la densité estimée. Cette méthode est utile lorsque la vraie densité est difficilement calculable ou inaccessible ce qui est le cas ici. Cependant, elle est très coûteuse en temps de calcul.

Chapitre 3

Loi jointe d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un des buts de notre étude est d'évaluer des mesures de risque. Cela est possible par des méthodes de Monte-Carlo, ce qui a été fait précédemment, mais également grâce à des expressions explicites de ces mesures. Pour obtenir ces expressions, il peut être utile d'avoir la loi jointe du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum.

Dans ce chapitre, l'étude est réduite au cas $\phi = 0$ et $\beta = 1$ dans la Définition 1.1. On rappelle qu'il est possible de revenir au cas général via (1.2). De plus, nous considérons le cas où X_0 suit une loi à support dans $]-\infty, m]$, $m \in \mathbb{R}$.

Nous regardons tout d'abord la fonction de répartition / densité jointe du point final du processus et de son supremum : $\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} X_u \leqslant m\right)$. Nous montrons que cette probabilité admet une densité p et que cette densité est solution de l'équation de Fokker-Planck. Nous obtenons ensuite une expression explicite de cette densité faisant intervenir les fonctions spéciales paraboliques cylindriques. Ces trois points font l'objet du théorème principal du chapitre et sont démontrés en Section 3.3. La preuve repose sur une décomposition sur une base hilbertienne de $L^2(]-\infty, m])$, créée via une méthode spectrale.

Dans la suite, des vérifications numériques sont données et une comparaison avec la littérature existante pour le cas $m = 0$ est proposée.

Enfin, nous exprimons la fonction de répartition du supremum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck en lien avec les résultats de [APP05]. Similairement à ce qui a été fait dans [CP19], un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par la densité jointe du processus et de son

supremum est donné.

Dans ce chapitre, les zéros positifs de la fonction $v \mapsto D_v(-m\sqrt{2k})$ apparaissent pour $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. Dans la Section 1.3.2 du Chapitre 1, la suite de ces zéros ordonnés était notée $\left(\nu_{j,-m\sqrt{2k}}\right)_{j\geqslant 1}$. Par soucis de simplification, ils sont notés $\left(\nu_{j,m}\right)_{j\geqslant 1}$ dans ce chapitre.

Le travail présenté dans ce chapitre a été accepté avec révisions mineures dans Journal of Applied Probability.

3.1 Introduction

The main purpose of this paper is to give an expression for the joint law of the endpoint and supremum of an Ornstein-Uhlenbeck process. The problem of finding such a joint law has attracted research since the late nineteenth century (see [Som94]). For a Brownian motion, the result is well known (see for example [KS91]). More recently, in [EH14], the authors give a method which allows to find this joint density / distribution function for the minimum and endpoints for a n-dimensional drifted Brownian motion. The explicit solution in the bi-dimensional case ($n = 2$) is given in [HKR98]. For $n > 2$, the method in [EH14] works in only some particular cases. [CPN18] and [Ngo16] study the case of a Lévy process, sum of a Brownian motion with drift and a compound Poisson process. [CP19] are interested in the joint law of a n-dimensional diffusion process and the running supremum of the first component. They find a PDE satisfied by the joint density (but an Ornstein-Uhlenbeck process does not verify their assumption of bounded drift). [DK06] study the law for overshoots and undershoots when the process is a general Lévy process.

Let $(X_t)_{t\geqslant 0}$ be an Ornstein-Uhlenbeck process driven by a Brownian motion. Many results on the first passage time of an Ornstein-Uhlenbeck process have been obtained. For instance, in [APP05], [Lin04] and [LK18] , the density function of the first hitting time to a fixed level by an Ornstein-Uhlenbeck process is given. Since hitting times and suprema are related, the cumulative distribution function of the supremum is obtained. Regarding the pair (process, its running maximum), [BS15] gives the probability $\mathbb{P}(X_\tau \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant \tau} X_u \geqslant m)$ where τ is an exponential random variable independent of $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

In our paper, we study the joint density / distribution function $\mathbb{P}(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \leqslant m)$ where $m, x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant m$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. In [BS15], this last formula is given only in the case $m = 0$. The joint density / distribution function admits a density p which is solution of a Fokker-Planck equation. To solve this equation, a spectrum method is used and makes parabolic cylinder functions appear (directly linked with the Hermite functions). Even if the joint law is an infinite expansion of special functions, it is easy to evaluate it numerically and it is faster than a Monte Carlo method. We then

check that our result is consistent with those in [BS15] and [APP05].

The paper is organized as follows. In the next section, the expression of the joint density / distribution of the endpoint and supremum of an Ornstein-Uhlenbeck process is presented. Some numerical simulations are done to compare our results with a Monte Carlo method. Section 3 is devoted to the proof of this main theorem. Finally, Section 4 is concerned with the law of the supremum and its joint density with the process. Auxiliary results about Hermite functions and parabolic cylinder functions are provided in Appendix.

3.2 Results

3.2.1 Context and notations

Let $(B_t)_{t\geqslant 0}$ be a standard Brownian motion defined on a probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. We consider an Ornstein-Uhlenbeck (OU in the following) process $(X_t)_{t\geqslant 0}$ solution of the following SDE :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= -kX_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \qquad t \geqslant 0 \\ X_0 &\sim \mu, \end{cases}$$

where $k \in \mathbb{R}_+^*$ and μ is a probability measure. We suppose that X_0 and $(B_t)_{t\geqslant 0}$ are independent. Let $\mathbb{P}_{x_0}$ be the law of the process $(X_t)_{t\geqslant 0}$ when $\mu \sim \delta_{x_0}$.

3.2.2 Main theorem

Our aim is to compute the joint law of the process and its supremum. However, as it is not easy to compute the joint density, we are first interested in the joint density / distribution

$$\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \leqslant m\right) \text{ where } t \in \mathbb{R}_+^*, (m,x) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant m.$$

The following theorem gives an expression for the joint density / distribution.

Theorem 3.1. *We assume that μ is a probability measure on $]-\infty, m]$, $m \in \mathbb{R}$ and set p_0 such that $\mu(\mathrm{d}x) = p_0(x)\mathrm{d}x$.*

(i) For all $m \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}_+$, the probability $\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \leqslant m\right)$ admits a density p with support in $]-\infty, m]$:

$$\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \leqslant m\right) = p(m,x,t)\mathrm{d}x.$$

(ii) The density p solves the following Fokker-Planck equation :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \begin{cases} \partial_t p(m,x,t) &= k\partial_x(xp(m,x,t)) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} p(m,x,t), \quad (x,t) \in]-\infty, m] \times \mathbb{R}^*_+, \\ p(m,m,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R}^*_+, \\ p(m,x,0) &= p_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in]-\infty, m]. \end{cases} \tag{3.1}$$

(iii) For $(m,x) \in \{(z,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geqslant y\}$, $t \in \mathbb{R}^*_+$, the density p can be expressed as :

$$p(m,x,t) = -\sqrt{2k}\mathrm{e}^{-\frac{kx^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\nu_{n,m}t} \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2k}\right)\int_{-\infty}^{m} \mathrm{e}^{\frac{kz^2}{2}} p_0(z) D_{\nu_{n,m}}\left(-z\sqrt{2k}\right)\mathrm{d}z}{\nu_{n,m} D_{\nu_{n,m}-1}\left(-m\sqrt{2k}\right)\partial_\nu D_{\nu_{n,m}}\left(-m\sqrt{2k}\right)}, \tag{3.2}$$

where D_ν is the parabolic cylinder function and $(\nu_{j,m})_{j\geqslant 1}$ is the ordered sequence of positive zeros of $\nu \mapsto D_\nu\left(-m\sqrt{2k}\right)$ (details are given in Appendix).

The proof of the theorem is postponed to Section 3.3. We start to study some particular cases and consequences.

Remark 3.2. *For $(m,x) \in \{(z,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geqslant y\}$, $t \in \mathbb{R}^*_+$, when $\mu \sim \delta_{x_0}$ and $x_0 \leqslant m$, we have*

$$p(m,x,t) = -\sqrt{2k}\mathrm{e}^{\frac{k(x_0^2-x^2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\nu_{n,m}t} \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x_0\sqrt{2k}\right) D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2k}\right)}{\nu_{n,m} D_{\nu_{n,m}-1}\left(-m\sqrt{2k}\right)\partial_\nu D_{\nu_{n,m}}\left(-m\sqrt{2k}\right)}. \tag{3.3}$$

The expression of the joint density / distribution can be easily extended to an OU process depending on 3 parameters.

Corollary 3.3. *Suppose that the OU process $(X_t)_{t\geqslant 0}$ is solution of the following SDE :*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= \left(\phi - kX_t\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta}\mathrm{d}B_t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 &\sim \mu, \end{cases}$$

where $\beta, k \in \mathbb{R}^*_+$ and $\phi \in \mathbb{R}$.
For $(m,x) \in \{(z,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geqslant y\}$, $t \in \mathbb{R}^*_+$, the density p can be expressed as :

$$p(m,x,t) = -\sqrt{\frac{2k}{\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{k\left(x-\frac{\phi}{k}\right)^2}{2\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{m-\frac{\phi}{k}} \mathrm{e}^{\frac{kz^2}{2\beta}} p_0(z) D_{\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}}}\left(-z\sqrt{\frac{2k}{\beta}}\right)\mathrm{d}z\right) \mathrm{e}^{-k\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}}t} \times \frac{D_{\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}}}\left(-\left(x-\frac{\phi}{k}\right)\sqrt{2\frac{k}{\beta}}\right)}{\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}} D_{\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}}-1}\left(-\left(m-\frac{\phi}{k}\right)\sqrt{\frac{2k}{\beta}}\right)\partial_\nu D_{\nu_{n,m-\frac{\phi}{k}}}\left(-\left(m-\frac{\phi}{k}\right)\sqrt{\frac{2k}{\beta}}\right)},$$

where D_ν is the parabolic cylinder function and $\left(\nu_{j,m-\frac{\phi}{k}}\right)_{j\geqslant 1}$ is the ordered sequence of positive zeros of $\nu \mapsto D_\nu\left(-\left(m-\frac{\phi}{k}\right)\sqrt{\frac{2k}{\beta}}\right)$.

Proof. For $t \in \mathbb{R}_+$, let set $U_t := X_{\frac{t}{\beta}} - \frac{\phi}{k}$ and $W_t := \sqrt{\beta} B_{\frac{t}{\beta}}$ (which is thus a standard Brownian motion). Then the dynamic of $(U_t)_{t\geqslant 0}$ is

$$\begin{cases} \mathrm{d}U_t &= -\frac{k}{\beta} U_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad t \geqslant 0 \\ U_0 &= X_0 - \frac{\phi}{k} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

We conclude with Theorem 3.1. ■

3.2.3 Numerical results

Even though Formula (3.2) is an infinite sum of special functions, it is easy to evaluate it numerically.

The function $x \mapsto p(m,x,t)$ is evaluated with expression (3.2) (or (3.3)) and is compared with a Monte Carlo method using 5×10^5 simulations and $\Delta_t = 10^{-4}$. Figures 3.1 and 3.2 plot $\mathbb{P}\left(X_t \in \mathrm{d}x, \sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u \leqslant m\right)$ for different parameters and initial laws with $t = 1$.

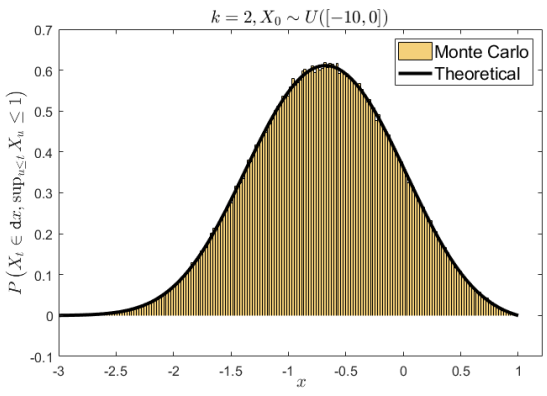

FIGURE 3.1 – Comparison of expression (3.2) and a Monte Carlo method when $m = 1$, $X_0 \sim \mathcal{U}([-10,0])$ and $k = 2$.

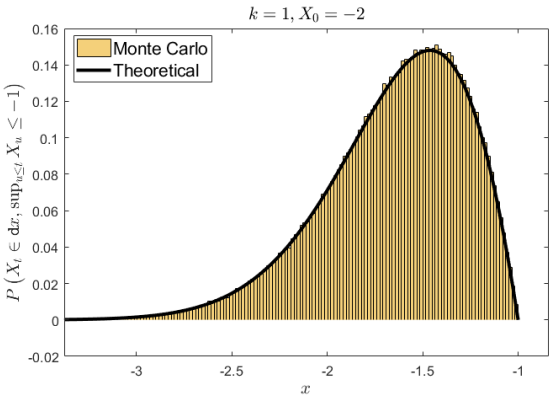

FIGURE 3.2 – Comparison of expression (3.3) and a Monte Carlo method when $m = -1$, $X_0 = -2$ and $k = 1$.

Last but not least, our formula is faster than a Monte Carlo method. Indeed, with a simple core, obtaining the whole function $x \mapsto p(m,x,t)$ lasts around 23 sec whereas a Monte Carlo method with 10^5 simulations lasts around 18 sec, 2.10^5 simulations 34 sec and 10^6 simulations 176 sec.

3.2.4 Particular case $m = 0$

If $m = 0$, the expression of the joint density / distribution can be simplified. Indeed, the zeros $\left(\nu_{n,0}\right)_{n\geqslant 0}$ of $\nu \mapsto D_\nu(0)$ are the positive odd integers (see Appendix for more details). In this particular case, Formula (3.3) can be simplified.

Proposition 3.4. *We assume $\mu \sim \delta_{x_0}$ and $x_0 \in \mathbb{R}_-$. For all $x \in \mathbb{R}_-$ and $t \in \mathbb{R}_+^*$, we have*

$$\mathbb{P}_{x_0}\left(X_t \in \mathrm{d}x,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant 0\right) = \sqrt{\frac{k}{\pi(1-\mathrm{e}^{-2kt})}}\left[\mathrm{e}^{-k\frac{\left(x-x_0\mathrm{e}^{-kt}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2kt}}} - \mathrm{e}^{-k\frac{\left(x+x_0\mathrm{e}^{-kt}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2kt}}}\right]\mathrm{d}x.$$

Proof. Without loss of generality, we take $k = 1$ in the proof. We use the results given in Appendix. Let $x \in \mathbb{R}_-$ and $t \in \mathbb{R}_+^*$.

With (3.27) and Proposition 3.13, we have :

$$p(0,x,t) = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{x_0^2-x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2n+1)t}\frac{D_{2n+1}\left(-x_0\sqrt{2}\right)D_{2n+1}\left(-x\sqrt{2}\right)}{(2n+1)!}.$$

We use (3.26) and Fubini theorem (everything is clearly integrable),

$$p(0,x,t) = -\frac{2\mathrm{e}^{x_0^2}}{\pi\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}\mathrm{e}^{-(2n+1)t}}{(2n+1)!}\int_0^\infty\int_0^\infty (uv)^{2n+1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}vx_0}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}vx_0}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ux}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ux}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

We can invert integral and sum :

$$\begin{aligned}
p(0,x,t) &= -\frac{2\mathrm{e}^{x_0^2}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}vx_0}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}vx_0}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ux}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ux}\right)\mathrm{sh}(2uv\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{x_0^2}}{\pi\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-v^2+2\mathrm{i}vx_0}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-u^2+2\mathrm{i}ux+2uv\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right. \\
&\qquad \left. -\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-v^2+2\mathrm{i}vx_0}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-u^2+2\mathrm{i}ux-2uv\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right].
\end{aligned}$$

Finally, formula (4.11.6) in [LS72] gives :

$$\begin{aligned}
p(0,x,t) &= -\frac{\mathrm{e}^{x_0^2}}{\pi}\left[\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-v^2+2\mathrm{i}vx_0}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}x+v\mathrm{e}^{-t}\right)^2}\mathrm{d}v - \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-v^2+2\mathrm{i}vx_0}\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}x-v\mathrm{e}^{-t}\right)^2}\mathrm{d}v\right] \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{x_0^2-x^2}}{\sqrt{\pi(1-\mathrm{e}^{-2t})}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\left(x_0+x\mathrm{e}^{-t}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2t}}} - \mathrm{e}^{-\frac{\left(x_0-x\mathrm{e}^{-t}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2t}}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\mathrm{e}^{-2t})}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\left(x-x_0\mathrm{e}^{-t}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2t}}} - \mathrm{e}^{-\frac{\left(x+x_0\mathrm{e}^{-t}\right)^2}{1-\mathrm{e}^{-2t}}}\right].
\end{aligned}$$

■

Remark 3.5. *This is formula (1.1.8) of Chapter 7 in [BS15]. Note that there is a typography in the book.*

3.3 Proof of the main theorem

This section is devoted to the proof of Theorem 3.1. The proof is divided into two parts. First, we prove the existence of the density and the fact that it is solution of the Fokker Planck Equation. The proof of the theorem relies on the second part namely the resolution of this Fokker Planck equation. Without loss of generality, we take here $k = 1$.

Existence of the density and the Fokker-Planck equation

(i) The existence of the density is given by Lemma 2.1 in [DIRT13].

(ii) It is just Proposition 5.4.3.1 in [JYC09] with $h : t \mapsto m$.

Resolution of the Fokker-Planck equation

(iii) Now, we want to solve the Fokker-Planck equation. We use a spectrum method inspired by [BD08], [Gar04] and [RH89]. In that purpose, we introduce two operators. Let $m \in \mathbb{R}$.

Let us note

$$\mathscr{D}(\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}) := \left\{ f \in H^1(]-\infty, m]) \mid \left[x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(xf(x)\right) + \frac{1}{2}f''(x) \right] \in L^2(]-\infty, m]), f(m) = 0 \right\}.$$

The Fokker Planck operator $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ is defined by :

$$\mathbf{L}_{\mathrm{FP}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}) & \longrightarrow & L^2(]-\infty, m]) \\ f & \longmapsto & \left[\mathbf{L}_{\mathrm{FP}} f : x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(xf(x)\right) + \frac{1}{2}f''(x) \right]. \end{array} \right.$$

Let $x \leqslant m$ and $t \in \mathbb{R}_+^*$. The goal is to find a basis $\left(\tilde{\varphi}_n\right)_{n \geqslant 1}$ of eigenvectors of $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ in order to write

$$p(m, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\tilde{\varphi}_n(x).$$

The Fokker-Planck operator $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ is not hermitian. Then, to build this basis, we introduce the following operator $\mathbf{O}$, related to $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ and defined by :

$$\mathbf{O} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}) & \longrightarrow & L^2(]-\infty, m]) \\ f & \longmapsto & \left[\mathbf{O} f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 f(x) + \frac{1}{2}f''(x) \right]. \end{array} \right.$$

As **O** is hermitian, we can use classical results on hermitian operators decomposition.

Moreover, we have a correspondence for the spectrum. The function ϕ is an eigenfunction of **O** with eigenvalue μ if and only if $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\phi$ is an eigenfunction of $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ with eigenvalue $\mu + \frac{1}{2}$.

Hilbertian basis of $L^2(]-\infty, m])$

We prove that any function of $L^2(]-\infty, m])$ can be decomposed on an hilbertian basis of eigenvectors of **O**. Since it is not easy to prove this directly with the operator **O**, it is classic (see proof of Theorem VIII.20 in [Bré83] for instance) to introduce the operator **T** defined as :

$$\mathbf{T}: \left| \begin{array}{ccc} L^2(]-\infty, m]) & \longrightarrow & L^2(]-\infty, m]) \\ g & \longmapsto & f_g, \end{array} \right.$$

where f_g is solution of

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2} f_g'' - \frac{1}{2} x^2 f_g & = & g \\ f_g(m) & = & 0 \\ f_g & \in & H^1(]-\infty, m]). \end{array} \right. \tag{3.4}$$

To prove that **T** is well defined, we need to introduce the following space V and we give some properties on it. Let us note

$$V := \left\{ v \in L^2(]-\infty, m]) \;\middle|\; v' \in L^2(]-\infty, m]), v(m) = 0, x \mapsto xv \in L^2(]-\infty, m]) \right\}$$

endowed with the scalar product $\langle u, v \rangle_V = \langle u', v' \rangle_{L^2(]-\infty,m])} + \langle xu, xv \rangle_{L^2(]-\infty,m])}$. The space V is a weighted Sobolev space. With its scalar product, it is then an Hilbert space on $\mathbb{R}$.

The following lemma generalizes in our context a classical inequality for Sobolev spaces.

Lemma 3.6. *For all $m \in \mathbb{R}$, if $f \in V$, there exists a constant $C \in \mathbb{R}_+$ such that*

$$\|f\|_{L^2(]-\infty,m])} \leqslant C \|f\|_V . \tag{3.5}$$

Proof. If $m \geqslant -1$, we have

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(]-\infty,m])} &\leqslant \int_{-\infty}^{-1} f^2 x^2 \times \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\leqslant 1} \mathrm{d}x + \underbrace{\tilde{C} \|f'\|^2_{L^2([-1,m])}}_{\text{Poincaré's inequality because } f(m)=0} \\ &\leqslant C \|f\|^2_V . \end{aligned}$$

If $m < -1$, it is easy to adapt the previous proof . ■

We prove that the operator **T** is well defined thanks to the Lax-Milgram theorem. For a fixed function $g \in L^2(]-\infty, m])$, the weak formulation of (3.4) is, for $\varphi \in H_0^1(]-\infty, m])$,

$$\begin{cases} a(f,\varphi) &= l(\varphi) \\ f(m) &= 0 \\ f &\in H^1(]-\infty, m]) \end{cases} \tag{3.6}$$

with $a(f,\varphi) = -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{m} f'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{m} x^2 f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right)$ and $l(\varphi) = \int_{-\infty}^{m} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.
We check the hypothesis of the Lax-Milgram theorem. The application a is clearly bilinear and coercive. It is continuous thanks to the Cauchy-Schwarz inequality. Finally, (3.5) gives that l is a linear continuous form on V.

The Lax-Milgram theorem allows to conclude that there exists an unique solution $f \in V$ to $a(f,\varphi) = l(\varphi)$ and then the operator **T** is well defined.

Proposition 3.7. *The space $L^2(]-\infty, m])$ admits an hilbertian basis of eigenvectors of* **O** *for the scalar product associated to the L^2-norm.*

Proof. First, we prove that $L^2(]-\infty, m])$ admits an hilbertian basis of eigenvectors of **T**. We prove that the operator **T** is self-adjoint and compact so that we have an hilbertian basis.

The operator T is self-adjoint. It is just an integration by parts.

The operator T is compact. To prove that the operator **T** is linear, we use the uniqueness of the solution implied by Lax-Milgram theorem. Then, $\mathbf{T}(g) = f_g \in V$ and with (3.5)

$$\left\|\mathbf{T}(g)\right\|_{L^2(]-\infty,m])} = \left\|f_g\right\|_{L^2(]-\infty,m])} \leqslant C\left\|f_g\right\|_V.$$

However, multiplying (3.4) by f_g and integrating, we have

$$a(f_g, f_g) = l(f_g) \Rightarrow \frac{1}{2}\left\|f_g\right\|_V^2 \leqslant C\left\|f_g\right\|_V \Rightarrow \left\|f_g\right\|_V \leqslant 2C.$$

Then, the operator **T** is continuous. The compacity of it follows from the compact injection of V in $L^2(]-\infty, m])$ (this can be proved using Corollary IV.26 in [Bré83]).

Conclusion **T** is a self-adjoint compact operator. Then, by Theorem VI.11 in [Bré83], as

$L^2(]-\infty,m])$ is a separable space, $L^2(]-\infty,m])$ admits an hilbertian basis of eigenvectors of $\mathbf{T}$ for the scalar product of $L^2(]-\infty,m])$.

However, the eigenvectors of $\mathbf{T}$ are the eigenvectors of $\mathbf{O}$ with inverse eigenvalues and we can conclude the proof. ■

Eigenvectors of O

Let ϕ be an eigenvector of $\mathbf{O}$ with eigenvalue μ. For $x \in]-\infty,m]$, we have

$$\frac{1}{2}\phi''(x) - \frac{1}{2}x^2\phi(x) = \mu\phi(x).$$

We then apply the variable change $z = x\sqrt{2}$ and $h : z \mapsto \phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \phi(x)$. The equation for h is

$$\forall z \in \left]-\infty, m\sqrt{2}\right],\ h''(z) + \left(-\frac{1}{4}z^2 - \mu\right)h(z) = 0.$$

As indicated in Appendix (see Section 3.5.1), the solutions for this equation can be written as $h = \alpha h_1 + \beta h_2$ where $h_1 = D_{-\mu-\frac{1}{2}}$ and $h_2 = D_{-\mu-\frac{1}{2}}(-\cdot)$ and D is the parabolic cylinder function defined in (3.24). Unlike h_1, h_2 is integrable on $-\infty$.

Then, we take $\phi : x \mapsto D_{-\mu-\frac{1}{2}}\left(-x\sqrt{2}\right)$.

As $\phi \in \mathscr{D}(\mathbf{L}_{\mathrm{FP}})$, we must have $\phi(m) = 0$, i.e.

$$D_{-\mu-\frac{1}{2}}\left(-m\sqrt{2}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Eigenvalues of O

Thanks to the previous paragraph, we have $\mathrm{Sp}(\mathbf{O}) = \left\{-\nu - \frac{1}{2} \mid D_\nu(-m\sqrt{2}) = 0\right\}$. We prove that the spectrum of $\mathbf{O}$ is included in $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

Let f be a function in $L^2(]-\infty,m])$, not null. We recall that

$$\langle \mathbf{O}f, f\rangle_{L^2(]-\infty,m])} = -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{m} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{m} f'^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

Let us study $\mathrm{Sp}(\mathbf{O})$ for the different values of m.

• **if** $m \leqslant -1$ **:** We easily obtain $\langle \mathbf{O}f, f\rangle_{L^2(]-\infty,m])} < -\frac{1}{2}\langle f, f\rangle$ and so $\mathrm{Sp}(\mathbf{O}) \subset \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

• **if** $m \in]-1, 0]$ **:** We have

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{m} f^2(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-1} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{m} f^2(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-1} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{m}\left(\int_x^m f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{C.S.}}{\leqslant} \int_{-\infty}^{-1} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x + \left\|f'\right\|^2_{L^2(]-\infty,m])}\int_{-1}^{m}(m-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-1} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x + \left\|f'\right\|^2_{L^2(]-\infty,m])}\frac{(m+1)^2}{2},\end{aligned}$$

$$\langle f, f\rangle < -2\langle \mathbf{O}f, f\rangle_{L^2(]-\infty,m])}.$$

Then, if $m \in]-1, 0]$, $\langle \mathbf{O}f, f\rangle_{L^2(]-\infty,m])} < -\frac{1}{2}\langle f, f\rangle$ and so $\mathrm{Sp}(\mathbf{O}) \subset \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

• **if** $m > 0$ **:** Let μ be an eigenvalue of $\mathbf{O}$. Using a proof by contradiction, let us assume that $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$. Then, by (3.7) and formula (3.17) in Appendix, as $H_{-\mu-\frac{1}{2}}(-m) = 0$, we would have

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{i+\mu+\frac{1}{2}}{2}\right)}{i!}(2m)^i = 0.$$

This is absurd because all the terms are non-negative. Then, we have necessarily $\mu < -\frac{1}{2}$ when $m > 0$.

Finally, for all $m \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}(\mathbf{O}) \subset \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ and hence $\left\{\nu \mid D_\nu(-m\sqrt{2}) = 0\right\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Expression of p

We have found the eigenvectors of $\mathbf{O}$ namely the functions $x \mapsto D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2}\right)$ with $\left(\nu_{n,m}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ the ordered positive roots of $\nu \mapsto D_\nu\left(-m\sqrt{2}\right)$.

With a normalisation, we finally have an hilbertian basis $(\tilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of $L^2(]-\infty, m])$ with the scalar product of $L^2(]-\infty, m])$. It is defined by

$$\tilde{e}_n : x \mapsto \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{m} D^2_{\nu_{n,m}}\left(-y\sqrt{2}\right)\mathrm{d}y}}.$$

Now, it remains to go back to $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ to find the form of the density p.

Let us note $\tilde{\varphi}_n(x) := \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\tilde{e}_n(x)$ for all $x \in]-\infty, m]$. We recall that $\tilde{\varphi}_n$ is an eigenfunction of $\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}$ with eigenvalue $-\nu_{n,m}$.

It is easy to prove that $\left(\tilde{\varphi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is an hilbertian basis of $L^2(]-\infty,m],\mathrm{e}^{\cdot^2/2})$ with the scalar product

$$\langle f,g\rangle_{L^2(]-\infty,m],\mathrm{e}^{\cdot^2/2})}=\int_{-\infty}^{m}\mathrm{e}^{x^2}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

We look for a solution p in $L^2(]-\infty,m],\mathrm{e}^{\cdot^2/2})$. We can then decompose $x\mapsto p(m,x,t)$ on the basis of $\left(\tilde{\varphi}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$p(m,x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\tilde{\varphi}_n(x).$$

However,

$$p(m,x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(0)\tilde{\varphi}_n(x).$$

Let $n\in\mathbb{N}^*$. Then,

$$\begin{aligned}c_n(0)&=\langle p(m,\cdot,0),\tilde{\varphi}_n\rangle_{L^2(]-\infty,m],\mathrm{e}^{\cdot^2/2})}\\&=\int_{-\infty}^{m}\mathrm{e}^{z^2}p(m,z,0)\tilde{\varphi}_n(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{m}D_{\nu_{n,m}}^2\left(-y\sqrt{2}\right)\mathrm{d}y}}\int_{-\infty}^{m}\mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}p(m,z,0)D_{\nu_{n,m}}\left(-z\sqrt{2}\right)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

It remains to determinate $c_n(t)$ for all $t\in\mathbb{R}_+^*$.

On one hand,

$$\partial_t p(m,x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n'(t)\tilde{\varphi}_n(x).$$

On the other hand,

$$\partial_t p(m,x,t)=\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}p(m,x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\mathbf{L}_{\mathrm{FP}}\tilde{\varphi}_n(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\nu_{n,m}\tilde{\varphi}_n(x).$$

By uniqueness of the decomposition, we have

$$c_n'(t)=-\nu_{n,m}c_n(t).$$

So

$$c_n(t)=c_n(0)\mathrm{e}^{-\nu_{n,m}t}.$$

Finally,

$$\begin{aligned} p(m,x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{m} D_{\nu_{n,m}}^2\left(-y\sqrt{2}\right)\mathrm{d}y}} \int_{-\infty}^{m} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} p(m,z,0) D_{\nu_{n,m}}\left(-z\sqrt{2}\right)\mathrm{d}z \right) \\ &\qquad \times \mathrm{e}^{-\nu_{n,m}t} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{m} D_{\nu_{n,m}}^2\left(-y\sqrt{2}\right)\mathrm{d}y}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{m} \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}} p(m,z,0) D_{\nu_{n,m}}\left(-z\sqrt{2}\right)\mathrm{d}z \right) \mathrm{e}^{-\nu_{n,m}t} \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x\sqrt{2}\right)}{\int_{-\infty}^{m} D_{\nu_{n,m}}^2\left(-y\sqrt{2}\right)\mathrm{d}y}. \end{aligned}$$

We can conclude with Proposition 3.14.

3.4 Law of the supremum and its joint density with the process

Natural extensions of this work is to check or extend the known results. First, we express the cumulative distribution function of the supremum. Then, we find a PDE for the joint density of the process and its supremum.

3.4.1 Cumulative distribution function of the supremum

From Equation (3.3), it is easy to obtain the law of the supremum. The result is consistent with the law obtained using the expression in [APP05] and the link between the supremum of a process $(X_t)_{t\geqslant 0}$ and the hitting time.

Proposition 3.8 (Supremum law)**.** *For $m \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}_+^*$, the law of the supremum when $\mu \sim \delta_{x_0}$ is given by*

$$\mathbb{P}_{x_0}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s < m \right) = -\mathrm{e}^{\frac{k(x_0^2-m^2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\nu_{n,m}t} \frac{D_{\nu_{n,m}}\left(-x_0\sqrt{2k}\right)}{\nu_{n,m}\partial_\nu D_{\nu_{n,m}}\left(-m\sqrt{2k}\right)}, \tag{3.8}$$

where $(\nu_{n,m})_{n\in\mathbb{N}^*}$ is defined as in Theorem 3.1.

Proof. An integration and Proposition 3.13 give the result. ■

Remark 3.9. *Using the hitting time density named $p_{x_0\to m}^{(k)}$ in [APP05] (Eq. 31) and the link between the hitting time $T_m := \inf\{t \geqslant 0 \mid\mid X_t = m\}$ and the supremum, we can also find the expression* (3.8)*. Indeed,*

$$\mathbb{P}_{x_0}\left(\sup_{s\leqslant t} X_s < m \right) = \mathbb{P}_{x_0}(T_m > t) = \int_t^{+\infty} p_{x_0\to m}^{(k)}(s)\mathrm{d}s.$$

3.4.2 Results on the joint density

With the expression of the joint density / distribution, we can find a system of PDEs satisfied by the joint density $\partial_m p$ of the process and its supremum. We take here $k = 1$.

Proposition 3.10. *In the deterministic case where $\mu \sim \delta_{x_0}$, the density p satisfies the following PDEs :* $\forall m \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} -\partial_t \partial_m p(m,x,t) - \partial_x(x\partial_m p(m,x,t)) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}\partial_m p(m,x,t) = 0, \qquad x < m, & (3.9) \\ -m\partial_m p(m,m,t) - \frac{1}{2}\partial^2_{m^2} p(m,m,t) - \partial_x \partial_m p(m,m,t) = 0, & (3.10) \\ -m\partial_m p(m,m,t) + \partial_t \partial_m \mathbb{P}_{x_0}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant m\right) - \frac{1}{2}\partial_x \partial_m p(m,m,t) = 0. & (3.11) \end{cases}$$

Proof. For this proof, it is more convenient to use the Hermite function H instead of the parabolic cylinder function D.

With the regularity of H (see Appendix) and the regularity of $m \mapsto \nu_{n,m}$ (see Proposition 3.15), we can prove that the function p is regular with respect to x, m and t. Moreover, the order of the further partial derivatives does not matter.

Hence, from (3.1), we have the equation (3.9).

For the other equations, let us write the partial derivatives of p.

Let $m \in \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{R}_+^*$. We denote

$$h_n(m,t) := \frac{\mathrm{e}^{-\nu_{n,m}t} H_{\nu_{n,m}}(-x_0)}{\nu_{n,m} H_{\nu_{n,m}-1}(-m)\partial_\nu H_{\nu_{n,m}}(-m)}.$$

Then, we take $x < m$ and we have :

$$p(m,x,t) = -\mathrm{e}^{m^2-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t) H_{\nu_{n,m}}(-x)$$

and

$$\mathbb{P}_{x_0}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s \leqslant m\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n(m,t)}{\nu_{n,m}} \partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m).$$

We denote in the following $\nu'_{n,m} = \partial_m \nu_{n,m}$ (see Proposition 3.15). We have

$$\partial_m p(m,x,t) = -\mathrm{e}^{m^2-x^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t)\left(2mH_{\nu_{n,m}}(-x) + \partial_m\left(H_{\nu_{n,m}}(-x)\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_m h_n(m,t) H_{\nu_{n,m}}(-x)\right]. \quad (3.12)$$

Then, with Proposition 3.17, it follows that

$$\partial_m p(m,m,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t)\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m) \quad (3.13)$$

and

$$\partial_m \partial_x p(m,m,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t)\left(4m\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m) + \nu'_{n,m}\left(\partial_\nu \partial_x H\right)_{\nu_{n,m}}(-m)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_m h_n(m,t)\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m). \tag{3.14}$$

With (3.20), we obtain

$$\partial_m \partial_t \left(\mathbb{P}\left(\sup X_s \leqslant m\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t)\left[2m\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m) + \nu'_{n,m}\left(\partial_\nu \partial_x H\right)_{\nu_{n,m}}(-m)\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \partial_m h_n(m,t)\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m). \tag{3.15}$$

Equation (3.12) and Proposition 3.18 imply that

$$\partial^2_{m^2} p(m,m,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(m,t)\left[-6m\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m) - 2\nu'_{n,m}\left(\partial_\nu \partial_x H\right)_{\nu_{n,m}}(-m)\right] - 2\sum_{n=1}^{\infty} \partial_m h_n(m,t)\partial_x H_{\nu_{n,m}}(-m). \tag{3.16}$$

Combining (3.13), (3.14) and (3.16) (resp. (3.13), (3.14) and (3.15)), we obtain (3.10) (resp. (3.11)).

■

Remark 3.11. *It is Theorem 3.1 in [CP19]. This theorem is given for processes written as* $\mathrm{d}X_t = B(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t$*, where* B *is a bounded function of class* $\mathscr{C}^1$ *and* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *a Brownian motion. Even if we are not under this hypothesis (for an OU process,* $B(x) = -kx$*), the theorem is verified.*

3.5 Appendix

3.5.1 Definitions and well-known properties on Hermite functions and parabolic cylinder functions

We recall here the definitions and some known results about parabolic cylinder functions and Hermite functions. These results can be found in Chapters 4 and 10 of [LS72] and in Section 7 of [APP05].

Hermite functions For $\nu \in \mathbb{R}$, the Hermite function H_ν is defined, for all $x \in \mathbb{R}$ as

$$H_\nu(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \Gamma\left(\frac{i-\nu}{2}\right) (2x)^i. \tag{3.17}$$

The Hermite function satisfies the following relations :

$$\partial_x H_\nu(x) = 2\nu H_{\nu-1}(x), \tag{3.18}$$

$$H_{\nu+1}(x) - 2xH_\nu(x) + 2\nu H_{\nu-1}(x) = 0. \tag{3.19}$$

Combining (3.18) and (3.19), we have :

$$\partial^2_{x^2} H_\nu(x) = -2\nu H_\nu(x) + 2x\partial_x H_\nu(x). \tag{3.20}$$

When $\mathrm{Re}(\nu) > -1$,

$$H_\nu(x) = \frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (2t)^\nu \cos\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right) \mathrm{d}t. \tag{3.21}$$

In particular, we have :

$$H_\nu(0) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}. \tag{3.22}$$

Then, for $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0. \tag{3.23}$$

Remark 3.12 (Zeros of the function $\nu \mapsto H_\nu(0)$)**.** *The zeros $(\nu_{n,0})_n$ of the function $\nu \mapsto H_\nu(0)$ are known. They are the positive odd integers. Indeed,* (3.22) *indicates that $H_\nu(0) \neq 0$ when $\nu \notin \mathbb{N}$. Therefore, the zeros are among $\mathbb{N}$. Equation* (3.23) *allows to conclude.*

Parabolic cylinder function The equation

$$y''(x) + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \nu\right) y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.24}$$

admits two real solutions. The parabolic cylinder function D_ν is defined as the solution of (3.24) with the property that $y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\nu \mathrm{e}^{-x^2/4}$. The other independent solution of (3.24) is $x \mapsto D_\nu(-x)$.

We have the following relation

$$\partial_x D_\nu(x) = \nu D_{\nu-1}(x) - \frac{x}{2} D_\nu(x). \tag{3.25}$$

When $\mathrm{Re}(\nu) > -1$,

$$D_\nu(x\sqrt{2}) = \frac{2^{\frac{\nu}{2}+1}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^\nu \cos\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right) \mathrm{d}t. \tag{3.26}$$

We have, for $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^0 D_n^2\left(-x\sqrt{2}\right) \mathrm{d}x = n! \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{3.27}$$

The parabolic cylinder function and the Hermite function are linked by the following relation :

$$D_\nu(x\sqrt{2}) = 2^{-\frac{\nu}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} H_\nu(x). \tag{3.28}$$

3.5.2 Useful results

In this part, we note ν_α a zero of $\nu \mapsto D_\nu(-\alpha\sqrt{2})$. This is equivalent to a zero of $\nu \mapsto H_\nu(-\alpha)$.

Thanks to (3.21), we have, for $x \in \mathbb{R}$ and when $\mathrm{Re}(\nu) > -1$,

$$\partial_x H_\nu(x) = 2xH_\nu(x) - \frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (2t)^{\nu+1} \sin\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right) \mathrm{d}t, \tag{3.29}$$

$$\partial_\nu H_\nu(x) = \frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (2t)^\nu \left[\ln(2t)\cos\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right)\right] \mathrm{d}t, \tag{3.30}$$

$$\partial_x\partial_\nu H_\nu(x) = 2x\partial_\nu H_\nu(x) - \frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} (2t)^{\nu+1} \left[\ln(2t)\sin\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(2xt - \frac{\nu\pi}{2}\right)\right] \mathrm{d}t. \tag{3.31}$$

Thanks to (3.24), we can prove by direct induction that $x \mapsto D_\nu(x)$ is a $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ function. Then, so is $x \mapsto H_\nu(x)$.

With the previous expressions, we can prove that all the derivatives with respect to ν exist and are continuous if $\nu \in \mathbb{R}_+$. Then, $\nu \mapsto H_\nu(x)$ is a $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ function. The cross partial derivatives with respect to ν and x also exist and are continuous. Then, we have the symmetry of second derivatives (Schwarz's theorem).

We give here several results useful in the proofs.

Proposition 3.13. *For all $\nu, \alpha \in \mathbb{R}$, we have :*

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} D_\nu(-x\sqrt{2})\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2}} D_{\nu-1}(-\alpha\sqrt{2}).$$

Proof. We prove the relation on H. Let us take $\nu, \alpha \in \mathbb{R}$. We have with (3.19) et (3.18) :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2} H_\nu(-x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2} \left(2xH_{\nu-1}(-x) + 2(\nu-1)H_{\nu-2}(-x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \partial_x \left(\mathrm{e}^{-x^2} H_{\nu-1}(-x)\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Finally,

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-x^2} H_\nu(-x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\alpha^2} H_{\nu-1}(-\alpha).$$

■

Proposition 3.14. *For all $\alpha \in \mathbb{R}$, we have*

$$\int_{-\infty}^{\alpha} D^2_{\nu_\alpha}(-x\sqrt{2})\mathrm{d}x = -\frac{\nu_\alpha}{\sqrt{2}} D_{\nu_\alpha-1}(-\alpha\sqrt{2})\partial_\nu D_{\nu_\alpha}(-\alpha\sqrt{2}).$$

Proof. We apply the method given in [Sle68].

Let set

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\nu, x) & \longmapsto & D_\nu(-x\sqrt{2}). \end{array} \right.$$

Then, thanks to (3.24), the function f is solution of the following partial differential equation. For all $\nu, x \in \mathbb{R}$,

$$\partial^2_{x^2} f(\nu, x) + \left(-x^2 + 1 + 2\nu\right) f(\nu, x) = 0.$$

We derive this equation with respect to ν and using the regularity of H :

$$\partial^2_{x^2}\partial_\nu f(\nu, x) + 2f(\nu, x) + \left(-x^2 + 1 + 2\nu\right)\partial_\nu f(\nu, x) = 0.$$

We multiply by f

$$f(\nu, x)\partial^2_{x^2}\partial_\nu f(\nu, x) + 2f^2(\nu, x) + \left(-x^2 + 1 + 2\nu\right) f(\nu, x)\partial_\nu f(\nu, x) = 0.$$

We integrate with respect to x :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\alpha} f^2(\nu,x)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\alpha} f(\nu,x)\partial^2_{x^2}\partial_\nu f(\nu,x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\alpha}\left(-x^2+1+2\nu\right) f(\nu,x)\partial_\nu f(\nu,x)\mathrm{d}x\right]\\ &= -\frac{1}{2}\left[f(\nu,\alpha)\partial_x\partial_\nu f(\nu,\alpha) - \int_{-\infty}^{\alpha}\partial_x\left\{\partial_x f(\nu,x)\partial_\nu f(\nu,x)\right\}\mathrm{d}x\right]\\ &= -\frac{1}{2}\left[f(\nu,\alpha)\partial_x\partial_\nu f(\nu,\alpha) - \partial_x f(\nu,\alpha)\partial_\nu f(\nu,\alpha)\right].\end{aligned}$$

Then, writing using the function D,

$$\int_{-\infty}^{\alpha} D^2_{\nu_\alpha}(-x\sqrt{2})\mathrm{d}x = \frac{-\sqrt{2}}{2}\partial_x D_{\nu_\alpha}(-\alpha\sqrt{2})\partial_\nu D_{\nu_\alpha}(-\alpha\sqrt{2}).$$

The conclusion follows with (3.25). ■

Proposition 3.15. *For all $\alpha\in\mathbb{R}$, there exists $g:\alpha\mapsto\nu_\alpha$, continuously differentiable on a neighbourhood of α. We note $\nu'_\alpha = g'(\alpha)$. Then*

$$\nu'_\alpha = \frac{\partial_x H_{\nu_\alpha}(-\alpha)}{\partial_\nu H_{\nu_\alpha}(-\alpha)}.$$

Proof. Let set

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (\nu,x) & \longmapsto & D_\nu(-x\sqrt{2}).\end{array}\right.$$

The function f is a continuously differentiable function. We have $f(\nu_\alpha,\alpha)=0$. We also have $\partial_\nu f(\nu_\alpha,\alpha)\neq 0$ because of Proposition 3.14 and the fact that $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} D^2_\nu(-x\sqrt{2})\mathrm{d}x\neq 0$.
Then, thanks to the implicit function theorem, there exists an open set U of $\mathbb{R}$ containing α such that there exists an unique continuously differentiable function $g:U\mapsto\mathbb{R}$ such that $g(\alpha)=\nu_\alpha$ and for all $x\in U$, $f(g(x),x)=0$.
Moreover, the partial derivative of g in U is given by

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(g(x),x)}{\partial_\nu f(g(x),x)}.$$

■

Proposition 3.16. *For all $m, x \in \mathbb{R}$, we have*

$$\partial_m(H_{\nu_m}(x)) = \mathrm{e}^{x^2-m^2}\partial_x H_{\nu_m}(-m) - \frac{4\nu'_m \mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}(2t)^{\nu_m} \sin((m+x)t) \\ \times \left[\ln(2t)\sin\left((x-m)t - \frac{\nu_m\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left((x-m)t - \frac{\nu_m\pi}{2}\right)\right] \mathrm{d}t.$$

Proof. Using Proposition 3.15 twice and (3.29) and (3.30), we have :

$$\begin{aligned}
\partial_m(H_{\nu_m}(x)) &= \nu'_m \partial_\nu H_{\nu_m}(x) \\
&= \nu'_m \partial_\nu H_{\nu_m}(x) + \mathrm{e}^{x^2-m^2}\partial_x H_{\nu_m}(-m) - \mathrm{e}^{x^2-m^2}\partial_x H_{\nu_m}(-m) \\
&= \nu'_m \partial_\nu H_{\nu_m}(x) + \mathrm{e}^{x^2-m^2}\partial_x H_{\nu_m}(-m) - \mathrm{e}^{x^2-m^2}\nu'_m(\partial_\nu H)_{\nu_m}(-m) \\
&= \mathrm{e}^{x^2-m^2}\partial_x H_{\nu_m}(-m) - \frac{4\nu'_m \mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}(2t)^{\nu_m} \sin((m+x)t) \times \\
&\quad \left[\ln(2t)\sin\left((x-m)t - \frac{\nu_m\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left((x-m)t - \frac{\nu_m\pi}{2}\right)\right] \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

■

In particular, with $x = -m$, we have the following proposition.

Proposition 3.17. *For all $m \in \mathbb{R}$, we obtain*

$$\partial_m(H_{\nu_m}(x))|_{x=-m} = \partial_x H_{\nu_m}(-m).$$

We also have the following result.

Proposition 3.18. *For all $m \in \mathbb{R}$, we have*

$$\partial^2_{m^2}(H_{\nu_m}(x))|_{x=-m} = 2\nu'_m \partial_\nu \partial_x H_{\nu_m}(-m) + 2m\partial_x H_{\nu_m}(-m).$$

Proof. It is the same kind of calculus as in the proof of Proposition 3.16. We use the formula (3.31) and the fact that

$$\partial^2_{m^2}(H_{\nu_m}(x))|_{x=-m} = -2m\partial_x H_{\nu_m}(-m) + \partial_m\left(\partial_x H_{\nu_m}(-m)\right) \\ - \frac{2\nu'_m \mathrm{e}^{m^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}(2t)^{\nu_m+1}\left[\ln(2t)\sin\left(\varsigma_{n,t}\right) - \frac{\pi}{2}\cos\left(\varsigma_{n,t}\right)\right] \mathrm{d}t,$$

where $\varsigma_{n,t} := -2mt - \dfrac{\nu_m\pi}{2}$. ■

3.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons calculé la fonction de répartition / densité jointe du processus et de son supremum. Cela nous a notamment permis d'obtenir un système d'équations différentielles vérifié par la densité jointe. Nous aurions pu ici envisager une autre méthode pour obtenir la loi jointe. En effet, comme indiqué dans la Remarque 3.11, nous avons retrouvé ici le Théorème 3.1 de [CP19]. Dans cet article, le processus considéré est un processus s'écrivant sous la forme $\mathrm{d}X_t = B(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t$, où B est une fonction bornée de classe $\mathscr{C}^1$ et $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien. Une première perspective serait par conséquent d'étendre le résultat de [CP19] à une classe de fonctions B plus générales.

Une autre extension naturelle de l'étude serait de regarder la loi jointe du supremum et de l'infimum du processus d'Ornstein-Uhlenbeck ainsi que celle du supremum, de l'infimum et du processus. Cependant, notre méthode ne fonctionnerait probablement plus car il s'agirait de trouver des zéros communs $v \mapsto D_v(-a\sqrt{2})$ et $v \mapsto D_v(-b\sqrt{2})$ pour a et b quelconques ce qui est difficile.

Chapitre 4

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant

4.1 Introduction

Les processus de diffusion à coefficients discontinus apparaissent dans plusieurs domaines. En dynamique des populations par exemple, l'article [CC99] utilise un mouvement brownien "déformé" (skew Brownian motion). Les auteurs de [LP17] proposent de modéliser le prix d'actifs boursiers par un mouvement brownien brownien oscillant avec dérive. D'autres exemples d'utilisation de tels processus dans des domaines variés sont donnés dans [Lej18] .

Dans la suite logique de notre étude, nous nous concentrons dans ce chapitre sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont les coefficients sont constants par morceaux selon le signe du processus. Nous proposons d'appeler un tel processus "oscillant" dans la lignée de ce qui a été proposé par [KW78] pour le mouvement brownien oscillant puis par [LP17] pour le mouvement brownien géométrique oscillant. Un exemple d'apparition de ce processus se trouve par exemple dans le mouvement d'une particule dans un potentiel. Ce mouvement est en effet décrit par l'équation de Langevin (cf. [Sch09, Section 8.3]). Si la friction est anisotropique, c'est-à-dire que la friction dépend de la direction du mouvement (cf. [Zmi89]), on peut par exemple envisager des coefficients de drift et de diffusion (correspondant aux coefficients d'amortissement et de poids du bruit respectivement) constants par morceaux selon le signe de la vitesse, et donc du signe du processus solution de l'équation de Langevin. Ce chapitre est une première étude de ce processus et nous ne considérons donc que le cas où le coefficient de dérive est impacté.

On considère le processus

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= -\left(k_- \mathbb{1}_{X_t \leqslant 0} + k_+ \mathbb{1}_{X_t > 0}\right) X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 &\in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard et $k_-, k_+, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
L'équation (4.1) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= -k(X_t) X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 &\in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2}$$

où, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k(x) = k_- \mathbb{1}_{x \leqslant 0} + k_+ \mathbb{1}_{x>0}. \tag{4.3}$$

Ainsi, comme les coefficients de drift et de diffusion sont des fonctions lipschitziennes, ce processus est markovien (Théorème 7.3 de [LG12]) et son semi-groupe est de Feller (Théorème 7.4 de [LG12]).
Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques propriétés du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de dynamique (4.1) dans le cas où il est stationnaire. Puis, le second paragraphe est consacré à la loi du temps d'atteinte. Pour cela, nous commençons par montrer l'existence de la densité et nous exprimons la transformée de Laplace du temps d'atteinte. Enfin, nous calculons la probabilité que le processus soit positif en un temps donné.

4.2 Quelques propriétés du processus stationnaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la densité stationnaire du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de dynamique (4.1).

Proposition 4.1. *Pour $x \in \mathbb{R}$, la densité invariante f du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est*

$$f(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-\frac{k_-}{\sigma^2}x^2} \ si\ x \leqslant 0, \\ C\mathrm{e}^{-\frac{k_+}{\sigma^2}x^2} \ si\ x > 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

avec $C = \dfrac{2\sqrt{k_- k_+}}{\sqrt{\pi}\sigma\left(\sqrt{k_+} + \sqrt{k_-}\right)}$.

Afin de démontrer la Proposition 4.1, nous introduisons les notions de fonction échelle et mesure de vitesse (Section 5.3.2 de [JYC09] ou Section 5.5 de [KS91]).

Définition 4.2. *Soit $I =]l, r[$ un intervalle, $-\infty \leqslant l < r \leqslant +\infty$. Considérons un processus d'Itô $(X_t)_{t\geqslant 0}$ solution de $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$ où b et σ sont deux fonctions réelles lipschitziennes sur I, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien et $X_0 \in I$. Nous supposons une hypothèse de non-dégénérescence c'est-à-dire que la fonction σ est strictement positive sur I et une hypothèse d'intégrabilité locale :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 \text{ telle que } \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1+\left|b(y)\right|}{\sigma^2(y)}\mathrm{d}y < \infty.$$

La fonction d'échelle (scale function) s du processus est définie (Formule (5.3.4) de [JYC09]) par

$$s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^x \mathrm{e}^{-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z}\mathrm{d}y \end{array} \right.$$

où $c \in I$.

La mesure de vitesse (speed measure) m est définie (Formule (5.3.5) de [JYC09]), pour $x \in I$, par

$$m(\mathrm{d}x) := \frac{2}{s'(x)\sigma^2(x)}\mathbb{1}_{x\in I}\mathrm{d}x.$$

Démonstration de la Proposition 4.1. Dans notre cas, la fonction échelle est (pour $c = 0$) :

$$s(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{\frac{k_-}{\sigma^2}y^2}\mathrm{d}y \text{ si } x \leqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{k_+}{\sigma^2}y^2}\mathrm{d}y \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Donc, $s'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{k_-}{\sigma^2}x^2} \text{ si } x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{\frac{k_+}{\sigma^2}x^2} \text{ si } x > 0. \end{cases}$

On peut donc obtenir la mesure de vitesse m :

$$m(\mathrm{d}x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{k_-}{\sigma^2}x^2}\mathrm{d}x \text{ si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{k_+}{\sigma^2}x^2}\mathrm{d}x \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

La mesure m est la mesure invariante du processus (exercice 5.40 de [KS91] par exemple). En la normalisant, nous trouvons donc la densité invariante f. ■

Proposition 4.3. *Lorsque X_0 a pour densité la fonction f définie par* (4.4)*, le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est*

stationnaire et on obtient, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{(k_- - k_+)\sigma}{\left(\sqrt{k_+} + \sqrt{k_-}\right)\sqrt{\pi k_- k_+}}.$$

Remarque 4.4. *Sous les mêmes conditions, et si $k_- = k_+$, le processus stationnaire est de moyenne nulle.*

Enfin, nous pouvons également exprimer la probabilité que le processus stationnaire soit positif en un temps donné.

Proposition 4.5. *Pour tout $t > 0$,*

$$\mathbb{P}_{X_0 \sim f}(X_t \geqslant 0) = \frac{\sqrt{k_-}}{\sqrt{k_+} + \sqrt{k_-}}.$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer la densité définie en (4.4) sur $[0, +\infty[$. ■

4.3 Loi du temps d'atteinte

Dans cette partie, nous nous intéressons à la loi du temps d'atteinte du processus décrit par (4.1). Dans le cas où $k_- = k_+$, la loi du temps d'atteinte a été étudiée dans [APP05]. Nous avons rappelé les résultats de cet article dans le Chapitre 1 : la transformée de Laplace du temps d'atteinte (Formule (1.9)) ainsi que sa densité (Formules (1.11) et (1.12)). Ces résultats sont utilisés par la suite pour exprimer ces mêmes quantités sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant.
Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ solution de (4.1) et $X_0 = x \in \mathbb{R}$. On définit, pour $a \in \mathbb{R}$, le temps d'atteinte

$$\bar{T}_a^{x,k_-,k_+,\sigma} := \inf\{s \geqslant 0 \mid X_s = a\}. \tag{4.5}$$

Nous commençons par montrer qu'on peut se restreindre au cas $a > 0$ pour étudier la loi du temps d'atteinte $\bar{T}_a^{x,k_-,k_+,\sigma}$.
Le processus $(Y_t)_{t\geqslant 0} := (-X_t)_{t\geqslant 0}$ est solution de

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t &= -\left(k_+ \mathbb{1}_{Y_t \leqslant 0} + k_- \mathbb{1}_{Y_t > 0}\right) Y_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t, \qquad t \geqslant 0 \\ Y_0 &= -x, \end{cases} \tag{4.6}$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0} = (-W_t)_{t\geqslant 0}$ est également un mouvement brownien standard et $Y_0 = -x$.

De plus, $\inf\{s \geqslant 0 \mid X_s = a\} = \inf\{s \geqslant 0 \mid Y_s = -a\}$ donc

$$\bar{T}_a^{x,k_-,k_+,\sigma} = \bar{T}_{-a}^{-x,k_+,k_-,\sigma}. \tag{4.7}$$

Par (4.7), nous pouvons nous restreindre au cas $a > 0$. De plus, dans la suite, nous considérons le cas $x < a$. En effet, si $x > a$ alors le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est positif sur $\{t < \bar{T}_a^{x,k_-,k_+,\sigma}\}$ par continuité : c'est le cas étudié dans [APP05].

Pour faciliter la lecture, on notera dans la suite

$$\bar{T}_a := \bar{T}_a^{x,k_-,k_+,\sigma}. \tag{4.8}$$

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons uniquement au cas $\sigma = 1$.

On note $\mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}$ la loi de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sous les conditions énoncées précédemment.

Nous commençons par montrer que la loi du temps d'atteinte admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

4.3.1 Existence de la densité du temps d'atteinte

Soit $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien et $y \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}_y$ la loi de $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ lorsque $Y_0 = y$ et $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration engendrée par ce processus. Par le théorème de Girsanov [1], on introduit

$$\forall\, t > 0,\ \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_y}{\mathrm{d}\mathbb{P}_y}\right|_{\mathscr{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t k(Y_s) Y_s \mathrm{d}Y_s - \frac{1}{2}\int_0^t (k(Y_s))^2 Y_s^2 \mathrm{d}s\right).$$

Sous $\tilde{\mathbb{P}}_y$, $W_t := Y_t + \displaystyle\int_0^t k(Y_s) Y_s \mathrm{d}s$ est un mouvement brownien et donc $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant vérifiant

$$\mathrm{d}Y_t = -k(Y_t) Y_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t.$$

Remarque 4.6. *On remarque que* $\tilde{\mathbb{P}}_x = \mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}$.

Nous utilisons ce changement de probabilité dans la preuve du lemme suivant.

Proposition 4.7. *La loi du temps d'atteinte admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On a, pour* $t > 0$,

$$\mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}\left(\bar{T}_a \in \mathrm{d}t\right) = p_{x\to a}^{(k_-,k_+)}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Le théorème est appliqué car la condition de Novikov est vérifiée. En effet, $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^t (k(Y_s))^2 Y_s^2 \mathrm{d}s}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\max(k_-,k_+)^2 \int_0^t Y_s^2 \mathrm{d}s}\right] < \infty$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de [Pau87].

On définit la fonction

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\int_0^x k(s)s\mathrm{d}s. \end{array} \right.$$

La dérivée de h est une fonction absolument continue. On peut donc appliquer la formule d'Itô (Problème 7.3 de la Section 3.7 de [KS91]).

On obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$h(X_t) = h(X_0) - \int_0^t k(X_s)X_s\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t h''(X_s)\mathrm{d}s,$$

où la fonction $h'' = -\left(k_-\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} + k_+\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\right)$ existe presque partout.

Soit f une fonction de $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ à support compact. Soit $T > 0$ tel que $\mathrm{supp}\left(f\right) \subset [0, T]$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{(k_-,k_+)}\left[f\left(\bar{T}_a\right)\right] &= \mathbb{E}_x^{(k_-,k_+)}\left[f\left(\bar{T}_a \wedge T\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[f\left(\bar{T}_a \wedge T\right)\exp\left(-\int_0^T k(X_s)X_s\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^T (k(X_s))^2 X_s^2\mathrm{d}s\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[f\left(\bar{T}_a\right)\exp\left(h(X_T) - h(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^T h''(X_s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T (k(X_s))^2 X_s^2\mathrm{d}s\right)\right].
\end{aligned}$$

Posons, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) := h''(x) + k(x)^2x^2$. Ainsi, en intégrant par rapport à la loi jointe de $\bar{T}_a$ et X_T,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^{(k_-,k_+)}\left[f(\bar{T}_a)\right] &= \mathbb{E}_x\left[f(\bar{T}_a)\exp\left(h(X_T) - h(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^T g(X_u)\mathrm{d}u\right)\right] \\
&= \int_0^T f(s)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{h(\xi)-h(x)}\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T g(X_u)\mathrm{d}u\right)\middle|\, \bar{T}_a = s, X_T = \xi\right] \\
&\qquad \times \mathbb{P}_x\left(\bar{T}_a \in \mathrm{d}s, X_T \in \mathrm{d}\xi\right).
\end{aligned}$$

Or, sous $\mathbb{P}_x$, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(\bar{T}_a \in \mathrm{d}s, X_T \in \mathrm{d}\xi\right) &= \mathbb{P}_x\left(\underbrace{\bar{T}_a \in \mathrm{d}s}_{\in\mathscr{F}_s}, \underbrace{X_T - X_s}_{\text{indep. de}\mathscr{F}_s} + \underbrace{X_s}_{=a} \in \mathrm{d}\xi\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(\bar{T}_a \in \mathrm{d}s\right)\mathbb{P}_x\left(X_{T-s} + a \in \mathrm{d}\xi\right) \\
&= \tilde{g}_{x,a}(s)\mathrm{d}s\varphi(x, y, \xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

où la fonction $\tilde{g}_{x,a}$ est définie par (1.8) et $\varphi(\cdot, \mu, \sigma)$ est la densité d'une loi normale $\mathscr{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Ainsi, en notant $E(x,T,s,\xi)=\mathbb{E}_x\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T g(X_u)\mathrm{d}u\right)\middle|\bar{T}_a=s,X_T=\xi\right]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x^{(k_-,k_+)}\left[f\left(\bar{T}_a\right)\right]&=\int_0^T f(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{h(\xi)-h(x)}E(x,T,s,\xi)\tilde{g}_{x,a}(s)\varphi(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{+\infty}f(s)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{h(\xi)-h(x)}E(x,T,s,\xi)\tilde{g}_{x,a}(s)\varphi(x,a,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

ce qui montre l'existence de la densité pour $\bar{T}_a$. ■

L'expression de cette densité n'est pas évidente à obtenir c'est pourquoi nous nous intéressons à la transformée de Laplace du temps d'atteinte.

4.3.2 Transformée de Laplace du temps d'atteinte

Nous déterminons la transformée de Laplace du temps d'atteinte du processus oscillant. Soient $\lambda,a\in\mathbb{R}_+^*$. On définit la transformée de Laplace $\bar{u}_a^\lambda$ du temps d'atteinte du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ par :

$$\bar{u}_a^\lambda:\left|\begin{array}{ccc}]-\infty,a] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ x & \longmapsto & \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\lambda\bar{T}_a}\right].\end{array}\right.$$

Proposition 4.8. *Pour $x\leqslant a$, la transformée de Laplace de $\bar{T}_a$ est donnée par*

$$\forall x\in\mathbb{R}_-,\bar{u}_a^\lambda(x)=\mathrm{e}^{\frac{k_-x^2-k_+a^2}{2}}\frac{\zeta_+^2-\zeta_-^2}{2}\frac{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)}{\zeta_-D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right)+\zeta_+D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)},$$

$$\forall x\in]0,a],\bar{u}_a^\lambda(x)=\mathrm{e}^{\frac{k_+(x^2-a^2)}{2}}\frac{\zeta_-D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(x\sqrt{2k_+}\right)+\zeta_+D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-x\sqrt{2k_+}\right)}{\zeta_-D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right)+\zeta_+D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)}.$$

$$\text{où }\zeta_\pm=\frac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0)}\sqrt{\frac{k_-}{k_+}}\pm\frac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}.$$

Démonstration. La transformée de Laplace $\bar{u}_a^\lambda$ du temps d'atteinte du processus défini par (4.1) est la solution $\mathscr{C}^1$ de l'équation différentielle suivante (voir [IM74]) :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{2}\partial_{x^2}^2\bar{u}_a^\lambda(x)-k(x)x\partial_x\bar{u}_a^\lambda(x) &=& \lambda\bar{u}_a^\lambda(x),\quad x\in]-\infty,a[\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\bar{u}_a^\lambda(x) &=& 0,\\ \bar{u}_a^\lambda(a) &=& 1,\end{array}\right.$$

où la fonction k est définie par (4.3).

On écrit $\bar{u}_a^\lambda=\bar{u}_a^{\lambda,-}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}+\bar{u}_a^{\lambda,+}\mathbb{1}_{]0,a]}$.

Nous avons déjà vu ce type d'équation dans les chapitres précédents, ses solutions indépendantes sont $x \mapsto \mathrm{e}^{k_i \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_i}}\left(x\sqrt{2k_i}\right)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{k_i \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_i}}\left(-x\sqrt{2k_i}\right)$ avec $k_i = k_-$ sur $\mathbb{R}_-$ et $k_i = k_+$ sur $]0,a]$.

Il existe donc quatre constantes $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_-, \bar{u}_a^{\lambda,-}(x) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{k_- \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(x\sqrt{2k_-}\right) + \gamma_1 \mathrm{e}^{k_- \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right), \\
\forall x \in]0,a], \bar{u}_a^{\lambda,+}(x) &= \alpha_2 \mathrm{e}^{k_+ \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(x\sqrt{2k_+}\right) + \gamma_2 \mathrm{e}^{k_+ \frac{x^2}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-x\sqrt{2k_+}\right).
\end{aligned}$$

La condition $\lim_{x\to-\infty} \bar{u}_a^{\lambda}(x) = 0$ implique nécessairement que $\alpha_1 = 0$.

La condition $\lim_{x\to a} \bar{u}_a^{\lambda}(x) = 1$ implique que

$$\alpha_2 D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \gamma_2 D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right) = \mathrm{e}^{-k_+ \frac{a^2}{2}}.$$

Comme la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$:

- $\lim_{x\to0^-} \bar{u}_a^{\lambda,-}(x) = \lim_{x\to0^+} \bar{u}_a^{\lambda,+}(x)$, on a $\gamma_1 D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0) = \left(\alpha_2+\gamma_2\right) D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)$,

- $\lim_{x\to0^-} \partial_x \bar{u}_a^{\lambda,-}(x) = \lim_{x\to0^+} \partial_x \bar{u}_a^{\lambda,+}(x)$, on a $\gamma_1 \sqrt{2k_-}\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0) = \sqrt{2k_+}\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)(\gamma_2-\alpha_2)$.

Les équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{cases}
\mathrm{e}^{-k_+ \frac{a^2}{2}} &= \alpha_2 D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \gamma_2 D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right) \\
\gamma_1 &= \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}(\alpha_2+\gamma_2) \\
\gamma_1 &= \dfrac{\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}\sqrt{\dfrac{k_+}{k_-}}(\gamma_2-\alpha_2)
\end{cases}$$

En posant $\zeta_\pm := \dfrac{\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{\partial_x D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}\sqrt{\dfrac{k_+}{k_-}} \pm \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}$, on a, avec (3.25), que $\zeta_\pm = \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0)}\sqrt{\dfrac{k_-}{k_+}} \pm \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)}{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0)}$.

Ainsi,

$$\begin{cases}
\alpha_2 &= \dfrac{\mathrm{e}^{-k_+ \frac{a^2}{2}}\zeta_-}{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)} \\
\gamma_2 &= \dfrac{\mathrm{e}^{-k_+ \frac{a^2}{2}}\zeta_+}{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)} \\
\gamma_1 &= \dfrac{\zeta_+^2 - \zeta_-^2}{2} \dfrac{\mathrm{e}^{-k_+ \frac{a^2}{2}}}{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)}
\end{cases}$$

On a donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \bar{u}_a^\lambda(x) = \mathrm{e}^{\frac{k_- x^2 - k_+ a^2}{2}} \frac{\zeta_+^2 - \zeta_-^2}{2} \frac{D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)}{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)},$$

$$\forall x \in]0, a], \bar{u}_a^\lambda(x) = \mathrm{e}^{\frac{k_+(x^2-a^2)}{2}} \frac{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(x\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-x\sqrt{2k_+}\right)}{\zeta_- D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(a\sqrt{2k_+}\right) + \zeta_+ D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(-a\sqrt{2k_+}\right)}.$$

■

Remarque 4.9. *Lorsque* $k_- = k_+$, $\zeta_- = 0$ *et la solution est bien égale à* (1.9) *c'est-à-dire* $\forall x \in \mathbb{R},\ \bar{u}_a^\lambda(x) = \mathrm{e}^{k\frac{x^2-a^2}{2}} \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k}}\left(-x\sqrt{2k}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k}}\left(-a\sqrt{2k}\right)}$.

4.4 Probabilité que le processus soit positif en un temps donné

Dans cette partie, on s'intéresse à la probabilité que le processus soit positif en un temps donné $t > 0 : \mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0)$. Cette probabilité a également déjà été étudiée dans le cas stationnaire en Section 4.2. D'autre part, dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à coefficients constants ($k_- = k_+ = k$), si $X_0 = x \in \mathbb{R}$, le processus est gaussien de loi $\mathcal{N}\left(x\mathrm{e}^{-kt}, \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2kt}}{2k}\right)$. Ainsi on obtient :

$$\mathbb{P}_x^{(k,k)}(X_t \geqslant 0) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(-\frac{x\sqrt{k}\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2kt}}}\right)\right).$$

Nous donnons maintenant son expression dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant.

L'obtention de l'expression de la probabilité repose sur l'inversion de la transformée de Laplace de la probabilité. L'expression de cette transformée est tout d'abord donnée et démontrée via le lemme suivant.

Lemme 4.10. *Soit* V^λ *la transformée de Laplace de la probabilité que le processus soit positif en un temps donné. Pour* $x \in \mathbb{R}$,

$$V^\lambda(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}_x^{(k_-,k_+)}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{1}_{X_t\geqslant 0}\mathrm{d}t\right].$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, V^\lambda(x) = \frac{\sqrt{k_-}D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0)}{\lambda\left(\sqrt{k_-}D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0)D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0) + \sqrt{k_+}D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0)D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)\right)} D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)\mathrm{e}^{\frac{x^2k_-}{2}},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, V^\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\sqrt{k_+} D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0)}{\lambda\left(\sqrt{k_-} D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0) + \sqrt{k_+} D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)\right)} D_{-\frac{\lambda}{k_+}}\left(x\sqrt{2k_+}\right) \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_+}{2}}.$$

Démonstration. On pose $k_{\min} = \min(k_-, k_+)$ et $k_{\max} = \max(k_-, k_+)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$G(x) = \begin{cases} G(0) \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}}\left(-x\sqrt{2k_{\max}}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}}(0)} \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\max}}{2}} & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\lambda} + \left(G(0) - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}}\left(x\sqrt{2k_{\min}}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}}(0)} \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\min}}{2}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $G(0) = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{g(\lambda, k_{\min})}{g(\lambda, k_{\max}) + g(\lambda, k_{\min})}$ avec $g : (\lambda, k) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{D_{-\lambda/k-1}(0)}{D_{-\lambda/k}(0)} \geqslant 0$ via (3.28) et (3.22). Ainsi,

$$0 \leqslant G(0) \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{4.9}$$

On calcule la dérivée de G. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant (3.25),

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2} G(0) \lambda}{\sqrt{k_{\max}} D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}}(0)} \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\max}}{2}} D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}-1}\left(-x\sqrt{2k_{\max}}\right) & \text{si } x \leqslant 0, \\ -\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{k_{\min}} D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}}(0)} \left(G(0) - \dfrac{1}{\lambda}\right) D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}-1}\left(x\sqrt{2k_{\min}}\right) \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\min}}{2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme D_ν est positive sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $\nu < 0$, on a, par (4.9),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) \geqslant 0. \tag{4.10}$$

On montre également que la fonction G vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} G''(x) + k_{\max} x G'(x) + \lambda G(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ -\dfrac{1}{2} G''(x) + k_{\min} x G'(x) + \lambda G(x) - 1 = 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

On montre maintenant que la fonction G est solution d'un problème de contrôle en utilisant la même démarche que dans la preuve de la Proposition 2.1 de [ABSJ17].

On note $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ la filtration naturelle engendrée par le mouvement brownien $(W_t)_{t \geqslant 0}$. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des processus progressivement $(\mathscr{F}_t)$-mesurables à valeurs dans $[k_{\min}, k_{\max}]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathscr{A}$, on s'intéresse au processus $\left(X_t^{\alpha,x}\right)_{t\geqslant 0}$ solution de

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{\alpha,x} &= -\alpha_t X_t^{\alpha,x}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad t \geqslant 0 \\ X_0^{\alpha,x} &= x. \end{cases} \tag{4.12}$$

Pour tout contrôle $\alpha \in \mathscr{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction de gain

$$J(x,\alpha;\lambda) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{P}\left(X_t^{\alpha,x} \geqslant 0\right)\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{1}_{X_t^{\alpha,x}\geqslant 0}\mathrm{d}t\right].$$

On définit alors la fonction valeur associée V_*^λ :

$$V_*^\lambda(x) := \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} J(x,\alpha;\lambda).$$

On montre que $V_*^\lambda(x) = G(x)$.

La fonction V_*^λ est solution de l'équation Hamilton–Jacobi–Bellman du problème de contrôle :

$$\lambda V_*^\lambda(x) - \sup_{k\in[k_{\min},k_{\max}]}\left[-kxV_*^{\lambda\prime}(x) + \frac{1}{2}V_*^{\lambda\prime\prime}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\right] = 0.$$

C'est-à-dire :

$$-\frac{1}{2}V_*^{\lambda\prime\prime}(x) - \sup_{k\in[k_{\min},k_{\max}]}\left[-kxV_*^{\lambda\prime}(x)\right] + \lambda V_*^\lambda(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = 0. \tag{4.13}$$

La fonction G est solution de (4.13) par (4.11) et (4.10).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha \in \mathscr{A}$ un contrôle arbitraire et $\left(X_t^{\alpha,x}\right)_{t\geqslant 0}$ le processus associé à ce contrôle et donc solution de (4.12) .

Comme la dérivée de G est une fonction absolument continue [2], on peut appliquer la formule d'Itô (Problème 7.3 de la Section 3.7 de [KS91]) :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\lambda t}G\left(X_t^{\alpha,x}\right) &= G(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left(-\lambda G\left(X_s^{\alpha,x}\right) + \frac{1}{2}G''\left(X_s^{\alpha,x}\right)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}G'\left(X_s^{\alpha,x}\right)\mathrm{d}X_s^{\alpha,x} \\ &= G(x) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}\left(-\lambda G\left(X_s^{\alpha,x}\right) - \alpha_s X_s^{\alpha,x}G'\left(X_s^{\alpha,x}\right) + \frac{1}{2}G''\left(X_s^{\alpha,x}\right)\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}G'\left(X_s^{\alpha,x}\right)\mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

Or,

$$-\alpha_s X_s^{\alpha,x}G'\left(X_s^{\alpha,x}\right) \leqslant \sup_{k\in[k_{\min},k_{\max}]}\left[-\alpha_s X_s^{\alpha,x}G'\left(X_s^{\alpha,x}\right)\right].$$

2. La fonction G' admet une dérivée notée G'' en presque tout point et la fonction G'' est intégrable.

Donc

$$-\lambda G\left(X_s^{\alpha,x}\right) - \alpha_s X_s^{\alpha,x} G'\left(X_s^{\alpha,x}\right) + \frac{1}{2} G''\left(X_s^{\alpha,x}\right) \leqslant -\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\left(X_s^{\alpha,x}\right).$$

On passe à l'espérance dans l'écriture de la formule d'Itô, en localisant la partie martingale si nécessaire , et on obtient

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t} G\left(X_t^{\alpha,x}\right)\right] \leqslant G(x) - \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathbb{P}\left(X_s^{\alpha,x} > 0\right) \mathrm{d}s.$$

Il reste à passer à la limite lorsque $t \to +\infty$. Le terme de gauche tend vers 0 par convergence dominée (la fonction $|G|$ est bornée par $\frac{1}{\lambda}$). Le terme de droite converge par convergence monotone et on obtient finalement $G(x) \geqslant J(x,\alpha;\lambda) \geqslant V_*^\lambda(x)$.

En choisissant la stratégie $\alpha = \eta$ définie par

$$\eta(x) = \begin{cases} k_{\max} & \text{si } x \leqslant 0, \\ k_{\min} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

on obtient exactement

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda t} G\left(X_t^{\alpha,x}\right)\right] = G(x) - \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} \mathbb{P}\left(X_s^{\alpha,x} > 0\right) \mathrm{d}s.$$

et donc $G(x) = J(x,\eta;\lambda) \leqslant V_*^\lambda(x)$.

Ainsi, lorsque $k_{\min} = k_+$ et $k_{\max} = k_-$, on a $V^\lambda(x) = J(x,\eta;\lambda) = G(x)$ et donc le lemme est montré.

Lorsque $k_{\min} = k_-$ et $k_{\max} = k_+$, on refait le même raisonnement sur le problème de contrôle

$$\tilde{J}(x,\alpha;\lambda) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{P}\left(X_t^{\alpha,x} \leqslant 0\right) \mathrm{d}t = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_{X_t^{\alpha,x} \leqslant 0} \mathrm{d}t\right].$$

et en prenant la fonction

$$\tilde{G}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} + \left(G(0) - \dfrac{1}{\lambda}\right) \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}}\left(x\sqrt{2k_{\min}}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k_{\min}}}(0)} \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\min}}{2}} & \text{si } x \leqslant 0, \\ G(0) \dfrac{D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}}\left(-x\sqrt{2k_{\max}}\right)}{D_{-\frac{\lambda}{k_{\max}}}(0)} \mathrm{e}^{\frac{x^2 k_{\max}}{2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On montre alors que la stratégie optimale est

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} k_{\min} & \text{si } x \leqslant 0, \\ k_{\max} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

et on obtient exactement $\tilde{G}(x) = \tilde{J}(x, \tilde{\eta}; \lambda)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{P}\left(X_t^{\alpha,x} \geqslant 0\right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{P}\left(X_t^{\alpha,x} \leqslant 0\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda} - \tilde{G}(x). \end{aligned}$$

En remplaçant avec l'expression de $\tilde{G}$, on retrouve le résultat du lemme lorsque $k_{\min} = k_+$ et $k_{\max} = k_-$. ■

Remarque 4.11. *On pourrait également montrer le résultat en utilisant la transformée de Laplace du temps d'atteinte étudiée en Section 4.3.2 ainsi que la propriété de Markov mais il faudrait justifier le caractère $\mathscr{C}^1$ de V^λ pour obtenir le résultat ce qui n'est pas évident.*

L'expression de la probabilité que le processus soit positif en un temps $t > 0$ est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.12. *Pour tout $t > 0$, on a*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_-, \mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0) &= \frac{\sqrt{k_-}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} + \sqrt{k_-}\mathrm{e}^{\frac{x^2 k_-}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{-\frac{\lambda_j}{k_+}-1}(0)}{\lambda_j \partial_\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda_j)} D_{-\frac{\lambda_j}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right) \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0) &= \frac{\sqrt{k_-}}{\sqrt{k_-} + \sqrt{k_+}} - \sqrt{k_+}\mathrm{e}^{\frac{x^2 k_+}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{-\frac{\lambda_j}{k_-}-1}(0)}{\lambda_j \partial_\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda_j)} D_{-\frac{\lambda_j}{k_+}}\left(x\sqrt{2k_+}\right) \mathrm{e}^{\lambda_j t}, \end{aligned}$$

où $\Psi_{k_-,k_+} : \lambda \mapsto \sqrt{k_-} D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_-}}(0) + \sqrt{k_+} D_{-\frac{\lambda}{k_-}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_+}}(0)$ et $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ est la suite des racines négatives ordonnées de Ψ_{k_-,k_+}.

Remarque 4.13. *Les zéros $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ de Ψ_{k_-,k_+} sont forcément négatifs. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une racine $\lambda_0 > 0$. Or, pour tout $\lambda_0 > 0$, $\Psi_{k_-,k_+}(\lambda_0) > 0$ par le lien entre les fonctions paraboliques cylindriques et les fonctions de Hermite ainsi que l'expression* (3.22)*, ce qui est absurde.*

Démonstration. On traite le cas $x \in \mathbb{R}_-$ (le cas $x \in \mathbb{R}_+^*$ se traite de manière similaire).

On inverse la transformée de Laplace pour obtenir la probabilité.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0) = \operatorname{Res}\left(e^{\lambda t} V^\lambda(x)\right)_{\lambda=0} + \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left(e^{\lambda t} V^\lambda(x)\right)_{\lambda=\lambda_j}. \tag{4.14}$$

En effet, les pôles de la fonction $\lambda \mapsto e^{\lambda t} V^\lambda(x)$ sont 0 et la suite $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$.

Or, on a

$$\operatorname{Res}\left(\frac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)}{\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda)}\right)\Bigg|_{\lambda=0} = \frac{e^{-\frac{x^2 k_-}{2}}}{\sqrt{k_-}+\sqrt{k_+}}$$

et

$$\operatorname{Res}\left(\frac{D_{-\frac{\lambda}{k_+}-1}(0) D_{-\frac{\lambda}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)}{\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda)}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_j} = \frac{D_{-\frac{\lambda_j}{k_+}-1}(0) D_{-\frac{\lambda_j}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right)}{\lambda_j \partial_\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda_j)}.$$

On trouve finalement

$$\mathbb{P}_x^{(k_-,k_+)}(X_t \geqslant 0) = \frac{\sqrt{k_-}}{\sqrt{k_-}+\sqrt{k_+}} + \sqrt{k_-} e^{\frac{x^2 k_-}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{-\frac{\lambda_j}{k_+}-1}(0)}{\lambda_j \partial_\lambda \Psi_{k_-,k_+}(\lambda_j)} D_{-\frac{\lambda_j}{k_-}}\left(-x\sqrt{2k_-}\right) e^{\lambda_j t}.$$

■

Nous illustrons numériquement la formule obtenue.

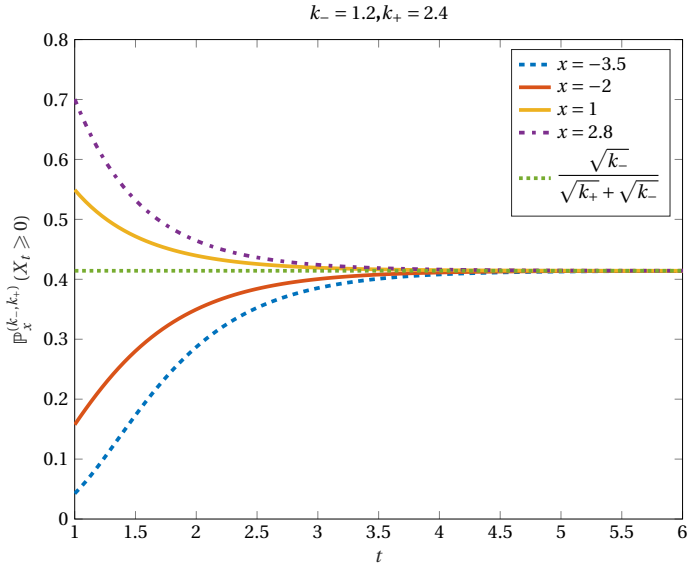

FIGURE 4.1 – Probabilité que le processus soit positif pour un temps donné $t \in [1,6]$ et pour différentes valeurs de x. Comparaison avec la probabilité stationnaire. Les simulations ont été faites en sommant sur les 100 premières racines.

Corollaire 4.14. *Si* $k_- = k_+ = k$, *comme* $\partial_v D_{2j+1}(0) = -j!(-2)^j\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, *on en déduit le résultat suivant, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\operatorname{erf}\left(-\frac{x\sqrt{k}\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2kt}}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{kx^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{D_{2j+1}\left(-x\sqrt{2k}\right)\mathrm{e}^{-k(2j+1)t}}{j!(2j+1)(-2)^j}.$$

4.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre proposait d'étudier le processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant, c'est-à-dire lorsque le coefficient de drift est constant par morceaux selon le signe du processus. Nous avons obtenu la transformée de Laplace du temps d'atteinte puis la probabilité que ce processus soit positif en un temps donné. Un prolongement de l'étude serait de calculer la densité du temps d'atteinte par inversion de la transformée de Laplace ou par une méthode spectrale.

Nous nous sommes placés dans ce chapitre sous l'hypothèse où le coefficient de diffusion est constant. Une autre perspective serait de considérer le cas où ce coefficient est différent selon le signe du processus. Nous pourrions également considérer le cas où le changement de coefficients a lieu ailleurs qu'en 0. Il pourrait aussi être intéressant de regarder le temps que passe le processus au dessus d'un seuil (0 ici).

Dans le Chapitre 2, nous avons estimé les paramètres du processus à coefficients constants à partir d'observations du supremum. Il serait ici naturel de regarder comment estimer les paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant. Dans un premier temps, il serait raisonnable de supposer avoir des observations de ce processus. Ce type d'estimation a été proposée pour le mouvement brownien géométrique oscillant dans [LP18]. Nous pourrions également envisager une méthode par maximum de vraisemblance comme proposé dans [LP17]. Il faudrait commencer par fixer l'un de nos paramètres comme constant pour voir si une estimation est possible. Dans un second temps, nous pourrions envisager une estimation des paramètres du processus à partir d'observation de suprema journaliers comme exposé dans le Chapitre 2.

Enfin, une dernière piste serait de regarder le comportement de ce processus lorsque le processus d'Ornstein-Uhlenbeck n'est plus dirigé par un mouvement brownien mais par un processus de Lévy.

En Section 4.3, nous avons étudié la loi du temps d'atteinte d'une barrière constante horizontale. Lorsque la barrière est une courbe continue, des résultats d'un point de vue numérique ont été obtenus dans [HT16]. Les auteurs de cet article proposent un algorithme permettant de simuler le premier temps de passage en utilisant une méthode itérative efficace. Une perspective serait de regarder si les méthodes utilisées dans cet article sont adaptables pour le processus considéré

dans ce chapitre, oscillant, afin d'obtenir une technique de simulation efficace du premier temps d'atteinte d'une barrière non constante.

Bibliographie

[ABC92] A. ANTONIADIS, J. BERRUYER & R. CARMONA – *Régression non linéaire et applications*, Collection "Economie et statistiques avancées." : Série Ecole nationale de la statistique et de l'administration économique et Centre d'études des programmes économiques, Economica, 1992.

[ABSJ17] S. ANKIRCHNER, C. BLANCHET-SCALLIET & M. JEANBLANC – « Controlling the occupation time of an exponential martingale », *Applied Mathematics & Optimization* **76** (2017), no. 2, p. 415–428.

[ADS02] P. ALATON, B. DJEHICHE & D. STILLBERGER – « On Modelling and Pricing Weather Derivatives », *Applied Mathematics in Finance* **9** (2002), no. 1, p. 1–20.

[APP05] L. ALILI, P. PATIE & J. L. PEDERSEN – « Representations of first hitting time density of an Ornstein-Uhlenbeck process », *Stochastic Models* **21** (2005), no. 4, p. 967–980.

[AZ13] A. ALEXANDRIDIS & A. ZAPRANIS – *Weather Derivatives : Modeling and Pricing Weather-Related Risk*, 04 2013.

[BD08] W. BOYCE & R. DIPRIMA – *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley, 2008.

[BFK19] P. BERTHET, J.-C. FORT & T. KLEIN – « A central limit theorem for wasserstein type distances between two different laws », *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques (à paraître)* (2019).

[Bil65] P. BILLINGSLEY – *Ergodic Theory and Information*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Wiley, 1965.

[Bré83] H. BRÉZIS – *Analyse fonctionelle*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, 1983.

[BS15] A. BORODIN & P. SALMINEN – *Handbook of brownian motion : facts and formulae-second edition*, Probability and its applications, Birkhäuser Verlag, 2015.

[BŠB05] F. BENTH & J. ŠALTYTĖ-BENTH – « Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives », *Applied Mathematical Finance* **12** (2005), no. 1, p. 53–85.

[BSDG+18] C. BLANCHET-SCALLIET, D. DOROBANTU, L. GAY, V. MAUME-DESCHAMPS & P. RIBEREAU – « Risk assessment using suprema data », *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **32** (2018), no. 10, p. 2839–2848.

[BSZ02] D. BRODY, J. SYROKA & M. ZERVOS – « Dynamical pricing of weather derivatives », *Quantitative Finance* **2** (2002), no. 3, p. 189–198.

[CC99] R. CANTRELL & C. COSNER – « Diffusion models for population dynamics incorporating individual behavior at boundaries : applications to refuge design », *Theoretical population biology* **55** (1999), no. 2, p. 189–207.

[CHBS05] E. CASTILLO, A. HADI, N. BALAKRISHNAN & J. SARABIA – *Extreme Value and Related Models With Applications in Engineering and Science*, Wiley Hoboken, NJ, 01 2005.

[Che00] A. CHERNY – « On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing bessel processes », *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes* **70** (2000), no. 3-4, p. 213–219.

[CIM06] S. CHAUMONT, P. IMKELLER & M. MÜLLER – « Equilibrium trading of climate and weather risk and numerical simulation in a Markovian framework », *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **20** (2006), no. 3, p. 184–205.

[CP19] L. COUTIN & M. PONTIER – « Existence and regularity of law density of a pair (diffusion, first component running maximum) », *Statistics & Probability Letters* (2019).

[CPN18] L. COUTIN, M. PONTIER & W. NGOM – « Joint distribution of a Lévy process and its running supremum », *J. Applied Probability* **55** (2018), no. 2, p. 488–512.

[DB08] A. N. DOWNES & K. BOROVKOV – « First Passage Densities and Boundary Crossing Probabilities for Diffusion Processes », *Methodology and Computing in Applied Probability* **10** (2008), no. 4, p. 621–644.

[DIRT13] F. DELARUE, J. INGLIS, S. RUBENTHALER & E. TANRÉ – « First hitting times for general non-homogeneous 1d diffusion processes : density estimates in small time », working paper hal-00870991, 2013.

[Dis98a] B. DISCHEL – « At least : a model for weather risk, Weather Risk special report », *Energy and Power Risk Management* **March** (1998), p. 30–32.

[Dis98b] — , « Black-Scholes won't do it, Weather Risk special report », *Energy and Power Risk Management* **October** (1998), p. 8–9.

[DK06] R. DONEY & A. KYPRIANOU – « Overshoots and undershoots of Lévy processes », *The Annals of Applied Probability* (2006), p. 91–106.

[Doo42] J. DOOB – « The Brownian movement and stochastic equations », *Annals of Mathematics* (1942), p. 351–369.

[Dou94] P. DOUKHAN – « Mixing », in *Mixing*, Springer, 1994, p. 15–23.

[DQ00] F. DORNIER & M. QUERUEL – « Caution to the wind, Weather risk special report », *Energy Power Risk Management* (2000), p. 30–32.

[EH14] M. ESCOBAR & J. HERNANDEZ – « A note on the distribution of multivariate Brownian extrema », *International Journal of Stochastic Analysis* (2014).

[Fra03] J. C. G. FRANCO – « Maximum likelihood estimation of mean reverting processes », *Real Options Practice* (2003).

[Gar04] C. W. GARDINER – *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, third éd., Springer Series in Synergetics, vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[GM16] E. GOBET & G. MATULEWICZ – « Parameter estimation of Ornstein-Uhlenbeck process generating a stochastic graph », *Statistical Inference for Stochastic Processes* (2016), p. 1–25.

[Gri68] I. GRINGORTEN – « Estimating finite-time maxima and minima of a stationary Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process by Monte Carlo simulation », *Journal of the American Statistical Association* **63** (1968), no. 324, p. 1517–1521.

[HKR98] H. HE, W. KEIRSTEAD & J. REBHOLZ – « Double Lookbacks », *Mathematical Finance* **8** (1998), no. 3, p. 201–228.

[HP86] U. G. HAUSSMANN & E. PARDOUX – « Time Reversal of Diffusions », *Ann. Probab.* **14** (1986), no. 4, p. 1188–1205.

[HT16] S. HERRMANN & E. TANRÉ – « The first-passage time of the Brownian motion to a curved boundary : an algorithmic approach », *SIAM Journal on Scientific Computing* **38** (2016), no. 1, p. A196–A215.

[IM74] K. ITŌ & H. MCKEAN – *Diffusion processes and their sample paths*, Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1974.

[JL11] I. JELIAZKOV & A. LLORO – « Maximum Simulated Likelihood Estimation : Techniques and Applications in Economics », p. 85–100, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.

[JYC09] M. JEANBLANC, M. YOR & M. CHESNEY – *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer Finance, Springer London, 2009.

[KS91] I. KARATZAS & S. SHREVE – *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1991.

[Küh17] F. KÜHN – « Existence and estimates of moments for Lévy-type processes », *Stochastic Processes and their Applications* **127** (2017), no. 3, p. 1018–1041.

[KW78] J. KEILSON & J. WELLNER – « Oscillating Brownian Motion », *Journal of Applied Probability* **15** (1978), no. 2, p. 300–310.

[Lan08] P. LANGEVIN – « Sur la théorie du mouvement brownien », *Compt. Rendus* **146** (1908), p. 530–533.

[LBM84] A. LE BRETON & M. MUSIELA – « A study of a one-dimensional bilinear differential model for stochastic processes (STMA V26 2481) », *Probability and Mathematical Statistics* **4** (1984), p. 91–107.

[Lej18] A. LEJAY – « Estimation of the bias parameter of the skew random walk and application to the skew Brownian motion », *Statistical Inference for Stochastic Processes* **21** (2018), no. 3, p. 539–551.

[LG12] J.-F. LE GALL – *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Mathématiques et Applications, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[Lin04] V. LINETSKY – « Computing Hitting Time Densities for CIR and OU Diffusions : Applications to Mean-Reverting Models », *J. Comput. Finance* **7** (2004).

[LK18] A. LIPTON & V. KAUSHANSKY – « On the First Hitting Time Density of an Ornstein-Uhlenbeck Process », *arXiv preprint arXiv :1810.02390* (2018).

[LM02] S. LING & M. MCALEER – « Stationarity and the existence of moments of a family of GARCH processes », *Journal of Econometrics* **106** (2002), no. 1, p. 109–117.

[LP17] A. LEJAY & P. PIGATO – « A threshold model for local volatility : evidence of leverage and mean reversion effects on historical data », *arXiv preprint arXiv :1712.08329* (2017), working paper or preprint.

[LP18] — , « Statistical estimation of the Oscillating Brownian Motion », *Bernoulli* **24** (2018), no. 4B, p. 3568–3602.

[LPL+04] K. LAAIDI, M. PASCAL, M. LEDRANS, A. LE TERTRE, S. MEDINA, C. CASÉRIO, J.-C. COHEN, J. MANACH, P. BEAUDEAU & P. EMPEREUR BISSONNET – « Le système français d'alerte canicule et santé 2004 (sacs 2004) un dispositif intégré au plan national canicule », *Bulletin épidémiologique hebdomadaire* (2004), p. 134–136.

[LS72] N. LEBEDEV & R. SILVERMAN – *Special Functions and Their Applications*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 1972.

[LS01] W. V. LI & Q.-M. SHAO – « Gaussian processes : Inequalities, small ball probabilities and applications », *Stochastic Processes : Theory and Methods . Handbook of Statistics* **19** (2001), p. 533–597.

[MBS95] B. MARTIN BIBBY & M. SØRENSEN – « Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes », *Bernoulli* **1** (1995), no. 1-2, p. 17–39.

[MD99] R. MCINTYRE & S. DOHERTY – « Weather risk-an example from the uk », *Energy and Power Risk Management June* (1999).

[MI08] P. MULLOWNEY & S. IYENGAR – « Parameter estimation for a leaky integrate-and-fire neuronal model from ISI data », *Journal of Computational Neuroscience* **24** (2008), no. 2, p. 179–194.

[Mit70] D. S. MITRINOVIC – *Analytic inequalities*, Springer, 1970.

[Ngo16] W. NGOM – « Contributions to the study of default time of a Lévy process in complete observation and in incomplete Observation », Thesis tel-01466200, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016.

[PAB+14] R. K. PACHAURI, M. ALLEN, V. BARROS, J. BROOME, W. CRAMER, R. CHRIST, J. CHURCH, L. CLARKE, Q. DAHE, P. DASGUPTA et al. – *Climate change 2014 : synthesis report. Contribution of Working Groups I, II and III to the fifth assessment report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, IPCC, 2014.

[Pau87] E. PAUWELS – « Smooth first-passage densities for one-dimensional diffusions », *Journal of applied probability* **24** (1987), no. 2, p. 370–377.

[Pek14] D. PEKASIEWICZ – « Application of quantile methods to estimation of Cauchy distribution parameters », *Statistics in Transition* **15** (2014), no. 1, p. 133–144.

[RH89] H. RISKEN & H. HAKEN – *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solution and Applications Second Edition*, Springer, 1989.

[Rio93] E. RIO – « Covariance inequalities for strongly mixing processes », *Annales de l'IHP* **29** (1993), no. 4, p. 587–597.

[RY13] D. REVUZ & M. YOR – *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293, Springer Science & Business Media, 2013.

[Sch09] Z. SCHUSS – *Theory and applications of stochastic processes : An analytical approach*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 2009.

[Sle68] B. SLEEMAN – « On Parabolic Cylinder Functions », *IMA Journal of Applied Mathematics* **4** (1968), no. 1, p. 106–112.

[SÖK+10] B. SILIVERSTOVS, R. ÖTSCH, C. KEMFERT, C. JAEGER, A. HAAS & H. KREMERS – « Climate change and modelling of extreme temperatures in Switzerland », *Stochastic environmental research and risk assessment* **24** (2010), no. 2, p. 311–326.

[Som94] A. SOMMERFELD – « Sur la théorie analytique de la conduction thermique », *Annales mathématiques* **45** (1894), no. 2, p. 263–277.

[Ta02] A. TANK & AL. – « Daily dataset of 20th-century surface air temperature and precipitation series for the European Climate Assessment », *International Journal of Climatology* **22** (2002), no. 12, p. 1441–1453.

[UO30] G. UHLENBECK & L. ORNSTEIN – « On the theory of the Brownian motion », *Physical review* **36** (1930), no. 5, p. 823.

[Vas77] O. VASICEK – « An equilibrium characterization of the term structure », *Journal of Financial Economics* **5** (1977), no. 2, p. 177 – 188.

[Zam03] L. ZAMBOTTI – « Integration by parts on δ-Bessel bridges, $\delta > 3$, and related SPDEs », *Ann. Probab.* **31** (2003), no. 1, p. 323–348.

[Zmi89] A. ZMITROWICZ – « Mathematical descriptions of anisotropic friction », *International Journal of Solids and Structures* **25** (1989), no. 8, p. 837 – 862.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et son supremum : quelques résultats théoriques et application au risque climatique

Résumé :

Prévoir et estimer le risque de canicule est un enjeu politique majeur. Évaluer la probabilité d'apparition des canicules et leurs sévérités serait possible en connaissant la température en temps continu. Cependant, les extrêmes journaliers (maxima et minima) sont parfois les seules données disponibles. Pour modéliser la dynamique des températures, il est courant d'utiliser un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Une estimation des paramètres de ce processus n'utilisant que les suprema journaliers observés est proposée. Cette nouvelle approche se base sur une minimisation des moindres carrés faisant intervenir la fonction de répartition du supremum. Les mesures de risque liées aux canicules sont ensuite obtenues numériquement. Pour exprimer explicitement ces mesures de risque, il peut être utile d'avoir la loi jointe du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son supremum. L'étude se limite tout d'abord à la fonction de répartition / densité jointe du point final du processus et de son supremum. Cette probabilité admet une densité, solution de l'équation de Fokker-Planck, obtenue explicitement et utilisant les fonctions spéciales paraboliques cylindriques. La preuve de l'expression de la densité repose sur une décomposition sur une base hilbertienne de l'espace via une méthode spectrale. On étudie également le processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant, dont le paramètre de drift est constant par morceaux selon le signe du processus. La transformée de Laplace du temps d'atteinte de ce processus est déterminée et la probabilité que le processus soit positif en un temps donné est calculée.

Mots clefs : processus d'Ornstein-Uhlenbeck, loi du supremum, estimation de paramètres, risque canicule, loi jointe, équation de Fokker-Planck, processus d'Ornstein-Uhlenbeck oscillant, temps d'atteinte.

Ornstein-Uhlenbeck process and its supremum : theorical results and application to the climatic risk

Abstract :

Forecasting and assessing the risk of heat waves is a crucial public policy stake. Evaluate the probability of heat waves and their severity can be possible by knowing the temperature in continuous time. However, daily extremes (maxima and minima) might be the only available data. The Ornstein-Uhlenbeck process is commonly used to model temperature dynamic. An estimation of the process parameters using only daily observed suprema of temperatures is proposed here. This new approach is based on a least square minimization using the cumulative distribution function of the supremum. Risk measures related to heat waves are then obtained numerically. In order to calculate explicitly those risk measures, it can be useful to have the joint law of the Ornstein-Uhlenbeck process and its supremum. The study is first limited to the joint density / distribution of the endpoint and supremum of the Ornstein-Uhlenbeck process. This probability admits a density, solution of the Fokker-Planck equation and explicitly obtained as an expansion involving parabolic cylinder functions. The proof of the density expression relies on a decomposition on a Hilbert basis of the space via a spectral method. We also study the oscillating Ornstein-Uhlenbeck process, which drift parameter is piecewise constant depending on the sign of the process. The Laplace transform of this process hitting time is determined and we also calculate the probability for the process to be positive on a fixed time.

Keywords: Ornstein-Uhlenbeck process, supremum law, parameter estimation, heat wave risk assessment, joint law, Fokker-Planck equation, oscillating Ornstein-Uhlenbeck process, hitting time.

ED 512 INFOMATHS Ecole doctorale

UNIVERSITÉ DE LYON