

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École Doctorale MEGA

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

spécialité : **Mécanique**

par

M. Guillaume SIMON

**Dynamique multi-échelles en fluide stratifié tournant,
instabilité de cisaillement et cyclone intense**

Soutenue le 22 octobre 2007 devant la commission d'Examen

Jury : MM. **C. CAMBON** - *Directeur de thèse*
G. N. COLEMAN - *Invité*
J.-B. FLÓR - *Invité*
J.-N. GENCE - *Examineur*
F. S. GODEFERD - *Examineur*
S. LEBLANC - *Rapporteur*
A. SALHI - *Rapporteur*
J. SOMMERIA - *Président*

Remerciements

Ce travail de thèse s’est déroulé au *Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique* (UMR CNRS 5509 : ÉCL - UCB - INSA de Lyon) à l’*École Centrale de Lyon*.

Cette thèse a été encadrée par le Docteur Claude Cambon et le Docteur Fabien S. Godeferd. Ma plus grande sympathie et reconnaissance leurs sont donc adressées.

Mes profonds remerciements s’adressent aussi aux membres du Jury qui ont accepté d’examiner ce travail : MM. G. N. Coleman, J.-B. Flór , J.-N. Gence et J. Sommeria et tout particulièrement à MM. S. Leblanc et A. Salhi pour la charge de rapporteurs qui leur incombait.

Je remercie le Docteur Gary N. Coleman d’avoir supervisé mon séjour de 8 mois à la “*University of Southampton*” dans le groupe de recherche “*Aerodynamics and Flight Mechanics of the School of Engineering Sciences*”.

Je remercie M. Bernard Barbier et Mme Pascale Jeandel pour leur aide en informatique et réseaux.

Je remercie profondément Jocelyne et François pour les relectures et les corrections grammaticales et orthographiques.

Je remercie les stagiaires, doctorants et postdoctorants du *Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique* et de “*Aerodynamics and Flight Mechanics Research Group*” qui ont rendu cette thèse plus agréable : Hanen Amel, Philip Archer, Maxim Bondarenko, Koen Boorsma, Abdessalem Bouferrouk, Alexandre Delache, Walid Dridi, Benjamin Favier, Lionel Larchevêque, Jean-Michel Lenoir, Massimo Marro, Laurens van Bokhoven, Chris Yorke et tous les autres.

Je remercie le Pôle de Compétence en Calcul Haute Performance Dédié (P2CHPD) et l’Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) de m’avoir accordé des heures de calcul pour ce travail.

Table des matières

Remerciements	3
TOC	3
Introduction	11
1 Équations pour un écoulement cisailé, tournant et stratifié	14
1.1 Introduction	14
1.1.1 Zone frontale, circulation générale et écoulement admissible	15
1.1.2 Référentiel géophysique : de la sphère au f -plan	15
1.1.3 Approximation de Boussinesq	17
1.2 Turbulence homogène	19
1.2.1 Champ moyen admissible	19
1.2.2 Les temps linéaires caractéristiques	21
1.2.3 Champ fluctuant	22
1.2.4 Déformation de l'espace suivant R.S. Rogallo 1981	23
1.2.5 Champ fluctuant quasi-Lagrangien	24
1.2.6 Décomposition spectrale en mode de Fourier	24
1.3 Corrélation double en 1 point d'espace et de temps	25
1.3.1 Équation de transport pour R_{ij}	25
1.3.2 Équation de transport pour M_i	25
1.3.3 Équation de transport pour $\bar{B} = \overline{bb}$	26
1.3.4 Énergétique	26
1.4 Le lien avec les équations Quasi-Géostrophiques et l'étude d'Eady 1949 .	28
1.4.1 Rappel sur la stabilité	29
1.4.2 Condition d'instabilité	31
1.4.3 Orientation des lignes de phases	31
1.4.4 Corrélation et flux	31
1.4.5 Circulation secondaire	32
1.5 Le problème linéaire 3D homogène	32
1.5.1 Pression et opérateur de Kraichnan	33
1.5.2 Les équations exprimées dans le repère de Craya-Herring	34
1.5.3 Fonctions de Green	38
1.6 Conclusion	41

2	Étude numérique de distorsion rapide	43
2.1	Introduction	43
2.2	Code de distorsion rapide : l'algorithme LF5	44
2.2.1	Méthode numérique et informatique	44
2.2.2	Validation du code LF5	45
2.3	État initial du système et discrétisation	46
2.4	Dépendance à ϵ et Ri	47
2.4.1	Étude des cartes paramétriques par “zoom” successifs	47
2.4.2	La limite $Ri < 1$	47
2.4.3	Courbe critique	48
2.5	Des écoulements géophysiquement envisageables	52
2.5.1	Les énergies	52
2.5.2	Statistiques sur le tenseur de Green	54
2.5.3	Tenseur des contraintes de Reynolds généralisées	55
2.5.4	Décomposition toroïdo-poloïdale	57
2.5.5	Anisotropie sur la sphère	58
2.5.6	Scénario de l'évolution barocline linéaire	75
2.6	Effet de la projection cylindrique	77
2.7	Les fonctions de Green modales	80
2.7.1	Origine du temps $t = 0$	80
2.7.2	Mode oscillant	80
2.7.3	Mode croissant	81
2.7.4	Mode saturant	81
2.7.5	Taux d'amplification	85
2.8	Conclusion	85
3	Expérience numérique en turbulence homogène	88
3.1	Introduction	89
3.2	Code pour la turbulence homogène : l'algorithme TR5	89
3.2.1	Méthodes numériques et informatiques	89
3.2.2	Validation	94
3.3	Initialisation avec un champ de turbulence isotrope décroissante	94
3.4	Énergétique des écoulements baroclines	97
3.5	Échelles caractéristiques	103
3.5.1	Échelles sphériques	103
3.5.2	Échelles intégrales directionnelles	104
3.6	Nombres adimensionnels	110
3.6.1	Nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor	110
3.6.2	Paramètre de cisaillement	111
3.6.3	Nombre de Rossby basé sur l'échelle horizontale	112
3.6.4	Nombre de Froude basé sur l'échelle verticale	113
3.7	Tenseurs de structures	118
3.7.1	Componentialité	118
3.7.2	Les tenseurs non conventionnels de Kassinos, Reynolds et Rogers	133
3.7.3	Étude des structures de 3 réalisations	134
3.8	Localisation des valeurs intenses	139
3.9	Développement préférentiel : statistiques d'ordre 3 et 4	142
3.9.1	Statistique d'ordre 3 : skewness	142

3.9.2	Statistique d'ordre 4 : kurtosis	144
3.10	Dynamique multi-échelles : les spectres	148
3.10.1	Spectres sphériques	148
3.10.2	Spectres directionnels	154
3.11	Structures cohérentes	161
3.11.1	Écoulement barocline géophysiquement envisageable	161
3.11.2	Instabilité de type Kelvin-Helmholtz dans le plan vertical-longitudinal	166
3.11.3	Retournement dans le plan vertical-transverse	167
3.11.4	Tourbillons jetaux dans le plan horizontal	169
3.11.5	Turbulence verticale aux petites échelles	170
3.12	Comparaison de la dynamique linéaire et non-linéaire	171
3.12.1	Influence de la dynamique non-linéaire sur l'évolution de l'énergie	171
3.12.2	Les spectres de la dynamique linéaire, non-linéaire et réelle	176
3.12.3	L'influence des non-linéarités dans la génération des structures cohérentes	177
3.13	Modélisation des écoulements géophysiques	180
3.13.1	La prédiction à long terme	180
3.13.2	Anticiper les événements intenses	181
3.13.3	Vers un nouveau modèle	183
3.14	Conclusion	184
Conclusion et perspectives		186
ANNEXE : Validation des codes de calculs		189
.1	Introduction	190
.1.1	Sur la nécessité d'une validation des codes de calculs	190
.1.2	Solution exacte et utilisation d'un second membre	191
.1.3	Comparaison à des simulations antérieures	191
.1.4	La comparaison avec l'expérience	192
.1.5	Les tests de dépendance	192
.1.6	Comparaison de plusieurs codes de calculs	192
.1.7	Tests de cohérence	192
.2	Code de DRN sur une sphère	193
.2.1	Tests avec des fonctions analytiques	193
.2.2	Tests de cohérence	199
.3	Code de SND dans un cube tri-périodique	201
.3.1	Tests avec des fonctions analytiques	201
.3.2	Tests de cohérence	253
.3.3	Tests de dépendance	258
.3.4	Test d'entrée-sortie	259
.3.5	Comparaison avec des simulations précédentes	260
.3.6	Phénoménologie des structures turbulentes	262
.3.7	Phénoménologie des ondes	267
.4	Double validation : comparaison des résultats du code LF5 et TR5 . . .	267
.5	Conclusion	270
Bibliographie		271

Table des figures

1.1	Écoulement admissible	16
1.2	Approximation de Boussinesq asymptotique	18
1.3	Vitesse de phase des ondes de Eady	30
1.4	Taux d'amplification des ondes d'Eady	30
1.5	Décomposition toroïdo-poloïdale	35
1.6	Repère sphérique pour la position du vecteur d'ondes	37
1.7	Courbe neutre en $K_1 = 0$	40
1.8	TDR versus Eady 1947	41
2.1	Maillage du code de distorsion rapide LF5	44
2.2	Organisation de l'algorithme LF5	46
2.3	MAX-NTG Focalisation sur $(Ri = 0, \epsilon = 0)$ pour $tS = 3$	49
2.4	MAX-NTG focalisation sur $(Ri = 0, \epsilon = 0)$ pour $tS = 30$	50
2.5	Maximum et courbe critique	51
2.6	La limite $Ri < 1$	51
2.7	Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 3$	60
2.8	Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 30$	61
2.9	Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$	62
2.10	SNTG série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 3$	63
2.11	SNTG série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 30$	64
2.12	SNTG série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$	65
2.13	TCRG-F de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 3$	66
2.14	TCRG-F de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 30$	67
2.15	TCRG-F de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$	68
2.16	TCRG-CH de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 3$	69
2.17	TCRG-CH de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 30$	70
2.18	TCRG-CH de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$	71
2.19	Anisotropie MAX-NTG de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 3$	72
2.20	Anisotropie MAX-NTG de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 30$	73
2.21	Anisotropie MAX-NTG de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$	74
2.22	Énergies du calcul INTERINTER	76
2.23	TCRG-CH du calcul INTERINTER	76
2.24	Les quantités directionnelles : projection cylindrique	78
2.25	Influence de la discrétisation - calculs décroissants	79
2.26	Influence de la discrétisation - calculs croissants	79
2.27	TG : calcul MODEOSCILLANT ($\epsilon = 8, Ri = 6.25, \theta = 1.60$ et $\phi = 0.46$)	82

2.28	TG : calcul MODECROISSANT ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.1$, $\theta = 3.00$ et $\phi = 1.54$)	82
2.29	TG : réalisation INTERINTER ($\epsilon = 0.01$ et $Ri = 0.99$)	83
2.30	TG : calcul $\epsilon = 10$ et $Ri = 10$ ($\theta = 0.103$, $\phi = -0.670$)	84
2.31	Taux d'amplifications	84
3.1	Maillage du code de simulation numérique directe TR5	90
3.2	Évolution du domaine Lagrangien	91
3.3	Filtrage induit par le remaillage spectral	92
3.4	Organisation de l'algorithme TR5	93
3.5	CI's : spectres sphériques	96
3.6	Énergie mécanique turbulente log-linéaire : série GÉOPHYSIQUE	99
3.7	Énergie mécanique turbulente log-log : série GÉOPHYSIQUE	100
3.8	Énergies : série CALME	101
3.9	Énergies : série RENFORCÉE	102
3.10	Échelles de Kolmogorov : séries CALME et OCEAN	106
3.11	Échelles de Taylor : séries CALME et OCEAN	107
3.12	Échelles intégrales sphériques : série CALME et OCEAN	108
3.13	Échelles intégrales directionnelles : série RENFORCÉE	109
3.14	Expériences de Reynolds	110
3.15	Ouragan Katrina	112
3.16	Le Swan et le Raven	113
3.17	Nombre de Reynolds via échelle de Taylor : séries CALME et OCEAN	114
3.18	Paramètre de cisaillement : série CALME et OCEAN	115
3.19	Nombre de Rossby via Lh : série OCEAN	116
3.20	Nombre de Froude via Lv : série OCEAN	117
3.21	TCRG : série CALME	120
3.22	TCRG : série RENFORCÉE	121
3.23	b_{ij} : série CALME	124
3.24	b_{ij} : série RENFORCÉE	125
3.25	Invariant de Lumley : série CALME	127
3.26	Invariant de Lumley : série RENFORCÉE	128
3.27	q_{i4}^* : série CALME	131
3.28	q_{i4}^* : série RENFORCÉE	132
3.29	Tenseurs de structures de la réalisation MICROOcéANRENFORCÉ	136
3.30	Tenseurs de structures de la réalisation INTEROcéANRENFORCÉ	137
3.31	Tenseurs de structures de la réalisation SYNOOcéANRENFORCÉ	138
3.32	Valeurs intenses pour des calculs de la série OCEAN	141
3.33	skewness et flatness de vitesses : série RENFORCÉE	146
3.34	Skewness et flatness de vorticité : série RENFORCÉE	147
3.35	Spectre sphérique $Ec(t, k)$: série RENFORCÉE	151
3.36	Spectre sphérique $N^2 Ep(t, k)$: série RENFORCÉE	152
3.37	Spectres sphériques toroïdaux et poloïdaux	153
3.38	Spectres directionnels : composante zonale	156
3.39	Spectres directionnels : composante méridionale	157
3.40	Spectres directionnels : composante verticale	158
3.41	Spectres directionnels : composante de flotabilité	159
3.42	Spectres directionnels pour la réalisation INTEROcéANTUMULTIUEUX	160
3.43	Structures cohérentes : série CALME à $t = 10$	163
3.44	Valeurs de vitesses sur les 3 plans : série CALME à $t = 10$	164

3.45	Valeurs de flotabilité sur les 3 plans : série CALME à $t = 10$	165
3.46	Nuages et K-H instabilité	166
3.47	Plan vertical-longitudinal : réalisation MICROOCÉANCALME	166
3.48	Plan vertical-transverse : réalisation MICROOCÉANCALME	167
3.49	Ondes d'inertie, de gravité et propagation d'énergie barocline	168
3.50	Tourbillon jetal	169
3.51	Plan horizontal : réalisation MICROOCÉANCALME	169
3.52	Turbulence de Saturne	170
3.53	Plan vertical-longitudinal : réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ	170
3.54	Linéaire vs Non-linéaire cas barocliniquement instable	172
3.55	Linéaire vs Non-linéaire cas barocliniquement instable	172
3.56	Linéaire vs Non-linéaire cas barocliniquement stable	173
3.57	Composante verticale	173
3.58	Composante verticale	174
3.59	Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$	174
3.60	Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$	175
3.61	Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$	175
3.62	Comparaisons des visualisations 3D linéaires et non-linéaires	179
3.63	Temps de prédictibilité pour une transmission en cascade locale	180
3.64	Écoulement zonal de grande échelle	182
65	DRN : évolution de l'erreur pour le test SinTemp	197
66	DRN : histoire des erreurs	198
67	DRN : cohérence pour le cas Coherent_full	200
68	SND - tests avec fonctions - aperçu	249
69	SND : histoire des erreurs (partie 1)	250
70	SND : histoire des erreurs (partie 2)	251
71	SND : histoire des erreurs (partie 3)	252
72	SND - tests de cohérence - aperçu pour le cas ShearRotStratS4	256
73	Test d'universalité des paramètres adimensionnelles	257
74	SND : avance temporelle - RK3	258
75	Orszag et Patterson - 1972 - comparaison	260
76	Rogallo - 1981 - comparaison	261
77	Turbulence isotrope décroissante	264
78	Turbulence homogène cisailée	264
79	Turbulence homogène en rotation	265
80	Turbulence homogène stratifiée	265
81	5 scalaires passifs dans un champ de turbulence isotrope	266
82	Les ondes : forçage ponctuel dans l'espace physique	267
83	Double validation	269

Liste des tableaux

1.1	Modes d'Eady les plus instables	31
1.2	Topologie de la stabilité des ondes d'Eady	31
2.1	Paramètres de la série GÉOPHYSIQUE pour l'étude DRN	52
2.2	Étude modale : paramètre des cas supplémentaires	80
3.1	SND : paramètres pour les 5 séries de calculs présentés	95
3.2	SND : paramètres linéaires pour la série CALME	98
3.3	SND : paramètres linéaires pour la série RENFORCÉE	98
3.4	SND : paramètres linéaires pour la série TUMULTUEUX	98
3.5	Tendance des nombres adimensionnels	110
3.6	Dépendance paramétrique du tenseur R_{ij}	122
3.7	Dépendance paramétrique du tenseur b_{ij}	123
3.8	Dépendance paramétrique des flux normalisés q_{ij}^*	130
3.9	Les spectres de la turbulence géophysique	176
10	DRN - tests avec des fonctions - résumé des différences	196
11	DRN - tests de cohérence - résumé des échecs ou succès	199
12	SND résumé des validations avec des fonctions analytiques	247
13	SND - tests de cohérence - résumé des échecs ou succès	255
14	Paramètres pour le test d'universalité	257
15	Test d'entrées-sorties	259
16	Comparaison des résultats numériques avec la théorie des ondes	268
17	Récapitulatif des tests du code SND	270

Introduction

Ce sujet de mécanique des fluides porte sur l'analyse des fluctuations dans un écoulement de base cisailé verticalement, tournant verticalement et stratifié selon une condition d'admissibilité. L'écoulement défini ci-dessus sera dit barocline. Une telle configuration peut se retrouver dans de nombreux écoulements astrophysiques et géophysiques mais également dans des écoulements industriels.

Pour parvenir à notre but je dispose d'outils de la mécanique des fluides. D'une part la Théorie de Distorsion Rapide (TDR) développée par A. Salhi et C. Cambon^[119] et son équivalence démontrée avec la théorie des instabilités quadratiques. D'autre part les méthodes numériques pseudo-spectrales de haute précision avec la possibilité de généraliser, à un écoulement barocline, la méthode de R.S. Rogallo^[115] d'homogénéisation des écoulements cisailés turbulents.

La mécanique des fluides est une branche classique de la physique mais les outils pour la comprendre se sont toujours modernisés, et nos ancêtres n'ont pas attendu les peintures de Léonard de Vinci pour s'émerveiller et anticiper des remous présents dans un torrent. Aujourd'hui en ce début de 21^e siècle, les cyclones intenses sont en augmentation, les bouleversements climatiques mettent les problèmes de mécanique des fluides au devant de la scène scientifique et médiatique.

L'Homme a toujours observé des phénomènes de fluides : les nuages qui se déforment lentement, l'écume qui s'envole à la crête des vagues, la pluie tant attendue pour l'irrigation des cultures et tant crainte lors des inondations, la mousse dans le tambour de l'indispensable machine à laver, les échos sonores dans les vallées rocheuses, la cuisson de la soupe dont la convection de Rayleigh-Bénard fait que l'on ne sera pas obligé de jeter la casserole car le fond aura brûlé... Mais malgré l'omniprésence de la dynamique des fluides à l'échelle du vivant, l'équation qui régit le mouvement d'un fluide incompressible pose toujours de nombreux problèmes. Pour les mathématiciens, le problème d'existence, d'unicité et de régularité dans un espace périodique de dimension 3 (3D) est toujours non résolu tandis qu'en dimension 2 (2D) de nombreux résultats existent. Le problème de la simplification de l'écoulement 3D en écoulement 2D est au cœur de cette étude. En géophysique des fluides il est souvent fait des approximations quasi-2D. Cette approximation a pour avantage de réduire considérablement la complexité de la dynamique permettant ainsi de pousser plus en avant les développements théoriques et numériques, mais en contre partie il

est possible que certains mécanismes essentiels soient perdus.

Un sujet important en météorologie réside dans les instabilités de grandes échelles des courants d'Ouest aux latitudes moyennes. Dans le laboratoire, cette instabilité peut être modélisée par un écoulement cisailé dans un anneau tournant avec un gradient de température. Elle est appelée instabilité barocline car elle dépend uniquement des différences entre les surfaces d'iso-densité et les surfaces d'iso-pression dans le fluide. Il s'agira dans ce qui suit d'étudier les effets baroclines, pour des échelles de mouvements tels que les nombres de Froude $Fr = \frac{u}{NL}$ et de Rossby $Ro = \frac{u}{2\Omega L}$ ¹ sont $10^{-3} \lesssim Fr \lesssim 10^3$ et $10^{-3} \lesssim Ro \lesssim 10^3$. Les équations sélectionnées seront celles de Boussinesq dans le repère tournant, c'est-à-dire les équations de Navier-Stokes incompressibles auxquelles la force de Coriolis et la force d'Archimède ont été rajoutées. Il existe une bibliographie gigantesque sur les théories des instabilités baroclines, souvent traitées avec des modèles quasi-2D et avec des effets de confinement, mais bien que constituant une "brique élémentaire" pour les modèles de sous-maille, le cas homogène 3D de turbulence barocline régi par les équations de Boussinesq n'a jamais été envisagé.

Le chaos et la turbulence sont des thèmes récurrents et non dissociables de la mécanique de fluides. Avec les équations de Navier-Stokes, il est possible, selon la configuration, d'obtenir un écoulement, laminaire et/ou chaotique et/ou turbulent. Bien que souvent utilisées dans les écoulements géophysiques quasi-2D, les études avec les outils de la théorie du chaos, très délicats à utiliser dans un écoulement turbulent 3D, ne seront pas envisagées. Dans la présente étude nous nous concentrerons sur la dynamique spectrale des écoulements faiblement turbulents où la séparation claire entre les phénomènes ondulatoires et la turbulence n'est pas possible.

A court terme les grands défis pour l'humanité sont intimement liés à des problèmes de mécanique des fluides et il est probable que les écoulements cisailés-stratifiés-tournants aient un rôle à jouer dans au moins deux de ces révolutions.

Avec le développement des appareils de mesures (capteurs, satellites, vidéos ...) et de la puissance informatique (supercalculateurs parallèles) il est possible de coupler modélisation et expérience d'une manière quasi-instantanée pour anticiper toutes sortes de statistiques. Les modèles de prédiction de l'activité humaine, de calculs des risques, et autre modèles de contrôle, ont besoin, puisque l'on ne peut pas simuler toutes les échelles du problème, d'une bonne modélisation de la circulation atmosphérique et océanique. Ces modèles qui couplent physique et économie sont indispensables pour préserver l'avenir de la planète.

Un autre problème majeur du 21^e siècle réside dans les ressources énergétiques. Une solution envisageable est la fusion thermonucléaire, dont le conditionnement est un problème de mécanique des fluides, que ce soit avec l'utilisation des tokamaks ou avec la moins développée et plus controversée sono-fusion. Dans les tokamaks le plasma de bord peut être représenté par un écoulement magnétohydrodynamique turbulent. Cet écoulement stratifié tourne dans les directions toroïdales et poloïdales

¹Où N est la fréquence des ondes internes de gravité, 2Ω est la fréquence des oscillations inertielles et (L, u) est une (échelle, vitesse) caractéristique des structures les plus énergétiques.

et le cisaillement est un moyen de contrôle.

Mais ce sont d'autres histoires. Revenons à notre étude à caractère plus fondamental, qui est celle de la dynamique des fluctuations baroclines. La présentation de ce travail de thèse s'articule autour de trois axes que je vais maintenant introduire et justifier.

Chapitre 1 : La première partie est consacrée à établir en détail les équations qui serviront aux études numériques et à la théorie de distorsion rapide. Notons toutefois que les équations de la distorsion rapide peuvent être établies par une autre voie indépendamment de l'espace physique et plus propre à la turbulence d'onde. Étant donné que les équations présentées dans ce chapitre seront à la base des études ultérieures, il est nécessaire de maîtriser les approximations qui sont invoquées pour les écrire. Un autre but de ce chapitre est de faire le lien entre les études classiques et la nouvelle étude en montrant que la nouvelle étude tri-périodique n'est pas déconnectée des précédentes (Eady 1949) ; c'est une étude plus raffinée. Enfin la théorie de distorsion rapide sera présentée et les solutions exactes en $K_1 = 0$ trouvées par A. Salhi et C. Cambon^[119] seront utilisées pour montrer la pertinence de la distorsion rapide pour les écoulements géophysiques.

Chapitre 2 : Dans cette partie le code de distorsion rapide **LF5** est utilisé pour simuler un fluide barocline 3D non-visqueux et non-diffusif régi par la dynamique linéaire. Le but de ce chapitre est l'étude numérique rigoureuse du problème de distorsion rapide lorsque $K_1 \neq 0$. La dépendance du problème aux paramètres de gradient ϵ et Ri sera entièrement caractérisée avec l'utilisation des fonctions de Green déterministes. L'anisotropie spectrale sera aussi caractérisée par représentation de la densité d'énergie sur une sphère dans l'espace spectral. De plus en se donnant un champ de turbulence parfaitement isotrope à l'initialisation nous pourrons reconstruire le tenseur de Reynolds exprimé dans la base fixe et dans la base de Craya-Herring. Enfin nous comparerons les taux de croissance obtenus en distorsion rapide avec ceux de la théorie de l'instabilité barocline d'Eady 1949

Chapitre 3 : Dans ce dernier chapitre le code de simulation numérique directe **TR5** est utilisé pour simuler une turbulence barocline initialement isotrope avec un nombre de points de collocation allant jusqu'à 512^3 . Les statistiques en 1 point de temps et d'espace d'ordre 2, 3, 4 permettront de dégager les tendances des fluctuations baroclines non-linéaires aux paramètres (ϵ, Ri) . Les spectres sphériques et directionnels permettront une meilleure compréhension des transferts énergétiques entre nombres d'ondes lors de l'instabilité. Puis le tout sera complété par des visualisations instantanées tridimensionnelles de la turbulence dans l'espace physique. La dynamique linéaire et la dynamique non-linéaire seront comparées avec précision et les différences seront identifiées. Enfin nous essayerons de relier les résultats obtenus au contexte de la prévision météorologique en utilisant les spectres issus des simulations numériques directes.

Annexe : Validation des codes de calculs **LF5** et **TR5**. Une méthode efficace de validation automatique, lorsque l'on est en constant développement, est utilisée.

Chapitre 1

Équations pour un écoulement cisailé, tournant et stratifié

Par ailleurs l'effet de la baroclinie de la couche limite sur ces fonctions est très mal connu, lui aussi (§8.7.). Or la prise en compte de la baroclinie est sûrement importante dans le problème de la paramétrisation.

G. de Moor 1983

Les théories de la turbulence dans la CLA
[31] p281-282 §12.6.5

Résultats principaux

- [1] *Les équations des fluctuations d'un écoulement cisailé-stratifié-tournant admissible permettent de définir en plus du traditionnel temps barocline de Eady $\tau_{B3} = \frac{N}{Sf}$ deux autres temps baroclines nouveaux : $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ et $\tau_{B2} = \frac{f}{SN}$*
 - [2] *La solution exacte en $K_1 = 0$, trouvée par A. Salhi et C. Cambon (2006, [120]), est utilisée pour montrer que la théorie de distorsion rapide prévoit des croissances exponentielles supérieures à celles obtenues avec le modèle de Eady 1947 dans la gamme de nombres de Richardson $0 < Ri \lesssim 0,91$*
-

1.1 Introduction

Notons que le fait de considérer un écoulement homogène cisailé-stratifié-tournant verticalement tripériodique 3D basé sur les équations de Boussinesq-Coriolis est nouveau. En géophysique il existe une multitude d'études sur les écoulements baroclines (i.e. cisailé-stratifié-tournant verticalement) mais l'écoulement homogène 3D basé sur les équations de Boussinesq-Coriolis n'a pas été envisagé. Les premiers à l'avoir fait sont A. Salhi & C. Cambon ; c'est le point de départ de cette thèse.

Dans ce chapitre nous commencerons par un rappel des équations de la dynamique des fluides stratifiés tournant en suivant le même genre de démarche que celle utilisée par G. A. Blaisdell (1991, [9], chap2) dans sa thèse de Doctorat. La thèse de Doctorat de G.

A. Blaisdell est un développement et une utilisation d'un code de simulation numérique directe et une étude de la turbulence homogène compressible cisailée, ce qui la rend très proche de la présente étude. Ensuite nous ferons un rappel des équations de la turbulence homogène pour, par la suite, établir la condition très importante d'admissibilité sur le mouvement moyen. Par la même occasion des nouveaux temps linéaires seront introduits. Ensuite nous introduirons le changement de variables de R.S. Rogallo (1981, [115]) pour écrire les équations qui seront implémentées dans le code de calculs. Les quantités statistiques qui seront utilisées à la fois dans les études de distorsion rapide et dans les simulations numériques directes non-linéaires sont introduites dans ce chapitre. Pour les deux approches, les équations sont à l'origine les mêmes, elles sont toutes les deux basées sur les équations de la dynamique d'un écoulement stratifié tournant. Nous verrons aussi comment les équations quasi-géostrophique sont obtenues avec les équations de Boussinesq et le problème classique de Eady pour l'atmosphère. Par la suite les équations de la distorsion rapide seront introduites.

1.1.1 Zone frontale, circulation générale et écoulement admissible

Les écoulements atmosphériques, pour être en équilibre dynamique doivent satisfaire la **relation du vent thermique**. Cette relation, qui est inhérente aux écoulements stratifiés-tournants (suivant la même direction), lie le gradient de vitesse verticale au gradient de flottabilité horizontale. Les zones de fort gradient de vitesse formeront des fronts de température. Pour les océanographes, l'analogue de la relation du vent thermique, est le **courant thermo-halin**. La configuration de l'écoulement moyen qui sera considéré est visible sur le dessin 1.1. Dans cette configuration on peut : soit imposer le gradient horizontal de densité ce qui entrainera le mouvement du fluide stratifié-tournant (c'est le moteur de la circulation générale atmosphérique et océanique) soit imposer le gradient vertical de vitesse longitudinale (cisaillement frontale) qui entrainera un gradient horizontal de densité. L'écoulement de la figure 1.1 est un écoulement cisailé-stratifié-tournant **verticalement** admissible. Cette écoulement sera plus simplement appelé **écoulement barocline**. Dans chaque hémisphère le front polaire est la limite entre l'aire polaire et la cellule de Ferrel. Au niveau de cette limite il y a un pic du gradient de température. Le front polaire est le résultat de la rencontre de l'air froid polaire et de l'air chaud tropical. C'est un front stationnaire tant que les masses d'air ne bougent pas l'une par rapport à l'autre. La théorie du front polaire dit que les cyclones des latitudes moyennes sont associés à cette barrière. En hiver le front polaire se déplace vers l'équateur de sorte que les dépressions sont dominantes en hiver. En été c'est le contraire, les hautes pressions (anticyclone) dominant.

1.1.2 Référentiel géophysique : de la sphère au f -plan

Dans cette section nous allons rappeler les approximations et relations importantes des écoulements géophysiques tournant qui seront utilisés dans notre modèle. Commençons par effectuer un changement de repère.

Équation pour un fluide tournant

Pour la prédiction et la compréhension des écoulements géophysiques il est plus simple d'observer le fluide dans un référentiel tournant attaché à la sphère tournante. En passant

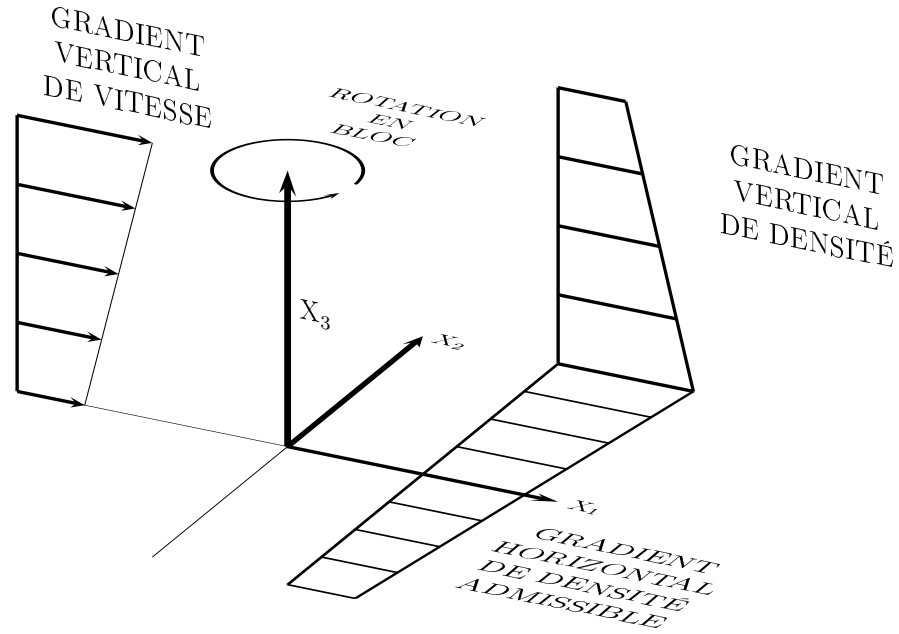


FIG. 1.1 – Écoulement admissible

par la formulation Lagrangienne, on part des équations dans le repère Galiléen puis on fait un changement de repère et il vient les équations dans le référentiel tournant. Le système de la dynamique dans un repère tournant s'exprime

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \vec{\nabla} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{\tau} \quad (1.1b)$$

$$\rho C \frac{dT}{dt} = -p \nabla \mathbf{u} + \Phi_\mu + \kappa \Delta T \quad (1.1c)$$

$$f(p, T, \rho) = 0 \quad (1.1d)$$

Pour l'étude de turbulence homogène que l'on envisage, ce repère est inutilisable car il est intrinsèquement inhomogène. Par exemple le système (1.1) serait utilisable si l'on voulait modéliser la circulation générale de l'atmosphère. Pour le rendre utilisable il faut faire l'approximation du f -plan. Pour parvenir à l'approximation du f -plan commençons par faire l'approximation du β -plan.

Les approximations du plan tangent

Par exemple lorsque l'on s'intéresse à un écoulement de l'ordre de 100 km à la surface de la Terre il n'est pas nécessaire de calculer tout l'écoulement sur la sphère. Les géophysiciens ont l'habitude de faire deux approximations. L'une est l'approximation du β -plan, l'autre est l'approximation du f -plan. L'approximation du f -plan est plus restrictive que celle du β -plan.

Pour effectuer l'**approximation du β -plan** on se place dans un repère local d'origine en un point $\mathcal{O}_{geo}$, situé sur la sphère terrestre. Ceci permet de faire un développement de Taylor autour du rayon de la planète. Dans l'approximation du β -plan le gradient du paramètre de Coriolis β est pris en compte. Le gradient a pour conséquence de créer une

certain inhomogénéité méridionale. Aux latitudes moyennes le paramètre β est tel que $\beta = O(10^{-11}) \text{ s}^{-1}.\text{m}^{-1}$ (J. Pedlosky, 1987, [103], p345).

Pour s'affranchir de l'inhomogénéité on considère que la force de Coriolis ne dépend plus de la latitude, c'est l'**approximation du f -plan**. Même dans l'approximation du f -plan la force de Coriolis et la force d'entraînement sont toujours présentes. Voyons comment s'expriment la force de Coriolis et la force d'entraînement.

Force d'entraînement - Force de Coriolis

Dans le repère tournant deux forces supplémentaires viennent s'ajouter aux équations du mouvement. L'une est la force d'inertie d'entraînement et l'autre est la force de Coriolis.

La **force d'inertie d'entraînement** $\mathbf{f}_{Ent}$ est une fonction du taux de rotation $\mathbf{\Omega}$ et de la distance de la particule de fluide à l'axe de rotation $\mathbf{x}$ définie par

$$\mathbf{f}_{Ent} = -\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{x} \quad (1.2)$$

Cette force étant irrotationnelle on peut définir une nouvelle variable de pression la contenant

$$\mathbf{f}_{Ent} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^2 (\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega}}{\mathbf{\Omega}^2}) \right) \quad (1.3)$$

La **force de Coriolis** $\mathbf{f}_{Cor}$ s'exprime en fonction du taux de rotation $\mathbf{\Omega}$ et de la vitesse de la particule de fluide $\mathbf{u}$ sous la forme

$$\mathbf{f}_{Cor} = -2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{u} \quad (1.4)$$

Dans le problème tri-périodique que nous envisageons la force d'inertie d'entraînement (1.2) sera mise sous sa forme de potentiel (1.3) et la nouvelle variable de pression sera ainsi une pression modifiée. Pour représenter la dynamique des écoulements atmosphériques d'échelle de longueur de l'ordre de 1 km le système (1.1) ne convient pas car il représente des mouvements d'échelles de longueur et de temps trop étendus. Il faut s'affranchir de la compressibilité présente dans les équations (1.1). Il existe de nombreuses approximations pour modéliser les écoulements géophysiques.

1.1.3 Approximation de Boussinesq

Avec la classique approximation de Boussinesq, dont les principales hypothèses sont récapitulées dans le tableau 1.1.3, on obtient les équations pour le fluide stratifié et tournant. La flottabilité désigne la capacité d'une particule à aller vers le haut. En d'autres mots c'est la capacité d'une particule à pouvoir flotter. Le champ de flottabilité est de même signe que le champ de température. C'est-à-dire que les zones de forte flottabilité correspondent aux zones de forte température. Pour être plus précis la flottabilité est définie à partir de la densité ρ , de la gravité g et de la densité de référence ρ_0 par la formule

$$b = -\frac{g}{\rho_0} \rho \quad (1.5)$$

Comme précédemment, en considérant que notre loi d'état est simple, la flottabilité est liée à la température T par la relation

$$b = -g\beta T \quad (1.6)$$

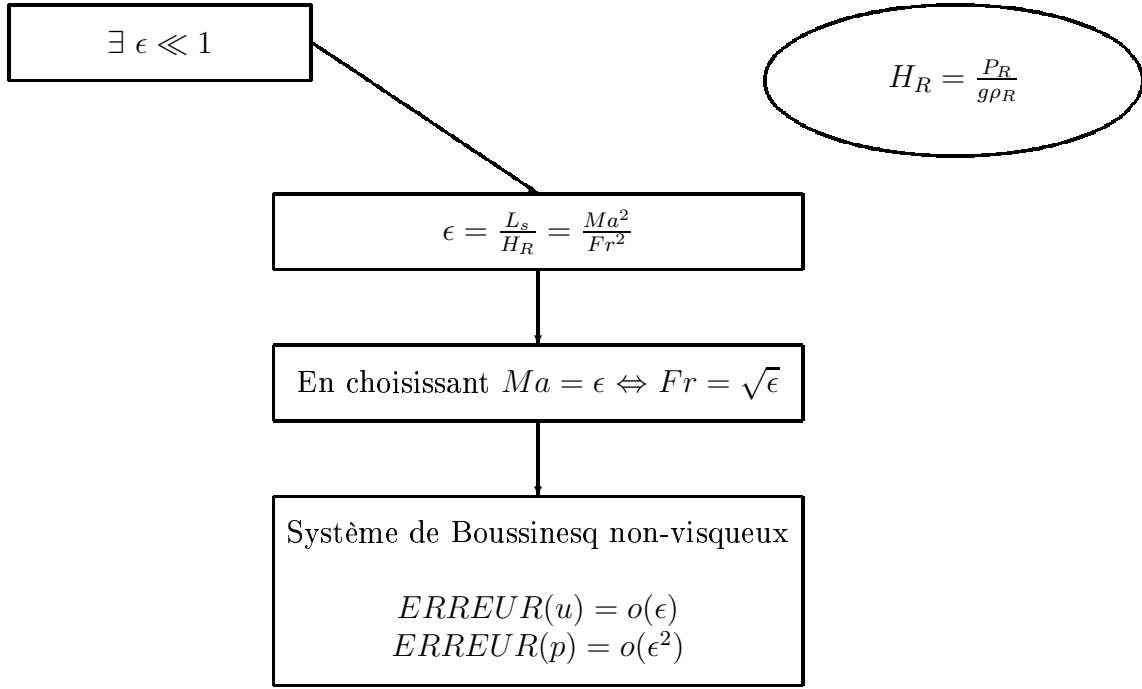


FIG. 1.2 – Organigramme illustratif de l'approximation de Boussinesq asymptotique. La pression de référence est notée P_R . La densité de référence est notée ρ_R . La gravité est notée g et la hauteur caractéristique de l'état statique est notée H_R . Une échelle caractéristique du mouvement est notée L_s . Ma est le nombre de Mach et Fr est le nombre de Froude. Les erreurs sont exprimées en petit o .

Le système de Boussinesq formulé en flottabilité s'exprime

$$\vec{\nabla} \mathbf{u} = 0 \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + b \cdot \mathbf{n} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \vec{\nabla}) b + N^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \chi \Delta b \quad (1.7c)$$

Remarquons que dans le système d'équation ci-dessus (1.7c) il apparaît la fréquence de Brunt-Wäsälä. Dans certaines publications ce n'est pas la flottabilité qui est représentée mais ce que l'on pourrait nommer la **coulabilité** (par exemple C.R. Rehmann et J. Hwan Hwang, 2005, [110]).

La coulabilité n'est rien d'autre que l'inverse de la flottabilité. Avec notre loi d'état simple le champ de coulabilité est à la densité ce que le champ de flottabilité est à la température. C'est-à-dire que le champ de coulabilité est du même signe que le champ de densité. La coulabilité s'exprime à partir de la flottabilité par

$$d = -b \quad (1.8)$$

Nous avons vu précédemment 4 formulations équivalentes des équations de Boussinesq. D'une part les formulations en flottabilité et en coulabilité sont plus intéressantes car elle implicitent le coefficient d'expansion thermique β , la gravité g et la masse volumique de référence ρ_0 de la force d'Archimède. D'autre part la formulation en flottabilité est plus répandue que la formulation en coulabilité. C'est pour ces deux dernière raisons que nous choisirons d'utiliser dans notre modèle homogène la formulation en flottabilité. Nous pouvons maintenant faire une décomposition statistique des équations de Boussinesq.

1.2 Turbulence homogène

La description de la turbulence homogène par G.K. Batchelor est la suivante :

Given an infinite body of uniform fluid in which motions conform to the equations (I.2.1) and (I.2.2), and given that at some initial instant the velocity of the fluid is a random function of position described by certain probability laws which are independent of position, to determine the probability laws that describe the motions of the fluid at subsequent times.

G.K. Batchelor 1982 The theory of homogeneous turbulence [7] p6

Dans la citation ci-dessus les équations (I.2.1) et (I.2.2) désignent les équations de continuité et l'équation du mouvement . Concrètement les hypothèses de turbulence homogène impliquent que les statistiques d'ordre 2 sont indépendantes de la position. Cette propriété est très utile, elle implique que la dérivé de la corrélation double $\overline{u_i u_j}(\mathbf{x}, t)$ est nulle

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} = 0 \quad (1.9)$$

L'utilisation de la propriété d'homogénéité 1.9 permet de découpler les équations pour les quantités fluctuantes et l'équation pour les quantités moyennes d'une turbulence inhomogène. Les fluctuations n'ont plus d'influence sur le mouvement moyen. On est dans le cas d'une turbulence passive par rapport au mouvement moyen. Dans ce qui va suivre nous allons établir les équations spectrales de la dynamique de la turbulence homogène barocline à partir des équations de la turbulence homogène en espace physique. La méthode est la même que celle de R.S. Rogallo 1981 [115] à l'équation de la flottabilité près. Il peut paraître superflu de recommencer une telle démarche. Peut être serait-ce le cas si l'on disposait d'un code de calcul déjà implémenté, mais ce n'est pas le cas. Il est donc **nécessaire**, étant donné le temps qui sera passé sur l'implémentation du code de calcul, que nous écrivions rigoureusement les équations spectrales de la turbulence homogène barocline. Nous allons commencer par exprimer des conditions sur le champ moyen.

1.2.1 Champ moyen admissible

Dans ce qui va suivre nous allons développer la relation qui est sans doute la plus importante de ce chapitre voire de cette thèse. Cette relation est la relation du vent thermique. Cette relation est une condition de réalisabilité du mouvement moyen. Commençons par enlever l'influence du tenseur des corrélations doubles des fluctuations sur le mouvement moyen en utilisant la propriété d'homogénéité dans l'équation pour les fluctuations.

Équations pour les vitesses

Les nouvelles équations pour le mouvement moyen peuvent être résolues indépendamment du champ des fluctuations de vitesses. Le système pour le mouvement moyen s'exprime uniquement en fonction du mouvement moyen U_i , de la pression moyenne mo-

diffiée P et de la flottabilité moyenne B . Son expression est

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.10a)$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k U_j) + \epsilon_{jkl} f_k U_l = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + B n_j \quad (1.10b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k B) + N^2 n_i U_i = \chi \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial B}{\partial x_k} \quad (1.10c)$$

Pour trouver une solution à ces équations nous allons nous restreindre à une classe de solution. Cette méthode est introduite pour la première fois dans des codes de simulation numérique directe par R.S. Rogallo (1977, [114], p38, (B1)) pour des études de turbulences homogènes irrotationnelles. Nous allons faire l'hypothèse que la vitesse moyenne et la flottabilité moyenne sont une combinaison linéaire de la position. Ainsi la vitesse moyenne s'exprimera en fonction du gradient de vitesse moyenne $A_{ij}(t)$ et la flottabilité moyenne s'exprimera en fonction du gradient de flottabilité $G_j(t)$ suivant les relations

$$U_i(\mathbf{x}, t) = A_{ij}(t) x_j \quad (1.11a)$$

$$B(\mathbf{x}, t) = G_j(t) x_j \quad (1.11b)$$

Pour trouver les conditions d'admissibilité du champ choisi il est plus simple d'utiliser l'équation du tourbillon moyen. Dans ce qui suit nous allons rappeler l'équation du tourbillon moyen.

Équation pour la vorticité

La vorticité moyenne (ou tourbillon moyen) est définie par

$$W_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} U_k \quad (1.12)$$

L  quation pour la vorticité (relative) moyenne s'extrait de 1.10b en prenant le rotationnel de léquation entière. L  quation du tourbillon s'exprime

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = (W_j + f_j) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial B n_k}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

Nous allons maintenant considérer un écoulement cisailé verticalement dans le f -plan et montrer avec léquation 1.13 qu'il y a des conditions bien précises à respecter sur le champ de flottabilité.

  coulement moyen barocline

Pour le cas considéré découlement barocline seule la composante A_{13} du tenseur des gradients de vitesses est non nulle (visible sur la figure 1.1). De plus les vecteurs taux de rotation et de flottabilité seront pris purement verticaux.

L  coulement moyen est défini par :

$$A_{ij} = S \delta_{i1} \delta_{j3} \quad (1.14a)$$

$$f_i = f \delta_{i3} \quad (1.14b)$$

$$n_i = \delta_{i3} \quad (1.14c)$$

La vitesse moyenne s'exprime comme celle d'un écoulement purement cisailé verticalement

$$U_i = S\delta_{1i}\delta_{3j}x_j \quad (1.15)$$

Il est immédiat en substituant 1.15 dans la définition de la vorticité 1.12 de montrer que seule la composante transverse de vorticité moyenne est non nulle

$$W_2 = S \quad (1.16)$$

En réinjectant la forme du champ de vorticité 1.16 dans l'équation pour le tourbillon moyen 1.13 on obtient les conditions d'admissibilité suivantes

$$G_1 = 0 \quad (1.17a)$$

$$\boxed{\boxed{G_2 = -Sf}} \quad (1.17b)$$

La relation doublement encadrée 1.17b est la version pour un écoulement homogène de la relation du vent thermique. Ainsi pour l'illustrer, un écoulement zonal soufflant vers l'Est fait pousser un gradient de flottabilité dans la direction Nord vers Sud. Notons qu'il aurait été équivalent de considérer au départ un gradient moyen de flottabilité dans la direction Nord vers Sud puis de montrer que cela implique un gradient de vitesse moyenne verticale.

Si la relation du vent thermique n'est pas respectée l'écoulement moyen ne peut pas exister. Toutefois certains chercheurs comme F.G. Jacobitz (2006, [65]) se sont intéressés aux cas où $G_2 = 0$ en invoquant un forçage qui pourrait annuler le terme en $-Sf$. Si cette approche est difficile à justifier physiquement d'un point de vue purement dynamique elle peut éclairer sur l'influence de la rotation, stratification et cisaillement. Par la suite des simulations dans la configuration de F.G. Jacobitz (2006, [65]) seront effectuées. Puisque la physique est difficile à justifier nous désignerons cette configuration par **non-admissible** du point de vue du mouvement moyen non forcé. Maintenant que notre champ moyen est défini nous pouvons définir des temps caractéristiques à partir des trois effets présents qui sont le cisaillement S , la rotation f et la stratification N .

1.2.2 Les temps linéaires caractéristiques

Dans cette section nous allons rappeler trois temps linéaires classiques, un temps barocline déjà utilisé et deux temps baroclines nouveaux. Ces temps sont dits linéaires car ils apparaissent tous dans les équations de la dynamique linéarisée que nous verrons plus en détail dans le chapitre suivant. Pour les écoulements en cisaillement, rotation et stratification pure il est classique de définir le temps caractéristique de cisaillement τ_S , le temps des oscillations inertiels τ_f et la période des ondes internes τ_N . Ces trois temps linéaires caractéristiques sont

cisaillement	$\tau_S = \frac{1}{S}$	(1.18)
rotation	$\tau_f = \frac{2\pi}{f}$	
stratification	$\tau_N = \frac{2\pi}{N}$	

Le temps barocline relatif aux taux de croissance des ondes de Eady a déjà été utilisé ; par exemple par D. Stammer ([126],p727,(1)), ce temps sera noté τ_{B3} . Mais il n'y a pas un temps barocline, il y en a 3. Les deux autres temps baroclines nouveaux sont τ_{B1} et τ_{B2} . Les trois temps baroclines ne seront pas construits au hasard, ils seront construits à partir des trois temps classiques définis ci-dessus 1.18. Le temps barocline τ_{B1} est exactement le produit de la période des ondes d'inertie et des ondes de gravité divisé par le temps caractéristique du cisaillement. Le temps barocline τ_{B2} est exactement le produit de la période des ondes de gravité et du temps caractéristique du cisaillement divisé par la période des ondes d'inertie. Le temps barocline τ_{B3} est exactement le produit de la période des ondes d'inertie et du temps caractéristique du cisaillement divisé par la période des ondes internes. En résumé les trois temps baroclines sont définis par

$$\begin{aligned}\tau_{B1} &= \frac{4\pi^2 S}{Nf} \\ \tau_{B2} &= \frac{f}{SN} \\ \tau_{B3} &= \frac{N}{Sf}\end{aligned}\tag{1.19}$$

Le temps utilisé par D. Stammer (dans [126]) correspond ici à τ_{B3} . Dans les modèles de Charney 1947 et de Eady 1949 le taux d'amplification est proportionnel au temps barocline τ_{B3} (voir la période temporelle dans les tableaux 1.1). Les temps que nous avons définis précédemment seront aussi bien utilisés dans les études spectrales de distorsion rapide que dans les simulations numériques directes non-linéaires. Maintenant nous allons revenir aux équations de la dynamique et nous intéresser aux fluctuations turbulentes.

1.2.3 Champ fluctuant

Nous avons vu qu'une des conséquences de l'hypothèse d'homogénéité est que toutes les statistiques d'ordre 2 en 1 point d'espace sont indépendantes de la position spatiale. En utilisant la propriété 1.9 dans les équations pour une turbulence inhomogène il vient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.20a}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k u_j + U_j u_k + u_k u_j) + \epsilon_{jkl} f_k u_l = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} + b n_j + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tag{1.20b}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(B u_k + U_k b + u_k b) + N^2 n_i u_i = \chi \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial x_k} \tag{1.20c}$$

Remarquons que le système ci-dessus 1.20 n'est pas découplé de l'écoulement moyen (U_i, B_i) . Le champ moyen pourra exercer son influence sur les fluctuations mais les fluctuations ne pourront pas modifier le champ moyen. Ce type de turbulence est qualifié de passive par C. Cambon (1982, [16], §I.3, p13). Maintenant nous allons substituer la

forme imposée 1.11 de l'écoulement moyen dans le système ci-dessus 1.20 pour obtenir

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.21a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + A_{kl}x_l \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + u_k A_{jk} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \epsilon_{jkl} f_k u_l = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} + B n_j + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (1.21b)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + U_k G_k + A_{kl}x_l \frac{\partial}{\partial x_k} b + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} b + N^2 n_i u_i = \chi \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial x_k} \quad (1.21c)$$

Le système 1.21 présente un problème car il fait intervenir explicitement les variables d'espaces x_i dans les termes d'advection des quantités fluctuantes par la vitesse moyenne. Pour résoudre ce problème R.S. Rogallo (1981, [115]) effectue un changement d'espace.

1.2.4 Déformation de l'espace suivant R.S. Rogallo 1981

Dans cette section nous allons rappeler le changement de variable d'espace utilisé par R.S. Rogallo (1981, [115]) pour rendre les équations compatibles avec une approche tri-périodique. Notons que les variables de R.S. Rogallo peuvent être interprétées comme des coordonnées lagrangiennes vis à vis de l'écoulement moyen et sont compatibles avec les coordonnées spectrales utilisées par C. Cambon (1982, [16]).

Commençons par substituer t par τ dans l'équation 1.20. Ensuite nous allons utiliser le changement de variables de R.S. Rogallo définies avec les nouvelles variables d'espace-temps $(\mathbf{X}, t)$ en fonction des anciennes $(\mathbf{x}, \tau)$ par

$$X_i = B_{ij}(t)x_j \quad (1.22a)$$

$$t = \tau \quad (1.22b)$$

La particularité du changement de variables de R.S. Rogallo est que les nouvelles variables d'espace se meuvent avec l'écoulement moyen si bien que la dérivé particulaire en suivant le mouvement moyen des nouvelles variables est nulle

$$\frac{\overline{d}X_i(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = 0 \quad (1.23)$$

L'équation 1.23 est équivalente à l'utilisation de trajectoires caractéristiques en Théorie de Distorsion Rapide de C. Cambon (1982, [16]). Dans le repère fixe définissons la position d'une particule par $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$. La dérivé temporelle de la position particule est définie par la vitesse moyenne $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = U_i$. Ainsi la trajectoire caractéristique des particules qui constitueront le nouveau repère est définie par l'équation différentielle

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = A_{ij}\mathbf{x}_j \quad (1.24)$$

Avec un peu de calcul différentiel on arrive en substituant le changement de coordonnées 1.22 dans la relation 1.23 à l'Équation Différentielle Ordinaire Linéaire (EDO)

$$\dot{B}_{il}(t) + A_{jl}B_{ij}(t) = 0 \quad (1.25)$$

La résolution de l'EDO (1.25) dans la configuration de l'écoulement moyen (1.14) est immédiate. Le tenseur de changement de repère s'exprime alors

$$B_{ij} = \delta_{ij} - S\delta_{i1}\delta_{j3}t \quad (1.26)$$

Remarquons que le tenseur B_{ij} dans l'équation ci-dessus est joué le même rôle que le tenseur F_{ji} de Cauchy (dans A. C. Eringen [36] 1971). Avec ce changement de variable il est maintenant possible d'obtenir des équations différentielles tri-périodiques qui sont Lagrangiennes par rapport au mouvement moyen.

1.2.5 Champ fluctuant quasi-Lagrangien

Maintenant que le tenseur B_{ij} est défini nous n'avons plus qu'à substituer le changement de variable 1.22 dans les équations pour les fluctuations turbulentes 1.21 afin d'obtenir une version Lagrangienne tri-périodique des équations de la dynamique turbulente. Le nouveau système d'équation quasi-Lagrangienne s'exprime

$$B_{li} \frac{\partial u_i}{\partial X_l} = 0 \quad (1.27a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + B_{lk} u_k \frac{\partial u_j}{\partial X_l} + U_k A_{jk} + \epsilon_{jkl} f_k u_l = -B_{lj} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial X_l} + b n_j + \nu B_{lk} B_{mk} \frac{\partial}{\partial X_l} \frac{\partial u_j}{\partial X_m} \quad (1.27b)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + U_k G_k + U_k B_{lk} \frac{\partial}{\partial X_l} b + N^2 n_i u_i = \chi B_{lk} B_{mk} \frac{\partial}{\partial X_l} \frac{\partial b}{\partial X_m} \quad (1.27c)$$

Le système ci-dessus 1.27 est celui qui sera implémenté dans la partie non-linéaire du code de turbulence homogène mais il n'est pas le seul système que l'on doit connaître pour utiliser les méthodes pseudo-spectrales de turbulence homogène. Il faut aussi utiliser la version équivalente dans l'espace spectral en mode de Fourier.

1.2.6 Décomposition spectrale en mode de Fourier

Puisque les coefficients du système différentiel 1.27 ne dépendent plus de $\mathbf{x}$ il est maintenant possible d'envisager une transformation de Fourier. Pour cela nous allons utiliser la transformation intégrale de Fourier définie par

$$\hat{u}_i(\mathbf{K}, t) = \frac{\imath}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{X}, t) e^{-\imath K_j X_j} d\mathbf{X} \quad (1.28)$$

Maintenant en utilisant la transformée de Fourier 1.28 sur le système d'équations 1.27 on obtient l'équivalent spectral de l'équation 1.27

$$K_l B_{li} \hat{u}_i = 0 \quad (1.29a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + \imath K_l B_{lk} [\widehat{u_k u_j}] + A_{jk} \hat{u}_k + \epsilon_{jkl} f_k \hat{u}_l = -\frac{1}{\rho_0} \imath K_l B_{lj} \hat{p} + \hat{b} n_j - \nu K_l B_{lk} K_m B_{mk} \hat{u}_j \quad (1.29b)$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} + \hat{u}_k G_k + \imath K_l B_{lk} [\widehat{u_k b}] + N^2 n_i \hat{u}_i = -\chi K_l B_{lk} K_m B_{mk} \hat{b} \quad (1.29c)$$

Le système ci-dessus sera utilisé pour la partie linéaire spectrale du code de turbulence homogène. Pour l'implémentation de la partie spectrale du code pseudo-spectral il sera aussi utile de remarquer que le vecteur d'ondes Eulérien peut être retrouvé par la formule

$$k(t) = K_l B_{li} \quad (1.30)$$

Utilisons l'identité du vecteur d'ondes Eulérien pour le calcul de la pression. Le terme de pression ne sera pas utilisé dans le code de simulation numérique directe mais il est

intéressant d'en avoir un aperçu pour l'analyse des résultats. Puisque le vecteur d'ondes dépend du temps il y aura une contribution instationnaire supplémentaire. En multipliant 1.29b par k_j on obtient

$$\hat{p} = \frac{\rho_0}{k(t)^2} \dot{k}_j(t) \hat{u}_j - \imath k_j k_k [\widehat{u_k u_j}] - S k_1 \hat{u}_3 + f(k_1 \hat{u}_2 - k_2 \hat{u}_1) + k_3 \hat{b} \quad (1.31)$$

1.3 Corrélation double en 1 point d'espace et de temps

A partir du système des équations pour les fluctuations il est possible d'obtenir les équations de transport pour les quantités corrélées. Nous n'insisterons pas sur l'obtention de ces équations car d'une part un tel développement est classique en turbulence. D'autre part, dans la présente thèse, ces équations sont utilisées comme un moyen d'analyse des résultats et non comme un moyen de génération des résultats, ce qui est moins critique. Commençons par rappeler les équations sur les corrélations de vitesse R_{ij} .

1.3.1 Équation de transport pour R_{ij}

L'équation de transport ¹ pour les corrélations doubles de vitesse en 1 points $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ ou tenseur de Reynolds s'exprime

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = P_{ij} + F_{ij} + T_{ij} + \Omega_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (1.32)$$

avec

$$P_{ij} = - (A_{ik} \overline{u_k u_j} + A_{jk} \overline{u_k u_i}) \quad \text{production} \quad (1.33a)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})} \quad \text{interactions de pression-déformation} \quad (1.33b)$$

$$F_{ij} = n_j \overline{u_i b} + n_i \overline{u_j b} \quad \text{effets de flottabilité} \quad (1.33c)$$

$$\Omega_{ij} = - (\epsilon_{ikl} \overline{u_j u_k f_l} + \epsilon_{jkl} \overline{u_i u_k f_l}) \quad \text{terme de transfert} \quad (1.33d)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad \text{diffusion par agitation moléculaire} \quad (1.33e)$$

Une autre version du tenseur de Reynolds, qui sera utilisée aussi bien dans les études de distorsion rapide que les simulations numériques directes, est représentée par le tenseur d'anisotropie. Le tenseur d'anisotropie est le déviateur du tenseur de Reynolds adimensionnel.

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ll}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (1.34)$$

Pour compléter la dynamique des corrélations nous allons maintenant présenter les corrélations croisées de vitesse avec la flottabilité M_i .

1.3.2 Équation de transport pour M_i

L'équation de transport pour les corrélations de vitesse avec la flottabilité $M_i = \overline{u_i b}$ aussi appelée flux (convectif) de flottabilité s'exprime

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = D_{M_i} + P_{M_i} + T_{M_i} + \Omega_{M_i} + S_{M_i} - \epsilon_{M_i} \quad (1.35)$$

¹Les équations de transport des corrélations doubles en un point de temps et d'espace sont écrites pour le cas où $\text{mod}(t, t_R) = 0$ de sorte que $B_{ij} = \delta_{ij}$ où t_R est la période de remaillage.

avec

$$D_{M_i} = - U_{i,l} \overline{u_l b} \quad \text{production par distorsion} \quad (1.36a)$$

$$P_{M_i} = - G_l \overline{u_i u_l} \quad \text{production par gradient de scalaire moyen} \quad (1.36b)$$

$$\Omega_{M_i} = - \epsilon_{ilm} f_l \overline{u_m b} \quad \text{terme de rotation} \quad (1.36c)$$

$$S_{M_i} = - N^2 n_l \overline{u_i u_l} \quad \text{terme de stratification} \quad (1.36d)$$

$$T_{M_i} = \frac{1}{\rho_0} p \frac{\partial b}{\partial x_i} \quad \text{interaction pression-gradient de flottabilité} \quad (1.36e)$$

$$\epsilon_{M_i} = \frac{\nu}{\chi} (\nu + \chi) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial k} \quad \text{terme de diffusion} \quad (1.36f)$$

Pour avoir toute les équations de transport des corrélations en 1 point il faut aussi définir l'équation pour l'auto-corrélation de flottabilité $\check{B}$.

1.3.3 Équation de transport pour $\check{B} = \overline{bb}$

L'équation pour l'auto-corrélation de flottabilité $\check{B} = \overline{bb}$ s'exprime

$$\frac{\partial \check{B}}{\partial t} = P_B + S_B - \epsilon_B \quad (1.37)$$

avec

$$P_B = - 2G_l \overline{u_l b} \quad \text{production par gradient de scalaire moyen} \quad (1.38a)$$

$$(1.38b)$$

$$S_B = - 2N^2 n_l \overline{u_l b} \quad \text{terme de stratification} \quad (1.38c)$$

$$\epsilon_B = 2\chi \overline{\frac{\partial b}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial k}} \quad \text{terme de diffusion} \quad (1.38d)$$

Avec les corrélations définies ci-dessus il est indispensable de définir les énergies. La vérification du bon comportement d'énergies sera une validation des codes de calcul.

1.3.4 Énergétique

Nous allons définir trois énergies. D'abord l'énergie cinétique turbulente, ensuite l'énergie potentielle turbulente et enfin l'énergie mécanique turbulente qui sera l'énergie totale de notre système.

Énergie cinétique

L'énergie cinétique turbulence est définie à partir des corrélations de vitesses par

$$Ek = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (1.39)$$

et son équation de transport se résume à

$$\frac{\partial Ek}{\partial t} = P_{Ek} + F_{Ek} - \epsilon_{Ek} \quad (1.40)$$

avec

$$P_{Ek} = \frac{1}{2} P_{ii} \quad \text{production par gradient de vitesse moyenne} \quad (1.41a)$$

$$(1.41b)$$

$$F_{Ek} = n_l \overline{u_l b} \quad \text{terme de flottabilité} \quad (1.41c)$$

$$\epsilon_{Ek} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \text{terme de diffusion} \quad (1.41d)$$

pour le cas de l'écoulement cisailé et stratifié considéré, les termes de droites s'écrivent

$$P_{Ek} = -S \overline{u_1 u_3} \quad (1.42a)$$

$$F_{Ek} = \overline{u_3 b} \quad (1.42b)$$

Maintenant que nous avons défini l'énergie cinétique turbulente il faut définir la deuxième énergie qui est l'énergie potentielle turbulente.

Énergie potentielle

L'énergie potentielle turbulente est définie à partir de l'auto-corrélation de flottabilité et de la fréquence de Brunt-Wäsälä par

$$Ep = \frac{1}{2} \frac{\overline{bb}}{N^2} \quad (1.43)$$

L'équation de transport de l'énergie potentielle est définie par

$$\frac{\partial Ep}{\partial t} = P_{Ep} + S_{Ep} - \epsilon_{Ep} \quad (1.44)$$

avec

$$P_{Ep} = -\frac{1}{N^2} G_l \overline{u_l b} \quad \text{production par gradient de scalaire moyen} \quad (1.45a)$$

$$(1.45b)$$

$$S_{Ep} = -n_l \overline{u_l b} \quad \text{terme de stratification} \quad (1.45c)$$

$$\epsilon_{Ep} = \chi \frac{1}{N^2} \frac{\partial b}{\partial x_k} \frac{\partial b}{\partial x_k} \quad \text{terme de diffusion} \quad (1.45d)$$

En tenant compte de la relation thermo-haline 1.17 le terme de la partie droite devient

$$P_{Ep} = \frac{Sf}{N^2} \overline{u_2 b} \quad (1.46a)$$

$$S_{Ep} = -\overline{u_3 b} \quad (1.46b)$$

Il est désormais possible de définir l'énergie totale turbulente Em à partir des deux énergies précédemment définies.

Énergie mécanique

L'énergie mécanique turbulente est définie par la somme de l'énergie cinétique turbulente et de l'énergie potentielle turbulente.

$$Em = Ek + Ep \quad (1.47)$$

L'équation de transport pour l'énergie mécanique turbulente, puisque $F_{Ek} + S_{Ep} = 0$, s'exprime

$$\frac{\partial Em}{\partial t} = P_{Ek} + P_{Ep} - \epsilon_{Ek} - \epsilon_{Ep} \quad (1.48)$$

On peut remarquer que la stratification du fluide n'intervient plus dans l'équation de transport pour l'énergie mécanique turbulente. Le terme de flottabilité dans l'équation pour le mouvement et le terme de stratification dans l'équation pour la flottabilité servent à échanger de l'énergie mais ne sont pas une production. **Le système puise de l'énergie dans le mouvement moyen par l'intermédiaire du gradient de vitesse verticale et du gradient de flottabilité horizontale.** Dans le bilan énergétique des équations quasi-géostrophiques le terme P_{Ek} ainsi que les termes de dissipation ne sont pas présents. Pour quantifier les rapports d'énergie nous allons définir les ratios ξ et χ .

Ratios

Définissons les ratios ξ et χ par

$$\xi = \frac{Ep}{Em} \quad (1.49)$$

et

$$\chi = \frac{Ep}{Ek} \quad (1.50)$$

ainsi l'égalité qui les lie est

$$\xi = \frac{\chi}{1 + \chi} \quad (1.51)$$

Le ratio ξ est implémenté comme paramètre de contrôle dans les codes de calcul car il permet de définir Ek et Ep à partir de Em tout en initialisant alternativement Ek ou Ep à zéro.

$$Ek = (1 - \xi).Em \quad (1.52a)$$

$$Ep = \xi.Em \quad (1.52b)$$

Nous avons désormais défini toutes les quantités qui seront utilisées aussi bien pour l'étude de distorsion rapide que pour la simulation numérique directe. D'autres quantités plus spécifiques à chaque étude seront définies ultérieurement au moment propice.

1.4 Le lien avec les équations Quasi-Géostrophiques et l'étude d'Eady 1949

Les équations Quasi-Géostrophiques (QG) s'obtiennent à partir des équations de Boussinesq-(Coriolis) en faisant l'hypothèse d'un faible nombre de Rossby $Ro = \frac{U}{fL_H}$.

Contrairement au problème de Charney 1947 l'étude d'Eady a lieu dans le f -plan c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'influence du gradient de la force de rotation. Les équations du modèle de Eady 1949 s'obtiennent par linéarisation des équations QG. L'écoulement moyen de Eady 1949 fait apparaître **exactement les mêmes paramètres de gradient S , N , f et $-Sf$** Nous allons d'abord faire le lien entre les différentes approches puis par la suite nous rappellerons des résultats sur les flux, les corrélations et la circulation secondaire.

1.4.1 Rappel sur la stabilité

E.T. Eady en 1949 ([35]) présente une approche idéalisée de l'atmosphère sous la forme d'un écoulement confiné entre deux plaques. L'une représente le sol et l'autre la tropopause. J. Pedlosky (1987, [103], p524, (7.7.3)) et M. Satoh (2004, [121], p154, (5.5.2)) obtiennent les solutions à partir des équations quasi-géostrophiques tandis que P.G. Drazin et W.H. Reid (1981,[34],p337,(45.22)) les obtiennent en partant des équations de Boussinesq puis avec un passage à la limite $Ro \rightarrow 0$. Dans les écoulements géophysiques il est fait une distinction entre l'échelle caractéristique verticale (H) et l'échelle caractéristique horizontale (L). Mais il est possible d'obtenir des instabilités baroclines avec des échelles caractéristiques horizontales et verticales (L) identiques. Les équations obtenues à partir du modèle de Boussinesq et celles obtenues directement à partir du modèle quasi-géostrophique sont équivalents à cause du passage à la limite géostrophique $Ro \rightarrow 0$. Pour avoir un aperçu de la forme des équations voir le "tableau-équation" 1.53.

approche mécanique : la pression modifiée	approche géophysique : la vorticité potentielle
$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Sz \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{N^2}{f^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right\} = 0$	$\left(\frac{\partial}{\partial t} + Sz \frac{\partial}{\partial x} \right) \Pi = 0$
avec $p = \phi$	avec $\Pi = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$ $= \frac{1}{f} \left(\zeta + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right)$ et $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$
P.G. Drazin et W.H. Reid [34] p338 (45.26) redimensionné	J. Pedlosky [103] p494 (7.2.8) linéarisé $\frac{\partial N(z)}{\partial z} = 0$ $\beta = 0$ M. Satoh [121] p154 (5.5.1)

(1.53)

Contrairement au modèle de Charney il n'y a pas de gradient de vorticité potentielle

$$\bar{\Pi}_y = 0 \quad (1.54)$$

Les fluctuations sont contenues dans une conduite rectangulaire avec des conditions limites de mur rigide avec glissement au Nadir (Bas), au Zénith (Haut), au Nord et au Sud.

$$\begin{cases} u_x = 0 & \text{lorsque } y = 0 \text{ ou } y = L \\ u_z = 0 & \text{lorsque } z = 0 \text{ ou } z = H \end{cases} \quad (1.55)$$

L'équation sur les amplitudes complexes que l'on obtient est plus simple que celle obtenue avec le modèle de Charney.

$$(S - \hat{c}) \left(\frac{d^2 \hat{a}}{dz^2} - \mu^2 \hat{a} \right) = 0 \quad (1.56)$$

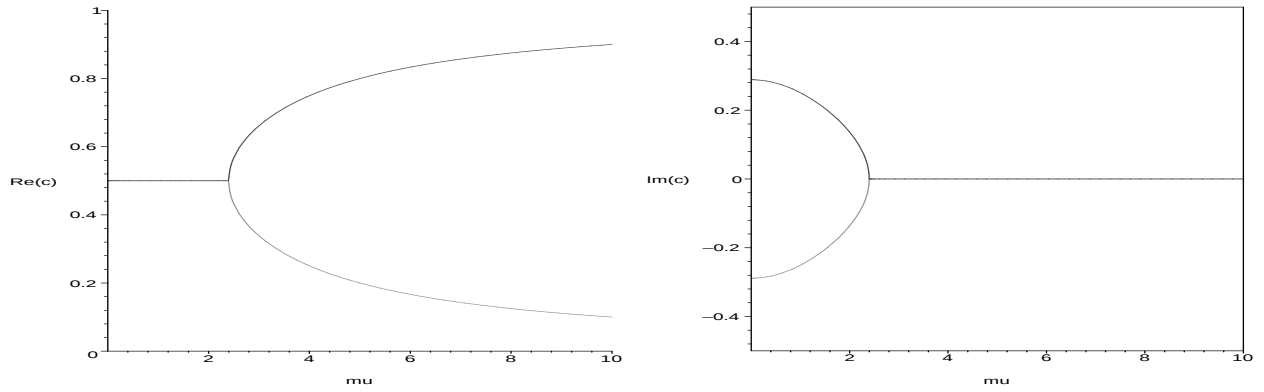
La solution générale de cette équation s'exprime avec des fonctions trigonométriques hyperboliques

$$\hat{a}(z) = c_1 \cosh(\mu z) + c_2 \sinh(\mu z) \quad (1.57)$$

Puis en utilisant les conditions aux limites et en cherchant des solutions non triviales on établit la relation de dispersion.

$$\hat{c}^* = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\mu^*} \sqrt{\left[\left(\frac{\mu^*}{2} - \coth\left(\frac{\mu^*}{2}\right)\right)\left(\frac{\mu^*}{2} - \tanh\left(\frac{\mu^*}{2}\right)\right)\right]} \quad (1.58)$$

La partie réelle et la partie imaginaire, en fonction du nombre d'ondes horizontales, sont représentées sur la figure 1.3. Comme pour le modèle de Charney il y a des solutions



(a) Partie réelle

(b) Partie imaginaire

FIG. 1.3 – Vitesse de phase des ondes de Eady en fonction du nombre d'ondes horizontales

singulières lorsque $Sz - \hat{c} = 0$ mais les solutions singulières ne sont pas instables. À partir de la relation de dispersion il est facile de tracer le taux d'amplification des ondes d'Eady visibles sur les images 1.4. Sur la figure 1.4 on remarque immédiatement que la solution qui à une dépendance constante selon la direction méridionale est celle qui est la plus amplifiée.

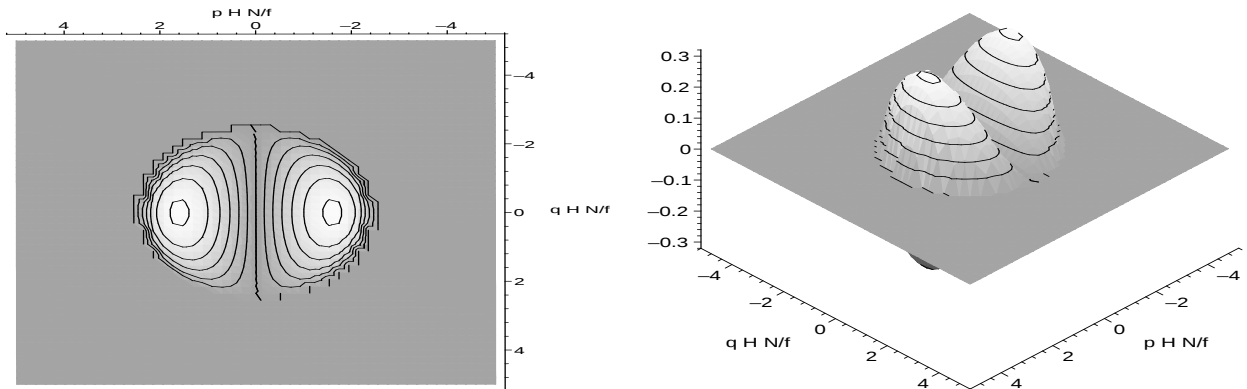


FIG. 1.4 – Taux d'amplification des ondes d'Eady

1.4.2 Condition d'instabilité

Pour qu'une instabilité apparaisse il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$q_n^2 < \frac{f^2}{N^2 H^2} \mu_C^{*2} \quad (1.59)$$

Lorsque le nombre d'ondes horizontales est inférieur à $\mu_C^* = 2.3994$ (J. Pedlosky, 1987, [103]; P.G. Drazin et W.H. Reid, 1981, [34]; M. Satoh, 2004, [121]) il y a des ondes instables et le maximum du taux d'amplification vaut $\omega^* = 0.3098$. Un récapitulatif des caractéristiques de l'onde instable de Eady est donné dans le tableau 1.1. Le modèle d'Eady filtre les ondes courtes contrairement au modèle de Charney qui ne filtre pas les ondes courtes. Bien que les échelles verticales soient différentes dans le modèle de Charney et de Eady les taux d'amplification de ces deux modèles sont quasiment identiques ($\omega = \frac{Sf}{N} \omega^*$ où $\omega^* \in [0.302, 0.322]$ lorsque $\frac{H}{h} \in [0, 1]$ pour Charney et $\omega^* = 0.3098$ pour Eady 1.1). Un

$p^* = 1.606$	$p = \frac{1}{H} \frac{f}{N} p^*$
$q^* = 0$	$q = \frac{1}{H} \frac{f}{N} q^*$
$\omega^* = 0.3098$	$\mu = \frac{1}{H} \mu^*$
	$\omega = S \frac{f}{N} \omega^*$
	$T = \frac{N}{Sf} \frac{2\pi}{\omega^*}$

TAB. 1.1 – Modes d'Eady les plus instables

résumé des solutions du modèle d'Eady est donné dans le tableau 1.2.

$\mu > \mu_C$	deux ondes neutres avec la vitesse de phase donnée par (1.58)
$z = \hat{c}$	solution singulière, spectre continu d'ondes neutres
$\mu < \mu_C$	une onde instable conjuguée avec une onde décroissante

TAB. 1.2 – Topologie de la stabilité des ondes d'Eady

1.4.3 Orientation des lignes de phases

En évaluant l'argument de $\hat{a}$ on peut trouver l'inclinaison des lignes de phase. Il faut regarder le signe de $\frac{d \arg \hat{a}}{dz}$

$$\frac{d \arg \hat{a}}{dz} = \frac{\phi_0^2}{|\hat{a}|} \frac{S \Im(\hat{c})}{|\hat{c}|^2} \quad (1.60)$$

Pour les ondes instables les lignes de phases s'inclinent vers la direction des x négatifs avec l'attitude (Haut-Ouest en Bas-Est). Tandis que pour les ondes neutres les lignes de phases sont indépendantes de l'altitude.

1.4.4 Corrélation et flux

À propos de la corrélation zonale-méridionale, M. Satoh montre qu'il n'existe pas de transport méridional de la composante zonale à cause des ondes instables de Eady :

$\widetilde{uv} = 0$ (M. Satoh, 2004, [121], p162). Quant à elle, la corrélation des composantes zonales et verticales moyennées sur le domaine est nulle : $\widetilde{uw} = 0$. Pour l'onde instable le flux de chaleur méridionale est positif : $\widetilde{v\theta} > 0$. Ce qui signifie que dans l'atmosphère, comme nous l'avons vu précédemment avec le modèle de Charney 1947, du fluide chaud est transporté vers les pôles lors de forte baroclinicité. De plus le flux de chaleur méridionale est constant selon la verticale : $\frac{\partial \widetilde{v\theta}}{\partial z} = 0$. Par contre le flux de chaleur verticale est positif : $\widetilde{w\theta} > 0$. La chaleur s'accumule vers le haut ce qui renforce la stratification stable du fluide.

1.4.5 Circulation secondaire

Une circulation méridienne moyennée zonalement est associée aux ondes instables de Eady (M. Satoh, 2004, [121], p162–167). Pour l'obtenir il faut prendre les non-linéarités d'ordre 2 dans l'analyse perturbative des équations quasi-géostrophiques car le cas linéaire à l'ordre 1 ne donne pas de circulation méridionale. M. Satoh (2004, [121]) obtient trois cellules, une indirecte au centre et deux autres directes au Nord et au Sud.

1.5 Le problème linéaire 3D homogène

Cette théorie a été élaborée par A. Salhi & C. Cambon (2006,[119]). Le fait d'avoir des temps linéaires courts devant les temps non-linéaires, nous permettra de linéariser le système d'équation (1.27). Après transformation de Fourier on obtient un système d'équations différentielles ordinaires linéaires plus simples que (1.29) car les termes non-locaux $[\widehat{\mathbf{u}} \otimes \widehat{\mathbf{u}}]$ et $[\widehat{b}\widehat{\mathbf{u}}]$ ne sont plus présents.

Le système de distorsion dans le cas linéaire visqueux s'écrit

$$k_i \hat{u}_i = 0 \quad (1.61a)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_j(\mathbf{K}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{K}} + A_{jk} \hat{u}_k + \epsilon_{jkl} f_k \hat{u}_l = -\imath k_j \hat{p} + \hat{b} n_j - \nu k_l k_l \hat{u}_j \quad (1.61b)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{b}(\mathbf{K}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{K}} + \hat{u}_k G_k + N^2 n_i \hat{u}_i = -\chi k_i k_i \hat{b} \quad (1.61c)$$

Il y a une complète analogie entre l'espace spectral et l'espaces physique. On peut même reconstruire les équations spectrales exprimées dans le repère Eulérien de départ. Pour cela nous utilisons la formule des dérivées partielles suivantes avec $\hat{u}(\mathbf{K}, t) = \hat{u}^E(\mathbf{k}(\mathbf{K}, t), t)$

$$\left. \frac{\partial \hat{u}(\mathbf{K}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{K}} = \left. \frac{\partial \hat{u}^E(\mathbf{k}(\mathbf{K}, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{k}} + \left. \frac{\partial k_j(\mathbf{K}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{K}} \left. \frac{\partial \hat{u}^E(\mathbf{k}(\mathbf{K}, t), t)}{\partial k_j} \right|_{\mathbf{t}} \quad (1.62)$$

puis en substituant la formule 1.62 dans 1.5 et en remplaçant $\hat{u}^E$ par $\hat{u}$ dans la nouvelle équation on obtient l'équation spectrale Eulérienne

$$k_i \hat{u}_i = 0 \quad (1.63a)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_j(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{k}} + \dot{k}_j \frac{\partial \hat{u}(\mathbf{k}, t)}{\partial k_j} + A_{jk} \hat{u}_k + \epsilon_{jkl} f_k \hat{u}_l = -\imath k_j \hat{p} + \hat{b} n_j - \nu k_l k_l \hat{u}_j \quad (1.63b)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{b}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{k}} + \dot{k}_j \frac{\partial \hat{b}(\mathbf{k}, t)}{\partial k_j} + \hat{u}_k G_k + N^2 n_i \hat{u}_i = -\chi k_i k_i \hat{b} \quad (1.63c)$$

Nous pouvons voir que le système ci-dessus est exprimé avec le vecteur d'ondes Eulérien. Examinons quelques propriétés du vecteur d'ondes Il est facile de montrer en utilisant la définition du changement de variable (1.22) et l'expression du vecteur d'ondes Eulérien en fonction du vecteur d'ondes Lagrangien (1.30) que

$$k_i x_i(t, \mathbf{X}) = K_i(t, \mathbf{k}) X_i \quad (1.64)$$

Remarquons que les variables $(\mathbf{X}, \mathbf{K})$ utilisées en TDR par C. Cambon et al. (1985, [19]) sont exactement les mêmes que celles de R.S. Rogallo dans les SND (1981, [115]). Il y a une complète équivalence entre la dynamique en espace physique et la dynamique en espace spectral. L'analogie de l'équation (1.23) sur les coordonnées physiques est l'équation eikonale pour le vecteur d'ondes qui s'exprime

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + k_p A_{pi} = 0 \quad (1.65)$$

L'équation (1.5) ne sera pas utilisée directement ; nous allons d'abord impliciter le terme de pression de l'équation (1.5).

1.5.1 Pression et opérateur de Kraichnan

Dans cette section nous présenterons le projecteur de Kraichnan que nous appliquerons à l'équation (1.5) pour éliminer le terme de pression. Il sera défini des propriétés particulières qui seront utilisées pour élaborer une méthode originale de traitement du terme de pression dans les simulations numériques directes. Commençons par une étude de propriété du tenseur de projection P_{ij}

Projecteur de Kraichnan

L'opérateur de projection sur le plan toroïdo-poloïdal² qui est aussi appelé projecteur de Kraichnan (A. Simone, 1995, [123], p9, §3) s'exprime

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} - \frac{k_i(t)k_j(t)}{k_l(t)k_l(t)} \quad (1.66)$$

En dérivant le tenseur de Kraichnan on obtient, avec un peu d'algèbre, une égalité qui sera utilisée pour impliciter le terme de pression. Cette égalité s'exprime

$$\frac{dP_{im}}{dt} u_m = \frac{1}{k_s k_s} k_i k_l A_{lm} u_m \quad (1.67)$$

Pour faire disparaître le terme de pression on va appliquer le projecteur de Kraichnan (1.66) à l'équation du mouvement (1.61b) et en utilisant l'identité d'incompressibilité (1.67) établie précédemment

$$k_i \hat{u}_i = 0 \quad (1.68a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + P_{ij} \epsilon_{jkl} f_k \hat{u}_l = P_{ij} \hat{b} n_j - \left(\delta_{il} - 2 \frac{k_i k_l}{k_s k_s} \right) A_{lm} u_m - \nu k_l k_l \hat{u}_j \quad (1.68b)$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} + \hat{u}_k G_k + N^2 n_i \hat{u}_i = -\chi k_i k_i \hat{b} \quad (1.68c)$$

Maintenant il s'agit de remettre le système (1.68) dans le contexte de l'écoulement barocline.

² Le plan toroïdo-poloïdal est un plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$ contenant le vecteur poloïdal et le vecteur toroïdal

Distorsion rapide barocline dans le repère fixe

Pour le cas de distorsion rapide plongé dans un écoulement moyen barocline comme défini précédemment 1.14 et visible sur la figure 1.1, nous avons vu qu'il faut tenir compte de la relation du vent thermique 1.17. Les équations 1.68 se simplifient mais elles gardent encore une grande complexité. Le nombre de paramètres (cisaillement, rotation et stratification) du problème étant déjà assez élevé on considérera uniquement le cas non-visqueux pour le mouvement et non-diffusif pour la flottabilité. En effectuant la substitution des éléments précédemment cités nous retrouvons les équations TDR baroclines établies par A. Salhi et C. Cambon (2006, [119],p5,(32) et (33)) : c'est-à-dire les équations de distorsion rapide barocline dans le repère fixe dans l'écoulement défini sur la figure 1.1

$$k_i \hat{u}_i = 0 \quad (1.69a)$$

$$\frac{d\hat{u}_i}{dt} = -S(\delta_{i1} - 2\frac{k_i k_1}{k_s k_s})\delta_{j3}\hat{u}_j - f P_{in} \epsilon_{n3j} \hat{u}_j + P_{i3} b \quad (1.69b)$$

$$\frac{db}{dt} = (Sf\delta_{i2} - N^2\delta_{i3})\hat{u}_i \quad (1.69c)$$

1.5.2 Les équations exprimées dans le repère de Craya-Herring

Dans cette section nous allons exprimer les équations de la dynamique dans le repère de Craya-Herring ce qui permet de réduire le nombre de composantes et la dimensionnalité du problème. Commençons, par rappeler la définition du repère local de Craya-Herring.

Définition du repère de Craya-Herring

Le repère local est initialement introduit par Craya (1957, [27],p39,fig3) puis développé par Herring (1974, [57]). Remarquons que l'on peut toujours décomposer un champ de vitesse isovolume de façon toroïdale-poloïdale avec deux scalaires et une direction privilégiée. L'un sera poloïdal s_{pol} l'autre sera dit toroïdal s_{tor} et la direction caractéristique sera $\mathbf{n}$ (S. Chandrasekhar, 1981, [20],p623,(1) et (2)). Dans l'espace physique le champ peut être ainsi exprimé par

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge (s_{tor} \mathbf{n}) + \nabla \wedge [\nabla(s_{pol} \mathbf{n})] \quad (1.70)$$

Dans l'espace spectral on définit le repère de Craya-Herring à partir de deux vecteurs. L'un est le vecteur d'ondes $\mathbf{k}$, l'autre est un vecteur fixe représentant une direction caractéristique du problème. Pour le cas de fluides stratifiés on va prendre la direction inverse à la gravité soit la direction verticale ascendante $n_i = \delta_{i3} : \mathbf{n}$. La version généralisée du repère de Craya-Herring s'exprime ainsi :

$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}}{\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{n}\ }$	$\equiv$	TOROÏDAL	(1.71)
$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(3)} \wedge \mathbf{e}^{(1)}$	$\equiv$	POLOÏDAL	
$\mathbf{e}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{k}$	$\equiv$	COMPRESSIBLE	

Pour se fixer les idées, le repère de Craya-Herring pour un écoulement stratifié où la direction caractéristique est choisie selon la verticale ascendante, s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= \frac{1}{k_{\perp}} \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}^{(2)} &= \frac{1}{kk_{\perp}} \begin{pmatrix} k_1 k_3 \\ k_2 k_3 \\ -k_{\perp}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}^{(3)} &= \frac{1}{k} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le repère de Craya-Herring dans l'espace spectral avec comme direction privilégiée la verticale ascendante est visible sur la figure 1.5(b). Il est difficile de trouver une correspondance exacte avec l'espace physique mais par exemple dans le cas d'un écoulement cylindrique le lieu des vitesses toroïdales (claires) et le lieu des vitesses poloïdales (foncées) est visible sur la figure 1.5(a)

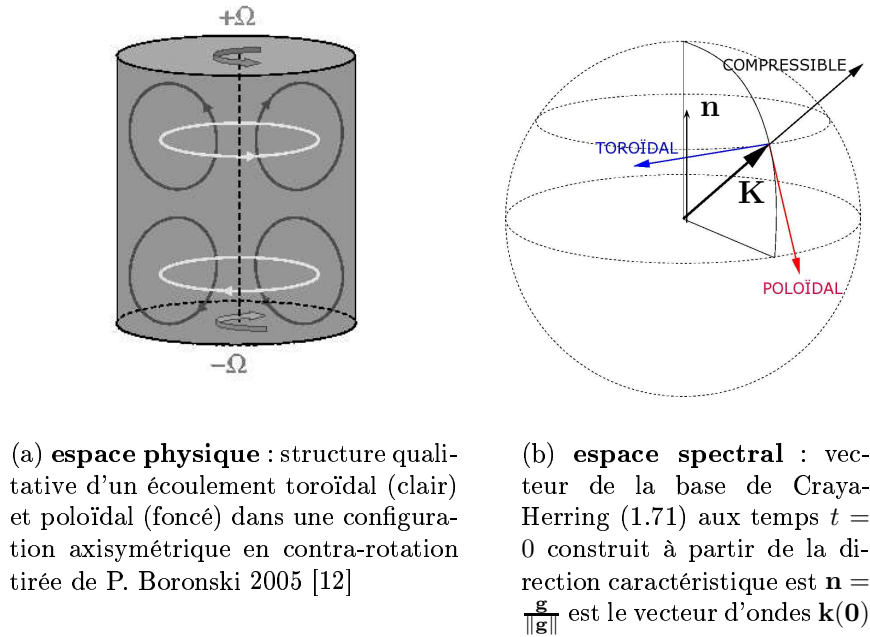


FIG. 1.5 – Écoulements à caractère toroïdo-poloïdal : à gauche un exemple d'écoulement à lignes de courant toroïdo-poloïdales dans l'espace physique et à droite dans l'espace spectral le repère de Craya-Herring qui décompose les amplitudes spectrales en une partie toroïdale et une partie poloïdale

Dynamique dans le repère de Craya-Herring

En partant du système 1.69 puis avec beaucoup de calculs tensoriels on arrive aux équations de la dynamique des composantes exprimées dans le repère de Craya-Herring. Les calculs intermédiaires ne sont pas rappelés pour ne pas alourdir le chapitre. Le système que l'on obtient est plus simple car il a maintenant 3 composantes au lieu de 4 dans 1.69. Le nouveau système s'exprime ainsi :

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = (S\frac{k_2}{k} + f\frac{k_3}{k})U^{(2)} \quad (1.73a)$$

$$\frac{du^{(2)}}{dt} = -f\frac{k_3}{k}u^{(1)} + S\frac{k_1k_3}{k_s k_s}u^{(2)} - \frac{k_\perp}{k}b \quad (1.73b)$$

$$\frac{db}{dt} = -Sf\frac{k_1}{k_\perp}u^{(1)} + (Sf\frac{k_2k_3}{kk_\perp} + N^2\frac{k_\perp}{k})u^{(2)} \quad (1.73c)$$

Afin de réduire le nombre de paramètres du problème nous allons effectuer une redimensionnalisation en utilisant le paramètre de baroclinicité ϵ et le nombre de Richardson de gradient Ri . Le paramètre de baroclinicité est défini par

$$\epsilon = \frac{Sf}{N^2} \quad (1.74)$$

et le nombre de Richardson de gradient est défini par

$$Ri = \frac{N^2}{S^2} \quad (1.75)$$

Toutefois pour garder un effet mémoire des paramètres initiaux il est introduit ζ_1 , ζ_2 et ζ_3 . Ces paramètres sont définis par : soit ζ_1 tel que si $S \neq 0$ alors $\zeta_1 = 1$ sinon $\zeta_1 = 0$ de même avec f et N pour respectivement ζ_2 et ζ_3 . Comme indiqué par A. Salhi et C. Cambon (2006, [119], p5), on fait un changement de variables pour traiter le terme de flottabilité

$$u^{(3)} = \frac{S}{N^2}b \quad (1.76)$$

Enfin substituons t par t^* dans 1.73 puis effectuons le changement de variable $t = St^*$ sur le temps et avec le changement de variables défini précédemment pour la flottabilité. Le nouveau système devient

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = (\zeta_1\frac{k_2}{k} + \zeta_2\epsilon Ri\frac{k_3}{k})u^{(2)} \quad (1.77a)$$

$$\frac{du^{(2)}}{dt} = -\zeta_2\epsilon Ri\frac{k_3}{k}u^{(1)} + \zeta_1\frac{k_1k_3}{k_s k_s}u^{(2)} - \zeta_3 Ri\frac{k_\perp}{k}u^{(3)} \quad (1.77b)$$

$$\frac{du^{(3)}}{dt} = -\zeta_1\zeta_2\epsilon\frac{k_1}{k_\perp}u^{(1)} + (\zeta_1\zeta_2\epsilon\frac{k_2k_3}{kk_\perp} + \zeta_3\frac{k_\perp}{k})u^{(2)} \quad (1.77c)$$

Maintenant que nous avons réduit le nombre de composantes et le nombre de paramètres (les ζ_1 , ζ_2 et ζ_3 ne sont pas vraiment des paramètres, c'est juste des "interrupteurs" qui seront utiles pour l'implémentation du code de distorsion rapide) il est encore possible de simplifier le système. A. Salhi et C. Cambon (2006, [119]) ont montré qu'il était possible de réduire la dimensionnalité du système en se plaçant en coordonnées sphériques.

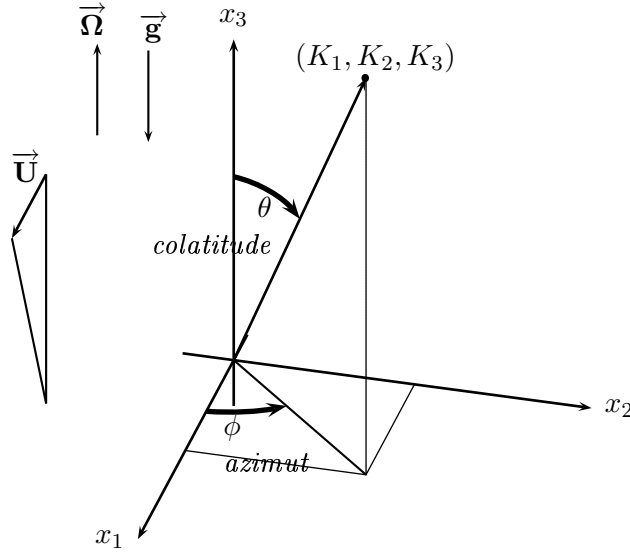


FIG. 1.6 – Repère sphérique pour la position du vecteur d'ondes

Coordonnées sphériques

Considérons le repère sphérique défini sur la figure 1.6. La vitesse zonale est portée par la direction x_1 , la gravité et la rotation sont orientées suivant la direction x_3 . L'angle θ est la colatitude et ϕ représente l'azimut. Dans le nouveau repère la surface élémentaire sur une sphère iso-K est définie par :

$$\begin{cases} K d\theta \\ K \sin(\theta) d\phi \end{cases} \quad (1.78)$$

Les anciennes variables en fonction des nouvelles s'expriment :

$$K_1 = K \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (1.79a)$$

$$K_2 = K \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (1.79b)$$

$$K_3 = K \cos(\theta) \quad (1.79c)$$

et l'expression du vecteur d'ondes Eulérien en fonction de nouvelles coordonnées Lagrangienne s'exprime ainsi :

$$k_1 = K \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (1.80a)$$

$$k_2 = K \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (1.80b)$$

$$k_3 = K \cos(\theta) - \zeta_1 t \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (1.80c)$$

Le système en fonction de (θ, ϕ) est obtenu en substituant les coordonnées Eulériennes dans (1.73). Son expression est :

$$\frac{du^{(1)}}{dt} = (\zeta_1 \frac{\sin \theta \sin \phi}{k^*} + \zeta_2 \epsilon Ri \frac{k_3^*}{k^*}) u^{(2)} \quad (1.81a)$$

$$\frac{du^{(2)}}{dt} = -\zeta_2 \epsilon Ri \frac{k_3^*}{k^*} u^{(1)} + \zeta_1 \frac{\sin(\theta) \cos(\phi)}{k^{*2}} u^{(2)} - \zeta_3 Ri \frac{\sin(\theta)}{k^*} u^{(3)} \quad (1.81b)$$

$$\frac{du^{(3)}}{dt} = -\zeta_1 \zeta_2 \epsilon \cos(\phi) u^{(1)} + (\zeta_1 \zeta_2 \epsilon \frac{\sin(\phi) k_3^*}{k^*} + \zeta_3 \frac{\sin(\theta)}{k^*}) u^{(2)} \quad (1.81c)$$

où

$$k_3^* = \cos(\theta) - \zeta_1 t \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (1.82a)$$

$$k^* = \sqrt{1 - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) t + \sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 t^2} \quad (1.82b)$$

On remarquera que le système est maintenant indépendant de la norme du vecteur d'ondes K . Il suffit maintenant de résoudre dans l'espace colatitude-azimut. C'est-à-dire que le problème à trois dimensions est ramené à un problème à deux dimensions dans l'espace spectral sphérique. Le problème équivalent dans l'espace physique reste à trois dimensions mais a une symétrie d'échelle. A propos des symétries, rappelons la conséquence de la symétrie hermitienne des amplitudes spectrales. La symétrie hermitienne des amplitudes spectrales s'exprime par

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \text{conj}(\hat{u}(-\mathbf{k})) \quad (1.83)$$

Le système (1.77) est non-visqueux donc les amplitudes spectrales sont des nombres réels purs. La condition (1.83) devient une condition de parité sur la partie réelle

$$u_R(\mathbf{k}) = u_R(-\mathbf{k}) \quad (1.84)$$

et en repère sphérique la condition 1.84 s'exprime

$$u_R(k, \theta, \phi) = u_R(k, \pi - \theta, \phi - \pi) \quad (1.85)$$

Maintenant pour capturer le noyau déterministe présent dans le système (1.81) nous allons l'exprimer à partir des fonctions de Green.

1.5.3 Fonctions de Green

Dans cette section nous allons écrire le système différentiel pour les fonctions de Green puis présenter quelques solutions exactes de problèmes classiques et enfin la solution en $K_1 = 0$ de A. Salhi et C. Cambon du problème barocline complet. Commençons par faire le lien entre les amplitudes spectrales et les fonctions de Green. La fonction de Green est indépendante des conditions initiales c'est-à-dire que les conditions initiales peuvent être une réalisation particulière de variables aléatoires mais le lien entre les conditions initiales et le champ aux temps $t > t_I$ lui est entièrement déterministe. La fonction de Green permet de trouver le champ aléatoire $u^{(i)}(\mathbf{k}, t)$ aux temps t en fonction du champ $u^{(i)}(\mathbf{k}(t_I), t_I)$ aléatoire aux temps t_I . Cette correspondance s'écrit

$$u^{(i)}(\mathbf{k}, t) = g_{ij}(\mathbf{k}, t, t_I) u^{(i)}(\mathbf{k}(t_I), t_I) \quad (1.86)$$

Il y a une relation linéaire entre la fonction de Green exprimée dans le repère fixe G_{ij} et la fonction de Green exprimée dans le repère de Craya-Herring g_{ij} . Par exemple si la flottabilité est ignorée cette relation s'écrit

$$G_{ij} = \sum_{n=1,2} \sum_{m=1,2} e_i^{(n)}(\mathbf{k}) g_{nm} e_j^{(m)}(\mathbf{K}) \quad (1.87)$$

Le tenseur de Green est très important dans les modélisations spectrales de la turbulence. Par exemple le tenseur de Green linéaire est nécessaire pour évaluer la fonction temporelle

³ $\phi_{kpq}(t, t') = \int_t^{t'} \overline{G}(\tau) \overline{G}(\tau) \overline{G}(\tau) d\tau$ des modèles spectraux de type Lagrangien History Direct Interaction Approximation (LHDIA) ou Eddy Damped Quasi Normal Markovian (EDQMN). L'écriture du système sur les amplitudes spectrales est immédiate à partir du système (1.81) et de la définition des fonctions de Green (1.86)

$$\frac{dg_{1j}}{dt} = (\zeta_1 \frac{\sin \theta \sin \phi}{k^*} + \zeta_2 \epsilon Ri \frac{k_3^*}{k^*}) g_{2j} \quad (1.88a)$$

$$\frac{dg_{2j}}{dt} = -\zeta_2 \epsilon Ri \frac{k_3^*}{k^*} g_{1j} + \zeta_1 \frac{\sin(\theta) \cos(\phi)}{k^{*2}} g_{2j} - \zeta_3 Ri \frac{\sin(\theta)}{k^*} u^{(3)} \quad (1.88b)$$

$$\frac{dg_{3j}}{dt} = -\zeta_1 \zeta_2 \epsilon \cos(\phi) g_{1j} + (\zeta_1 \zeta_2 \epsilon \frac{\sin(\phi) k_3^*}{k^*} + \zeta_3 \frac{\sin(\theta)}{k^*}) g_{2j} \quad (1.88c)$$

Le système ci-dessus est un système d'équation linéaire homogène à coefficient variable. Les systèmes différentiels linéaires autonomes (EDOsA) sont faciles à résoudre analytiquement mais il n'existe pas de mathématiques pour résoudre les systèmes différentiels linéaires non-autonomes (EDOsNA). Donc il sera nécessaire d'utiliser une intégration numérique pour résoudre le système (1.88). Le système ci-dessus (1.88) est celui qui sera implémenté dans le code de calcul de distorsion rapide. Maintenant pour imager la dynamique contenue dans le système nous allons étudier des solutions analytiques particulières du système (1.88).

Avec la solution exacte pour $k_1 = 0$ de A. Salhi et C. Cambon 2006

A. Salhi et C. Cambon (2006, [119]) ont résolu le cas particulier du système d'équation (1.88) lorsque $k_1 = 0$. Cette solution conduit dans une certaine zone spectrale à des développements exponentiels lorsque $0 < Ri < 1$ ce qui est cohérent avec les résultats trouvés avec le modèle agéostrophique de P.H. Stones (1966,[128] ; 1970,[129] ; 1972,[130]) vu précédemment. Comme on peut le voir sur la figure 1.7, la partie spectrale de la zone instable voit sa colatitude diminuer lorsque ϵ diminue. Dans la zone d'instabilité le taux de croissance exponentielle donné par A. Salhi et C. Cambon (2006, [119],p6(39)) s'exprime

$$\omega_{TDR_{K1=0}} = \epsilon \sqrt{(Ri (1 - Ri))} S \quad (1.89)$$

Nous avons vu que le taux de croissance maximum du mode de Eady est défini par $\omega_{Eady_{1947}} = \frac{S}{N} 2\Omega \omega^*$ soit avec les paramètres ϵ et Ri

$$\omega_{Eady_{1947}} = \epsilon \sqrt{Ri} \omega^* S \quad (1.90)$$

Maintenant il est immédiat de comparer les deux taux d'amplification. Définissons le critère de comparaison v par

$$v = \frac{\omega_{TDR_{K1=0}} - \omega_{Eady_{1947}}}{S} \quad (1.91)$$

qui s'exprime uniquement en fonction du nombre de Richardson Ri , du paramètre de baroclinicité ϵ et du taux d'amplification maximale adimensionnée des ondes de Eady ω^* sous la forme

$$v = \epsilon \sqrt{Ri} (\sqrt{1 - Ri} - \omega^*) \quad (1.92)$$

³ Par exemple pour certain modèle EDQMN la fonction temporelle apparait pour le calcul des corrélations triples en fonction de corrélations doubles $\langle uuu \rangle(t') = \sum \langle uu \rangle \langle uu \rangle \phi_{kpq}(t, t')$

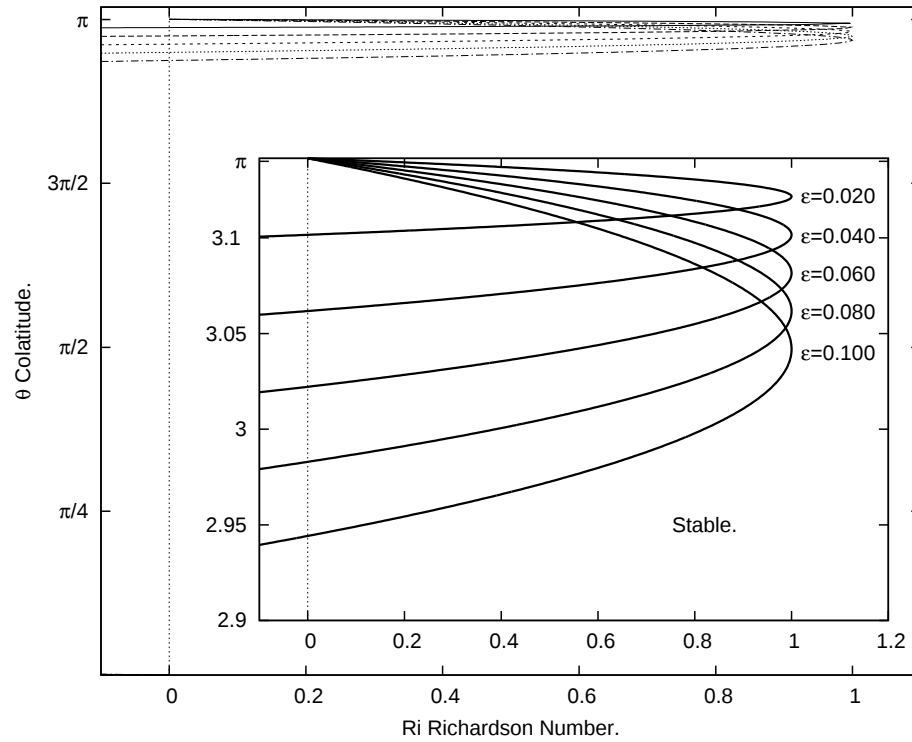


FIG. 1.7 – Courbes neutres paramétrées par ϵ avec en ordonnée l'angle du vecteur d'ondes par rapport à la verticale θ et en abscisse Ri

Lorsque $v > 0$ cela implique que les taux d'amplification prédits par la TDR sont plus importants que ceux prédits par Eady 1947. On peut voir sur la figure 1.8 que pour une gamme de nombres de Richardson Ri et de paramètres de baroclinicité ϵ la TDR prévoit des taux d'amplification plus importants que ceux de Eady 1947. En substituant le taux d'amplification maximum des ondes d'Eady qui se trouve dans le tableau 1.1 on trouve que le domaine de stratification stable où le présent modèle TDR a une croissance plus importante que le modèle d'Eady 1947 est

$$0 < Ri \lesssim 0,91 \quad (1.93)$$

On remarquera que plus le paramètre de baroclinicité ϵ est important plus la différence entre les deux modèles est importante. Dans la partie de l'espace spectral où $K_1 = 0$ le modèle de Eady 1947 peut filtrer certains phénomènes que le présent modèle TDR contient. Maintenant il s'agit de savoir s'il existe des modes encore plus instables sur d'autres parties de la sphère spectrale. Les tentatives de résolutions du système non-autonome en série de toutes sortes ayant été infructueuses il sera implémenté un code numérique qui calcule les fonctions de Green. Pour extraire une information physique des résultats il sera calculé les corrélations doubles en 1 point de temps et d'espace.

Corrélation

Les corrélations doubles en 1 point de temps et d'espace peuvent être extraites de la dynamique linéaire des fonctions de Green. Pour cela il faut se donner un champ initial $u^{(p)}(k(0), 0)$. Si le champ initial est isotrope, les statistiques d'ordre 1 sont invariantes par rotation. De plus puisque nous sommes dans le cas non-visqueux, le module du vecteur

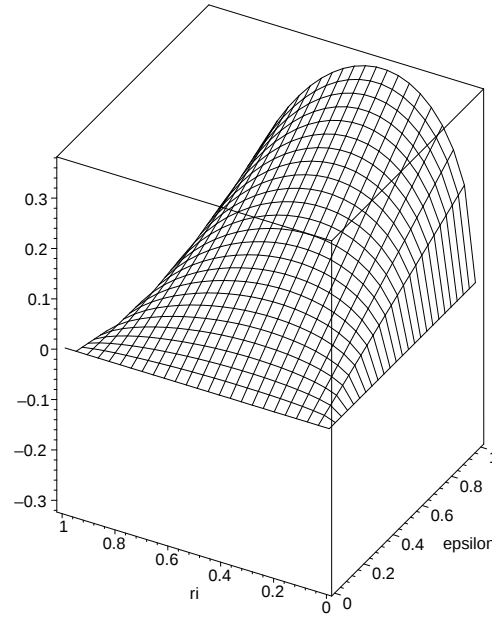


FIG. 1.8 – Surface représentant la valeur du critère de comparaison v qui compare le taux d'amplification de la solution de Eady au taux d'amplification de la solution A. Salhi et C. Cambon 2006 [119] en $K_1 = 0$. Le critère de comparaison est exprimé en fonction de ϵ et Ri . Lorsque le critère de comparaison est positif alors la solution de A. Salhi et C. Cambon a une croissance plus grande.

d'ondes n'intervient pas dans les équations. La relation qui lie les corrélations initiales aux corrélations finales est

$$\overline{u_{(i)} \cdot u_{(j)}} = \overline{g_{il} \cdot g_{jl}} \cdot \overline{u^{(l)}(0) \cdot u^{(l)}(0)} \quad (1.94)$$

La formule ci-dessus sera particulièrement utile lorsque l'on voudra comparer les résultats issus de l'étude de distorsion rapide numérique et ceux de la simulation numérique directe non-linéaire. Nous avons maintenant toutes les bases pour commencer l'approche numérique des équations. Aussi pour une analyse à posteriori des résultats de distorsion rapide et des résultats de la simulation numérique directe il est intéressant de connaître au moins les équations des statistiques en 1 point de temps et d'espace des corrélations doubles.

1.6 Conclusion

A partir des équations de Boussinesq nous avons rappelé les équations classiques de la turbulence homogène. Les équations moyennes issues de la décomposition statistique nous ont permis d'établir l'homologue de la relation du vent thermique pour un écoulement homogène qui s'exprime par $G_2 = -Sf$. Cette relation est très importante pour tous les chapitres qui vont suivre.

Nous en avons profité pour définir 6 temps linéaires. Trois temps classiques et trois temps baroclines dont deux temps baroclines jamais utilisés qui sont le temps $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2}{Nf}$ et $\tau_{B2} = \frac{f}{SN}$.

Ensuite avec le changement de variables de R.S. Rogallo (1981, [115]) nous avons écrit les équations qui serviront à l'implémentation des codes de calcul.

Le problème d'Eady 1947 à été revu en faisant apparaître les mêmes paramètres de gradient que ceux utilisés dans la nouvelle approche homogène 3D basée sur les équations de Boussinesq-(Coriolis) pour montrer le lien entre les deux études.

Les courbes de stabilité neutre de la solution particulière de A. Salhi et C. Cambon (2006, [120]) ont permis d'identifier que la zone instable a une étendue en colatitude très faible.

Enfin il a été démontré que le modèle de Eady 1947 est inadéquat pour prédire des solutions instables que le présent modèle TDR prédit lorsque $Ri \lesssim 0,91$.

Étude numérique de distorsion rapide

I have no satisfaction in formulas unless I feel their numerical magnitude.

William Thomson alias Lord Kelvin 1824 - 1907

Résultats principaux

[1] *Le problème linéaire de l'écoulement cisaillé-stratifié-tournant verticalement présente de fortes croissances transitoires puis une saturation lorsque le premier temps barocline défini par $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ est dépassé. Ces croissances transitoires sont assez puissantes pour déstabiliser l'écoulement*

[2] *L'étude de la norme du tenseur de Green montre que l'énergie est localisée vers les pôles ou au voisinage de $\phi = \frac{\pi}{2}$ en espace spectral sur le maillage sphérique (i.e. $k_1 = 0$ dans le repère cartésien). La projection cylindrique des valeurs fortement amplifiées fait apparaître une forme de "fer à cheval"*

Méthodes numériques

*Écriture d'un nouveau code spectral d'analyse linéaire en mode de Fourier Lagrangien sur maillage sphérique (**LF5**).*

2.1 Introduction

Dans ce chapitre il sera fait référence à des *temps courts* ($tS = 3$), *moyens* ($tS = 30$) et *très longs* ($tS = 1000$). Cette nomination n'est pas valable dans l'absolu, elle est utile dans la présente étude. De telles désignations ont déjà été utilisées dans la thèse de doctorat de A. Simone pour des études numériques de distorsion rapide (1995, [123], p75, §4.6.1 et §4.6.2). A. Simone attribue aux temps longs les valeurs $St = 10$ ou $St = 14$. En théorie de distorsion rapide il est souvent utilisé des développements asymptotiques pour caractériser les évolutions (pour avoir un aperçu des développements utilisés en TDR le lecteur est orienté vers le livre de J. Piquet 1999 [104] p196–222 §4). Pour guider les développements analytiques il est intéressant de regarder numériquement des *temps courts* ou *très longs*.

Il sera d'abord présenté le nouveau code numérique **LF5** (**LF5** pour "analysis of Lagrangian Fourier mode up to 5 parameters") qui a été écrit. Par la suite nous tenterons

d'évaluer la dépendance du système linéaire barocline aux paramètres ϵ et Ri . Pour cela le maximum de la norme du tenseur de Green sera représenté sur des "cartes" en ϵ - Ri . Une étude analytique menée par A. Salhi et C. Cambon (2006, [119]) a permis de cerner la sensibilité des équations lorsque le mode zonal est nul. Les auteurs ont montré qu'il existe des solutions exponentiellement croissantes. De plus nous avons vu au chapitre précédent que ces croissances étaient dans une certaine zone plus importante que les croissances du problème d'Eady 1949. Le cas particulier $k_1 = 0$ sera utilisé pour caractériser les croissances des modes sur le reste de la sphère. En vue d'une application aux écoulements géophysiques, il sera étudié 6 calculs où les équations prennent des valeurs (ϵ, Ri) géophysiquement envisageables. Nous finirons par une étude des fonctions de Green modales qui sont le "cœur" des solutions du problème TDR.

2.2 Code de distorsion rapide : l'algorithme **LF5**

2.2.1 Méthode numérique et informatique

Un nouveau code de distorsion rapide numérique basé sur la résolution des fonctions de Green a été écrit en partant de zéro. Les codes purement spectraux ont déjà fait leurs preuves. C. Cambon (1979, [15] cité dans [123]) a utilisé un code de distorsion rapide pour étudier des déformations homogènes puis A. Simone (1995, [123]) a modifié le code pour prendre en compte la divergence du champ de vitesse pour une distorsion rapide compressible cisailée. Au départ de ma thèse j'ai écrit aussi un autre code résolvant les valeurs propres et les vecteurs propres du système dynamique 1.81 mais cela a été abandonné car à cause de la non autonomie du système 1.81 il est difficile de conclure sur la stabilité des solutions. La matrice du système 1.81 peut exhiber un comportement exponentiel sur une certaine plage de temps puis avoir un comportement décroissant par la suite.

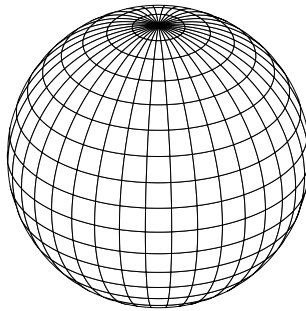


FIG. 2.1 – Maillage Lagrangien sphérique bidimensionnel du code de numérique de distorsion rapide **LF5** avec 20 points de collocation en colatitude et 20 points de collocation en azimuth en espace spectral

Le code de distorsion rapide **LF5** est un code purement spectral. Le système d'équations différentielles linéaires non-autonomes (EDOsNA (1.88)) est résolu pour chaque point sur une sphère de l'espace spectral. Nous avons vu que puisque ce système est indépendant de la norme du nombre d'ondes nous pouvons réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Par contre le problème reconstruit dans l'espace physique est bien un problème tridimensionnel avec une symétrie d'échelle à l'infini. En reconstruisant le problème physique nous aurions un écoulement parfaitement

auto-similaire dans la boîte Lagrangien déformé. Le maillage bidimensionnel de l'espace spectral est représenté sur la figure 2.2.1 par une sphère (surface 2D) vivant dans un espace à trois dimensions. Grâce à la linéarité des EDOsNA il est envisageable de traiter indépendamment toutes la sphère ou une partie tronquée car les modes n'échangent pas d'énergie entre eux. Chaque mode sera donc avancé en temps avec un schéma numérique. Pour l'avance temporelle il sera utilisé des schémas numériques de type Rung-Kutta commercial et non-commercial. Afin d'améliorer la portabilité R. Ganesh (2004, [44]) a remarquer qu'il est intéressant d'avoir un code construit avec des routines libres. C'est ce qui a été fait dans le code de distorsion rapide. Une version a été construite avec les routines NAG (D02BJF [96]) qui nécessite une licence et une autre version avec les routines libre SLATEC (DDERKF, [132]). L'algorithme **LF5** est très simple, il est d'autant plus simple qu'il n'est pas parallélisé. Toutefois il est intéressant de s'y intéresser car il peut être vue comme une partie d'un code pseudo-spectral bien plus compliqué dont nous verrons le principe dans la section suivante 3.2. Le code **LF5** n'a pas été parallélisé car cela n'est pas nécessaire puisque chaque mode évolue indépendamment. Par contre il est intéressant qu'il soit facilement utilisable en tant que programme distribué. On peut voir sur la figure 2.2 une version imagée de l'algorithme **LF5**. L'utilisateur peut régler différents paramètres (Ps) ainsi que les conditions initiales (ICs), par exemple pour le calcul des tensions de Reynolds. Après la phase d'initialisation ($INIT$) le code entame une série de boucles d'intégration en temps (Δt) où il résout les EDOsNA (Ls) jusqu'à ce que le temps final (t_E) soit atteint. Pendant les boucles des statistiques ($STAT_{\mathfrak{S}-\mathfrak{P}}$) ainsi que les valeurs des fonctions de Green ($GREEN_{\theta-\phi}$) peuvent être sauveées périodiquement. A la fin du calcul (E) l'intégration peut être relancée si nécessaire. Ce type d'algorithme est possible car il n'y a pas d'échange d'énergies entre les modes lagrangiens. Lorsque la Linéarisation n'est pas effectuée il sera utilisé un algorithme pseudo-spectral de simulation numérique directe.

2.2.2 Validation du code **LF5**

La validation a été effectuée avec plusieurs tests. Ci-dessous est résumé les tests satisfaisant qui ont été effectués (voir annexe pour les détails).

Validation quantitatif

- 5 tests avec des fonctions analytiques
- 3 tests de cohérence implémentée comme condition d'arrêt
 - $\det \overline{\overline{g}} = \frac{K}{k(\overline{K}, t)}$
 - $E_{CC-H} = E_{CF}$
 - $Ep_{C-H} = Ep_F$

Vérification qualitatif

- 1 double validation avec le code TR5 (code de simulation numérique directe)
- 5 phénoménologies connues de distorsion rapide retrouvées
 - cisaillement pur
 - rotation pure
 - stratification pure
 - stratification-rotation verticale
 - cisaillement-stratification verticale

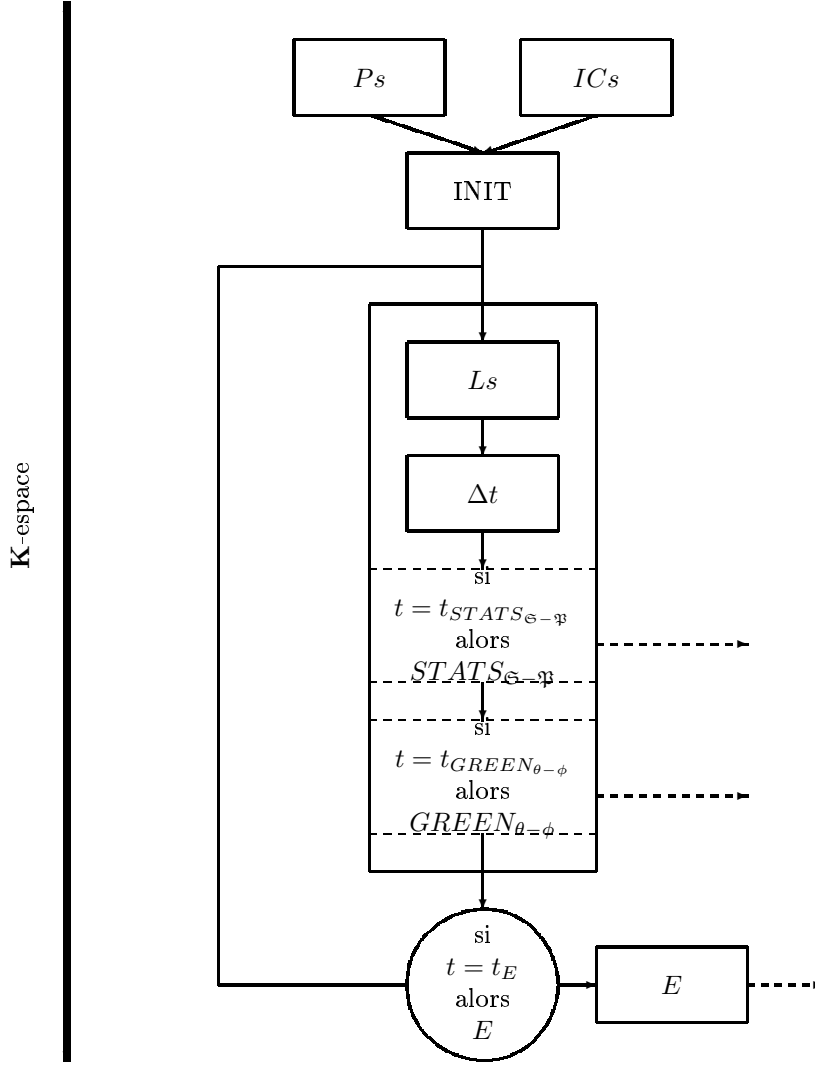


FIG. 2.2 – Organigramme représentatif de l’algorithme LF5. P_s regroupe les paramètres utilisateurs IC_s est le champ initiale. L’opérateur linéaire est noté L_s . Δt symbolise l’avance temporelle. E représente l’arrêt des calculs et la sauvegarde du champ finale.

2.3 État initial du système et discrétisation

Pour l’étude des statistiques obtenues à partir des fonctions de Green il n’est pas nécessaire de définir un champ initial. Par contre pour les études énergétiques et les études sur le tenseur de Reynolds généralisé on se donnera champ initial. Le champ de vitesse initiale sera isotrope ainsi que le champ de flottabilité. Il sera toutefois possible de choisir le rapport entre l’énergie cinétique turbulente et l’énergie potentielles turbulente initiale par l’intermédiaire de $\xi = \frac{Ep}{Em}$. La partition de l’énergie aura un ratio $\xi = 0.2$ ou $\xi = 0$. Le maillage de la sphère sera au minimum de 64 points dans la direction colatitudinale et de 64 points dans la direction azimutale.

2.4 Dépendance à ϵ et Ri

Ce paragraphe a pour but d'estimer la dépendance du système linéaire aux deux paramètres qui sont le nombre de Richardson $Ri = \frac{N^2}{S^2}$ et le paramètre de baroclinicité $\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$. Dans un premier temps nous étudierons le cas limite de la stratification instable. Puis nous présenterons la limite particulière $Ri = 1$ et pour finir nous envisagerons la présence d'une courbe critique dans l'espace des paramètres (Ri, ϵ) .

2.4.1 Étude des cartes paramétriques par “zoom” successifs

Des calculs sur la sphère ($\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^2$) et l'espace des paramètres ($\mathfrak{P} \in \mathbb{R}^2$) ont été effectués. En tenant compte de la symétrie des amplitudes spectrales on peut réduire la taille du maillage sphérique à 64 points en colatitute et 32 points en azimuth. Le maillage de l'espace de paramètres est au minimum effectué avec 10 points dans la direction de ϵ et de 10 points dans la direction de Ri . La somme de l'espace spectral et de l'espace des paramètres forme un espace de dimension 4 ($\mathfrak{T} \in \mathbb{R}^4$). Bien que les modes ne soient pas couplés car le problème considéré ici est linéaire balayer avec une fine résolution l'espace $\mathfrak{T}$ demanderait beaucoup de ressource de calculs. Dans ce qui suit nous tenterons une exploration d'une grande gamme de paramètres puis nous nous concentrerons dans une zone restreinte $(\epsilon, Ri) \in [0, 1] \times [0, 1]$ où l'étude analytique en $k_1 = 0$ a montré des croissances exponentielles.

La planche 2.3 nous indique que sur des *temps courts* les plus fortes valeurs sont obtenues pour des ϵ et des Ri grands. D'après la figure 2.3(a) on peut dire que la plus forte amplification est obtenue pour $(\epsilon \approx 10, Ri \approx 10)$. La figure 2.3(b) et 2.3(c) indique la présence de “valons” dans la dépendance du maximum à (ϵ, Ri) . Quand on se rapproche de $(\epsilon = 0, Ri = 0)$ les valeurs les plus fortes se situent vers $Ri = 0.1$. Le fait que les modes les plus forts soient localisés vers des grands ϵ et Ri sur des *temps courts* est une conséquence de l'influence de la stratification du fluide et de l'ajustement initial.

La planche 2.4 nous indique que sur des *temps moyens* les modes les plus forts se situent vers $Ri = 0.5$. Il y a un effet de sous-résolutions du maillage de l'espace des paramètres. Le calcul effectué sur le maillage de paramètre $(\epsilon = 10, Ri = 10)$ n'est pas capable de capturer les forts modes qui sont situés vers $Ri = 0.5$ sur l'image 2.4(c). Il n'y a pas une dépendance linéaire de $\bar{g}$ à (ϵ, Ri) . La figure 2.4(d) confirme que les modes les plus forts sont situés vers $Ri = 0.5$. La localisation vers la droite des zones foncées nous informe que plus le paramètre de baroclinicité est important plus les croissances sont importantes (voir les figures de la planche 2.4). Bien sûr il serait intéressant de balayer tout l'espace des paramètres $\mathfrak{P}$ avec une résolution fine du maillage mais cela demande une trop grande puissance de calculs.

2.4.2 La limite $Ri < 1$

La figure 2.6 représente la dépendance de la norme du tenseur de Green au nombre de Richardson. Pour ce calcul le paramètre de baroclinicité est fixé à $\epsilon = 0.5$. La figure 2.6 ainsi que la figure 2.4(c) indiquent la possibilité d'une limite aux fortes croissances situées en $Ri = 1$.

2.4.3 Courbe critique

La surface représentée sur la figure 2.5 est la valeur de $\max_{[k \in \mathfrak{S} \ t \in [0,30]]}(\|\overline{g}\|)(\epsilon, Ri)$. Sur le plan horizontal sont projetés les courbes iso-valeurs. Pour l'écoulement cisaillé et stratifié uniquement il existe une valeur critique du nombre de Richardson ($Ri_C \in [0.1, 0.3]$ selon les études). Si le nombre de Richardson critique est $Ri_C = 0.1$ la **courbe C** sur la figure par de Ri_C et évolue dans l'espace des paramètres $\mathfrak{P}$. Il est conjecturé qu'il existe une courbe critique avec la même allure que la **courbe C** délimitant une zone stable et une zone instable pour l'écoulement barocline.

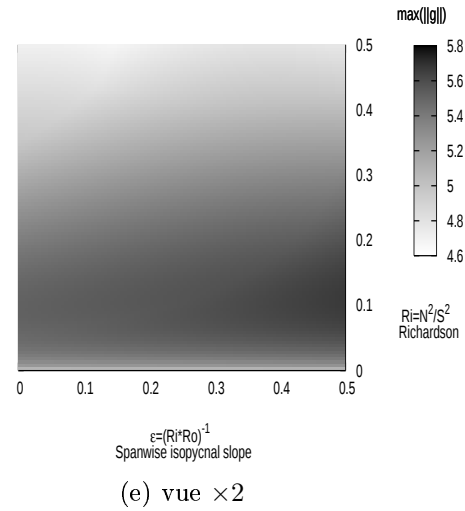
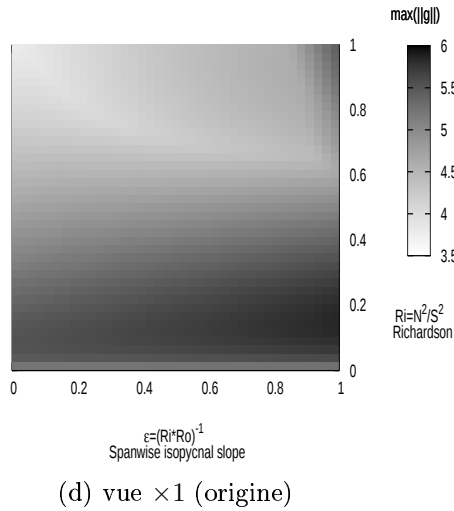
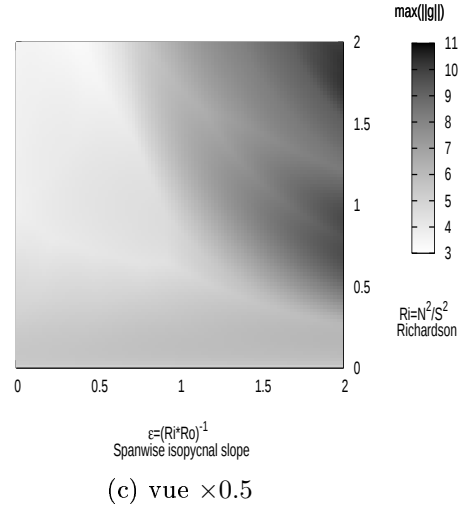
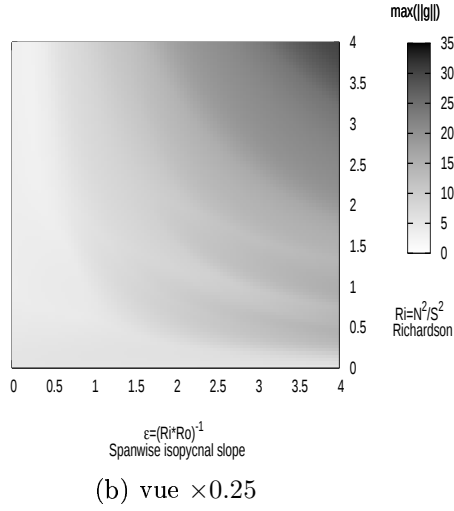
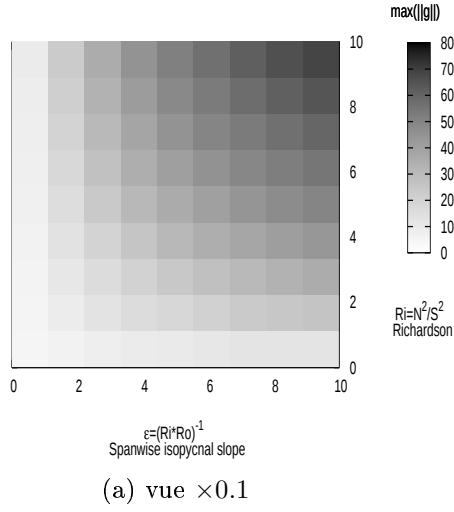
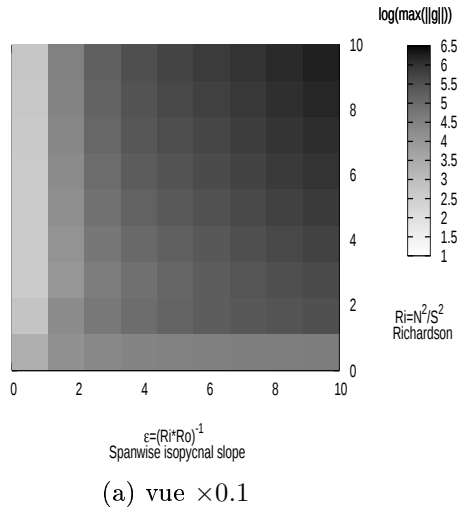


FIG. 2.3 – Maximums de la norme du tenseur de Green en se focalisant sur ($Ri = 0, \epsilon = 0$) pour $tS = 3$. Les figures ci-dessus représentent le maximum temporel-spectral de la norme du tenseur de Green. En abscisse est reporté le paramètre de baroclinicité et en ordonnée le nombre de Richardson. Le cadrage horizontal et vertical rétrécit de haut en bas et de gauche à droite.



Logarithm of Green tensor statistics in ϵ - Ri plane

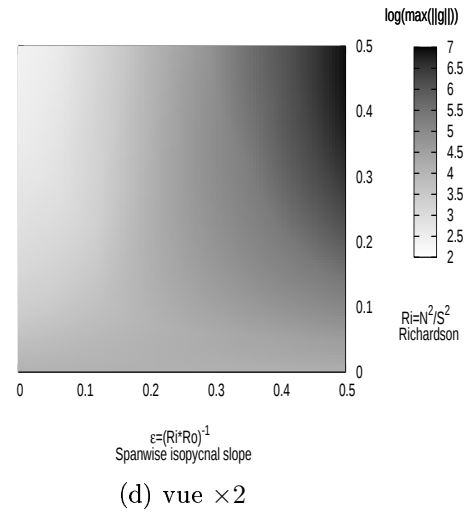
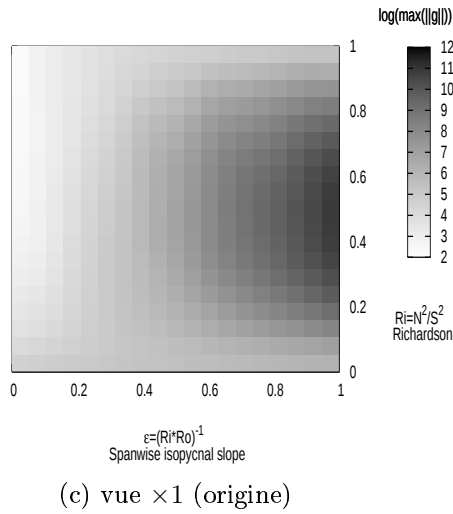
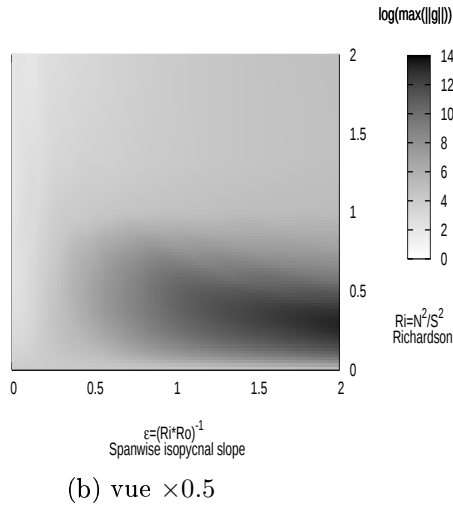


FIG. 2.4 – Maximums de la norme du tenseur de Green en se focalisant sur ($Ri = 0, \epsilon = 0$) pour $tS = 30$. Les figures ci-dessus représentent le maximum temporel-spectral le logarithme de la norme du tenseur de Green. En abscisse est reporté le paramètre de baroclinicité et en ordonnée le nombre de Richardson. Le cadrage horizontal et vertical rétrécit de haut en bas et de gauche à droite.

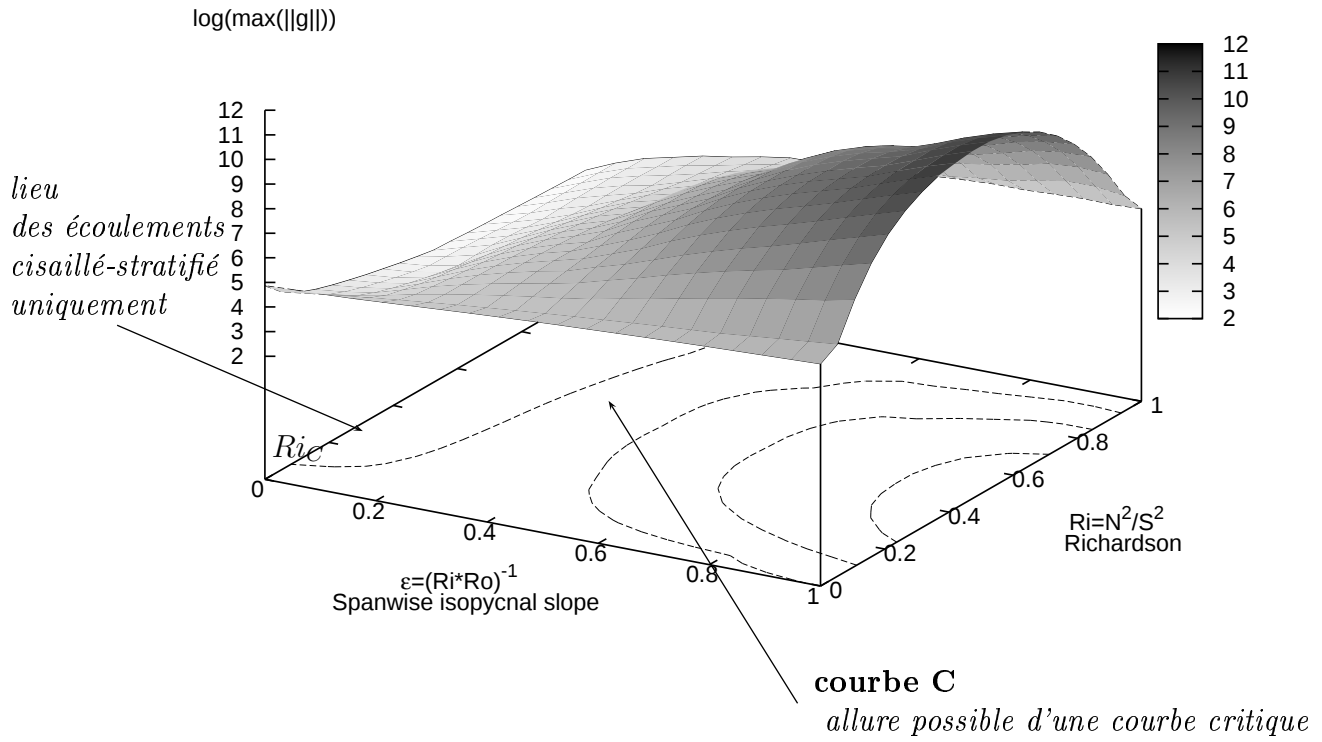


FIG. 2.5 – Maximum et courbe critique dans l'espace des paramètres. La figure ci-dessus représente le maximum temporel-spectral du logarithme de la norme du tenseur de Green. En abscisse est reporté le paramètre de baroclinicité, en ordonnée le nombre de Richardson et en position verticale il s'agit du logarithme de la norme du tenseur de Green. La vue est isométrique. Sur la surface horizontale $z = 0$ est représentée la projection des courbes iso-valeurs de la surface.

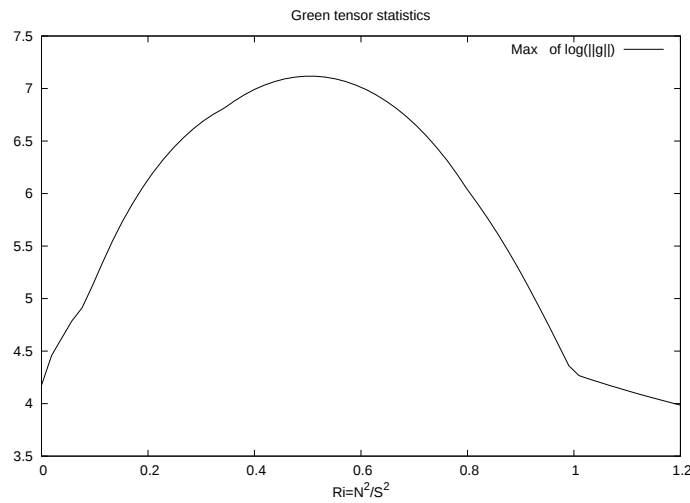


FIG. 2.6 – La limite remarquable $Ri < 1$. La courbe ci-dessus représente la dépendance du logarithme du maximum de la norme du tenseur de Green à Ri pour $\epsilon = 0.5$.

2.5 Des écoulements géophysiquement envisageables

Les écoulements géostrophiques font apparaître des nombres de Richardson de l'ordre de 2 tandis que le paramètre de baroclinicité est assez faible $\epsilon \in [10^{-3}, 10^{-1}]$. Le paramètre de baroclinicité atteint des valeurs plus fortes dans les couches océaniques. Pour les études numériques deux nombres ϵ sont envisagés. $\epsilon = 10^{-3}$ sera désigné par ATMO et $\epsilon = 0.2$ sera désigné par OCEAN. La désignation SYNO, INTER et MICRO font référence à la valeur du nombre de Richardson. Puisque l'écoulement géostrophique d'échelle synoptique à une valeur du nombre de Richardson de l'ordre de 2 il est logique de le désigner par SYNO. La partition d'énergie initiale est telle que $\xi = 0$ pour les calculs suivants. On peut voir dans le tableau 2.1 la valeur des paramètres pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE. Dans cette section nous allons étudier chaque type de statistique, l'une après l'autre (énergies, statistiques sur le tenseur de Green, tenseur des contraintes de Reynolds généralisé dans le repère fixe, tenseur de Reynolds généralisé dans la base de Craya-Herring puis anisotropie spectrale), cette approche est du même type que celle effectué par L. Liechtenstein (2005,[79],§4,p83109) dans sa thèse de Doctorat.

désignation	ϵ	Ri
MICROATMO	10^{-3}	0.5
INTERATMO	10^{-3}	0.99
SYNOATMO	10^{-3}	2
MICROOcéAN	0.2	0.5
INTEROcéAN	0.2	0.99
SYNOOcéAN	0.2	2
INTERINTER	0.01	0.99

TAB. 2.1 – Paramètres de la série GÉOPHYSIQUE pour l'étude DRN

2.5.1 Les énergies

Nous montrerons dans ce paragraphe que sur des *temps courts* le paramètre de baroclinicité n'a pas d'influence significative. Sur des *temps courts*, on peut voir à partir de la planche 2.7 que initialement l'énergie mécanique croît pour toutes les réalisations (2.7(a), 2.7(c), 2.7(e), 2.7(b), 2.7(d) et 2.7(f)). Pour les cas à $Ri = 0.99$ et $Ri = 2$ (deuxième ligne et troisième ligne de la planche 2.7 c'est-à-dire 2.7(c), 2.7(e), 2.7(d) et 2.7(f)) puis l'énergie mécanique turbulente entame une phase de décroissance. Et on peut dégager la tendance que plus le nombre de Richardson est élevé plus la phase de décroissance est amorcée tôt (vers $St = 2$ pour $Ri = 0.99$ et $St = 1.4$ pour $Ri = 2$). D'après la planche 2.7 toutes les énergies cinétiques turbulentes sont initialement décroissantes (même pour les cas à $Ri = 0.5$ 2.7(a), 2.7(b) où la décroissance est à peine perceptible). L'énergie potentielle est initialement nulle. Pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE (voir 2.7(a), 2.7(c), 2.7(e), 2.7(b), 2.7(d) et 2.7(f)) l'énergie potentielle est d'abord croissante pour s'ajuster à la partition naturelle d'énergie. Pour les calculs avec un nombre de Richardson de $Ri = 0.99$ et $Ri = 2$ l'énergie potentielle turbulente va passer par un maximum puis décroître (2.7(c), 2.7(e), 2.7(d) et 2.7(f)). La localisation temporelle du maximum d'énergie potentielle correspond à la localisation du maximum d'énergie totale. Comme précédemment, plus il y a de la stratification plus le maximum arrive tôt dans le temps.

En comparant la colonne de gauche ($\epsilon = 0.001$ 2.7(a), 2.7(c) et 2.7(e)) et la colonne de droite ($\epsilon = 0.2$ 2.7(b), 2.7(d) et 2.7(f)) on s'aperçoit que les courbes sont très similaires. Disons que sur des temps courts la valeur des paramètres de baroclinicité n'a que très peu d'influence et que sur des *temps courts* on observe un ajustement des composantes pour partitionner l'énergie cinétique turbulente et l'énergie potentielle turbulente.

Maintenant nous allons montrer que plus la baroclinicité est forte plus l'énergie potentielle turbulente est importante et que le temps d'ajustement de l'énergie potentielle turbulente correspond approximativement au temps caractéristique de la stratification. D'après la planche 2.7 on peut observer qu'entre $t = 0$ et $t = 5$ l'énergie mécanique turbulente passe par un maximum relatif pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE. Nous distinguons deux groupes. D'une part un groupe où l'énergie mécanique est décroissante qui est constituée de tous les calculs à $\epsilon = 0.001$ et du calcul SYNOOCÉAN défini par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ (voir images 2.8(a), 2.8(c), 2.8(e) et 2.8(f)). D'autre par un groupe de calculs où l'énergie mécanique turbulente suit une évolution croissante (voir images 2.8(b) et 2.8(d)). Ce groupe est constitué de la réalisation MICROOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$) et de la réalisation INTEROCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$). Le calcul MICROOCÉAN est celui qui a le plus fort taux de croissance (présent sur la figure 2.8(b)). De la même manière que l'énergie mécanique turbulente passe par un maximum relatif (ou absolu) l'évolution de l'énergie cinétique turbulente passe par un minimum relatif correspondant approximativement à celui de l'énergie mécanique (voir les figures 2.8(a), 2.8(c), 2.8(e), 2.8(b), 2.8(d) et 2.8(f)). L'énergie potentielle turbulente passe initialement par un maximum relatif ou absolu dans les cas décroissants (regarder les figures 2.8(a), 2.8(c), 2.8(e), 2.8(b), 2.8(d) et 2.8(f)). L'énergie potentielle est toujours inférieure à l'énergie cinétique (voir les images 2.8(a), 2.8(c), 2.8(e), 2.8(b), 2.8(d) et 2.8(f)). L'énergie potentielle a le même genre d'évolution que l'énergie cinétique turbulente sauf pour la réalisation SYNOOCÉAN définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ (figure 2.8(f)). Pour ce calcul l'énergie semble entamer une phase de faible croissance entre $tS = 5$ et $tS = 16$. Le maximum relatif à $tS = 16$ correspond approximativement au temps caractéristique de la rotation définie par $\tau_f = \frac{2\pi}{f}$. D'autre par l'énergie potentielle du calcul SYNOOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ visible sur la figure 2.8(f)) est bien plus important que celui du calcul SYNOATMO (définie par $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$ visible sur la figure 2.8(e)). Cela peut être interprété comme l'influence du paramètre de baroclinicité sur l'écoulement stablement cisailé et stratifié. La fin de la période d'ajustement semble correspondre approximativement à la valeur de temps caractéristique de la stratification définie par $\tau_N = \frac{2\pi}{N}$.

Nous avons étudié précédemment l'évolution énergétique sur des *temps moyens*, puisque le code **LF5** ne demande pas beaucoup de ressources de calcul nous allons maintenant étudier la dynamique sur des temps *très longs*. Nous montrerons que les problèmes baroclines explose avec un pic au temps $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ puis sature et que dans certain cas de forte baroclinicité et de faible nombre de Richardson l'énergie potentielle turbulente surpasse l'énergie cinétique turbulente ce qui est une caractéristique des écoulements baroclines. Sur la planche 2.9 on peut remarquer de nombreux phénomènes inattendus. On peut distinguer trois comportements importants. D'abord que les calculs SYNOATMO (définie par $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$; observable sur la figure 2.9(e)) et SYNOOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$; observable sur la figure 2.9(f)) ne sont pas croissants. L'énergie mécanique turbulente de la réalisation SYNOATMO est faiblement décroissante tandis que l'énergie mécanique turbulente de la réalisation SYNOOCÉAN semble quasiment constante. Ensuite on peut remarquer que les calculs MICROATMO (définie par $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$;

visible sur 2.9(a)) et INTERATMO (définie par $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$; visible sur 2.9(c)) voient leur énergie mécanique turbulente croître. Pourtant cette énergie semblait décroître sur des temps moyens. Enfin le fait le plus marquant est la saturation sur des temps longs de la croissance d'énergie pour les calculs MICROOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$; visible sur 2.9(b)) et INTEROCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$; visible sur 2.9(d)). Sur la figure 2.9(b) on peut même voir que l'énergie de la réalisation MICROOCÉAN entame une phase de décroissance. On peut voir sur la planche 2.9 que l'énergie cinétique turbulente a globalement le même type d'évolution que l'énergie totale turbulente sauf pour la réalisation MICROOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$; visible sur la figure 2.9(b)) où l'énergie cinétique devient quasiment constante tandis que l'énergie mécanique décroît en oscillant. Pour les calculs à $\epsilon = 0.001$ (voir figures 2.9(a), 2.9(c) et 2.9(e)) l'énergie potentielle turbulente est très faible mais elle augmente. Même pour la réalisation SYNOATMO (visible sur la figure 2.9(f) qui voit son énergie totale décroître et son énergie potentielle qui augmente. Pour la réalisation SYNOOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$; visible sur la figure 2.9(f)) l'énergie potentielle est bien plus importante dans le calcul de la réalisation SYNOATMO (définie par $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$; visible sur 2.9(e)). Le nombre Richardson étant le même entre les calculs SYNOATMO et SYNOOCÉAN cela permet d'envisager que la plus forte énergie potentielle est causée par l'effet barocline. Sur la figure 2.9(d) on peut voir que l'énergie potentielle du calcul INTEROCÉAN est soumise à de fortes oscillations tandis que l'énergie cinétique ne l'est pas. Enfin le plus remarquable est que le niveau d'énergie potentielle dépasse le niveau d'énergie cinétique pour la réalisation MICROOCÉAN (visible sur la figure 2.9(b)). Nous avons vu dans la section 1 que les problèmes de d'Eady 1949 étaient caractérisés par une forte énergie potentielle tout comme la présente réalisation.

2.5.2 Statistiques sur le tenseur de Green

Dans cette section nous allons montrer que les calculs énergétiquement stables ont une valeur *RMS* inférieure à leur valeur *MAX* sur des *temps moyens* et *longs* ce qui laisse à penser que les calculs stables ont des amplitudes spectrales fortes plus localisées que les calculs instables.

Sur des temps courts (voir planche 2.10) l'évolution des valeurs *RMS* sont relativement semblables pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE . Jusqu'à $tS = 0.5$ la croissance exponentielle initiale est du même ordre. L'évolution de la valeur maximum est inférieure sur des *temps courts* à la valeur *RMS* et cela quel que soient les calculs considérées de la série GÉOPHYSIQUE .

La valeur *RMS* est décroissante pour tous les calculs à $\epsilon = 0.001$ (voir figures 2.11(a), 2.11(c) et 2.11(e)). On peut observer sur les figures 2.11(b) et 2.11(c) que la valeur *RMS* est croissante pour les réalisations MICROOCÉAN et INTEROCÉAN . Pour la réalisation SYNOOCÉAN la valeur *RMS* est quasiment constante (voir la courbe rouge sur 2.11(f)). La valeur maximum est supérieure à la valeur *RMS* pour les calculs effectués avec le paramètre $\epsilon = 0.001$. Pour les calculs INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$) et SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$) le maximum est même croissant tandis que la valeur *RMS* est décroissante. Pour les réalisations MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$) et INTEROCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$) visibles sur les figures 2.11(b) et 2.11(c) la valeur maximum et la valeur *RMS* sont du même ordre. Pour la réalisation SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$) observable sur la figure 2.11(f) la valeur maximum s'est stabilisée au dessus de la valeur *RMS*.

Pour les calculs à $\epsilon = 0.001$ (réalisation MICROATMO sur la figure 2.12(a), réalisation INTERATMO sur la figure 2.12(c) et réalisation SYNOATMO sur la figure 2.12(e)) on peut voir que la valeur RMS est croissante. Toutefois la croissance diminue pour la réalisation SYNOATMO (voir 2.12(e)). Pour les réalisations MICROOCÉAN (voir 2.12(b)) et INTEROCÉAN (voir 2.12(c)) la valeur RMS est bien plus importante, elle vaut 10^{33} pour la réalisation MICROOCÉAN et 10^4 pour la réalisation INTEROCÉAN. Pour la réalisation SYNOOCÉAN la valeur RMS est constante (voir figure 2.12(f)). Pour tous les calculs la valeur maximum est supérieure à la valeur RMS sauf pour les réalisations MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$) et INTEROCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$).

2.5.3 Tenseur des contraintes de Reynolds généralisées

Nous montrerons que plus le nombre de Richardson est élevé plus le premier minimum de la composante verticale est atteint tôt et que sur des *temps courts* un flux méridional normal et une corrélation zonale-méridionale négative sont caractéristique des écoulements baroclines. Globalement on peut voir que la composante zonale (en rouge) est initialement croissante pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE visibles sur la figure 2.13. Les croissances initiales les moins fortes sont obtenues pour les calculs avec un nombre de Richardson $Ri = 2$ (voir figure 2.13(e) et 2.13(f)). Sur des temps courts la composante méridionale est inférieure à la composante zonale (voir les courbes vertes sur la planche 2.13). La composante méridionale ne développe pas de forte croissance ou de forte décroissance. Pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE la composante verticale est fortement décroissante (voir la planche 2.13). Elle atteint à minimum relatif proche de la valeur 0. La localisation temporelle de ce minimum semble dépendante du nombre de Richardson. Plus le nombre de Richardson est fort plus ce minimum apparaît tôt. Pour $Ri = 2$ le minimum est localisé vers $t = 1.3$. Pour $Ri = 0.99$ le minimum est localisé vers $t = 1.8$. Enfin pour $Ri = 0.5$ le minimum est localisé vers $t = 2.6$. La composante de flotabilité est croissante quel que soient les cas de la série GÉOPHYSIQUE présents sur la planche 2.13. La courbe bleu clair sur la planche 2.13 représente la corrélation zonale-méridionale. Cette corrélation reste nulle pour les calculs MICROATMO, INTERATMO et SYNOATMO (voir la colonne de gauche sur la planche 2.13 $\epsilon = 0.001$). Seul les calculs MICROOCÉAN, INTEROCÉAN et SYNOOCÉAN ont une corrélation zonale-méridionale négative (voir la colonne de droite sur la planche 2.13 $\epsilon = 0.2$). La corrélation zonale-méridionale semble être une caractéristique des écoulements avec un fort paramètre de baroclinicité. La corrélation zonale-verticale est initialement négative pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE (voir les courbes grises sur la planche 2.13). Comme pour la corrélation zonale-méridionale, la corrélation méridionale-verticale n'est visible que sur les calculs où le paramètre de baroclinicité est $\epsilon = 0.2$ (voir les courbes noires sur la colonne de droite de la planche 2.13). Le flux zonal est toujours positif pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE présentée sur la planche 2.13 et représentée par la courbe orange). Le flux méridional de flotabilité n'est présent que pour les cas à $\epsilon = 0.2$ (voir les courbes grises sur la colonne de droite la planche 2.13). Le flux vertical de flotabilité est initialement négatif. Ce qui correspond à un flux normal en considérant le flux moyen de flotabilité est défini positif (voir les courbes rouges en trait fin sur la planche 2.13).

Continuons notre étude mais cette fois sur des *temps moyens*. Nous montrerons, entre autres, que les écoulements baroclines instables ont une composante d'énergie méridionale qui surpasse toutes les autres. Sur la planche 2.14 on peut observer que la composante zonale (courbes rouges en trait fort) est décroissante pour tous les calculs avec $\epsilon = 10^{-3}$

et pour le calcul SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$). La composante zonale est croissante pour les réalisations MICROOCÉAN et SYNOOCÉAN. D'après la planche 2.14 on peut observer que la composante méridionale (courbes vertes) est décroissante pour tous les calculs avec $\epsilon = 10^{-3}$ et pour le calcul SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$). La composante méridionale est croissante et supérieure à la composante zonale pour les réalisations MICROOCÉAN et SYNOOCÉAN. Le fait que ce soit la composante méridionale qui est la plus croissante est une différence fondamentale avec les écoulements de distorsion rapide cisailé pur où c'est la composante zonale qui est la plus importante. Il est intéressant de constater que la composante verticale (voir les courbes bleues sur la planche 2.14) est décroissante et qu'elle est proche de 0. Notons aussi que la composante d'énergie verticale est quasiment nulle pour les cas MICROOCÉAN et INTEROCÉAN où l'énergie totale est croissante (voir les courbes bleus sur 2.14(b) et 2.14(b) pour la composante verticale ; voir les courbes rouges sur 2.8(b) et 2.8(b) pour l'énergie turbulente totale). Après l'ajustement la composante de flotabilité est décroissante pour les calculs ayant un paramètre de baroclinicité ϵ valant 0.001 (voir la courbe rose sur la colonne de gauche de la planche 2.14). Pour $\epsilon = 0.001$ la composante de flotabilité est bien inférieur aux composantes horizontales. La composante de flotabilité est supérieure à la composante zonale seulement pour la réalisation MICROOCÉAN mais elle reste inférieure à la composante méridionale (voir la courbe rose sur la figure 2.14(b)). Pour la réalisation SYNOOCÉAN la composante de flotabilité est du même ordre de grandeur que les composantes horizontales (voir la courbe rose sur la figure 2.14(f)). La corrélation zonale-méridionale est visible en bleu clair sur la planche 2.14. Cette corrélation est négative pour les calculs ayant un paramètre de baroclinicité $\epsilon = 0.2$. Pour les calculs de la colonne de gauche ($\epsilon = 0.001$) sur la planche 2.14 elle est quasiment nulle. Globalement la composante zonale-verticale est initialement négative ensuite elle est positive puis elle oscille en se rapprochant de 0 sauf pour la réalisation MICROOCÉAN où elle se développe à nouveau négativement (voir la courbe jaune sur la planche 2.14). La corrélation méridionale-verticale est nulle pour les calculs avec un paramètre de baroclinicité $\epsilon = 0.001$ (voir la courbe noir sur la colonne de gauche de la planche 2.14). Pour la réalisation SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ la courbe noire sur la figure 2.14(f)) la corrélation méridionale-verticale est positive mais elle décroît vers 0. Les réalisations où l'énergie totale est croissante MICROOCÉAN et INTEROCÉAN ont une corrélation méridionale-verticale positive croissante. Le flux zonal est positif pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE (voir la courbe orange sur la planche 2.14). Le flux méridional n'est visible que sur les calculs de la colonne de droite ($\epsilon = 0.2$). Il est positif ce qui correspond à un flux normal si l'on considère le gradient moyen horizontal de flotabilité qui résulte de l'équilibre de vent thermique. Pour la réalisation MICROOCÉAN (voir 2.14(b)) c'est le flux le plus important des trois flux de flotabilité. Pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE le flux vertical de flotabilité oscille en se rapprochant de la valeur 0 (voir la courbe rouge en trait fin sur la planche 2.14(b)).

Poursuivons notre investigations du comportement du tenseur de contraintes de Reynolds mais sur des *temps très longs*. Nous allons confirmer "l'explosion" barocline vu précédemment sur l'énergie et montré que c'est la composante d'énergie horizontale ainsi que la flotabilité qui est responsable de ce phénomène. Et nous montrerons que pour les réalisations stables avec un faible paramètre de baroclinicité, la limite $Ri = 1$ semble être une valeur particulière pour l'évolution du flux méridional de flotabilité. Le flux méridional de flotabilité est normal lorsque $Ri < 1$ mais anormal lorsque $Ri > 1$. Sur des *temps très longs* les composantes horizontales sont du même ordre de grandeur (voir la

courbe rouge et verte en trait fort de la planche 2.15). Pour la réalisation MICROATMO et SYNOATMO la composante méridionale est juste un peu plus importante que la composante zonale. Pour la réalisation MICROOcéan c'est la composante zonale qui est plus grande (voir 2.15(b)). La composante verticale reste quasiment nulle pour la majeure partie des calculs de la série GÉOPHYSIQUE visible sur la planche 2.15(b). Pour la réalisation INTEROcéan on peut observer des "explosions" de la composante verticale vers $tS = 380$ et $tS = 780$. La composante de flotabilité augmente pour les calculs à $\epsilon = 0.2$ (voir la courbe rose sur la planche 2.15). Pour la réalisation SYNOOcéan ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$) la composante de flotabilité se stabilise vers 0.2 (voir 2.15(f)). Pour la réalisation INTEROcéan ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$) la composante de flotabilité est du même ordre de grandeur que les composantes horizontales (voir la courbe rose sur 2.15(c)). Pour le calcul MICROOcéan ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$) c'est la composante de flotabilité qui finit par être la plus grande (voir la courbe rose sur 2.15(a)). La corrélation zonale-méridionale est visible sur les courbes bleu clair de la planche 2.15. Pour les calculs à $\epsilon = 0.001$ la corrélation zonale-méridionale devient observable et elle est négative (voir la colonne de gauche sur la planche 2.15). Pour les calculs MICROOcéan et INTEROcéan elle oscille autour de la valeur 0. Et pour la réalisation SYNOOcéan elle semble tendre vers 0 et rester quasiment nulle. La corrélation zonale-verticale est imperceptible pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE sur des *temps longs*. Toutefois sur la figure 2.15(b) on peut voir que des oscillations de la corrélation zonale-verticale apparaissent lors des "explosions" de la composante verticale. La corrélation méridionale-verticale (courbe noire) est non nulle pour la réalisation INTEROcéan ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$ visible sur la figure 2.15(d)). La corrélation méridionale-verticale est clairement positive pour le calcul INTEROcéan. Le flux zonal devient très important pour les réalisations MICROOcéan (2.15(b)) et SYNOOcéan (2.15(f)). Il est intéressant de noter que le flux méridional (courbe grise) se développe positivement pour le calcul MICROATMO et INTERATMO. Pour la réalisation SYNOATMO le flux méridional se développe négativement ce qui correspond à un flux anormal si l'on considère le gradient moyen horizontal de l'état de base (aussi appelé contre-gradient dans la littérature). Le flux vertical est quasiment nul sauf pour les calculs MICROOcéan et INTEROcéan où il se manifeste lorsque la composante de flotabilité "explose".

2.5.4 Décomposition toroïdo-poloïdale

Sur des *temps courts* le tenseur de Reynolds exprimé dans le repère Craya-Herring a une évolution semblable quelque soit les paramètres linéaires de la série GÉOPHYSIQUE. La composante toroïdale est initialement croissante pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE (voir la courbe rouge sur la planche 2.16). La composante poloïdale est initialement décroissante pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE (voir la courbe verte sur la planche 2.16). Le flux de flotabilité poloïdale est d'abord positif puis négatif (visible sur la courbe jaune de la planche 2.16). On peut voir sur la planche 2.16 que la corrélation toroïdale-poloïdale et le flux toroïdal ne se développent pas sur des *temps courts* ($tS = 3$).

Maintenant nous montrerons sur des *temps moyens*, entre autres, que la composante d'énergie poloïdale et la composante d'énergie de flotabilité sont fortement liées et que le flux de poloïdal est globalement négatif. Lorsque $\epsilon = 0.001$ la composante toroïdale est quasiment constante après l'ajustement initial (voir la colonne de gauche sur la planche 2.17). La composante toroïdale croît pour les réalisations MICROOcéan et

INTEROCÉAN (voir les figures 2.17(a) et 2.17(c)). La composante toroïdale pour le calcul SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ 2.17(f)) se stabilise vers une valeur plus faible que pour le calcul SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$ 2.17(e)). Pour les calculs où $\epsilon = 0.001$ la composante poloïdale évolue de concert avec la composante de flotabilité (voir la colonne de gauche sur 2.17; la courbe bleue représente la composante de flotabilité tandis que la courbe verte représente la composante poloïdale). La décroissance commune de l'énergie poloïdale et de la composante de flotabilité est une caractéristique des écoulements cisailés-stratifiés. Pour la réalisation MICROOCÉAN la composante poloïdale et la composante de flotabilité évoluent aussi simultanément (voir 2.17(b)). Pour la réalisation INTEROCÉAN et SYNOOCÉAN les composantes poloïdales et de flotabilité n'ont pas des évolutions semblables. Pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE et sur des *temps moyens* le flux de flotabilité poloïdale est négatif (voir la courbe jaune sur la planche 2.17). Sur des *temps moyens* la corrélation toroïdale-poloïdale et le flux toroïdal sont quasiment nuls pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE.

Nous allons poursuivre avec l'étude de la dynamique toroïdo-poloïdale sur des *temps très longs*. Bien sur l'explosion au temps barocline $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ sera une fois de plus confirmé. Nous montrerons que les écoulements barocline "explosifs" sont caractérisés par un très fort flux toroïdal de flotabilité. Pour les calculs avec $\epsilon = 0.001$ l'énergie toroïdale reste la plus importante même sur des *temps très longs* (voir la courbe rouge sur la planche 2.18). Toutefois la composante toroïdale décroît significativement pour la réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$ sur la figure 2.18(e)). Pour la réalisation MICROOCÉAN qui à la plus forte valeur énergétique la composante toroïdale est inférieure à la composante de flotabilité. Pour les calculs ayant une faible valeur du paramètre de baroclinicité la composante poloïdale est croissante (voir la courbe verte sur la colonne de gauche de la planche 2.18). Pour les calculs INTEROCÉAN et SYNOOCÉAN la composante poloïdale et la composante toroïdale sont du même ordre de grandeur. La corrélation toroïdale-poloïdale est quasiment nulle lorsque $\epsilon = 0.001$ mais elle oscille autour de 0 pour les calculs avec un plus grand paramètre de baroclinicité (voir la courbe rose sur la colonne de droite de la planche 2.18). Le flux toroïdal est quasiment nul lorsque $\epsilon = 0.001$ (voir la courbe bleu clair sur la colonne de gauche de la planche 2.18). Pour les calculs avec un plus fort paramètre de baroclinicité le flux toroïdal de flotabilité se développe négativement lorsque le premier temps barocline τ_{B1} est dépassé (voir la courbe bleu clair sur la colonne de gauche de la planche 2.18). Le premier temps barocline τ_{B1} a été défini au chapitre 1 par $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$. Le flux de flotabilité poloïdale a des évolutions très différentes (voir la courbe jaune sur la planche 2.18). Il est négatif pour les calculs MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$), INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$). Il oscille autour de 0 pour les calculs MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$), INTEROCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$). Le plus remarquable est qu'il est positif pour la réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$) et négatif pour la réalisation SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$).

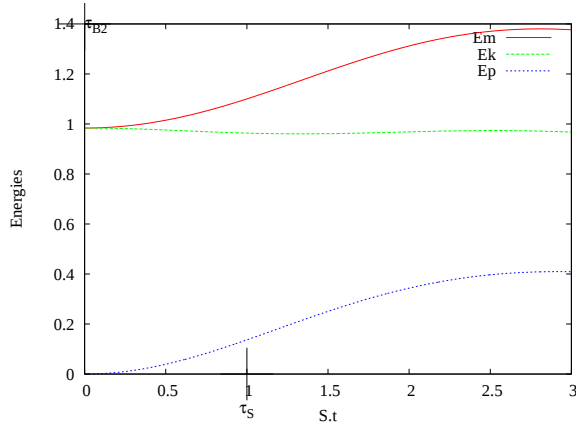
2.5.5 Anisotropie sur la sphère

Sur des *temps courts* pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE on retrouve le même dessin en "fer à cheval". Les légendes de densité font apparaître que les calculs MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$) et MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$) sont ceux qui ont la plus grande valeur maximum qui est de 5 (voir la figure 2.20(a) et 2.20(b)).

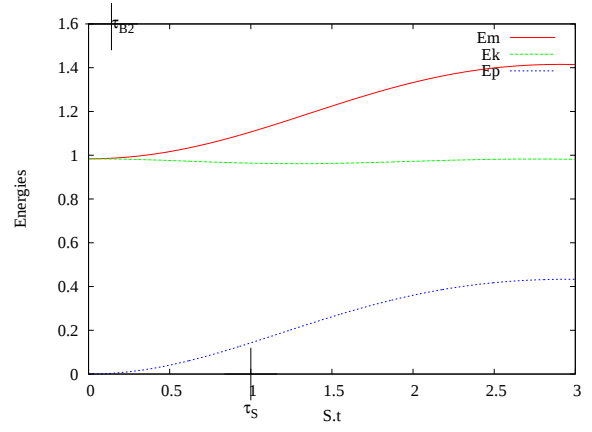
Pour des *temps moyens* le dessin en "fer à cheval" devient plus "raide". En d'autres termes, il se rapproche d'une forme de rectangle. Pour les cas à $\epsilon = 0.001$ l'énergie est

fortement localisée aux pôles. On observe une symétrie par rapport à l'axe $\phi = 0$ (voir la colonne de gauche sur la planche 2.20). Pour les calculs à $\epsilon = 0.2$ l'énergie est localisée proche des pôles.

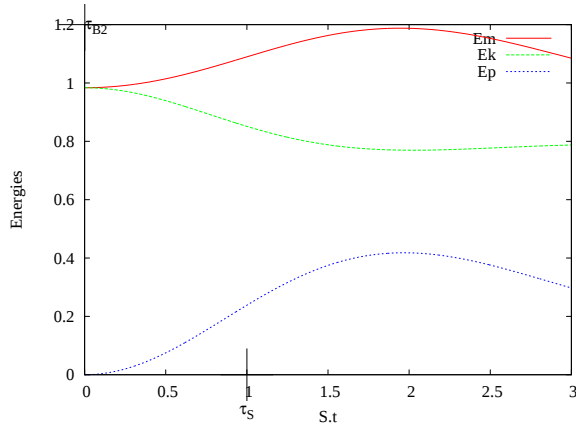
Pour des *temps très longs*, remarquons que contrairement aux précédentes planches de figure d'anisotropie, l'échelle est ici logarithmique. La colonne de gauche qui est le lieu des calculs à $\epsilon = 10^{-3}$ montre que les valeurs maximum sont localisées aux pôles (voir 2.21(a), 2.21(c) et 2.21(e)). Tous les calculs de faible croissance ont une énergie localisée vers les pôles, même la réalisation SYNOOCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ et visible sur la figure 2.21(f)). Pour les calculs où l'on observe des fortes croissances d'énergie les maximums sont localisés sur les courbes approximativement définies par $\phi \approx -\frac{\pi}{2}$ et $\phi \approx \frac{\pi}{2}$ qui sont caractéristiques des écoulements cisailés.



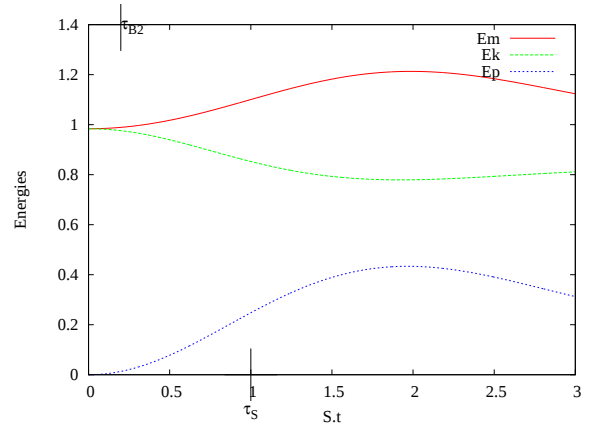
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



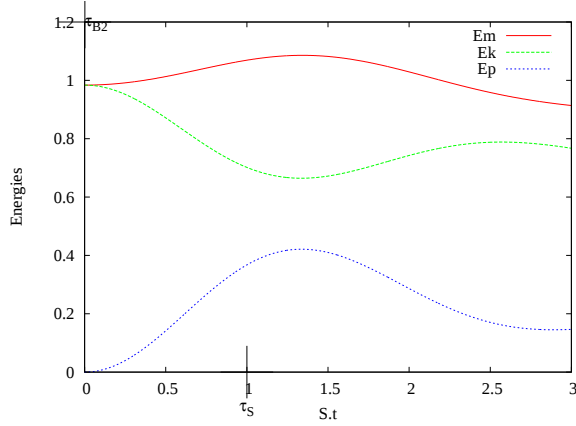
(b) Réalisation MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



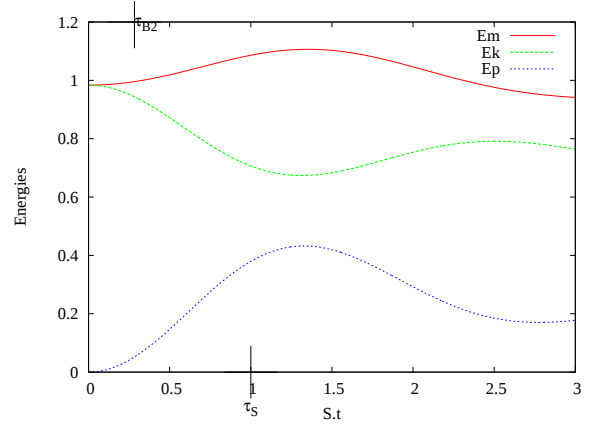
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

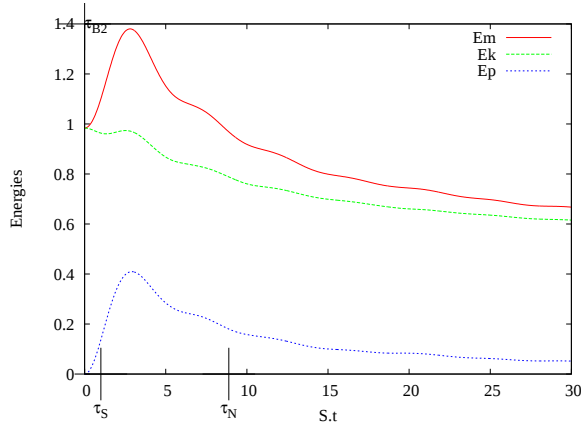


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

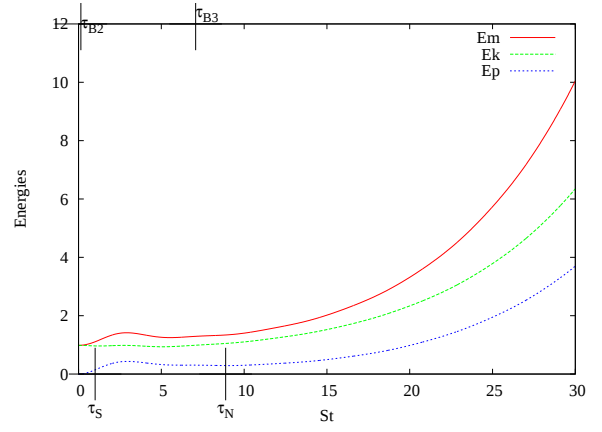


(f) Réalisation SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

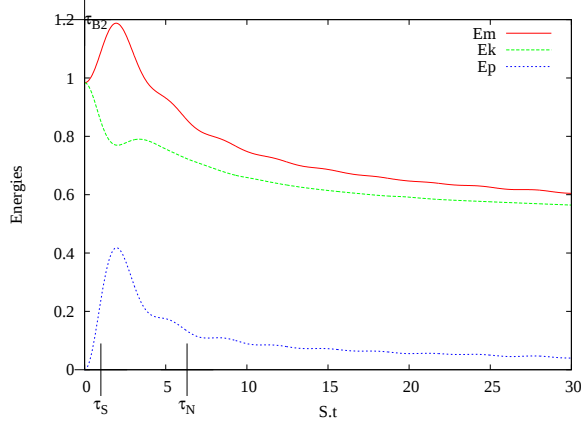
FIG. 2.7 – Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 3$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements en équilibre du vent thermique. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.



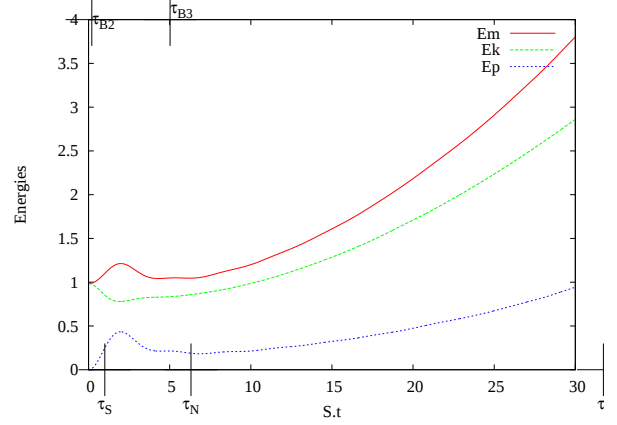
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



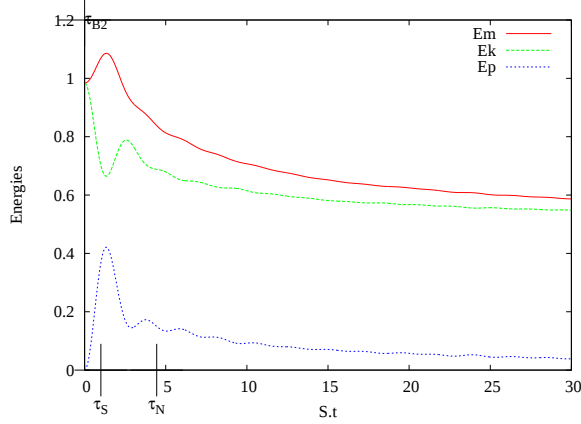
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



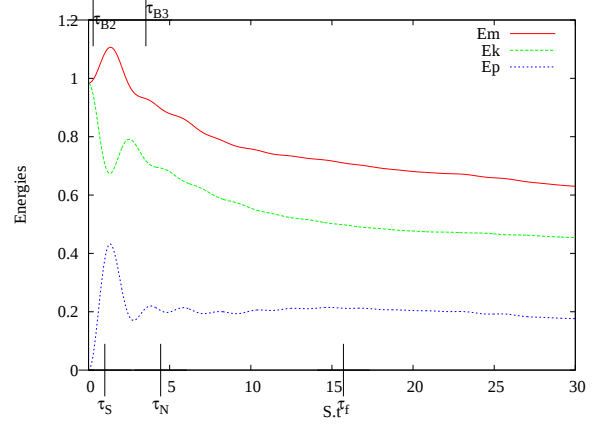
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

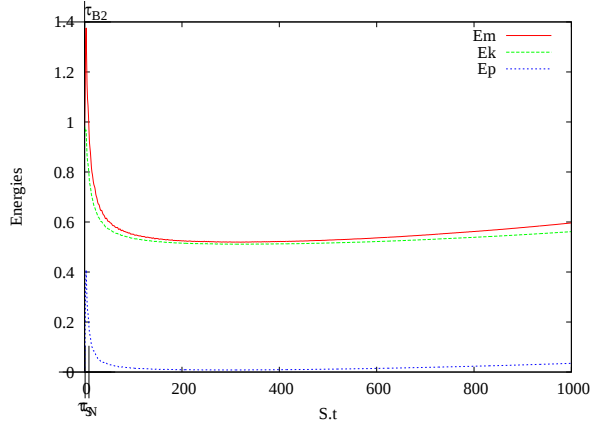


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

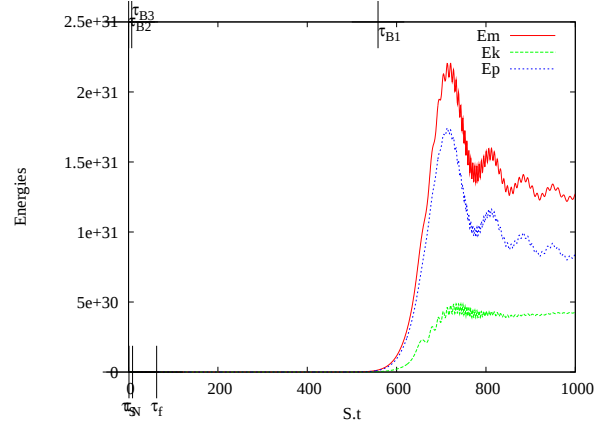


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

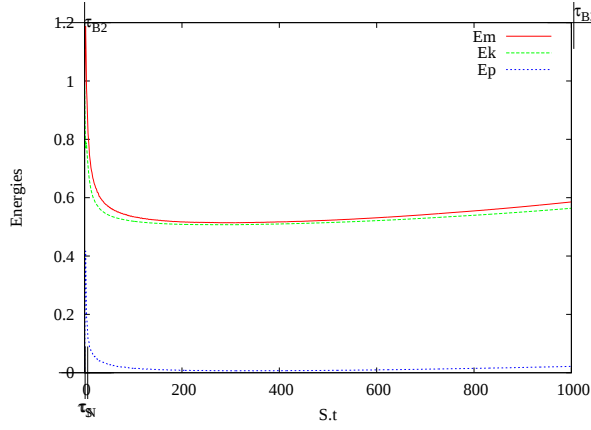
FIG. 2.8 – Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 30$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.



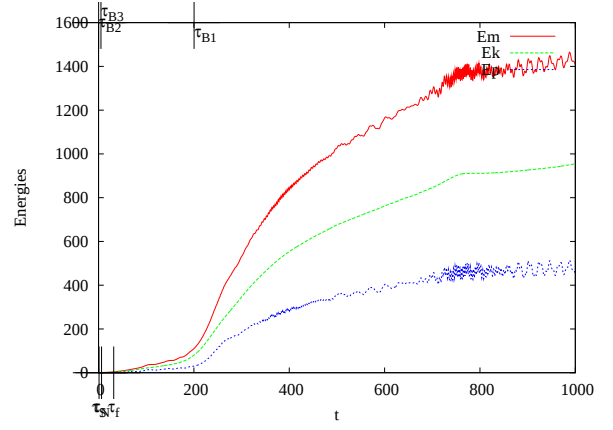
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



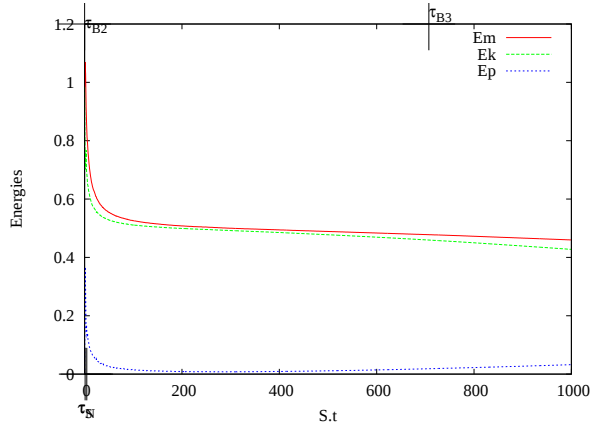
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



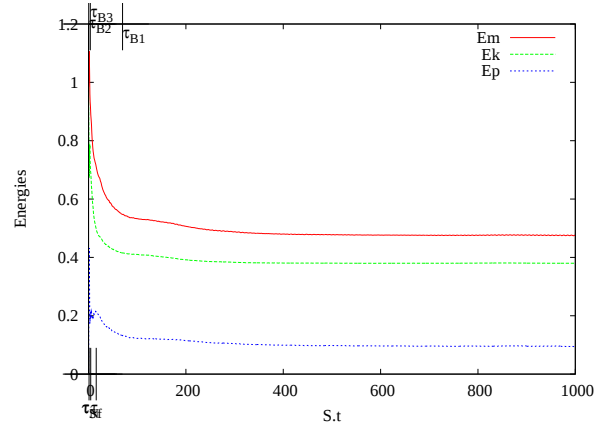
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

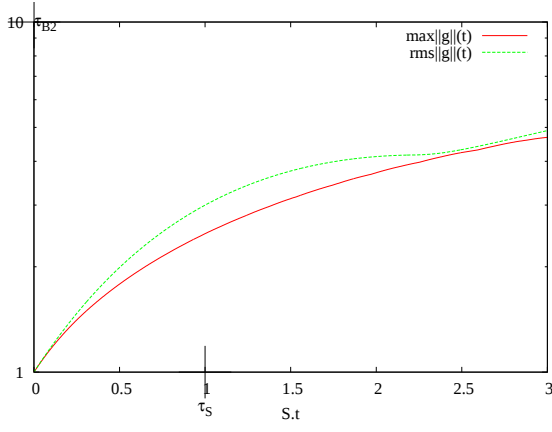


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

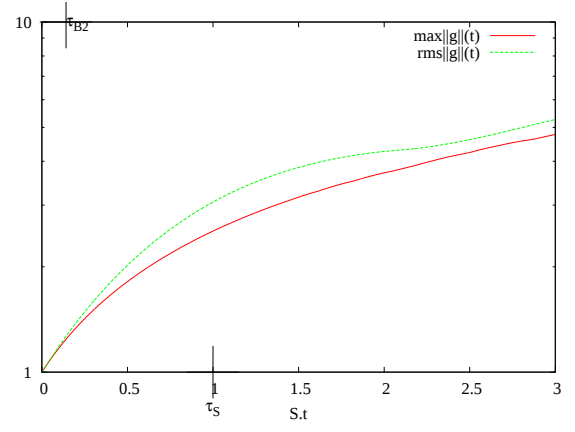


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

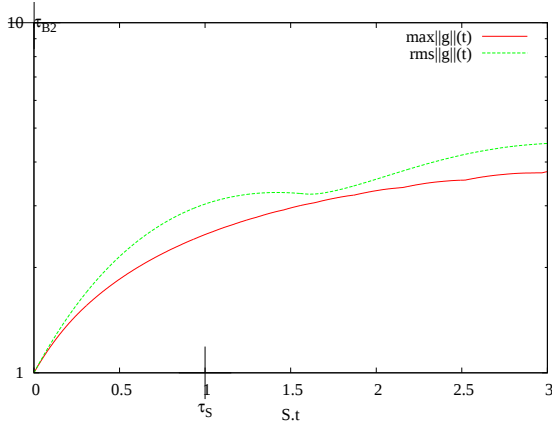
FIG. 2.9 – Énergies de la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 1000$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.



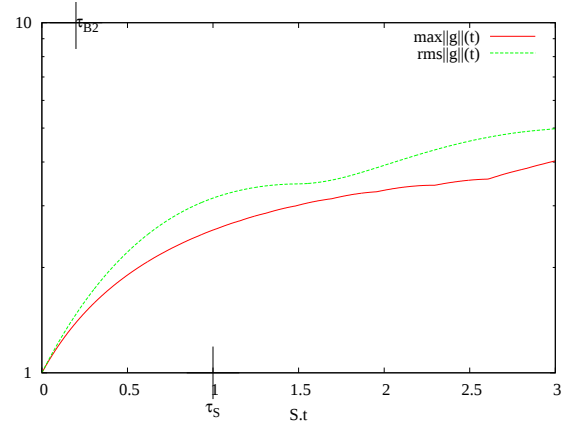
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



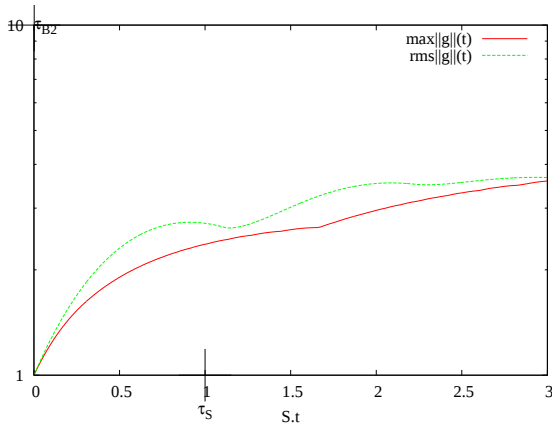
(b) Réalisation MICROOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



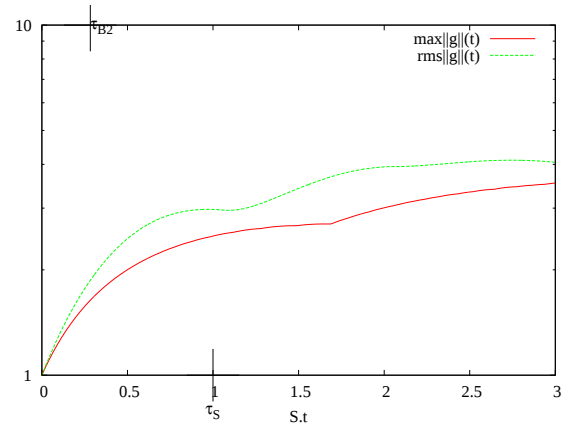
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

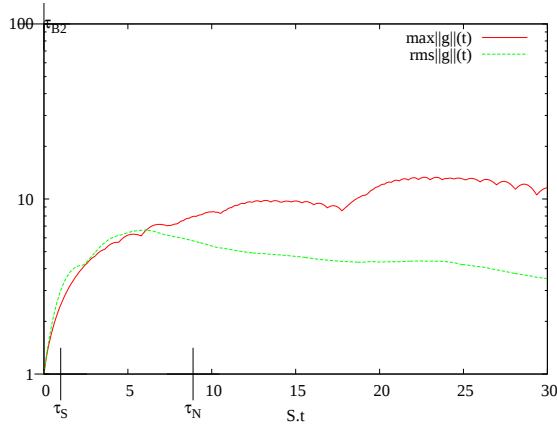


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

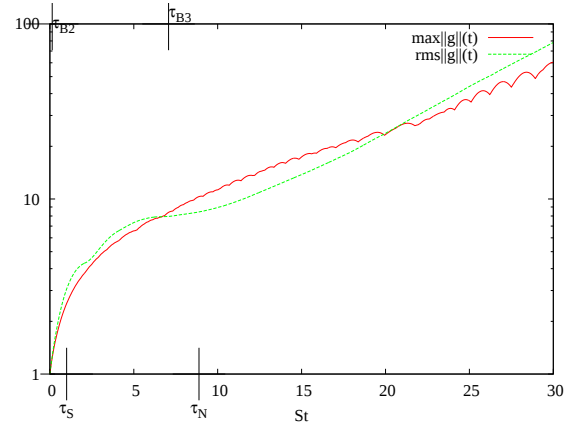


(f) Réalisation SYNOOCÉAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

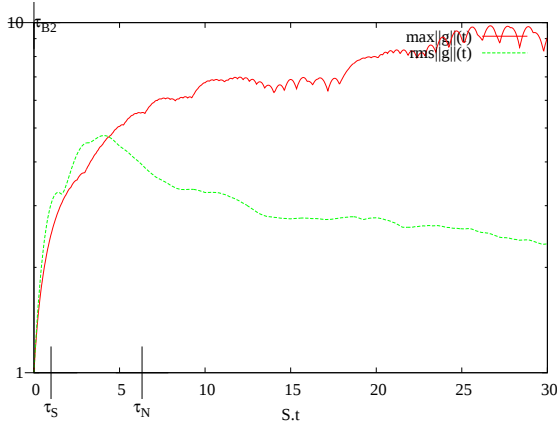
FIG. 2.10 – Statistiques sur la norme du tenseur de Green pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 3$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Pour chaque sous-figure la courbe rouge représente l'évolution du maximum sur la sphère d'onde de la norme du tenseur de Green ($\max\|\bar{g}\|(t) = \max_{\mathbf{k} \in \mathfrak{S}}(\|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|)$). La courbe verte représente l'évolution de la racine de la moyenne du carré de la norme du tenseur de Green ($\text{rms}\|\bar{g}\|(t) = \sqrt{\frac{1}{\int_{\mathfrak{S}} d\mathbf{k}} \int_{\mathfrak{S}} \|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\| \|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\| d\mathbf{k}}$). La sphère de nombre d'onde unitaire est notée $\mathfrak{S}$. Si la couleur n'est pas présente la courbe rouge est en trait plein et la courbe verte est en trait pointillé.



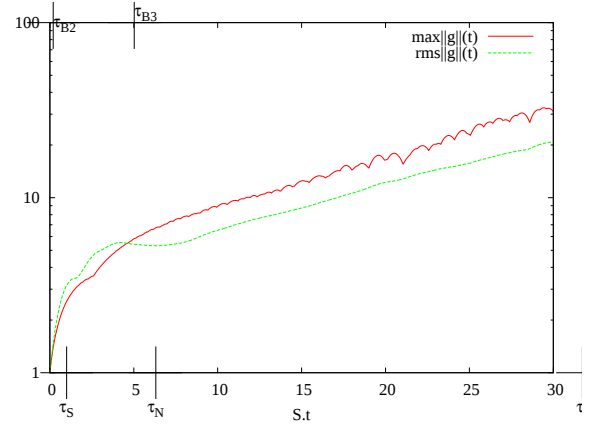
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



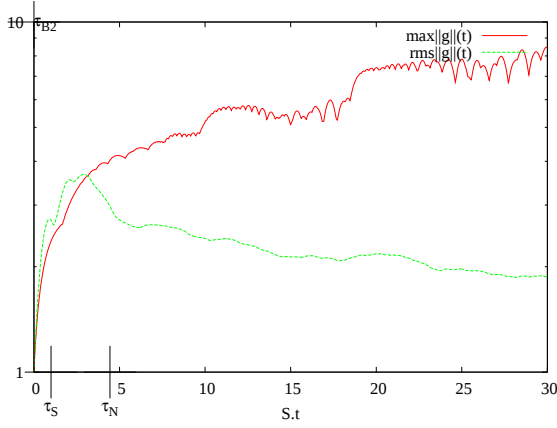
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



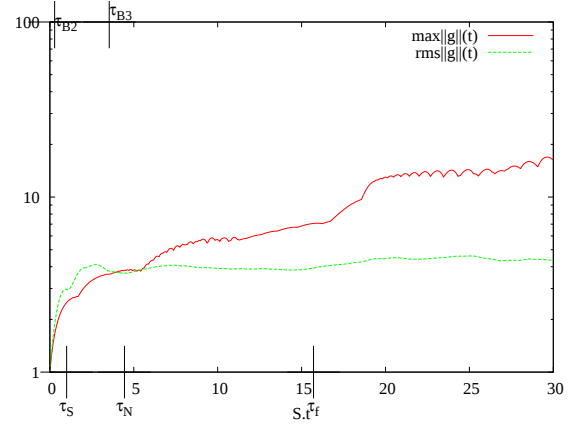
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

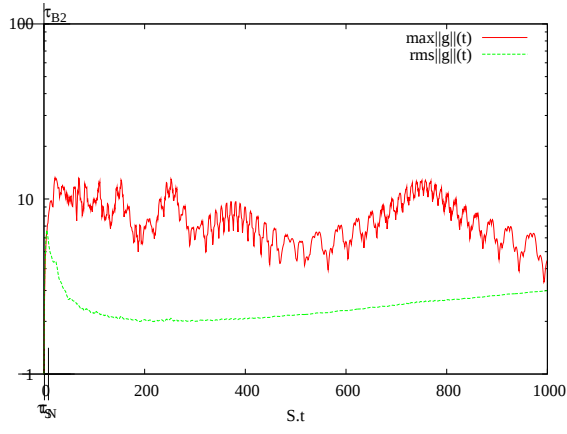


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

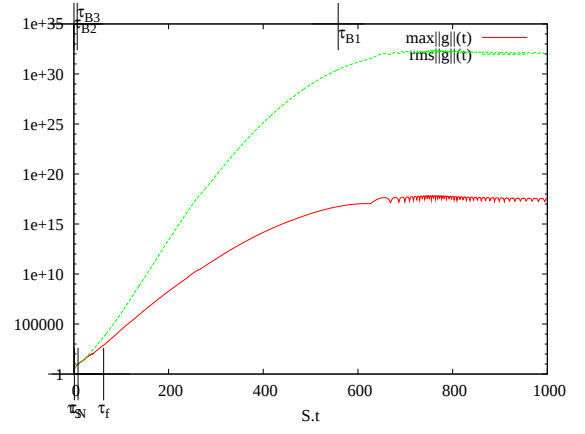


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

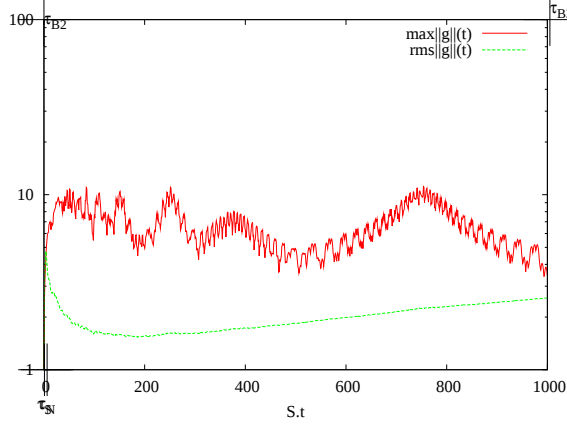
FIG. 2.11 – Statistiques sur la norme du tenseur de Green pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 30$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Pour chaque sous-figure la courbe rouge représente l'évolution du maximum sur la sphère d'onde de la norme du tenseur de Green ($\max\|\bar{g}\|(t) = \max_{\mathbf{k} \in \mathfrak{S}}(\|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|)$). La courbe verte représente l'évolution de la racine de la moyenne du carré de la norme du tenseur de Green ($\text{rms}\|\bar{g}\|(t) = \sqrt{\frac{1}{\int_{\mathfrak{S}} d\mathbf{k}} \int_{\mathfrak{S}} \|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|^2 d\mathbf{k}}$). La sphère de nombre d'onde unitaire est notée $\mathfrak{S}$. Si la couleur n'est pas présente la courbe rouge est en trait plein et la courbe verte est en trait pointillé.



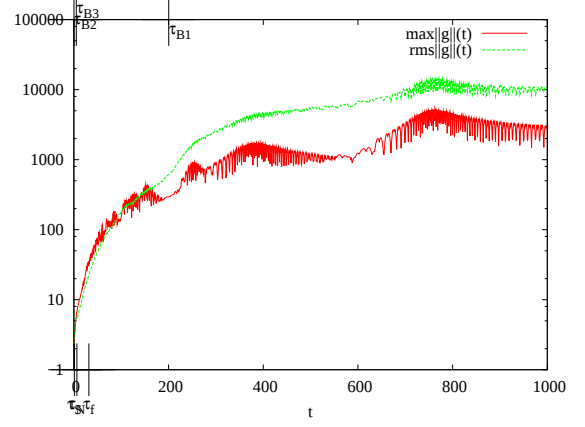
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



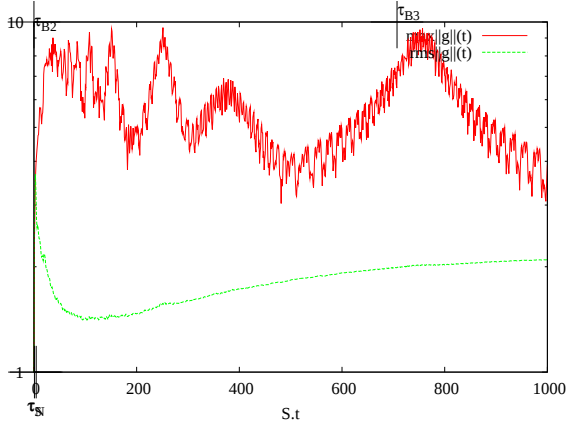
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



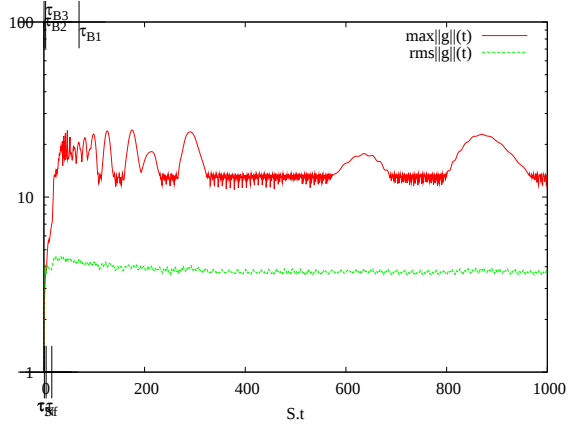
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

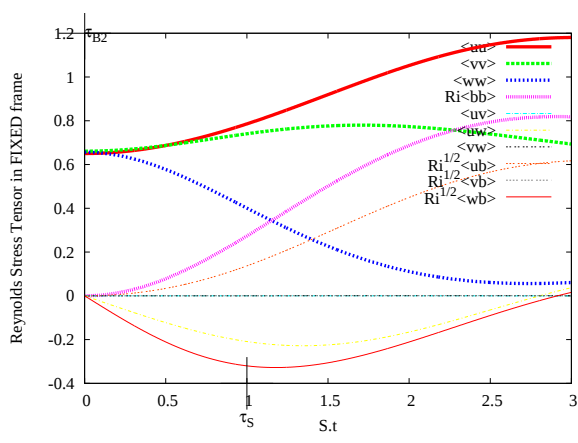


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

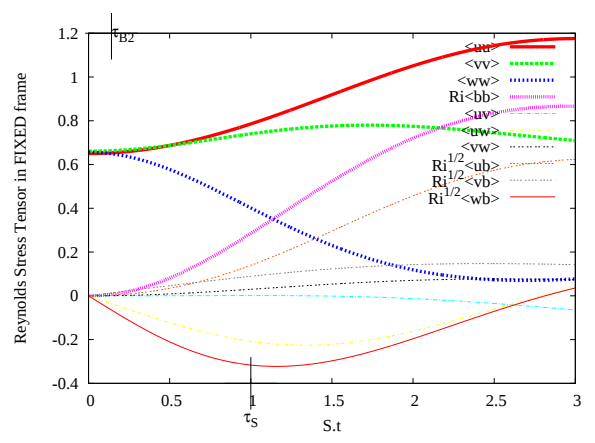


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

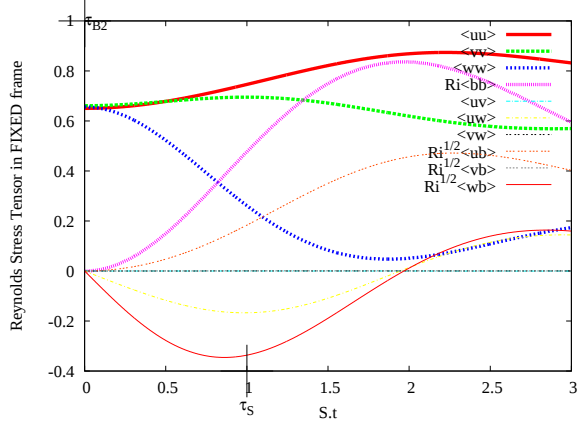
FIG. 2.12 – Statistiques sur la norme du tenseur de Green pour série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 1000$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Pour chaque sous-figure la courbe rouge représente l'évolution du maximum sur la sphère d'onde de la norme du tenseur de Green ($\max\|\bar{g}\|(t) = \max_{\mathbf{k} \in \mathfrak{S}} (\|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|)$). La courbe verte représente l'évolution de la racine de la moyenne du carré de la norme du tenseur de Green ($\text{rms}\|\bar{g}\|(t) = \sqrt{\frac{1}{\int_{\mathfrak{S}} d\mathbf{k}} \int_{\mathfrak{S}} \|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\| \|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\| d\mathbf{k}}$). La sphère de nombre d'onde unitaire est notée $\mathfrak{S}$. Si la couleur n'est pas présente la courbe rouge est en trait plein et la courbe verte est en trait pointillé.



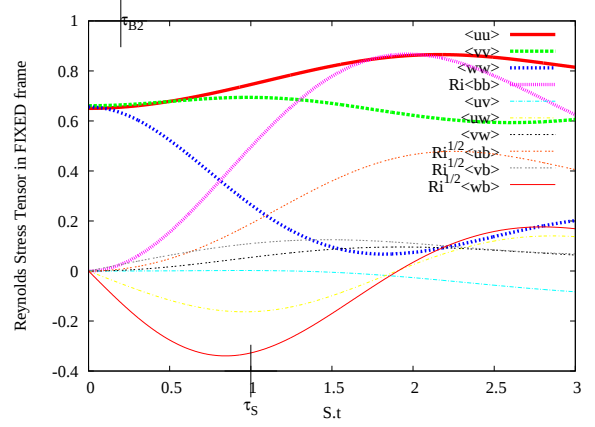
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



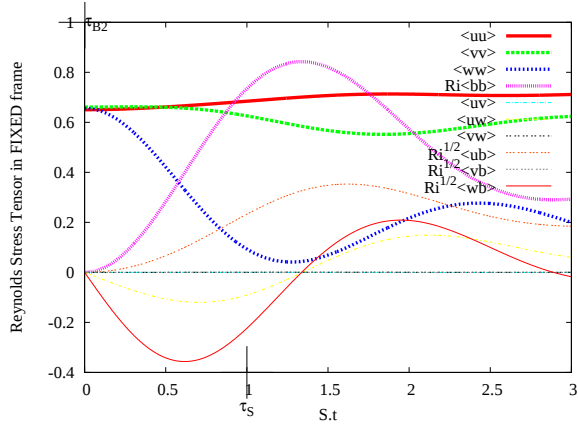
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



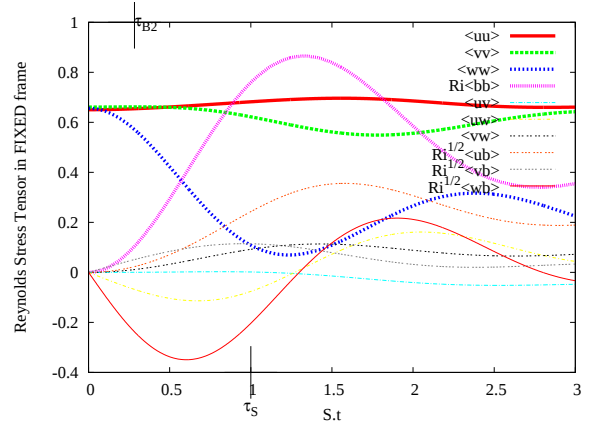
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

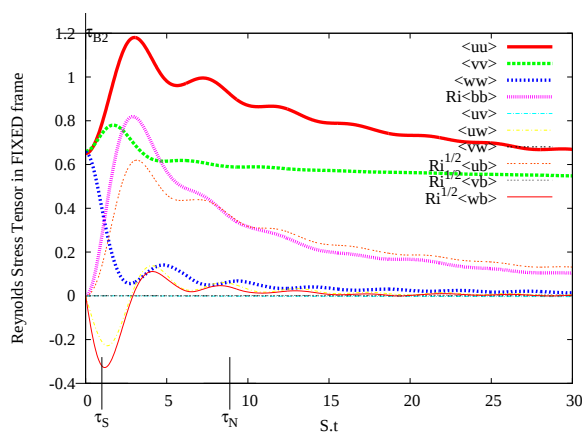


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

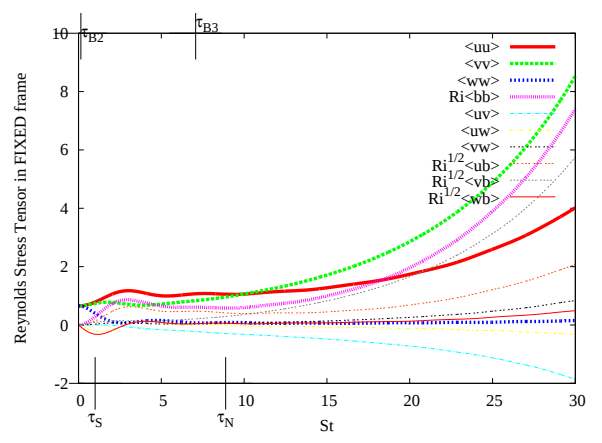


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

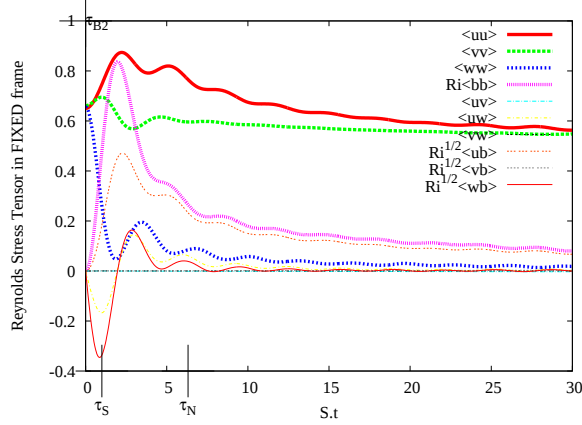
FIG. 2.13 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé en repère fixe pour la série GÉOPHY-SIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 3$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante zonale est représentée en trait fort rouge ($\langle uu \rangle$). La composante méridionale est représentée en trait fort vert ($\langle vv \rangle$). La composante verticale est représentée en trait fort bleu ($\langle ww \rangle$). La composante de flotabilité est représentée en trait fort rose ($Ri \langle bb \rangle$). La composante de corrélation zonale-transverse est représentée en trait fin bleu clair ($\langle uv \rangle$). La composante de corrélation zonale-verticale est représentée en trait fin jaune ($\langle uw \rangle$). La composante de corrélation méridionale-verticale est représentée en trait fin noir ($\langle vw \rangle$). La composante de flux de flotabilité zonale est représentée en trait fin orange ($Ri^{1/2} \langle ub \rangle$). La composante de flux de flotabilité méridionale est représentée en trait fin gris ($Ri^{1/2} \langle vb \rangle$). La composante de flux de flotabilité verticale est représentée en trait fin rouge ($Ri^{1/2} \langle wb \rangle$).



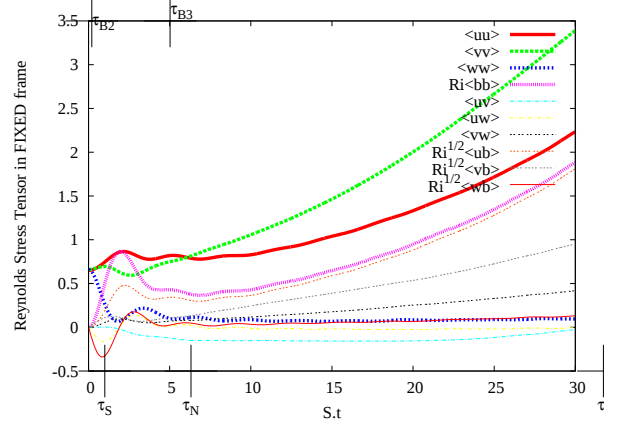
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



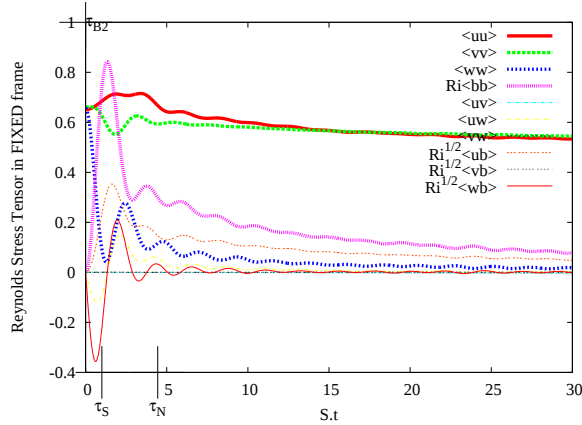
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



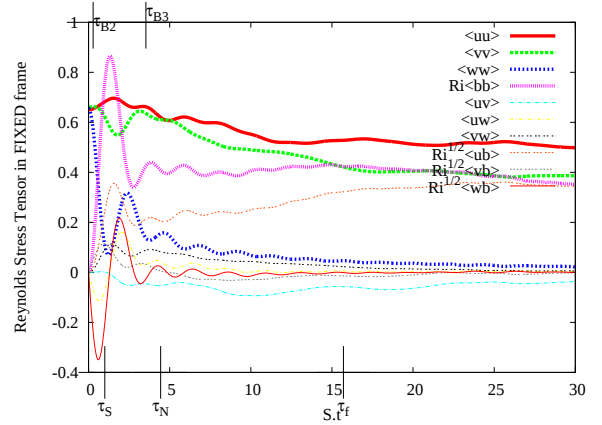
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

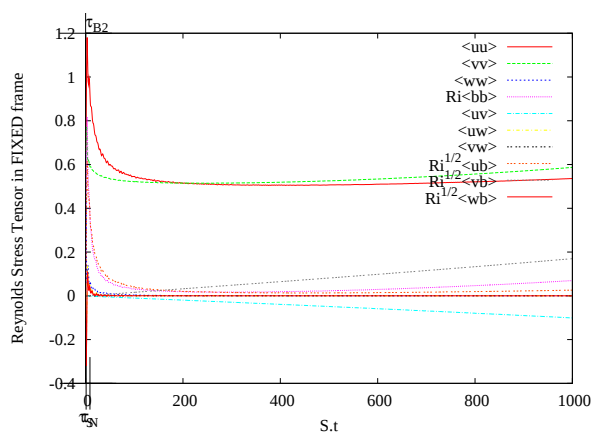


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

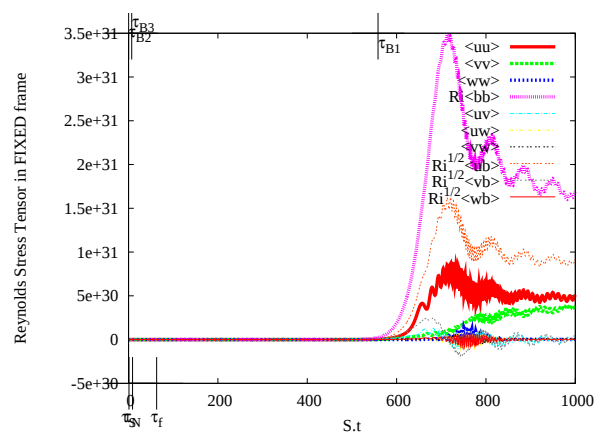


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

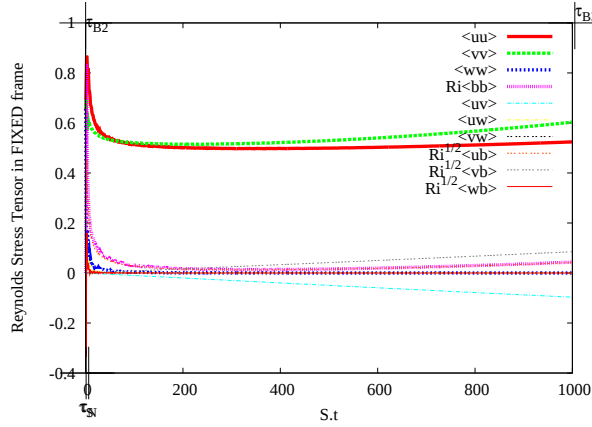
FIG. 2.14 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé en repère fixe pour la série GÉOPHY-SIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 30$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante zonale est représentée en trait fort rouge ($\langle uu \rangle$). La composante méridionale est représentée en trait fort vert ($\langle vv \rangle$). La composante verticale est représentée en trait fort bleu ($\langle ww \rangle$). La composante de flotabilité est représentée en trait fort rose ($Ri \langle bb \rangle$). La composante de corrélation zonale-transverse est représentée en trait fin bleu clair ($\langle uv \rangle$). La composante de corrélation zonale-verticale est représentée en trait fin jaune ($\langle uw \rangle$). La composante de corrélation méridionale-verticale est représentée en trait fin noir ($\langle vw \rangle$). La composante de flux de flotabilité zonale est représentée en trait fin orange ($Ri^{1/2} \langle ub \rangle$). La composante de flux de flotabilité méridionale est représentée en trait fin gris ($Ri^{1/2} \langle vb \rangle$). La composante de flux de flotabilité verticale est représentée en trait fin rouge ($Ri^{1/2} \langle wb \rangle$).



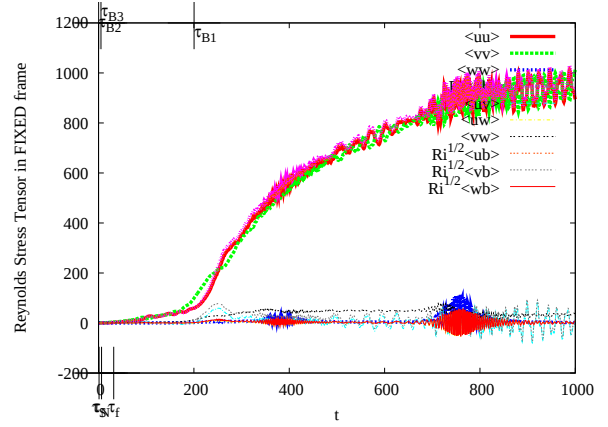
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



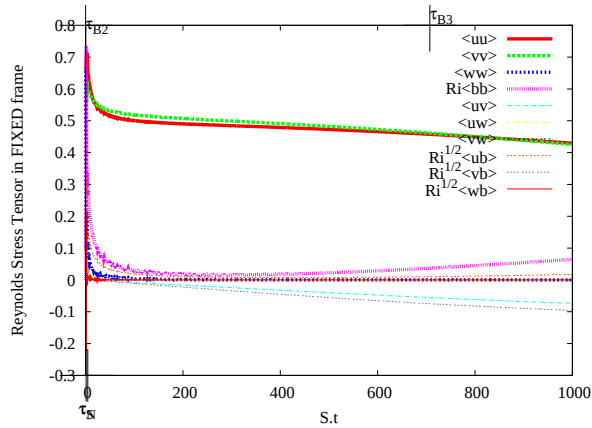
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



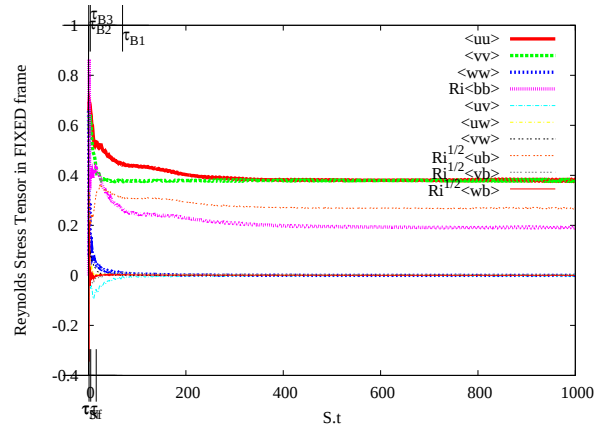
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

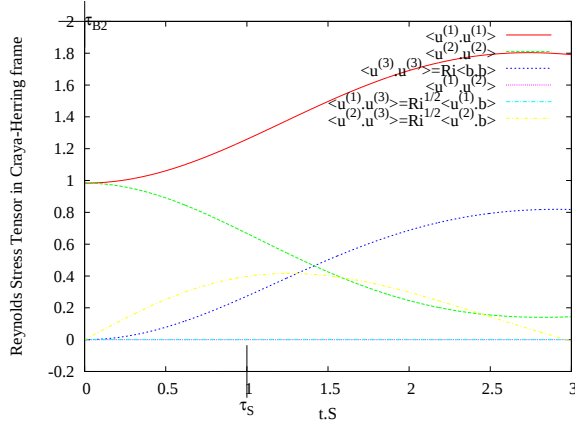


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

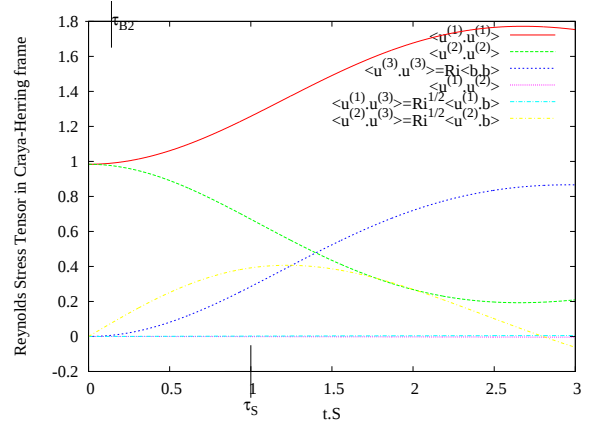


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

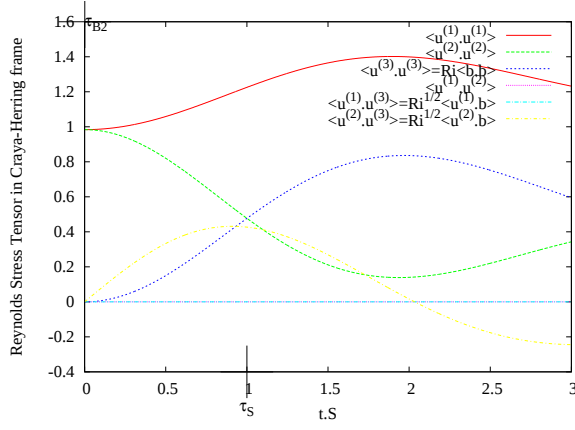
FIG. 2.15 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé exprimé en repère fixe pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 1000$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante zonale est représentée en trait fort rouge ($\langle uu \rangle$). La composante méridionale est représentée en trait fort vert ($\langle vv \rangle$). La composante verticale est représentée en trait fort bleu ($\langle ww \rangle$). La composante de flotabilité est représentée trait fort rose ($Ri \langle bb \rangle$). La composante de corrélation zonale-transverse est représentée en trait fin bleu clair ($\langle uv \rangle$). La composante de corrélation zonale-verticale est représentée en trait fin jaune ($\langle uw \rangle$). La composante de corrélation méridionale-verticale est représentée en trait fin noir ($\langle vw \rangle$). La composante de flux de flotabilité zonale est représentée en trait fin orange ($Ri^{1/2} \langle ub \rangle$). La composante de flux de flotabilité méridionale est représentée en trait fin gris ($Ri^{1/2} \langle vb \rangle$). La composante de flux de flotabilité verticale est représentée en trait fin rouge ($Ri^{1/2} \langle wb \rangle$).



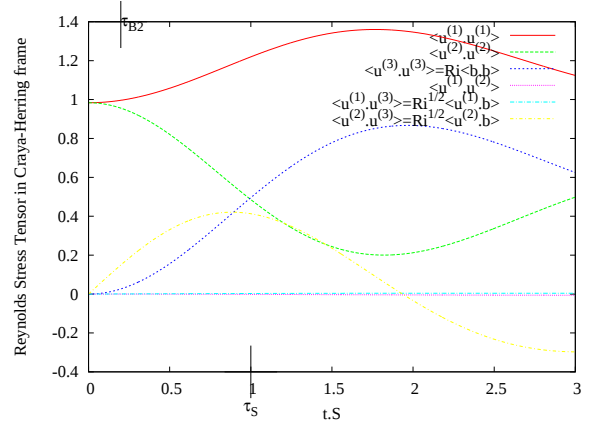
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



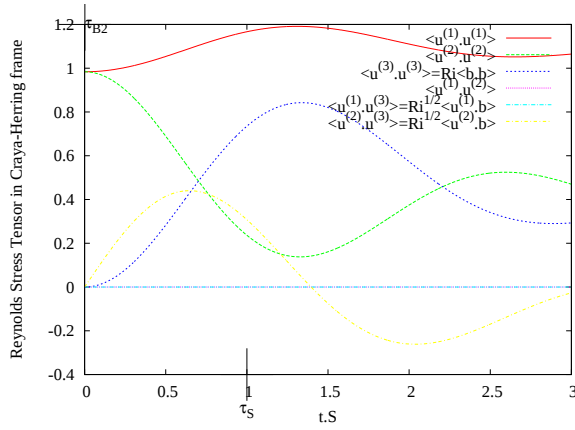
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



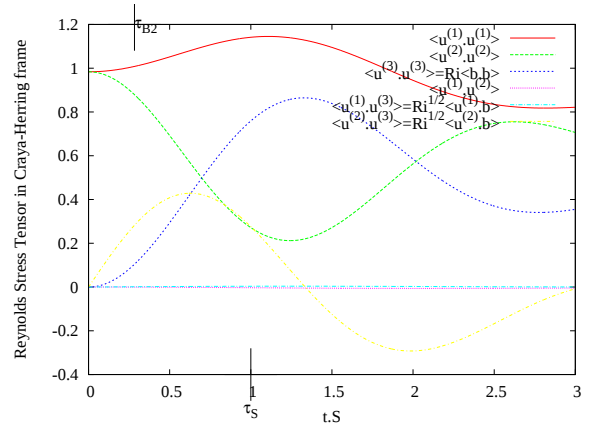
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

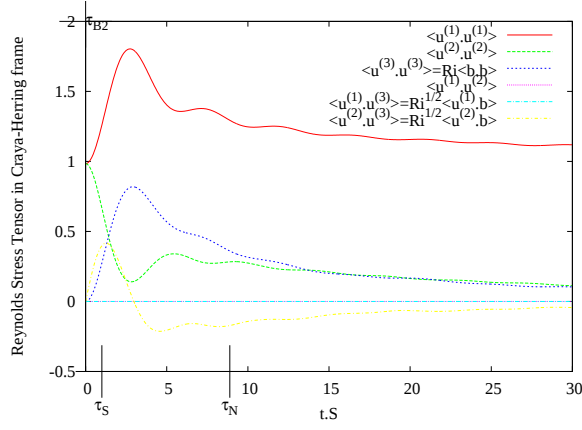


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

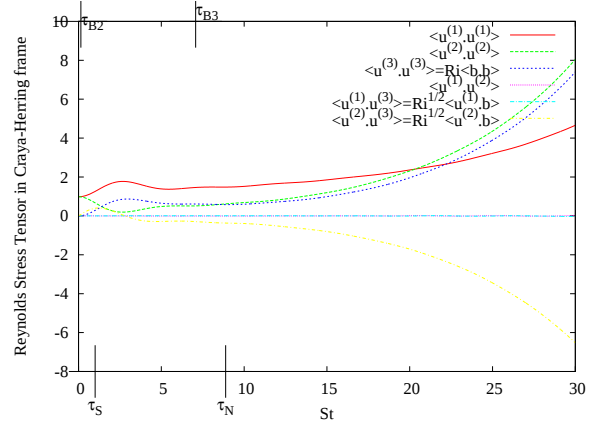


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

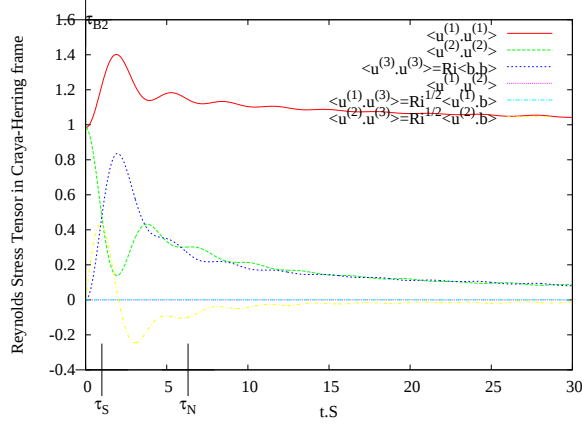
FIG. 2.16 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé exprimé en repère de Craya-Herring pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 3$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante toroïdale est représentée en trait rouge ($\langle U^{(1)}u^{(1)} \rangle$). La composante poloïdale est représentée en trait vert ($\langle u^{(2)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flotabilité est représentée en trait bleu ($Ri \langle bb \rangle$). La composante de corrélation toroïdale-poloïdale est représentée en trait rose ($\langle u^{(1)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flux de flotabilité toroïdale est représentée en trait bleu clair ($Ri^{1/2} \langle u^{(1)}b \rangle$). La composante de flux de flotabilité poloïdale est représentée en trait jaune ($Ri^{1/2} \langle u^{(2)}b \rangle$).



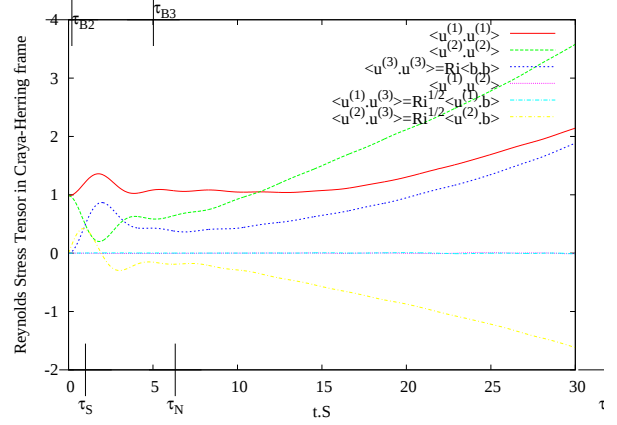
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



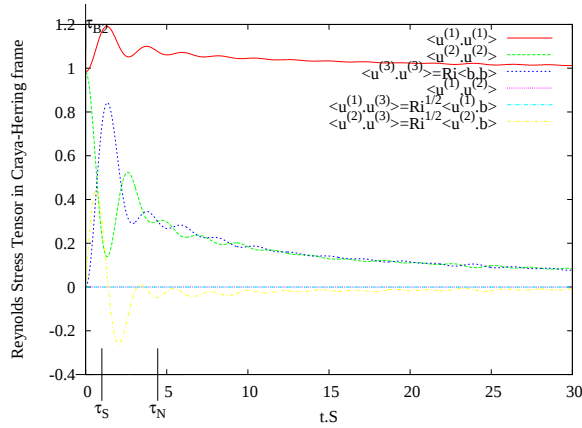
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



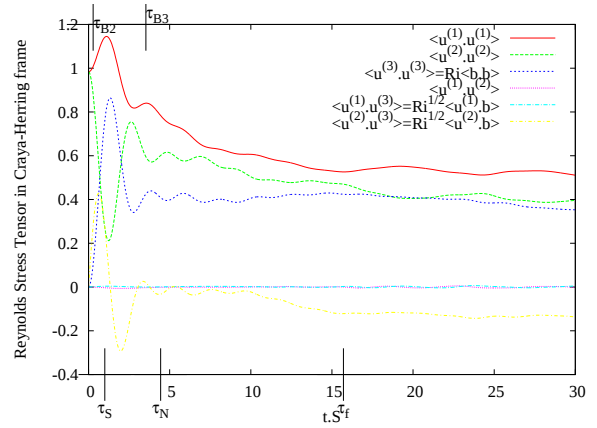
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

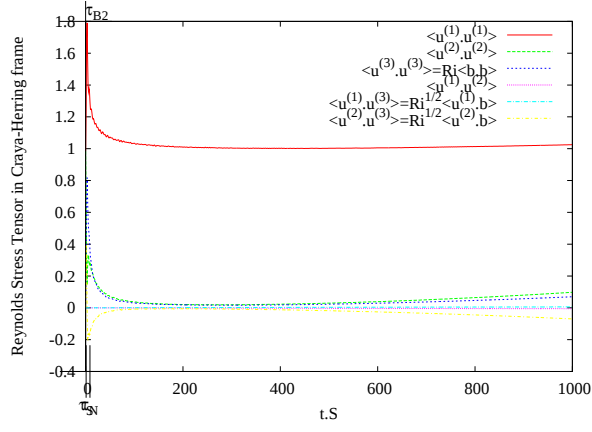


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

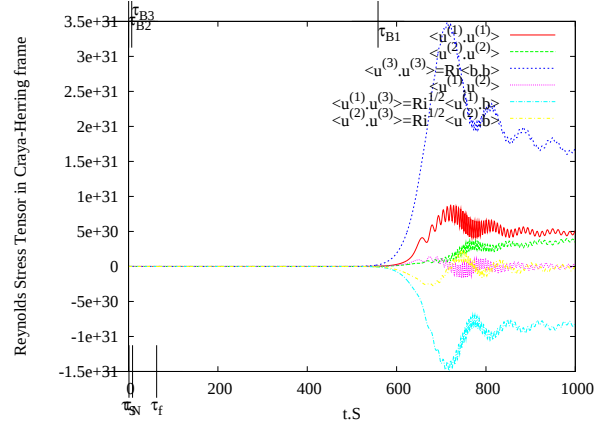


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

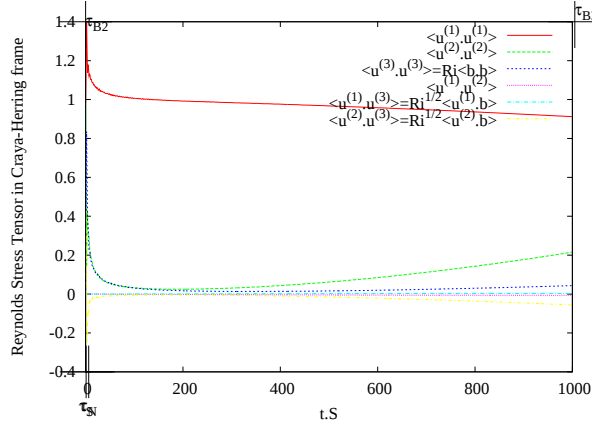
FIG. 2.17 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé exprimé dans le repère de Craya-Herring pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $t.S = 30$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante toroïdale est représentée en trait rouge ($\langle u^{(1)}u^{(1)} \rangle$). La composante poloïdale est représentée en trait vert ($\langle u^{(2)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flotabilité est représentée en trait bleu ($Ri \langle b b \rangle$). La composante de corrélation toroïdale-poloïdale est représentée en trait rose ($\langle u^{(1)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flux de flotabilité toroïdale est représentée en trait bleu clair ($Ri^{1/2} \langle u^{(1)}b \rangle$). La composante de flux de flotabilité poloïdale est représentée en trait jaune ($Ri^{1/2} \langle u^{(2)}b \rangle$).



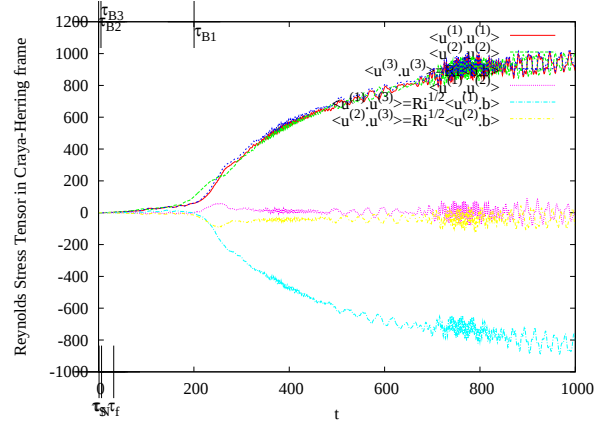
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



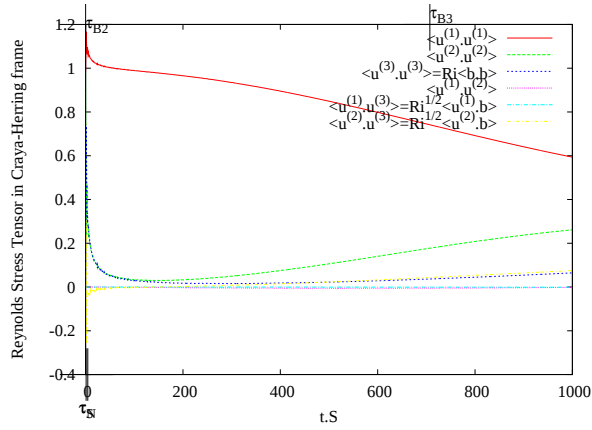
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



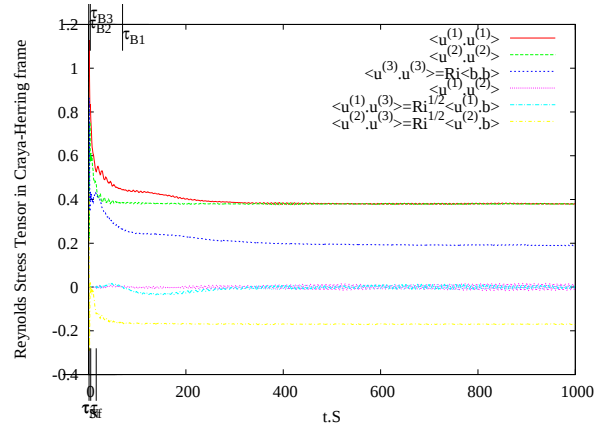
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

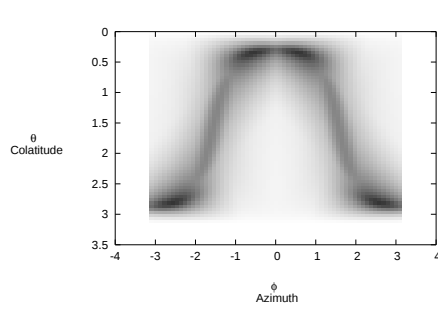


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

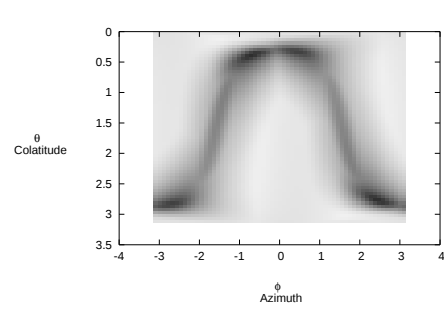


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

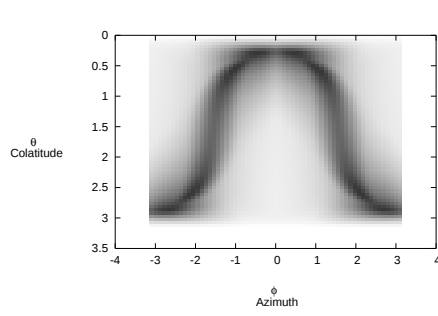
FIG. 2.18 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé exprimé dans le repère de Craya-Herring de la série GÉOPHYSIQUE en DRN sur $tS = 1000$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante toroïdale est représentée en trait rouge ($\langle u^{(1)}u^{(1)} \rangle$). La composante poloïdale est représentée en trait vert ($\langle u^{(2)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flotabilité est représentée trait bleu ($Ri < bb \rangle$). La composante de corrélation toroïdale-poloïdale est représentée en trait rose ($\langle u^{(1)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flux de flotabilité toroïdale est représentée en trait bleu clair ($Ri^{1/2} \langle u^{(1)}b \rangle$). La composante de flux de flotabilité poloïdale est représentée en trait jaune ($Ri^{1/2} \langle u^{(2)}b \rangle$).



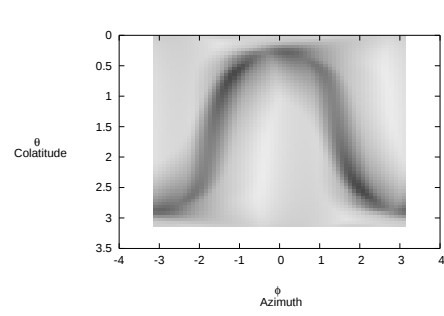
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



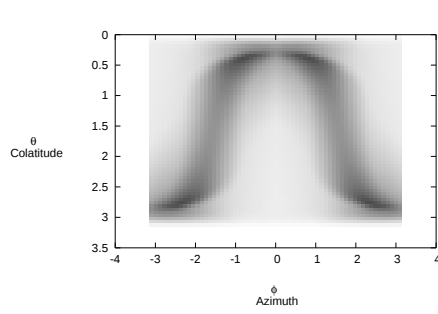
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



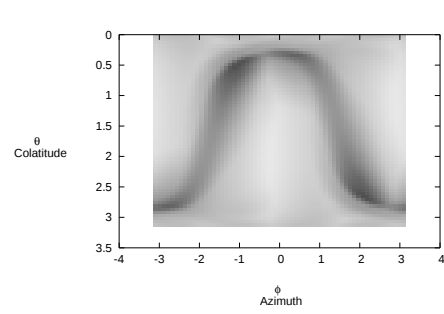
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

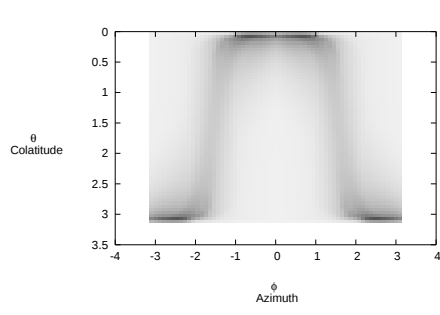


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

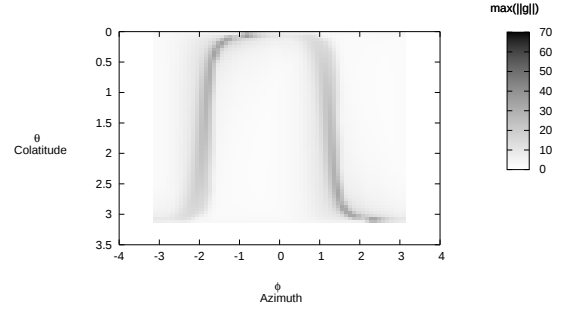


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

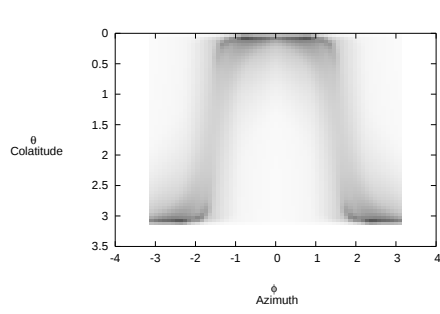
FIG. 2.19 – Anisotropie spectrale du maximum de la norme du tenseur de Green pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 3$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les images représentent la cartographie de la projection cylindrique du maximum de la norme du tenseur de Green ($MAX\|\bar{\bar{g}}\| = \max_{t \in [0,3]} (\|\bar{\bar{g}}(\mathbf{k}, t)\|)$). Le maximum est évalué sur des temps tS variant entre 0 et 3.



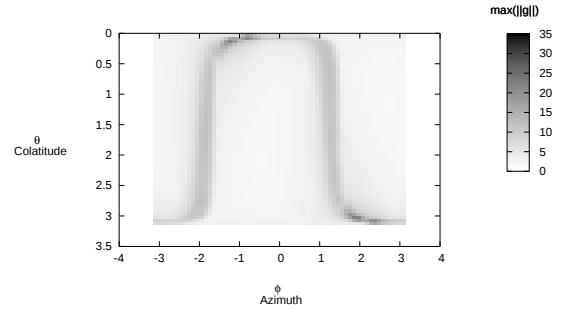
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



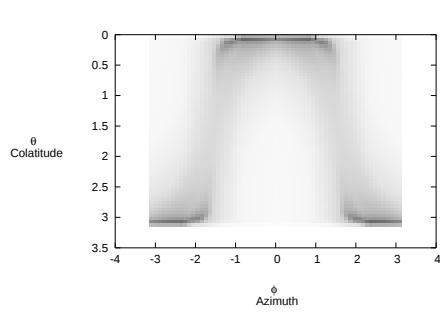
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



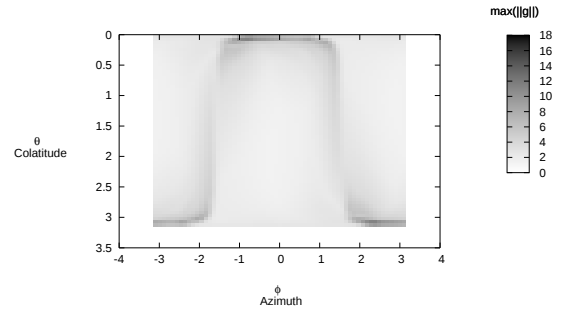
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)

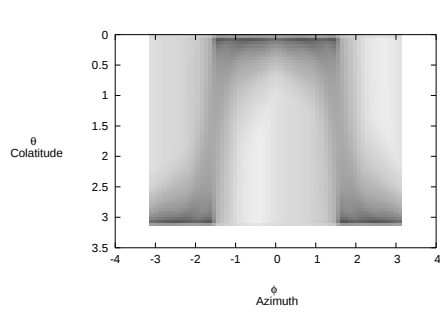


(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)

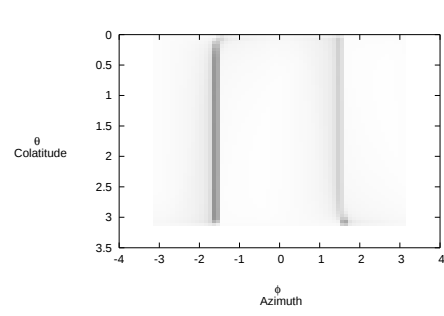


(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

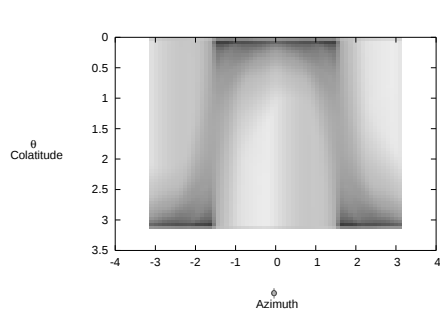
FIG. 2.20 – Anisotropie du maximum de la norme du tenseur de Green pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 30$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les images représentent la cartographie de la projection cylindrique du maximum de la norme du tenseur de Green ($MAX\|\bar{g}\| = \max_{t \in [0,30]} (\|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|)$). Le maximum est évalué sur des temps tS variant entre 0 et 30.



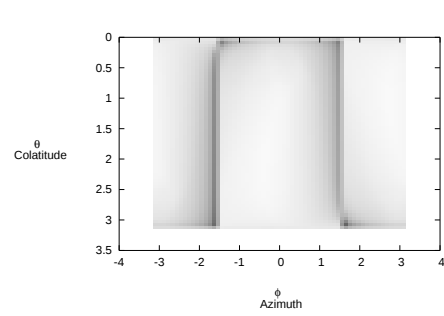
(a) Réalisation MICROATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$)



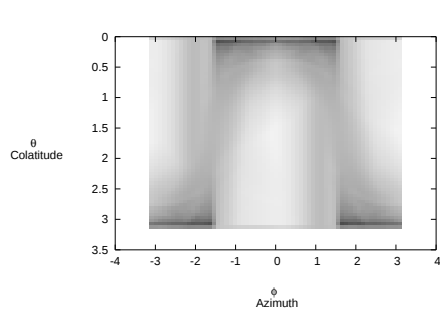
(b) Réalisation MICROOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$)



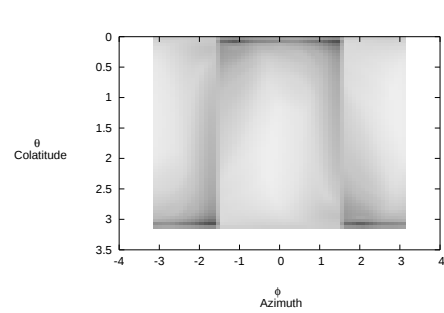
(c) Réalisation INTERATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.99$)



(d) Réalisation INTEROcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$)



(e) Réalisation SYNOATMO ($\epsilon = 0.001$ et $Ri = 2$)



(f) Réalisation SYNOOcéAN ($\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$)

FIG. 2.21 – Anisotropie spectrale du maximum de la norme du tenseur de Green pour la série GÉOPHYSIQUE en distorsion rapide numérique sur $tS = 1000$. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les images représentent la cartographie de la projection cylindrique du logarithme du maximum de la norme du tenseur de Green ($\log(MAX \|\bar{g}\|) = \log(\max_{t \in [0, 1000]} (\|\bar{g}(\mathbf{k}, t)\|))$). Le maximum est évalué sur des temps tS variant entre 0 et 1000.

2.5.6 Scénario de l'évolution barocline linéaire

Nous avons vu précédemment que les réalisations MICROATMO et INTERATMO ont été sur des *temps moyens* décroissantes mais devenaient croissantes sur des *temps très longs*. Pour investiguer ce phénomène nous allons étudier une valeur où le paramètre de baroclinicité ϵ prend une valeur intermédiaire entre les calculs de la série ATMO (définie par $\epsilon = 0.001$) et OCÉAN (définie par $\epsilon = 0.2$). La valeur du paramètre ϵ pour la réalisation INTERINTER sera $\epsilon = 0.01$. Un scénario d'évolution des fluctuations baroclines est élaboré en 5 phases :

1. La décroissance initiale
2. La première croissance
3. Les développements toroïdaux : l'influence de la rotation
4. L'explosion : la seconde croissance
5. La saturation

Les 5 phases énumérées ci-dessus sont caractérisées ci-dessous.

La décroissance initiale

Sur des *temps moyens* $tS = 30$ il y a effectivement décroissance. La figure 2.22(a) et 2.23(a) indique que l'écoulement est semblable à l'écoulement purement cisailé-stratifié. L'ajustement initial de l'énergie est défini par la valeur du nombre de Richardson, plus le nombre de Richardson sera grand plus l'ajustement sera rapide.

La première croissance

Lorsque le troisième temps barocline est dépassé on observe une croissance de la composante toroïdale (courbe rouge) et de la composante de flotabilité (courbe bleu) sur la figure 2.23(b). Rappelons que le troisième temps barocline est défini par $\tau_{B3} = \frac{N}{Sf}$ qui correspond au temps caractéristique de Eady 1949.

Les développements toroïdaux : l'influence de la rotation

Lorsque le temps caractéristique des ondes d'inertie définie par $\tau_f = \frac{2\pi}{f}$ est dépassé on peut voir un développement de la corrélation croisés toroïdo-poloïdale (courbe bleu claire) ainsi que du flux de flotabilité toroïdale (courbe rose) sur la figure 2.23(b).

L'explosion : la seconde croissance

La figure 2.22(b) représente l'évolution des énergies sur des *temps extrêmement longs* ($tS = 100\,000$). Sur cette figure on peut remarquer que lorsque le première temps barocline ($\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$) est dépassé il y a une "explosion" des énergies.

La saturation

"L'explosion" de l'énergie citée ci-dessus n'a pas une croissance exponentielle à l'infini mais il y a une saturation comme on peut le voir sur la figure 2.22(b). Le fait qu'il n'y ait pas de croissance exponentielle à l'infini rend ce phénomène invisible pour une analyse avec des outils de type mode normaux. On remarquera que l'énergie cinétique turbulente en vert n'est pas soumise à des oscillations. L'énergie potentielle turbulente fait de très grandes oscillations autour de la valeur 400.

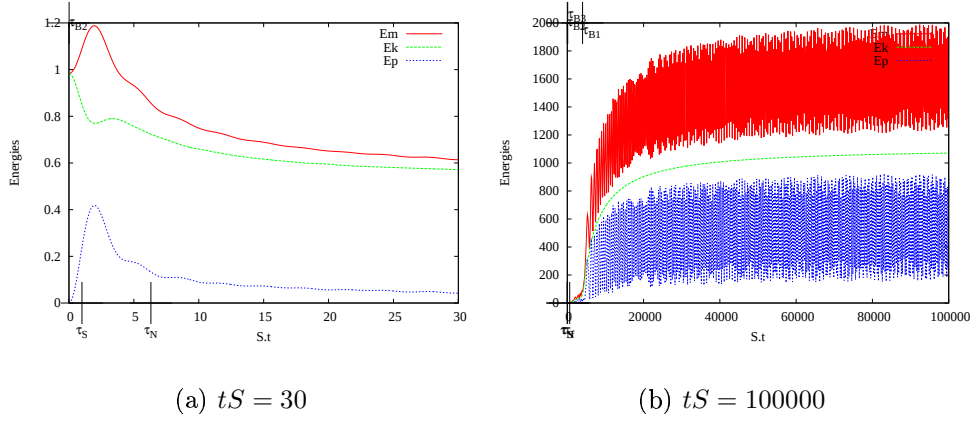


FIG. 2.22 – Énergies du calcul INTERINTER . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.

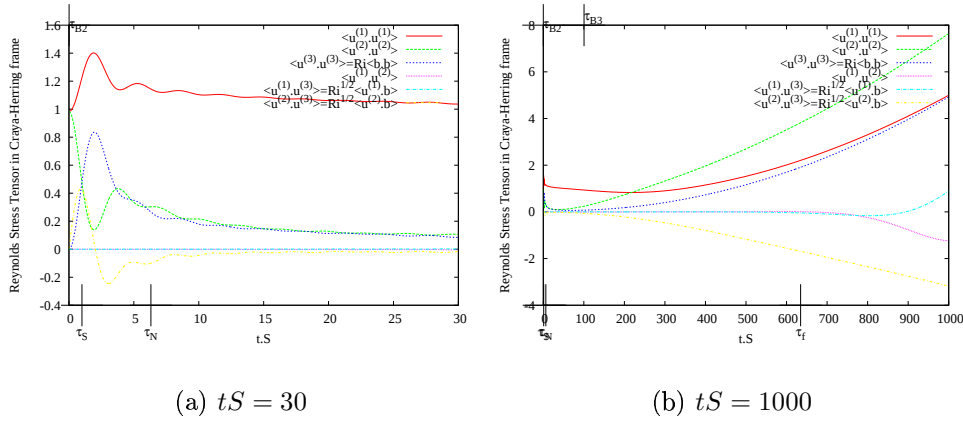
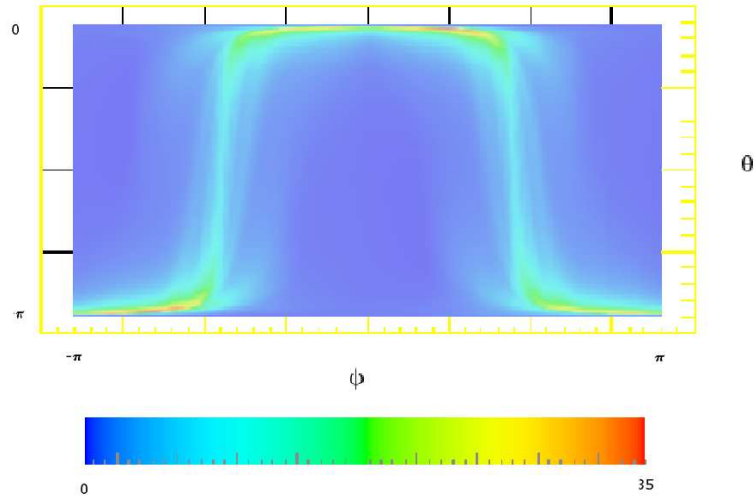


FIG. 2.23 – Tenseur des contraintes de Reynolds généralisé exprimé dans le repère de Craya-Herring pour le calcul INTERINTER . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux cas géophysiquement envisageables. Ce sont des écoulements respectant l'équilibre du vent thermique. La composante toroïdale est représentée en trait rouge ($\langle U^{(1)}u^{(1)} \rangle$). La composante poloïdale est représentée en trait vert ($\langle U^{(2)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flotabilité est représentée trait bleu ($Ri \langle bb \rangle$). La composante de corrélation toroïdale-poloïdale est représentée en trait rose ($\langle u^{(1)}u^{(2)} \rangle$). La composante de flux de flotabilité toroïdale est représentée en trait bleu clair ($Ri^{1/2} \langle u^{(1)}b \rangle$). La composante de flux de flotabilité poloïdale est représentée en trait jaune ($Ri^{1/2} \langle u^{(2)}b \rangle$).

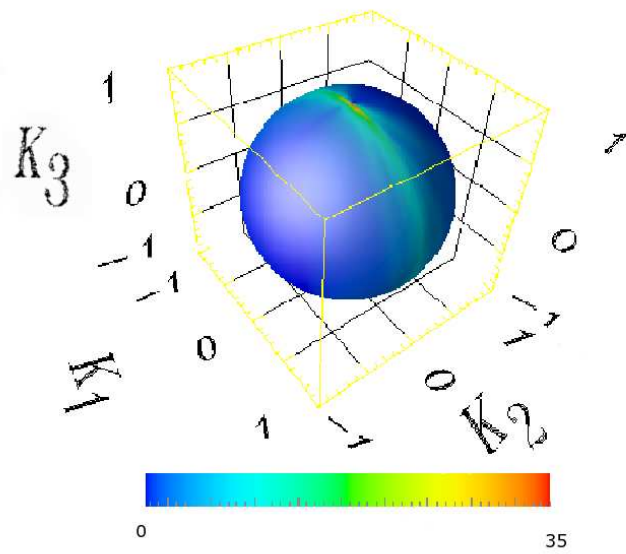
2.6 Effet de la projection cylindrique

Toutes les figures d'anisotropie spectrales présentées précédemment étaient des projections cylindriques de la sphère. Quantitativement la projection cylindrique est très avantageuse. Elle permet de définir les courbes avec plus d'exactitude que sur une sphère. Par contre pour l'interprétation physique il faut garder à l'esprit que la projection cylindrique dilate les pôles. Sur la planche 2.24 on peut voir la réalisation INTEROCÉAN sur des *temps moyens* ($tS = 30$). Sur la projection cylindrique visible sur la figure 2.24(a) les modes maximums sont localisés sur les zones rouges aux pôles nord (en haut) et au pôle sud (en bas). Ces zones ont une extension azimutale d'approximativement $\frac{\pi}{7}$. Maintenant si l'on regarde la figure 2.24(b) qui est la quantité réelle sur la sphère, la zone rouge du pôle nord n'est plus un segment mais un "point". La zone n'a pas d'amplitude azimutale.

Nous avons vu précédemment que l'énergie potentielle cinétique est fortement localisée vers les pôles pour les calculs "stable". La discrétisation sphérique est "biaisée" car le maillage est plus raffiné vers les pôles mais cela n'a pas une grande influence. Sur les figure 2.25 et 2.26 on peut voir les énergies mécaniques turbulentes (ou autrement appelé énergies totales turbulentes) pour deux maillages sphériques. L'énergie pour le premier maillage est représentée par la courbe rouge. Ce maillage contient 64^2 points de collocation en colatitude et en azimut. L'énergie pour le deuxième maillage contient 162^2 points de collocation en colatitude et en azimut. Les courbes sont très proches, leur développement est similaire, toutefois la faible résolution minimise légèrement l'énergie. Pour une étude phénoménologique la résolution de 64^2 sur la sphère est suffisante. Pour des modélisations précises il serait intéressant d'utiliser une sphère avec des mailles à surface constante mais cela complique considérablement l'implémentation du code de calcul.



(a) Quantités projetées



(b) Quantités non-déformées

FIG. 2.24 – Les quantités directionnelles : projection cylindrique. Les figures ci-dessus représentent la même quantité mais vue différemment. La quantité mesurée est le maximum de la norme du tenseur de Green obtenu aux temps $tS = 30$.

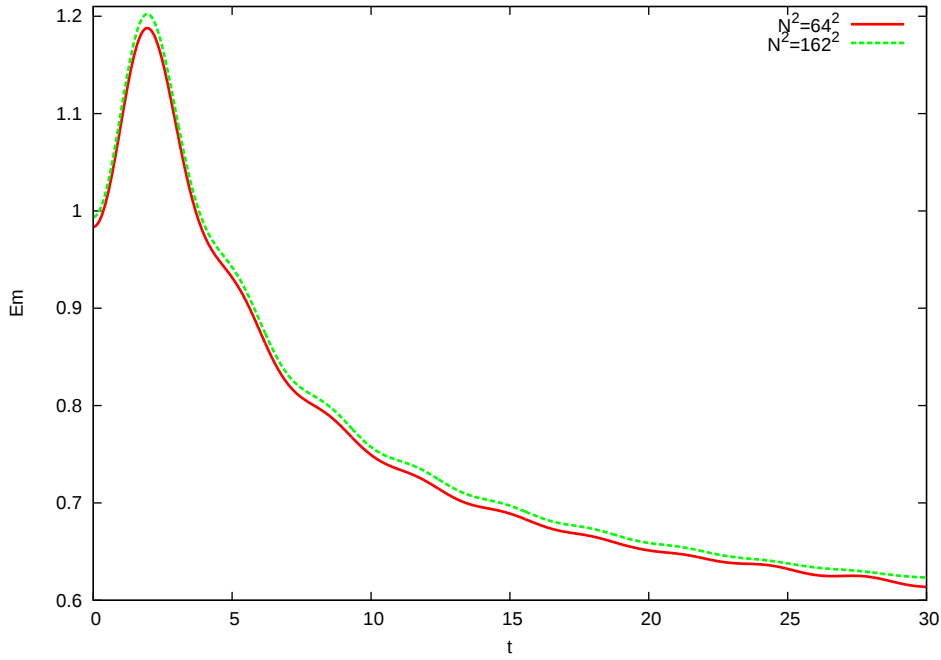


FIG. 2.25 – Influence de la discrétisation sphérique sur les statistiques obtenues en distorsion rapide numérique pour un calcul à énergie croissante. Sur la figure ci-dessus est représentée l'énergie mécanique turbulente (Em). Les paramètres sont $\epsilon = 0.01$ et $Ri = 0.99$. Chaque calcul a une différente résolution spectrale. La courbe rouge correspond à la résolution $N_\theta = 64$ et $N_\phi = 64$. La courbe verte correspond à la résolution spectrale $N_\theta = 162$ et $N_\phi = 162$.

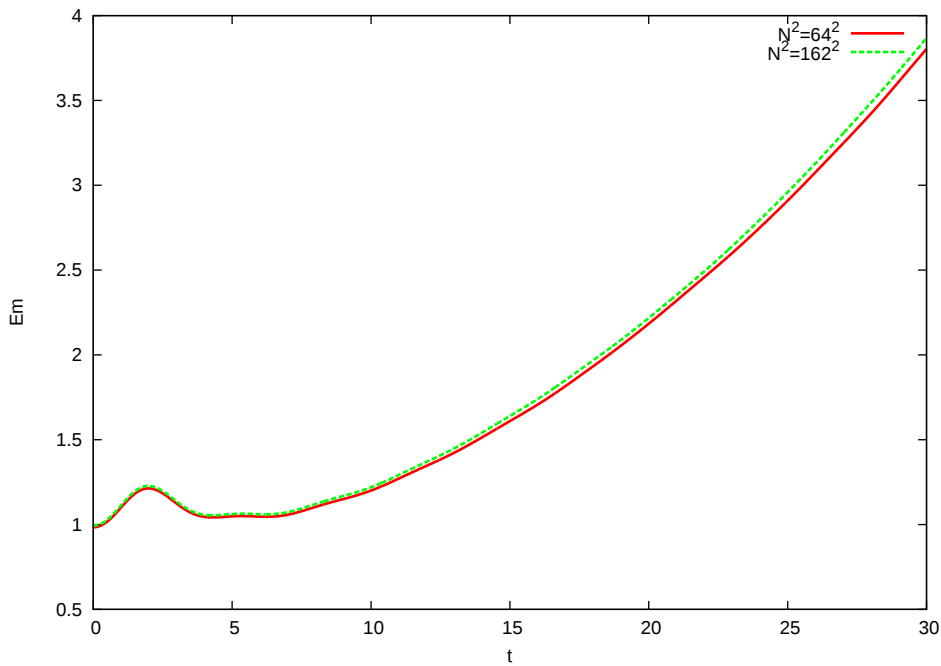


FIG. 2.26 – Influence de la discrétisation sphérique sur les statistiques obtenues en distorsion rapide numérique pour un calcul à énergie croissante. Sur la figure ci-dessus est représentée l'énergie mécanique turbulente (Em). Les paramètres sont $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$. Chaque calcul a une différente résolution spectrale. La courbe rouge correspond à la résolution $N_\theta = 64$ et $N_\phi = 64$. La courbe verte correspond à la résolution spectrale $N_\theta = 162$ et $N_\phi = 162$.

2.7 Les fonctions de Green modales

Le but de cette section est d'identifier les différentes contributions locales en espace de Fourier par l'intermédiaire du tenseur de Green. Dans un premier temps nous allons présenter l'évolution de différents comportements des fonctions de Green en fonction de la localisation sur la sphère d'onde et de l'espace des paramètres. Dans un deuxième temps il sera fait une comparaison avec le modèle d'Eady 1949. En plus des calculs précédemment défini il est désigné deux nouvelles réalisations dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 2.2.

désignation	Ri	ϵ
MODECROISSANT	0.2	0.1
MODEOSCILLANT	6.25	8

TAB. 2.2 – Étude modale : paramètre des cas supplémentaires

2.7.1 Origine du temps $t = 0$

A l'instant initial le tenseur de Green est l'identité δ_{ij} . On peut voir les oscillations du tenseur de Green pour un calcul à ($\epsilon = 8$, $Ri = 6.25$) pour un mode localisé aux environs de l'équateur ($\theta = 1.60$, $\phi = 0.46$) sur la figure 2.27(b). Les trois composantes diagonales (g_{11} en rouge, g_{22} en vert, g_{33} en bleu) sont initialement égales à 1 tandis que toutes les autres composantes du tenseur de Green sont nulles.

2.7.2 Mode oscillant

Dans ce qui va suivre on fera une distinction entre les modes strictement oscillants (oscillations neutres) dont les maximums ont toujours la même valeur à chaque période et les modes dont le maximum augmente d'une période à l'autre (oscillations croissantes).

Oscillation neutre

La réalisation INTERINTER (définie par $\epsilon = 0.01$ et $Ri = 0.99$) pour une fonction de Green modale localisée exactement sur le pôle (pour la colatitude $\theta = 0$) exhibe un régime d'onde neutre (comme on peut le constater sur la figure 2.29(a)). La fréquence de ces ondes correspond à la fréquence des ondes d'inertie. Pour cette position sur la sphère les composantes g_{33} restent constantes. Les composantes g_{11} et g_{22} relatives aux amplitudes spectrales toroïdale et poloïdale oscillent en superposition (visible sur les courbes pointillées vert longs et rouge court sur la figure 2.29(a)).

Oscillation croissante

Sur la figure 2.27(b) les pseudo-oscillations que l'on peut voir sont de l'ordre du temps caractéristique de la rotation $\tau_f = \frac{2\pi}{f}$. Pour la réalisation INTERINTER (définie par $\epsilon = 0.01$ et $Ri = 0.99$) on peut observer un comportement totalement différent de précédemment vu sur la figure 2.29(a). La fonction de Green modale est localisée proche

du pôle ($\theta = 3.09$) sud à l'azimut $\phi = -1.5$. Pour cette position on observe des pseudo-oscillations croissantes avec une très forte croissance de la valeur de pics. Les g_{ij} avec de fortes amplitudes sont :

- g_{33} et g_{31} superposé est visible sur la courbe pointillée noire et bleue sur la figure 2.29(b).
- g_{21} et g_{23} superposé est visible sur la courbe pointillée bleue claire et orange sur la figure 2.29(b).
- g_{11} et g_{13} superposé est visible sur la courbe pointillée jaune et rouge sur la figure 2.29(b).

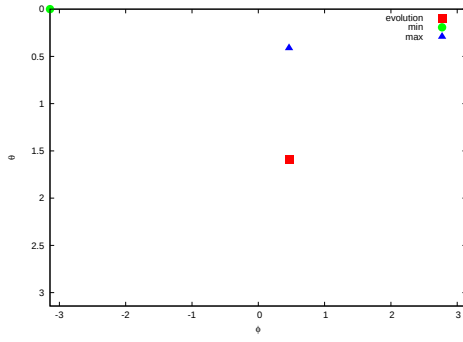
Les autres composantes g_{22} (vert), g_{12} (rose) et g_{32} (gris) sont négligeables.

2.7.3 Mode croissant

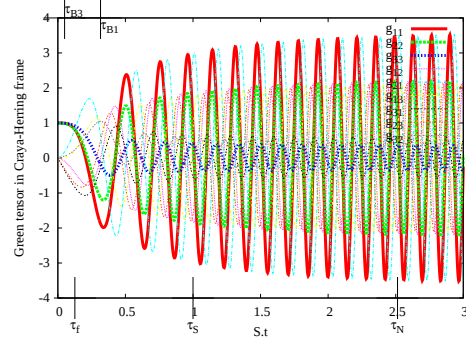
La figure 2.28 représente l'évolution de la fonction de Green déterministe sur $tS = 200$ pour un calcul ayant les paramètres linéaires $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.1$. Sur figure 2.28(a) on peut voir que la localisation de ce mode sur la sphère est au pôle sud. Le carré rouge indique la localisation de la fonction de Green qui est tracée sur la figure 2.28(b). Le triangle bleu sur la figure 2.28(a) représente la localisation du maximum sur la sphère de nombre d'onde. On peut ainsi constater que le mode qui est tracé est celui qui correspond au maximum. Sa localisation en colatitude est azimut est $(\theta = 3.00, \phi = 1.54)$ ce qui est proche de $(\theta = \pi^-, \phi = (\frac{\pi}{2})^-)$. La composante la plus croissante est la composante g_{21} tandis que la composante la plus décroissante est la composante g_{23} .

2.7.4 Mode saturant

Sur la figure 2.30(b) on peut observer l'évolution du tenseur de Green modale localisé proche du pôle nord ($\theta = 0.103$) à l'azimut ($\phi = -0.670$). La figure 2.30(a) indique que le mode visualisé est très proche du mode maximal. On peut observer sur la figure 2.30(b) que le tenseur de Green "explose" vers $tS \approx 13$ puis sature au niveau de la valeur 800 ensuite.

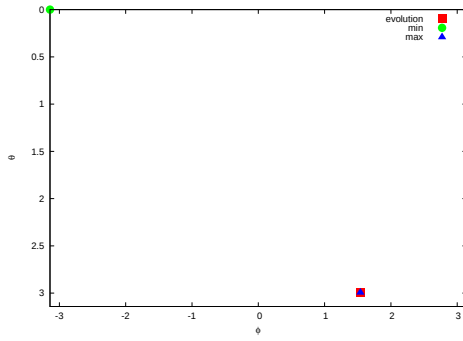


(a) localisation

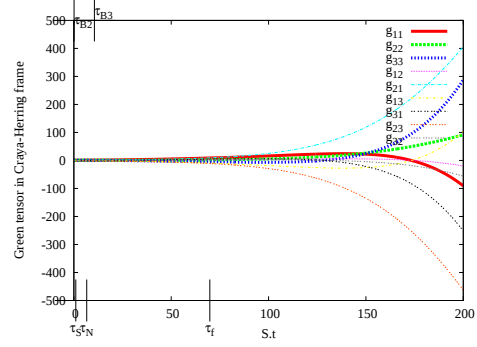


(b) évolution de $\bar{g}$

FIG. 2.27 – Tenseur de Green du calcul MODEOSCILLANT défini par $\epsilon = 8$, $Ri = 6.25$, $\theta = 1.60$ et $\phi = 0.46$. **Figure de gauche :** la figure de gauche représente la localisation du mode qui est visualisé sur la figure de droite. Sur la figure de gauche est aussi présentée la position où le minimum et le maximum de la norme du tenseur de Green sont atteints. Le carré rouge représente la position du mode qui est tracé sur la figure de droite. Le rond bleu représente le minimum où la fonction de Green est atteint. Le triangle bleu représente la position où le maximum de la fonction de Green est atteint. **Figure de droite :** la figure de droite représente l'évolution de chaque composante du tenseur de Green exprimée dans la base de Craya-Herring. Les composante g_{11} , g_{22} , g_{33} sont représenté en trait fort.

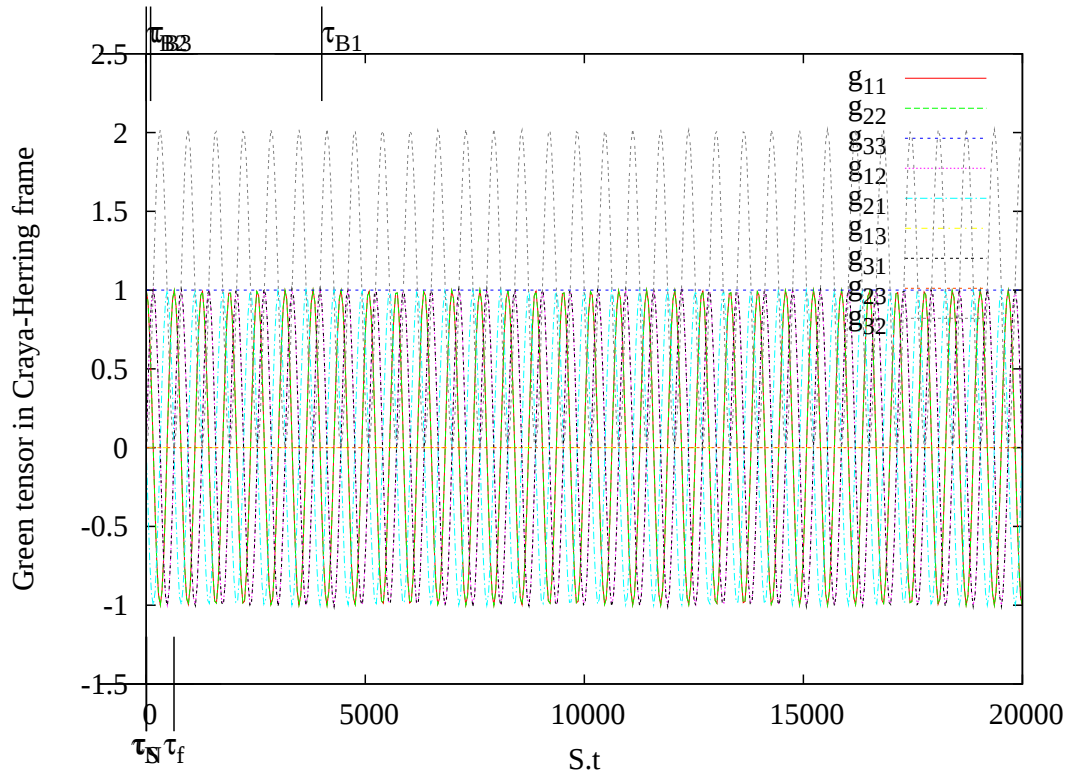


(a) localisation

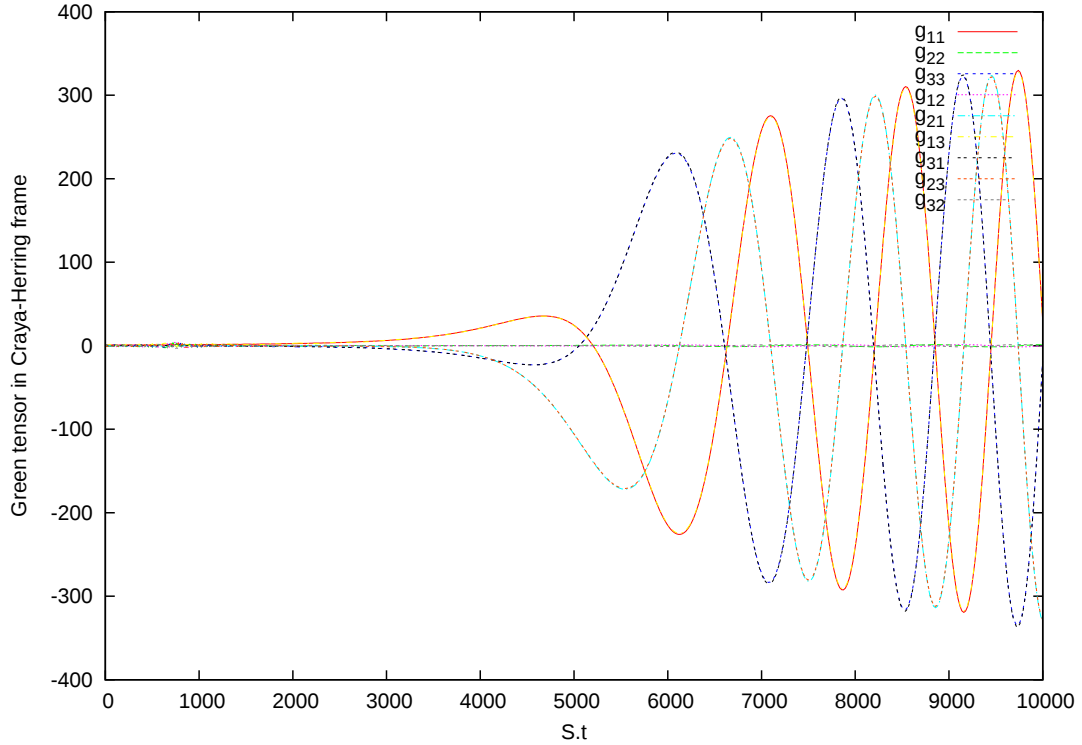


(b) évolution de $\bar{g}$

FIG. 2.28 – Tenseur de Green du calcul MODECROISSANT défini par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.1$, $\theta = 3.00$ et $\phi = 1.54$. **Figure de gauche :** la figure de gauche représente la localisation du mode qui est visualisé sur la figure de droite. Sur la figure de gauche est aussi présentée la position où le minimum et le maximum de la norme du tenseur de Green sont atteints. Le carré rouge représente la position du mode qui est tracé sur la figure de droite. Le rond bleu représente le minimum où la fonction de Green est atteint. Le triangle bleu représente la position où le maximum de la fonction de Green est atteint. **Figure de droite :** la figure de droite représente l'évolution de chaque composante du tenseur de Green exprimée dans la base de Craya-Herring. Les composantes g_{11} , g_{22} , g_{33} sont représentées en trait fort.



(a) évolution de $\bar{\bar{g}}$ à $(\theta = 0, \phi = -\pi)$



(b) évolution de $\bar{\bar{g}}$ à $(\theta = 3.09, \phi = -1.5)$

FIG. 2.29 – Tenseur de Green de la réalisation INTERINTER défini par $\epsilon = 0.01$ et $Ri = 0.99$. Les figures représentent l'évolution de chaque composante du tenseur de Green exprimée dans la base de Craya-Herring à différente position sur la sphère. Les composantes g_{11}, g_{22}, g_{33} sont représentées en trait fort.

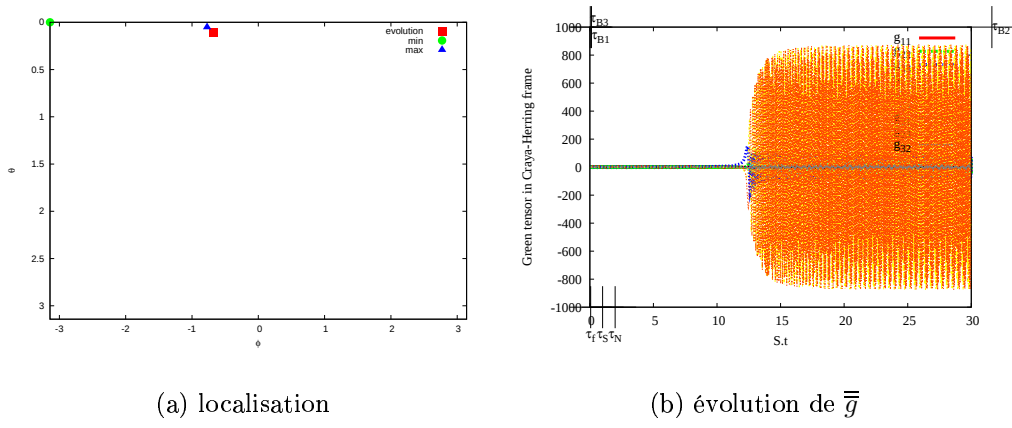


FIG. 2.30 – Tenseur de Green du calcul $\epsilon = 10$ et $Ri = 10$ défini par $\theta = 0.103, \phi = -0.670$
Figure de gauche : la figure de gauche représente la localisation du mode qui est visualisé sur la figure de droite. Sur la figure de gauche est aussi présentée la position où le minimum et le maximum de la norme du tenseur de Green sont atteints. Le carré rouge représente la position du mode qui est tracé sur la figure de droite. Le rond bleu représente le minimum où la fonction de Green est atteint. Le triangle bleu représente la position où le maximum de la fonction de Green est atteint. **Figure de droite :** la figure de droite représente l'évolution de chaque composante du tenseur de Green exprimée dans la base de Craya-Herring. Les composantes g_{11}, g_{22}, g_{33} sont représentés en trait fort.

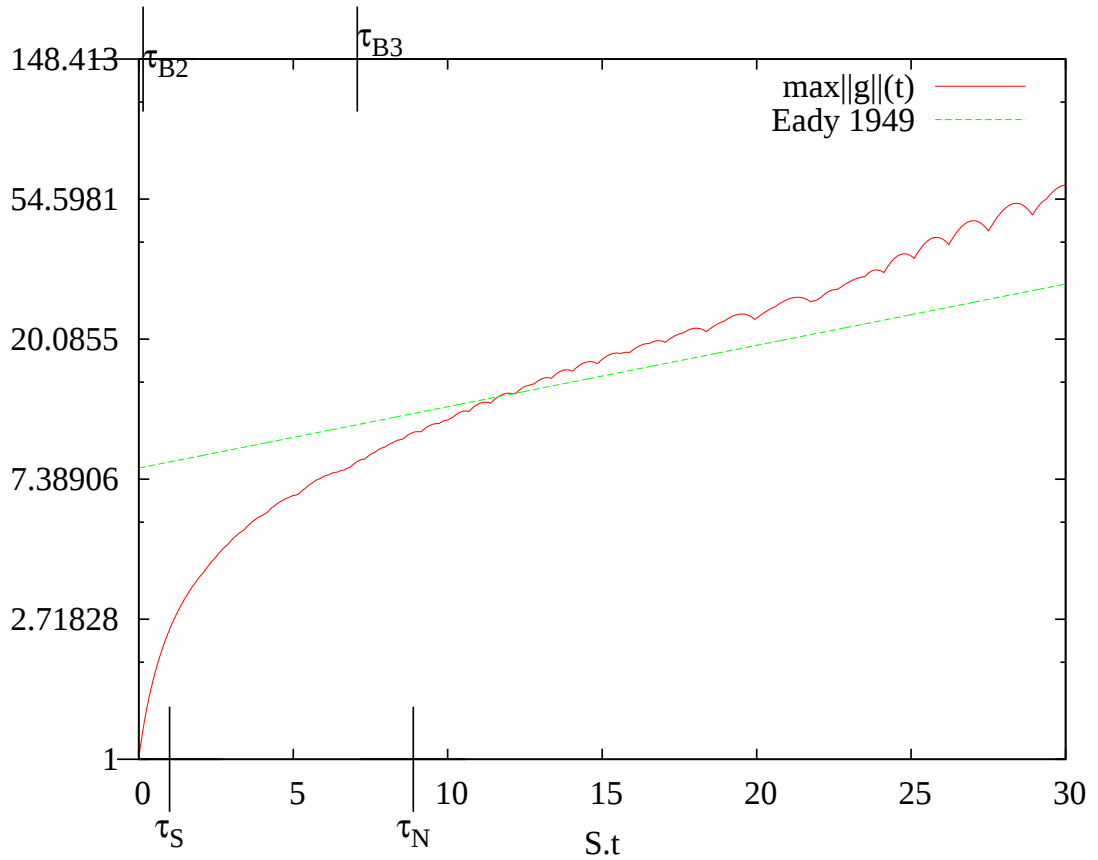


FIG. 2.31 – Taux d'amplifications des modes d'Eady 1949 et des solutions de la présente étude de distorsion rapide. La courbe rouge représente la valeur maximum de la norme du tenseur de Green sur la sphère d'onde. La courbe verte représente l'évolution de l'onde d'Eady la plus amplifiée. Le taux d'amplification du mode d'Eady est rappelé aux chapitres 1. Pour le problème considéré sa valeur est $0.3098 \epsilon \sqrt{Ri}$. La réalisation choisie pour les calculs TDR est MICROOCÉAN définie par $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$.

2.7.5 Taux d'amplification

Le problème de Eady 1949 est le plus proche du problème TDR considéré dans cette thèse car les deux études considérées ont lieu dans le f -plan. Il y a deux différences majeures entre le présent problème TDR et le problème Eady 1949. D'une part dans le problème de Eady il est fait l'hypothèse de forte rotation ($Ro \rightarrow 0$). Cette hypothèse permet de réduire la complexité du système d'équation différentiel linéaire ordinaire. D'autre part le problème d'Eady 1949 est confiné dans les directions méridionale et verticale. L'analyse TDR peut être vue comme une extrapolation du problème d'Eady 1949 sans effets de frontière. Ou bien, comme une étude de stabilité "locale" où l'on suit un domaine matériel de fluide dans un écoulement stratifié tournant qui à localement un cisaillement vertical constant. On peut même envisager le cas où la "boîte de turbulence"¹ a une trajectoire circulaire de telle sorte que la rotation des lignes de courants moyennes viennent s'ajouter ou se soustraire à la rotation de bloc. Ceci donne un intérêt à l'étude des taux de rotation différent du taux de rotation planétaire. En analyse de stabilité linéaire le mode le plus croissant est considéré comme celui qui va dominer l'écoulement. C'est celui qui au bout d'un certain temps sera obligatoirement visible. Dans un écoulement réel il y a les effets non-linéaires qui entrent en considération lorsque les amplitudes spectrales des fluctuations dépassent la valeur autorisée par les critères de validité. Sur la figure 2.31 la valeur du taux d'amplification du mode le plus croissant donné par la théorie d'Eady 1949 est comparée avec la valeur du maximum de la norme du tenseur de Green. Notons d'abord que les deux valeurs sont comparables car elles sont toutes les deux de l'ordre de l'amplitude spectrale des fluctuations de vitesse. La courbe verte représente $Ae^{w_c^* \epsilon \sqrt{Ri} t}$ qui est l'amplitude spectrale du mode de Eady le plus instable. La valeur de la constante A est sans importance car il faut regarder la pente des courbes (voir la figure 2.31). La courbe rouge représente le maximum de la norme du tenseur de Green (voir 2.31). Rappelons que cette quantité est déterministe et indépendante du spectre initial. On peut voir sur la figure 2.31 que la courbe rouge (TDR) a une pente plus importante que la courbe verte (Eady 1949). L'analyse de stabilité en mode normaux de Eady 1949 peut être invalidée car la théorie de distorsion rapide prévoit un taux d'amplification plus important sur des *temps moyens* ($tS = 30$).

2.8 Conclusion

L'étude de cas géophysiquement envisageables a montré qu'il était difficile de caractériser l'évolution de la distorsion barocline homogène étant donné le grand panel de phénoménologie possible. Toutefois pour les réalisations instables on observe que l'énergie entame une phase de saturation après une croissance exponentielle. Rappelons que de fortes croissances transitoires ne sont pas capturées par une analyse classique en modes normaux qui s'occupent du comportement à l'infini des solutions.

La comparaison avec les temps linéaires caractéristiques a permis de montrer qu'il y a une explosion de l'énergie lorsque l'on dépasse le premier temps barocline caractéristique (définie par $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$) et que le nombre de Richardson est inférieur à 1. Dans la zone instable les croissances sont les plus fortes lorsque le temps est de l'ordre du premier temps barocline. Dans la zone stable les croissances sont les plus fortes lors de l'ajustement de l'énergie. Plus le nombre de Richardson sera grand plus l'ajustement sera violent.

¹Le terme de "boîte de turbulence" est utilisé par C. Cambon 1982 [16] p19

La réorganisation de l'énergie s'effectue de manière très différente selon la localisation dans l'espace des paramètres, toutefois on a constaté que plus le paramètre de baroclinicité ϵ était grand plus l'énergie potentielle avait une valeur importante dans l'énergie totale. Pour les cas de forte croissance avec un fort paramètre de baroclinicité c'est la composante de flotabilité qui domine.

La corrélation zonale-méridionale est induite par une forte baroclinicité. Sur des *temps courts* et des *temps moyens* elle est négative. Et elle devient observable sur des *temps longs* lorsque le paramètre de baroclinicité est faible. La corrélation méridionale-verticale est liée à une forte baroclinicité de l'état de base. Elle est positive et garde une faible valeur. La sensibilité des corrélations au paramètre (ϵ, Ri) à la tendance suivante :

- zonale-méridionale $\overline{uv}$: $\forall Ri > 0$ et $\forall \epsilon > 0$ alors $\overline{uv} < 0$ toutefois lorsque $t > \tau_{B1} = \frac{4\pi S}{Nf}$ alors $\overline{uv}$ fluctue autour de zéro.
- verticale-zonale $\overline{wu}$: $\forall (\epsilon, Ri)$ tel que l'écoulement est barocliniquement stable alors $\overline{wu} > 0$ (contre-gradient). $\forall (\epsilon, Ri)$ tel que l'écoulement est barocliniquement instable alors $\overline{wu} < 0$ (descente-de-gradient)
- verticale-méridionale $\overline{wv}$: $\overline{wv} > 0$ pour lorsque $\epsilon \approx 1$. Si $\epsilon \ll 1$ alors $\overline{wv} \approx 0$. Si $\epsilon \gg 1$ $\overline{wv}$ fluctue autour de zéro.

En ce qui concerne la corrélation toroïdo-poloïdale, $\overline{u^{(1)}u^{(2)}} \approx 0$ sauf au temps $t = \tau_{B1}$ où elle commence à fluctuer significativement autour de zéro.

Le flux méridional est positif sur des *temps courts* et des *temps moyens*. Ce flux est associé à une forte baroclinicité de l'état de base. Cela correspond à un flux normal si l'on considère le gradient horizontal de flotabilité négatif. Pour des paramètres de baroclinicité très faibles, sur des *temps très longs* et pour un nombre de Richardson supérieur à 1 on observe un flux méridional anormal de flotabilité (contre-gradient). La justification basée sur la différence entre la viscosité cinématique et la diffusion de la flotabilité n'est pas valable car nous sommes dans un fluide parfait (cinématiquement et thermiquement). La tendance des flux est la suivante :

- flux zonal $\overline{ub}$: $\forall Ri \leq 0$ et $\forall \epsilon$ alors $\overline{ub} > 0$ mais si $Ri \gg 1$ alors $\overline{ub}$ oscille autour de zéro.
- flux méridional $\overline{vb}$: Après l'ajustement initial de l'énergie $\overline{vb} > 0$ lorsque $Ri < 1$ ce qui constitue un flux méridional descente-de-gradient. Pour $\overline{vb} < 0$ lorsque $Ri > 1$ ce qui constitue un flux méridional contre-gradient. Pour des *temps très longs* $\overline{vb}$ oscille autour de zéro dans le cas barocliniquement instable.
- flux vertical $\overline{wb}$: $\overline{wb} \approx 0$ toutefois pour les cas barocliniquement instables $\overline{wb}$ est sensiblement positif ce qui indique un flux vertical contre-gradient.

Un flux de flotabilité toroïdale apparaît lorsque le premier temps barocline est dépassé et cela même lorsque le nombre de Richardson est supérieur à 1. Dans l'espace de Craya-Herring la dépendance au paramètre (ϵ, Ri) est :

- flux toroïdal $\overline{u^{(1)}b}$: $\overline{u^{(1)}b} \approx 0$ sauf lorsque $t > \tau_{B1} = \frac{4\pi S}{Nf}$ où $\overline{u^{(1)}b} < 0$
- flux poloïdal $\overline{u^{(2)}b}$: Après l'ajustement initial de l'énergie $\overline{u^{(2)}b} < 0$ sauf pour $\epsilon \ll 1$, $Ri > 1$ et $t \gg 1$ où $\overline{u^{(2)}b} > 0$.

L'analyse de l'anisotropie sur la sphère a montré que pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE les modes le plus forts sont localisés sur les pôles pour les calculs "stable" et au voisinage des courbes $\phi = -\frac{\pi}{2}$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ pour les calculs développant de fortes croissances énergétiques.

L'étude des fonctions de Green modale a montré que des solutions oscillantes de grande amplitude étaient présentes. Il est envisageable qu'il y ait une forte résonance linéaire (interférence constructive) des fonctions de Green modales oscillantes.

Les valeurs de la norme du maximum de la fonction de Green modale a permis de mettre en évidence qu'il est possible que la théorie en modes normaux de Eady 1949 soit invalidé par la théorie de distorsion rapide. Nous avons montré que, pour un domaine de paramètre et pendant un certain temps le taux de croissance des solutions TDR est supérieur au taux de croissance prédit par Eady 1949.

Avec l'étude sur la sphère tronquée, on peut dire que si il existe des modes exponentiellement croissants sur la sphère les croissances sont du même ordre que celles du mode exponentiellement croissant à $K_1 = 0$ déterminé analytiquement par A. Salhi et C. Cambon (2006, [119]).

Un scénario "d'explosion" barocline a été élaboré :

- D'abord l'écoulement est semblable à l'écoulement purement cisailé-stratifié.
- Après il y a une première croissance de l'énergie lorsque le temps est comparable au troisième temps barocline ($\tau_{B3} = \frac{N}{Sf}$ un analogue du temps caractéristique de Eady 1949).
- Ceci est suivi d'un développement de la corrélation croisée toroïdo-poloïdale ainsi que du flux de flotabilité toroïdale lorsque le temps est de l'ordre du temps caractéristique de la rotation ($\tau_f = \frac{2\pi}{f}$).
- Lorsque le premier temps barocline $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ est dépassé il y a une explosion violente des énergies.
- Enfin il y a saturation des énergies. L'énergie potentielle turbulente est soumise à de fortes oscillations tandis que l'énergie cinétique turbulente ne l'est pas.

Dans l'espace paramètre ϵ, Ri les plus fortes croissances sont localisées aux alentours de la zone $Ri = 0.5$. Aucune forte croissance n'a été observée pour des valeurs du nombre de Richardson supérieur à 1. Le paramètre de baroclinicité ϵ augmente les croissances. On peut envisager la présence d'une courbe critique partant du point ($\epsilon = 0, Ri = Ri_C$) ou Ri_C est la valeur critique bien connue des écoulements cisailés-stratifiés uniquement.

Expérience numérique en turbulence homogène

Pourquoi le spectacle de la mer est-il si infiniment et si éternellement agréable ? Parce que la mer offre à la fois l'idée de l'immensité et du mouvement. Six ou sept lieues représentent pour l'homme le rayon de l'infini. Voilà un infini diminutif. Qu'importe, s'il suffit à suggérer l'idée de l'infini total ? Douze ou quatorze lieues de liquide en mouvement suffisent pour donner la plus haute idée de beauté qui soit offerte à l'homme sur son habitacle transitoire.

C. Baudelaire 1863 Mon cœur mis à nu [8]

Résultats principaux

Structures cohérentes :

- [1] *Retournement tourbillonnaire dans le plan vertical-méridional dont l'orientation est proche des pentes iso-densités ($\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$ lorsque $Ri < 1$, ces pentes iso-densité ϵ sont aussi liées à la propagation des "ondes d'inertie-gravité barocline" dans le plan $x_1 = 0$*
- [2] *Des jets générateurs de tourbillons à leur périphérie dans le plan horizontal lorsque $Ri < 1$. Ces jets ont une orientation Nord-Est en Sud-Ouest*
- [3] *Des structures de type Kelvin-Helmholtz pour $Ri > 0,2$ dans le plan vertical zonal*

Turbulence :

- [4] *Spectre de la turbulence barocline décroissance : non-linéarité aux petites échelles qui se manifeste par une brisure du spectre et un alignement local en $k^{-5/3}$*
- [5] *Spectre de la turbulence barocline croissante : transferts indirects et directs avec un spectre en $k^{-5/3}$ à la fin de la croissance*
- [6] *Le skewness de vorticité verticale indique que les cyclones prédominent sur les anti-cyclones pour les calculs à $Ri < 1$*
- [7] *Le flatness de vitesse verticale indique une forte intermittence verticale pour les calculs à $Ri < 1$*

Méthodes numériques

* criture d'un nouveau code parallèle pseudo-spectral Fourier-Fourier-Fourier avec remaillage (**TR5**).*

3.1 Introduction

Le concept d'expérience numérique est issu de trois scientifiques : E. Fermi, J. Pasta et S. Ulam (1955, [39]). E. Fermi est le plus célèbre d'entre eux pour ses travaux en mécanique quantique. Ces chercheurs sont des pionniers de la simulation numérique. Ils ont montré que les résultats issus des simulations pouvaient avoir un impact comparable à ceux d'une expérience de laboratoire. En mécanique des fluides le terme d'expérience numérique vient en grande partie de l'article de R.S. Rogallo 1981 [115], le scientifique a trouvé une méthode quasi-Lagrangienne pour étudier la turbulence soumise à des effets de cisaillement. C'est la même méthode qui est utilisée dans la présente étude pour absorber le cisaillement de l'écoulement de base.

La dynamique de la turbulence homogène barocline tridimensionnelle n'a jamais été investiguée. L'évolution des statistiques d'ordre 2 en 1 points de temps tel que l'énergie, les échelles caractéristiques, les nombres adimensionnels locaux seront investigués pour des configurations baroclines. En vue de préparer de futures modélisations il sera calculé des statistiques plus exotiques comme la dimensionnalité, la circulicité et la stropholysis. Pour trouver d'éventuels événements extrêmes il sera étudié la localisation temporelle du maximum de certaines quantités comme l'hélicité. Quelques statistiques d'ordre 3 et 4 en 1 point de temps seront calculées pour évaluer l'intermittence. Par la suite une étude des spectres sphériques et directionnels sera effectuée. Puis nous utiliserons des visualisations pour caractériser les structures de l'écoulement. Pour finir l'importance des non-linéarités sera quantifié. Dans ce qui va suivre nous parlerons de réalisations (écoulements) "stables" ou "instables". Notons toutefois que dans ce chapitre le sens des mots "stable" et "instable" n'est pas aussi rigoureux que dans les études de stabilité analytique. Une réalisation sera dite "instable" lorsque son énergie croît pour le temps considéré qui est en général de $t = 30$ ou $t = 12$. Commençons par présenter le nouveau code de calculs **TR5**.

3.2 Code pour la turbulence homogène : l'algorithme TR5

Un nouveau code de simulation numérique directe **TR5** pour "Tri-periodic Remesh in y up to 5 scalar" a été écrit pour l'étude de la turbulence dans un écoulement cisailé-stratifié-tournant verticalement.

3.2.1 Méthodes numériques et informatiques

Discretisation spatiale

Le choix classique de conditions aux limites dans les simulations numériques directes de turbulence homogène est une condition de périodicité dans les trois directions. En présence de cisaillement l'écoulement est non-périodique dans la direction verticale si bien que les conditions classiques ne peuvent plus être utilisées. C'est R.S. Rogallo (1981, [114]) qui a résolu ce problème en utilisant une transformation de coordonnée qui correspond à un repère de référence Lagrangien par rapport à l'écoulement moyen. Grâce à ce changement de repère il est possible de décomposer le problème en mode de Fourier. En espace physique la structure du maillage est la même que celui de la figure 3.1.

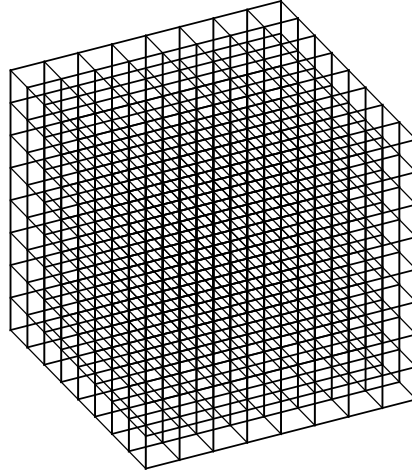


FIG. 3.1 – Maillage Lagrangien cubique tridimensionnel du code de simulation numérique directe en espace physique avec 8^3 points de collocations

Déformation spatiale

Nous avons vu au chapitre précédent que pour ramener l'étude inhomogène à une étude homogène nous utilisons la transformation d'espace de R.S. Rogallo (1981, [115]). Un observateur placé dans la boîte de turbulence verra un domaine qui restera carré mais un observateur placé à l'extérieur dans le domaine Eulérien verra la boîte de turbulence s'aplatir au cours du temps jusqu'à devenir complètement plate. L'interprétation de résultats physiques sur un domaine aplati étant délicate il est nécessaire d'effectuer un remaillage de l'espace tous les temps t_R . Le remaillage périodique en temps de l'espace Lagrangien vu à partir de l'espace eulérien est représenté sur la figure 3.2. Grâce au remaillage, les statistiques ainsi que les visualisations correspondront à une boîte cubique non déformée et non pas à une boîte aplatie.

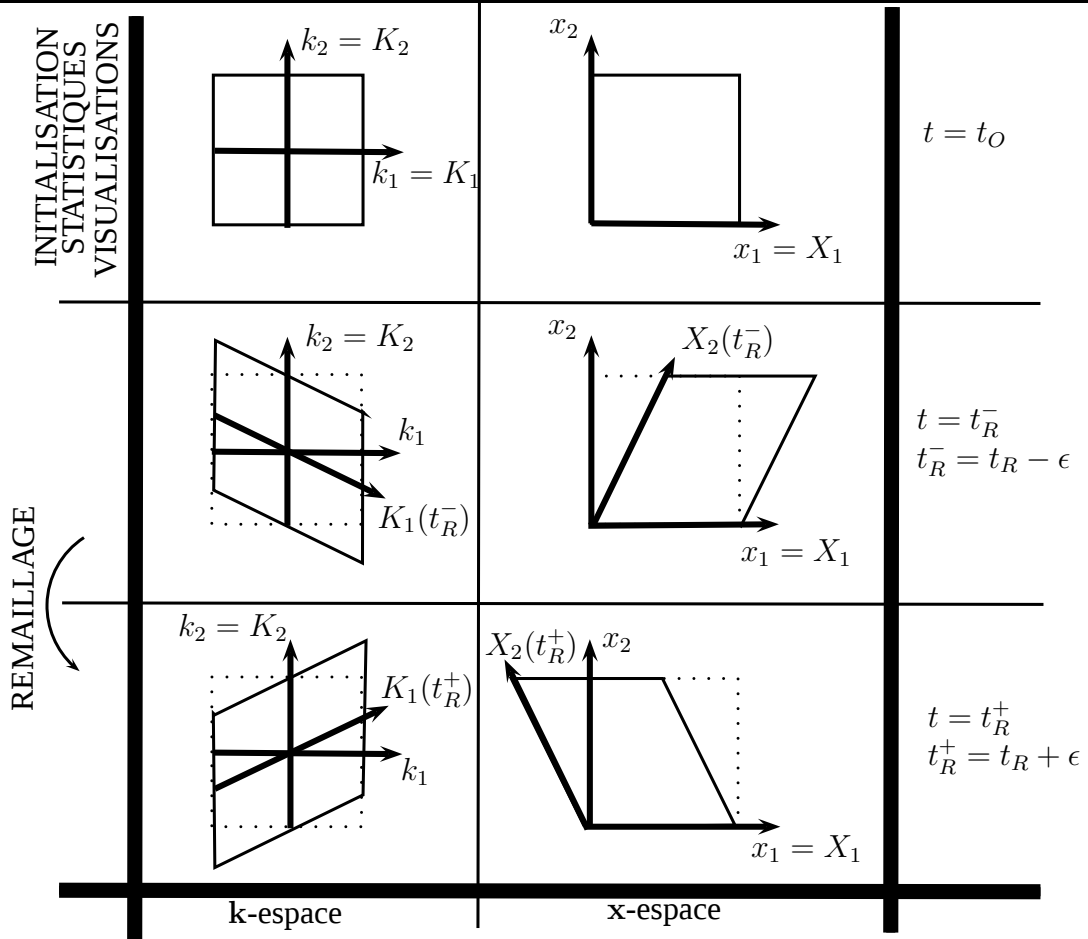


FIG. 3.2 – Évolution du domaine dans la simulation numérique. La colonne de gauche représente l'espace spectral (**k**-espace) tandis que la colonne de droite représente l'espace physique (**x**-espace). Chaque ligne représente un temps différent (où $\epsilon \ll 1$). De haut en bas on trouve : Le temps t_O où la géométrie Lagrangienne et la géométrie eulérienne sont la même ; Le temps $t_R - \epsilon$ juste avant le remaillage ; le temps $t_R + \epsilon$ juste après le remaillage.

Pour effectuer le remaillage nous avons le choix. Soit il est fait dans l'espace physique, dans ce cas il faudra effectuer un désaliasing supplémentaire en plus du désaliasing effectué lors du calcul des termes non linéaires. Soit il est effectué dans l'espace spectral, ce qui implique une réorganisation de l'énergie des nombres d'ondes ainsi qu'un filtrage des "coins" visibles sur la figure 3.3. La solution du remaillage spectral étant la plus facile à implémenter c'est elle qui a été choisie. Mais il serait intéressant d'implémenter le remaillage en espace physique pour comparer les résultats. Mis à part les problèmes de parallélisation le remaillage du code pseudo-spectral est la partie la plus compliquée.

Parallélisation et management de données

Le code utilise une transposition de couches, pour effectuer la dernière TFR suivant la direction verticale. C'est la même méthode qui est utilisée par M. Yokokawa et al. (2002, [139], p7, (4)) pour effectuer des simulations de haute définition en 4096^3 sur le super calculateur Earth Simulator. Bien qu'il existe de nombreux outils de parallélisation automatique, il semble plus efficace d'opérer une parallélisation manuelle, écrite explicitement dans l'algorithme comme remarquée par K. Itakura et al. ([64], p116, 3.1). Mais cette décomposition explicite du domaine complique beaucoup la lisibilité du code. À

chaque fois que l'on désire implémenter une partie, il faut avoir une vision globale des opérations, sous peine de quoi le code peut rester bloqué. Le pire n'est pas les processus bloquants, car ils sont très vite identifiables, mais une erreur sur la position courante dans le domaine complet.

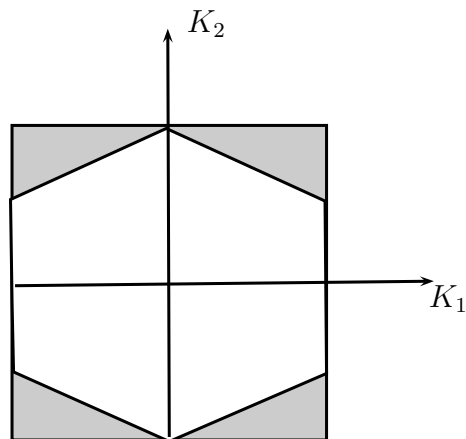


FIG. 3.3 – Représentation d'une coupe du cube de turbulence en espace spectral ($\mathbf{k}$ -espace) dans un plan vertical-longitudinal. La partie grise représente les modes qui sont filtrés lors du remaillage en espace spectral

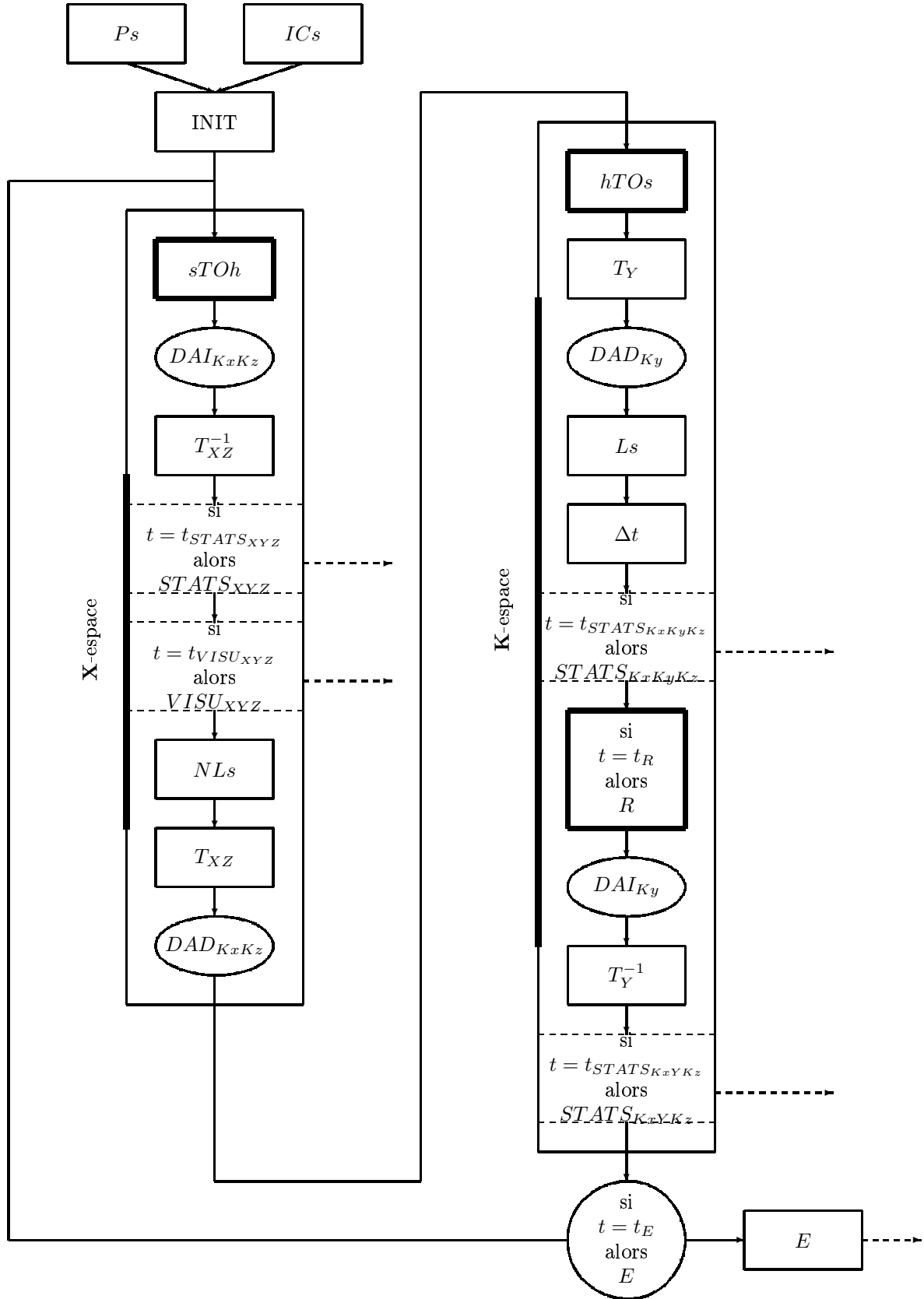


FIG. 3.4 – Organigramme représentatif de l'algorithme TR5. La partie de gauche représente la configuration en tranches horizontales et la partie de droite la configuration en tranches verticales. Ps regroupe les paramètres utilisateurs et ICs est le champ initial. T représente les transformations modales et $sTOh$ le changement de configuration verticale vers horizontale (inversement pour $hTOs$). DAI représente l'augmentation du domaine spectral et DAD la diminution du domaine spectral. R est le remaillage. L'opérateur linéaire est notée Ls et l'opérateur non linéaire est noté NLs . Δt symbolise l'avance temporelle. E représente l'arrêt des calculs et la sauvegarde du champ final.

3.2.2 Validation

La validation a été effectuée avec plusieurs tests. Ci-dessous est résumé les tests satisfaisant qui ont été effectués (voir annexe pour les détails).

Validation quantitative

- 23 solutions analytiques
- 6 solutions exactes des équations de la dynamique non-linéaire : tourbillons de Taylor-Green
- 4 solutions exactes de la dynamique linéaire avec initialisation aléatoire : théorie de distorsion rapide
- 13 solutions exactes des équations de la dynamique non-linéaire avec forçage
- 1 test d'entrée-sortie
- 1 test de dépendance au schéma numérique d'avance temporelle
- 1 test d'universalité des paramètres adimensionnels
- 3 tests de cohérence (conservation de l'énergie entre l'espace physique et spectral, continuité, mode $(0, 0, 0)$)

Vérification qualitative

- 2 comparaisons à des simulations numériques publiées
- Turbulence isotrope décroissante de S.A. Orszag et G.S. Patterson (1972, [101])
- Turbulence homogène cisailé de R.S. Rogallo (1981, [115])
- 2 forçages ponctuels d'onde et vérification de la loi de dispersion
- Onde d'inertie
- Onde de gravité
- 4 phénoménologie de la turbulence connues retrouvée
- cisailée pure
- stratifiée pure
- rotation pure
- cisailée-stratifiée verticalement
- 1 comparaison avec le code LF5

3.3 Initialisation avec un champ de turbulence isotrope décroissante

Un critère pour qu'un champ isotrope soit assez développé est qu'il contienne des statistiques d'ordre élevé. Un indicateur est que le skewness du gradient de vitesse ait atteint sa valeur maximal (voir S.C. Kassinos et al. [71], p7, §4, 118-120). Pour cela L. Liechtenstein (2005, [79]) laisse décroître pendant vingt temps de retournement de la turbulence. Pour les calculs de la présente thèse l'initialisation est faite avec un spectre à faible bande passante comme dans L. Liechtenstein 2005 ([79], p84, (4.5)) et le nombre d'onde au pic est choisi assez élevé $k_p \in [8 k_{min}; 12 k_{min}]$ quand cela est possible. Le problème de l'initialisation pour des turbulences anisotropes dont l'énergie va croître ou décroître se complique car il faut trouver le compromis optimal. Si la turbulence initial est trop importante les réalisations "instables" ne pourrons pas être calculées sur des temps assez longs mais si la turbulence initial est trop faible les réalisations "stables"

dégénérerons immédiatement en dynamique purement linéaire. C'est pour cette dernière raison que les spectres que l'on peut voir sur la figure 3.5 ne sont pas pris identiques pour les simulations en 128^3 , 256^3 et 512^3 . Le fait que la “queue” (partie de la courbe à grands nombres d'ondes) du spectre remonte est du à la limitation de la résolution spectral. Dans le cas non-visqueux l'influence de la troncation de l'espace spectral est bien mise en évidence. Il y a un régime de relaxation absolue observé par C. Cichowlas et al. (2005, [24]) dans des SND et retrouvé par W.J.T. Bos et J.-P. Bertoglio à partir d'une théorie spectrale non-linéaire (2006, [13]). Dans ces deux derniers cas on observe que la “queue” des spectres sphériques remonte avec des inclinaisons en k^2 et que la partie du spectre à bas nombres d'onde est peu influencé par la troncation. L. Liechtenstein a pris comme nombre de Reynolds initiaux $Re_\lambda \approx 51.2$ pour ses calculs avec 256^3 points de collocation et $Re_\lambda \approx 58,8$ pour ses calculs avec 512^3 points de collocation (d'après la figure 4.2 p87, 2005, [79] à la fin du pré-calcul isotope). Dans la présente étude, pour l'initialisation le spectre des calculs en 512^3 est choisi avec un nombre d'onde au pic assez élevé ($k_P = 10$ sur la figure 3.5) avec beaucoup d'énergie sur les grands nombres d'onde pour avoir une turbulence très active. Le spectre initial est choisi à sont maximum d'ouverture. Pour des temps supérieurs la “queue” du spectre va se replier vers le bas. Le spectre est choisi à la limite de la stabilité pour avoir un nombre de Reynolds initiale le plus grand possible. Dans tous les cas même si la réalisation est “instable” les effets linéaires auront tendances à stabilisé numériquement ¹ les calculs.

désignation	N^3	L	dt	ν	κ	$Re_\lambda(0)$
HVT	128^3	2π	5.10^{-3}	0.002	0.002	50
FORTLINÉAIRE	128^3	2π	10^{-4}	0.002	0.002	50
CALME	128^3	2π	5.10^{-3}	2.10^{-3}	2.10^{-3}	50
RENFORCÉE	254^3	2π	10^{-3}	5.10^{-4}	5.10^{-4}	66
TUMULTUEUX	512^3	2π	7.10^{-4}	2.10^{-4}	2.10^{-4}	75

TAB. 3.1 – SND : paramètres pour les 5 séries de calculs présentés

Les thèmes de campagnes de calculs sont présentés dans la table 3.1. Il y a 5 séries principales. La première série de calculs (HVT) regroupe des situations ne prenant pas en compte la relation d'admissibilité barocline de l'écoulement moyen. Cette série comporte d'une part des simulations déjà étudiées (cisaillement pur, stratification pure, rotation pure, cisaillement-stratification et rotation-stratification). Et d'autre part des configurations qui commencent à être étudiées, le cas non-admissible de cisaillement-rotation vertical (F.G. Jacobitz, 2006, [65]). Le fait de retrouver les structures cohérentes classiques connues est entre autre une validation du code de calcul. La deuxième série (FORTLINÉAIRE) est une série où les paramètres linéaires ($S, 2\Omega$ et N) prennent des valeurs très importantes c'est en quelque sorte une première approche du problème de turbulence barocline en “cube de Fourier”. Les trois dernières séries du tableau 3.1 sont des cas géophysiquement envisageables où les paramètres linéaires prennent des valeurs modérées. Ces trois séries (CALME , RENFORCÉE et TUMULTUEUX) sont regroupées dans

¹Il faut faire la distinction entre la stabilité physique et la stabilité du schéma numérique. En simulation numérique direct on dit que le calcul “explose” lorsque la turbulence est trop importante pour être contenu par la discrétisation choisi. L'explosion du calcul conduit, en quelques itérations, à des valeurs numériques trop grandes pour être codées par la machine. Lorsque les effets linéaires sont activés, si les paramètres linéaires ne sont pas trop grands, la réorganisation de l'énergie spectrale a tendance à stabiliser numériquement le calcul

une série désignée GÉOPHYSIQUE . Les noms donnés sont relatifs à la présente étude, il serait par exemple déplacé dans une étude expérimentale en soufflerie de désigner par TUMULTUEUX un écoulement avec un nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor valant 75. Dans une expérience de laboratoire le nombre de Reynolds des écoulements étudiés est généralement bien plus grand. Dans une expérience numérique nous sommes limités par la puissance de calcul. Notons aussi que la série RENFORCÉE est renforcée par rapport à la série CALME car le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor a augmenté. Les paramètres linéaires ont la même valeur que ceux de l'étude numérique de distorsion rapide effectuée au chapitre précédent. Le choix des paramètres linéaires pour les simulations numérique directes a été orienté par l'étude de distorsion rapide. Notons aussi que la méthode numérique quasi-Lagrangienne nous impose de prendre des taux de cisaillement modérés. Si le taux de cisaillement est trop grand il y a trop d'erreurs de troncature. C'est pourquoi le taux de cisaillement est en général fixé à 5 (sauf pour la série FORTLINÉAIRE). Mais il serait intéressant de faire des études avec des taux de cisaillement plus importants pour avoir des taux de rotation et une fréquence de Brunt-Wäisälä plus importante à ϵ et Ri fixé. Mais pour cela l'influence de l'erreur de troncature due au remaillage a besoin d'être mieux connue. Les présentes simulations ont été effectuées avec

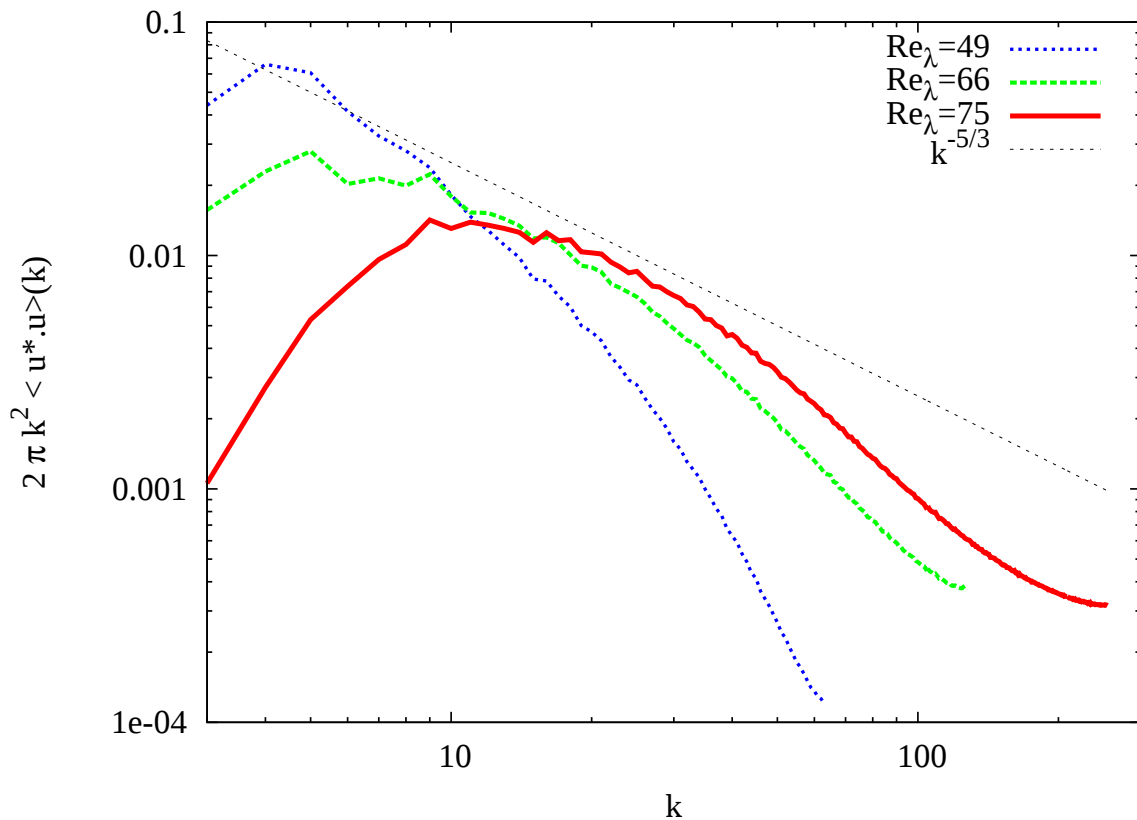


FIG. 3.5 – CIs. Spectres sphériques à la fin des pré-calculs isotropes. La courbe bleue (trait pointillé court) est celle du calcul à $Re_\lambda(t) = 49$ avec 128^3 points de collocation. La courbe verte (trait pointillé long) est celle du calcul à $Re_\lambda(t) = 66$ avec 252^3 points de collocations. La courbe rouge (trait plein) est celle du calcul à $Re_\lambda(t) = 75$ avec 512^3 points de collocations. Il est aussi tracé en traits pointillés longs fins la loi de puissance de Kolmogorov.

une énergie potentielle initialement au zéro machine ($\overline{bb}(0) = 0(10^{-16})$) afin de réduire

le nombre de paramètres initiaux, déjà nombreux, du problème. Des simulations ont été effectuées avec des conditions initiales où $Ek(0) = 0(10^{-16})$: après la période d'ajustement très rapide il n'y a pas de différence significative entre les deux simulations (la même observation est faite par S.E. Holt & al. 1992 [60] lors de simulations numériques directes de turbulence homogène cisailée-stratifiée). La période d'ajustement s'effectue sur des temps très courts ($t < 1$). La faible sensibilité de la partition initiale à l'énergie est probablement due à la présence du cisaillement et des termes non-linéaires.

3.4 Énergétique des écoulements baroclines

Dans cette section nous allons présenter l'évolution énergétique des écoulements de turbulence homogène barocline dont l'écoulement moyen respecte l'équilibre du vent thermique. La turbulence homogène barocline tri-dimensionnelle n'a jamais été investiguée. Toutefois notons que des scientifiques (O. Iida, S. Tsujimura, Y. Takahashi et Y. Nagano) ont mis à disposition sur leur site internet quelques données simulation de turbulence homogène barocline en 128^3 . Le problème est que les articles au quel il font référence sont introuvables est semble ne jamais avoir été publié selon l'INstitut de l'Information Scientifique et Technique (INIST) [33] du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Remarquons que lorsque l'on dispose d'un code de simulation numérique pseudo-spectral de type Rogallo validé, il est facile d'ajouter un terme linéaire, de lancer des simulations numériques directes, puis d'obtenir des résultats bruts sans interprétation. En excluant l'interprétation physique des résultats, les difficultés major résident dans l'implémentation et la validation, ce qui m'a pris trois années. Les données du présent code n'ont pas été comparées avec les données disponible car je ne les juges pas assez fiable étant données qu'il n'y a pas de publication dessus. Dans tous les cas, au moins, plusieurs de leur simulation ne respecte pas l'équilibre du vent thermique et ne peuvent donc pas être qualifié de turbulence barocline. Dans cette section nous allons introduire les écoulements barocline géophysiquement envisageable qui vont être étudié dans la suite du chapitre. Pour augmenter la cohérence entre les chapitres ces écoulements ont les mêmes paramètres linéaires que ceux étudiées dans le chapitre précédent. Les désignations ATMO et OCEAN font référence au paramètre de baroclinicité.

Dans l'étude des valeurs numériques caractéristiques des écoulements géophysiques il ressort que le paramètre de baroclinicité semble être plus important dans l'océan. Mais attention ce sont des valeurs caractéristiques, les valeurs précises sont difficiles à estimer et ne sont pas l'objet de la présente thèse. Quant aux désignations MICRO INTER et SYNO elles sont liées à la valeur du nombre de Richardson. Pour le problème d'Eady le nombre de Richardson est approximativement $Ri = 2$. Le problème d'Eady représente une atmosphère simplifiée à l'échelle synoptique d'où la désignation SYNO . Le taux de cisaillement étant constant le fait de diminuer le nombre de Richardson est équivalent à diminuer la stratification. Puisque la taille du cube et l'énergie initiale sont inchangés pour la série CALME (ou RENFORCÉE) le fait de diminuer le nombre de Richardson est équivalent à diminuer le nombre de Froude d'où la désignation INTER et MICRO qui correspondent respectivement à $Ri = 0.99$ et $Ri = 0.5$. Dans la suite de l'étude sera privilégiée la série OCEAN car des phénomènes intéressants semblent parvenir plus tôt que dans la série ATMO . Autrement dit la série OCEAN demande moins de puissance de calcul pour arriver à des phénomènes baroclines. Nous allons présenter d'abord la dynamique énergétique des écoulements de la série GÉOPHYSIQUE .

Nous avons vu que l'énergie totale turbulente, qui est aussi appelée énergie mécanique

désignation	S	2Ω	N	ϵ	Ri
MICROATMOCALME	5	$1.25 \cdot 10^{-3}$	3.53	0.001	0.5
INTERATMOCALME	5	10^{-2}	4.97	0.001	0.99
SYNOATMOCALME	5	$1.1 \cdot 10^{-2}$	7.07	0.001	2
MICROOCÉANCALME	5	0.49	3.53	0.2	0.5
INTEROCÉANCALME	5	0.99	4.49	0.2	0.99
SYNOOCÉANCALME	5	2.00	7.07	0.2	2

TAB. 3.2 – SND : paramètres linéaires pour la série CALME

désignation	S	2Ω	N	ϵ	Ri
MICROOCÉANRENFORCÉ	5	0.49	3.53	0.2	0.5
INTEROCÉANRENFORCÉ	5	0.99	4.49	0.2	0.99
SYNOOCÉANRENFORCÉ	5	2.00	7.07	0.2	2

TAB. 3.3 – SND : paramètres linéaires pour la série RENFORCÉE

désignation	S	2Ω	N	ϵ	Ri
INTEROCÉANTUMULTUEUX	5	0.99	4.49	0.2	0.99

TAB. 3.4 – SND : paramètres linéaires pour la série TUMULTUEUX

turbulente, est la somme de l'énergie cinétique turbulente et de l'énergie potentielle turbulente. Comme précédemment pour la série FORTLINÉAIRE, on peut confirmer la tendance, avec la série GÉOPHYSIQUE, que les calculs les plus énergétiques sont ceux ayant un nombre de baroclinicité grand. L'évolution de l'énergie mécanique pour ces calculs est visible sur le graphique 3.7 (voir la courbe orange en trait mixte pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ et la courbe bleue claire en trait plein pour la réalisation INTEROCÉANCALME). Les calculs effectués avec $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$ ont une énergie mécanique turbulente moins grande que ceux avec le même paramètre de baroclinicité et un nombre de Richardson $Ri = 0.99$ (la courbe en trait noir pointillé pour MICROOCÉANRENFORCÉ et la courbe en trait fuchsia plein sur 3.7). Ceci va à l'encontre de l'idée générale que la stratification stabilise l'écoulement. On remarquera que lorsque l'énergie est croissante la croissance est exponentielle. Tous les calculs de la série ATMO (définie par $\epsilon = 0.001$) sont décroissants (voir la figure 3.7). La réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ est celle qui a l'énergie mécanique turbulente la plus faible (voir la courbe grise sur 3.7) car plus le paramètre de baroclinicité est important plus l'énergie potentiel sera grande. Pour les calculs stable l'énergie mécanique turbulente décroît en $t^{-0.6}$. Pour les calculs à énergie croissante il semble que l'évolution soit proche de t^5 mais nous verrons, par la suite que pour caractériser les croissances il est préférable de se placer dans un repère "ln-linéaire".

Pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE l'énergie cinétique est toujours supérieure à l'énergie potentielle (l'énergie cinétique turbulente est visible sur les planches 3.8 et 3.9)

L'énergie potentielle est initialement nulle. Elle s'ajuste sur un temps très court, de l'ordre de $t = 0.1$. Après l'ajustement elle reste inférieure d'environ 1 décade à l'énergie

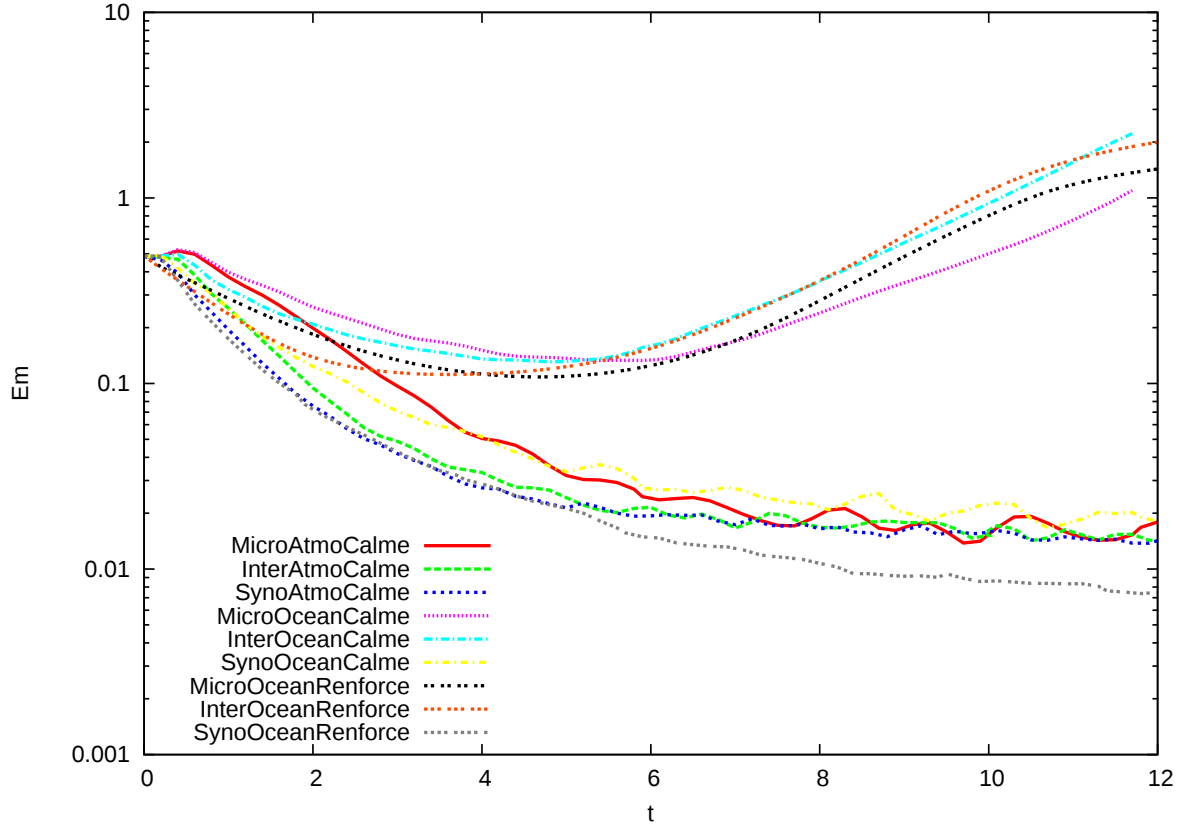


FIG. 3.6 – Évolution de l'énergie mécanique turbulente pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE sur des *temps courts*. La figure présentée ci-dessus est relative aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Rappelons que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$.

cinétique turbulente. Aussi remarquons que l'énergie potentielle est celle qui est soumise aux plus fortes oscillations.

Les effets ondulatoires sur l'énergie sont les mieux visibles pour les calculs avec une turbulence initiale la plus faible (série CALME définie par $Re_\lambda(0) = 49$). Les calculs qui voient leur turbulence croître ne font pas apparaître d'ondulations de leurs énergies (réalisation MICROOCÉANCALME sur la figure 3.8(b) et réalisation INTEROCÉANCALME sur la figure 3.8(d)). Le calcul SYNOOCÉANRENFORCÉ fait apparaître une énergie potentielle qui commence à osciller vers $t = 5$.

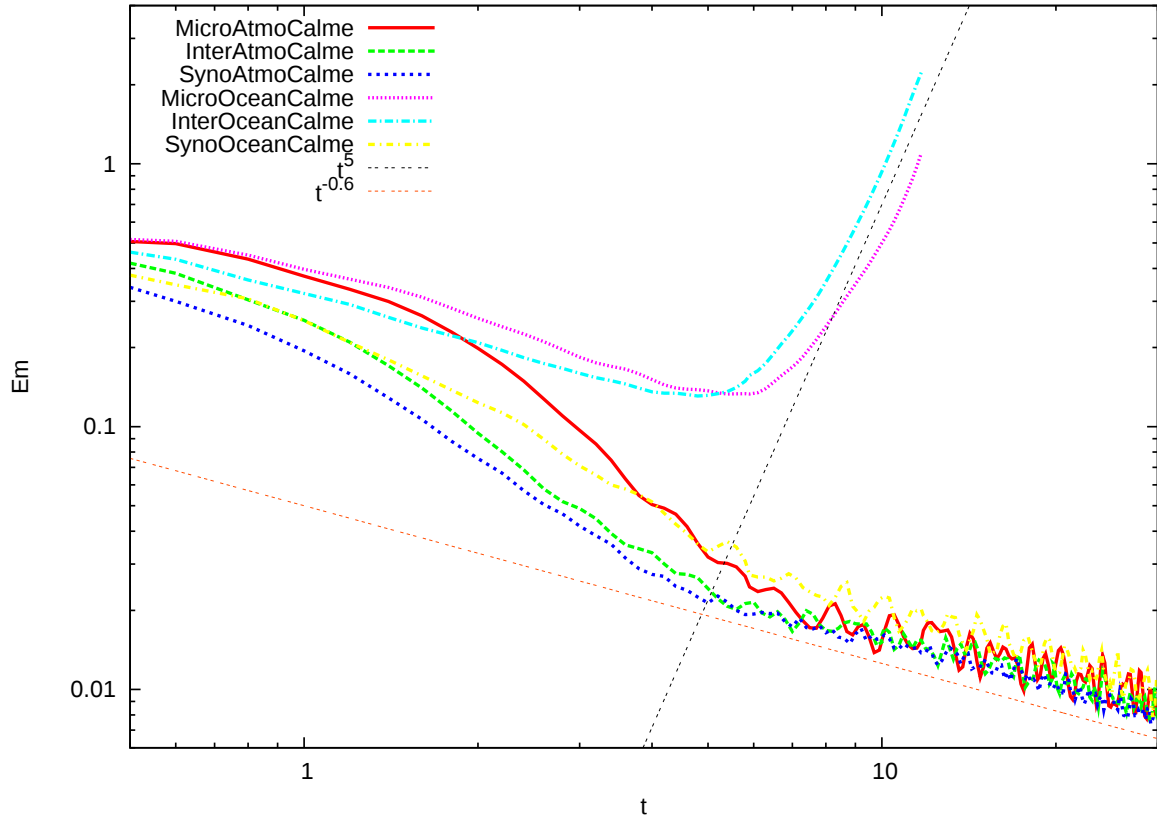
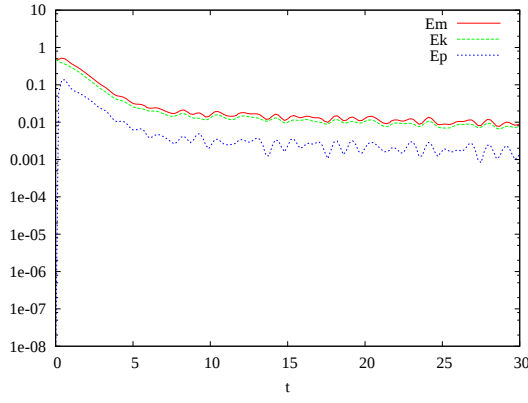
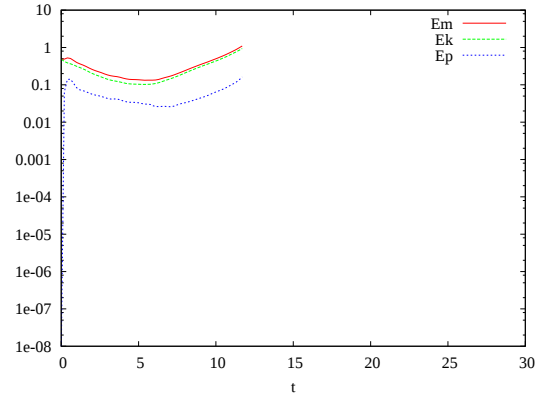


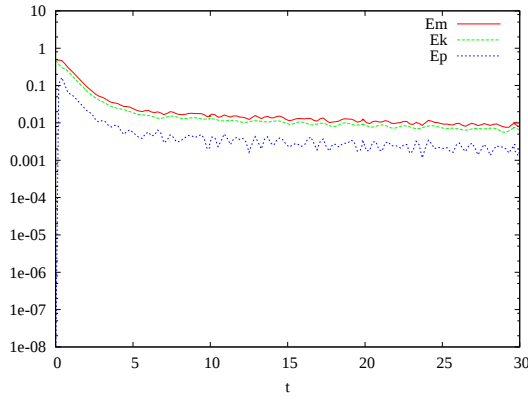
FIG. 3.7 – Évolution de l'énergie mécanique turbulente pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE sur des *temps moyens*. La figure présentée ci-dessus est relative aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Rappelons que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$.



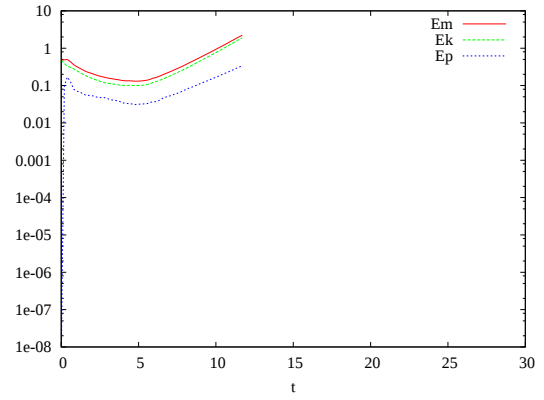
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



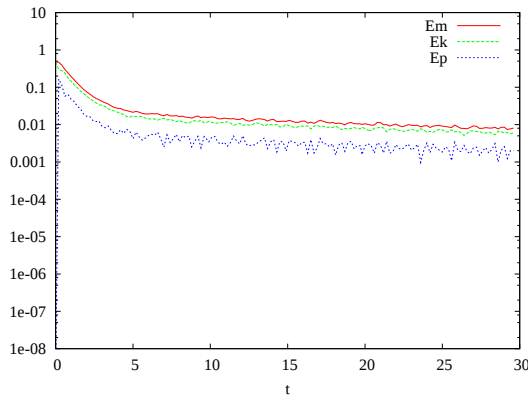
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



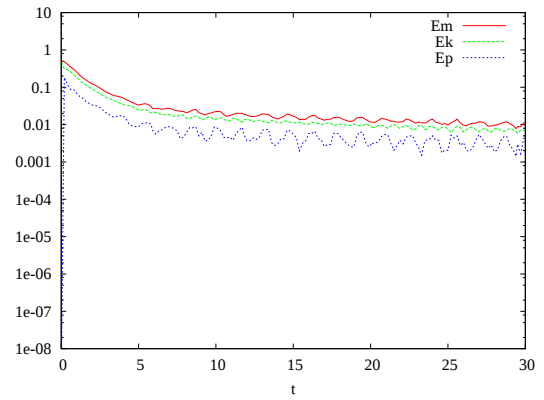
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

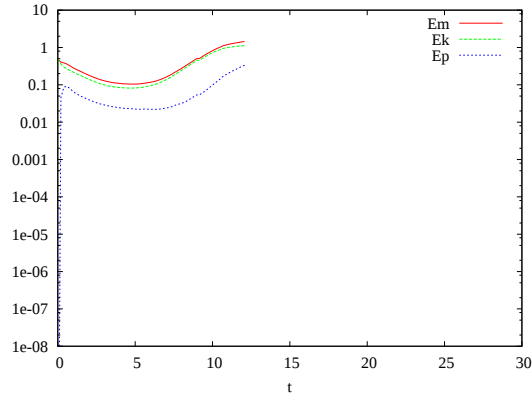


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

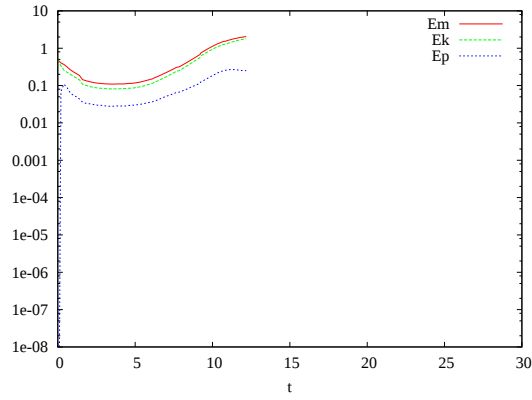


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

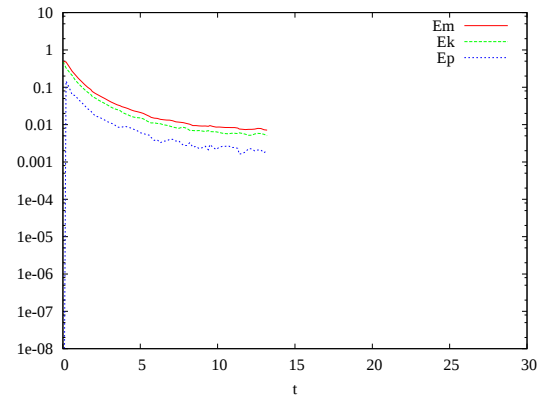
FIG. 3.8 – Évolution des trois énergies pour les calculs de la série CALME . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.



(a) Réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(b) Réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(c) Réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$)

FIG. 3.9 – Évolution des trois énergies pour les calculs de la série RENFORCÉE à gauche et TUMULTUEUX à droite. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les trois énergies sont : Em , Ek et Ep . Em est l'énergie mécanique turbulente qui est aussi l'énergie totale turbulente du système. Ek est l'énergie cinétique turbulente. Ep est l'énergie potentielle turbulente.

3.5 Échelles caractéristiques

Dans cette section nous allons présenter des échelles caractéristiques de l'écoulement turbulent. D'abord nous regarderons quelques échelles sphériques : l'échelle de Kolmogorov, l'échelle de Taylor et l'échelle intégrale. Puis les échelles directionnelles obtenues en intégrant les corrélations en 1 point de temps et 2 points d'espace.

3.5.1 Échelles sphériques

Dans ce paragraphe nous montrerons que les effets d'onde se font sentir même aux plus petites échelles de la turbulence. L'échelle de Kolmogorov s'interprète comme la plus petite dimension des structures que l'on peut rencontrer dans un écoulement turbulent isotrope. La théorie de Kolmogorov implique que si la turbulence est assez développée dans un écoulement moyen homogène on doit retrouver une échelle de Kolmogorov indépendante de la direction. Les tourbillons inférieurs à cette échelle sont immédiatement transformés en énergie thermique à cause de la viscosité moléculaire. L'échelle de Kolmogorov est définie par $\eta = \nu^{\frac{3}{4}} \epsilon_\nu^{-\frac{1}{4}}$ où ϵ_ν est la dissipation visqueuse. Le temps de vie des structures tourbillonnaires de Kolmogorov est de l'ordre de $\tau_\eta = \nu^{-0.5} \epsilon_\nu^{-0.5}$. On peut voir sur la planche 3.10 que l'échelle de Kolmogorov n'est jamais plus petite que pour l'écoulement isotrope initial. Toutes les réalisations de la série GÉOPHYSIQUE ont leur échelle de Kolmogorov qui augmente au moins dans un premier temps (voir la planche 3.10). Les réalisations MICROOCÉANCALME, INTEROCÉANCALME, MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ voient leur échelle de Kolmogorov décroître vers $t = 7$. Tous les calculs stables de la série CALME finissent par avoir une échelle de Kolmogorov du même ordre (voir la figure 3.10(a)). Les faibles oscillations de l'échelle de Kolmogorov indiquent que des effets d'ondes sont même ressentis à de petites échelles. Les effets d'ondes apparaissent aux alentours de $t = 10$. Pour les réalisations stable l'échelle de Kolmogorov croît en $t^{0,3}$.

L'échelle de Taylor est une échelle intermédiaire entre l'échelle de Kolmogorov et l'échelle intégrale. L'échelle de Taylor est définie par $\lambda = \sqrt{\frac{\nu \langle u_i u_i \rangle}{\epsilon_\nu}}$. En turbulence isotrope elle représente la fin de la zone inertielle de Kolmogorov et le début de la dissipation visqueuse. Sur la planche 3.11 est représentée l'évolution de l'échelle de Taylor pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE. Pour les calculs de la série CALME (définie par $Re_\lambda(0) = 49$) l'évolution de l'échelle de Taylor est décroissante initialement (visible sur les courbes 3.11(a)). Le minimum est atteint aux alentours de $t = 1$. Ensuite toutes les réalisations de la série CALME voient leur échelle de Taylor croître exponentiellement. Vers $t = 9$ les calculs stables ont une échelle de Taylor oscillante tandis que les cas instables ont une échelle intégrale décroissante. Pour les réalisations avec une turbulence initiale plus forte (la série RENFORCÉE définie par $Re_\lambda(0) = 66$) il n'y a pas de décroissance initiale. L'échelle de Taylor des calculs barocliniquement instables ne montre pas d'oscillation (MICROOCÉANCALME, INTEROCÉANCALME, MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ sur la figure 3.11(b)). Pour les réalisations stable l'échelle de Taylor croît en $t^{0,25}$.

En turbulence isotrope l'échelle intégrale sphérique représente l'échelle des structures les plus énergétiques. Sa définition est $L = \frac{\pi}{2 \langle u_i u_i \rangle} \int_0^{k_{MAX}} k^{-1} Ec(k) dk$. Il est intéressant de remarquer que contrairement aux échelles de Kolmogorov et aux échelles de Taylor toutes les échelles intégrales sphériques développent des pseudo-oscillations (voir la figure 3.12). Les oscillations sont plus nettes sur les calculs qui sont les moins turbulents (voir la

figure 3.12(b)). On peut conclure, d'après l'étude des échelles de Kolmogorov, de Taylor et intégrale que les ondes ont probablement une plus grande influence sur les grandes échelles que les petites. Pour les réalisations stable l'échelle intégrale croît en $t^{0,3}$.

3.5.2 Échelles intégrales directionnelles

Dans ce paragraphe nous montrerons, entre autre, que pour $Ri > 1$ l'échelle de flotabilité dans la direction méridionale L_{44}^3 et l'échelle de vitesse méridionale dans la direction méridionale L_{33}^3 ont un comportement très différent. On peut voir sur la planche 3.13 l'évolution des échelles directionnelles pour les calculs de la série RENFORCÉE. Les échelles intégrales directionnelles sont obtenues avec les fonctions de corrélation en 1 point de temps et en 2 points d'espace. C. Bailly et G. Compte-Bellot (2003, [3],p134,(6.4)) définissent la grandeur intégrale en maximisant les corrélations croisées par les composantes d'énergie, ce qui revient à minimiser l'échelle intégrale considérée. L'échelle intégrale ainsi considérée s'exprime :

$$\mathcal{L}_{ij}^l = \frac{1}{\overline{u_i^2} \overline{u_j^2}} \int_0^\infty \overline{u_i u_j}(\mathbf{x}_l) dr \quad (3.1)$$

D'autres comme J. Piquet (1999, [104],p148,(3.32)) considèrent la corrélation croisées directement sans la maximiser.

$$L_{ij}^l = \frac{1}{\overline{u_i u_j}(0)} \int_0^\infty \overline{u_i u_j}(\mathbf{x}_l) dr \quad (3.2)$$

En considérant qu'une échelle intégrale est représentative du pic d'énergie d'un spectre donné, il n'est pas nécessaire de faire intervenir d'autres spectres pour le calcul de cette échelle, nous prendrons donc comme définition celle de J. Piquet. Pour le cas où l'on s'intéresse uniquement aux échelles non croisées les formulations sont équivalentes, mais dans le cas de turbulence barocline les corrélations croisées jouent un rôle important, il est donc plus judicieux de prendre la définition (3.13).

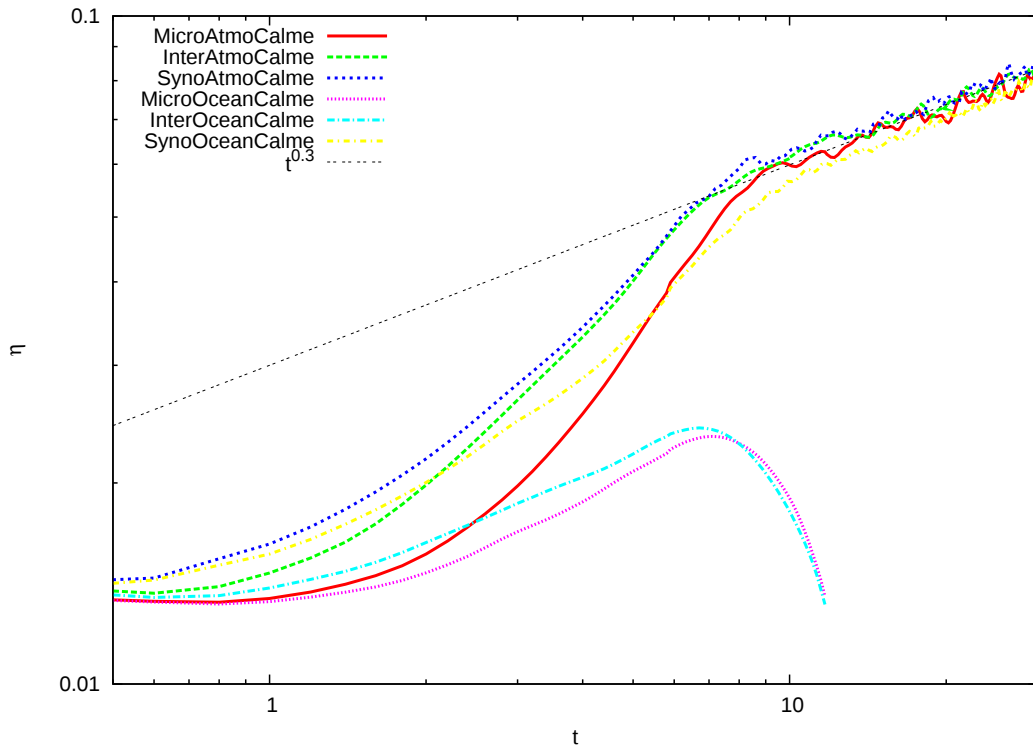
Seule les réalisations stables ont une échelle zonale qui ne finit pas par être de la taille de la boîte de turbulence. Lorsque l'énergie turbulente augmente les réalisations MICROOcéanRENFORCÉ et INTEROcéanRENFORCÉ voient leur échelle intégrale zonale directionnelle diminuer.

En ce qui concerne l'échelle intégrale dans la direction méridionale nous allons voir que pour les réalisations instables l'échelle méridionale augmente lors de l'instabilité. Les réalisations instables ont des évolutions similaires. Leur échelle intégrale méridionale est quasiment constante jusqu'à $t = 3$, après il y a une décroissance jusqu'à $t = 8$ et enfin elles croissent. Au temps $t = 12$ les échelles intégrales des réalisations instables ont presque rejoint celles de la réalisation stable.

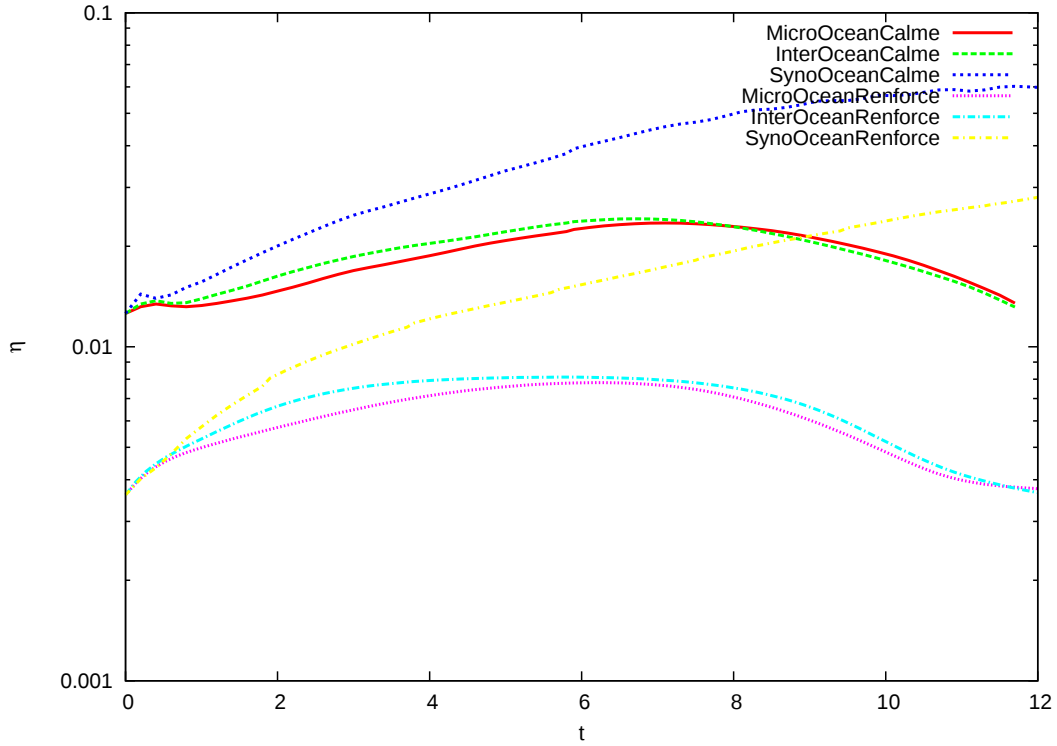
Pour l'échelle verticale, rien de surprenant, elle oscille beaucoup plus que les autres échelles, probablement à cause de la présence d'onde de gravité. La période des oscillations est plus petite que celle observée sur les échelles directionnelles horizontales, elle est de l'ordre de $t = 0.5$. Pour la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ la fréquence naturelle des ondes d'inertio-gravités est de $\tau_N = 0.89$. Cela pourrait correspondre à une influence des ondes internes. Les deux autres échelles, pour les réalisations instables, sont aussi oscillantes mais leur amplitude est plus faible de 2 à 4 fois par rapport à l'échelle verticale de la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ.

On notera que l'échelle de flotabilité dans la direction méridionale fait apparaître pour les réalisations stable des oscillations beaucoup plus grandes que celle de l'échelle de vitesse

dans la direction méridionale. Dans la direction méridionale les échelles basées sur la flotabilité et celles basées sur la vitesse méridionale sont très différentes. Les réalisations instables ont une forte croissance initiale. L'échelle de la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ est pseudo-oscillante. La fréquence des oscillations est la plus petite de celle que l'on peut voir sur la planche 3.13. La période est de l'ordre de $t \approx \pi$. Ce qui correspond à la période naturelle des ondes d'inertie. Les réalisations instables n'exhibent pas de nette oscillation ou de franche monotonie. Globalement la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ est celle qui à l'échelle de flotabilité méridionale la plus grande.

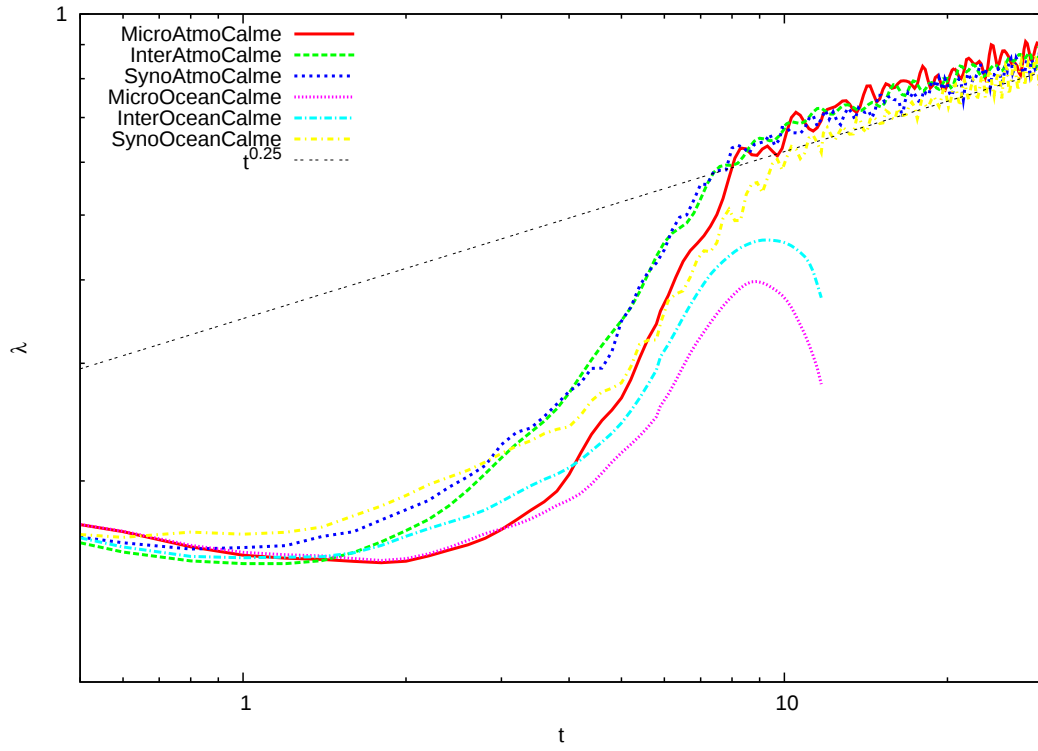


(a) calculs de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$)

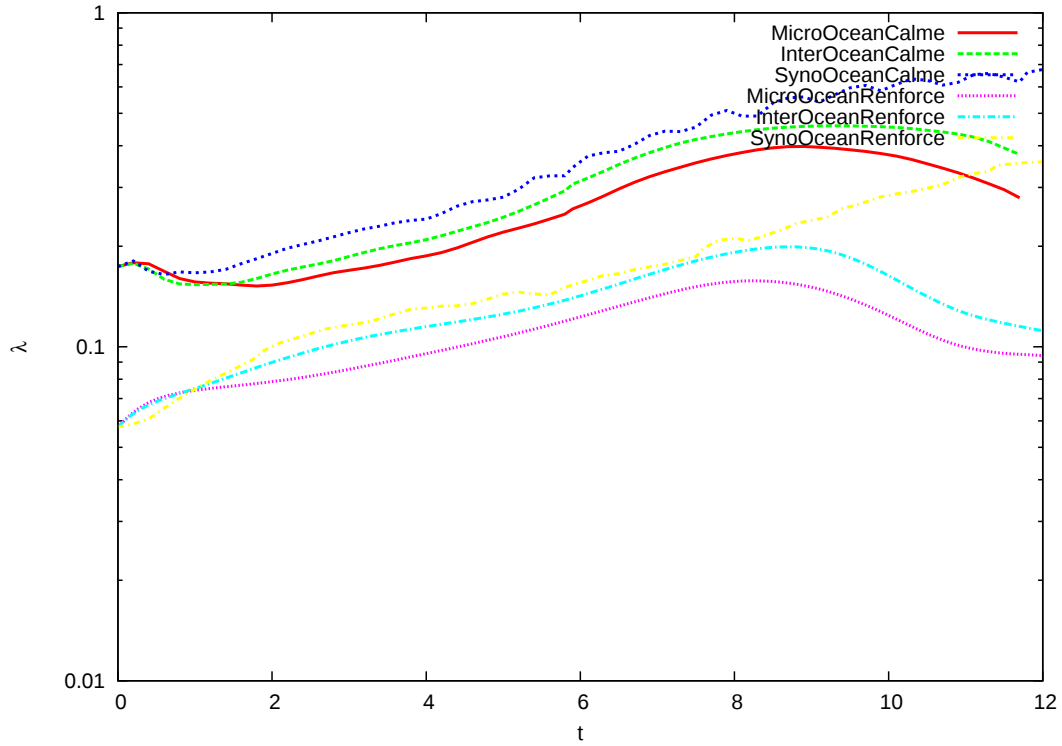


(b) calculs de la série OCEAN ($\epsilon = 0.2$)

FIG. 3.10 — Échelles de Kolmogorov : série CALME et OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. η est l'échelle de Kolmogorov qui est définie par $\eta = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon_\nu}}$. Le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente est ϵ_ν . Rappelons aussi que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$;

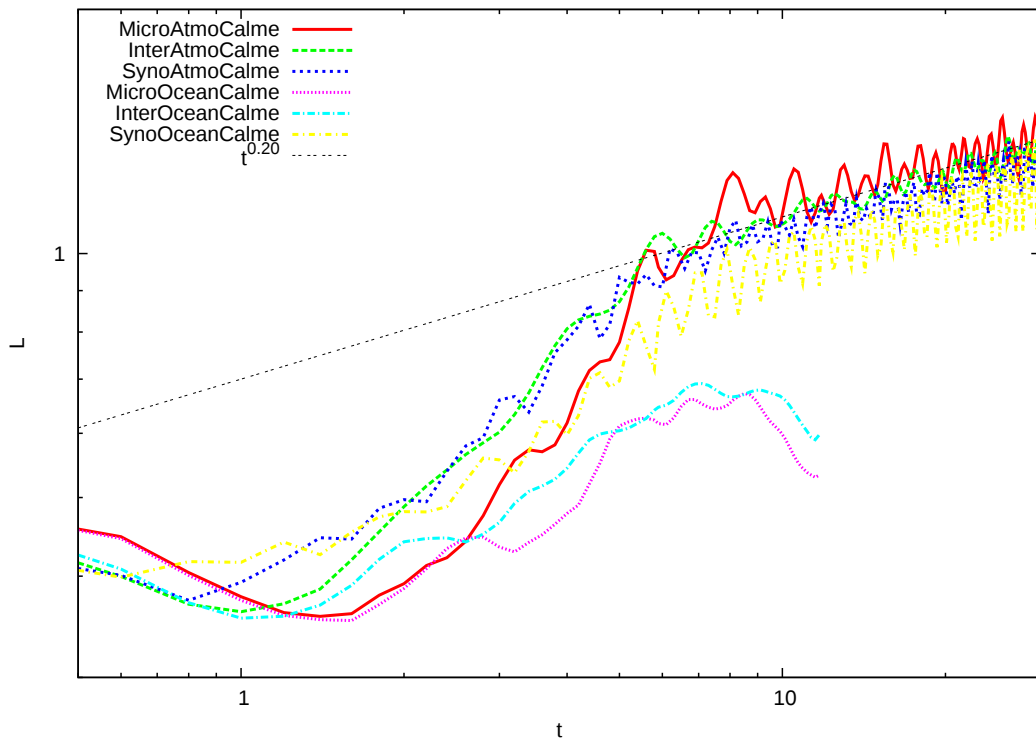


(a) calcul de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$)

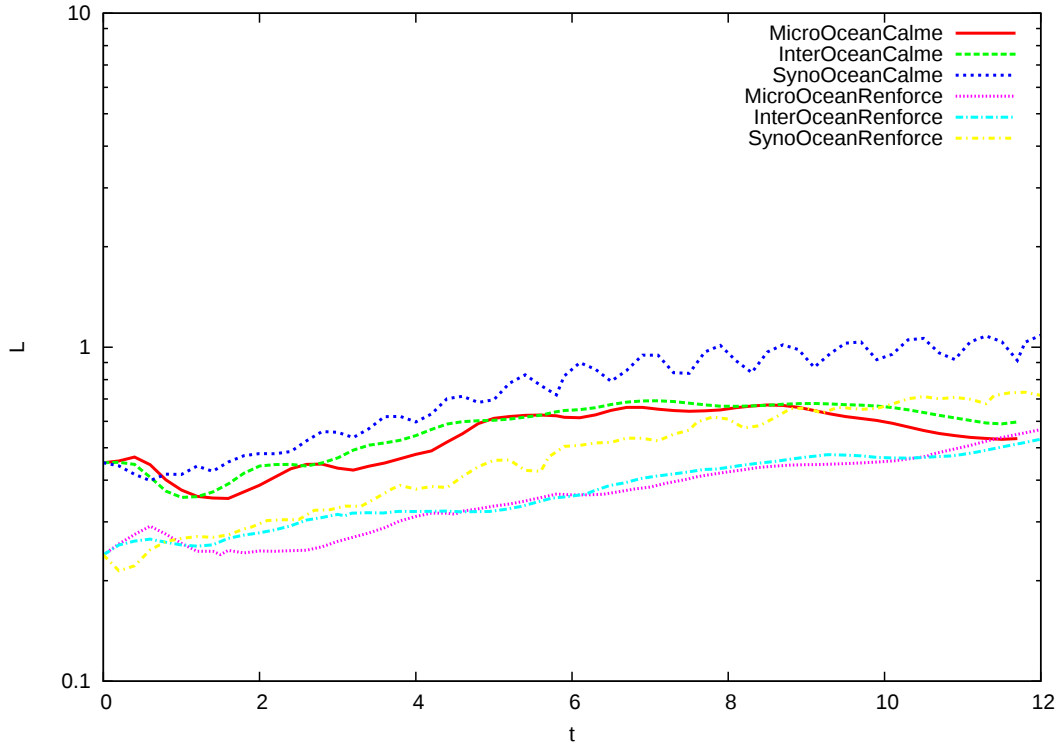


(b) calcul de la série OCEAN ($\epsilon = 0.2$)

FIG. 3.11 — Échelles de Taylor : série CALME et OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. λ est l'échelle de Taylor qui est définie par $\lambda = \sqrt{\frac{\nu \langle u^2 \rangle}{\epsilon_\nu}}$. Le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente est ϵ_ν . Rappelons aussi que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOcéANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROcéANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOcéANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOcéANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROcéANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOcéANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$.

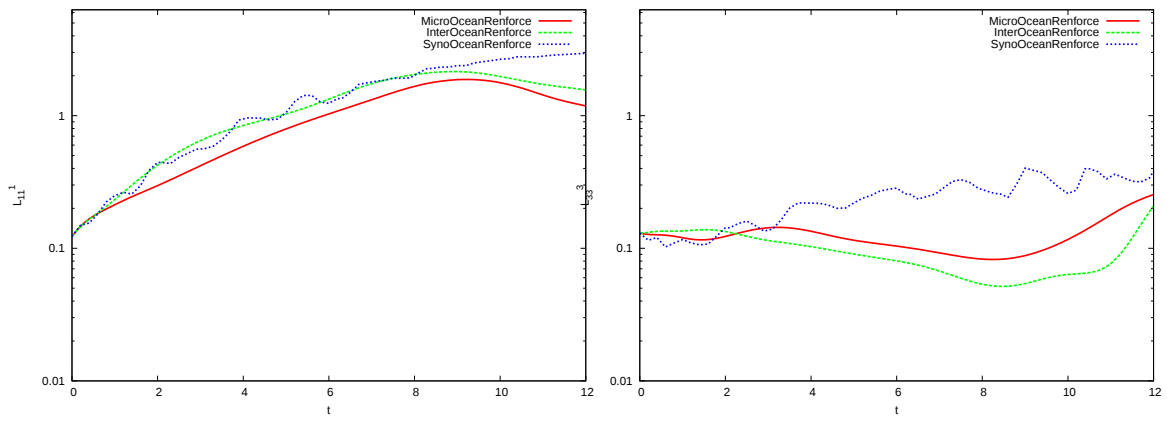


(a) calcul de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$)

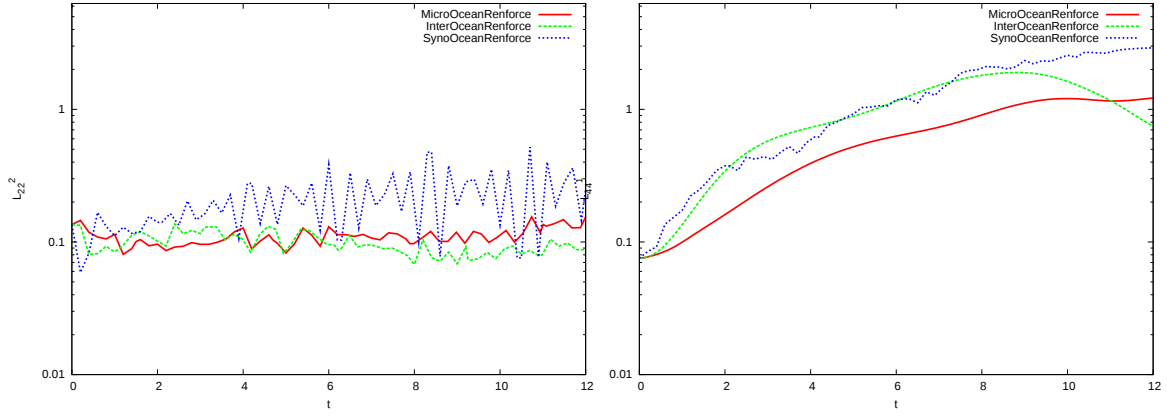


(b) calcul de la série OCEAN ($\epsilon = 0.2$)

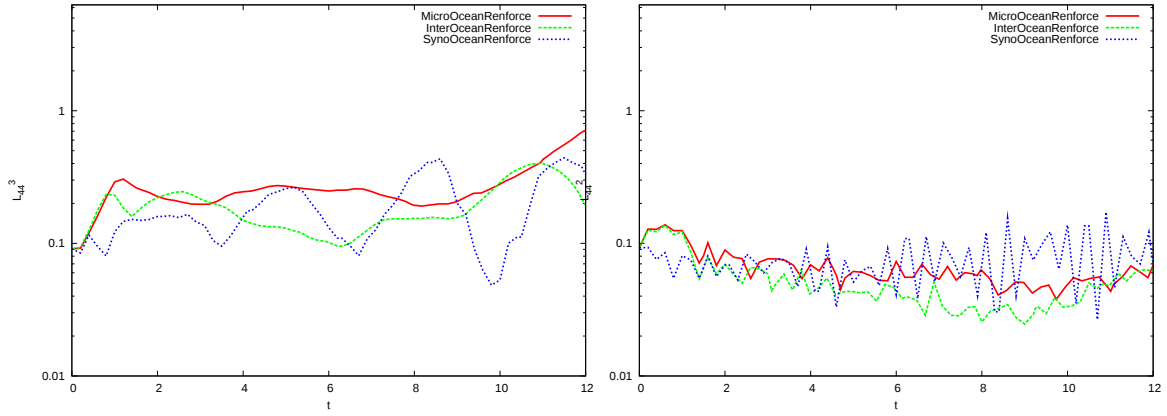
FIG. 3.12 — Échelles intégrales sphériques : série CALME et OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. L est l'échelle de intégrale sphérique qui est définie par $L = \frac{\pi}{2\langle u^2 \rangle} \int_0^{k_{MAX}} k^{-1} Ec(k) dk$. La densité sphérique d'énergie cinétique turbulente est $Ec(k)$. Rappelons aussi que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$



(a) avec la vitesse zonale dans la direction zonale : L_{11}^1 (b) avec la vitesse transverse dans la direction transverse : L_{33}^3



(c) avec la vitesse verticale dans la direction verticale : L_{22}^2 (d) avec la flotabilité dans la direction zonale : L_{44}^1



(e) avec la flotabilité dans la direction transverse : L_{44}^3 (f) avec la flotabilité dans la direction verticale : L_{44}^2

FIG. 3.13 – Échelles intégrales directionnelles : série RENFORCÉE . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les courbes représentent l'évolution des échelles intégrales directionnelles pour les calculs de la série RENFORCÉE . L_{ij}^k est l'échelle intégrale directionnelle de la quantité $q_i q_j$ dans la direction k . La variable de champ généralisé est $\mathbf{q}$ tel que $q_1 = u_1$, $q_2 = u_2$, $q_3 = u_3$ et $q_4 = \frac{1}{N}b$. Les échelles intégrales directionnelles sont obtenues à partir des corrélations directionnelles comme définies au premier chapitre (formule qui avec les variables de champs généralisés s'exprime $L_{ij}^l = \frac{1}{\overline{q_i q_j}(0)} \int_0^\infty \langle q_i q_j \rangle(\mathbf{x}_l) dr$). Rappelons que : MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$

3.6 Nombres adimensionnels

Dans cette section nous allons présenter 4 nombres adimensionnelles dans le but de savoir si les hypothèses de la théorie linéaire sont satisfaites ou non pour certaine réalisation. D'abord nous regarderons le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. Puis le paramètre de cisaillement pour poursuivre par l'étude du nombre de Rossby basé sur l'échelle horizontale. Nous finirons par le nombre de Froude basé sur l'échelle verticale. Dans le tableau 3.5 est résumé les tendances que nous montrerons dans la suite de la section. Il apparaît que pour les calculs instables les effets linéaires et les effets non linéaires sont du même ordre (le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale, non présenté ici pour ne pas rajouter des figures, est plus grand que le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor, et indique que les effets linéaires sont du même ordre que les effets visqueux).

	$\frac{1}{Re_\lambda}$	$\frac{1}{S^*}$	Ro_{Lh}	Fr_{Lv}
Stable	$O(10^{-1})$	$O(10^{-2})$	$O(10^{-3})$	$O(10^{-3})$
Instable	$O(10^{-2})$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

TAB. 3.5 – Tendances approximatives des nombres adimensionnels

3.6.1 Nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor

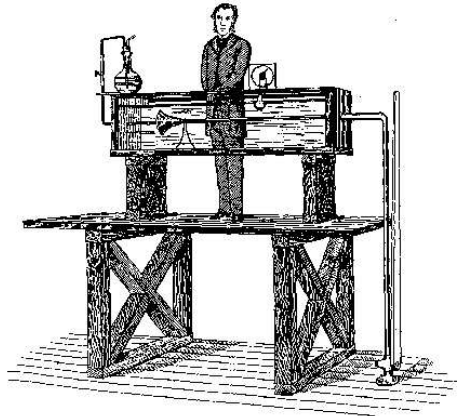


FIG. 3.14 – Vue d'artiste de la célèbre expérience de Reynolds en 1883. L'image est tirée de N. Rott 1990 [118]

Nous allons voir que pour les réalisations de la série GÉOPHYSIQUE, les écoulements les plus turbulents ne sont pas ceux qui ont le plus petit nombre de Richardson mais ceux qui ont un nombre de Richardson intermédiaire $Ri = 0.99$. Le nombre de Reynolds est "le nombre sans dimension de la mécanique de fluide" il est nécessaire pour investiguer la classe de l'écoulement considéré. Par exemple nous savons tous que pour un écoulement dans une conduite circulaire il existe un nombre de Reynolds critique pour lequel l'écoulement devient turbulent. Une vue d'artiste de cette expérience est visible sur la figure 3.14. Pour une parcelle des fluides le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inerties aux forces visqueuses. A partir des trois échelles sphériques présentées ci-dessus on peut construire trois nombres de Reynolds différents. Dans l'ordre croissant, il y a le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Kolmogorov puis le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor et

enfin le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intégrale. Dans les SND le nombre de Reynolds basé sur l'échelle intermédiaire de Taylor est le plus utilisé. Il sert généralement de caractérisation de l'état de la turbulence dans le cube. Notons qu'il serait aussi possible de bâtir des nombres de Reynolds basés sur les échelles intégrales directionnelles. Étant donné le nombre important de graphiques présentés dans cette thèse il est choisi

de montrer le nombre de Reynolds le plus couramment utilisé dans les simulations numériques directes c'est-à-dire le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. Ce nombre de Reynolds est défini par $Re_\lambda = \frac{\sqrt{\langle u_i u_i \rangle_\lambda}}{\nu}$. Initialement tous les nombres de Reynolds basés sur l'échelle de Taylor diminuent (voir 3.17). Vers $t \approx 4$ les nombres de Reynolds se mettent à croître (voir 3.17). Les réalisations stables de la série CALME (définie par $Re_\lambda(0) = 49$) ont un nombre de Reynolds quasiment constant à partir du temps $t \approx 10$. La valeur autour de laquelle oscille le nombre de Reynolds est $Re_\lambda \approx 30$. La réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ ne se stabilise pas à la même valeur que la réalisation SYNOOCÉANCALME (voir la figure 3.17(b)) ce qui indique que l'état de turbulence initiale doit avoir une importance même pour les calculs barocliniquement stables. Au temps $t = 10$ la réalisation la plus turbulente est INTEROCÉANRENFORCÉ suivi de INTEROCÉANCALME qui initialement était moins turbulente. L'effet barocline a généré des structures de la taille de l'échelle de Taylor assez énergétiques pour que le nombre de Reynolds de la réalisation INTEROCÉANCALME dépasse celui de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ.

3.6.2 Paramètre de cisaillement

Nous allons voir pourquoi les réalisations aillant le plus petit nombre de Richardson sont celle qui on aussi le plus petit paramètre de cisaillement. Le paramètre de cisaillement est un nombre sans dimension représentant le rapport du temps caractéristique des tourbillons les plus énergétiques sur le temps caractéristique du cisaillement $S^* = \frac{\tau_L}{\tau_S}$ soit $S^* = S \frac{\sqrt{\langle u_i u_i \rangle}}{\epsilon_\nu}$. Sur la planche 3.18 est reportée l'évolution des paramètres de cisaillement. On peut voir que les effets de cisaillement dominant les effets d'inertie pour tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE. Initialement les paramètres de cisaillement les plus faibles sont ceux de la série RENFORCÉE. Les réalisations stables ont un paramètre de cisaillement du même ordre à $t = 30$ il vaut $S^* \approx 200$ (voir la figure 3.18(a)), la croissance du paramètre de cisaillement des calculs stable de la série CALME est en $t^{0.5}$. La réalisation qui à le plus petit paramètre de cisaillement est MICROOCÉANRENFORCÉ avec $S^*(12) \approx 8$. Pour un même paramètre de baroclinicité $\epsilon = 0.2$ les calculs faisant apparaître le plus petit paramètre de cisaillement sont ceux ayant le plus faible nombre de Richardson $Ri = 0.5$. Ce qui est contre intuitif car le nombre de Richardson représente le carré du rapport de la fréquence des ondes de gravité sur le taux de cisaillement. Dans les écoulements uniquement cisailés-stratifiés un nombre de Richardson faible est caractéristique d'un écoulement dominé par les effets de cisaillement. Cela peut être expliqué par le faite que l'instabilité énergétique des grandes échelles issu du cisaillement, transfère de l'énergie aux petites échelles par l'intermédiaire des termes non-linéaires créant ainsi une forte dissipation turbulente.

3.6.3 Nombre de Rossby basé sur l'échelle horizontale

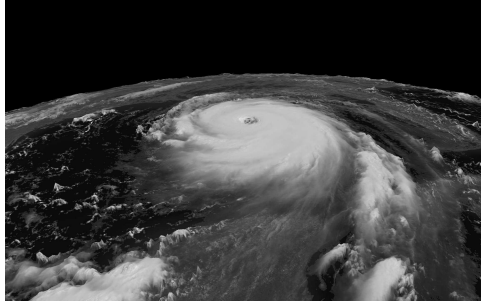


FIG. 3.15 – Ouragan Katrina vue avec GOES-12 dans le Domaine du visible le 28 Aout 2005 Latitude : 26.23 Longitude : -88.13 - Courtesy NOAA

Dans cette section nous allons montrer que pour les réalisations instables l'approximation de type géostrophique n'est pas envisageable. Le nombre de Rossby, pour Carl-Gustav Arvid Rossby, est un nombre sans dimension utilisé dans les écoulements de fluides en rotation, principalement en géophysique pour l'océan et l'atmosphère. Pour une parcelle de fluide il caractérise le rapport de la force d'inertie à la force de Coriolis. Dans l'atmosphère terrestre la force de rotation est un paramètre nécessaire à la formation des très destructeurs cyclones tropicaux comme celui visible sur la figure 3.15. Ce nombre est aussi connu sous le nom de nombre de Kibel dans la littérature soviétique. Puisque une particule aillant un mouvement purement vertical ne ressent pas directement l'influence de la force de Coriolis il est choisi d'utiliser un nombre de Rossby basé sur l'échelle horizontale défini grossièrement

par $Lh = \sqrt{L_{11}^1 L_{11}^1 + L_{33}^3 L_{33}^3}$. Le nombre de Rossby s'exprime ainsi $Ro_{Lh} = \frac{\sqrt{\langle u_i u_i \rangle}}{Lh f}$. Sur la figure 3.19 est reportée l'évolution de nombres de Rossby basés sur l'échelle intégrale horizontale pour les calculs de la série OCEAN. La série OCEAN est incomplète sur les figures 3.19 et 3.20. Il manque MICROOCÉANCALME et INTEROCÉANCALME car ces réalisations ont été calculées en premier. Les routines pour coder les échelles intégrales ont été écrites après. Les programmes pour calculer les échelles intégrales ont été validés avant d'effectuer le calcul de la réalisation SYNOOCÉANCALME. Pour les réalisations stables au temps $t = 12$ le nombre de Rossby est de l'ordre de $Ro_{Lh} \approx 8 \cdot 10^{-4}$. Cette valeur du nombre de Rossby est généralement satisfaisante pour utiliser une approximation géostrophique. Bien qu'initialement le nombre de Rossby de la réalisation SYNOOCÉANCALME soit plus important que celui de la réalisation SYNOOCÉANCALME les nombres de Rossby des deux réalisations tendent vers une même valeur. Initialement tous les nombres de Rossby décroissent. Les nombres de Rossby des cas instables croissent lorsque le temps dépasse $t \approx 6$. La réalisation MICROOCÉANCALME est celle qui a le nombre de Rossby le plus grand. Au temps $t = 12$ les valeurs des nombres de Rossby des réalisations instables sont de l'ordre de 1. Ceci indique que dans la dynamique des échelles intégrales du mouvement la force d'inertie a autant d'importance que la force de Coriolis et aucune simplification des équations de type géostrophique n'est envisageable.

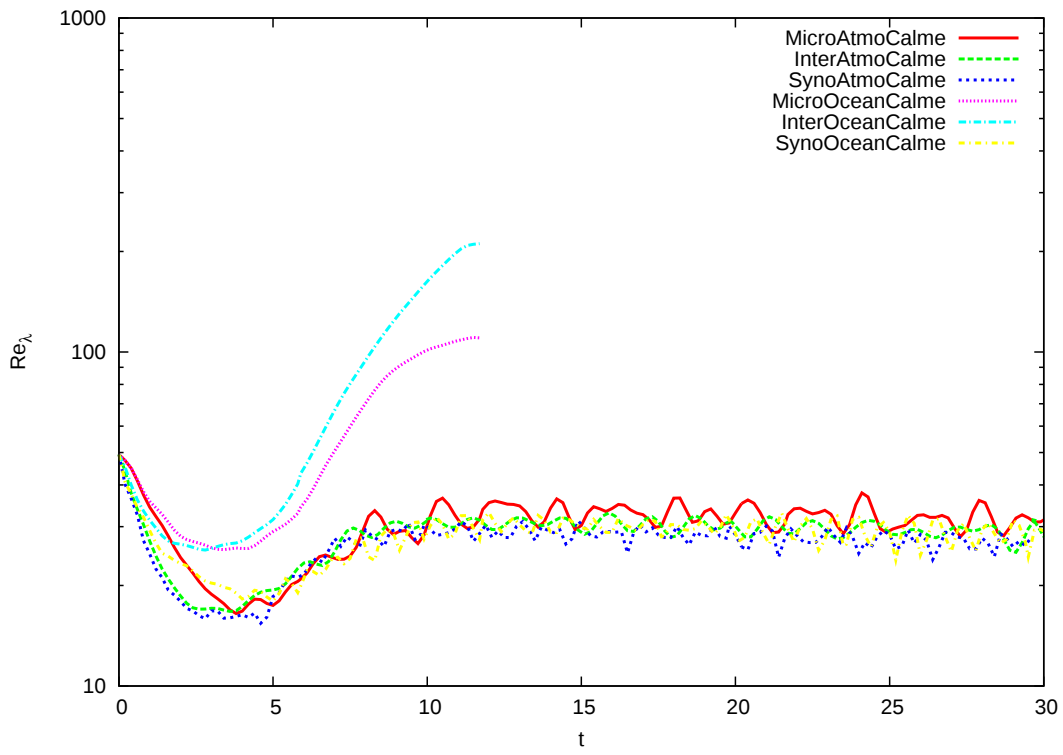
3.6.4 Nombre de Froude basé sur l'échelle verticale



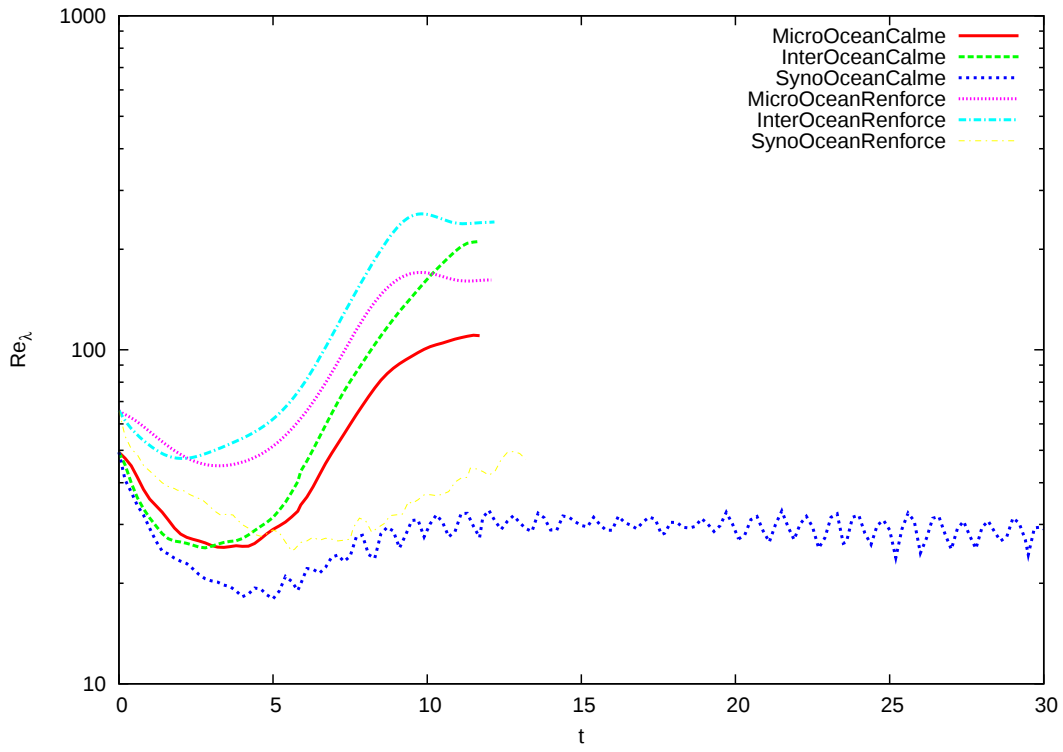
FIG. 3.16 – Les coques du Swan (au-dessus) et du Raven (en-dessous) visible au “Science museum de Londres” construit par Froude. Photographie prise par W.M. Connolley

Dans cette section nous montrerons entre autres que pour les réalisations instables il n'est pas possible de faire une hypothèse de bidimensionnalisation faisant intervertir des nombres de Froude très petits. Le nombre de Froude est un nombre qui mesure l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de flotabilité. Ce nombre est introduit par William Froude en 1861 pour l'étude de la résistance à l'avancement des objets flottants. Il crée aussi la théorie des sillages de navires (“wave-line theory”) qui est intimement liée au nombre de Froude. Sur la photographie 3.16 on peut voir la coque des bateaux élaborée par W. Froude. Puisque dans un champ de stratification stable uniforme seule une particule qui est en mouvement dans la direction verticale va ressentir les effets de gravité il est choisi d'utiliser l'échelle verticale intégrale pour construire le nombre de Froude. Sur la figure 3.20 est reportée l'évolution du nombre de Froude ba-

sée sur l'échelle verticale pour les calculs de la série OCEAN. Tous les calculs de la série GÉOPHYSIQUE ont un nombre de Froude initialement inférieur à l'unité. Ceci indique que les effets de stratification sont prépondérants devant les effets d'inertie. Les réalisations stables MICROOCÉANCALME et MICROOCÉANRENFORCÉ ont une décroissance similaire bien que la réalisation avec le plus faible nombre de Reynolds (SYNOOCÉANCALME) soit le siège d'oscillations bien plus amples. La période des oscillations du nombre de Froude de la réalisation SYNOOCÉANCALME est d'environ $t = 0.66$ et la fréquence des ondes internes est de $t = 0.89$. Si c'est les ondes internes qui sont responsables des oscillations du nombre de Froude alors la turbulence tend à diminuer l'influence des ondes de gravité. Bien que initialement le nombre de Froude de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ soit supérieur à celui de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ c'est le nombre de Froude de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ qui atteint la valeur la plus grande (à $t \approx 11$ $Fr_{Lv} \approx 3$). Ceci est différent de l'évolution du nombre de Rossby dont c'est la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ qui a le plus importante. Dans l'écoulement barocline les ondes d'inertie ne semblent pas jouer le même rôle que les ondes de gravité. Au temps $t = 12$ le nombre de Froude des réalisations instables est de l'ordre de 1 ce qui indique que les effets de flotabilité sont de l'ordre des effets d'inertie et que aucune simplification asymptotique ne peut être faite. Notons qu'au temps $t = 12$ et pour les calculs stables le nombre de Froude est supérieur au nombre de Rossby. Pourtant initialement le nombre de Rossby est plus grand. Ceci est l'influence du cisaillement. Le temps linéaire de cisaillement est celui qui est le plus court. C'est le cisaillement qui va influencer l'écoulement dans un premier temps. Des structures longitudinales vont se développer ce qui aura pour conséquence d'augmenter la taille de l'échelle intégrale horizontale. Les tourbillons porteurs d'énergie étant plus grands la “boîte de turbulence” sera globalement plus sensible à la force de Coriolis.

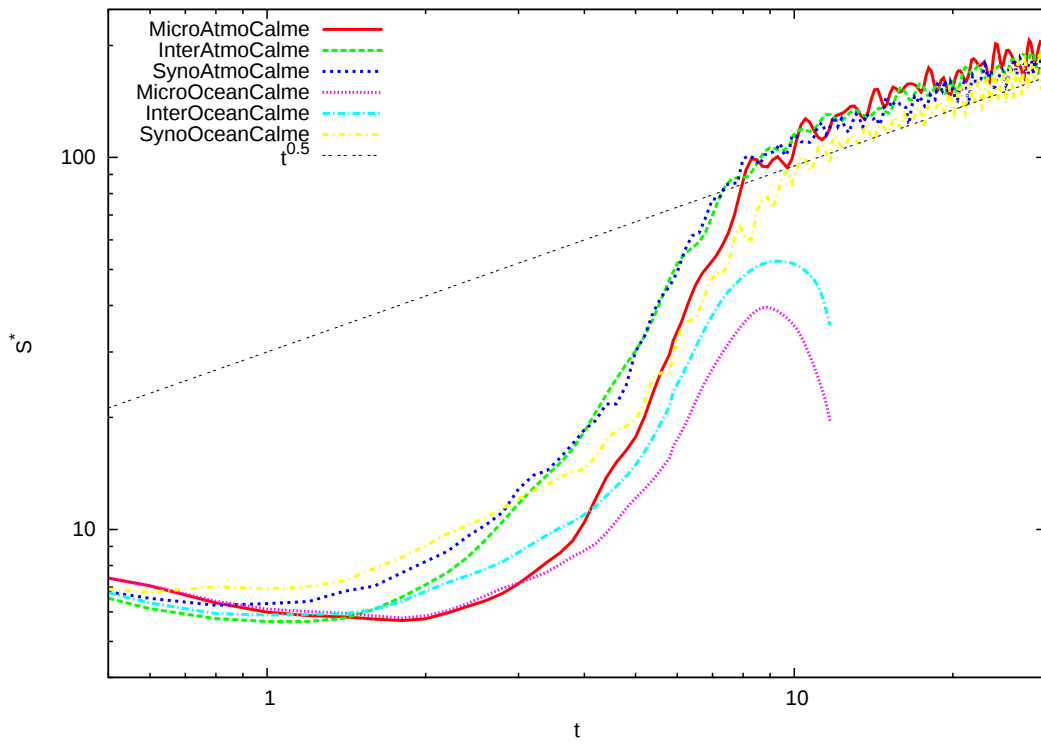


(a) calcul de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$)

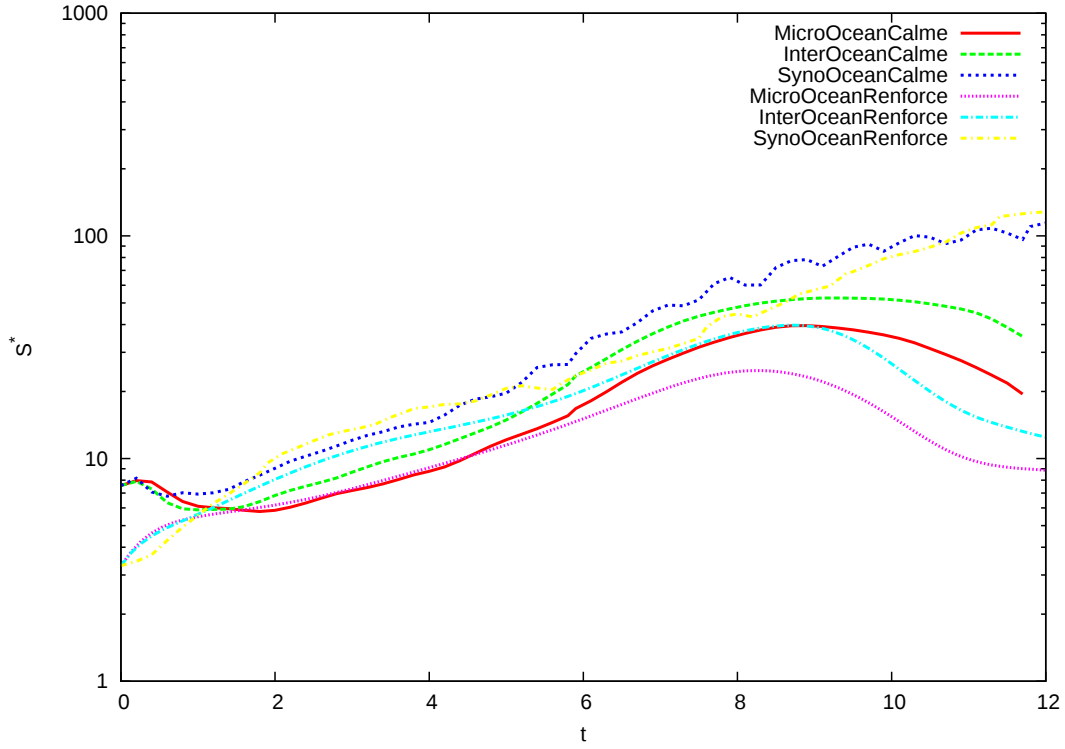


(b) calcul de la série OCEAN ($\epsilon = 0.2$)

FIG. 3.17 — Évolution du nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor pour les calculs de la série CALME et OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Re_λ est l'échelle de Taylor définie par $Re_\lambda = \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle_\lambda}}{\nu}$. Rappelons aussi que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$;



(a) calculs de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$)



(b) calcul de la série OCEAN ($\epsilon = 0.2$)

FIG. 3.18 — Paramètre de cisaillement : série CALME et OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. S^* est le paramètre de cisaillement défini comme au chapitre ?? ?? . Sa valeur est $S^* = \frac{S \langle u^2 \rangle}{\epsilon_\nu}$. Le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente est ϵ_ν . Rappelons aussi que : MICROATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTERATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOATMOCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$; INTEROCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$; SYNOOCÉANCALME a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$; MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$;

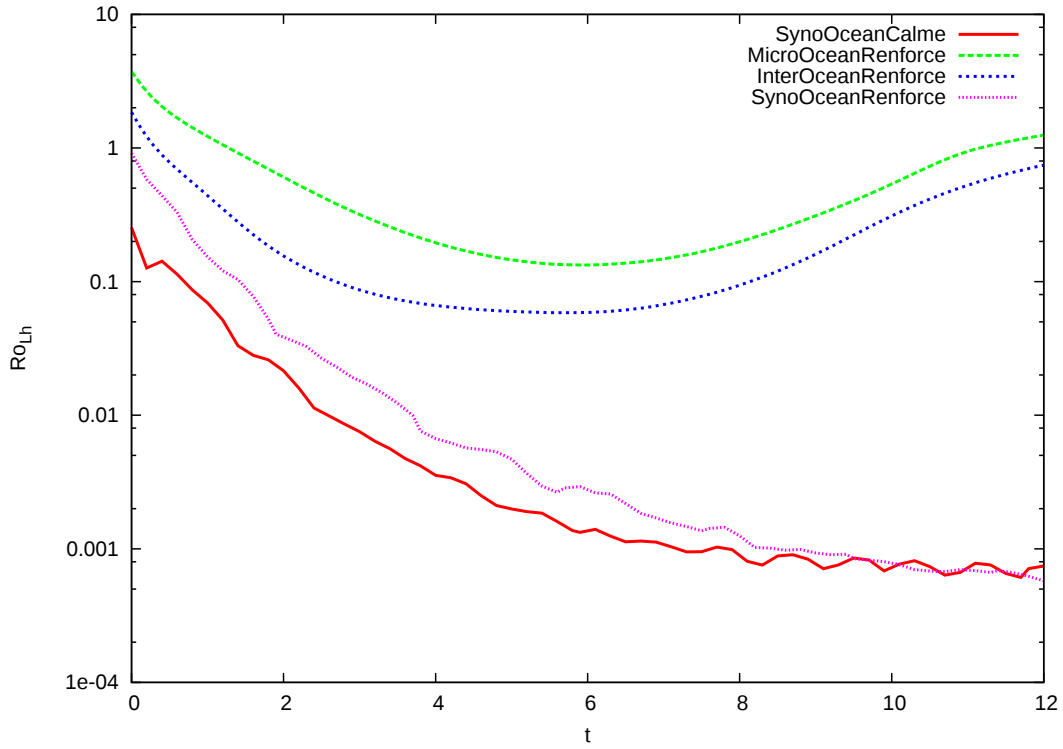


FIG. 3.19 – Évolution du nombre de Rossby basé sur l'échelle intégrale horizontale pour les calculs de la série OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Ro_{Lh} est le paramètre de cisaillement défini par $Ro_{Lh} = \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle} L_h}{2\Omega}$. Rappelons aussi que : MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$

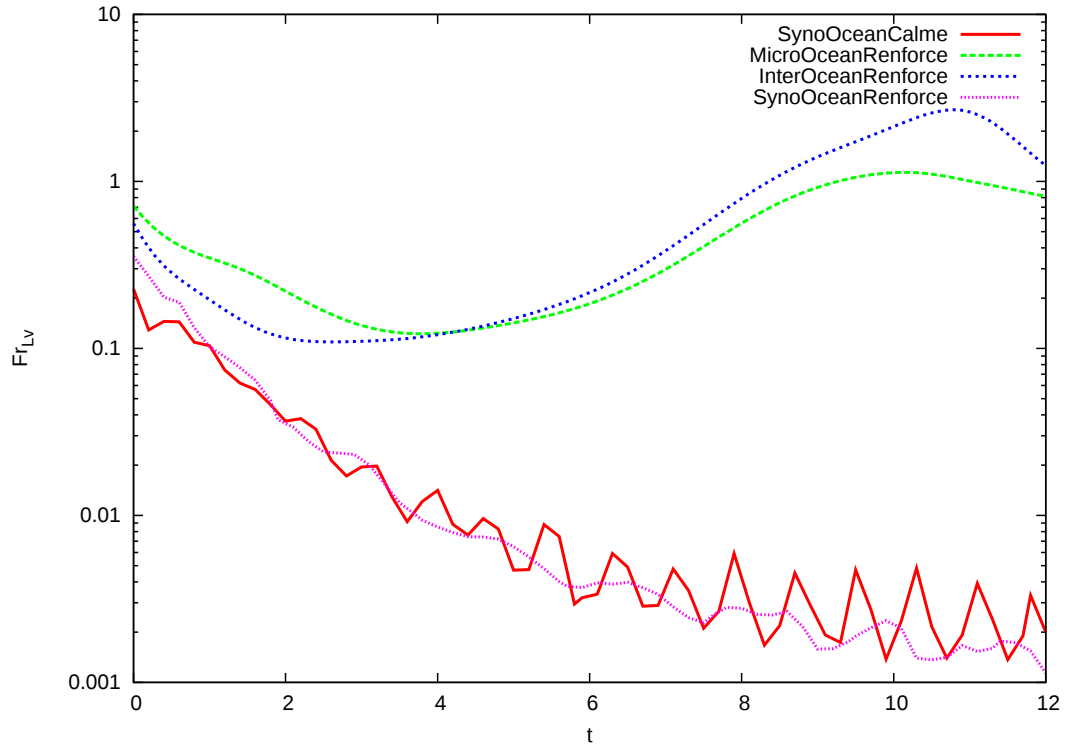


FIG. 3.20 – Évolution du nombre de Froude basé sur l'échelle intégrale horizontale. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen, ce sont les calculs de la série OCEAN. Ro_{Lh} est le paramètre de cisaillement défini par $Fr_{Lv} = \frac{\sqrt{\langle u^2 \rangle} Lv}{N}$. Rappelons aussi que : MICROOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$; INTEROCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$; SYNOOCÉANRENFORCÉ a pour paramètres $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$.

3.7 Tenseurs de structures

Les structures observées dans les écoulements varient beaucoup. Parfois il y a une forte cohérence verticale ou parfois il y a une forte cohérence zonale. On peut observer des jets aussi bien que des tourbillons. Devant ce grand panel de structures possibles l'évaluation du tenseur de Reynolds seule manque d'information. C'est pour cette raison que nous avons évalué des tenseurs de structures tels que la circulicité, la dimensionnalité et la stropholysis. Mais commençons par le conventionnel tenseur de Reynolds c'est-à-dire le tenseur de componentialité.

3.7.1 Componentialité

Le tenseur de componentialité des composantes de la dynamique n'est rien d'autre que le tenseur de Reynolds généralisé à un écoulement stratifié. On peut voir les tenseurs de Reynolds généralisée sur les planches 3.21 et 3.22 ².

Tenseur de Reynolds généralisé

Dans cette section nous allons montrer que la composante méridionale et la corrélation zonale sont dominantes pour les écoulements de turbulence barocline. Aussi nous verrons que pour les réalisations énergétiquement instables la corrélation croisée ayant la plus forte valeur absolue est la corrélation de deux composantes horizontales. Si les corrélations sont une mesure possible de la création tourbillonnaire dans un plan alors la phénoménologie est cohérente avec la phénoménologie de l'instabilité barocline. Les théories de l'instabilité barocline prévoient la création de tourbillons dans le plan horizontal.

La composante zonale est représentée par les courbes rouges sur les planches 3.21 et 3.22. Pour les 4 réalisations stables c'est la composante zonale qui est la plus grande (voir les courbes rouges sur 3.21(a), 3.21(c), 3.21(e) et 3.21(f)). Pour les calculs énergétiquement instables la composante zonale est souvent dépassée par la composante méridionale particulièrement lorsque $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$.

La composante méridionale a un rôle très important (voir les courbes bleues sur les planches 3.21 et 3.22). Contrairement à l'écoulement cisailé ou cisailé-stratifié instable où c'est la composante zonale qui fait croître l'énergie turbulente dans le cas barocline c'est la composante d'énergie méridionale qui est la plus forte sauf pour la réalisation MICROOcéanRenforcé où la composante méridionale est juste inférieure à la composante zonale.

Que ce soit pour les réalisations stables ou instables la composante verticale est très inférieure aux deux composantes horizontales (voir les courbes vertes sur les planches 3.21 et 3.22). Mais dans les cas non-linéaire instable la composante d'énergie verticale augmente, ce qui n'était pas le cas dans le cas linéaire non-visqueux vu précédemment au chapitre 2.

Sur des *temps très courts* ($t < 1$) la composante de flotabilité subit un ajustement (voir les courbes roses sur les planche 3.21 et 3.22). Pendant cet ajustement la valeur de la composante de flotabilité est supérieure à la composante méridionale et parfois aussi à la composante zonale. Les réalisations faisant apparaître un pic de la composante de flotabilité supérieur aux autres composantes ont un nombre de Richardson $Ri = 0.99$ ou $Ri = 2$. Le pic le plus important ≈ 0.36 est atteint pour les réalisations ayant $Ri = 2$ et

²Le temps τ_{B3} que l'on peut voir sur la figure 3.21(d) appartient en faite à la figure 3.21(c) situé devant.

$\epsilon = 0.2$. Par la suite pour les calculs stables la composante de flotabilité est de l'ordre de la composante méridionale. Pour la réalisation instable la composante de flotabilité est supérieure à la composante verticale.

La corrélation croisée zonale-méridionale est visible en traits fins jaunes sur les planches 3.21 et 3.22. Sa valeur est faible pour les calculs stables. Pour les calculs instables elle est positive et elle finit par croître. La corrélation des écoulements instables est généralement supérieure à la composante de flotabilité sauf pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ (définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$) où l'on peut observer que vers $t \approx 10$ que la corrélation décroît et qu'elle est dépassée par la composante de flotabilité.

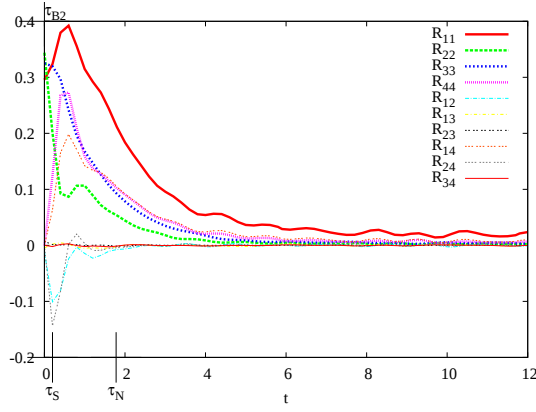
Pour tous les calculs présentés sur les planches 3.21 et 3.22 la corrélation zonale-verticale est initialement négative (voir les courbes bleus claires). Cette corrélation est l'expression du cisaillement moyen. Pour des nombres de Richardson assez élevés ($Ri = 0.99$ et $Ri = 2$) cette corrélation passera par un état positif. Dans les écoulements purement cisailés instables cette corrélation reste négative (voir R.S. Rogallo, 1977, [114], p74, fig14³; Lee et al., 1989, [77], p574, fig12; A. Pumir, 1996, [107], p3116, fig1c; O. Iida et al., 2000, [62], p2896, fig2a). La valeur "normale" correspondant à une création tourbillonnaire par le cisaillement est dans le cas du repère SND une valeur négative. Pour les écoulements de turbulence homogène barocline instable cette corrélation sera négative est décroissante lors de la phase de croissance de l'énergie.

La corrélation croisée méridionale-verticale est visible en traits noirs sur les planches 3.21 et 3.22. Cette corrélation est quasiment nulle pour les calculs à $\epsilon = 0.001$. Pour les réalisations avec $\epsilon = 0.2$ elle est négative. Lorsque $Ri = 0.99$ et $\epsilon = 0.2$ la corrélation croisée méridionale-verticale est inférieure à la corrélation croisée zonale-verticale. Ceci nous indique la possibilité d'une forte création tourbillonnaire dans la direction méridionale. Pour les réalisations avec $Ri = 0.5$ et $\epsilon = 0.2$ la corrélation méridionale-verticale et zonale-verticale sont du même ordre de grandeur, pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ c'est la corrélation zonale-verticale qui est inférieure.

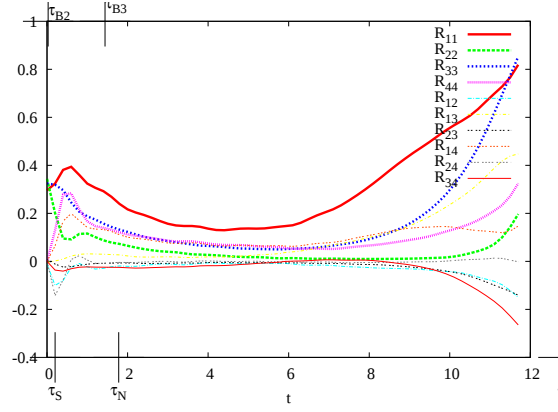
Le flux méridional est représenté en traits fins rouges sur les planches 3.21 et 3.22. Le flux méridional est sur des temps initiaux négatifs pour toutes les réalisations. Pour les réalisations avec $\epsilon = 0.001$ il est quasiment nul et oscille autour de 0. Pour les réalisations énergétiquement instables lorsque $Ri = 0.5$ le flux est négatif et décroissant à $t = 11$. Lorsque $Ri = 0.99$ le flux est positif et croissant à $t = 11$. À $t = 11$ lorsque le flux de flotabilité méridionale est négatif c'est la corrélation qui est la plus négative. Le gradient moyen horizontal de flotabilité est positif dans le repère SND. Un flux méridional négatif de flotabilité correspond à un flux "normal" tandis qu'un flux méridional positif de flotabilité correspond à un flux "anormal". Par conséquent les flux méridionaux des réalisations INTEROCÉANCALME et INTEROCÉANRENFORCÉ peuvent être qualifiés d'"anormaux".

Dans le tableau 3.6 sont résumées les tendances interprétées à partir des observations précédentes. Ceci doit être valable dans la limite d'écoulements qui ne sont pas fortement turbulent, de nombre de Richardson et de paramètre de baroclinicité pas trop grand, de temps pas trop longs.

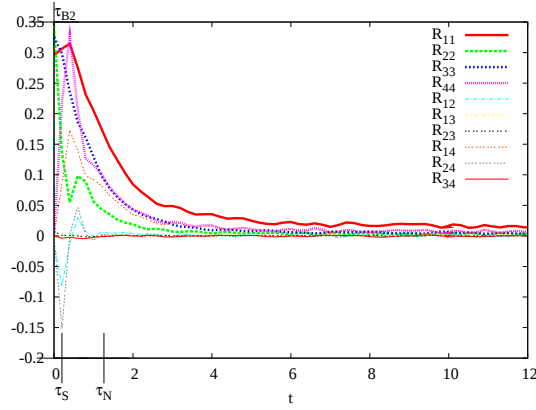
³Sur la figure 14 de R.S. Rogallo [114] ce n'est pas directement la corrélation croisée qui est tracé mais une quantité proportionnelle : la longueur de mélange. Attention il manque un signe moins à la longueur de mélange définie par R.S. Rogallo sur la figure 14. Pour s'en convaincre regarder la valeur que R.S. Rogallo donne pour la corrélation longitudinale-verticale à la page 9 : $-\frac{\overline{uv}}{u'v'} = 0.49$ pour le calcul BSH12 à $tS = 10$. La longueur de mélange est définie par $lm = \frac{-\langle u_1 u_2 \rangle}{S \sqrt{\langle u_2 u_2 \rangle}}$



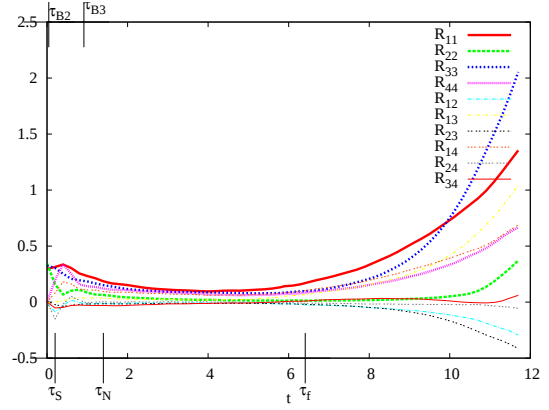
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



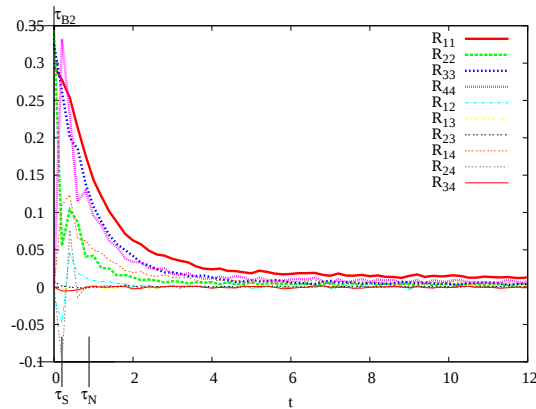
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



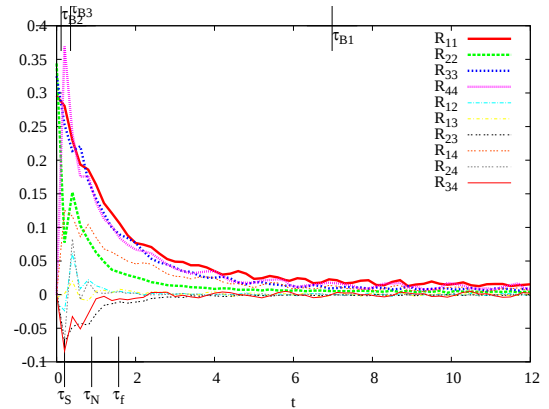
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

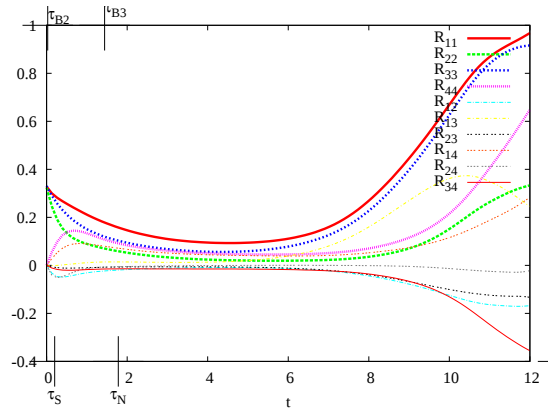


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

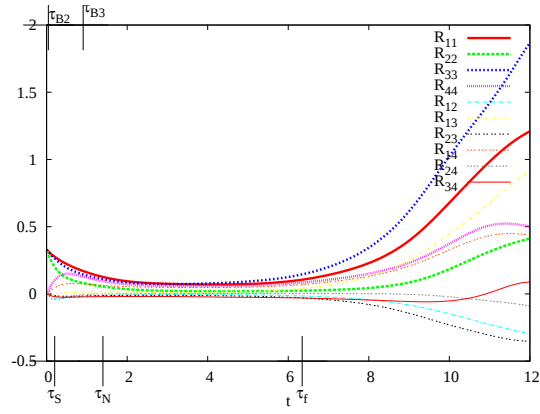


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

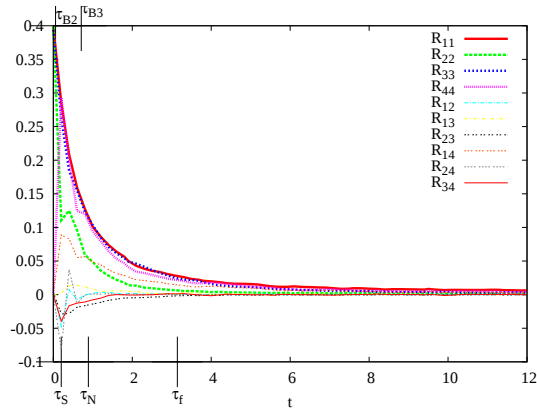
FIG. 3.21 – Évolution du tenseur de contraintes de Reynolds généralisé à un écoulement stratifié. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les calculs présentés sont ceux de la série CALME .



(a) Réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(b) Réalisation INTEROcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(c) Réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)

FIG. 3.22 – Évolution du tenseur de contraintes de Reynolds généralisé à un écoulement stratifié. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les calculs présentés sont ceux de la série CALME .

	Stable	Instable
Auto-corr zona. R_{11}	• $\forall (\epsilon, Ri, Re_\lambda(0))$ alors $R_{11} > R_{ij}, \forall (i, j)$ • $Ri \nearrow \Rightarrow R_{11}(Ri) \searrow$	• si $0 < Ri < Ri_B(\epsilon, Re_\lambda(0))$ alors $R_{11} > R_{22}$ pendant le développement de l'instabilité
Auto-corr méri. R_{33}	• $Ri \nearrow \Rightarrow R_{33}(Ri) \nearrow$	• si $1 > Ri > Ri_B(\epsilon, Re_\lambda(0))$ alors $R_{22} > R_{11}$ pendant le développement de l'instabilité
Auto-corr vert. R_{22}	• $R_{22} \approx 0$	• $\frac{d}{dt}R_{22} > 0$ lors de la croissance énergétique
Auto-corr flot. R_{44}	• $R_{44} \approx R_{33}$ • si $\epsilon \nearrow$ alors $R_{44} \nearrow$	• si $Ri \searrow$ alors $R_{44} \nearrow$

TAB. 3.6 – Dépendances des composantes du tenseur de Reynolds généralisé à différent paramètres d'entrée du système dynamique barocline. Le nombre critique Ri_B correspond à la limite où les effets de cisaillement sont plus important devant les effets barocline, ce nombre est supposé dépendre de ϵ et $Re_\lambda(0)$

Tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds

Nous avons étudié précédemment le tenseur de Reynolds généralisé. Le problème du tenseur de Reynolds est que sur des temps longs et à cause de la décroissance il est difficile de distinguer les composantes. Pour éviter cet inconvénient il existe un outil mathématique alternatif du tenseur de Reynolds qui est le tenseur d'anisotropie. Le tenseur d'anisotropie n'est rien d'autre que la partie déviateur du tenseur de Reynolds normalisé par l'énergie cinétique turbulente.

Nous allons voir que les oscillations de la composante d'anisotropie zonale semblent être liées à la période des ondes internes. La composante zonale du tenseur d'anisotropie est visible sur les figures 3.23 et 3.24 avec les courbes rouges. Comme précédemment on peut voir que la composante zonale finit par dominer dans les calculs énergétiquement stables. Plus le nombre de Richardson sera élevé et plus la turbulence initiale sera forte alors plus $b_{11}(\tau_S)$ sera faible. Pour les réalisations instables la phase de croissance de la composante d'anisotropie zonale sera suivie d'une phase de décroissance. Les réalisations stables ont une composante b_{11} qui est soumise à de fortes oscillations et la fréquence des oscillations semble être liée à la valeur de la fréquence des ondes internes. Le classement des réalisations par ordre décroissant de la mesure de la distance entre deux pics est : MICROATMOCALME, INTERATMOCALME et SYNOATMOCALME. Ce qui laisse à penser que le phénomène ondulatoire a une période plus grande pour MICROATMOCALME. Les calculs instables ne présentent pas de phénomène oscillant comme ceux des calculs stables. La valeur d'anisotropie zonale la plus forte est obtenue pour les calculs à $\epsilon = 0.001$ et $Ri = 0.5$.

Il apparaît que la composante d'anisotropie méridionale se développe avec une certaine "symétrie" par rapport à la composante d'anisotropie zonale. Pour les calculs $\epsilon = 0.001$ les composantes d'anisotropie méridionale décroissent. Au temps $t \approx 5$ elles vont atteindre une valeur autour de laquelle elles vont osciller. Cette valeur se situe vers -0.1 . Globalement, pour les calculs de la série CALME ($Re_\lambda(0) = 49$) la composante d'anisotropie méridionale se développe d'une façon "quasi-symétrique" à la composante zonale. Ceci est moins évident pour les calculs de la série RENFORCÉE ($Re_\lambda(0) = 66$). Notons que pour les calculs avec $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$ ont initialement la composante zonale de l'ordre

de la composante méridionale.

La composante verticale du tenseur d'anisotropie est visible sur 3.23 et 3.24 avec les courbes vertes. Pour les calculs de la série CALME la composante d'anisotropie verticale vaut quasiment instantanément -0.2 . Pour les réalisations stables b_{22} fluctuent autour de cette valeur. Les réalisations instables ont une composante d'anisotropie verticale décroissante jusqu'à $t = 9$ puis croissante.

La corrélation zonale-méridionale normalisée est visible sur les courbes bleues claires de la planche 3.23 et 3.24. Pour les réalisations stables elles fluctuent autour de 0 tandis que pour les calculs énergétiquement instables elle se développe positivement. Pour la réalisation INTEROCÉANCALME la composante de corrélation zonale-méridionale normalisée est constante à partir du temps $t = \tau_f$.

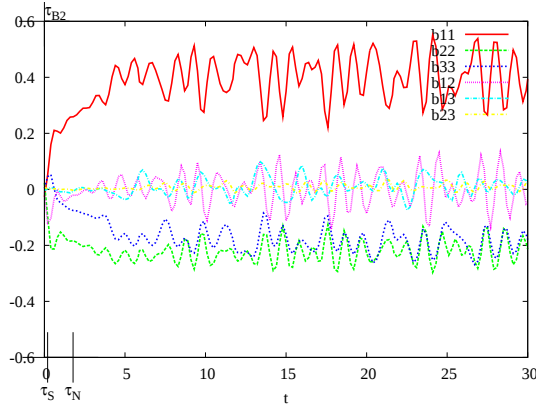
La corrélation zonale-méridionale normalisée est visible sur les courbes roses de la planche 3.23 et 3.24. Même pour les réalisations instables cette composante reste relativement faible. Pour les réalisations stables la composante zonale-verticale normalisée fluctue aux alentours d'une valeur nulle ou sensiblement négative. Pour les cas stables elle reste négative sans osciller mais reste proche de 0.

La corrélation zonale-verticale normalisée est visible sur les courbes jaunes de la planche 3.23 et 3.24. La corrélation méridionale-verticale normalisée a tendance à être négative. Cette corrélation est du même ordre de grandeur que la corrélation zonale-verticale normalisée. Pour les réalisations stables elle fluctue autour d'une valeur négative proche de la valeur 0. Notons que contrairement à la corrélation zonale-verticale nous n'observons pas de forts pics négatifs initiaux pour la corrélation méridionale-verticale.

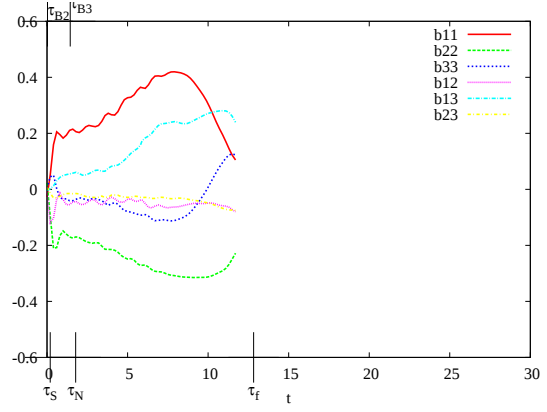
Dans le tableau 3.7 sont résumées les tendances interprétées à partir des faits précédents. Ceci doit être valable dans la limite d'écoulements qui ne sont pas fortement turbulent, de nombre de Richardson et de paramètre de baroclinicité pas trop grand.

	Stable	Instable
Ani. Zona.-Méri. b_{13}	• b_{13} fluctue autour de 0 • $Ri \nearrow \Rightarrow T_{b_{13}} \searrow$	• $b_{13} > 0$
Ani. Vert.-Méri. b_{23}	• b_{23} fluctue autour de 0 • $Ri \nearrow \Rightarrow T_{b_{23}} \searrow$	• $b_{23} \lesssim 0$
Ani.-Vert.-Zona. b_{21}	• b_{23} fluctue autour de 0 • $Ri \nearrow \Rightarrow T_{b_{23}} \searrow$	• $b_{21} \lesssim 0$
Ani.-vert. b_{22}	• $\forall (\epsilon, Ri), b_{22} \lesssim b_{33}$ • Si $Ri \searrow$ alors $\int_{t_A}^{t_F} \sigma_t(b_{22})\sigma_t(b_{33})dt \nearrow$ à ϵ fixé tel que $\epsilon \ll 1$	• $\frac{d}{dt}b_{22} > 0$ dans la phase de croissance de l'énergie

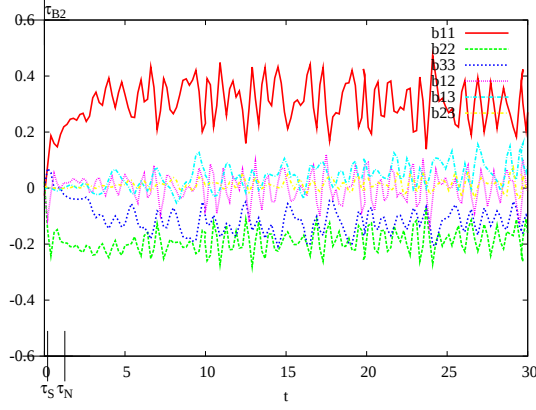
TAB. 3.7 – Dépendances des composantes du tenseur d'anisotropie à différents paramètres d'entrée du système dynamique barocline. L'opérateur σ_t est défini par $\sigma_t(...) = ... - \int_{t_A}^{t_F} ... dt$ où le temps t_A correspond à la fin de la période d'ajustement de l'énergie et t_F est le temps final. La quantité T_q représente la période des oscillations de la quantité q .



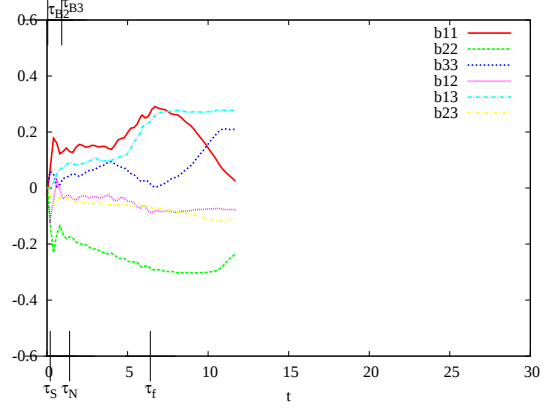
(a) Réalisation MICROATMOCALME définie par $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$



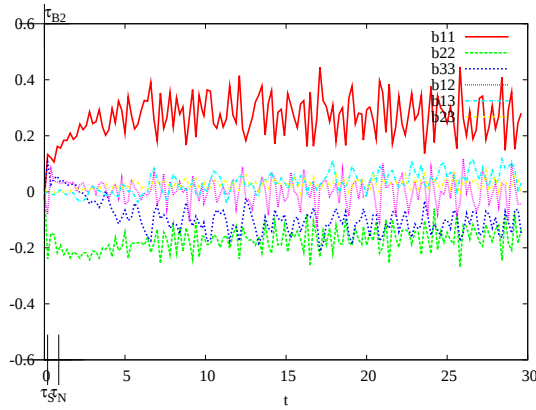
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$



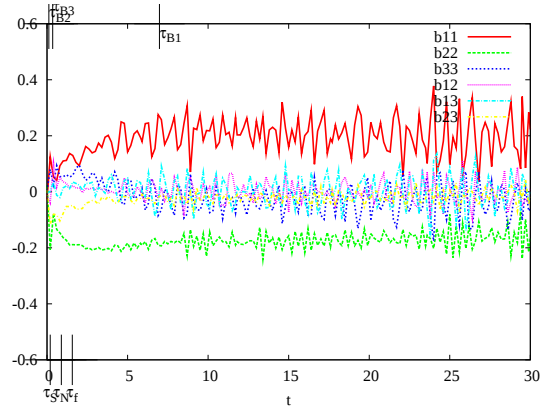
(c) Réalisation INTERATMOCALME définie par $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$

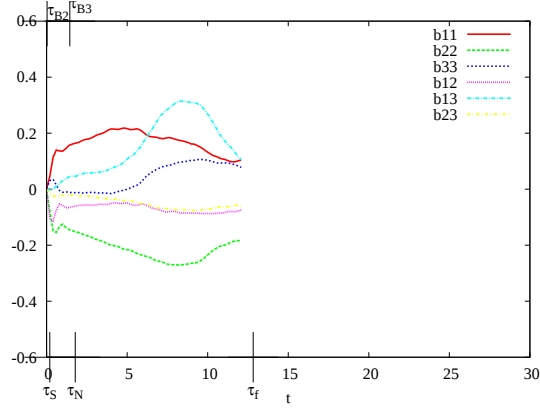


(e) Réalisation SYNOATMOCALME définie par $\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$

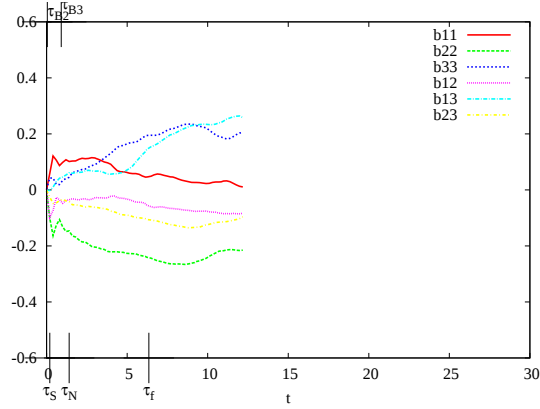


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2 Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$

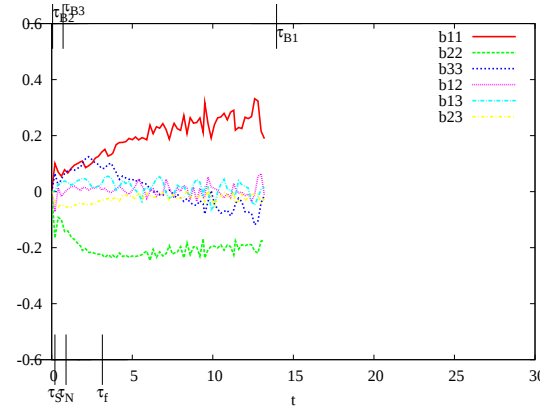
FIG. 3.23 – Évolution du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds définies par $b_{ij} = r_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$ pour la série CALME . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen.



(a) MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(b) INTEROcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(c) SYNOOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$)

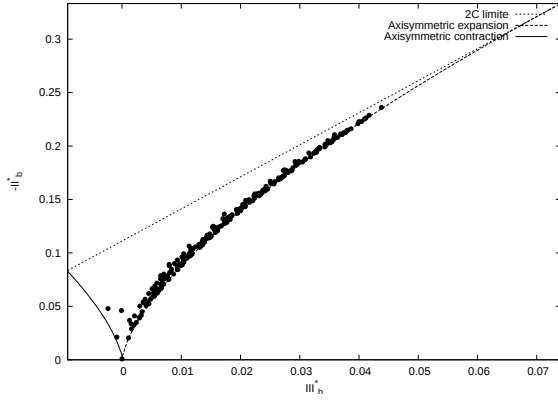
FIG. 3.24 – Évolution du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds définies par $b_{ij} = r_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$ pour la série RENFORCÉE. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen.

Chemin vers l'anisotropie : l'invariant de Lumley

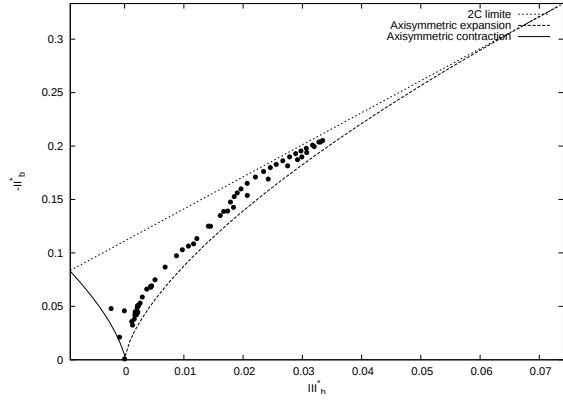
Les invariants de Lumley sont obtenus à partir du tenseur d'anisotropie des composantes de Reynolds précédemment étudiés. Pourquoi Ces deux invariants permettent de caractériser l'état de la turbulence par rapport aux limites bi-composantes, de compression axisymétrique et d'expansion axisymétrique. Sur les planches 3.25 et 3.26 est représentée la valeur des invariants de Lumley pour les calculs de la série GÉOPHYSIQUE . La limite bicomposante est indiquée par la courbe supérieure. La limite d'expansion axisymétrique est indiquée par la courbe de droite et la limite de compression axisymétrique est représentée par la courbe de gauche.

Dans ce paragraphe nous montrerons qu'aucune des réalisations de la série GÉOPHYSIQUE ne se réorganise suivant un écoulement dont la componentialité est bicomposante.

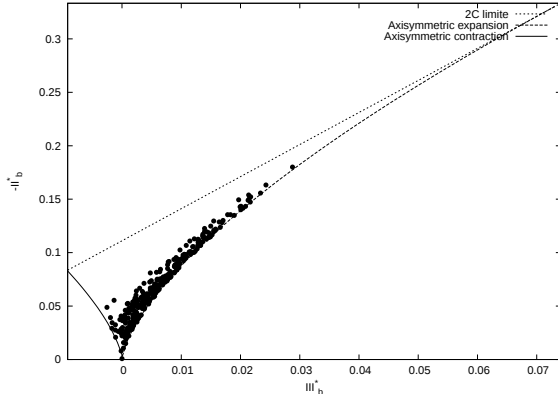
Toutes les réalisations de la série GÉOPHYSIQUE ont au moins un point sur la limite de compression axisymétrique. La réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ emprunte le "chemin" d'une turbulence en compression axisymétrique pour finir dans un état intermédiaire localisé au centre du "triangle". Les calculs avec $\epsilon = 0.2$ côtoient tous la limite de la turbulence isotrope en expansion axisymétrique. La turbulence en expansion axisymétrique peut être obtenue par exemple dans une soufflerie possédant un tube divergeant. La réalisation la plus proche de l'expansion axisymétrique est MICROATMOCALME définie par $\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$. Les seules réalisations qui côtoient la limite bicomposante sont la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ (définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$) et la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ (définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$) mais cela pendant des instants très bref. D'après l'évolution des tenseurs d'anisotropie des figures 3.23(b) et 3.23(d) l'écoulement ne devient pas bicomposante. Notons que le calcul qui s'écarte le plus du point de turbulence isotrope (0,0) est celui de la réalisation MICROATMOCALME . Les "triangles" de Lumley sont des outils élégants mais il est difficile de donner une interprétation de l'évolution car la dépendance temporelle est perdue.



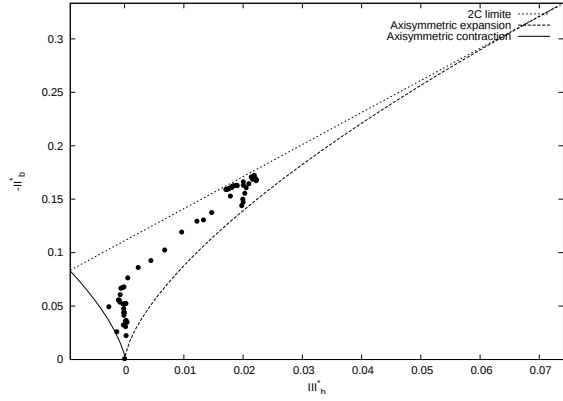
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



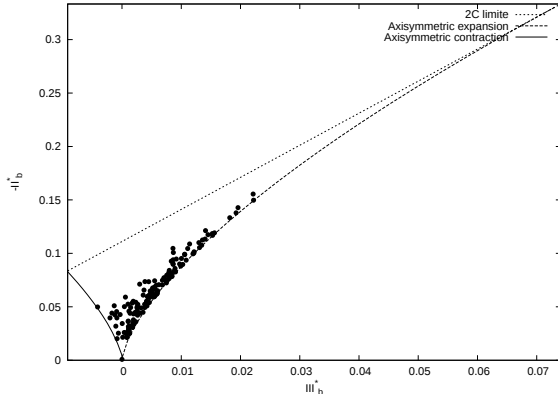
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



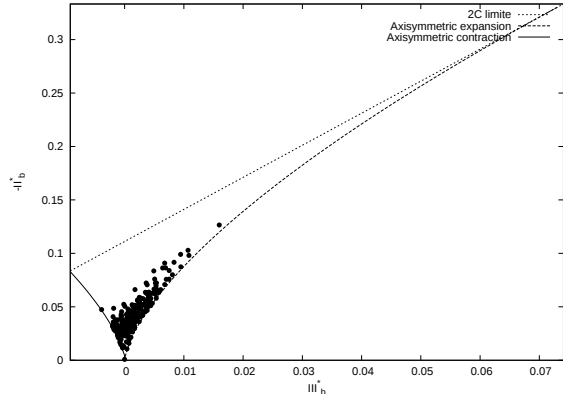
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

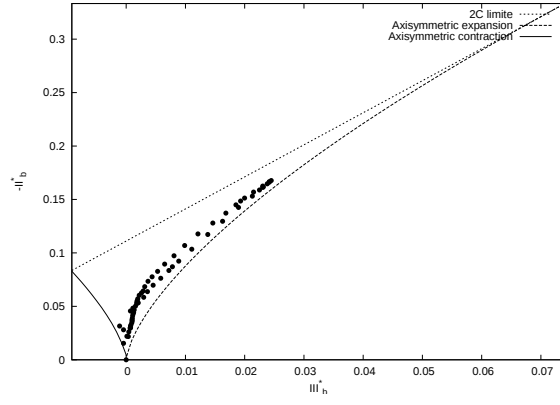


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

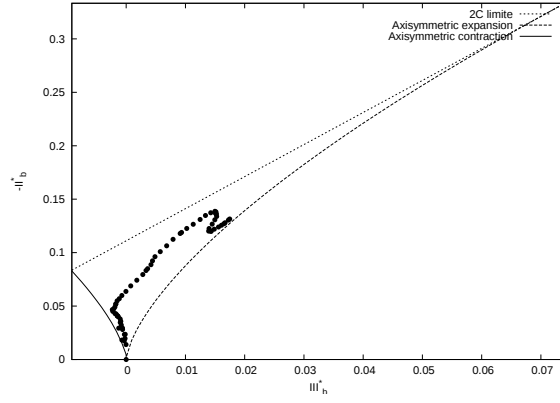


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

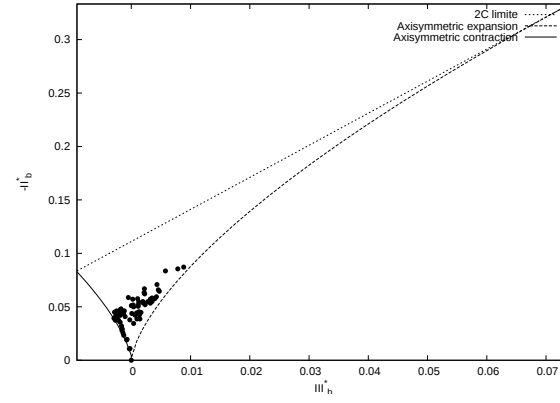
FIG. 3.25 – Invariants de Lumley pour les calculs de la série CALME . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. L'ordonnée est définie par $-II_b^* = \frac{b_{ij}b_{ji}}{2}$. L'abscisse est définie par $III_h^* = \frac{b_{ij}b_{kl}b_{lm}}{3}$. Les limites d'admissibilité sont représentées par un triangle déformé. La turbulence isotrope correspond aux points de coordonnée $O = (0,0)$. En partant du point d'isotropie l'arc de droite correspond à une expansion axisymétrique. Toujours en partant du point d'isotropie l'arc de gauche correspond à une contraction axisymétrique. La limite supérieure représentée par la droite croissante représente le lieu d'une turbulence bicomposante.



(a) Réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(b) Réalisation INTEROcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(c) Réalisation SYNOOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$)

FIG. 3.26 – Invariants de Lumley pour les calculs de la série RENFORCÉE . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. L'ordonnée est définie par $-II_b^* = \frac{b_{ij}b_{ji}}{2}$. L'abscisse est définie par $III_h^* = \frac{b_{ij}b_{ki}b_{lm}}{3}$. Les limites d'admissibilité sont représentées par un triangle déformé. La turbulence isotrope correspond aux points de coordonnée (0,0). En partant du point d'isotropie l'arc de droite correspond à une expansion axisymétrique. Toujours en partant du point d'isotropie l'arc de gauche correspond à une contraction axisymétrique. La limite supérieure représentée par la droite croissante représente le lieu d'une turbulence bicomposante.

Les flux du scalaire normalisés par l'énergie totale

Les fortes décroissances ou croissance d'énergie font que certaines composantes notamment les flux sont difficilement exploitables à partir du tenseur de Reynolds généralisé. Pour cela nous construisons un tenseur qui a l'originalité d'être normalisé par l'énergie totale turbulente. Étant donné que les composantes de vitesse et la composante de flotabilité contribuent toutes à la dynamique de l'écoulement il est logique de prendre l'énergie mécanique turbulente comme quantité de référence et non pas l'énergie cinétique turbulente ou l'énergie potentielle turbulente.

Nous allons montrer que dans les écoulements barocline de la série GÉOPHYSIQUE il y a toujours un flux zonal de flotabilité, cela est probablement le cas quelque soit les paramètres ϵ et Ri strictement positif. Sur les planches 3.27 et 3.28 sont représentés les flux et la variance du scalaire normalisé par l'énergie mécanique turbulente. Sur toutes les figures on observe un flux de flotabilité dans la direction zonale non nul. .

Nous avons vu que dans le chapitre 1 que le modèle de Eady 1949 a un flux vertical nul ce qui est approximativement le cas pour tous les calculs présentés sur les planches 3.27 et 3.28. Pour les cas MICROATMOCALME (voir figure 3.27(a)), INTERATMOCALME (sur la figure 3.27(c)), SYNOATMOCALME (d'après la figure 3.27(e)), SYNOOCÉANCALME (sur la figure 3.27(f)) le flux vertical oscille autour de zéro. Selon T. Gerz et al. (1988, [50]) ce type de comportement dans les écoulements cisailés-stratifiés est caractéristique d'un régime d'onde interne. Pour le cas MICROOCÉANCALME (voir 3.27(b)) et INTEROCÉANCALME (voir 3.27(d)) ce phénomène n'est pas observé. Après une période d'ajustement violente de la composante de flotabilité (restructuration de la partition énergie cinétique turbulente et énergie potentielle turbulente voir les courbes rouges sur les planches 3.27 et 3.28), les courbes oscillent puis aux environs de $t = 8$ les oscillations disparaissent. Cela laisse à penser que les ondes dominent l'écoulement puis ensuite la turbulence. Cette transition peut aussi correspondre à l'augmentation de l'énergie turbulente mécanique que l'on peut observer sur 3.8(d) et 3.8(c). Pour les réalisations de la série RENFORCÉE définie par $Re_\lambda(0) = 66$ avec un nombre de Richardson suffisamment faible il n'est pas observé d'oscillation flagrante sur le flux vertical (voir MICROOCÉANRENFORCÉ sur la figure 3.28(a) et INTEROCÉANRENFORCÉ sur la figure 3.28(b)). Par contre dans le cas SYNOOCÉANRENFORCÉ on aperçoit des oscillations du flux vertical sur la figure 3.28(c). Même avec une turbulence plus importante, si la stratification est suffisante les ondes internes jouent un rôle important dans la dynamique. Pour les cas de turbulence barocline présentés (3.2, 3.3 et 3.4), il n'est pas observé de flux verticale renforçant le gradient moyen de stratification comme c'est le cas dans certaines configurations de turbulence en écoulement stratifié et cisailé (voir T. Gerz et al. 1989 [50], T. Gerz 1994 [48], T. Gerz et al. 1996 [49]). Cela est dû probablement à la valeur unitaire du nombre de Prandtl utilisée pour les simulations.

Le gradient moyen de flotabilité horizontale est positif. La forte flotabilité moyenne est au Sud tandis que la flotabilité moyenne faible est au Nord. Lorsque le flux méridional est positif nous avons une situation de renforcement du gradient moyen de flotabilité. Au contraire lorsque le flux est négatif celui-ci va à l'inverse du gradient, il le descend. On peut voir sur les figures 3.27(a), 3.27(e), 3.27(f) et 3.28(c) que les simulations MICROOCÉANCALME, SYNOATMOCALME, SYNOOCÉANCALME et SYNOOCÉANRENFORCÉ respectivement ont un flux méridional qui semble osciller autour de zéro. Il est difficile de dire s'il s'agit d'un phénomène d'ondes. Pour le calcul INTERATMOCALME il est intéressant de noter que le flux méridional est oscillant autour d'une valeur sensiblement négative. Nous avons à faire à un flux qui descend le gradient moyen. Sur les

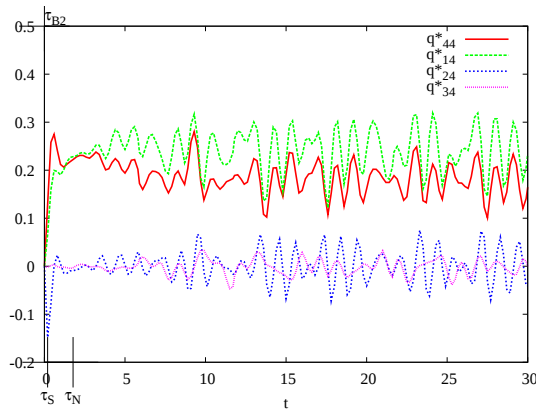
images 3.27(b), 3.27(d), 3.28(a) et 3.28(b) on peut voir que pour les calculs MICROOcéANCALME, INTEROcéANCALME, MICROOcéANRENFORCÉ et INTEROcéANRENFORCÉ le flux est négatif, au moins pour une période initiale. Puis le flux a tendance à remonter et sera positif pour les cas à $Ri = 1$, qu'il soit faiblement turbulent comme INTEROcéANCALME ou moyennement turbulent comme INTEROcéANRENFORCÉ.

Le ratio d'énergie ξ est défini au chapitre 1 par $\xi = \frac{Ep(t)}{Em(t)}$. Il vient $\xi = q_{44}^*$. Le ratio d'énergie de la série GÉOPHYSIQUE est représenté par les courbes rouges des planches 3.27 et 3.28. Le ratio ξ d'énergie oscille autour d'une valeur comprise entre 0.2 et 0.3 pour les réalisations énergétiquement stables. Pour les calculs énergétiquement instables la valeur du ratio est inférieure à 0.3. Pour les réalisations instables au temps $t = 11$ le ratio d'énergie ξ est croissant lorsque $Ri = 0.5$.

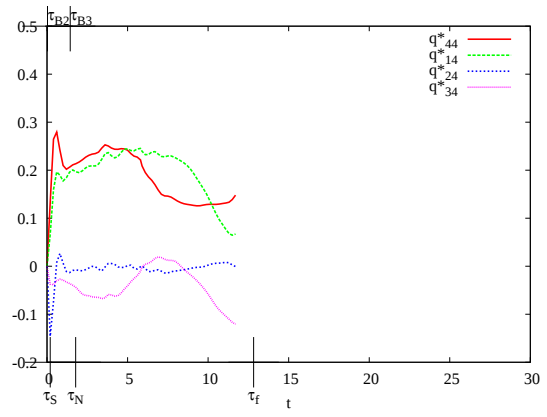
Dans le tableau 3.8 sont interprétées les tendances des flux normalisé du scalaire.

	Stable	Instable
Ratio $q_{44}^* = \frac{Ep}{Em}$	• $Ri \nearrow \Rightarrow m_t(q_{44}^*) \nearrow$ • $\epsilon \nearrow \Rightarrow m_t(q_{44}^*) \nearrow$	• difficile de dégager des tendances
Flux zona. q_{14}^*	• si $Ri < 1$ alors $m_t(q_{14}^*) > m_t(q_{44}^*)$ • si $Ri > 1$ alors $m_t(q_{14}^*) < m_t(q_{44}^*)$ • les ondulations de q_{14}^* correspondent à celles de q_{44}^*	• $\forall (\epsilon, Ri), q_{14}^* > 0$
Flux méri. q_{34}^*	• si $\epsilon \nearrow$ alors $T_{q_{34}^*} \nearrow$ • si $\epsilon \nearrow$ alors $A_{q_{34}^*} \nearrow$	• difficile de dégager des tendances
Flux vert. q_{24}^*	• si $Ri \searrow$ alors $T_{q_{24}^*} \nearrow$	• $m_t(q_{24}^*) \lesssim 0$

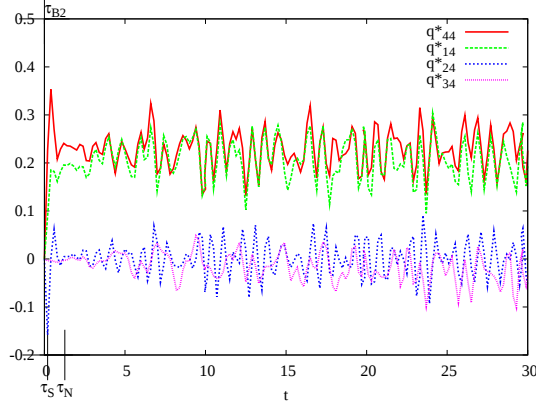
TAB. 3.8 – Dépendances des flux normalisés tenseur à différent paramètres d'entrée du système dynamique barocline. L'opérateur m_t est défini par $m_t(...) = \int_{t_A}^{t_F} ... dt$ où le temps t_A correspond à la fin de la période d'ajustement de l'énergie et t_F est le temps final. La quantité T_q (A_q) représente la période (amplitude) des oscillations de la quantité q .



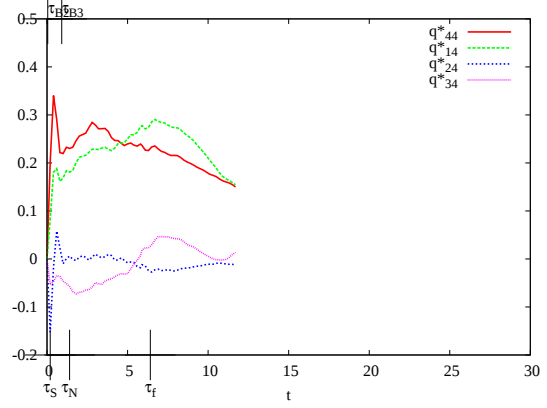
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



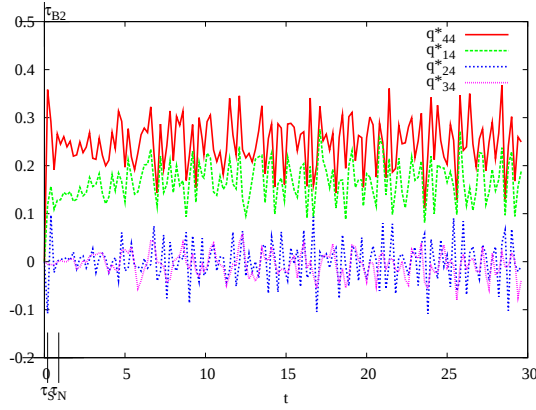
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



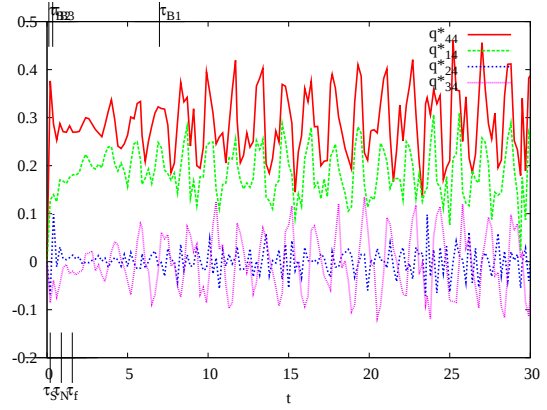
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation (INTEROCÉANCALME) ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

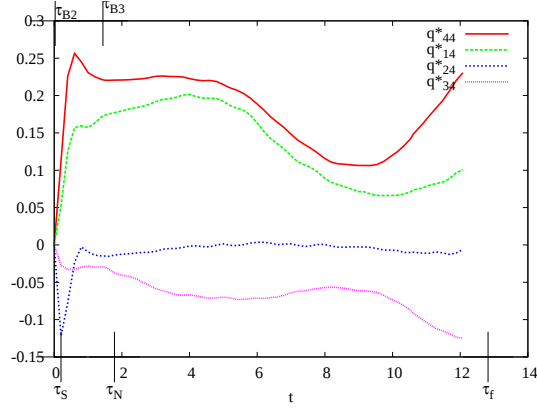


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

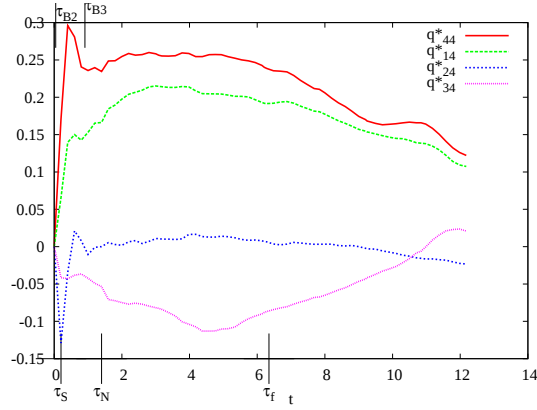


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

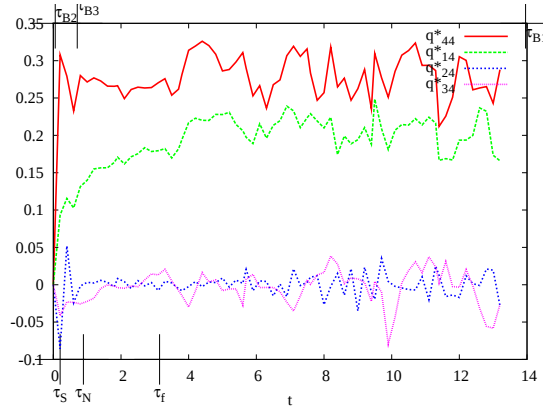
FIG. 3.27 – Évolution de la partie concernant le scalaire du tenseur des contraintes de Reynolds généralisés normalisé par l'énergie totale turbulente. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. La variable de champs généralisé est $\mathbf{q}$ tel que $q_1 = u_1$, $q_2 = u_2$, $q_3 = u_3$ et $q_4 = \frac{1}{N}b$. Le tenseur des contraintes de Reynolds généralisé à un écoulement stratifié et normalisé par l'énergie mécanique turbulente est défini par : $Q_{ij}^*(t) = \frac{\langle q_i q_j \rangle(t)}{2 Em(t)}$



(a) Réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(b) Réalisation INTEROcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$)



(c) Réalisation SYNOOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$)

FIG. 3.28 – Évolution de la partie concernant le scalaire du tenseur des contraintes de Reynolds généralisés normalisé par l'énergie totale turbulente q_{i4}^* pour série RENFORCÉE. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. La variable de champs généralisé est $\mathbf{q}$ tel que $q_1 = u_1$, $q_2 = u_2$, $q_3 = u_3$ et $q_4 = \frac{1}{N}b$. Le tenseur des contraintes de Reynolds généralisées à un écoulement stratifié et normalisé par l'énergie mécanique turbulente est défini par : $q_{ij}^*(t) = \frac{\langle q_i q_j \rangle(t)}{2 Em(t)}$

3.7.2 Les tenseurs non conventionnels de Kassinos, Reynolds et Rogers

Puisque dans la turbulence barocline un grand nombre de structure d'aspect très différente peut être présente il a été calculé des tenseur de structures "non-conventionnels". Les tenseurs de structures de proposé par S.C. Kassinos, W.C. Reynolds et M.M. Rogers sont faciles à obtenir avec les statistiques spectrales implémenté dans la présente thèse et ne demande pas beaucoup de temps pour être implémenté. Il aurait été aussi intéressant de calculer les tenseur de type Cambon, Jacquin et Lubrano (1992, [17]) mais faute de temps cela n'a pas pu être fait. Nous allons commencer par rappeler quelques définitions. Le tenseur spectral de la vitesse est noté E_{ij} et il est défini par

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})E_{ij}(\mathbf{k}) \quad (3.3)$$

Définissons le tenseur $\overline{\overline{\overline{M}}}$ de rang 4 par

$$M_{ijkl} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} E_{ij}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \quad (3.4)$$

Tenseur de dimensionnalité

Le tenseur de dimensionnalité est défini à partir du tenseur d'ordre 4 par

$$D_{ij} = M_{nnij} \quad (3.5)$$

Et le tenseur de dimensionnalité normalisé s'exprime

$$dim_{ij}^* u = \frac{D_{ij}}{D_{ii}} \quad (3.6)$$

On définit de la même façon le tenseur de dimensionnalité normalisé $dim_{ij}^* w$ de vorticité et le tenseur de dimensionnalité $dim_{ij}^* c$ de flotabilité avec le tenseur spectral de vorticité et le tenseur spectral de flotabilité. Dans une turbulence soumise à de faible taux de déformation l'anisotropie de dimensionnalité est faible comparé aux anisotropies de componentialité et aux anisotropies de circulicité.

Tenseur de circulicité

Le tenseur spectral de la vorticité est noté W_{ij} et il est défini par

$$\langle \hat{w}_i(\mathbf{p})\hat{w}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})W_{ij}(\mathbf{k}) \quad (3.7)$$

A partir du tenseur spectral de vorticité on peut définir le tenseur de circulicité

$$F_{ij} = \int_{\mathfrak{e}} k^2 W_{ji}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (3.8)$$

et le tenseur de circulicité normalisé est défini par

$$cir_{ij}^* = \frac{F_{ij}}{F_{ii}} \quad (3.9)$$

Le tenseur de circulicité est représentatif des tourbillons les plus énergétiques aux grandes échelles de vorticité de la turbulence. Par exemple si les grandes échelles de vorticité sont

alignées avec l'axe x_1 alors tous les F_{ij} autres que F_{11} seront nuls. W.C. Reynolds et al. (2000, [111],p4) montrent que l'anisotropie de la circulicité est quasiment permanente même après l'arrêt des déformations de l'écoulement moyen. La somme des tenseurs d'anisotropie de dimensionnalité, circulicité et componentialité est nulle. W.C. Reynolds et al. (2000, [111]) ont expliqué le phénomène "d'anomalie lors d'expansion axisymétrique" observé dans des SND et des expériences. Cette anomalie a pour conséquence d'une part que les déformations lentes sont plus importantes que celles prédit par la limite TDR. Et d'autre part qu'il n'y a pas de retour à l'isotropie : lorsque les contraintes sur l'écoulement moyen sont "éteintes" l'anisotropie continue à croître. Par conséquent le "retour à l'isotropie" n'est pas une hypothèse valide.

Tenseur de stropholysis

Le tenseur de stropholysis est défini par $Q_{ijk} = \epsilon_{ijp} M_{jqp}$. Le tenseur de stropholysis peut servir de générateur des tenseurs de componentialité, de dimensionnalité et de circulicité. La partie symétrique du tenseur de stropholysis ne contribue pas à la génération des tenseurs d'ordre 2 précédemment cité. On définit le tenseur de stropholysis symétrique par $stro_{ijk} = \frac{1}{6} [Q_{ijk} + Q_{jki} + Q_{kij} + Q_{ikj} + Q_{jik} + Q_{kji}]$. Un tenseur de stropholysis non-nul est l'expression de la perte de symétrie de réflexivité des amplitudes spectrales. S.C. Kassinos et al. (2001, [72]) montre que sous une déformation moyenne irrotationnelles le tenseur de stropholysis reste nul (si il l'est initialement). C'est la déformation rotationnelle qui va générer un tenseur de stropholysis non-nul. Dans la turbulence homogène barocline la déformation rotationnelle est issue de la rotation moyenne et du cisaillement (comme imagé par A.A. Townsend [1976, [131],p81] le cisaillement moyen peut être vu comme la superposition d'une rotation moyenne et d'une déformation plane).

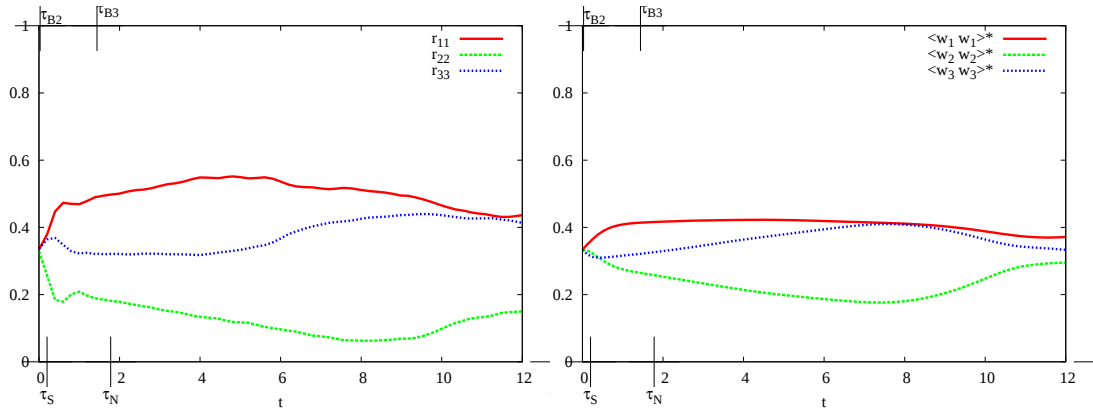
3.7.3 Étude des structures de 3 réalisations

Dans cette section nous allons utiliser les tenseurs proposés ci-dessus pour constater qu'il y a des structures très différentes d'une réalisation à l'autre, qu'il n'y a pas de bidimensionnalisation et que le tenseur de stropholysis (ou un équivalent) devra être pris en compte dans d'éventuelles futures modélisations.

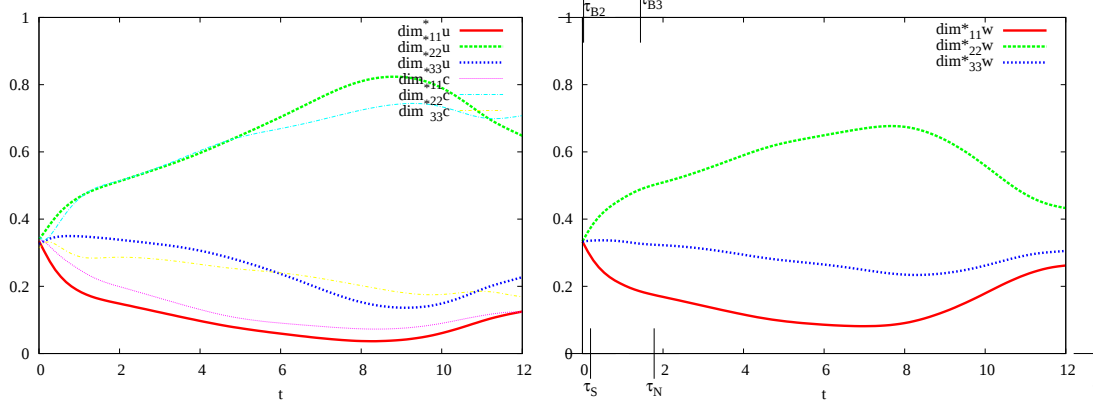
Dans ce qui va suivre nous nous intéresserons à la planche 3.29 et nous montrerons que les structures semblent être un mélange de jets zonaux et des tourbillons. Le tenseur de vorticité représente une moyenne de l'activité tourbillonnaire à toutes les échelles tandis que le tenseur de circulicité représente l'activité tourbillonnaire des grandes échelles énergétiques du mouvement. Les différences entre le tenseur de circulicité et le tenseur de vorticité sont représentatives du décalage entre l'échelle de création de vorticité et les grandes échelles tourbillonnaires. Le fait que la croissance sur le tenseur de vorticité ait lieu à $t \approx 8$ tandis que sur le tenseur de circulicité cela a lieu à $t \approx 9$ peut être interprété comme le temps pour que le transfert d'énergie entre les échelles de création et les grandes échelles s'effectue. En faisant la synthèse des figures de la colonne de gauche de la planche 3.29 on peut s'apercevoir qu'au temps $t \approx 9$ la turbulence est dans un état de forte cohérence zonale car $dim_{11}u \approx 0$. Le fait que $r_{11} \approx 0.5$ et que $cir_{11}^* \approx 0.5$ indique que les structures sont un intermédiaire entre des jets zonaux et de tourbillons. On peut faire la même interprétation des structures dans la direction méridionale que dans la direction zonale. Pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ le tenseur de stropholysis doit jouer un rôle important car il n'est plus nul aux alentours de $t = 6$ (voir 3.29(f)).

Nous montrerons que pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ les structures sont de type hélicoïdal avec un axe orienté suivant la direction zonale. Notons une différence majeur : les auto-corrélations de vorticité se rapprochent d'une équipartition vers $t = 12$ tandis que le tenseur de circulicité ne le fait pas. Ceci est cohérent avec les observations de W.C. Reynolds et al. (2000, [111]) qui ont remarqué que le tenseur de circulicité ne revenait pas à l'isotropie tandis que les tenseurs de dimensionnalité et de componentialité revenaient vers l'isotropie. La colonne de gauche de la planche 3.30 indique une forte cohérence zonale vers $t = 8$. Au temps $t = 8$ la circulicité $cir_{11}^* \approx 0.6$ et la componentialité $r_{11} \approx 0.4$ ce qui indique que les structures sont de type hélicoïdale avec un axe orienté suivant la direction zonale et à dominance tourbillonnaire. La dimensionnalité de vorticité indique une perte de cohérence vers $t = 8$ car les composantes tendent à se rejoindre (voir 3.30(d)). Le tenseur de stropholysis symétrique le plus important de trois réalisations est obtenu pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ . La composante la plus grande en valeur absolue est la composante $stro_{112}$.

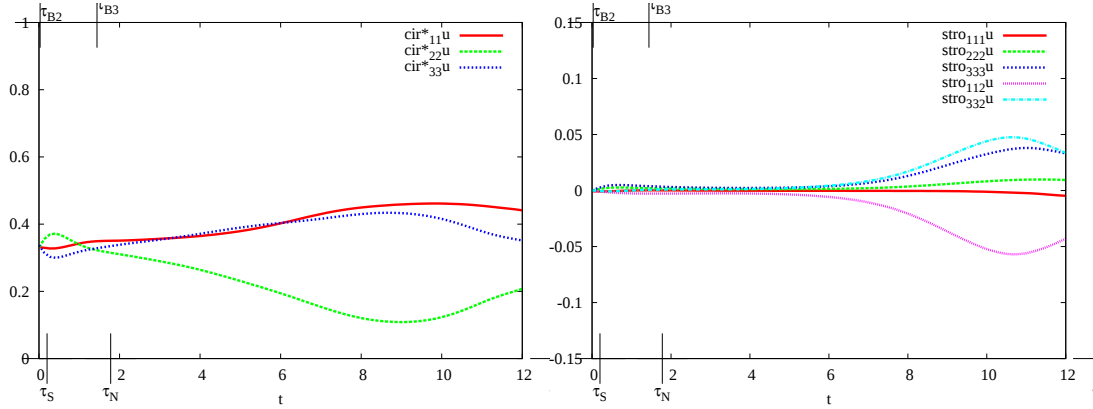
Maintenant nous allons voir que pour la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ les structures, contrairement aux deux autres réalisations étudiées précédemment, sont à dominance jetal et non tourbillonnaire. Pour cette réalisation la vorticité verticale est plus faible que pour les autres réalisations (voir 3.31(b)). La circulicité bien que affectée par les ondes en présence a le même comportement que pour les réalisations précédentes (voir 3.31(e)). Par exemple pour la circulicité verticale il y a croissance, décroissance puis croissance et inversement pour les deux autres composantes. La dimensionnalité de vorticité zonale est quasiment nulle aux temps $t = 4$ et elle le reste (voir 3.31(d)). En s'intéressant aux figures de gauche de la planche 3.31 on peut voir que la dimensionnalité de vitesse verticale et méridionale se rapproche au temps $t = 12$ tandis que la dimensionnalité zonale est nulle. La componentialité zonale ainsi que la circulicité zonale étant non-nulle cela indique que les structures longitudinales sont des tourbillons hélicoïdaux dont l'axe est orienté dans la direction zonale. La valeur de componentialité zonale $r_{11} = 0.6$ et de circulicité zonale $cir_{11}^* = 0.4$ indique que les structures sont à dominance jetal et non tourbillonnaire. Contrairement aux deux autres réalisations la stropholysis est quasiment nulle pour cette réalisation. Le tenseur de stropholysis symétrique est toutefois non nul sur les 2 premières secondes du calcul.



(a) componentialité dimensionné de vitesse (b) componentialité adimensionné de vorticité



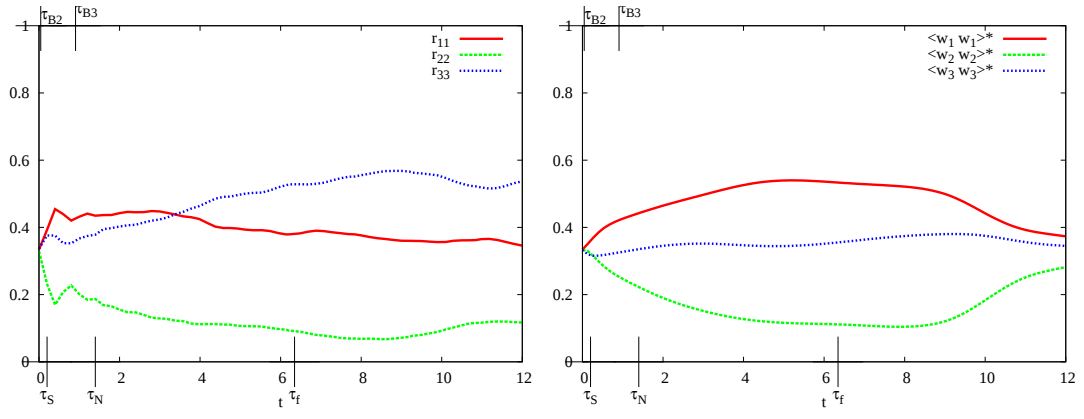
(c) dimensionnalité adimensionné de vitesse (d) dimensionnalité adimensionné de vorticité



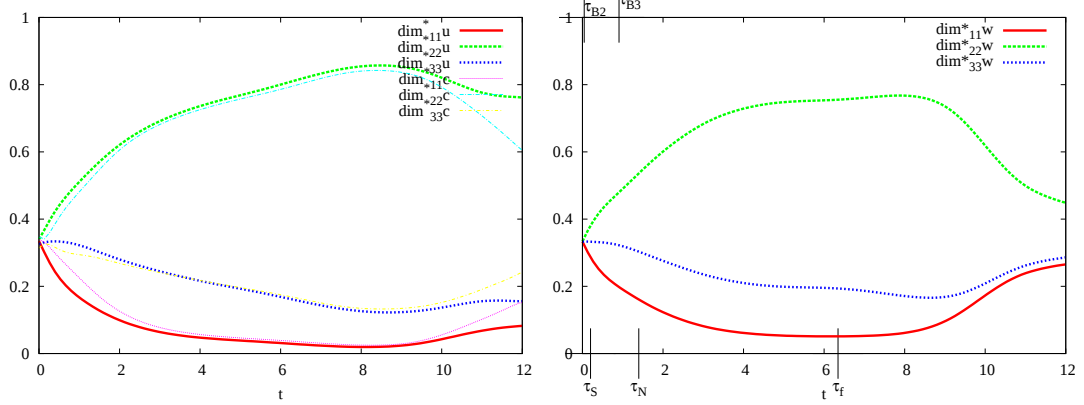
(e) circulicité adimensionné

(f) stropholysis adimensionné

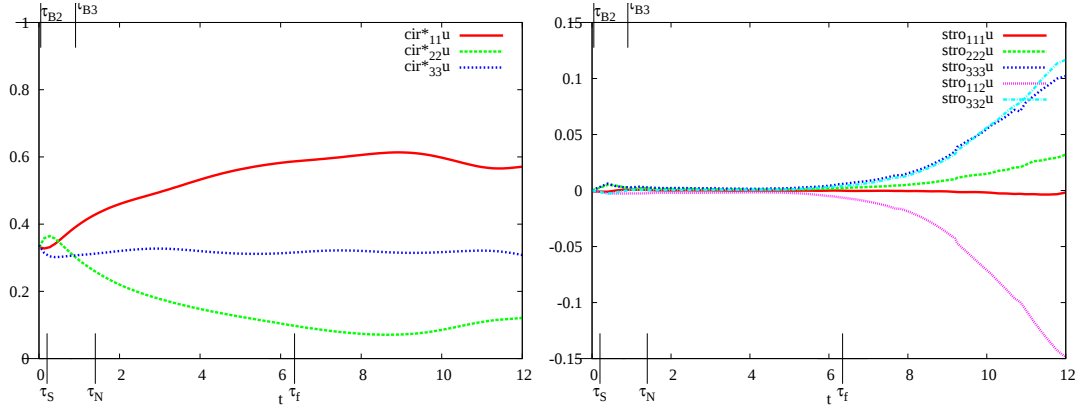
FIG. 3.29 – Tenseurs de structures de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Chaque image représente l'évolution d'un tenseur de structure. De gauche à droite et de haut en bas il y a la componentialité adimensionnée de vitesse (r_{ij}), la componentialité adimensionnée de vorticité ($\langle w_i w_j \rangle^*$), la dimensionnalité adimensionnée de vitesse ($dim^*_{ij}u$), la dimensionnalité adimensionnée de vorticité ($dim^*_{ij}w$), la circulicité adimensionnée ($cir^*_{ij}u$) et la stropholysis ($stro_{ijk}u$). Le tenseur spectral de la vitesse est noté E_{ij} et il est défini par $\langle \hat{u}_i(\mathbf{p})\hat{u}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})E_{ij}(\mathbf{k})$. Le tenseur spectral de la vorticité est noté W_{ij} et il est défini par $\langle \hat{w}_i(\mathbf{p})\hat{w}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})W_{ij}(\mathbf{k})$. La componentialité adimensionnée de vitesse est définie par $r_{ij} = \frac{\int_{\mathcal{C}} E_{ij}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} E_{ii}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}$. La componentialité adimensionnée de vorticité est définie par $\langle W_i w_j \rangle^* = \frac{\int_{\mathcal{C}} W_{ij}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} W_{ii}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vitesse est définie par $dim^*_{ij}u = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ij}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ii}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vorticité est définie par $dim^*_{ij}w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ij}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ii}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}$. La circulicité adimensionnée est définie par $dim^*_{ij}w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ji}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ii}(\mathbf{k})d\mathbf{k}}$. La stropholysis est définie par $stro_{ijk}u = \frac{1}{6}(Q_{ijk} + Q_{jki} + Q_{kij} + Q_{ikj} + Q_{jik} + Q_{kji})$ où $Q_{ijp} = \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{imn} \frac{k_n k_j}{k^2} E_{mp}(\mathbf{k})d\mathbf{k}$.



(a) componentialité adimensionné de vitesse (b) componentialité adimensionné de vortacité



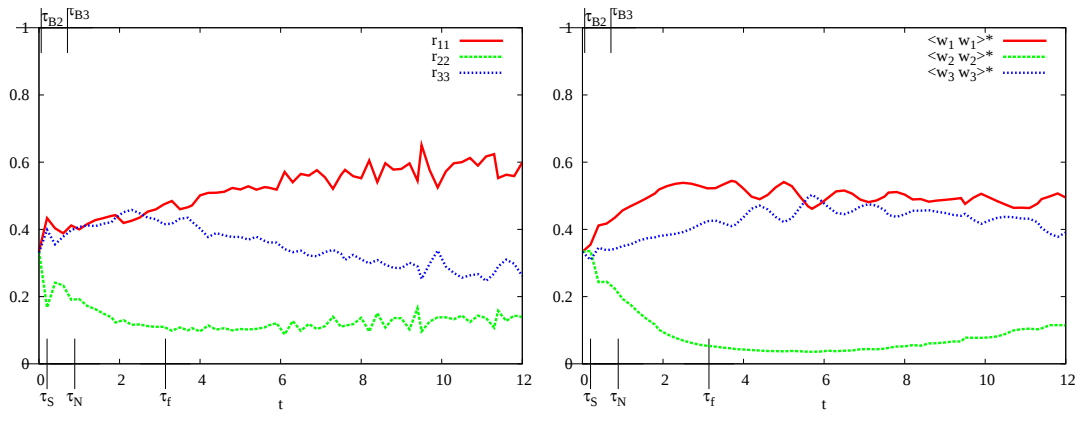
(c) dimensionnalité adimensionné de vitesse (d) dimensionnalité adimensionné de vortacité



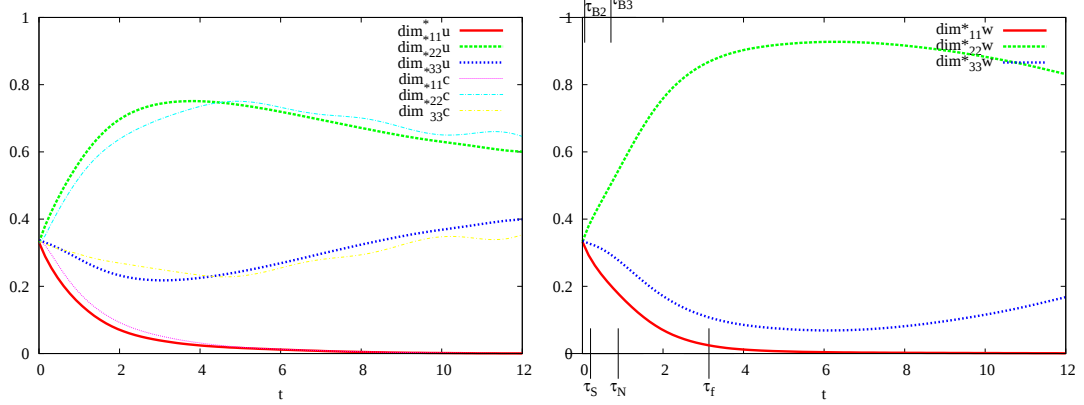
(e) circulicité adimensionné

(f) stropholysis adimensionné

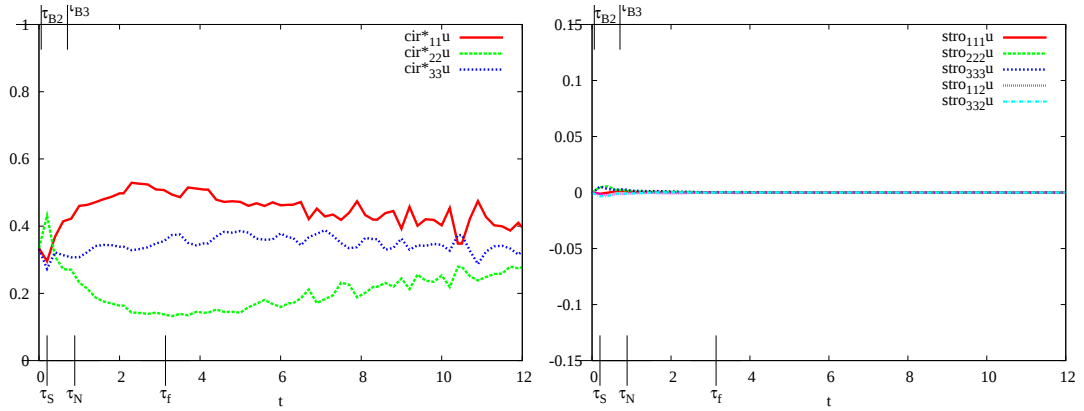
FIG. 3.30 – Tenseurs de structures de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Chaque image représente l'évolution d'un tenseur de structure. De gauche à droite et de haut en bas il y a la componentialité adimensionnée de vitesse (r_{ij}), la componentialité adimensionnée de vortacité ($\langle w_i w_j \rangle^*$), la dimensionnalité adimensionnée de vitesse ($\dim_{ij}^* u$), la dimensionnalité adimensionnée de vortacité ($\dim_{ij}^* w$), la circulicité adimensionnée ($\text{cir}_{ij}^* u$) et la stropholysis ($\text{stro}_{ijk} u$). Le tenseur spectral de la vitesse est noté E_{ij} et il est défini par $\langle \hat{u}_i(\mathbf{p}) \hat{u}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) E_{ij}(\mathbf{k})$. Le tenseur spectral de la vortacité est noté W_{ij} et il est défini par $\langle \hat{w}_i(\mathbf{p}) \hat{w}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) W_{ij}(\mathbf{k})$. La componentialité adimensionnée de vitesse est définie par $r_{ij} = \frac{\int_{\mathcal{C}} E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} E_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La componentialité adimensionnée de vortacité est définie par $\langle w_i w_j \rangle^* = \frac{\int_{\mathcal{C}} W_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vitesse est définie par $\dim_{ij}^* u = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vortacité est définie par $\dim_{ij}^* w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La circulicité adimensionnée est définie par $\dim_{ij}^* w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ji}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La stropholysis est définie par $\text{stro}_{ijk} u = \frac{1}{6}(Q_{ijk} + Q_{jki} + Q_{kij} + Q_{ikj} + Q_{jik} + Q_{kji})$ où $Q_{ijp} = \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{imn} \frac{k_n k_j}{k^2} E_{mp}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$.



(a) componentialité adimensionné de vitesse (b) componentialité adimensionné de vorticité



(c) dimensionnalité adimensionné de vitesse (d) dimensionnalité adimensionné de vorticité



(e) circlicit  adimensionné

(f) stropholysis adimensionné

FIG. 3.31 – Tenseurs de structures de la réalisation SYNOOCEANRENFORCE  . Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Chaque image représente l'évolution d'un tenseur de structure. De gauche à droite et de haut en bas il y a la componentialité adimensionnée de vitesse (r_{ij}), la componentialité adimensionnée de vorticité ($\langle w_i w_j \rangle^*$), la dimensionnalité adimensionnée de vitesse ($dim_{ij}^* u$), la dimensionnalité adimensionnée de vorticité ($dim_{ij}^* w$), la circlicit  adimensionnée ($cir_{ij}^* u$) et la stropholysis ($stro_{ijk} u$). Le tenseur spectral de la vitesse est noté E_{ij} et il est défini par $\langle \hat{u}_i(\mathbf{p}) \hat{u}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) E_{ij}(\mathbf{k})$. Le tenseur spectral de la vorticité est noté W_{ij} et il est défini par $\langle \hat{w}_i(\mathbf{p}) \hat{w}_j(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) W_{ij}(\mathbf{k})$. La componentialité adimensionnée de vitesse est définie par $r_{ij} = \frac{\int_{\mathcal{C}} E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} E_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La componentialité adimensionnée de vorticité est définie par $\langle W_i w_j \rangle^* = \frac{\int_{\mathcal{C}} W_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vitesse est définie par $dim_{ij}^* u = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 E_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La dimensionnalité adimensionnée de vorticité est définie par $dim_{ij}^* w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^2 W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La circlicit  adimensionnée est définie par $dim_{ij}^* w = \frac{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ji}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\int_{\mathcal{C}} k^{-2} W_{ii}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}$. La stropholysis est définie par $stro_{ijk} u = \frac{1}{6}(Q_{ijk} + Q_{jki} + Q_{kij} + Q_{ikj} + Q_{jik} + Q_{kji})$ où $Q_{ijp} = \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{imn} \frac{k_n k_j}{k^2} E_{mp}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$.

3.8 Localisation des valeurs intenses

Dans cette section nous allons nous intéresser aux valeurs maximums de la vitesse, la vorticité et d'autres valeurs comme l'hélicité. Le but de cette section est éventuellement de trouver des critères pour paramétrer les événements intenses dans les écoulements géophysiques. Dans ce qui va suivre nous allons regarder le maximum de 4 quantités. D'abord le maximum d'énergie cinétique. Puis le maximum d'ensrophie. Par la suite nous nous intéresserons aux maximums de densité d'hélicité et enfin aux maximums de densité d'hélicité horizontale. Nous montrerons que ce n'est pas les réalisations les plus énergétiques qui ont les plus grands maximums mais les réalisations aillant un nombre de Richardson le plus faible. Sur la figure 3.32(a) est représenté le maximum sur le cube de turbulence du produit de vitesse. Ce maximum est décroissant pour les réalisations stables (courbe rouge et fuchsia) et croissant pour les réalisations instables (courbe verte et bleues). Pour les réalisations instables au temps $t = 12$ ce maximum est de ≈ 0.2 tandis que pour les réalisations instables il est de l'ordre de ≈ 40 . Pour la réalisation SYNOcéANCALME Entre $t = 6$ et $t = 12$ on peut distinguer la présence de phénomènes oscillants. Pour les réalisations instables le maximum au temps $t = 12$ dépasse la valeur du maximum initial. Nous avons vu précédemment que le calcul le plus énergétique de la série RENFORCÉE a été la réalisation INTERocéANRENFORCÉ (voir la courbe orange sur la figure 3.7) ici c'est la réalisation MICROcéANRENFORCÉ qui fait apparaître les valeurs les plus intenses.

Le maximum d'ensrophie sur le cube est visible sur la figure 3.32(b). J.R. Herring et al. (1982, [58]) montrent avec des simulations numériques directes et des modélisations DIA que l'évolution du maximum d'ensrophie augmente lorsque le nombre de Reynolds augmente, c'est ce qui est observé sur la figure 3.32(b) pour les réalisations SYNOcéANCALME et SYNOcéANRENFORCÉ. Au cours de l'évolution temporelle l'écart entre le maximum d'ensrophie de la réalisation SYNOcéANCALME et SYNOcéANRENFORCÉ reste d'environ deux décades. Le maximum d'ensrophie pour les réalisations énergétiquement instables vaut approximativement $2 \cdot 10^5$ au temps $t = 12$.

Si on définit la densité d'hélicité par

$$h = u_i w_i \quad (3.10)$$

l'hélicité s'exprime

$$H = \int_V h \, d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

de la même sorte on peut définir la densité horizontal d'hélicité

$$h_{\perp} = u_1 w_1 + u_3 w_3 \quad (3.12)$$

l'hélicité horizontale s'exprime

$$H(x_1, x_2)_{\perp} = \int L x_3 h_{\perp} dx_3 \quad (3.13)$$

La notion d'hélicité horizontale est utilisée pour prédire le développement des tornades dans les cumulonimbus. Dans ce cas l'intégration vertical est limitée par la base du nuage et la vitesse utilisée est la vitesse relative à la vitesse du nuage [137].

Le maximum d'hélicité est visible sur la figure 3.32(c). Pour les réalisations stables au cours de l'évolution la différence entre les maximums d'hélicité tend à diminuer. Pour les réalisations instables l'hélicité initiale est de 900 et l'hélicité finale de l'ordre de 2000.

La mesure de l'hélicité horizontale ("storm tracking helicity") est utile pour la détection des tornades et autres événements intenses. Dans les SND homogène de la série GÉOPHYSIQUE il n'y a pas de différences significative entre l'hélicité horizontale et l'hélicité des figures 3.32(c) et 3.32(d).

En conclusion les événements les plus intenses semblent être liés aux réalisations aillant le plus faible nombre de Richardson et non les réalisations les plus énergétiques. Par contre les maximums de vitesses, de vorticités et d'hélicités semblent fortement liée et avoir la même dépendance aux niveaux des paramètres.

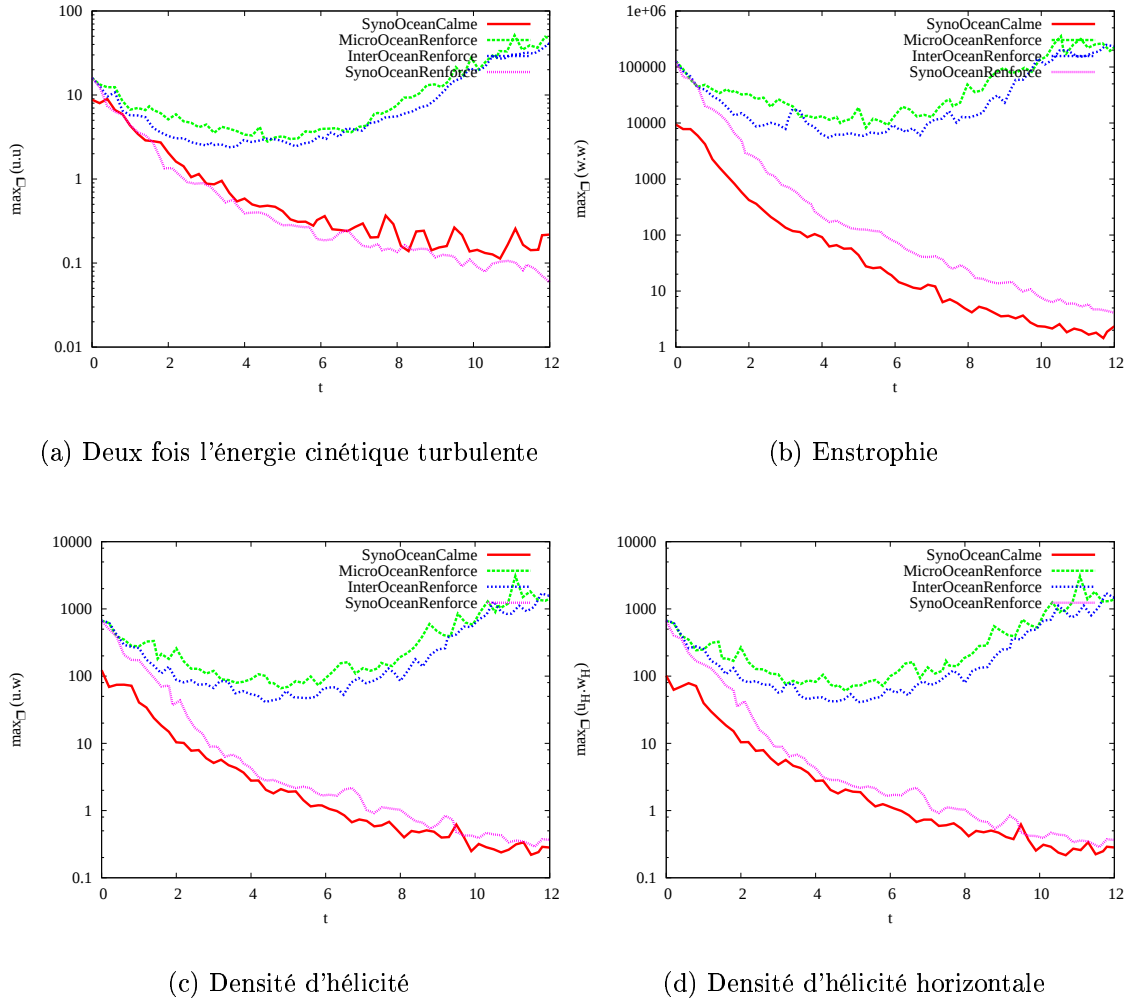


FIG. 3.32 – Évolution de valeurs maximums comprises dans le cube tri-périodique pour des calculs de la série OCEAN . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. De gauche à droite et de haut en bas les images représentées : le maximum de deux fois l'énergie cinétique turbulente ($\max_{\square}(uu) = \max_{x \in \mathbb{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$), le maximum d'enstrophie ($\max_{\square}(ww) = \max_{x \in \mathbb{T}}(\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}(\mathbf{x}, t))$), le maximum de densité d'hélicité ($\max_{\square}(UW) = \max_{x \in \mathbb{T}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}(\mathbf{x}, t))$), le maximum de la densité d'hélicité obtenu par projection de la vitesse dans le plan horizontal est défini par ($\max_{\square}(u_H w_H) = \max_{x \in \mathbb{T}}(\mathbf{u}^H(\mathbf{x}, t)\mathbf{w}^H(\mathbf{x}, t))$) où $u_i^H = \delta_{i1}u_1 + \delta_{i3}u_3$ et $w_i^H = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}u_i^H$ (rappelons que le repère utilisé dans les SND à la direction verticale suivant $\mathbf{x}_2$).

3.9 Développement préférentiel : statistiques d'ordre 3 et 4

Dans cette section il est étudié les skewness et les flatness des calculs de la série RENFORCÉE définie par $Re_\lambda(0) = 66$. Le but de cette section est double. D'abord il s'agira de cerner les développements préférentiels, par exemple de type cyclone ou anticyclone. Ensuite il sera question de caractériser dans quelle situation les événements sont les plus intenses.

3.9.1 Statistique d'ordre 3 : skewness

En turbulence isotrope le skewness est une mesure de la non linéarité de l'écoulement. Pour N.N. Mansour et A.A. Wray il mesure le taux d'épuisement du terme de transfert non linéaire lorsque le nombre de Reynolds diminue (1994, [84], p811, C). D'un point de vue probabiliste le skewness mesure le décalage vers la droite ou vers la gauche de la fonction de densité de probabilité. En turbulence isotrope c'est généralement le skewness des dérivées de vitesses qui est étudié. Dans la présente thèse il est étudié le skewness des composantes de vitesses ainsi que le skewness des composantes de vorticité.

Skewness des composantes de vitesse

Dans cette section nous allons étudier le skewness des composantes de vitesses. Bien que les skewness dans chaque direction soit fortement différent on peut conjecturer que les skewness de vitesse des réalisations stable sont bien plus fluctuant que les skewness des réalisations instables.

Le skewness de la composante zonale est visible sur la figure 3.33(a). Les skewness de vitesse zonale des réalisations instables restent proches de 0. Pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$ le skewness de vitesse zonale a tendance à être négatif. Pour la réalisation stable le skewness de vitesse zonale fluctue autour de 0 avec de pics de grande amplitude. Ces pics ont tendance à être de plus en plus grand. Le skewness de vitesse zonale de la réalisation stable est celui qui a des valeurs les plus grandes. Le skewness de la composante méridionale est visible sur la figure 3.33(c). Le skewness de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est celui qui reste le plus proche de 0. Le skewness de vitesse méridionale de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ a de fortes valeurs positives et négatives mais ne fluctue pas rapidement comme celui de la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ. Le skewness de la composante zonale est visible sur la figure 3.33(e). Le skewness de vitesse verticale de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ sont très proches jusqu'à $t \approx 7$. La réalisation stable a plus de fluctuation que les réalisations instables.

Skewness des composantes de vorticité

Maintenant nous allons nous intéresser aux skewness de vorticité et montrer entre autres que la tendance des écoulements de turbulence baroclines tri-dimensionnelle contient plus de structures cycloniques que de structures anticycloniques.

Le skewness de la composante zonale est visible sur la figure 3.34(a). Le skewness de la composante zonale de vorticité est globalement positif pour toutes les réalisations de la série RENFORCÉE. La réalisation qui a le plus fort skewness de vorticité zonale est celle

de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$. À $t = 12$ la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ a un skewness de vorticité zonale qui commence à être faiblement négatif. Le maximum de vorticité zonale est atteint vers $t \approx 9$ pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ et vers $t \approx 9.5$ pour la réalisation INTER-OCÉANRENFORCÉ. Le skewness de la composante méridionale est visible sur la figure 3.34(c). Les valeurs les plus faibles sont obtenues pour la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ. Le skewness de la composante de vorticité méridionale est négatif pour tous les calculs de la série RENFORCÉE. La valeur la plus négative est obtenue pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ à $t \approx 9$ avec comme valeur ≈ -1.4 . Cette valeur est supérieure à celle obtenue par A. Pumir et B.I. Shraiman (1995, [108]) qui trouve un skewness de vorticité transverse de l'ordre de -0.54 dans leur simulation numérique directe de turbulence homogène quasi-statistiquement stationnaire. La différence peut être expliquée par l'influence de l'effet barocline dans la présente simulation. En tous cas les valeurs trouvées dans la présente thèse sont cohérentes avec les valeurs de A. Pumir et B.I. Shraiman car le skewness de composante de vorticité méridionale est sûrement grandement influencé par le cisaillement moyen dans les cas baroclines et les cas cisailé-pur. Le skewness de la composante verticale est visible sur la figure 3.34(e). Le skewness de la composante de vorticité verticale est particulièrement important en géophysique. Ce skewness donne une information sur la prépondérance de cyclone par rapport aux anticyclones et inversement. Les explications sur la prépondérance de cyclones par rapport aux anticyclones aux latitudes moyennes de la circulation atmosphérique ne sont pas claires. Certains comme N. Kukharkin et S.A. Orszag (1996, [74]) ont étudié le skewness de vorticité pour des simulations 2D dans le β -plan avec les équations de Charney-Hasegawa-Mima généralisé. Ils trouvent un skewness clairement négatifs de l'ordre de -3 lorsque $\frac{t}{\tau_0} = 40$. Aussi J.Y.-K. Cho et L.M. Polvani (1996, [21]) trouve des skewness de vorticité négatif (de l'ordre de -2) décroissants dans leur simulation numérique sur une sphère. Ces deux derniers résultats sont difficilement comparables avec la présente étude car ils sont grandement influencés par l'effet β qui n'est pas présent dans notre étude. La force de rotation semble bien souvent conduire à des skewness de vorticité positif. À ce sujet, C. Morize et al. (2005, [93]) ont fait des expériences de turbulence en décroissance soumise à une rotation en bloc. Ils trouvent un skewness de vorticité positif qui indique la prédominance des cyclones sur les anticyclones. Aussi, F. Moisy et J. Sommeria (2005, [89]) trouvent des skewness de vorticité positifs dans leurs expériences en cuve tournante. Dans une simulation en canal avec les équations de Boussinesq S. Legg et J.C. McWilliams (2001, [78]) étudient la dépendance de l'évolution du skewness de vorticité aux conditions initiales. Il trouve globalement des skewness de vorticité positifs. G. Lapeyre et I.M. Held (2004, [76]) dans une simulation 2.2D où il est inclus des effets diabatiques trouvent des skewness de vorticité négatifs dans la couche inférieure et positifs dans la couche supérieure. Pour revenir aux écoulements sur une sphère, Y. Kitamura et Y. Matsuda (2004, [73]) trouvent un skewness de vorticité positif dans l'hémisphère Nord avec une simulation numérique sur une sphère. Il envisage le cas barotrope et le cas barocline et confirme la prédominance des cyclones par rapport aux anticyclones. Le cas M.S. Miesch (2003, [88]) est très intéressant, avec une simulation sur une sphère modélisant la tachocline solaire (mais sans champ magnétique), il trouve des skewness positifs ou négatifs selon le forçage qu'il utilise. Pour un forçage aléatoire dans toutes les directions le skewness de vorticité est négatif. Pour un forçage de type cisaillement le skewness de vorticité est positif (du même signe que celui trouvé dans la présente thèse). Dans les deux cas lorsque la rotation augmente et que la stratification diminue la valeur absolue du skewness de vorticité

augmente. Même dans des configurations complexes de type jets le skewness de vortacité vertical est positif. E. Garnier (1996, [46],p112) avec une simulation numérique de jets baroclines trouve des skewness de vortacité verticaux positifs. Pour le cas de E. Garnier on peut relier les écoulements de type jets à un forçage de type cisaillement comme dans cas de M.S. Miesch. Globalement les skewness de la composante verticale que l'on peut voir sur la figure 3.34(e) sont positifs si l'on exclu les cas compliqués de dynamique sur la sphère entière. Mais même dans les simulations sur une sphère on peut aboutir, et heureusement pour expliquer la dynamique terrestre, à la prédominance des cyclones. Contrairement au skewness de vortacité précédemment étudié ce n'est pas le skewness de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ qui est maximum mais celui de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ. Le pic du skewness de la composante de vortacité verticale est atteint pour $t = 9.5$ avec une valeur de l'ordre de 0.6. Le skewness maximum d'environ 0.6 trouvé dans la présente étude est cohérent avec de nombreuses études antérieures. On peut penser que la valeur du skewness est fortement influencé par le type de forçage et que un forçage par un mouvement moyen de type écoulement cisailé conduit à la prédominance des cyclones par rapport aux anticyclones.

3.9.2 Statistique d'ordre 4 : kurtosis

D'un point de vue probabiliste le kurtosis (ou flatness) mesure le degré d'écrasement "des branches" de la fonction de densité de probabilité. D'un point de vue physique une turbulence intermittente avec des événements extrêmes a une forte valeur de kurtosis. M. Farge et al. (2000, [38]) ont évalué des "flatness" de vitesse de 2,9 et des "flatness" de vortacité de 8,7 pour de la turbulence isotrope homogène ce qui est cohérent avec nos valeurs initiales de flatness (> 6 pour la vortacité et $< 3,5$ pour la vitesse). Les différences résident dans les conditions initiales et l'histoire de l'écoulement isotrope considéré. Dans cette section nous montrerons que les flatness de vitesse et de vortacité indique que la présence de "micro-tornade" fortement localisé en temps est envisageable.

Flatness des composantes de vitesse

Nous montrons que les réalisations instables font apparaître à un instant données une gamme de vitesses verticales très étendue. Le flatness de la composante zonale est visible sur la figure 3.33(b). Le flatness des 3 réalisations reste groupé autour de la valeur 3. Le flatness le plus fluctuant est celui de la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ mais les amplitudes des fluctuations sont bien plus petites que celles des fluctuations de skewness de la composante zonale de vitesse. Le flatness de la composante zonale le plus fort est obtenu pour la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ en $t \approx 12$. Le flatness le moins fort est obtenu pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ en $t \approx 9.8$. Les flatness de la composante méridionale a globalement la même allure que les flatness de la composante zonale. Pour toutes les réalisations le flatness de la composante méridionale est de l'ordre de ≈ 3 . Le flatness de la composante méridionale le plus faible est obtenu pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ en $t \approx 11$. Le flatness de la composante verticale de vitesse est visible sur la figure 3.33(f). Le flatness de la réalisation stable SYNOOCÉANRENFORCÉ est nettement inférieur aux flatness des deux autres réalisations instables. La réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ est celle qui a le plus grand flatness, sa valeur est de l'ordre de ≈ 6 et elle est obtenue en $t = 10$. La réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ a aussi un pic en $t \approx 10$ mais la valeur du pic est inférieure à celui de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ.

Flatness des composantes de vorticité

Dans ce paragraphe nous montrerons que les réalisations instables sont le siège d'événements tournant verticalement très intenses. Le flatness de la composante zonale de vorticité est visible sur la figure 3.34(b). Le flatness de vorticité zonale de la réalisation stable est quasiment constant. Sa valeur est de l'ordre de 3. Pour les réalisations instables le pic de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ a lieu avant celui de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ. La réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ est celle qui a la plus grande valeur du flatness de vorticité zonale. Sa valeur est ≈ 15 en $t \approx 9$. Le flatness de la composante méridionale de vorticité est visible sur la figure 3.34(d). Le flatness de vorticité méridionale de la réalisation stable est quasiment constant. Sa valeur est de l'ordre de 3. Pour les réalisations instables le pic de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ a toujours lieu avant celui de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ. Mais la valeur de flatness la plus grande est celle de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ en $t \approx 10$. Le flatness de la composante verticale de vorticité est visible sur la figure 3.34(f). S. Legg et J.C. McWilliams (2001, [78]) trouve des "flatness" de vorticité de l'ordre de 7 avec des pics aux environs de 40. Le flatness de vorticité zonale de la réalisation stable est quasiment constant. Sa valeur est de l'ordre de 3. La valeur maximum du flatness de vorticité verticale est obtenue pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ et sa valeur est ≈ 27 à $t \approx 9.8$.

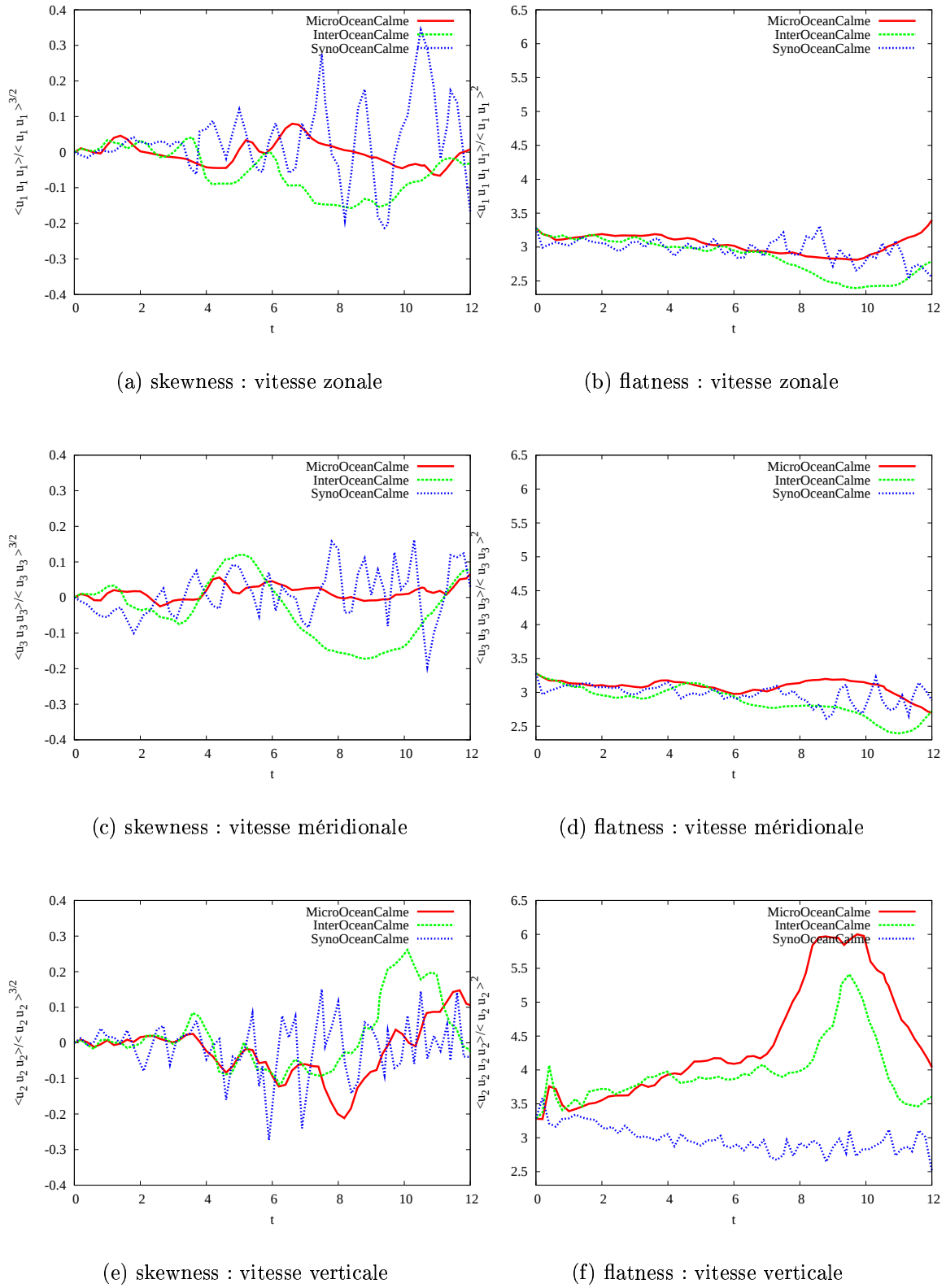


FIG. 3.33 – Évolution des statistiques de vitesse d'ordre 3 et d'ordre 4 pour les calculs de la série RENFORCÉE . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. La colonne de gauche représente l'évolution des skewness tandis que la colonne de droite représente l'évolution des flatness. La première ligne de figure concerne la direction zonale, la deuxième ligne la direction verticale et la troisième ligne la direction méridionale. Le skewness d'une quantité q est défini par $\frac{\langle qqq \rangle}{\langle Qq \rangle^{\frac{3}{2}}}$ et le flatness par $\frac{\langle qqqq \rangle}{\langle Qq \rangle^2}$. Sur les figures la courbe rouge représente l'évolution pour la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$). La courbe verte représente l'évolution de la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2 Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$). Et la courbe bleue représente l'évolution de la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

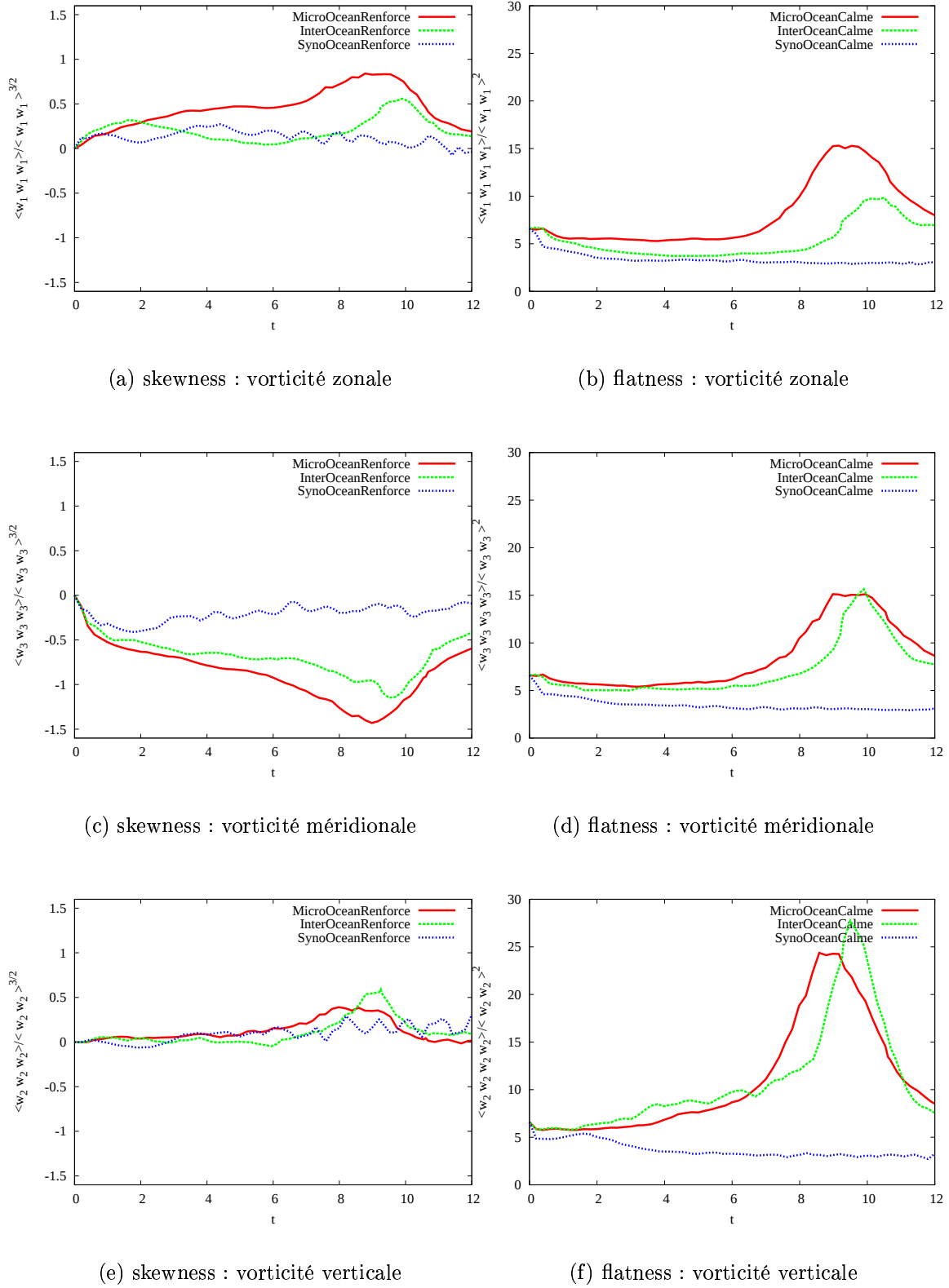


FIG. 3.34 – Évolution des statistiques de vorticité d'ordre 3 et d'ordre 4 pour les calculs de la série RENFORCÉE. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. La colonne de gauche représente l'évolution des skewness tandis que la colonne de droite représente l'évolution des flatness. La première ligne de figure concerne la direction zonale, la deuxième ligne la direction verticale et la troisième ligne la direction méridionale. Le skewness d'une quantité q est défini par $\frac{\langle qqq \rangle}{\langle qq \rangle^{\frac{3}{2}}}$ et le flatness par $\frac{\langle qqqq \rangle}{\langle qq \rangle^2}$. Sur les figures la courbe rouge représente l'évolution pour la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$). La courbe verte représente l'évolution de la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2 Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$). Et la courbe bleue représente l'évolution de la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

3.10 Dynamique multi-échelles : les spectres

Dans cette section nous allons regarder l'évolution des spectres de la turbulence barocline pour différents paramètres linéaires et pour différents nombres de Reynolds initiaux. Nous utiliserons des cartes de densités pour avoir un aperçu de l'évolution du spectre. Les cartes de densités sont plus utiles que l'habituelle accumulation des "courbes 1D" car ici la turbulence peut décroître puis croître, rendant illisible les "courbes 1D". Nous commencerons par présenter les spectres sphériques puis par la suite les spectres directionnels.

3.10.1 Spectres sphériques

Bien que le spectre de densité d'énergie cinétique sphérique ne peut pas quantifier l'état de l'anisotropie spectrale il est couramment utilisé en turbulence homogène anisotrope. Un atout des spectres sphériques est de pouvoir se référencier à la loi de Kolmogorov en $-\frac{5}{3}$. Le spectre sphérique est obtenu en faisant une moyenne des amplitudes spectrales sur des coquilles sphériques. D'abord nous regarderons la densité spectrale d'énergie cinétique turbulente, puis la densité spectrale d'énergie potentielle turbulente. Pour finir nous regarderons les spectres de densité d'énergie toroïdale et de densité d'énergie poloïdale.

Densité spectrale d'énergie cinétique turbulente

La planche 3.35 représente l'évolution du spectre de densité d'énergie cinétique turbulente pour les calculs de la série RENFORCÉE défini par $Re_\lambda(0) = 66$. Les figures de gauche sont coloriées par la densité d'énergie cinétique turbulente. En abscisse se trouve le temps et en ordonnée se trouve le module du nombre d'onde. La figure de droite représente une coupe temporelle de la figure de gauche. Nous montrerons entre autres qu'au temps $t \approx 12$ il y a un pic d'énergie pour un nombre d'ondes assez bas. Plus le nombre de Richardson est élevé, plus le nombre d'ondes du pic est petit (pour $Ri = 0.5$ $k = 5$, pour $Ri = 0.99$ $k = 3$ et pour $Ri = 2$ $k = 2.2$).

La réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.35(a). Entre $t = 0$ et $t \approx 7$ il y a une dissipation visqueuse. Cette dissipation visqueuse est bien visible aux petites échelles c'est-à-dire aux grands nombres d'ondes. Au temps $t \approx 6.1$ on peut voir que l'énergie augmente au niveau du nombre d'ondes $k \approx 5$. Après cela, tout le spectre va s'élever. De l'énergie sera présente même pour les grands nombres d'ondes. Pendant la zone de décroissance les pentes dans une zone inertielle hypothétique sont de l'ordre de -1 . Lors du début de la croissance de l'énergie les pentes sont plutôt en $-\frac{5}{2}$. Tandis que au temps $t = 11.54$ la pente est clairement en $-\frac{5}{3}$.

La réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.35(b). L'énergie est minimum aux environs de $t \approx 4$ (d'après la figure 3.9(b)). Entre $t = 0$ et $t \approx 6$ il y a une dissipation visqueuse aux petites échelles. Au temps $t \approx 5.8$ on voit apparaître une croissance de l'énergie au nombre d'onde $k \approx 6$, quelques dixièmes de seconde après au temps $t = 6$ on voit apparaître une deuxième zone d'énergie au nombre d'onde $k \approx 3$. Remarquons que l'apparition d'énergie au niveau de $k \approx 3$ et $k \approx 6$ est compatible avec une interaction triadique. Pour imager, deux petits tourbillons de nombre d'onde $k = 6$ s'organise pour alimenter un plus gros tourbillon de nombre d'ondes $k = 3$. D'autant plus que à $t = 10$ on voit que l'énergie augmente au niveau du nombre d'ondes $k = 3$. Comme précédemment pendant la zone de décroissance

les pentes dans une zone inertielle hypothétique sont de l'ordre de -1 . Lors du début de la croissance de l'énergie les pentes sont plutôt en $-\frac{5}{2}$. Tandis que au temps $t = 11.54$ la pente est clairement en $-\frac{5}{3}$.

La réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.35(c). Jusqu'au temps $t \approx 4$ toutes les échelles de la dynamiques perdent de l'énergie. Après $t \approx 4$ les petites échelles continuent à perdre de l'énergie tandis que les échelles avec un nombre d'onde $k = 2.2$ gardent une énergie constante. Les échelles ayant un nombre d'ondes $k \approx 1.2$ gagnent et perdent de l'énergie en fonction du temps comme si elle était influencée par un phénomène ondulatoire. Les pentes d'une hypothétique zone inertielle ont des formes différentes de précédemment. Pendant le début de la phase de décroissance les pentes évoluent entre -1 et -4 . Au temps $t = 14$ il y a une "brisure" dans le spectre. Pour des nombres compris entre $k \approx 6$ et $k \approx 11$ la pente du spectre est ≈ -4 tandis que entre $k \approx 11$ et $k \approx 13$ la pente est en $-\frac{5}{3}$.

Densité spectrale d'énergie potentielle turbulente

La planche 3.36 représente l'évolution du spectre de densité d'intensité du scalaire pour les calculs de la série RENFORCÉE définie par $Re_\lambda(0) = 66$. Nous rappellerons que pour avoir le spectre de densité d'énergie potentielle il suffit de multiplier par $\frac{1}{N^2}$. Les figures de gauche sont coloriées par la densité d'intensité turbulente du scalaire. En abscisse se trouve le temps et en ordonnée se trouve le module du nombre d'ondes. La figure de droite représente une coupe temporelle de la figure de gauche.

La réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.36(a). Entre $t = 0$ et $t = 0.5$ il y a un ajustement de l'énergie potentielle par rapport à l'énergie cinétique. Après il y a une phase de décroissance de l'énergie potentielle aux grandes échelles et aux petites échelles. L'énergie potentielle des échelles ayant un nombre d'ondes entre $k \approx 2.2$ et $k \approx 6$ ne perd pas d'énergie potentielle. Au temps $t = 8$ il apparait de l'énergie au nombre d'ondes $k \approx 7$ après l'énergie augmente à toutes les échelles. Au temps $t = 11.54$ l'énergie potentielle est la plus forte pour le nombre d'onde $k \approx 1$. La pente dans une zone inertielle hypothétique est en $-\frac{5}{3}$. C'est le plus visible au temps $t = 11.54$.

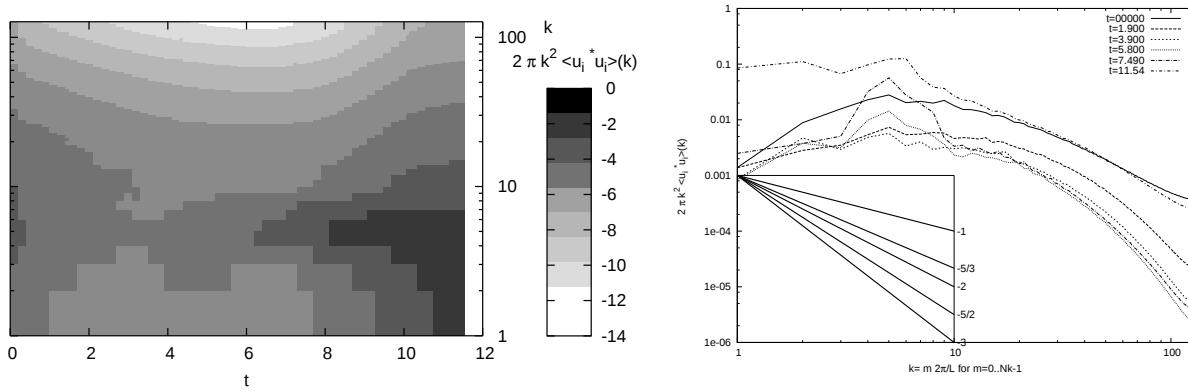
La réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.36(b). Entre $t = 0$ et $t = 0.5$ il y a un ajustement de l'énergie potentielle par rapport à l'énergie cinétique. Après il y a une phase de décroissance de l'énergie potentielle aux grandes échelles et aux petites échelles. Au temps $t = 4.2$ il apparait de l'énergie au nombre d'ondes $k \approx 4.4$ après l'énergie augmente à toutes les échelles. Ensuite au temps $t \approx 6.5$ un deuxième pic apparaît à $k \approx 2.2$. Au temps $t \approx 7$ l'énergie potentielle augmente à toutes les échelles. Enfin au temps $t = 11.29$ l'énergie est la plus forte pour le nombre d'ondes $k = 2$. Comme précédemment la pente dans une zone inertielle hypothétique est en $-\frac{5}{3}$ et c'est le plus visible au temps $t = 11.54$.

La réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$ est visible sur la figure 3.36(c). Jusqu'au temps $t \approx 4$ toutes les échelles de la dynamiques perdent de l'énergie. Après $t \approx 4$ les petites échelles continuent à perdre de l'énergie tandis que les échelles avec un nombre d'onde $k = 2.5$ garde une énergie constante. Les échelles ayant un nombre d'ondes $k \approx 1.2$ gagnent et perdent de l'énergie en fonction du temps. Les pentes d'une hypothétique zone inertielle ont des formes différentes de précédemment. Pendant le début de la phase de décroissance les pentes évoluent entre -1 et -4 . Comme pour le cas du spectre d'énergie cinétique au temps $t = 14$ il y a une "brisure". Pour des nombre compris entre $k \approx 6$ et $k \approx 11$ la pente du spectre est en

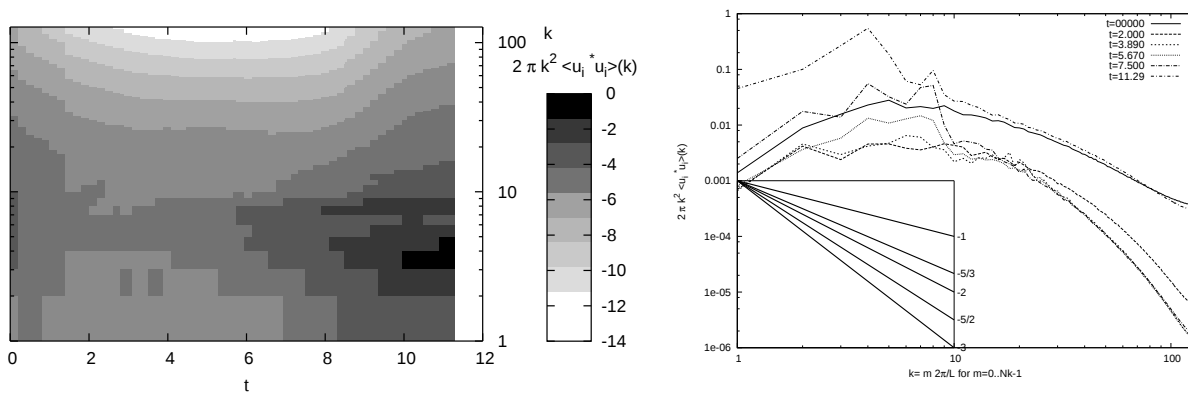
≈ -4 tandis que entre $k \approx 11$ et $k \approx 13$ la pente est en $-\frac{5}{3}$.

Décomposition toroïdo-poloïdale

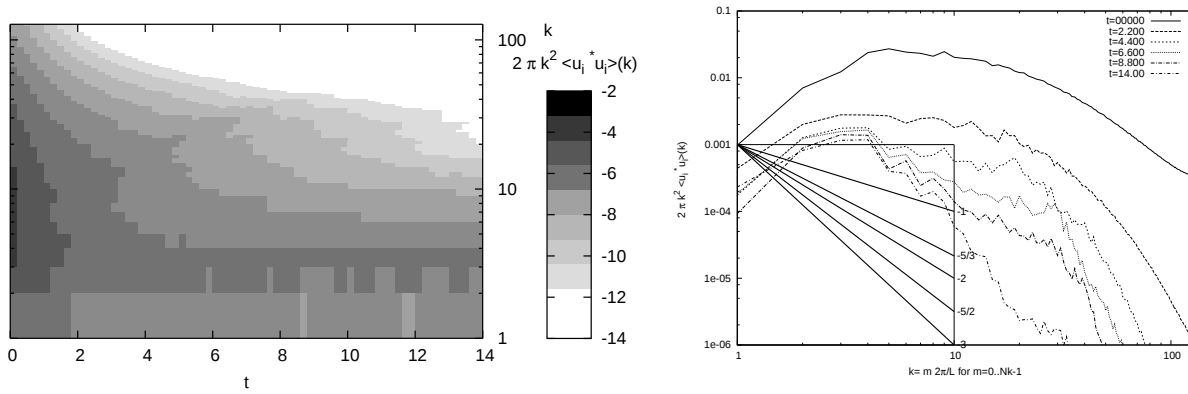
La figure 3.37 représente les spectres sphériques d'énergie toroïdale (courbe vert), poloïdale (courbe bleu) et potentielle (courbe fuchsia) au temps $t = 1.58$. Il est aussi représenté les spectres poloïdal et toroïdal à l'initialisation du calcul INTEROCÉANTUMULTUEUX issus du pré-calcul isotrope (courbe rouge). Le spectre d'énergie potentielle initiale n'est pas représenté car il est quasiment nul à l'initialisation. Le calcul INTEROCÉANTUMULTUEUX est ici encore dans sa phase de décroissance, l'énergie du spectre rouge initiale est plus importante que l'énergie des trois autres spectres réunis. Remarquons qu'aux petites échelles les trois spectres sont très proches. La diffusion (viscosité ou diffusion de la flotabilité) agit de la même manière sur la composante toroïdale, poloïdale ou potentielle. On retrouve un état plus ou moins isotrope. Aux très grandes échelles pour $k = 1$ les trois spectres ont une valeur du même ordre $O(10^{-4})$. Sur toutes les échelles intermédiaires le spectre de flotabilité est inférieur au spectre toroïdal et au spectre poloïdal. Pour $k \in [1, 2] \cup [70, 256]$ le spectre poloïdale est quasiment identique au spectre toroïdale. Lorsque $k \in [2, 70]$ le spectre toroïdale est supérieur au spectre poloïdale. Le fait que la composante poloïdale soit inférieure à la composante toroïdale peut signifier une atténuation de l'influence des ondes d'inerties-gravités dans cette zone.



(a) MICROOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$

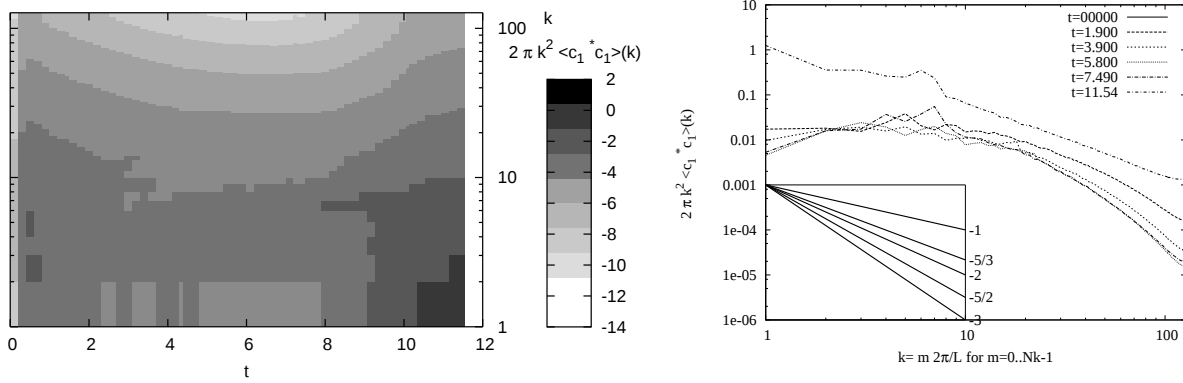


(b) INTEROCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$

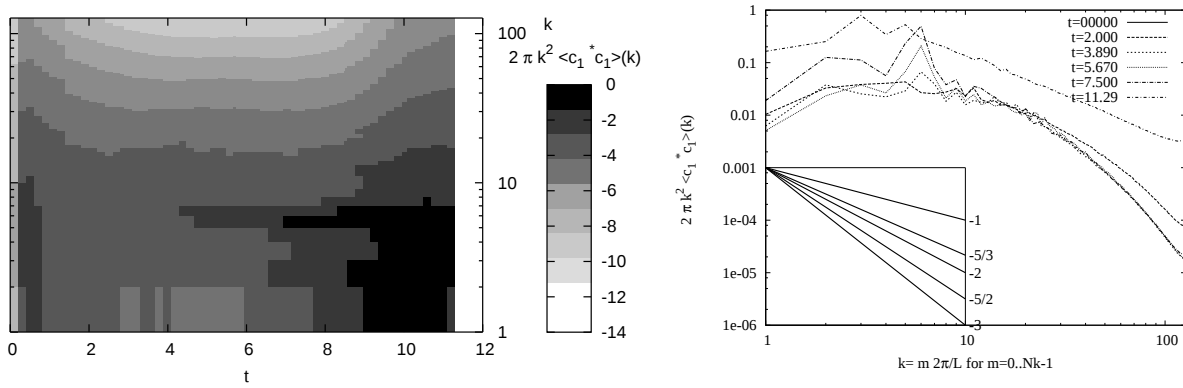


(c) SYNOOCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$

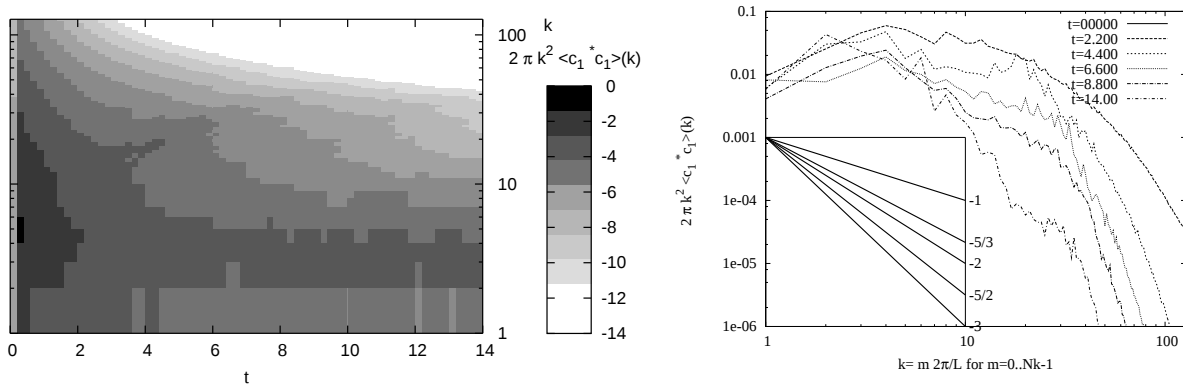
FIG. 3.35 – Spectre sphérique $Ec(t, k)$: série RENFORCÉE . Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Sur la colonne de gauche on peut voir l'évolution du spectre de densité spectrale d'énergie cinétique turbulente sphérique ($Ec(t, k) = 2\pi k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t)$) tandis que sur la colonne de droite est représenté le profil de la même réalisation à des instants différents. Sur la première ligne est représentée la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$). La deuxième ligne indique la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$). Et la troisième ligne est pour la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).



(a) MICROOcéANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$



(b) INTEROcéANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$



(c) SYNOcéANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$

FIG. 3.36 – Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Sur la colonne de gauche on peut voir l'évolution du spectre de densité spectrale d'intensité de flotabilité turbulente sphérique ($Ep(t, k) = 2\pi k^2 \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{b}}^*(\mathbf{k}, t)$) tandis que sur la colonne de droite est représenté le profil de la même réalisation à des instants différents. Sur la première ligne est représentée la réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$). La deuxième ligne indique la réalisation INTEROcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$). Et la troisième ligne est pour la réalisation SYNOcéANRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

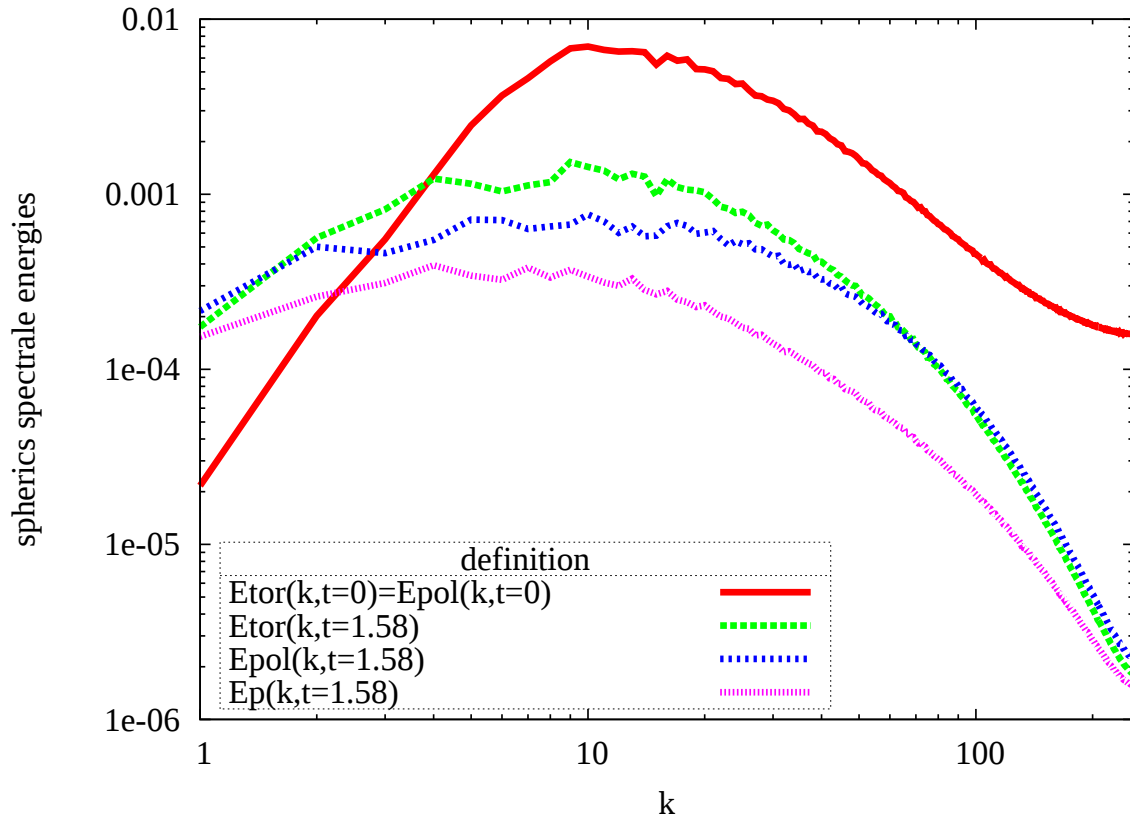


FIG. 3.37 – Spectres sphériques toroïdaux et poloïdaux. La figure ci-dessus représente les spectres sphériques d'énergie poloïdale, d'énergie toroïdale et d'énergie potentielle de la réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX au temps $t = 1.58$. La réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX est définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 75$. Initialement la répartition spectrale de l'énergie poloïdale et de l'énergie toroïdale est la même. Le tenseur spectral avec des composantes généralisées à un écoulement stratifié est défini par $\Phi_{ij} / \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \rangle = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ rappelons que la quatrième composante est définie comme précédemment par $\hat{u}_4 = \frac{\hat{b}}{N}$. Dans le repère de Craya-Herring la dynamique à 4 composantes est réduite à 3 composantes, le tenseur spectral dans le repère de Craya-Herring est défini par $\phi_{ij} / \langle \hat{u}^{(i)*}(\mathbf{p}, t) \hat{u}^{(j)}(\mathbf{k}, t) \rangle = \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ La densité sphérique d'énergie toroïdale est définie par $E_{tor}(k, t) = 4\pi^2 k^2 \langle \phi_{11} \rangle_\theta^\phi(k, t)$ La densité sphérique d'énergie poloïdale est définie par $E_{pol}(k, t) = 4\pi^2 k^2 \langle \phi_{22} \rangle_\theta^\phi(k, t)$ Et la densité sphérique d'énergie potentielle s'exprime par $Ep(k, t) = 2\pi^2 k^2 \langle \phi_{33} \rangle_\theta^\phi(k, t)$ ou dans le repère fixe par $Ep(k, t) = 2\pi^2 k^2 \langle \Phi_{44} \rangle_\theta^\phi(k, t)$ où $\langle \rangle_\theta^\phi$ est l'opérateur de moyenne sur une coquille sphérique.

3.10.2 Spectres directionnels

À ce jour il n'existe pas d'étude non-linéaire sur la turbulence homogène barocline tridimensionnelle, pour une première analyse de la localisation spectrale il est utilisé des spectres directionnels. Dans les spectres directionnels qui sont présentés sur les planches 3.38, 3.39, 3.40 et 3.41 les moyennes des amplitudes spectrales s'effectuent dans des plans. Pour la direction zonale ce sont des plans verticaux-transverse perpendiculaires à k_1 . Pour la direction méridionale ce sont des plans verticaux-longitudinaux perpendiculaires à k_3 . Et pour la direction verticale ce sont des plans horizontaux perpendiculaires à k_2 . Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour toutes les composantes, à part pour la flotabilité des réalisations MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ les spectres dans la direction zonale sont les plus localisés (autrement dit sont ceux qui ont la bande passante la plus courte). La direction méridionale a des structures de grandes échelles mais moins grandes que celles de la direction zonale. La direction verticale garde un spectre d'énergie étendu quelle que soit la composante et quelle que soit la réalisation. Aussi nous remarquerons que les pics d'énergie des réalisations instable n'apparaissent pas aux plus grandes échelles. Par contre au temps $t \approx 12$ pour les réalisations instables le maximum des énergies est localisé vers le nombre d'onde $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$ c'est-à-dire aux grandes échelles du mouvement physique. Les réalisations à énergie décroissante bien que dissipant fortement les petites échelles gardent une énergie sur le mode $(0, 1, 1)$ quasiment constante ou soumise à des formes d'oscillation.

Spectre de la composante d'énergie zonale

Les spectres directionnels de la composante d'énergie zonale sont visibles sur la planche 3.38. Pour les réalisations de la série ATMO définie par $\epsilon = 0.001$ (visibles sur les 3 premières lignes de la planche 3.38) l'énergie des structures aux petites dimensions zonales décroît fortement. Au temps $t \approx 8$ la majorité de l'énergie spectrale est localisée dans le plan $k_1 = 0$ (par conséquence des trois premières figures des trois premières lignes). Les autres figures des trois premières lignes de la planche 3.38 indiquent d'une part que l'énergie est localisée au voisinage de $\mathbf{k} = (0, 1, 1)$. Et d'autre part que les structures de grandes échelles représentées par le nombre d'ondes $\mathbf{k} = (0, 1, 1)$ sont probablement affectées par des phénomènes oscillant puisque l'énergie à ce nombre d'ondes varie en fonction du temps. La réalisation MICROOCÉANCALME visible en ligne 4 indique que la croissance est initiée par des pics d'énergie à $k_2 \approx 3$ puis $k_2 \approx 6$. Pour la réalisation INTEROCÉANCALME le pic d'énergie lors de la croissance apparaît à $\mathbf{k} = (0, 2, 1)$. La composante zonale de la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ a un pic en $k_2 \approx 6$ et pour la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ le pic est en $k_2 \approx 3$. Pour la réalisation stable SYNOOCÉANRENFORCÉ la majorité l'énergie est localisée sur mode $(0, 1, 1)$. Le mode $(0, 1, 1)$ est quasiment constante tandis que l'énergie des petites échelles diminue.

Spectre de la composante méridionale

Les spectres directionnels de la composante d'énergie méridionale sont visibles sur la planche 3.39. Les réalisations de la série ATMO font apparaître des phénomènes oscillatoires probablement localisés dans les structures de nombre d'ondes $\mathbf{k} = (0, 1..2, 0)$ car E_{33}^2 fait apparaître une oscillation de l'énergie à ces nombres d'ondes. Ces phénomènes oscillatoires sont mieux marqués que sur la composante d'énergie zonale. Pour les réalisations instables on observe toujours que la croissance de l'énergie est précédée par des

pics localisés en espace spectral. Pour la réalisation SYNOOCÉANRENFORCÉ l'énergie est quasiment constante pour un nombre d'onde $k_2 = 3$.

Spectre de la composante verticale

Les spectres directionnels de la composante d'énergie verticale sont visibles sur la planche 3.40. Pour les réalisations instables les pics d'énergie fortement localisés en espace spectral, que l'on a vu précédemment, sont beaucoup moins marqués pour la composante de vitesse verticale. Pour les réalisations ATMO les phénomènes oscillatoires sont toujours visibles au nombre d'onde $\mathbf{k} \approx (0, 1..2, 1..2)$

Spectre de la composante d'énergie potentielle

Les spectres directionnels de l'intensité du scalaire sont visibles sur la planche 3.41. Le spectre du scalaire actif indique aussi que des phénomènes ondulatoires peuvent être présents pour les réalisations de la série ATMO . Les pics initiateurs de la croissance sont aussi observables sur les réalisations instables.

Spectre d'énergie directionnelles sur des temps courts $t = 1.58$

La planche 3.42 représente les spectres directionnels d'énergie cinétiques turbulentes et d'énergie potentielles turbulentes pour la réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 75$. Le spectre d'énergie cinétique est regroupé dans des structures ayant une grande dimension zonale au temps $t = 1.58$. Aux petites échelles les structures ont plus d'énergie dans la direction verticale. Les spectres d'énergie cinétique zonale et méridionale ont pour des nombres d'ondes $k \in [9, 20]$ une pente en $k^{-2.2}$ au temps $t = 1.58$. Pour des nombres d'ondes $k \in [1, 4]$ l'énergie est la plus importante dans la direction zonale. Entre $k \in [4, 10]$ l'énergie dans la direction zonale et dans la direction méridionale sont du même ordre. Pour $k \in [10, 256]$ l'énergie est plus importante dans la direction verticale. Les spectres d'énergie zonale et méridionale font apparaître une pente en $k_i^{-0.85}$ lorsque $k_i \in [7, 20]$.

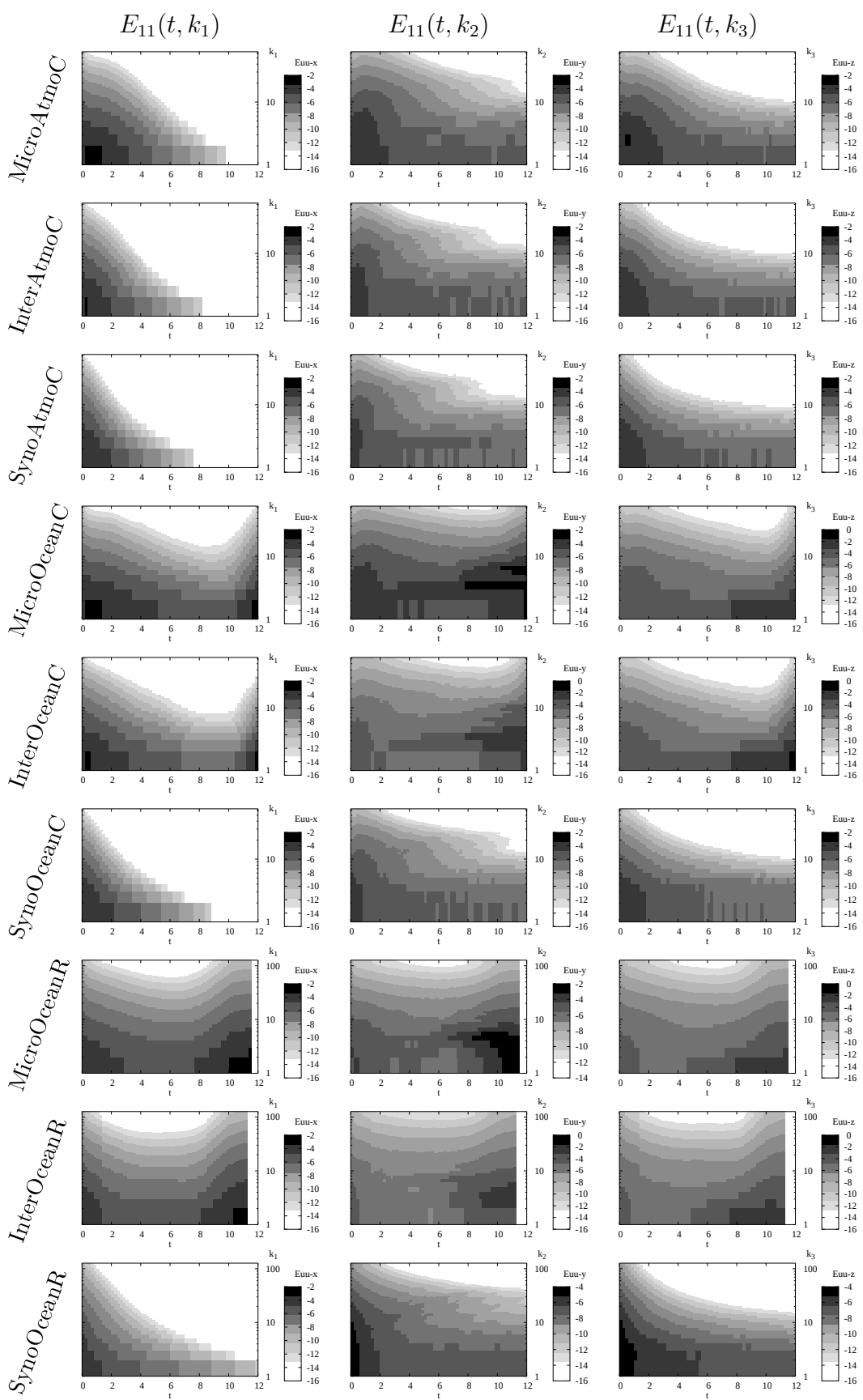


FIG. 3.38 – Spectres directionnels : composante zonale. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les figures représentent l'évolution des spectres de vitesse zonale. Le temps est en abscisse et le nombre d'onde est en ordonnée. Les calculs représentés sont ceux de la série CALME et RENFORCÉE. La première colonne concerne la direction zonale, la deuxième la direction verticale et la troisième la direction méridionale. Sur chaque ligne de haut en bas on peut trouver : la réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTEROcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$), la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$) et la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

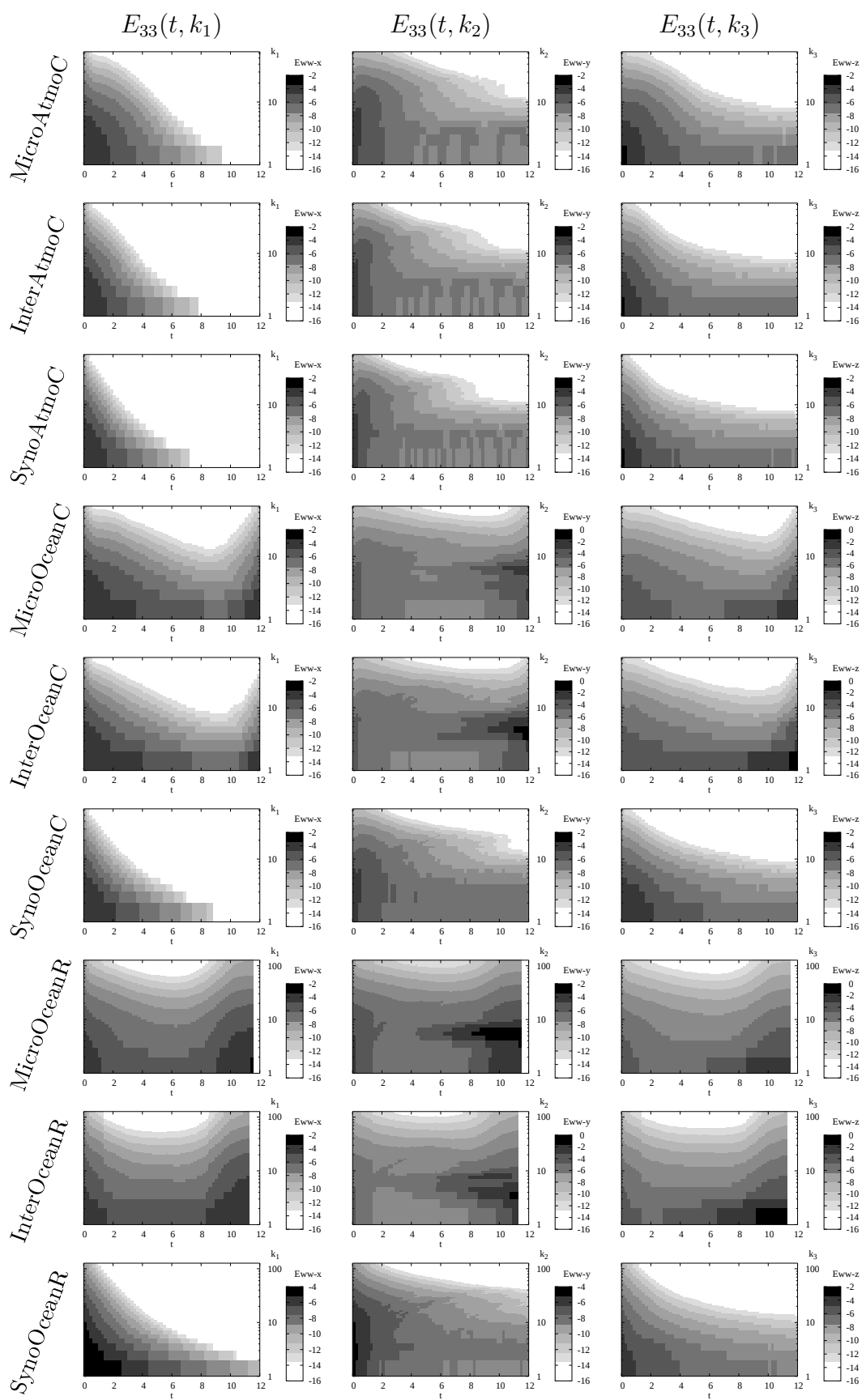


FIG. 3.39 – Spectres directionnels : composante méridionale. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les figures représentent l'évolution des spectres de vitesse méridionale. Le temps est en abscisse et le nombre d'onde est en ordonnée. Les calculs représentés sont ceux de la série CALME et RENFORCÉE. La première colonne concerne la direction zonale, la deuxième la direction verticale et la troisième la direction méridionale. Sur chaque ligne de haut en bas on peut trouver : la réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTEROcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$), la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$) et la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

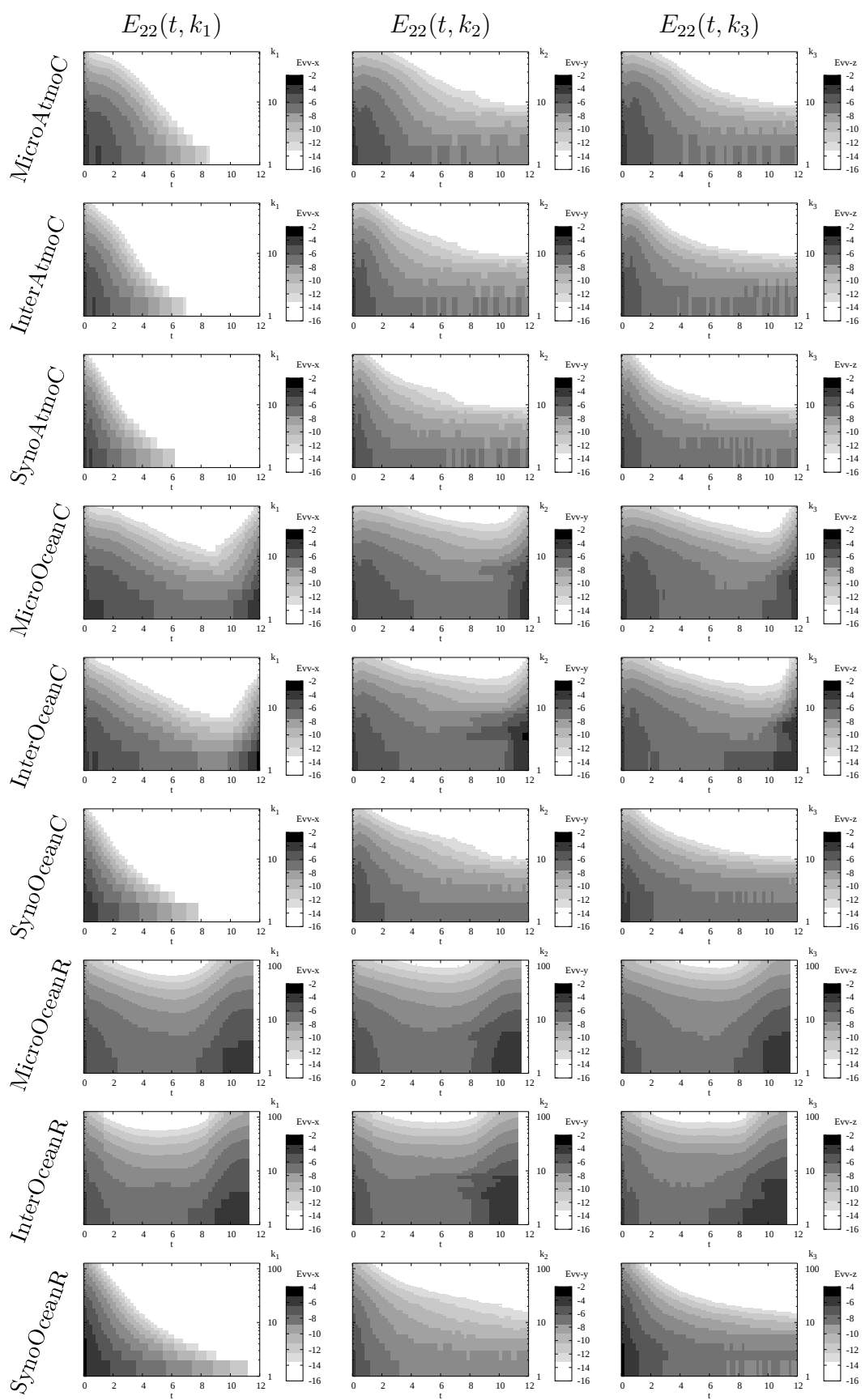


FIG. 3.40 – Spectres directionnels : composante verticale. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les figures représentent l'évolution des spectres de vitesse verticale. Le temps est en abscisse et le nombre d'onde est en ordonnée. Les calculs représentés sont ceux de la série CALME et RENFORCÉE. La première colonne concerne la direction zonale, la deuxième la direction verticale et la troisième la direction méridionale. Sur chaque ligne de haut en bas on peut trouver : la réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTEROcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$), la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$) et la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).

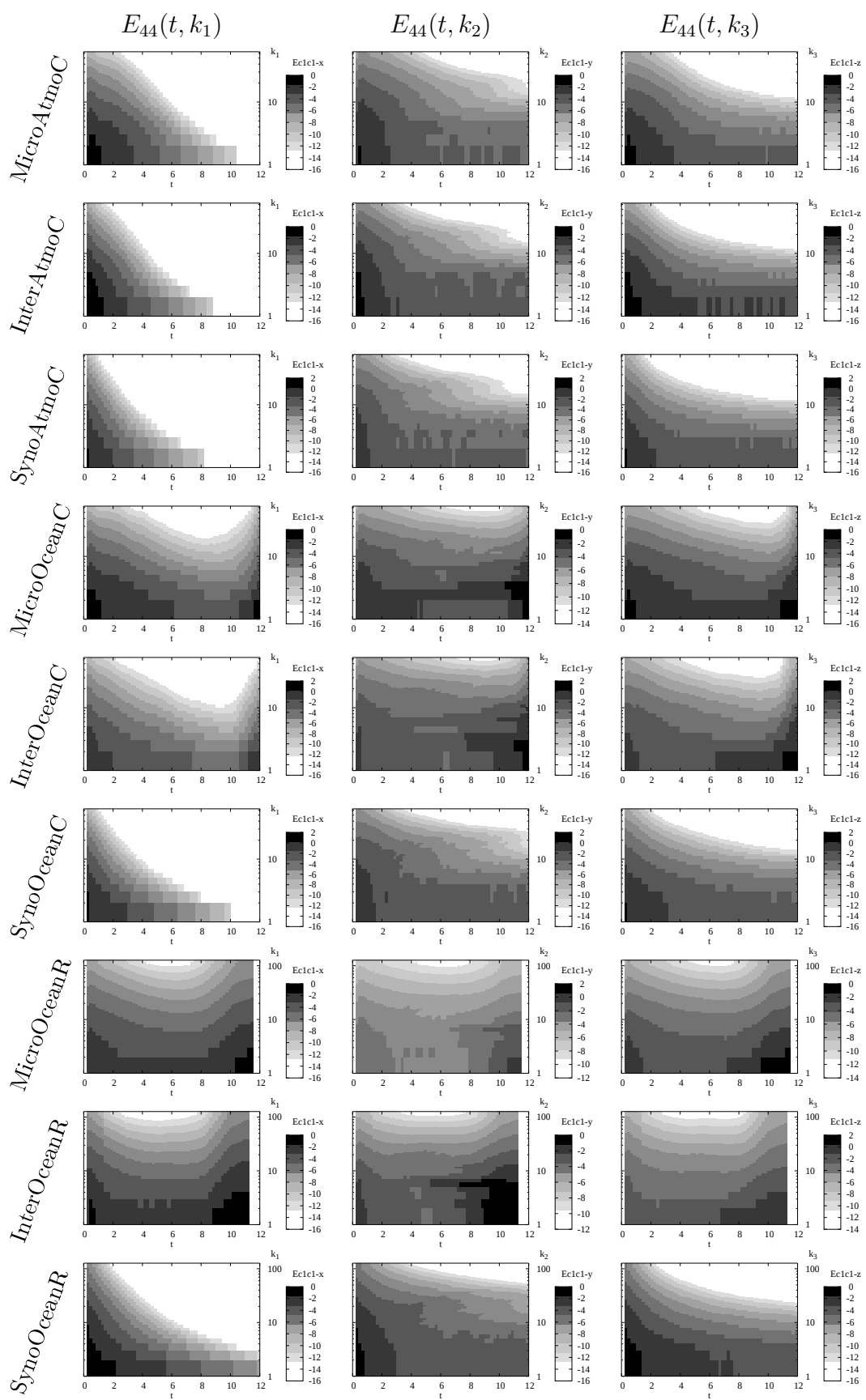
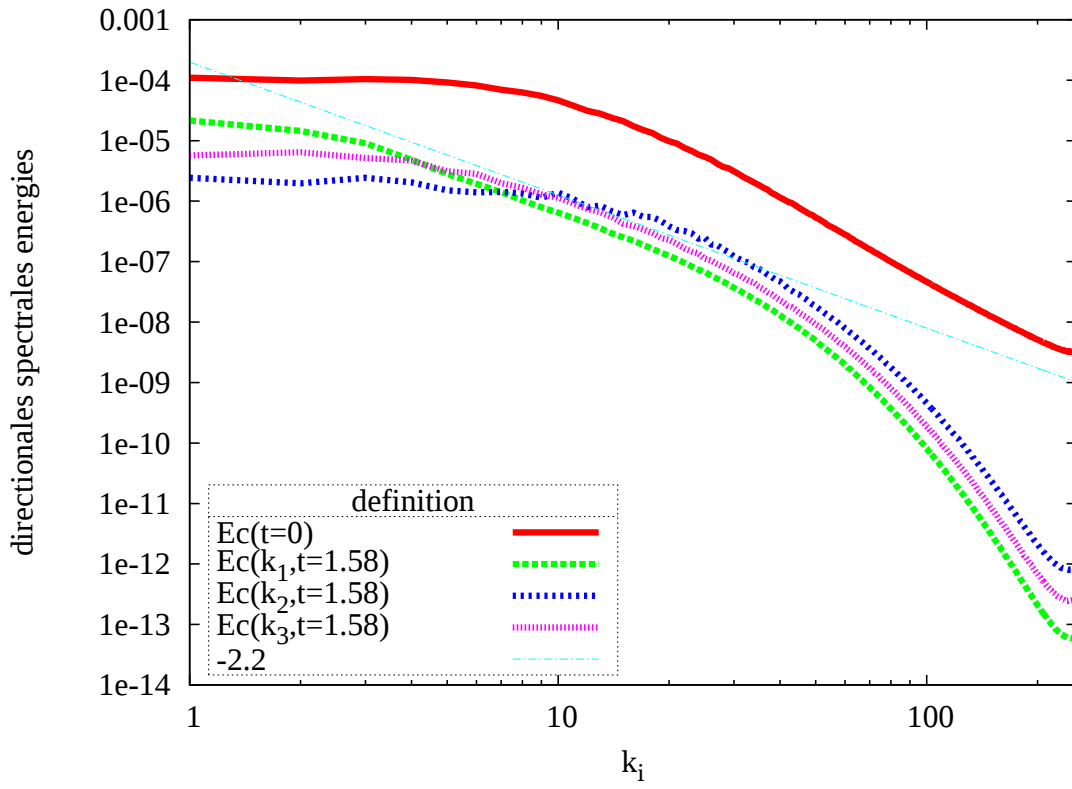
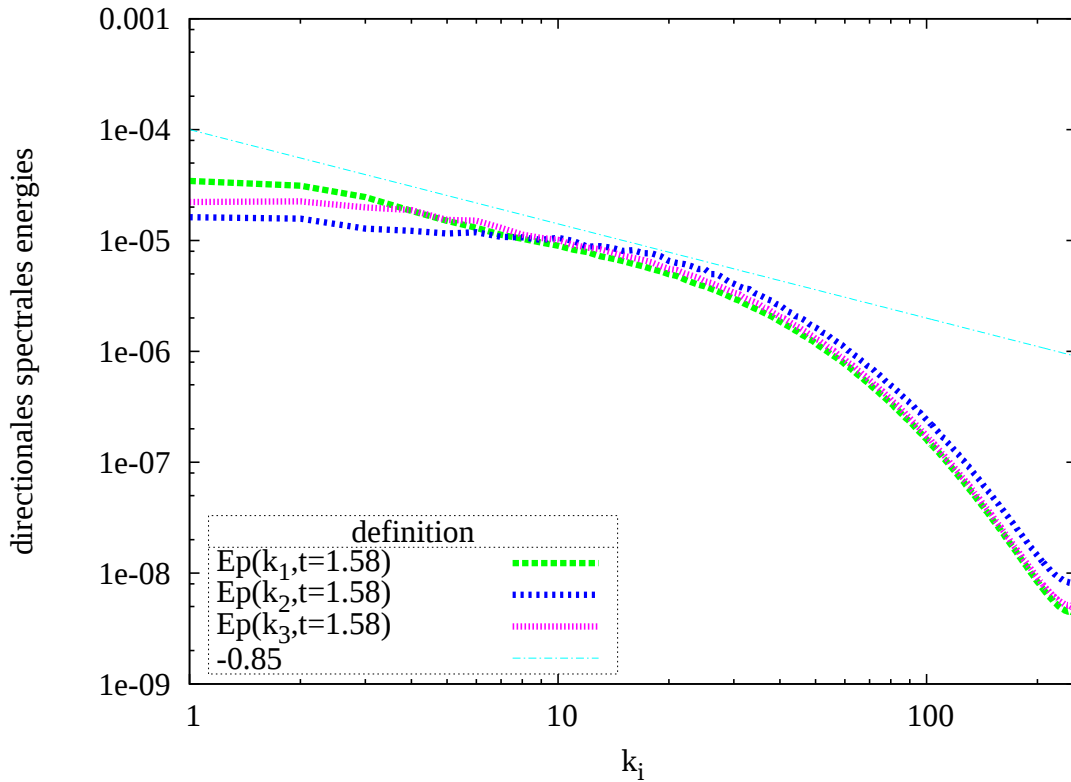


FIG. 3.41 — Spectres directionnels : composante de flotabilité. Les figures présentées ci-dessus sont relatives aux simulations numériques directes non-linéaires. Les équations résolues respectent l'équilibre du vent thermique pour le mouvement moyen. Les figures représentent l'évolution des spectres de la composante de flotabilité. Le temps est en abscisse et le nombre d'onde est en ordonnée. Les calculs représentés sont ceux de la série CALME et RENFORCÉE. La première colonne concerne la direction zonale, la deuxième la direction verticale et la troisième la direction méridionale. Sur chaque ligne de haut en bas on peut trouver : la réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation INTEROcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation SYNOOcéanCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$), la réalisation MICROOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 66$), la réalisation INTEROcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$) et la réalisation SYNOOcéanRENFORCÉ ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 66$).



(a) Spectres directionnels d'énergie cinétique turbulente



(b) Spectres directionnels d'énergie potentielle turbulente

FIG. 3.42 — Spectres directionnels pour la réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX . La figure ci-dessus représente les spectres d'énergies directionnelles de la réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX au temps $t = 1.58$. La réalisation INTEROCÉANTUMULTUEUX est définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 75$. Le spectre initial d'énergie potentielle n'est pas représenté car l'énergie potentielle est quasiment nulle à l'initialisation avec le champ de turbulence isotrope. Sur la figure du haut est représentée l'énergie cinétique turbulente tandis que sur la figure du bas est représentée l'énergie potentielle turbulente. Le tenseur spectral avec des composantes généralisées à un écoulement stratifié est défini par $\Phi_{ij} / \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \rangle = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \forall i, j \in 1, 2, 3, 4$ rappelons que la quatrième composante est définie comme précédemment par $\hat{u}_4 = \frac{\hat{b}}{N}$. Le spectre directionnel d'énergie cinétique est défini par $Ec(k_i) = \frac{1}{2} \langle \Phi_{jj}(\mathbf{k}, t) - \Phi_{44} \rangle_{k_l \forall l \neq i}(K_i, t)$ Et le spectre d'énergie potentielle directionnelle est défini par $Ep(k_i, t) = \frac{1}{2} \langle \Phi_{44} \rangle_{k_l \forall l \neq i}(k_i, t)$

3.11 Structures cohérentes

Dans cette section nous allons utiliser des visualisations tridimensionnelles pour caractériser l'état de la turbulence anisotrope. Bien qu'il existe plusieurs critères de visualisation nous utiliserons les surfaces d'iso-valeur d'ensrophie. D'autre critère de visualisation basé sur d'autre quantité on été essayé mais cela n'a pas donnée de résultat qualitativement différent donc autant prendre le critère le plus souvent utilisé en turbulence homogène qui est la visualisation d'iso-ensrophie. Dans un premier temps nous nous ferons une comparaison des structures de la série GÉOPHYSIQUE . Puis on essayera de faire une comparaison des structures trouvé dans les simulations de la série GÉOPHYSIQUE avec des structures visibles dans les écoulements atmosphériques réelles.

3.11.1 Écoulement barocline géophysiquement envisageable

Dans cette section nous allons visualiser dans l'espace physique à trois dimensions les écoulements de la série CALME définie par $Re_\lambda(0) = 49$. Les valeurs des paramètres pour les calculs de la série CALME sont visibles dans les tableaux 3.2. Nous regarderons les planches 3.43, 3.44 et 3.45 et nous montrerons la présence de différentes structures : bandes zonales, tourbillons en “épingle à cheveux”, plaques zonales, ondes de gravité, retournement tourbillonnaire, tourbillons jetaux, ... Les réalisations énergétiquement stables des calculs de la série CALME font tous apparaître des structures d'iso-ensrophie similaire (voir les figures 3.43(b), 3.43(c), 3.43(e) et 3.43(f)). Les structures sont allongées dans la direction zonale. Leur extension zonale est de l'ordre de la taille du cube tandis que leur extension méridionale est de l'ordre de $\frac{1}{10}$ de la taille du cube. Les bandes zonales sont une caractéristique de nombreux écoulements géophysiques à grandes et petites échelles (pour des exemples d'écoulements zonaux géophysiques et astrophysiques voir : 1990 P.S. Marcus [85]; 1990 U. Schneider [122]; 1993 R.L. Panetta [102]; 2000 P.S. Marcus et al. [86]; 2004 S. Danilov et D. Gurarie [29])

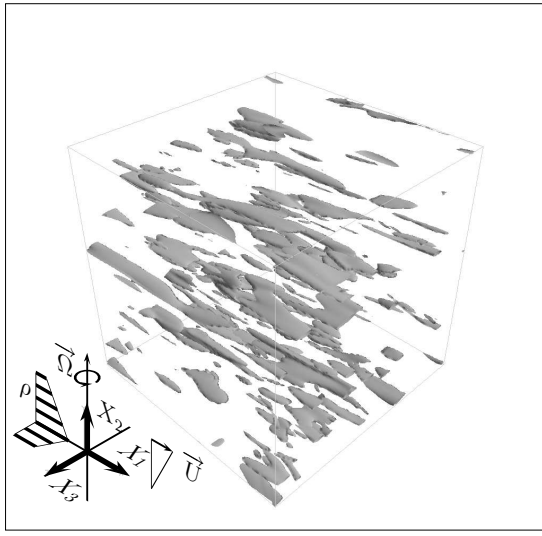
Le calcul énergétiquement instable MICROOCÉANCALME ne fait pas apparaître de bande zonale aussi bien définie que précédemment. Pour cet écoulement le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor est bien plus élevé que ceux des réalisations stables (comme précédemment vu sur le graphique 3.17). On peut voir sur la figure 3.43(a) la présence de tourbillons en “épingle à cheveux”. Les tourbillons en épingles à cheveux sont observables dans les couches limites (il y a de nombreuses études par exemple voir 1997 B.A. Singer et R.D. Joslin [124]; 2003 B. Ganapathisubramani et al. [43]) dans les écoulements en canal (à titre d'exemple : J. Zhou et al. 1999 [140]; 2001 K.T Christensen et R.J. Adrian [22]) dans les écoulements de turbulence homogène cisailé (M.M. Rogers et al. 1989 [116]). Toutefois les tourbillons en “épingle à cheveux” ne sont pas les seules structures présentes sur la figure 3.43(a) il y a aussi des structures à fortes cohérence longitudinale.

L'autre calcul énergétiquement instable de la réalisation fait apparaître des structures avec une forte cohérence zonale mais contrairement aux “bandes zonales” des réalisations stables celles-ci ont une plus grande étendue dans la direction méridionale d'où l'appellation de “plaques zonales” (voir 3.43(d)). Dans les réalisations stables les calculs à $Ri = 2$ (voir figure 3.44(e), 3.44(f), 3.45(e) et 3.45(f)) font apparaître un nombre de couches horizontales beaucoup plus grand que les réalisations à $Ri < 1$ (voir 3.44(a), 3.44(c), 3.45(a) et 3.45(c)). Le paramètre de cisaillement étant fixé dans toutes les simulations de la série CALME un nombre de Richardson plus élevé signifie une plus grande influence des ondes de gravité. Le fait que les réalisations à $Ri = 2$ aient un plus grand nombre de

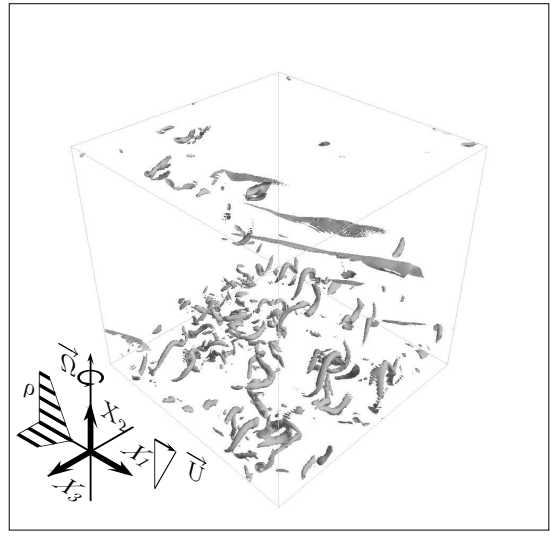
couches horizontales est un effet de la stratification stable du fluide.

Les réalisations MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ font apparaître des retournements tourbillonnaires dans la direction méridionale (voir les figure 3.44(b) et 3.44(d)). C'est plus visible sur la figure 3.44(d)). La visualisation de la teinte de flotabilité fait apparaître des structures inversées entre la réalisation MICROOCÉANRENFORCÉ ("déferlement" vers le Sud sur la figure 3.45(b)) et la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ ("déferlement" vers le Nord sur la figure 3.45(d)).

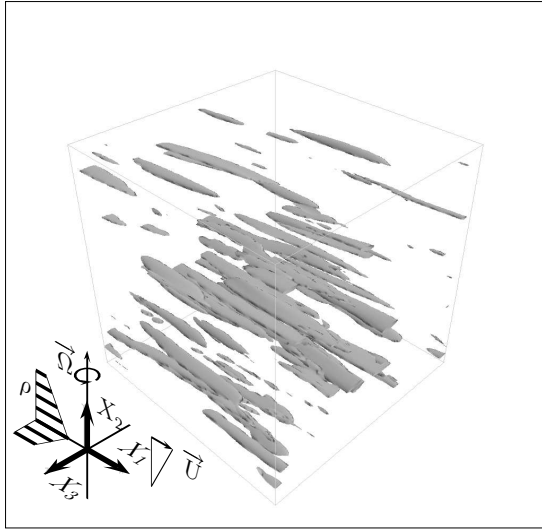
En regardant le plan supérieur des figures 3.44(b), 3.44(d), 3.45(b) et 3.45(d) on peut observer une tendance à un alignement Sud-Ouest vers Nord-Est de lignes iso-vitesses.



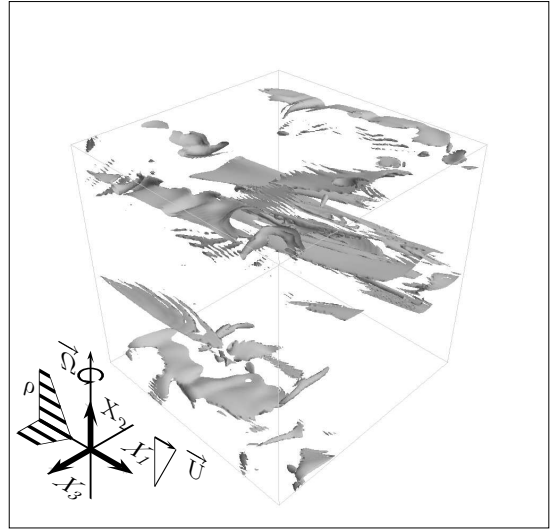
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 10% du max



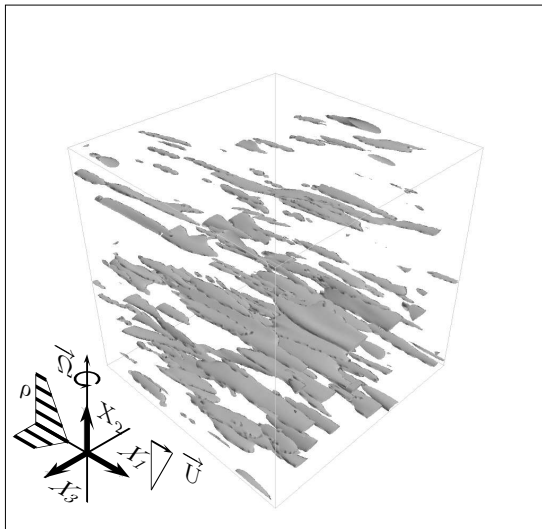
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 15% du max



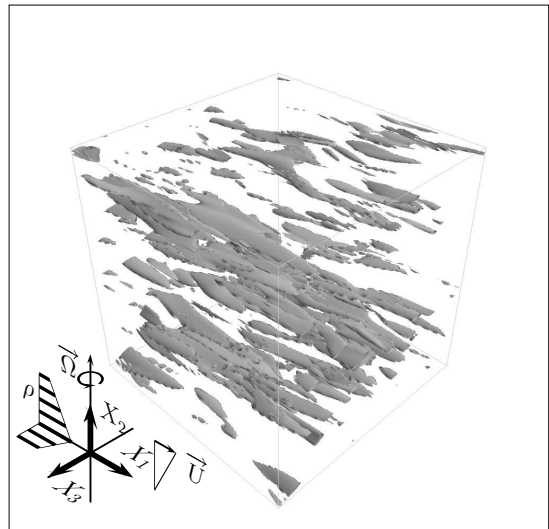
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 35% du max



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 10% du max

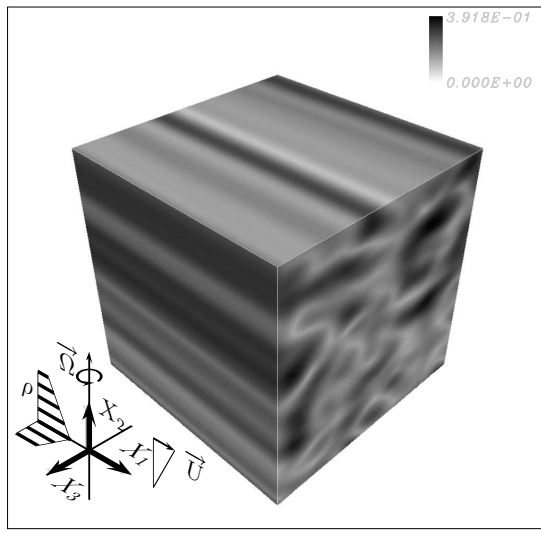


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 40% du max

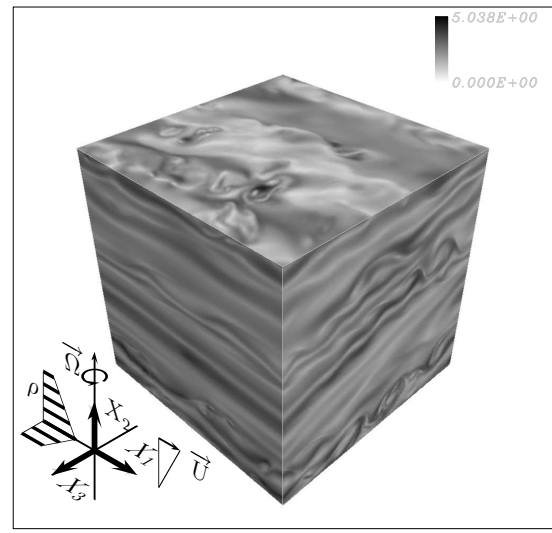


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$); à 20% du max

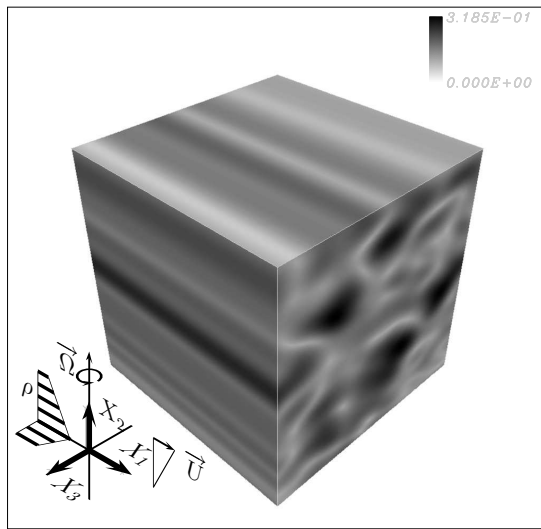
FIG. 3.43 – Structures cohérentes : série CALME à $t = 10$



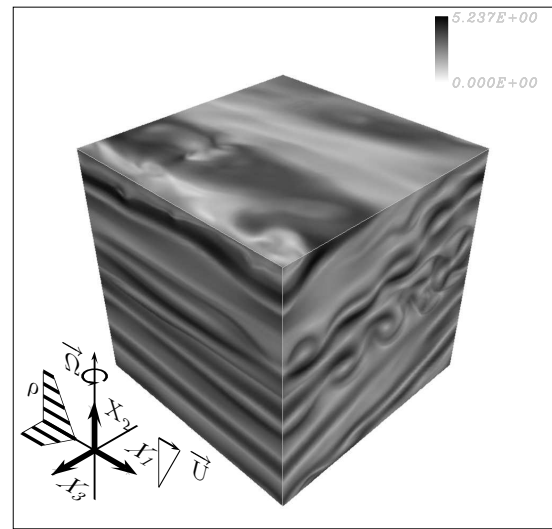
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



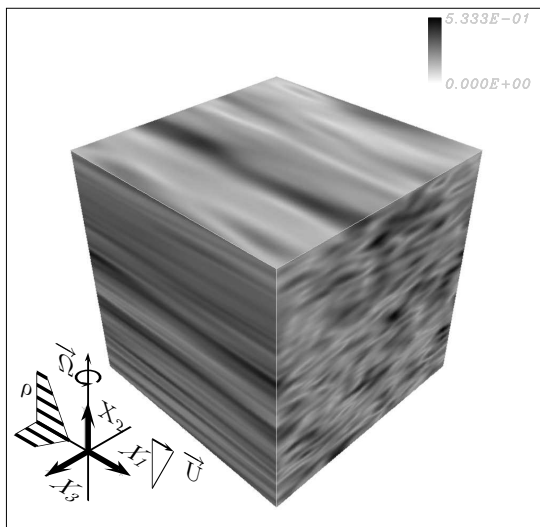
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



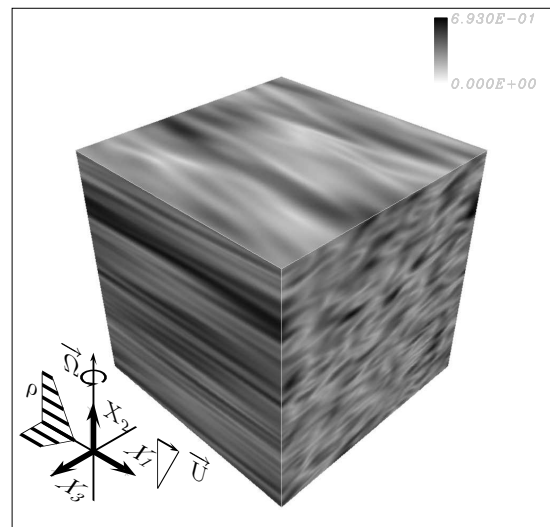
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

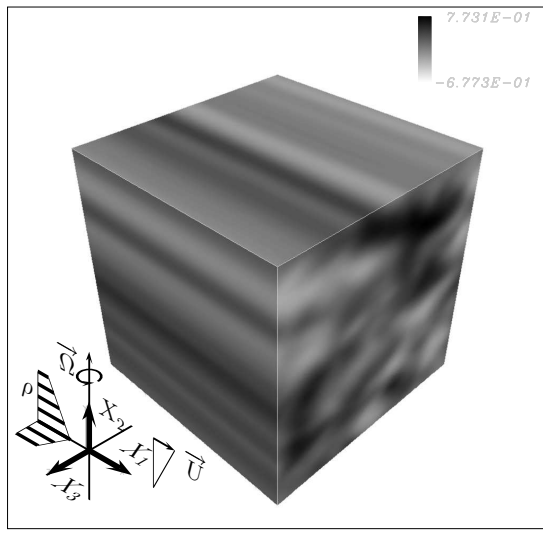


(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

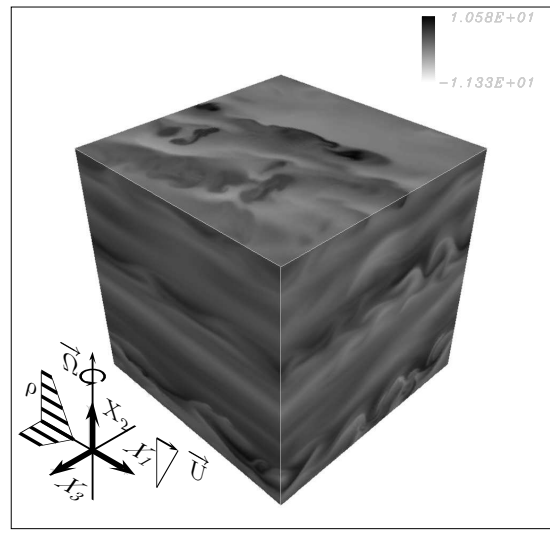


(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

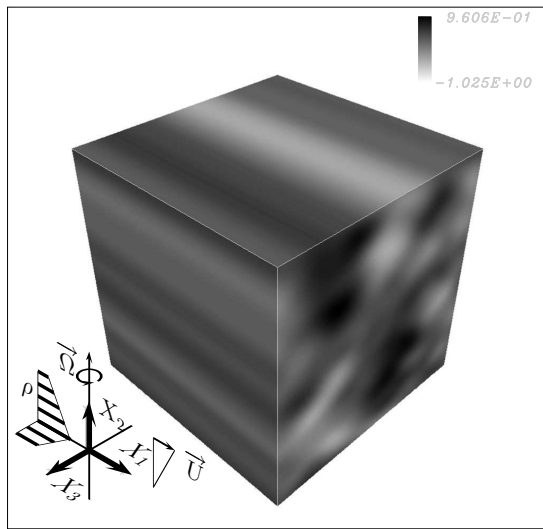
FIG. 3.44 – Valeurs de vitesses sur les 3 plans : série CALME à $t = 10$



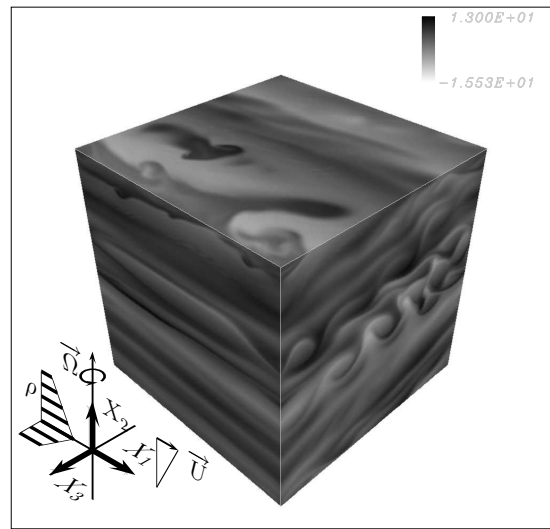
(a) Réalisation MICROATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



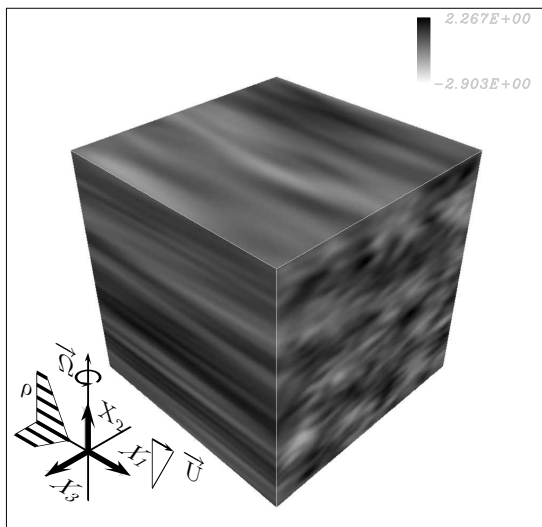
(b) Réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



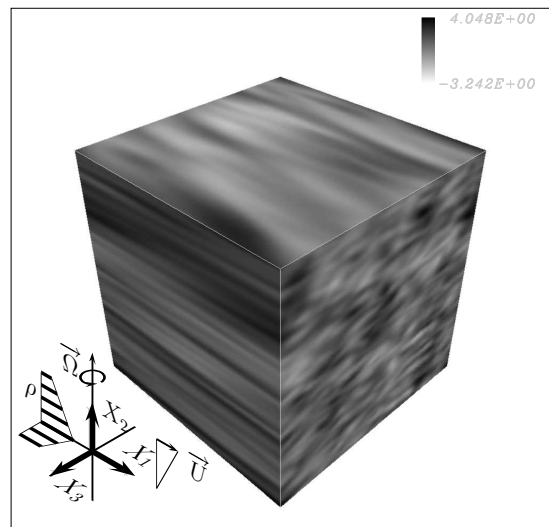
(c) Réalisation INTERATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(d) Réalisation INTEROCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(e) Réalisation SYNOATMOCALME ($\epsilon = 0.001$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)



(f) Réalisation SYNOOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$)

FIG. 3.45 – Valeurs de flotabilité sur les 3 plans : série CALME à $t = 10$

3.11.2 Instabilité de type Kelvin-Helmholtz dans le plan vertical-longitudinal

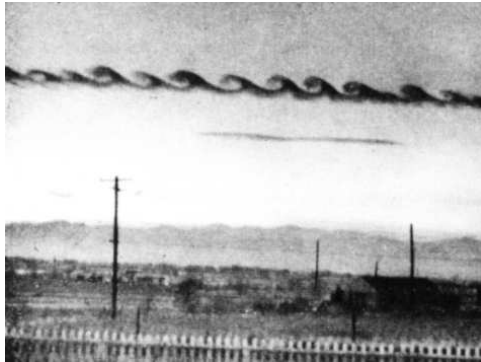


FIG. 3.46 – Photographie prise par P.E. Branstine en 1953 au dessus de Denver de forme nuageuse d’instabilité de Kelvin-Helmholtz, Colorado tiré de D. Colson 1954 [25]

Les mécanismes d’instabilité entre des couches de différente densité furent d’abord remarqués par Herman von Helmholtz en 1868. C’est en 1971 que William Thomson alias Lord Kelvin pose l’équation et résout le problème de l’instabilité qui deviendra par la suite l’instabilité de Kelvin-Helmholtz (pour plus de détails sur l’instabilité de Kelvin-Helmholtz le lecteur est orienté vers le livre de P.G. Drazin et W.H. Reid 1981 [34] p14). Cette instabilité arrive couramment dans l’atmosphère mais elle n’est visible à l’œil nue que si des nuages sont présents. Les instabilités de Kelvin-Helmholtz sont une source de turbulences dans l’atmosphère appelées “turbulences en ciel clairs”, car ce type de turbulence n’est pas visible à l’œil nu. La “turbulence en ciel clair” est un problème pour les aviateurs. Bien qu’il existe

de nombreuses images sur les instabilités de Kelvin-Helmholtz il a été choisi de montrer l’emblématique photographie de P.E. Branstine visible sur la figure 3.46 et tirée de D. Colson 1954 [25]. Des structures de type instabilité Kelvin-Helmholtz sont observées dans les écoulements à énergie croissante de la présente thèse. Pour la réalisation MICROOcéANRENFORCÉ ce type d’instabilité est visible sur la figure 3.47. La “photographie” a été prise au temps $t = 16.6$. La coloration représente la valeur de la flotabilité. Si l’on regarde au centre de la figure on peut voir qu’une zone de faible densité va glisser en dessous d’une zone de forte densité. Notons que J.J. Riley et S.M. deBruynKops trouvent des structures d’aspect similaire en turbulence purement stratifiée avec une initialisation en tourbillons de Taylor-Green verticaux à grande échelle (voir l’image dans [112], p2054, fig9-bas). Selon les auteurs ces structures sont induites par le cisaillement local d’une couche sur l’autre.

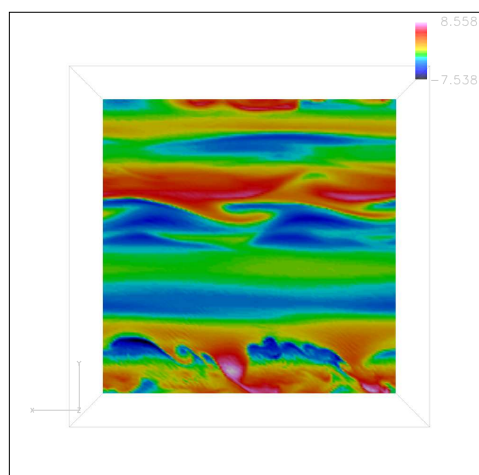


FIG. 3.47 – Plan vertical-longitudinal : réalisation MICROOcéANCALME . La figure ci-dessus représente la valeur de la flotabilité à $t = 16.6$ pour la réalisation MICROOcéANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$. Le cube est coupé suivant la direction verticale et la direction longitudinale. Les couleurs vers le rouge représentent les zones de forte flotabilité c’est-à-dire de faible densité. Les couleurs vers le bleu représentent les zones de faible flotabilité c’est à dire de forte densité.

3.11.3 Retournement dans le plan vertical-transverse

Un phénomène inattendu dans les simulations numériques directes baroclines est la présence de retournements dans la direction méridionale visible sur la figure 3.48 (et aussi sur les figures précédentes 3.44(b), 3.45(b), 3.44(d) et 3.45(d)). Ces retournements ont une forme proche des instabilités des Kelvin-Helmholtz. Rappelons qu'il n'y a pas de cisaillement moyen de vitesse dans la direction méridional. Dans le plan méridional les structures sont alignées suivant la direction Sud-Bas vers Nord-Haut. Ce résultat est à rapprocher de celui de Y.D. Afanasyev et al. (2006, [2],p33,fig9) qui a montré expérimentalement qu'un écoulement barocline instable génère des ondes de gravité internes dans la direction méridionale.

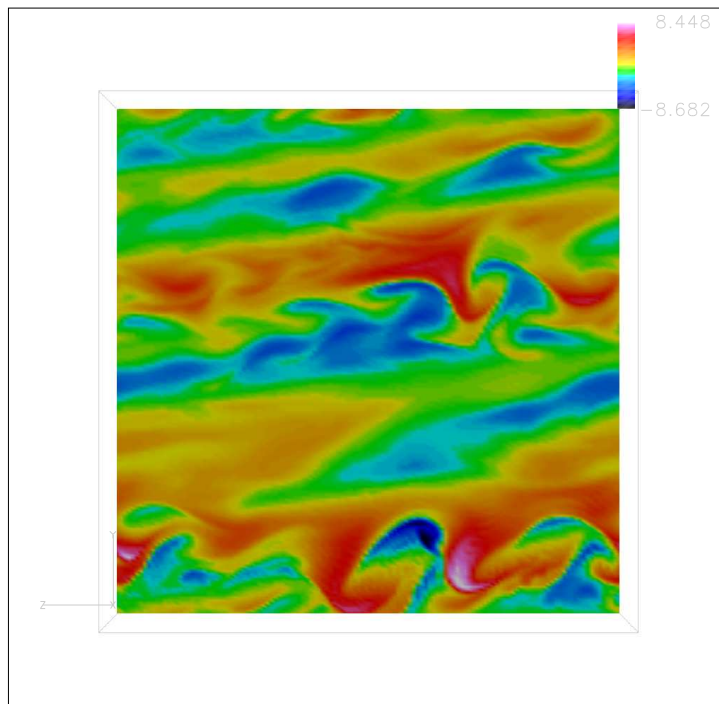
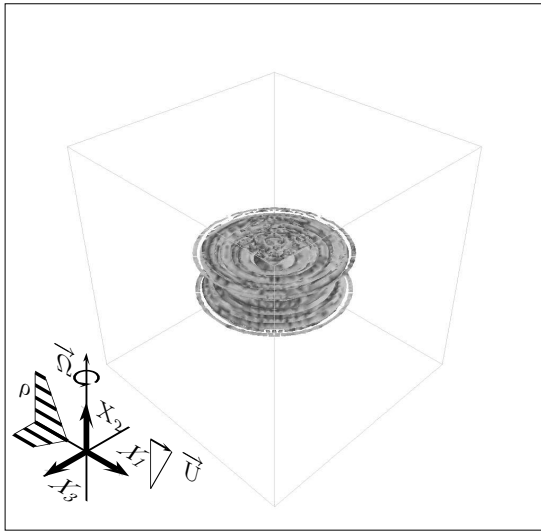


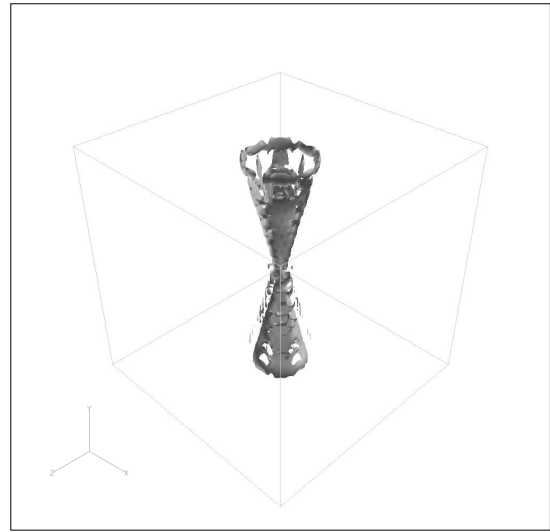
FIG. 3.48 – Plan vertical-transverse : réalisation MICROOCÉANCALME . La figure ci-dessus représente la valeur de la flotabilité à $t = 16.6$ pour la réalisation MICROOCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$. Le cube est coupé suivant les directions verticale et transverse.

Forçage local en espace physique, ondes et propagation de l'énergie :

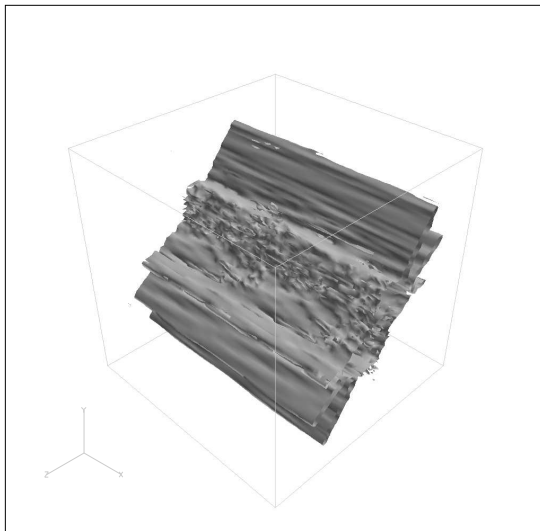
Dans le fluide stratifié il est observé des ondes interne (3.49(a)) de gravité et dans le fluide tournant des ondes d'inertie (3.49(b)). Lorsque le cisaillement et la stratification sont toutes les deux présentes les surfaces énergétiques sont étendues dans la direction de l'écoulement. Dans ce dernier cas la direction des rayons dans la direction transverse est la même que celle pour les ondes de gravité interne représentées à la même valeur de la fréquence de Brunt-Wäisäilä. Dans le cas d'un écoulement barocline la dispersion de l'énergie perd la symétrie par rapport au plan vertical-longitudinal (visible sur la planche 3.49). Cela est probablement dû au gradient de densité horizontale. Pour les cas baroclinie il semblerait qu'il y ait deux directions privilégiées pour la direction de la propagation de l'énergie. Les deux directions sont inclinées dans la direction Sud-Bas en Nord-Haut comme les déferlements tourbillonnaire vue précédemment. L'inclinaison des ondes "d'inertie-gravité barocline" (dans le plan $x_1 = 0$) et l'orientation des déferlements se font tous les deux suivant une inclinaison des pentes valant environ $\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$.



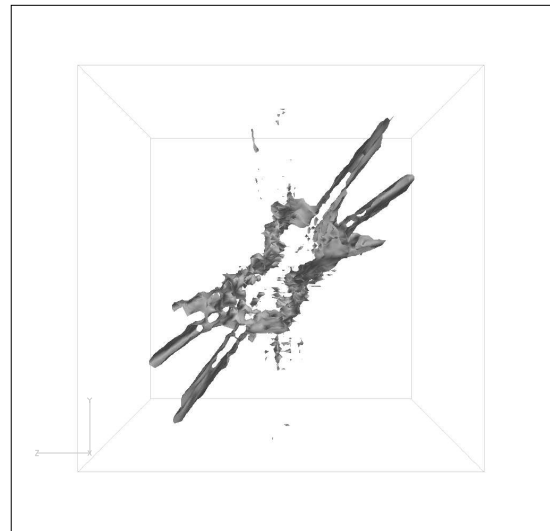
(a) Onde interne : vue isométrique



(b) Onde d'inertie : vue isométrique



(c) Propagation barocline : vue isométrique



(d) Propagation barocline : coupe verticale-méridionale

FIG. 3.49 – Forçage dans l'écoulement stratifié pur, en rotation pur et barocline. Sur les quatre figures de la planche sont représentées les surfaces iso-valeurs de la norme de la vitesse valant 10^{-6} à $10^{-2}\%$ de la valeur maximale ($\mathbf{x} / w_i(\mathbf{x})w_i(\mathbf{x}) = 10^{-2} \max(w_i(\mathbf{x})w_i(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}}$). Le forçage ponctuel s'effectue au centre du cube. Pour le fluide stratifié pur la visualisation est effectuée au temps $t_f = 12.1$ avec $f = 2$. Pour le fluide en rotation pur la visualisation est effectuée au temps $t_N = 9.1$ avec $N = 2$. Pour le fluide barocline la visualisation est effectuée au temps $t_S = 100$, $t_f = 16$ ou $t_N = 16$. Les temps adimensionnées sont définies par $t_S = \frac{t}{\tau_S}$, $t_f = \frac{t}{\tau_f}$ et $t_N = \frac{t}{\tau_N}$. Le temps caractéristique du cisaillement est défini par $\tau_S = \frac{1}{S}$. Le temps caractéristique de l'oscillation des ondes internes est défini par $\tau_N = \frac{2\pi}{N}$. Le temps caractéristique de l'oscillation des ondes inertielles est défini par $\tau_f = \frac{2\pi}{f}$. Le taux de cisaillement vaut $S = 2$, la fréquence des ondes inertielles vaut $f = 2$ et la fréquence de Brunt-W s il  fixée à $N = 2$.

3.11.4 Tourbillons jetaux dans le plan horizontal

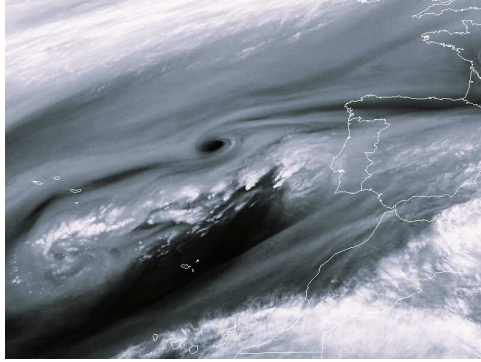


FIG. 3.50 – Photographie d'un tourbillon jetal le 10 Avril 2006 obtenu à partir du satellite Meteosat-8 et traité par P. Chadwick et J. Kerkmann - copyright 2006 EUMETSAT

suivant la direction Sud-Ouest vers Nord-Est. L'image 3.50 est un tourbillon cyclonique à l'Ouest du Portugal (île de Madeira). Le tourbillon évolue dans la direction Nord-Est vers Sud-Ouest c'est-à-dire suivant la même orientation que les tourbillons de la figure 3.51.

Les réalisations à énergie croissante font apparaître des structures de tourbillons jetaux dans le plan horizontal. Ces structures de tourbillons sont visibles sur la figure 3.51 qui est un plan de coupe horizontale au temps $t = 16.6$ du cube de turbulence du calcul INTEROCÉANCALME. Le calcul INTEROCÉANCALME est défini par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$. Z. Yin et T. Tang (2006, [138],p6) observent, avec une simulation basée sur les équations de Boussinesq axisymétriques, des structures d'aspect similaires à celle de la figure 3.51. Les écoulements stratifiés obtenus expérimentalement avec un forçage chaotique par Y.D. Afanasyev (2003, [1],p80,fig1) ont des ressemblances avec ceux obtenus dans la présente étude à la figure 3.51. Les tourbillons de Y.D. Afanasyev sont générateurs d'ondes internes. Une différence intéressante est que les tourbillons de la figure 3.51 sont tous alignés suivant la direction Sud-Ouest vers Nord-Est.



FIG. 3.51 – Plan horizontal : réalisation MICROOCÉANCALME. La figure ci-dessus représente la valeur de la flotabilité à $t = 16.6$ pour la réalisation MICROOCÉANCALME ($\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$). Le cube est coupé suivant l'horizontale. La couleur blanche représente la flotabilité positive (maximum ≈ 10) tandis que la couleur noire représente la flotabilité négative (minimum ≈ -10).

3.11.5 Turbulence verticale aux petites échelles



FIG. 3.52 – Campagne Cassini. Turbulence verticale de Saturne. L'image est prise le 20 Octobre 2004 à une distance de $5.9 \cdot 10^6 \text{ km}$ de Saturne avec un filtre sensible aux infrarouges. La résolution de l'image est de 69 km par pixel - Courtesy NASA/JPL-Caltech

Dans cette section nous allons montrer que les structures issues de nos simulations numériques directes sont très proches de celle observée dans l'atmosphère des planètes géantes telles que Saturne. On peut voir sur la figure 3.53 la teinte de la norme des fluctuations de vitesse dans le plan vertical et longitudinal de la réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$. La réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ a un nombre de Reynolds, basé sur l'échelle de Taylor initiale, plus important que celui de la réalisation INTEROCÉANCALME. On peut voir sur la figure 3.53 que l'écoulement est organisé en couches horizontales. Le même type de turbulence est visible sur la figure 3.52 qui représente une coupe verticale de l'atmosphère de Saturne. Bien que sur l'atmosphère de Saturne la sphéricité de la planète est clairement visible on observe des couches avec des retournements. L'étendu vertical de ces retournements est toujours du même ordre.

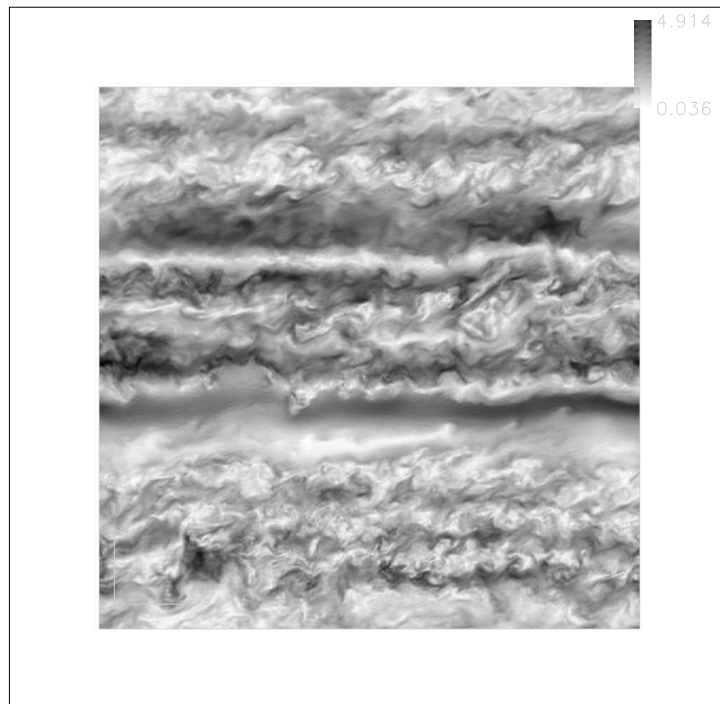


FIG. 3.53 – Plan vertical-longitudinal : réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ. La figure ci-dessus représente la valeur de la flotabilité à $t = 13.2$ pour la réalisation définie par $\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$. Le cube est coupé suivant la direction verticale et la direction longitudinale

3.12 Comparaison de la dynamique linéaire et non-linéaire

L'importance des non-linéarités va être quantifié. La seule différence entre les simulations linéaires et les simulations non-linéaires est que le terme $\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k$ est mis à zéro dans la simulation linéaire.

3.12.1 Influence de la dynamique non-linéaire sur l'évolution de l'énergie

Dans cette section nous allons comparer l'évolution de l'énergie totale des calculs linéaire et des calculs non-linéaires. Le champ initial ainsi que la viscosité et les autres paramètres sont les mêmes pour la simulation linéaire et la simulation non-linéaire. On peut voir en comparant les figures 3.54, 3.55 et 3.56 que sur des temps très courts de l'ordre de $tS = 5$ les calculs linéaires et les calculs non-linéaires ont le même comportement. La courbe du calcul linéaire (rouge) et la courbe du calcul non-linéaire (vert) sont très proches. On peut en conclure que pour $tS \lesssim 5$ la dynamique est entièrement dominée par les effets linéaires. Sur la figure 3.55 qui correspond à un nombre de Richardson $Ri = 0.99$ la dynamique linéaire et non-linéaire ont la même énergie mécanique jusqu'à $tS = 7.5$. Tandis que pour les calculs barocliniquement stables sur la figure 3.56 les énergies mécaniques turbulente sont quasiment identiques jusqu'à $tS = 15$. Des constatations précédentes on peut dégager la tendance suivante : plus le nombre de Richardson est élevé plus la théorie de distorsion rapide sera pertinente sur des temps longs. Remarquons aussi que sur la figure 3.56, bien que les deux courbes diffèrent sensiblement, elles restent du même ordre. Il semble que pour le cas stable la théorie de distorsion rapide garde une certaine pertinence même sur des temps longs puisque l'ordre de grandeur du terme non-linéaire $O(\frac{Em}{\min(L_u, L_b)})$ reste bien inférieur à l'ordre de grandeur des termes linéaires $O(\max(S, 2\Omega, N)\sqrt{Em})$. La différence énergétique entre la dynamique linéaire et la dynamique non-linéaire est due en grande partie à la vitesse verticale. Dans la dynamique linéaire la composante d'énergie verticale reste toujours quasiment nulle, même lors de l'instabilité. Dans la dynamique non-linéaire la vitesse verticale est soumise à une croissance exponentielle (voir la figure 3.57) avec un taux d'amplification de 1.

Maintenant pour investiguer les différences que l'on a trouvées entre les énergies linéaires et non-linéaires nous allons regarder la contribution énergétique échelle par échelle à travers les spectres.

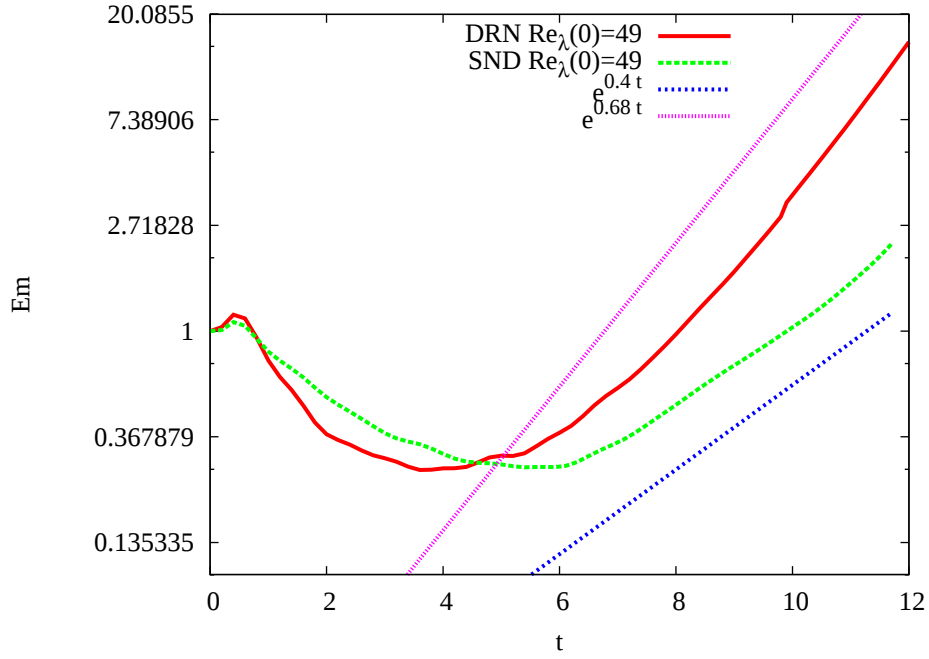


FIG. 3.54 – Comparaison du modèle de distorsion rapide linéaire avec la simulation numérique directe non-linéaire par l'évolution de l'énergie mécanique turbulente ou énergie totale turbulente sur $t = 9$ soit $tS = 45$ pour un cas barocliniquement instable $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.5$

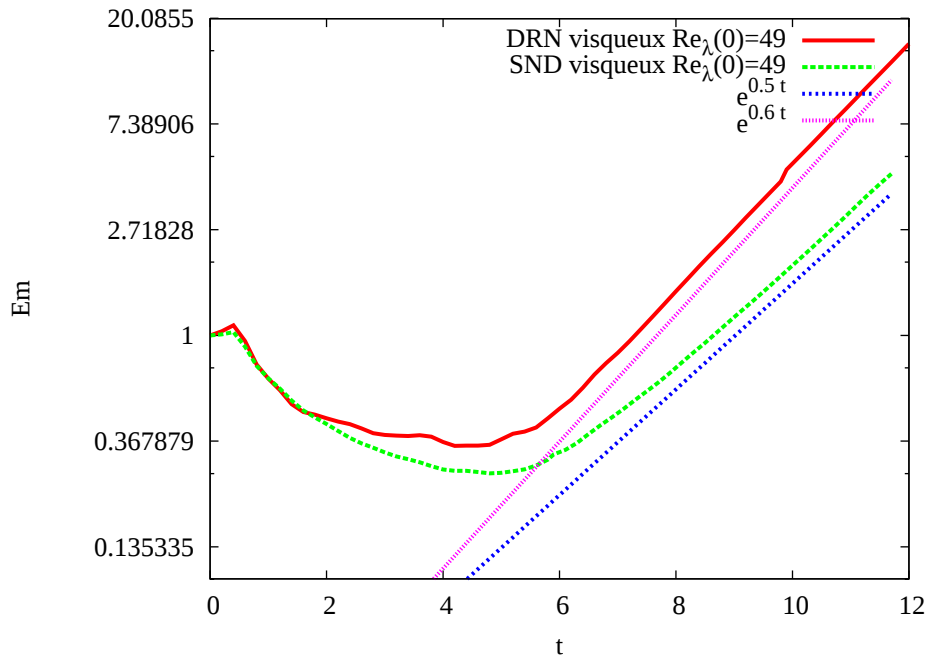


FIG. 3.55 – Comparaison du modèle de distorsion rapide linéaire avec la simulation numérique directe non-linéaire par l'évolution de l'énergie mécanique turbulente ou énergie totale turbulente sur $t = 9$ soit $tS = 45$ pour un cas barocliniquement instable $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$

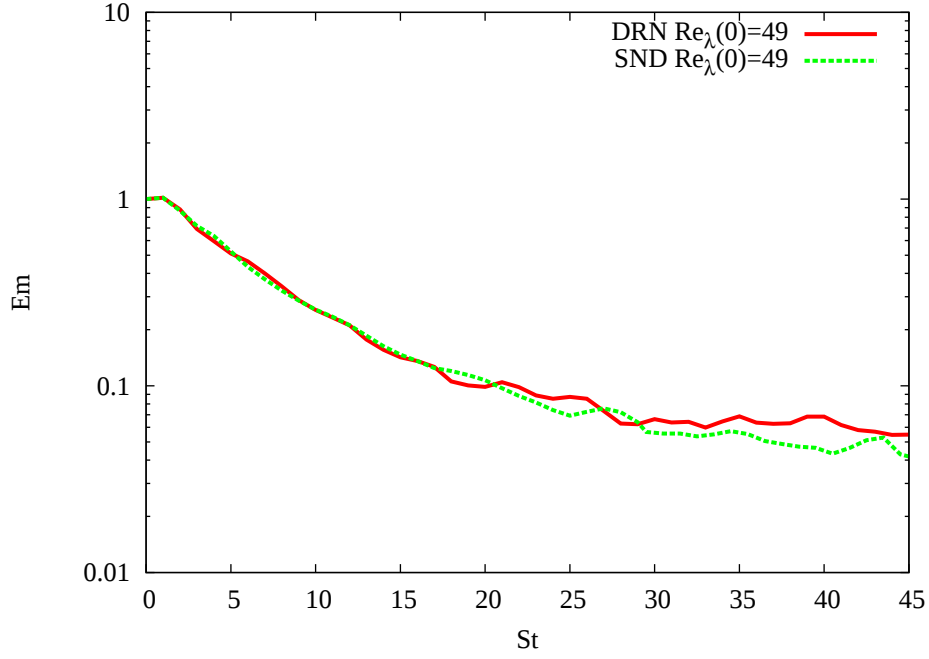


FIG. 3.56 – Comparaison du modèle de distorsion rapide linéaire avec la simulation numérique directe non-linéaire par l'évolution de l'énergie mécanique turbulente ou énergie totale turbulente sur $t = 9$ soit $tS = 45$ pour un cas barocliniquement stable $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 2$

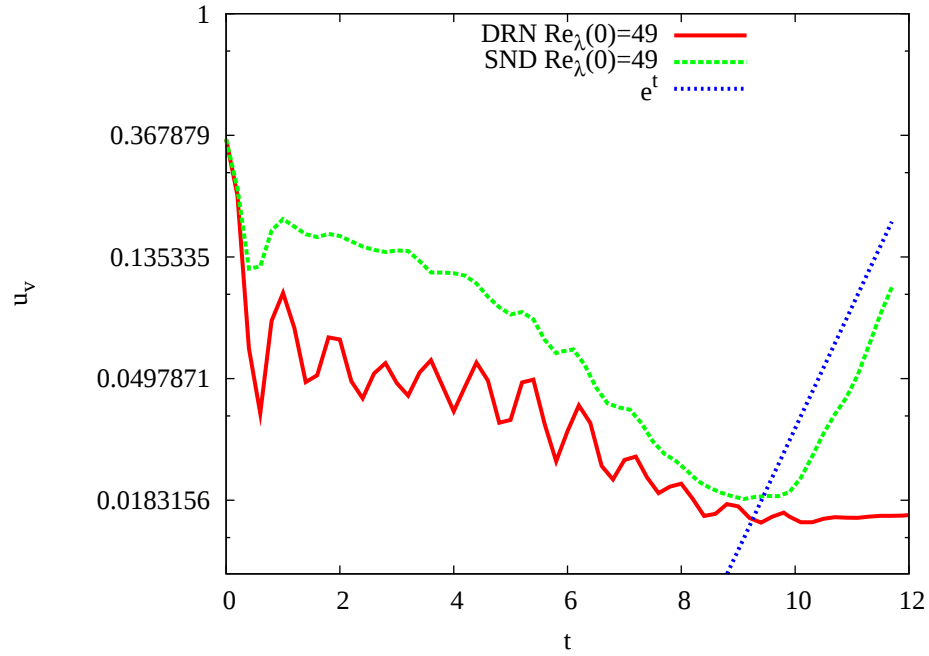


FIG. 3.57 – Comparaison du modèle de distorsion rapide linéaire avec la simulation numérique directe non-linéaire par l'évolution de la composante d'énergie verticale sur $t = 12$ soit $tS = 60$ pour un cas barocliniquement instable $\epsilon = 0, 2$ et $Ri = 0, 5$

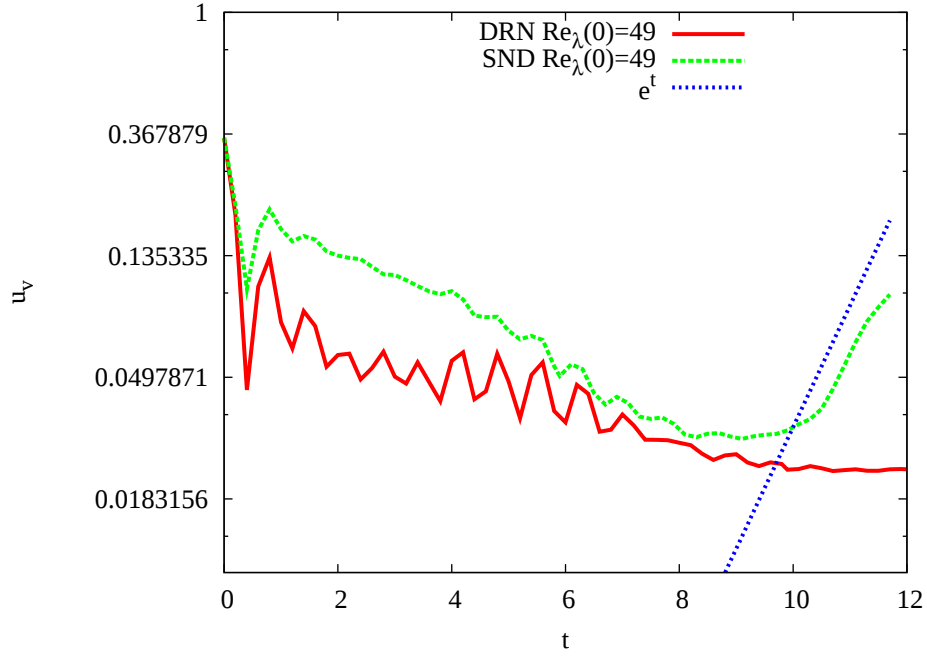


FIG. 3.58 – Comparaison du modèle de distorsion rapide linéaire avec la simulation numérique directe non-linéaire par l'évolution de la composante d'énergie verticale sur $t = 12$ soit $tS = 60$ pour un cas barocliniquement instable $\epsilon = 0,2$ et $Ri = 0,99$

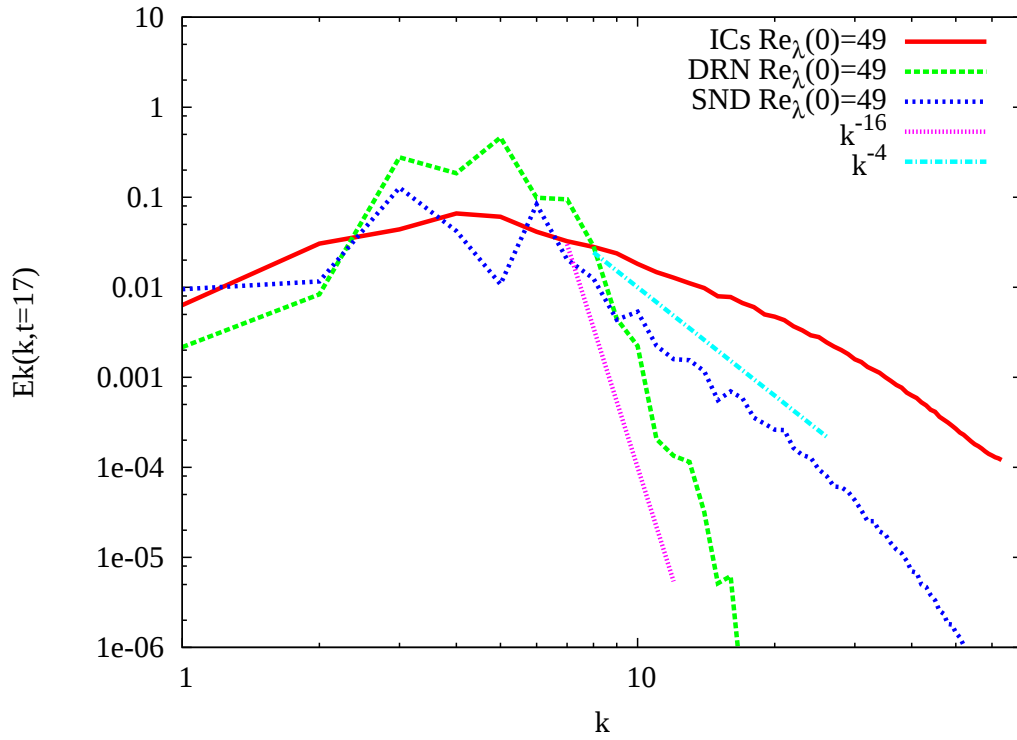


FIG. 3.59 – Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$ MICROOCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$

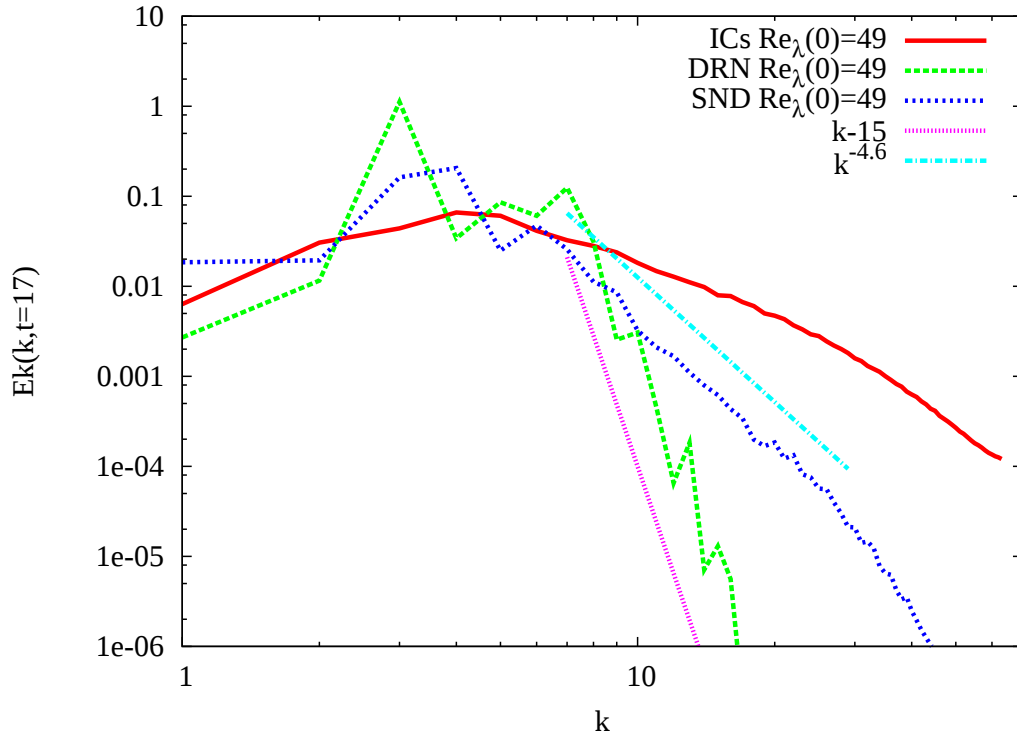


FIG. 3.60 – Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$ INTEROCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$

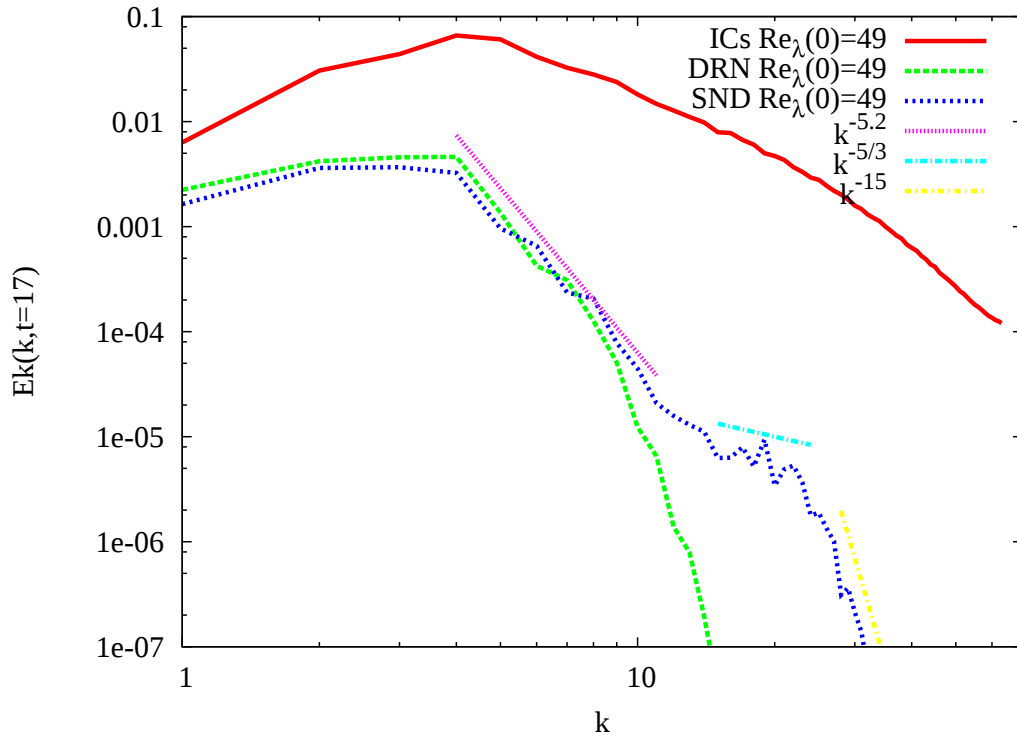


FIG. 3.61 – Linéaire vs Non-linéaire : spectres $Ek(k, 17)$ SYNOOCÉANCALME définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$

3.12.2 Les spectres de la dynamique linéaire, non-linéaire et réelle

Dans cette section nous allons inspecter les spectres d'énergie et essayer de définir dans quelle mesure les simulations de turbulence barocline, que nous avons effectuées précédemment, sont représentatives de la turbulence géophysique. Il est difficile de comparer les spectres atmosphériques à notre simulation numérique car, d'une part, les mesures atmosphériques sont prises dans un environnement inhomogène. D'autre part les mesures sont souvent moyennées en temps tandis que dans notre étude la dynamique des statistiques est fortement instationnaire. Malgré cela on remarquera que dans l'atmosphère il est souvent fait référence à un spectre en k^{-3} sur les grandes échelles et un spectre en $k^{-5/3}$ à des échelles inférieures (voir le tableau 3.9 pour une comparaison). Dans l'océan il semblerait que les spectres soient en k^{-5} comme mesurés par D. Stammer (1997, [125]). Dans leur expérience en cuve tournante différentiellement chauffée M.E. Bastin et P.L. Read (1997,[5]) trouvent des pentes en -5 tandis que lorsque ils ajoutent des pentes inclinées au fond et en haut de la cuve ils trouvent des pentes en -3 (M.E. Bastin et P.L. Read, 1998,[6]). B. Galperin a montré que le spectre en n^{-5} semble être une caractéristique universelle des planètes géantes (2004, [42]) qui peut être retrouvée dans la dynamique océanique (2004, [40]). Notons aussi que P.S. Marcus trouve des pentes en -5 pour la planète gazeuse géante Jupiter (2000, [86]). Il est peu probable que l'on retrouve avec nos simulations numérique directes les mêmes pentes mais il est intéressant de noter que sur une grande plage de nombres d'ondes il y a un changement de la pente du spectre des mesures géophysiques (voir le tableau 3.9). Pour les spectres des calculs à énergie croissante

Écoulement	Quantité	Pentes	Notes	Source
Océan	$E_H(k_H)$	-5	TOPEX - POSEIDON	D. Stammer 1997 [125]
Tropopause	$E_{11}(k_H)$ $E_{22}(k_H)$ $E_\Theta(k_H)$	-3 puis $-\frac{5}{3}$	Avions de lignes GASP	G.D. Nastrom & K.S. Gage 1985 [98]
Troposphère	$E_c(n)$	≈ -3	FGGE - IIIa1979	G.J. Boer & T.G. Shepherd 1983 [10]
Troposphère à 3.89 km	$E_{11}(k_1)$	> -3 puis $< -\frac{5}{3}$	IOE1964	Y. Hsueh 1968 [61]
Troposphère à 3.89 km	$E_{22}(k_2)$	-3 puis $-\frac{5}{3}$	IOE1964	Y. Hsueh 1968 [61]

TAB. 3.9 – Spectre mesuré dans les écoulements géophysiques. La définition des acronymes présents dans le tableau ci-dessus est : IOE1964 pour la campagne de mesure Indian Ocean Experiment conduite en 1964. GASP pour Global Atmospheric Sampling Program. Comme précédemment les symboles H désignent l'horizontale et V la verticale. L'indice de l'harmonique sphérique analogue de à k_H est notée n .

représentées sur les figures 3.59 et 3.60 nous n'observons pas de brisure dans la pente du spectre. Ceci est probablement dû au fait que les transferts non-linéaires entre nombres d'ondes sont trop importants. Le spectre de la dynamique linéaire est moins étendu que

celui de la dynamique non-linéaire. Pour les cas de dynamique linéaire instable on observe des croissances de l'énergie dans la zone $k \in [2, 9]$. En comparant le spectre de la dynamique linéaire (vert) et le spectre de la dynamique linéaire des cas instables on peut voir que les termes non-linéaires transfèrent de l'énergie issue de l'instabilité linéaire à tous les nombres d'ondes. On observe la dominance d'une cascade directe : l'énergie issue de l'instabilité linéaire entre les nombres d'ondes $k \in [2, 9]$ est transmise aux nombres d'ondes inférieurs à 9. Étant donné que le nombre d'ondes $k = 1$ voit son énergie augmentée dans les simulations instables on peut envisager une cascade inverse pour les nombres d'ondes supérieurs à 2 mais il faudrait faire des simulations avec un plus grand nombre de degrés de liberté pour être affirmatif à ce sujet. Les simulations localement barocliniquement stables font apparaître une brisure dans la pente du spectre non-linéaire. Cette brisure apparaît vers $k = 12$ (voir la figure 3.61). Une telle brisure est aussi observable sur les simulations à plus haute résolution (256^3) que nous avons vues sur les figures 3.35(c) et 3.36(c). On peut imaginer que le point de brisure correspond à une zone où les transferts d'énergie sont dominés par une dynamique non-linéaire. Quoi qu'il en soit cette pente est causée par la dynamique non-linéaire car elle n'apparaît pas dans les calculs linéaires. On remarquera aussi que pour les calculs à énergie décroissante sur les grandes échelles du mouvement les spectres sont quasiment identiques. C'est pour cela que les valeurs de la densité d'énergie que nous avons vue sur la figure 3.56 sont très proches. L'ordre de grandeur de la valeur de l'énergie est défini par les petits nombres d'ondes car ils sont plus énergétiques que les grands nombres d'ondes. Par contre les petites différences que l'on peut voir sur la figure 3.56 sont dues aux différences des grands nombres d'ondes que l'on peut voir sur la figure 3.61. Remarquons que les calculs linéaires stables et instables font apparaître une pente de l'ordre de 5.2 sur les grandes structures ce qui est cohérent avec les mesures effectuées par D. Stammer (1997, [125]) de pentes en -5 dans l'océan.

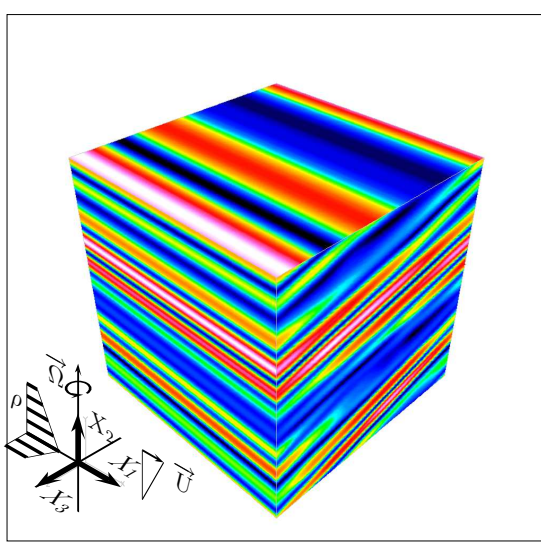
Maintenant nous allons essayer de caractériser l'influence des non-linéarités pour un observateur de l'espace physique.

3.12.3 L'influence des non-linéarités dans la génération des structures cohérentes

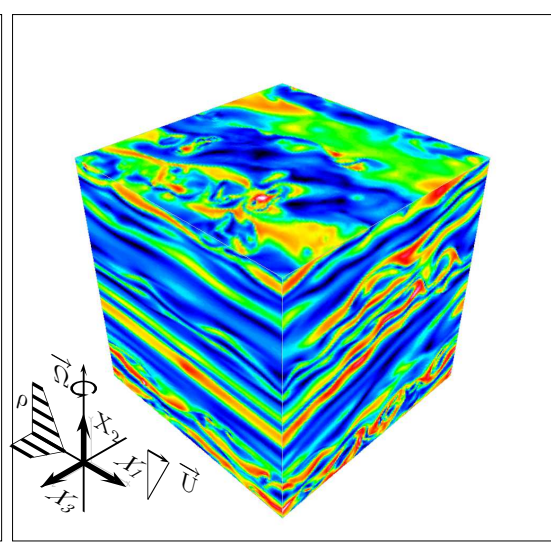
Dans cette section nous allons comparer les visualisations des simulations linéaires et des simulations non-linéaires en même temps, pour montrer que des phénomènes complexes des petites échelles ne sont visibles que dans les simulations non-linéaires. On peut voir sur toutes les visualisations de la planche 3.62 que l'écoulement est à dominante zonale. Ceci est tout à fait en accord avec la dynamique des écoulements planétaires qui est dans la majorité des cas à dominante zonale (M.E. Bastin et P.L. Read, 1997, [5] ; U. Schneider, 1990, [122] ; R.L. Panetta, 1993, [102] ; P.S. Marcus et al., 2000, [86] ; S. Danilov et D. Gurarie, 2004, [29] ; B. Galperin et al., 2004, [41] ; Y. Kaspi et G.R. Flierl, 2005, [70]). Pour les écoulements barocliniquement instables on observe une orientation préférentielle dans le plan méridional-vertical. Le plan d'iso-valeur de vitesses s'oriente suivant une direction Bas-Sud en Haut-Nord. Le même type d'orientation a été remarqué lors du forçage local des ondes baroclines sur la planche 3.49. On peut en déduire que cette orientation est due à la dynamique linéaire barocline. On peut voir sur les figures non-linéaires de cas baroclines instables que l'orientation persiste malgré les retournements tourbillonnaires (visualisation 3.62(b) et 3.62(d)). Le fait que l'orientation soit approximativement la même entre les visualisations instables à des nombres de Richardson différents laisse à penser que c'est le paramètre de baroclinicité ϵ qui gouverne l'angle d'inclinaison. On

peut voir en comparant les simulations linéaires et non-linéaires instables que la déstabilisation des courants zonaux est un phénomène non-linéaire car ils ne sont pas présents que dans la simulation linéaire. De même, les retournements tourbillonnaires dans le plan vertical-méridional et vertical-zonal sont des phénomènes non-linéaires. Les structures de l'écoulement stable sont quasiment identiques dans le cas linéaire et dans le cas non-linéaire. On observe des jets zonaux à section plus ou moins circulaire ("tubes") dans le plan vertical-méridional. Il n'y a pas d'orientation préférentielle dans le plan vertical-méridional des structures à grandes échelles. Dans le cas barocliniquement stable l'écoulement à grandes échelles semble dominé par le cisaillement et la stratification (formation de "tubes") mais nous avons vus dans les chapitres précédents (chapitre 2 et chapitre 3) que sur des temps longs des différences apparaissaient notamment dans les flux du scalaire par rapport à l'écoulement purement cisaillé-stratifié.

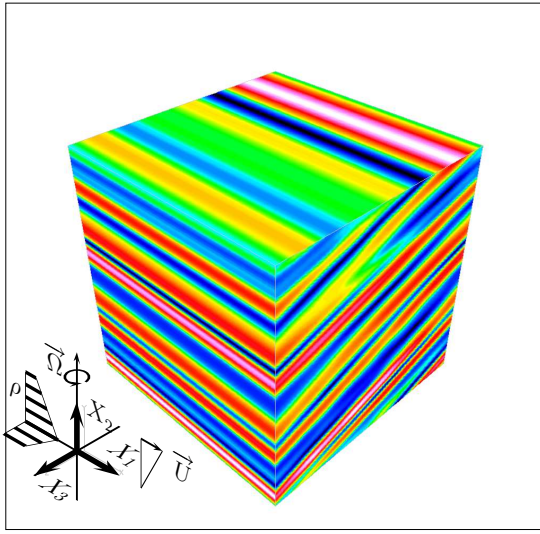
Si il y a un déferlement des ondes internes, est-ce que c'est le déferlement qui induit de la turbulence ou est-ce que c'est la turbulence qui induit le déferlement ? Dans l'océan et l'atmosphère il est observé une génération spontanée de turbulence. Cette turbulence semblant être corrélée avec les déferlements des ondes de gravité (W.H. Munk et C.J.R. Garrett, 1973, [94]), le problème est de savoir si c'est le déferlement des ondes internes qui induit la turbulence ou la turbulence qui entraîne un déferlement des ondes internes. C.H. Gibson (1998, [51]) conclut après une étude des mesures des facteurs d'intermittence dans l'océan que c'est la turbulence qui induit le déferlement des ondes internes. Si les retournements tourbillonnaires que l'on observe sur les figures 3.62(b) et 3.62(d) peuvent être assimilés à un déferlement d'ondes baroclines, nous aboutirons à la même conclusion que C.H Gibson, c'est-à-dire que c'est la turbulence qui induit un déferlement d'onde de gravité car la turbulence est un phénomène non-linéaire. Comment peut-on modéliser de tels phénomènes ? C'est à cette question que nous allons essayer de répondre dans la prochaine section.



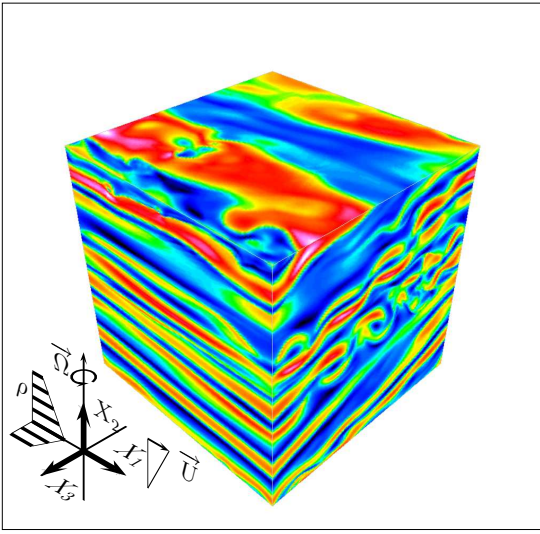
(a) Simulation linéaire $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$



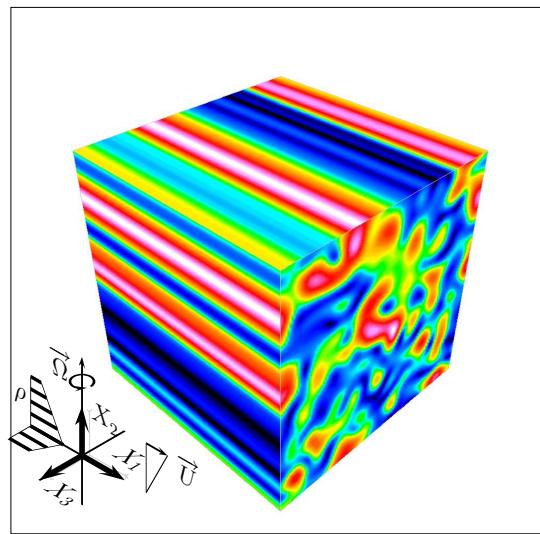
(b) Simulation non-linéaire $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$



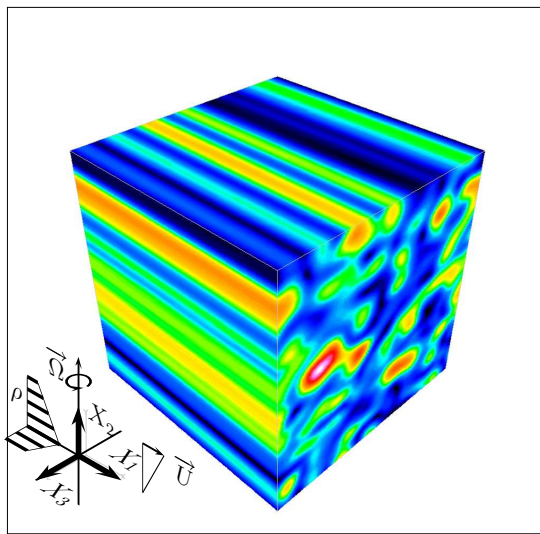
(c) Simulation linéaire $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$



(d) Simulation non-linéaire $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 49$



(e) Simulation linéaire $\epsilon = 0.2Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$



(f) Simulation non-linéaire $\epsilon = 0.2Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$

FIG. 3.62 – Visualisation 3D des simulations linéaires et non-linéaires avec 128^3 points de collocations aux temps $tS = 85s$. La couleur rouge représente les zones de fortes vitesses et la couleur bleue les zones de faibles vitesses. Toutes les simulations ont les mêmes conditions initiales qui est un champ de turbulence isotrope en décroissance libre

3.13 Modélisation des écoulements géophysiques

Dans cette section nous allons présenter brièvement un aspect du problème de la prédiction à long terme. Puis nous verrons que le problème barocline influence la formation d'évènements intenses comme les tornades. Enfin nous envisagerons des paramétrisations tridimensionnelles de notre boîte de turbulence en vue d'applications concrètes.

3.13.1 La prédiction à long terme

Nous avons vu que notre système contient plusieurs échelles de mouvement. Dans les problèmes de prédictibilité du climat, l'erreur est généralement confinée aux petites échelles. Le temps de prédictibilité maximum des écoulements turbulents peut être vu comme le temps pour qu'une erreur initialement localisée aux petites échelles contamine toutes les échelles du mouvement. Dans ce cas il y a deux possibilités de propagation de l'erreur (G.K. Vallis, 2005, [133], p401).

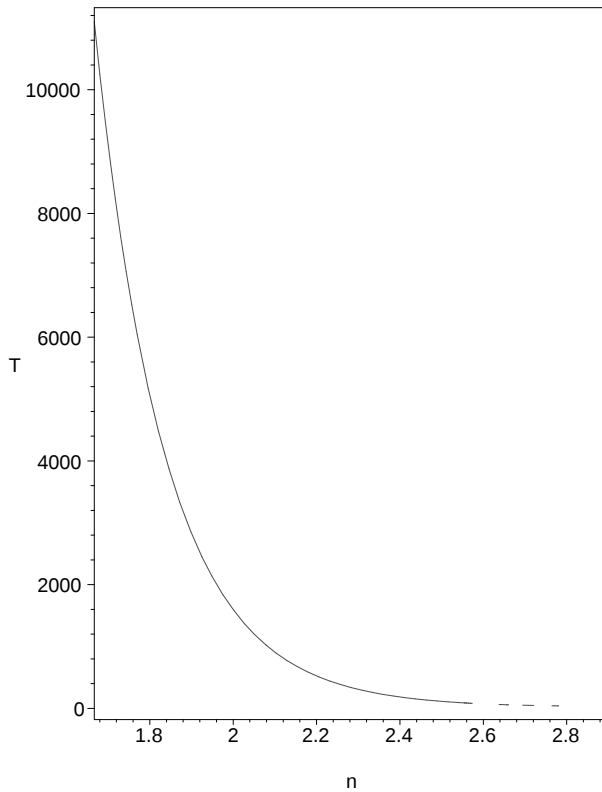


FIG. 3.63 – Temps de prédictibilité pour une transmission de l'erreur en cascade locale et lorsque la taille de l'erreur est confinée à l'infiniment petit pour des écoulements dont la pente du spectre est strictement inférieure à 3. En ordonnées est représenté le temps de prédictibilité T et en abscisse la pente du spectre n . La fonction qui est tracée est exactement $T(n) = \int_{\frac{2\pi}{4000}}^{\infty} (k^3 k^{-n})^{-1/2} d(\ln(k))$

Dans la première, l'erreur sur des petites échelles va mettre un temps de retournement tourbillonnaire $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{k^3 E(k)}}$ pour se propager. L'erreur se propagera jusqu'aux grandes échelles suivant des tourbillons de plus en plus gros. Notons que le temps de retournement tourbillonnaire spectral $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{k^3 E(k)}}$ est connu aussi sous le nom de temps de Onsager, pour plus de détails voir C. Bailly et G. Comte-Bellot 2003 ([3], p200). Dans le second scénario l'erreur effectuée aux petites échelles contamine immédiatement les grandes échelles. Avec une erreur initiale égale à l'amplitude des plus petites échelles et une erreur sur les grandes échelles qui croît exponentiellement. Par la suite pour des raisons de simplicité nous utiliserons le premier scénario de transmission d'erreur, c'est-à-dire la transmission de l'erreur par une cascade locale en espace de Fourier. Dans le modèle de cascade locale le temps de prédictibilité peut être facilement retrouvé à partir du spectre d'énergie

$$T = \int_{k^{PE}}^{k^{GE}} (k^3 E(k))^{-1/2} d(\ln(k)) \quad (3.14)$$

Pour un spectre de la forme $E(k) = Ak^{-5/3}$ le temps de prédictibilité est limité et cela même lorsque l'échelle de la perturbation est infiniment petite, cette limite s'exprime

ainsi :

$$T_A^{Kolmogorov} = \frac{3}{2\sqrt{A}} k_{GE}^{-2/3} \quad (3.15)$$

Pour comparer la prédictibilité des écoulements par exemple il est intéressant de considérer que le système a une énergie finie. Telle que $E_T = \int_{k_{GE}}^{k_{PE}} A(n, k_{GE}, k_{GE}) k^n dk$ dans ce cas et en notant u la vitesse caractéristique constante du système, le temps est de :

$$T^{Kolmogorov} = \frac{3}{2u} k_{GE}^{-1} \quad (3.16)$$

Le spectre en k^{-3} constitue une limite particulière pour le temps de prédictibilité. On peut voir sur la figure 3.63 le temps de prédictibilité maximum, pour prédire un écoulement d'échelle $L = 4000 \text{ km}$, lorsque le spectre de la dynamique est strictement inférieur à -3 . Dans le modèle de cascade locale le temps de prédictibilité de l'écoulement devient infinie lorsque la pente du spectre est telle que $n \geq 3$. Pour prendre un exemple plus concret, on va considérer un système à énergie constante telle que la vitesse construite à partir de l'énergie totale est $u = 30 \text{ m.s}^{-1}$. Avec comme grande échelle du mouvement $L_{GE} = 4000 \text{ km}$ et comme perturbation de petite non résolue $L_{PE} = 1 \text{ km}$ alors

$$T(n = 5) \approx 401 \text{ jours} \quad (3.17a)$$

$$T(n = 3) \approx 1 \text{ jours} \quad (3.17b)$$

$$T(n = 5/3) \approx 9 \text{ heures} \quad (3.17c)$$

On peut voir dans ce qui précèdent que les spectres à forte pentes en -5 sont plus prévisibles que les spectres en $-5/3$. Les petites perturbations non résolues peuvent être vus comme des ondes de gravité, des tornades ou autres phénomènes spontanés.

3.13.2 Anticiper les événements intenses

Le problème des événements intenses tels que les tornades peut paraître déconnecté de la présente étude car les instabilités baroclines sont classiquement étudiées pour la dynamique à grandes échelles. Les événements cycloniques intenses qui ont eu lieu en Europe de l'Ouest récemment sont comparables aux tornades spectaculaires d'Amérique du Nord. Partant de cette constatation il est intéressant de comprendre la dynamique de tels événements. Un lien entre la baroclinicité de l'écoulement à grande échelle et les tornades de petites échelles a été mis en évidence par E.N. Rasmussen et al. (2000, [109]). Selon C.A. Doswell il faut trois composantes pour avoir la présence possible de tornade :

1. *Synoptic and mesoscale upward motion*
2. *Sufficient moisture and lapse rate for a parcel to be positively buoyant*
3. *Vertical wind shear structure*

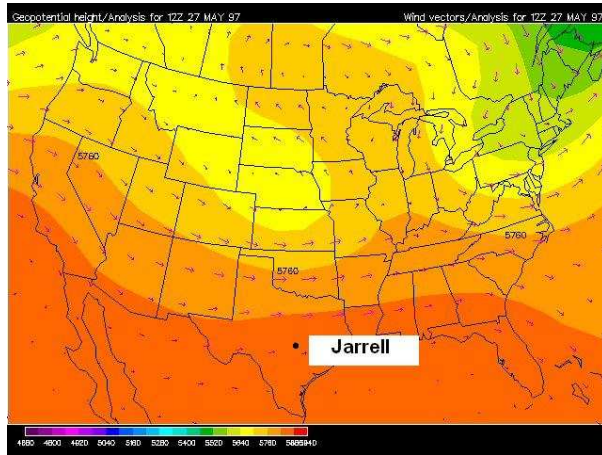
C. Church 1993

The tornado : its structure, dynamics, prediction, and hazards [23]

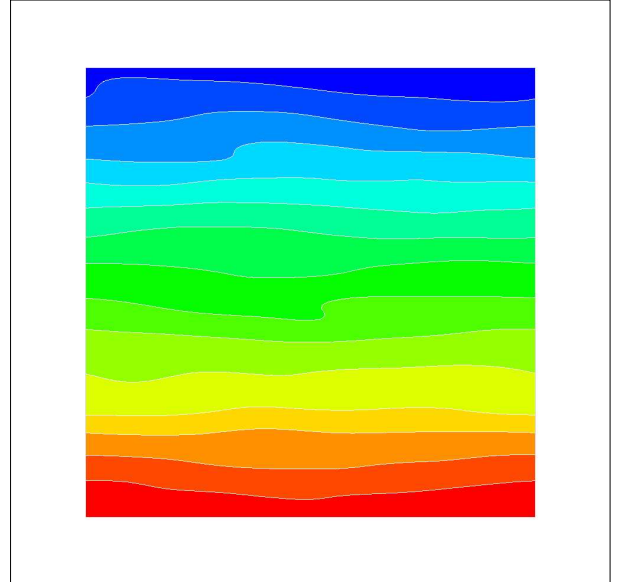
La composante 3 est naturellement bien satisfaite dans notre écoulement barocline. Pour ce qui est de la composante 2 elle peut être localement satisfaite pour une petite parcelle de fluide dans la boîte de turbulence (dans l'atmosphère l'air chaud et humide est généralement associé à une zone de flotabilité positive). La condition 1 est la plus dure à satisfaire, elle n'est pas satisfaite pour le mouvement moyen mais elle peut être satisfaite pour une parcelle de fluide dans la boîte de Fourier.

Sur la figure 3.64(a) on remarquera deux choses. D'une part la dominance zonale de l'écoulement (écoulement soufflant vers l'Ouest) et d'autre part le gradient de hauteur géopotentielle orienté du Nord vers le Sud (la hauteur géopotentielle est une indication de la température virtuelle). On peut voir que les figures 3.64(a) (dans la partie basse ou a lieu la tornade) et 3.64(b) ont toutes les deux une structure d'écoulement, à dominance zonale. Il est envisageable que des événements intenses (cyclone intense, coup de vent, tempête de poussière, tuba) sont dûs au forçage de l'écoulement moyen barocline sur la turbulence. Nous avons vu que pour la réalisation à énergie croissante MICROO-CÉANCALME (définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 0.5$ et $Re_\lambda(0) = 49$) des structures de petites taille très énergétiques, visibles sur la figure 3.43(a). Les structures visibles sur la figure 3.43(a) ont des forme variées, on peut apercevoir des tourbillons en épingles à cheveux, des tourbillons transverses, des tourbillons verticaux.

Pour prédire de tels événements atmosphériques il est nécessaire d'avoir une très bonne discrétisation de l'espace ce qui n'est pas toujours possible. Ces événement ont aussi une influences sur la dynamique a grandes échelles donc il est nécessaire de le paramétrer dans le modèle de circulations générales. C'est ce que nous allons voir dans la prochaine section.



(a) Tornade de classe F5 dans l'écoulement synoptique nommé Jarrell transporté par l'écoulement à dominante zonale à grande échelle. Le lieu de l'évènement intense tornadique est localisé sur la figure par un point noir. La couleur indique la hauteur géopotentielle pour un niveau de pression de 1,500 mb le 27 May 1997 à 1200 UTC La hauteur de géopotentielle est en dm . Courtesy of Plymouth State College tiré de S.F. Corfidi 2007 [26]



(b) Visualisation d'un écoulement zonal inhomogène avec gradient horizontal de flottabilité où la flottabilité exacte à été reconstruite à partir de la simulation numérique directe définie par $\epsilon = 0.2$, $Ri = 2$ et $Re_\lambda(0) = 49$. La vue est la même que celle de la figure 3.64(a) et l'échantillonnage des couleurs est similaire (rouge pour la forte flottabilité et bleu pour la faible flottabilité)

FIG. 3.64 – Écoulement zonal de grande échelle : comparaison entre un écoulement atmosphérique réel mesuré aux dessus de l'Amérique du Nord et l'écoulement issu des simulations numériques directes non-linéaires

3.13.3 Vers un nouveau modèle

Il existe un grand nombre de modèles de turbulences. Le choix d'un modèle est d'abord orienté par la puissance de calculs dont dispose l'utilisateur. Pour des applications complexes comme celle de l'atmosphère et de l'océan il est nécessaire d'avoir un modèle peut coûteux en temps de calculs et flexible. Par flexible nous entendons un modèle pouvant s'appliquer à des géométries variées.

Les modèles de fermeture en 1 point basé sur des tenseurs de structures pourraient être utile pour des applications de géophysiques industrielles. Pour des études plus fondamentales il serait intéressant d'aller vers un modèle de fermeture en 2 points. La paramétrisation des phénomènes des sous-maillages des instabilités baroclines sont généralement effectués à partir des équations quasi-géostrophiques ce qui constitue un sérieux défaut pour la paramétrisation des phénomènes tels que l'émission spontanée des ondes de gravité. La prévision des mouvements d'échelle synoptiques et d'échelles inférieures nécessite une bonne résolution des phénomènes de sous-maillages. Citons une dernière fois G. de Moore pour imager cette nécessité

la prévision numérique (à moins de 10 jours) semble requérir également une bonne description de la CLA, même pour le développement des ondes de quelques milliers de km sur 2 à 10 jours, et en tous cas pour les phénomènes de méso échelles (10 à 1000 km) même sur moins de 2 jours.

G. de Moor 1983 [31] Les théories de la turbulence dans la CLA p282

D'autant plus que T.M. Hamill et J.S. Whitaker ([55], 2005) ont montré que pour la prévision climatique une sous résolution du schéma numérique est plus pénalisant qu'une incertitude sur les conditions initiales. Des paramétrisations prenant en compte les instabilités baroclines ont été effectuées par A.A. White et J.S.A. Green (1982, [135]; 1984, [136]) mais celles-ci ont été effectuées à partir des équations quasi-géostrophiques. Les événements extrêmes intéressants sont probablement complètement filtrés par les équations quasi-géostrophiques étant donné leur petite taille et leur forte tridimensionnalité. Les échelles verticales $O(10\text{ m})$ - $O(100\text{ m})$ sont non résolues par les codes atmosphériques de simulation méso-échelles comme MM5 (2003, [82]). Dans leur rapport [82] où il est question d'une simulation numérique 3D inhomogène de haute précision du jet stream A. Mahalov et B. Nicolaenko arrivent à la conclusion qu'un paramètre autre que le nombre de Richardson de gradient doit jouer un rôle dans la paramétrisation. Le problème de leur simulation est qu'elle est inhomogène, donc l'identification des différentes contributions est difficile à établir. Dans la présente étude la relation est plus simple car les gradients de vitesse moyenne et de flottabilité sont constants. Dans la présente thèse il est clair que le nombre de Richardson de gradient n'est pas le seul paramètre de paramétrisation. Il y a au moins, en plus, le nombre de baroclinicité $\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$.

L'étude de la turbulence barocline pourrait avoir une influence sur la modélisation de la turbulence optique. La turbulence optique atmosphérique est définie comme la variation temporelle et spatiale de l'indice de réfraction qui est quantifié avec les échelles de turbulence supérieures à celle de Kolmogorov. Il est bien connu que la base stratosphère dans sa configuration stablement stratifiée est le siège d'un "feuilleteage" de forte turbulence optique jusqu'à des échelles de $O(1\text{ m} - 10\text{ m})$ et d'étendue horizontale relativement large (G.D. Nastrom et F.D. Eaton, 2001, [97]; H. Luce et al., 2002, [81]; F. Dalaudier et al., 2003, [28]). La présente étude peut, peut être, être utilisée pour perfectionner les modèles de turbulence optique atmosphérique car nous avons accès à toutes les échelles dans toutes les directions.

3.14 Conclusion

Les structures des écoulements anisotropes classiques (cisailés purs, en rotation pure et stratifié pure) ont été retrouvées ce qui confirme le bon fonctionnement du code de calcul **TR5**.

L'étude des fluctuations d'un écoulement moyen cisailé en présence de stratification ou rotation montre que les structures cohérentes longitudinales sont affectées par les ondes d'inertie-gravité.

Les études énergétiques des écoulements baroclines ont montré deux types d'évolution. D'une part une évolution à énergie croissante. D'autre part une évolution à énergie décroissante et oscillante en $t^{-0.6}$.

L'étude des échelles de Kolmogorov, de Taylor et intégrales a montré que les ondes affectent plus les grandes échelles que les petites. Pour les réalisations stables la croissance des échelles est en $t^{0.3}$ pour l'échelle de Kolmogorov, en $t^{0.25}$ pour l'échelle de Taylor et en $t^{0.20}$ pour l'échelle intégrale. Les échelles directionnelles indiquent la présence de phénomènes oscillant dans la direction verticale pour toutes les réalisations de la série géophysique. Et la réalisation stable SYNOcéANRENFORCÉ est le lieu de phénomènes ondulatoires importants dans la direction méridionale.

L'étude des nombres de Reynolds basée sur l'échelle de Taylor montre que l'état initial de la turbulence a une influence même pour les calculs "stables". Au temps $t = 30$ les réalisations "stables" ont un paramètre de cisaillement qui croît en $t^{0.5}$. Les réalisations "stables" font apparaître de très faibles nombres de Rossby et de Froude tandis que les réalisations "instables" ont des nombres de Rossby et de Froude valant $O(1)$ ce qui rend les approximations asymptotiques de type géostrophique invalides.

Nous avons donné les tendances d'évolution des tenseurs de structures en fonction des paramètres $[\epsilon, Ri, Re_\lambda(0)]$. L'étude du tenseur de Reynolds généralisé indique que c'est la composante zonale qui est la plus énergétique sauf pour les réalisations à $\epsilon = 0.2$ et $Ri = 0.99$ où c'est la composante méridionale. L'étude du tenseur d'anisotropie a montré que la corrélation zonale-méridionale normalisée se développe positivement pour les réalisations "instables". Les corrélations verticales-zonales et verticales-méridionales normalisées sont fluctuantes. Une étude des tenseurs de structures non conventionnelles de type KRR ont permis d'une part de mettre en évidence des structures zonales à dominance jetal pour la réalisation à $Ri = 2$ et de type héliçoïdale pour les réalisations à $Ri < 1$. D'autre part pour des nombres de Richardson $Ri < 1$ le tenseur de stropholysis symétrique a une importance non négligeable. Le tenseur des auto-corrélations de vorticité a montré que les calculs à $Ri < 1$ s'accompagnent d'une forte auto-corrélation de vorticité zonale et méridionale.

Les invariants de Lumley ont montré que contrairement à ce que l'on pouvait attendre ce ne sont pas les réalisations fortement stratifiées qui approchent de plus près une configuration bicomposante (2C). Les réalisations qui à un instant donné sont les plus proches du 2C sont MICROcéANRENFORCÉ et INTERocéANRENFORCÉ.

Pour la série RENFORCÉE les maximums de vitesse, d'entrophie et de densité d'hélicité sont obtenus pour la réalisation INTERocéANRENFORCÉ définie par $\epsilon = 0.2Ri = 0.99$ et $Re_\lambda(0) = 66$. Le skewness de vorticité verticale positif indique une prépondérance des cyclones sur les anticyclones pour tous les calculs de la série RENFORCÉE. Le flatness de vorticité verticale indique qu'il y a la présence d'événements extrêmes très localisés au temps $t \approx 10$ pour des réalisations instables.

Les spectres d'énergie sphérique font apparaître que pour les cas instables la croissance

de l'énergie est initiée par des zones bien localisées. La réalisation INTEROCÉANRENFORCÉ indique la possibilité d'une interaction triadique privilégiée. La réalisation stable garde une énergie au nombre d'ondes $k \approx 2.5$ quasiment constantes. Les réalisations instables font apparaître un grand panel de pentes spectrales mais dans leurs phase la plus énergétique la pente est en $-\frac{5}{3}$. De même la réalisation stable fait apparaître plusieurs types de pente dans la phase initiale de forte décroissance mais vers $t \approx 14$ il apparaît clairement deux pentes, l'une est en -4 et l'autre en $-\frac{5}{3}$ sur les nombres d'ondes inférieurs. Au temps $t = 1.58$ les grandes échelles ont plus d'énergie toroïdale que poloïdale tandis qu'aux petites échelles les structures ont plus d'énergie poloïdale. A l'échelle de la dissipation visqueuse les structures ont une quasi-équipartition d'énergie toroïdale, poloïdale et potentielle au temps $t = 1.58$.

Pour toutes les composantes à part pour la flotabilité des réalisations MICROOCÉANRENFORCÉ et INTEROCÉANRENFORCÉ les structures les plus énergétiques ont une grande dimension dans la direction zonale. La direction méridionale a des structures de grandes échelles mais moins grandes que celles de la direction zonale. Dans la direction verticale on peut aussi bien rencontrer des petites structures que des grandes structures. Les pics d'énergie des réalisations instables n'apparaissent pas aux plus grandes échelles. Sur des temps moyens $t \approx 12$, après que la croissance de l'énergie ait débuté, les réalisations instables ont un maximum d'énergies localisées vers le nombre d'onde $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$ c'est-à-dire aux vers les grandes échelles du mouvement physique. Les réalisations à énergie stable décroissante dissipent fortement les petites échelles mais la réalisation garde une énergie sur le mode $(0, 1, 1)$ quasiment constante ou fluctuante. Pendant la phase de décroissance les spectres d'énergie cinétique turbulente dans la direction zonale et méridionale font apparaître tous les deux des pentes en $k^{-2.2}$ à $t = 1.58$ tandis que le spectre d'énergie potentielle turbulente fait apparaître une pente en $k^{-0.85}$ au temps $t = 1.58$.

Les écoulements à énergie décroissante font apparaître des structures longitudinales pouvant s'apparenter aux structure de "bandes zonales" de nombreux écoulements géophysiques et astrophysiques. Pour les réalisations à énergie croissante il est observé un grand nombre de structures différentes. Des structures de type tourbillon en "épingle à cheveux" cohabitent avec des structures à forte cohérence longitudinale. Les visualisations des scalaires sur les plans du cube ont fait apparaître des retournements dans la direction méridionale ainsi qu'une tendance à un alignement des structures dans la direction Sud-Ouest vers Nord-Ouest (pour un écoulement géophysique dans l'hémisphère Nord). Les ondes de gravité gèrent la taille des échelles dans la direction verticale.

Pour les réalisations à énergie croissante on voit apparaître des structures classiques de type Kelvin-Helmholtz dans le plan vertical-longitudinal. Dans le plan méridional il a été mis en évidence que des retournements tourbillonnaires avaient lieu. L'orientation des retournements se fait suivant une inclinaison montante lorsque l'on se déplace vers le Nord. Le plan horizontal est le lieu de tourbillons jetaux comparable à ceux que l'on peut observer aux latitudes moyennes, ces tourbillons pourraient s'apparenter à une forme d'instabilité barocline. L'orientation de ces tourbillons est Nord-Est en Sud-Ouest. L'organisation de la turbulence dans le plan vertical est comparable à celle des planètes géantes comme Saturne. La TDR prédit très bien qualitativement la dynamique de l'écoulement barocline homogène. D'un point de vue quantitatif elle est plus précise pour les cas stables que les cas instables. Pour les cas stables l'énergie turbulente totale est quasiment identique à la simulation non-linéaire jusqu'à $St = 15$ et elle reste très proche au moins jusqu'à $St = 45$. Probablement parce que la turbulence d'ondes domine lorsque le calcul est énergétiquement stable. Pour les simulations instables la TDR reste précise pour la

prédiction de l'énergie turbulente totale jusqu'à $St = 5$. Pour des temps plus grands les tendances sont respectées mais l'énergie du calcul non-linéaire a une croissance moins importante que le calcul linéaire. Les visualisations 3D et les spectres tridimensionnels ont montré que ceci est dû à des échanges d'énergies entre nombres d'ondes. Plus précisément à un transfert d'énergie aux grands nombres d'ondes. Pour les modélisations en vue d'applications concrètes il est nécessaire de prendre en compte la forte anisotropie. Il semble envisageable d'effectuer une modélisation basée sur les tenseurs de structures pour les écoulements géophysiques complexes.

Conclusion et perspectives

Instabilités d'ondes longues

L'étude comparative effectuée dans le chapitre 1 a montré que les trois modèles classiques (Charney 1947, Eady 1949, Phillips 1954) étaient cohérents pour les instabilités d'ondes longues mais qu'il y a une grande différence sur les instabilités d'ondes courtes. Dans les modèles d'instabilité barocline classique la longueur d'onde du mode le plus instable est liée à l'échelle verticale de blocage. Cette échelle verticale de blocage est soit imposée par les conditions aux limites soit par l'effet- β . Malheureusement dans nos simulation tri-périodiques il n'y a pas de création de surface assez "dure" pour générer des instabilités d'ondes longues lorsque $Ri > 1$. Pour mieux comprendre ce phénomène il sera nécessaire d'effectuer des simulations bi-périodiques et mono-périodiques, où la simulation mono-périodique serait exactement la configuration du problème d'Eady 1949.

Instabilités locales

La présence d'un nouveau type d'instabilité à été mise en évidence lorsque le $Ri < 1$ démontré analytiquement par A. Salhi et C. Cambon^[119] Il est montré dans la présente thèse que le mode $k_1 = 0$ semble être le plus croissant et qu'il est suffisamment puissant pour déstabiliser l'écoulement. Cette instabilité est différente des instabilités des écoulements cisailés-stratifiés verticalement qui interviennent pour un $Ri \leq 0,25$. Elle pourrait être qualifiée d'instabilité barocline subsynoptique car elle intervient à des échelles plus petites que l'instabilité barocline classique.

Structures jetales

Des structures zonales sont souvent observées dans les écoulements des planètes géantes ainsi que dans l'océan. Les simulations numériques stables ont montré qu'une turbulence initialement isotrope s'organise d'abord en tourbillons d'aspect déterminé approximativement par le paramètre $\alpha = \frac{f}{N}$, puis sur des temps plus long les tourbillons s'allongent dans la direction zonale pour former des jets ou "tubes" zonales. La hauteur, la largeur et le nombre des "tubes" zonaux sont déterminés par les tourbillons verticaux formés après l'initialisation.

Structure de type “Kelvin-Helmholtz”

Dans le plan vertical-longitudinal il est observé des structures de type Kelvin-Helmholtz. Ceci n'a rien d'étonnant car de telles structures sont observée dans les écoulements cisailés. Par contre ce qui est remarquable est que cela apparait pour des écoulements ayant un nombre de Richardson supérieur au nombre de Richardson critique des écoulement cisailés-stratifiés sans rotation. C'est donc une particularité de l'écoulement barocline. Notons que le fait de trouver des instabilités de Kelvin-Helmholtz est cohérent avec la classification de P.H. Stone^[128] qui considère les instabilités de Kelvin-Helmholtz comme une classe d'instabilité barocline.

Déferlements d'ondes d'inertie-gravité baroclines

Dans le plan vertical-transverse nous avons observé des retournements tourbillonnaires. Ces retournements tourbillonnaires sont orientés de Sud-Bas en Nord-Haut. Cette orientation est la même que la propagation de l'énergie des ondes d'inertie-gravité baroclines vues au chapitre 3. Dans les calculs linéaires on observe la même orientation mais le déferlement n'a pas lieu. Lorsque $Ri > 1$ l'orientation particulière n'est pas observée. Pour établir la dépendance à (ϵ, Ri) de l'orientation des lignes dans le plan vertical-transverse il sera nécessaire d'effectuer d'autres simulations de turbulence homogène et de forçage d'onde. Pour comprendre le rôle des ondes d'inertie-gravité dans le mélange il serait aussi intéressant d'effectuer des suivis de particules lagrangiennes passives ou inertielles.

Cascade inverse ou directe

A quelle échelle est créée la turbulence ? Est-ce qu'elle est forcée aux grandes échelles par une instabilité de type barocline ou est-elle créée aux petites échelles pour se transmettre aux grandes échelles par un mécanisme de cascade inverse ? La turbulence est souvent initialement formée aux petites échelles par des phénomènes de cisaillement puis elle dégénère en turbulence fossile aux grandes échelles^[52]. Dans les simulations baroclines instables le pic d'énergie initiateur de la croissance de l'énergie totale turbulente apparait à un nombre d'ondes intermédiaires puis par la suite s'effectue un transfert aux plus grandes échelles mais surtout aux plus petites échelles. Le transfert aux petites échelles est si important que le spectre des réalisations instables s'aligne en $k^{-5/3}$ (figure 3.35(a) et 3.35(b)). Il semblerait qu'il s'agisse majoritairement d'une cascade directe mais étant donné que l'énergie sur les bas nombres d'ondes augmente aussi il est possible qu'il y ait une cascade inverse. Si il y avait un retour énergétique sur l'écoulement moyen la cascade inverse pourrait fortement le modifier. Pour mieux comprendre les transferts énergétiques il est nécessaire de calculer précisément la fonction de transfert spectral $T(k)$.

Les temps baroclines

L'étude numérique basée sur la théorie de distorsion rapide dans le repère de Craya-Herring a montré la pertinence des temps baroclines τ_{B1}, τ_{B2} et τ_{B3} . Des phénomènes inattendus, lorsque $Ri < 1$, comme "l'explosion" puis la "saturation" de l'énergie qui arrive lorsque le premier temps barocline $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ est dépassé. Pour évaluer la pertinence du troisième temps barocline ainsi que son influence sur la dynamique non-linéaire la seule approche est une modélisation spectrale en 2 points de type EDQNM généralisée à l'écoulement barocline. La modélisation EDQNM aura aussi l'avantage de pouvoir étudier la dépendance au nombre de Reynolds.

Dissymétrie cyclone/anticyclone

Dans cette thèse il est observé que les cyclones sont plus puissants que les anticyclones. Cela d'une part grâce au skewness de vorticité verticale et d'autre part grâce à des visualisations tridimensionnelles des surfaces iso-entrophie coloriées par la vorticité verticale ainsi que des visualisations de vorticité verticale dans des plans horizontaux. Le fait que les cyclones sont plus intenses que les anticyclones est plus probablement une conséquence du gradient de vitesse verticale et du gradient de densité horizontale. Le fait de trouver des cyclones intenses dans notre simulation de turbulence barocline est cohérent avec ce qu'a observé M.S. Miesch^{[87][88]} Mais pour être affirmatif, en faveur de la prédominance des cyclones intenses dans l'écoulement barocline il faudrait effectuer d'autres simulations avec de plus forts nombres de Reynolds.

Modélisation de la turbulence

Tous les phénomènes présentés ci-dessus sont des éléments à prendre en compte pour la paramétrisation des petites échelles géophysiques qui est nécessaire au bon fonctionnement des modèles globaux. Dans cette thèse la dépendance des tenseurs de structures aux paramètres ϵ et Ri a été qualitativement caractérisée. que ce soit pour la dynamique linéaire ou la dynamique non-linéaire. Il a été montré dans le chapitre ?? que pour des applications météorologiques, océanographiques ou climatologiques le plus envisageable serait d'effectuer une modélisation basées sur les tenseurs de structures non-conventionnels pour rendre compte de la forte anisotropie spectrale : des modélisations basée sur les tenseurs de type KRR^[72] ou CJL^[17], en relation avec des spécialistes de la prévision climatique, pour déterminer précisément les besoins et la flexibilité des modèles numériques, donneraient probablement des résultats très intéressants.

ANNEXE : Validation des codes de calculs

In practice, one must first verify and validate each component, and then do the same for progressively larger ensembles of interacting components until the entire integrated code has been verified and validated for the problem regimes of interest.

D.E. Post & L.G. Votta 2005
Physics Today [106]

*L'écriture et la validation des codes de calculs représente largement 75% du temps de travail de thèse. Puisque cette partie est non nécessaire à la compréhension physique des mécanismes elle est mise en annexes du manuscrit. Le code de distorsion rapide **LF5** et le code de simulation numérique directe **TR5** ont été tous les deux validés.*

.1 Introduction

Cette partie est consacrée à la validation des codes de calculs. Commençons par présenter la nécessité de la validation des codes de calculs ainsi que les méthodes disponibles pour la validation.

.1.1 Sur la nécessité d'une validation des codes de calculs

D.E. Post et L.G. Votta (2005, [106]) définissent que les nouveaux challenges pour la simulation numérique résident dans la vérification et la validation des codes de calculs. De nouvelles méthodes doivent être élaborées pour ne pas reproduire les erreurs du passé. Les quelques études existant sur le niveau d'erreurs dans les codes de calculs montre que les taux d'erreurs est statistiquement de 7 fautes pour 1000 lignes de Fortran (1994, [56]). De nombreux projets de simulation numérique, gérés par des experts avec d'énormes moyens ont conduit à des erreurs cinglantes ou n'ont jamais abouti. Pour n'en citer que quelques uns il y a plusieurs projets partis de l'initiative ASCI du DOE ⁴ (Voir E. E. Post & R.

⁴ Étude de 6 projet du "Department of Energy" (DOE) sur "Energy's Accelerated Strategic Computing Initiative" (ASCI). Le DOE a lancé ASCI en 1996 à Livermore, Los Alamos et Sandia National Laboratories

P. Kendall 2004 [105] pour une revue), le “Mars climate orbiter” J. Jazequel et M. Meyer 1997 [67]; A. G. Stephenson et al. 1999 [127]) le cas de “Columbia space shuttle” (H. W. Gehman 2003, [47]). Un code de modélisation climatique peut inclure des modèles pour plus de 50 effets. Par exemple, l'évaporation de la couche océanique supérieure, les courants, la salinité, la variation saisonnière de l'albédo, etc. ... On peut envisager que si les codes météorologiques se trompent c'est aussi à cause d'erreurs inhérentes à la programmation et pas seulement à cause d'une sous résolution des modèles physiques. Il pourrait paraître superflu d'utiliser une grande batterie de tests. Mais pourquoi utiliser plusieurs tests ? Pour trouver des erreurs de codage car dans un premier temps il y a toujours des erreurs de codages ! Pour réussir à trouver certaines erreurs (par exemple des erreurs d'indice, ou l'indice ne dépasse pas la taille du tableau) dans 30 000 lignes de Fortran (ce qui est approximativement le nombre de lignes du fichier principal du présent code de simulation numérique direct **TR5**) il est nécessaire de disposer de plusieurs type de test pour isoler des zones possibles d'erreur. Voyons quelles sont les solutions qui ont été utilisées pour valider les codes de calculs qui ont été écrit lors de la présente thèse.

.1.2 Solution exacte et utilisation d'un second membre

La comparaison avec des solutions exactes en utilisant un second membre est, selon moi, la meilleur façon de valider un code de calcul. Il existe très peu de solutions connues des équations de Navier-Stokes et de ses variantes. Les tourbillons de Taylor-Green sont une solution exacte des équations de Navier-Stokes. La solution visqueuse des tourbillons de Taylor-Green est rappelée plus loin. Ce qui est couramment utilisé est de définir une fonction vérifiant les systèmes d'équations en ajoutant un second membre (M. Bondarenko, 2005, [11]; p9; fig3, fig5, fig6). Il faut cependant que la fonction choisie respecte les propriétés de symétries (tri-périodicité dans l'espace physique et hermité dans l'espace spectrale). L'avantage de cette méthode est de pouvoir réaliser des tests avec des machines à faible performance. Par contre comme l'a remarqué G.A. Blaisdell pour la validation d'un code de simulation d'une turbulence homogène compressible cisailée cette méthode est difficile à mettre en œuvre et particulièrement pour l'écoulement cisailé :

Note that some care is needed in comparing the numerical and analytic solutions for the case of shear flow when the numerical solution has undergone a remesh. The spatial position of analytic solution must be shifted appropriately. The programming of the analytic solution for these test cases was tedious. Discrepancies between the numerical and analytic solutions were usually due to errors in programming the analytic solution

G.A. Blaisdell 1991 Degree of Philosophiæ Doctor [9] p384

.1.3 Comparaison à des simulations antérieures

La comparaison avec des simulations numériques antérieures est intéressante, cela peut demander peut de moyen de calcul si l'on prend des simulations anciennes ou être irréalisable si l'on veut comparer des simulations effectuées dans des pays où les moyens de calcul sont plus avancés. Dans tous les cas ce n'est qu'une indication réconfortante et non une validation du code car il est généralement difficile de savoir d'où provient la différence. F.G. Jacobitz et al. (1997, [66], p257-258) présente pour le cas de turbulence homogène cisailée et stratifiée une comparaison des résultats issu de leur code de calcul aux résultats présenté par S.E. Holt et al. (1992, [60]). Il obtienne une différence de 5% ce

qui leur permet de conclure que leur code de calcul fonctionne correctement. Ils rappellent que la différence entre les deux codes de calculs est due aux différentes méthodes d'avance temporelle et aux différences dans les conditions initiales aléatoires. Mais pour ma part je pense que la différence entre les deux simulations réside plus dans la différence des conditions initiales car même si le schéma d'avance temporelle est différent, l'erreur qu'il engendre est parfaitement connue. Par contre la création des conditions initiales est vraiment problématique même pour un même type d'initialisation isotrope (par exemple avec les méthodes potentielles) mais avec différentes graines (pour générer la chaîne de nombre aléatoires) on obtient différentes statistiques. Pour s'en convaincre il suffit de regarder la figure 2 de l'article de S.A. Orszag et G.S. Patterson (1972, [101]) dont les données sont digitalisées sur la figure 75. Il convient de rappeler que, normalement, plus le domaine de calcul sera grand plus l'écart entre chaque réalisation initialisée avec une chaîne différente de nombre aléatoire sera petit (meilleur respect des conditions nécessaire à l'ergodicité).

.1.4 La comparaison avec l'expérience

Ce n'est pas fait ici car nous ne disposons pas de données expérimentales sur la turbulence homogène barocline.

.1.5 Les tests de dépendance

Dans l'idéal il faudrait pour chaque calcul faire une étude de la dépendance au pas de temps, maillages et nombre de processeurs mais cela nécessiterait beaucoup de moyens de calcul, chose dont nous ne disposons pas. Par exemple M. Bondarenko teste la dépendance aux maillages pour un code en canal bi-périodique (2005, [11];p9) avec des fonctions analytiques. Et F.G. Jacobitz et al. (1997, [66],p258) l'utilise pour tester un code de turbulence homogène cisailée-stratifié en comparant le spectre sphérique d'énergie cinétique. Ils observent un relèvement de la "queue" du spectre mais sinon les spectres coïncide globalement. Ils comparent aussi les fonctions d'auto-corrélation en 2 points de temps et 1 point d'espace, les deux courbes sont très proches. Ils en concluent que le maillage est suffisamment fin pour le problème considéré. Par la suite nous verrons quelques tests de dépendance, mais nous ne pourrons pas en effectuer beaucoup car nous ne disposons que de très peu d'heures de calculs.

.1.6 Comparaison de plusieurs codes de calculs

C'est ce qui est fait en dernière section. Cela peut être coûteux car en général les résultats convergent pour des domaines de calculs assez grands.

.1.7 Tests de cohérence

Ce qui est entendu par test de cohérence est par exemple la conservation de l'énergie par les transformées de Fourier ou la valeur du déterminant des fonctions de Green dans le code de distorsion rapide. Ces tests peuvent être implémentés comme condition de sortie dans les codes de calculs. De la même façon que F.G. Jacobitz et al. (1997, [66]) ont testé l'universalité des leurs paramètre adimensionnelles on fera cela pour l'écoulement barocline homogène.

Dans un premier temps nous allons présenter la validation du code de distorsion rapide puis dans un deuxième temps la validation du code pseudo-spectrale. Pour finir nous montrerons la double validation (comparaisons des deux nouveaux codes de calculs).

.2 Code de DRN sur une sphère

Dans cette section il va être présenté la validation du code de distorsion rapide. D'une part il sera utilisé des solutions exactes avec un second membre et d'autre part il sera utilisé les tests de cohérences. Commençons par présenter le test avec des fonctions analytiques.

.2.1 Tests avec des fonctions analytiques

D'abord nous allons présenter les 6 fonctions qui ont été implémentées dans le code de calcul, ensuite le résumé des résultats sera présentés puis un aperçu graphique pour un test sera présenté et enfin la surveillance automatique des erreurs entre le 09/01/2006 et le 01/01/2007 sera présenté. Les 6 fonctions analytiques sont les suivantes.

Fonction utilisé

Plusieurs tests avec des fonctions analytiques sont effectués. La fonction est une matrice 3×3 . Pour le code de distorsion rapide 6 tests ⁵ sont présentés. Le test **LinearTemps** est celui par lequel nous allons commencer car c'est le test le plus simple.

Test : **LinearTemps**

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} f_i^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) u_j + H_{i1} \\ u_i(0) = \delta_{i1} \end{cases} \\ \begin{cases} f_i^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) u_j + H_{i2} \\ u_i(0) = \delta_{i2} \end{cases} \\ \begin{cases} f_i^{(3)}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) u_j + H_{i1} \\ u_i(0) = \delta_{i3} \end{cases} \\ g_{ij} = u_i / u_i(0) = \delta_{ij} \\ \bar{H}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = \begin{bmatrix} p(1-t) - 1 & P_3(1-t) & P_5(1-t) \\ P_1(1-t) & q(1-t) - 1 & P_6(1-t) \\ P_2(1-t) & P_4(1-t) & q(1-t) - 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} = (p, q, r), \mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \\ \mathbf{f}^{(j)} : \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^5 \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^5 \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

⁵ Dans certain cas le terme de forçage peut être assez long alors il n'est pas explicité pour ne pas détériorer la lisibilité de la présente thèse

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = \begin{bmatrix} p t + 1 & P_1 t & P_2 t \\ P_3 t & q t + 1 & P_4 t \\ P_5 t & P_6 t & r t + 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} = (p, q, r), \mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \\ \bar{g} : \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^5 \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Test : k1Nul

Dans ce test la solution particulière de A. Salhi et C. Cambon en $k_1 = 0$ est utilisée l'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) u_j + h_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) \\ \bar{F}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin(\theta) \sin(\phi) + \epsilon Ri a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & 0 \\ -\frac{\epsilon Ri a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & \frac{\sin(\theta) \cos(\phi) a_1(t)}{\sqrt{a_2^2}} & -\frac{Ri \sin(\theta)}{\sqrt{a_2}} \\ -\epsilon \cos(\phi) & \frac{\sin(\theta) + \epsilon \sin(\phi) a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & 0 \end{bmatrix} \\ a_1 = \cos(\theta) - t \sin(\theta) \cos(\frac{\pi}{2}) \\ a_2 = 1 - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\frac{\pi}{2}) t + \sin(\theta)^2 \cos(\frac{\pi}{2})^2 t^2 \\ \mathbf{k} = (\theta), \mathbf{P} = (\epsilon, Ri) \\ \mathbf{f} : \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{g} := (\theta, Ri, \epsilon, t) \mapsto \bar{g}_{[\phi=\frac{\pi}{2}]}(\theta, Ri, \epsilon, t) \\ g : \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^2 \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Test : ExpTempCro

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\mathbf{u}) = u_i \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij}(t) = \delta_{ij} e^t \\ \bar{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Test : SinTemp

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) u_j + h_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) \\ \bar{\bar{F}}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin(\theta) \sin(\phi) + \epsilon Ri a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & 0 \\ -\frac{\epsilon Ri a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & \frac{\sin(\theta) \cos(\phi) a_1(t)}{\sqrt{a_2^2}} & -\frac{Ri \sin(\theta)}{\sqrt{a_2}} \\ -\epsilon \cos(\phi) & \frac{\sin(\theta) + \epsilon \sin(\phi) a_1(t)}{\sqrt{a_2}} & 0 \end{bmatrix} \\ a_1 = \cos(\theta) - t \sin(\theta) \cos(\phi) \\ a_2 = 1 - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi) t + \sin(\theta)^2 \cos(\phi)^2 t^2 \\ \mathbf{k} = (\theta, \phi), \mathbf{P} = (\epsilon, Ri) \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 . \mathbb{R}^2 . \mathbb{R} . \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{h} : \mathbb{R}^2 . \mathbb{R}^2 . \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{g}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \\ \bar{\bar{g}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Test : ExpTempSommeEspace

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}) u_j \\ F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + p + q + r) \delta_{ij} \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 . \mathbb{R}^2 . \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = e^{(p+q+r+P_1+P_2+P_3+P_4+P_5)t} \delta_{ij} \\ \mathbf{k} = (p, q, r), \mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \\ \bar{\bar{g}} : \mathbb{R}^3 . \mathbb{R}^5 . \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{array} \right.$$

Test : ExpTempMultiEspace

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t, \mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}) u_j \\ F_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}) = (P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 p q r) \delta_{ij} \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 . \mathbb{R}^5 . \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Une fonction solution est :

$$\begin{cases} g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, t) = e^{pqr P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 t} \delta_{ij} \\ \mathbf{k} = (p, q, r), \mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) \\ \bar{g} : \mathbb{R}^3 . \mathbb{R}^5 . \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^9 \end{cases}$$

Maintenant nous allons présenter les résultats des tests avec les fonctions analytiques.

Série de tests la plus récente en date

Le résumé des résultats des tests effectués avec les fonctions analytiques présentées précédemment est présenté dans le tableau 10. Les derniers tests ont été arrêtés lorsque les derniers développements ont été effectué soit le 30/03/2007 avec la routine NAG D02BJF [96] sur $tS = 1000$.

Nom court	RMS	Différence maximum	Résultat
LinearTemps	5.243864604090023E - 016	3.330504230736777E - 015	succès le 30/03/2007
k1Nul	2.810609480955530E - 016	4.731853302049546E - 015	succès le 30/03/2007
ExpTempCro	6.281375125546647E - 017	4.324289415761830E - 016	succès le 30/03/2007
SinTemp	5.858505059047485E - 018	5.551157956024535E - 017	succès le 30/03/2007
ExpTempSommeEspace	4.584189573482852E - 017	6.659279188752659E - 016	succès le 30/03/2007
ExpTempMultiEspace	2.195379232571306E - 016	5.440092820660547E - 015	succès le 30/03/2007

TAB. 10: Résumé des tests avec les fonctions analytiques pour le code de distorsion rapide numérique. La première colonne indique le nom du tests. La deuxième colonne (**RMS**) représente la valeur RMS de l'erreur sur toutes la sphère d'onde $\mathfrak{S}$, l'espace des paramètre $\mathfrak{P}$ et le temps. La troisième (**Différence maximum**) représente la valeur maximum sur toutes la sphère d'onde $\mathfrak{S}$, l'espace des paramètres $\mathfrak{P}$ et le temps. La troisième colonne indique la date à laquelle le test à été effectué

Dans ce qui va suivre il est données un aperçu de l'évolution de l'erreur pour le test **SinTemp**.

Aperçu pour le test SinTemp

La figure 65 représente le test avec la routine NAG D02BJF [96] et la solution analytique **SinTemp**. On peut constater sur la figure 65 que l'erreur effectuée par la routine NAG est de l'ordre du zéro numérique sur des temps $tS = 1000$. Afin d'avoir une vue

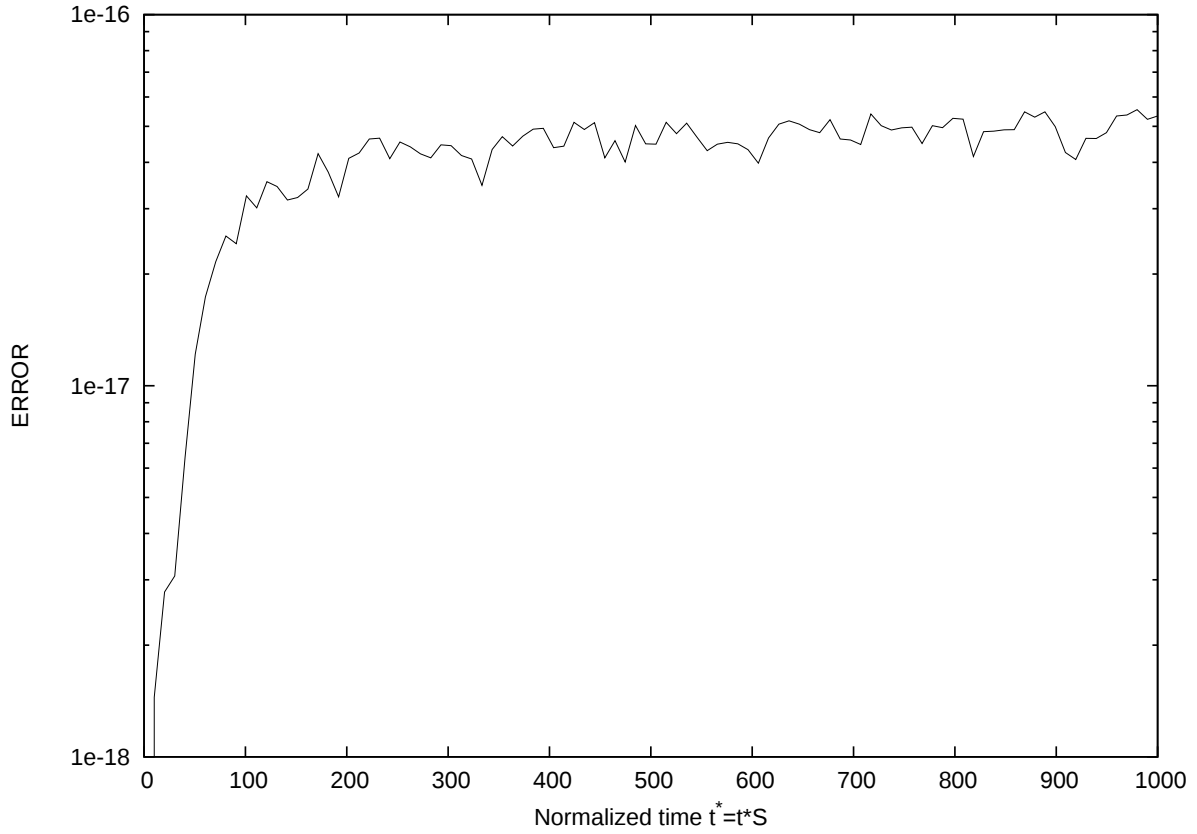
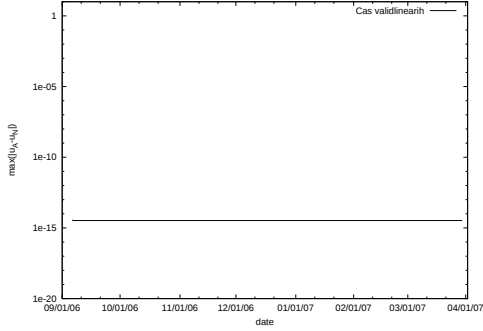


FIG. 65 – Graphiques représentant l'évolution de l'erreur pour le test **SinTemp**. En ordonnées se trouve l'erreur maximum sur toutes la sphère d'onde $\mathfrak{S}$, l'espace des paramètres $\mathfrak{P}$ et en abscisse le temps adimensionné tS

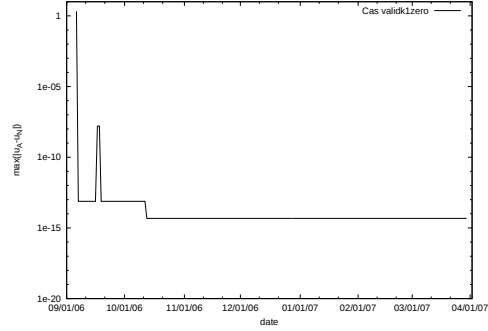
d'ensemble de l'évolution des erreurs aux cours du développement informatique du code de calcul **LF5** il va être présenté l'évolution des erreurs aux cours de la date.

Histoire des erreurs

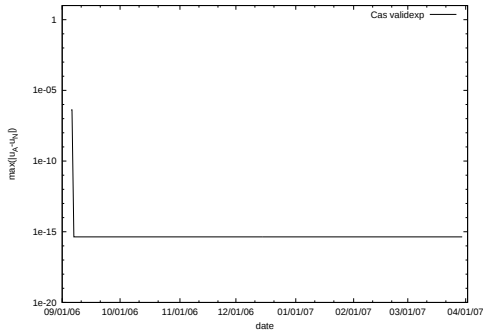
Le test automatique des erreurs a commencé à partir du 01/09/2006. Sur la planche 66 est représentée l'histoire des erreurs maximum lors du développement jusqu'au 04/01/2007. On peut voir qu'aucune erreur n'a été introduite par les modifications à partir du 10 décembre 2006 (figure 66(b)).



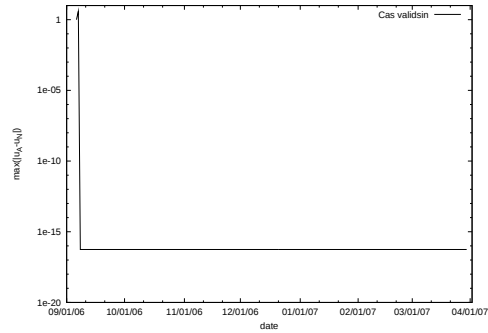
(a) Test **LinearTemps**



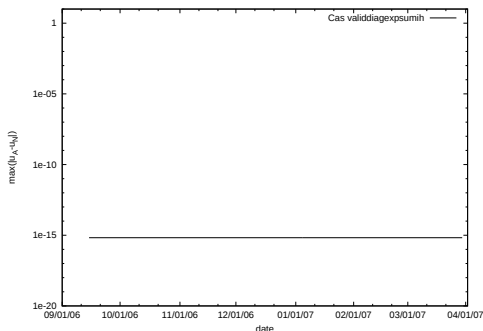
(b) Test **k1Nul**



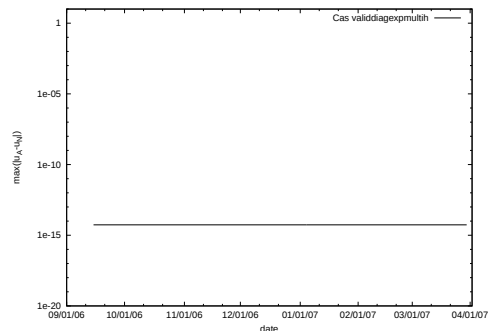
(c) Test **ExpTempCro**



(d) Test **SinTemp**



(e) Test **ExpTempSommeEspace**



(f) Test **ExpMultiEspace**

FIG. 66 – Histoire des erreurs surveillé depuis le 01/09/2006 et jusqu'au 01/04/2007. En ordonné se trouve l'erreur maximum sur toute la sphère d'onde $\mathfrak{S}$, l'espace de paramètre $\mathfrak{P}$ et le temps normalisé tS . En ordonnées se trouve la date en mois/jour/année

.2.2 Tests de cohérence

Dans cette section nous allons présenter quelque tests de cohérences qui ont été effectués pour valider le bon fonctionnement du code de distorsion rapide.

Série de tests la plus récente en date

Le tests de cohérence sont codés comme une condition d'arrêt des calculs dans le code de distorsion rapide. La solution sur le déterminant des fonctions de Green données par C. Cambon et A. Salhi (2003, [18],p11) est utilisée comme test de cohérence. L'énergie mécanique turbulente calculée avec le repère de Craya-Herring et comparé à celle calculé dans le repère fixe et le même test est fait avec l'énergie cinétique turbulente et l'énergie potentielle turbulente. Les 3 simulations vérifiant les tests de cohérences automatiquement sont présentées dans le tableau 11. On peut voir que les tests de cohérences ont été tous satisfaisant le 30 mars 2007.

Cas	Résultat
Coherent_e0	succès le 30/03/2007
Coherent_full	succès le 30/03/2007
Coherent_ri0	succès le 30/03/2007

TAB. 11: Résumé des tests de cohérences effectué le 30 mars 2007. **Coherent_e0** est un cas $\epsilon = 0$ et **Coherent_ri0** est un cas ou $Ri = 0$. Le cas barocline complets est nommé **Coherent_full**

Aperçu pour le cas FullCoherent

Nous avons présenté dans ce qui précède la validation du code de distorsion rapide. La validation est largement satisfaisante pour le code **LF5** maintenant il va être question de la validation du code de simulation numérique directe **TR5**.

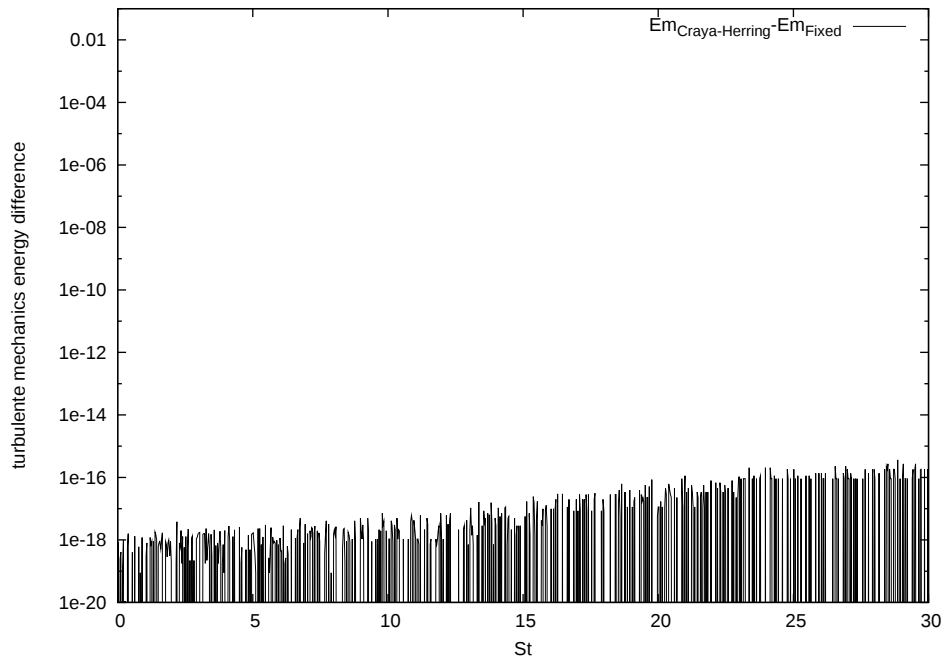


FIG. 67 – La figure ci-dessus représente l'évolution de la différence entre l'énergie mécanique turbulente calculée dans la base fixe et l'énergie mécanique turbulente calculée dans la base de Craya-Herring. L'énergie mécanique turbulente de la base fixe est obtenue à partir du tenseur généralisé des contraintes de Reynolds calculé dans la base fixe. L'énergie mécanique turbulente dans la base de Craya-Herring est obtenue à partir du tenseur des contraintes de Reynolds calculé dans la base de Craya-Herring. Le calcul présenté sur la figure est celui labélisé **Coherent_full**.

.3 Code de SND dans un cube tri-périodique

Dans cette section nous allons présenter les nombreux tests du code de simulation numérique directe pour, si nécessaire, convaincre le lecteur du bon fonctionnement du nouveau code de simulation numérique directe tri-périodique. Nous montrerons que la modification d'une petite partie du code peut engendrer des erreurs importantes et qu'il est donc nécessaire de disposer d'une validation automatique des codes de calculs, passé un certain niveau de complexité. D'abord nous présenterons les tests effectués avec les fonctions analytiques, puis les tests de cohérence du code de simulations numériques. Par la suite le test de dépendance du schéma numérique sera présenté ainsi que le test de bon fonctionnement des routines qui gèrent les entrées sorties. Quelques comparaisons seront effectuées avec des simulations numériques directes antérieures. Puis la phénoménologie des structures turbulentes et des ondes en présence sera vérifiée.

Notons que P. Delorme (1986,[32]) valide son code de simulation numérique directe de turbulence homogène cisailée compressible sur 500 pas de temps (1986, [32], planche13, planche14, planche18–21, planche23, planche26–27). Dans le présent code, les tests s'effectuent sur 2000 pas de temps. Commençons par décrire les différents tests analytiques.

.3.1 Tests avec des fonctions analytiques

Les tests avec des fonctions analytiques sont regroupés en plusieurs catégories de tests :

1. Solutions exactes des équations de la dynamique non-linéaire
2. Solutions exactes de la dynamique linéaire avec initialisation aléatoire
3. Solutions exactes des équations de la dynamique non-linéaire avec forçage

Les tests de type 1 sont bien entendu très réduits car il faut connaître des solutions exactes. Dans la présente étude les solutions exactes qui ont été testées sont les tourbillons de Taylor-Green (solution des équations de Navier-Stokes) orientés dans les trois directions de l'espace et initialisés en espace physique ou en espace spectrale (6 tests). Il existe plus de tests de type 2 mais par exemple pour les cas baroclines nous ne disposons pas de la solution, donc les tests avec les solutions de distorsion rapides ne peuvent pas valider complètement la partie linéaire. Mais ils constituent une validation multimodale car dans les tests avec les solutions de distorsion rapide le champ initial aléatoire est sauvegardé et à la fois tout le champ est comparé à la solution TDR correspondants au champ initial aléatoire. Enfin les solutions de type 3 sont très utiles car elles permettent de tester le problème barocline complet mais ce sont celles qui sont mathématiquement la plus difficiles à justifier.

Dans cette section nous allons d'abord présenter les 23 solutions analytiques sélectionnées ainsi que leurs résultats. Ensuite nous regarderons le déroulement d'un test plus en détail. Et pour finir nous présenterons l'histoire des erreurs aux cours du développement.

Fonctions utilisées

Dans cette section je vais présenter 23 fonctions analytiques ⁶ qui ont été utilisées pour la validation du code de calcul **TR5**. Dans une première lecture il est vivement

⁶ Comme précédemment le terme de forçage peut être de l'ordre de plusieurs pages dans certains cas, alors il n'est pas explicité pour ne pas détériorer la lisibilité de la présente thèse

conseillé de passer directement à la section .3.1 suivante car le principe de validation est toujours le même juste la forme de la solution change.

Test : **LinearInstaSpec**, la rampe temporelle croissante dans en espace de Fourier
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial \hat{c}_i}{\partial t} = 1 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = t \\ \hat{u}_2 = t \\ \hat{u}_3 = t \\ \hat{c}_1 = t \\ \hat{c}_2 = t \\ \hat{c}_3 = t \\ \hat{c}_4 = t \\ \hat{c}_5 = t \end{cases} \begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \\ \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = 1 \\ \hat{d}_2 = 1 \\ \hat{d}_3 = 1 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = 1 \\ \hat{e}_2 = 1 \\ \hat{e}_3 = 1 \\ \hat{e}_4 = 1 \\ \hat{e}_5 = 1 \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{cases}$$

Test : **ExpInstaSpec**, la décroissance exponentielle en espace de Fourier

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = -\hat{u}_i \\ \frac{\partial \hat{c}_i}{\partial t} = -\hat{c}_i \end{cases}$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_1 = e^{-t} \\ \hat{u}_2 = e^{-t} \\ \hat{u}_3 = e^{-t} \\ \hat{c}_1 = e^{-t} \\ \hat{c}_2 = e^{-t} \\ \hat{c}_3 = e^{-t} \\ \hat{c}_4 = e^{-t} \\ \hat{c}_5 = e^{-t} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \\ \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\hat{c}_5 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : **ExpInstaPhys**, la décroissance exponentielle dans en espace physique

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} = g_i \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e^{-t} \\ u_2 = e^{-t} \\ u_3 = e^{-t} \\ c_1 = e^{-t} \\ c_2 = e^{-t} \\ c_3 = e^{-t} \\ c_4 = e^{-t} \\ c_5 = e^{-t} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -e^{-t} \\ f_2 = -e^{-t} \\ f_3 = -e^{-t} \\ g_1 = -e^{-t} \\ g_2 = -e^{-t} \\ g_3 = -e^{-t} \\ g_4 = -e^{-t} \\ g_5 = -e^{-t} \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

- Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = 0 \\ \hat{d}_2 = 0 \\ \hat{d}_3 = 0 \end{cases}$$

- Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = 0 \\ \hat{e}_2 = 0 \\ \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{e}_4 = 0 \\ \hat{e}_5 = 0 \end{cases}$$

- L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

- L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

- L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = -e^{-t} \\ f_2 = -e^{-t} \\ f_3 = -e^{-t} \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = e^{-t} \\ g_2 = e^{-t} \\ g_3 = e^{-t} \\ g_4 = e^{-t} \\ g_5 = e^{-t} \end{array} \right.$$

Test : **CosInstaPhy**, la fonction harmonique

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i + f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} = c_i + g_i \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \cos(t) \\ u_2 = \cos(t) \\ u_3 = \cos(t) \\ c_1 = \cos(t) \\ c_2 = \cos(t) \\ c_3 = \cos(t) \\ c_4 = \cos(t) \\ c_5 = \cos(t) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ f_2 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ f_3 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_1 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_2 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_3 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_4 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_5 = -(\cos(t) + \sin(t)) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = u_1 \\ \hat{d}_2 = u_2 \\ \hat{d}_3 = u_3 \end{array} \right. \\
 & - \text{Le terme de diffusion scalaire :} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = c_1 \\ \hat{e}_2 = c_2 \\ \hat{e}_3 = c_3 \\ \hat{e}_4 = c_4 \\ \hat{e}_5 = c_5 \end{array} \right. \\
 & - \text{L'opposé du gradient de vitesse moyenne :} \\
 & \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & - \text{L'opposé des gradients scalaires moyens :} \\
 & \mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & - \text{L'équation sur les vitesses :} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{array} \right. \\
 & - \text{L'équation sur les scalaires :} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ f_2 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ f_3 = -(\cos(t) + \sin(t)) \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_2 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_3 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_4 = -(\cos(t) + \sin(t)) \\ g_5 = -(\cos(t) + \sin(t)) \end{cases}$$

Test : Diffusion, l'équation de diffusion

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_i \\ \frac{\partial \hat{c}_i}{\partial t} = -\frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_i \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{u}_2 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{u}_3 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{c}_1 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{c}_2 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{c}_3 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{c}_4 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \\ \hat{c}_5 = e^{-\mathbf{k}^2 \cdot t} \end{cases} \begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \\ \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L’équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{array} \right.$$

– L’équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right. \\
 - \text{ Pour les scalaires : } & \left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Test : **ScalarsWaves**, l'ondes scalaires sphériques

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

$$\begin{aligned}
 - \text{ Le terme de viscosité : } & \left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right. \\
 - \text{ Le terme de diffusion scalaire : } & \\
 - \text{ L'opposé du gradient de vitesse moyenne : } &
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- L'opposé des gradients scalaires moyens :

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

- L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

- L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

- Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

- Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{cases}$$

Test : **IsotropeComp**, l'équation de Burger isotrope
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{cases} \begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1 Pr_i = 1 \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{cases}$$

Test : **IsotropeIncomp**, l'équation de Navier-Stokes isotrope

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \cos(\frac{x}{5}) \cdot \sin(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ \quad + \cos(\frac{x}{5}) \cdot \cos(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1 Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = g(x, y, z, t) \\ g_2 = g(x, y, z, t) \\ g_3 = g(x, y, z, t) \\ g_4 = g(x, y, z, t) \\ g_5 = g(x, y, z, t) \end{cases}$$

Test : **TaylorGreenXwiseSpec**, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction x

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_1 = \imath.(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}}) - \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}})).e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}}^2.t} \\ \hat{u}_2 = -\imath.(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}}) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}})).e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}}^2.t} \\ \hat{u}_3 = 0 \\ \mathbf{k}_{\mathbf{T}\mathbf{G}} = (0, k_{TG_y}, k_{TG_z}) \\ \delta = (k_1, k_2, k_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : **TaylorGreenXwisePhy**, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction x

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = \sin\left(\frac{x_2}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_3}{5}\right) \cdot e^{-\frac{2}{25} \cdot t} \\ u_3 = -\cos\left(\frac{x_2}{5}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_3}{5}\right) \cdot e^{-\frac{2}{25} \cdot t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j . c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j . c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j . c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j . c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j . c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_3 = 0 \\ g_4 = 0 \\ g_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : **TaylorGreenYwiseSpec**, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction y

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j . \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_1 = \imath . (\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{TG}}) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{TG}})) . e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{TG}}^2 . t} \\ \hat{u}_2 = 0 \\ \hat{u}_3 = \imath . (-\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{TG}}) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{TG}})) . e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{TG}}^2 . t} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{TG}} = (k_{TG_x}, 0, k_{TG_z}) \\ \delta = (k_1, k_2, k_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j . c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j . c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j . c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j . c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j . c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : TaylorGreenYwisePhy, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction y

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j . \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\cos(\frac{x_3}{5}).\sin(\frac{x_1}{5}).e^{-\frac{2}{25}.t} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = \sin(\frac{x_3}{5}).\cos(\frac{x_1}{5}).e^{-\frac{2}{25}.t} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} . \mathbf{k}^2 . \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} . \mathbf{k}^2 . \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} . \mathbf{k}^2 . \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_3 = 0 \\ g_4 = 0 \\ g_5 = 0 \end{cases}$$

Test : **TaylorGreenZwiseSpec**, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction z

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = \imath.(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{TG}}) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{TG}})).e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{TG}}^2.t} \\ \hat{u}_2 = \imath.(-\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{\mathbf{TG}}) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_{\mathbf{TG}})).e^{-\mathbf{k}_{\mathbf{TG}}^2.t} \\ \hat{u}_3 = 0 \\ \mathbf{k}_{\mathbf{TG}} = (k_{TG_x}, k_{TG_y}, 0) \\ \delta = (k_1, k_2, k_3) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L’équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L’équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{cases}$$

Test : **TaylorGreenZwisePhy**, les tourbillons de Taylor-Green tournants autour de la direction z

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} u_1 = \sin(\frac{x_1}{5}) \cdot \cos(\frac{x_2}{5}) \cdot e^{-\frac{2}{25} \cdot t} \\ u_2 = \cos(\frac{x_1}{5}) \cdot \sin(\frac{x_2}{5}) \cdot e^{-\frac{2}{25} \cdot t} \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ \\ Re = 1 \\ Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L’équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L’équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \\ g_3 = 0 \\ g_4 = 0 \\ g_5 = 0 \end{cases}$$

Test : **RotStratComp**, l'équation de Burger avec rotation et stratification

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \cdot 2 \cdot \Omega_j \cdot u_k + \delta_{i2} \cdot c_1 + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = -\delta_{i1} \cdot u_2 + \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1, Pr_i = 1, \Omega_i = \delta_{i2} \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{cases} \begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_2(x, y, z, t) \\ g_3 = g_2(x, y, z, t) \\ g_4 = g_2(x, y, z, t) \\ g_5 = g_2(x, y, z, t) \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 + \hat{c}_1 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = 1$$

– L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = 1$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L’équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

– L’équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_2(x, y, z, t) \\ g_3 = g_2(x, y, z, t) \\ g_4 = g_2(x, y, z, t) \\ g_5 = g_2(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Test : **RotStratIncomp**, l'équation de Boussinesq avec force de rotation
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} \cdot 2 \cdot \Omega_j \cdot u_k + \delta_{i2} \cdot c_1 + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = -\delta_{i1} \cdot u_2 + \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1, Pr_i = 1, \Omega_i = \delta_{i2} \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \cos(\frac{x}{5}) \cdot \sin(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ \quad + \cos(\frac{x}{5}) \cdot \cos(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_2(x, y, z, t) \\ g_3 = g_2(x, y, z, t) \\ g_4 = g_2(x, y, z, t) \\ g_5 = g_2(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 + \hat{c}_1 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1Pr_i = 1 \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = 1$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = 1$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j.c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j.c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j.c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j.c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j.c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = g1(x, y, z, t) \\ g_2 = g2(x, y, z, t) \\ g_3 = g2(x, y, z, t) \\ g_4 = g2(x, y, z, t) \\ g_5 = g2(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Test : **ShearComp**, l'équation de Burger soumis à un cisaillement moyen
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -S \cdot \delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot u_j + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1, Pr_i = 1, S = 50 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g1(x, y, z, t) \\ g_2 = g1(x, y, z, t) \\ g_3 = g1(x, y, z, t) \\ g_4 = g1(x, y, z, t) \\ g_5 = g1(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace ($\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}, \mathbf{z_2}$)

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1 Pr_i = 1 \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = 50$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j . c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j . c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j . c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j . c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j . c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_1(x, y, z, t) \\ g_3 = g_1(x, y, z, t) \\ g_4 = g_1(x, y, z, t) \\ g_5 = g_1(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Test : **ShearIncomp**, l'équation de Navier-Stokes soumis à un cisaillement moyen
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - S \cdot \delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot u_j + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1, Pr_i = 1, S = 50 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ u_3 = \cos(\frac{x}{5}) \cdot \sin(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ \quad + 50 \cdot t \cdot \sin(\frac{x}{5}) \cdot \sin(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ \quad + \cos(\frac{x}{5}) \cdot \cos(\frac{y}{5}) \cdot \cos(\frac{z}{5}) \cdot \cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5} \cdot x) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot y) \cdot \sin(\frac{1}{5} \cdot z) \cdot \cos(t) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_1(x, y, z, t) \\ g_3 = g_1(x, y, z, t) \\ g_4 = g_1(x, y, z, t) \\ g_5 = g_1(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_1} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_2} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_3} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_4} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\frac{1}{Re \cdot Pr_5} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{c}_5 \\ Re = 1Pr_i = 1 \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = 50$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_1(x, y, z, t) \\ g_3 = g_1(x, y, z, t) \\ g_4 = g_1(x, y, z, t) \\ g_5 = g_1(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Test : **ShearRotStratIncomp**, l'équation de Boussinesq soumis à cisaillement moyen et une rotation en bloque

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - S \cdot \delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot u_j - \epsilon_{ijk} \cdot 2 \cdot \Omega_j \cdot u_k + \delta_{i2} \cdot c_1 + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u_i + f_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \cdot c_i)}{\partial x_j} = -\delta_{i1} \cdot u_2 + \Omega \cdot S \cdot \delta_{i1} \cdot u_3 + \frac{1}{Re \cdot Pr_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot c_i + g_i \\ Re = 1, Pr_i = 1, \Omega_i = \delta_{i2} \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ u_2 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ u_3 = \cos(\frac{x}{5}).\sin(\frac{y}{5}).\cos(\frac{z}{5}).\cos(t) \\ \quad + 50.t.\sin(\frac{x}{5}).\sin(\frac{y}{5}).\cos(\frac{z}{5}).\cos(t) \\ \quad + \cos(\frac{x}{5}).\cos(\frac{y}{5}).\cos(\frac{z}{5}).\cos(t) \\ c_1 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ c_2 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ c_3 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ c_4 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \\ c_5 = \sin(\frac{1}{5}.x).\sin(\frac{1}{5}.y).\sin(\frac{1}{5}.z).\cos(t) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \\ g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_2(x, y, z, t) \\ g_3 = g_2(x, y, z, t) \\ g_4 = g_2(x, y, z, t) \\ g_5 = g_2(x, y, z, t) \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_2 + \hat{c}_1 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_5 \\ Re = 1Pr_i = 1 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} S & 0 & -2.\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = 1, S = 50$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & -N^2 & \Omega.S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = 1, \Omega = 1, S = 50$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = u_j \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ h_2 = u_j \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ h_3 = u_j \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\partial u_j \cdot c_1}{\partial x_j} \\ q_2 = \frac{\partial u_j \cdot c_2}{\partial x_j} \\ q_3 = \frac{\partial u_j \cdot c_3}{\partial x_j} \\ q_4 = \frac{\partial u_j \cdot c_4}{\partial x_j} \\ q_5 = \frac{\partial u_j \cdot c_5}{\partial x_j} \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} f_1 = f_1(x, y, z, t) \\ f_2 = f_2(x, y, z, t) \\ f_3 = f_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} g_1 = g_1(x, y, z, t) \\ g_2 = g_2(x, y, z, t) \\ g_3 = g_2(x, y, z, t) \\ g_4 = g_2(x, y, z, t) \\ g_5 = g_2(x, y, z, t) \end{cases}$$

Test : **IsoRapidDistortion**, la solution linéaire purement visqueuse
L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} c_i \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} \hat{u}_i = \hat{u}_i(t=0).e^{-\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2}, i=1,3 \\ \hat{c}_i = \hat{c}_i(t=0).e^{-\frac{1}{Pr.Re}.\mathbf{k}^2}, i=1, N_C \end{cases} \quad \begin{cases} f_i = 0 \\ i=1,3+N_C \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re}.\mathbf{k}^2.\hat{u}_3 \end{cases}$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_1}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_1 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_2}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_2 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_3}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_3 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_4}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_4 \\ \hat{e}_1 = -\frac{1}{Re.Pr_5}.\mathbf{k}^2.\hat{c}_5 \\ \\ \text{Fixed} \\ \text{Pr}_i \text{ fixed} \end{cases}$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{cases}$$

– Pour les scalaires :

$$\begin{cases} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{cases}$$

Test : **ShearRapidDistortion**, la théorie de distorsion rapide visqueuse avec un cisaillement moyen des lignes de courants

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - S \cdot \delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Une solution est :

$$\begin{cases} \hat{u}_i = (\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), Re, S) \mapsto \hat{u}_i(\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), Re, S) \\ i = 1, 3 \end{cases} \quad \begin{cases} f_i = 0 \\ i = 1, 3 \end{cases}$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\hat{c}_5 \end{array} \right.$$

– L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L’équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{array} \right.$$

– L’équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : RotRapidDistortion, la théorie de Distortion Rapide visqueuse avec force de rotation

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} \cdot 2 \cdot \Omega_j \cdot u_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_i = (\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), Re, \Omega) \mapsto \hat{u}_i(\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), Re, \Omega) \\ i = 1, 3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_i = 0 \\ i = 1, 3 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_1 \\ \hat{d}_2 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = -\frac{1}{Re} \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \hat{u}_3 \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\hat{c}_5 \end{array} \right.$$

– L'opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Omega fixed$

– L'opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

– L'équation sur les vitesses :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{array} \right.$$

– L'équation sur les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

– Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{array} \right.$$

– Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Test : **StratRapidDistortion**, la théorie de distorsion rapide pour un écoulement stratifié

L'équation qui est résolue numériquement est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \delta_{i2} \cdot \delta_{j1} \cdot c_j \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial t} = -N^2 \cdot \delta_{i1} \cdot u_2 \end{array} \right.$$

Une solution est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_i = (\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), c_1(t=0), N) \\ \quad \mapsto \hat{u}_i(\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), c_1(t=0), N) \\ \hat{c}_i = (\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), c_1(t=0), N) \\ \quad \mapsto \hat{c}_i(\mathbf{k}, \mathbf{u}(t=0), c_1(t=0), N) \\ i = 1, 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i = 0 \\ i = 1, 3, g_1 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce test l'initialisation du champs est effectuée dans l'espace $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$

Pour résoudre cette équation il est implémenté dans la partie linéaire du code :

– Le terme de viscosité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{d}_1 = \\ \hat{d}_2 = \hat{u}_2 \\ \hat{d}_3 = \end{array} \right.$$

– Le terme de diffusion scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_1 = -\hat{c}_1 \\ \hat{e}_2 = -\hat{c}_2 \\ \hat{e}_3 = -\hat{c}_3 \\ \hat{e}_4 = -\hat{c}_4 \\ \hat{e}_5 = -\hat{c}_5 \end{array} \right.$$

- L’opposé du gradient de vitesse moyenne :

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- L’opposé des gradients scalaires moyens :

$$\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La partie non-linéaire est de la forme suivante :

- L’équation sur les vitesses :

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

- L’équation sur les scalaires :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = 0 \\ q_5 = 0 \end{cases}$$

Les termes de forçage qui sont ajoutés pour avoir une solution exacte :

- Pour la vitesse :

$$\begin{cases} \hat{f}_1 = 0 \\ \hat{f}_2 = 0 \\ \hat{f}_3 = 0 \end{cases}$$

- Pour les scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1 = 0 \\ \hat{g}_2 = 0 \\ \hat{g}_3 = 0 \\ \hat{g}_4 = 0 \\ \hat{g}_5 = 0 \end{array} \right.$$

Maintenant que nous avons introduit les fonctions analytiques il va être présenté un résumé du résultat des tests.

Série de tests la plus récente en date

Dans le tableau 12 est résumé le résultat des tests avec les fonctions analytiques. On peut voir que tous les tests ont été passé avec succès le 30 mars 2007.

Nom court	Espace d'initialisation	RMS	Différence maximum	Résultat
LinearInstaSpec	(p, q, r)	$1.240357612286154E - 019$	$8.326672684688674E - 019$	succès le 30/03/2007
ExpInstaSpec	(p, q, r)	$3.800588715305074E - 019$	$2.220446049250313E - 018$	succès le 30/03/2007
ExpInstaPhys	$(x2, y2, z2)$	$7.554110863947325E - 020$	$1.110223024625157E - 018$	succès le 30/03/2007
CosInstaPhys	$(x2, y2, z2)$	$3.378301080271176E - 019$	$3.330669073875470E - 018$	succès le 30/03/2007
Diffusif	(p, q, r)	$1.884406522250897E - 018$	$1.213400597583982E - 017$	succès le 30/03/2007
ScalarsWaves	$(x2, y2, z2)$	$1.657028651243036E - 017$	$3.474998067076740E - 016$	succès le 30/03/2007
IsotropeComp	$(x2, y2, z2)$	$7.358067976072671E - 017$	$2.498001805406602E - 016$	succès le 30/03/2007
IsotropeIncomp	$(x2, y2, z2)$	$6.452682153460661E - 017$	$5.273559366969495E - 016$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenXwiseSpec	(p, q, r)	$1.957297615151554E - 016$	$1.393425451226695E - 015$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenXwisePhy	$(x2, y2, z2)$	$3.289220465473188E - 017$	$3.491651412446117E - 016$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenYwiseSpec	(p, q, r)	$3.048645828304836E - 017$	$2.997967758270171E - 016$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenYwisePhy	$(x2, y2, z2)$	$1.249645114244661E - 017$	$3.191891195797325E - 016$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenZwiseSpec	(p, q, r)	$1.387923319765927E - 016$	$1.393353065339003E - 015$	succès le 30/03/2007
TaylorGreenZwisePhy	$(x2, y2, z2)$	$1.247472245990062E - 017$	$3.175237850427948E - 016$	succès le 30/03/2007
RotStratComp	$(x2, y2, z2)$	$6.244987179494867E - 017$	$3.463895836830488E - 016$	succès le 30/03/2007

RotStratIncomp	$(x2, y2, z2)$	$6.453773177630930E - 017$	$5.229150445984487E - 016$	succès le 30/03/2007
ShearComp	$(x2, y2, z2)$	$1.102902518635879E - 016$	$1.357160909738498E - 015$	succès le 30/03/2007
ShearIncomp	$(x2, y2, z2)$	$3.176162743094522E - 016$	$8.645306692756094E - 015$	succès le 30/03/2007
ShearRotStratIncomp	$(x2, y2, z2)$	$6.333957167141255E - 016$	$1.021494697611112E - 014$	succès le 30/03/2007
IsoRapidDistortion	(p, q, r)	$3.334164365921374E - 020$	$1.079438565345095E - 018$	succès le 30/03/2007
ShearRapidDistortion	(p, q, r)	$7.830996029301021E - 018$	$1.453223899714310E - 016$	succès le 30/03/2007
RotRapidDistortion	(p, q, r)	$3.749334909197362E - 020$	$1.235434935934258E - 018$	succès le 30/03/2007
StratRapidDistortion	(p, q, r)	$1.290791766212174E - 020$	$6.939435983819301E - 019$	succès le 30/03/2007

TAB. 12: Résumé des tests avec les fonctions analytiques pour le code de simulation numérique tri-périodique **TR5**. La première colonne représente le nom du test. La deuxième colonne est l'espace d'initialisation ainsi que l'espace de comparaison des résultats. La troisième colonne est l'erreur **RMS** sur tous le cube $\mathfrak{C}$ et le temps. La quatrième colonne indique l'erreur **maximum** sur le cube $\mathfrak{C}$ est le temps. La dernière colonne indique la date d'échec ou succès du test

A titre d'exemple nous allons étudier plus en détail le dernier test **StratRapidDistortion**.

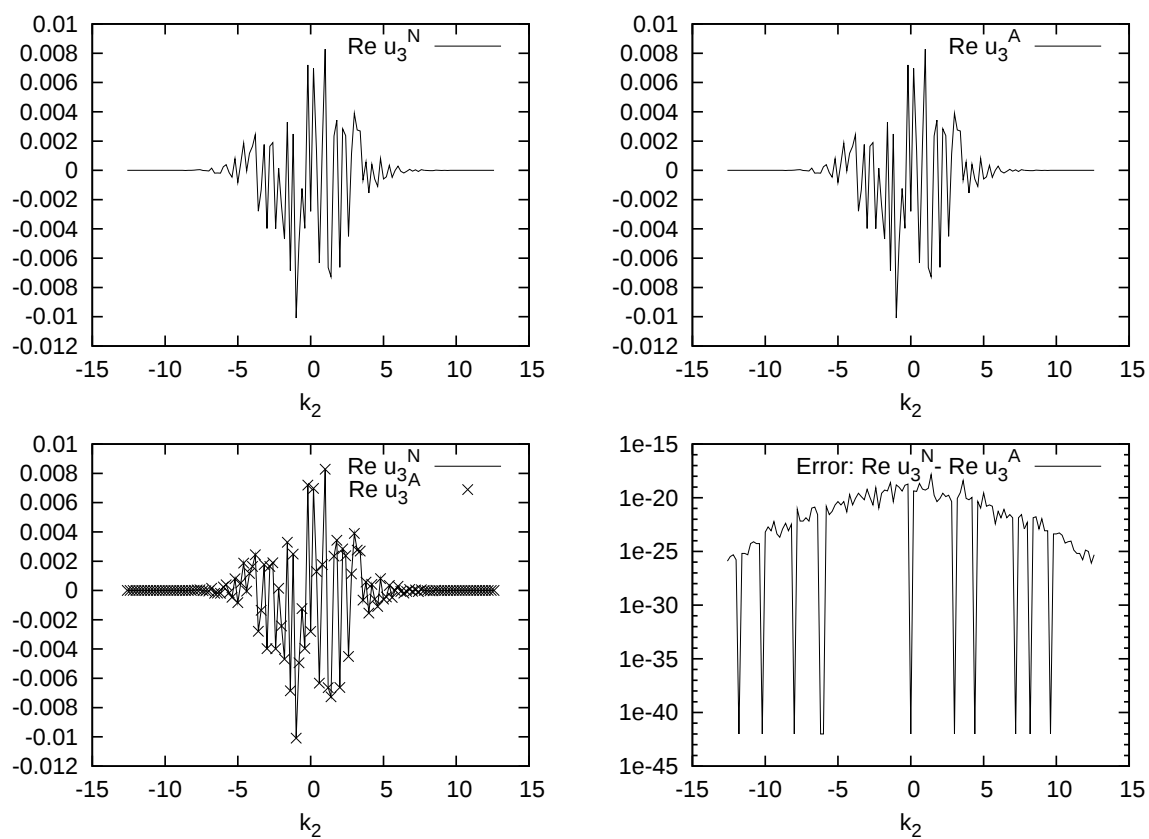
Aperçu avec la solution StratRapidDistortion

La figure 68 représente l'amplitude spectrale stocké en position $(3, 1, 2)$ c'est-à-dire la partie réelle de l'amplitude spectrale du mode numéro $(1, 1, 2)$ et au pas de temps 1999. Le résultat est entièrement satisfaisant car il est de l'ordre de zéro numérique. Maintenant pour avoir un aperçu de la validité du code lors du développement du code de calcul nous allons présenter l'histoire des erreurs.

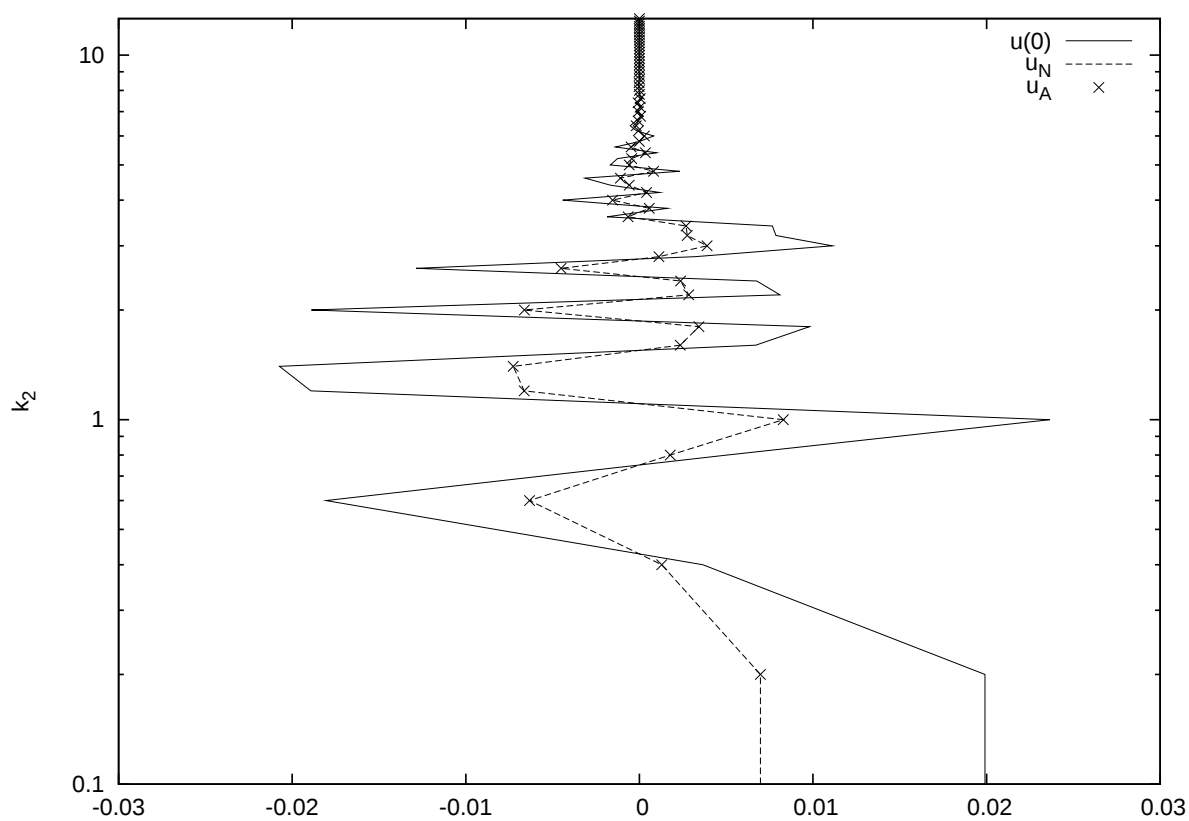
Histoire des erreurs

Les planches 69,70 et 71 présentent l'histoire des erreurs en fonction des développements informatiques. Les tests présentés ci-dessus sont automatiquement lancer chaque soir et le résultat est surveillé. Les courbes de la planche présentent les résultats des tests entre le 01/05/2006 jusqu'à 01/04/2007 (date d'arrêt des développements du code de calcul **TR5**). Ce qu'il faut retenir de ces courbes est que la validation doit se faire après chaque modification même minime car des erreurs importantes peuvent toujours survenir. On peut voir sur la planche 71 qu'aucune erreur d'implémentation n'est apparu après le 1 janvier 2007.

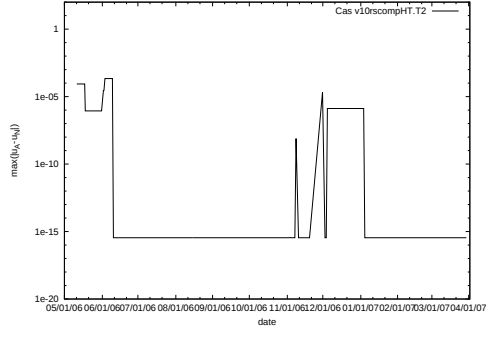
Maintenant que nous avons présenté les différents tests avec les fonctions analytiques nous allons présenter les tests de cohérence.



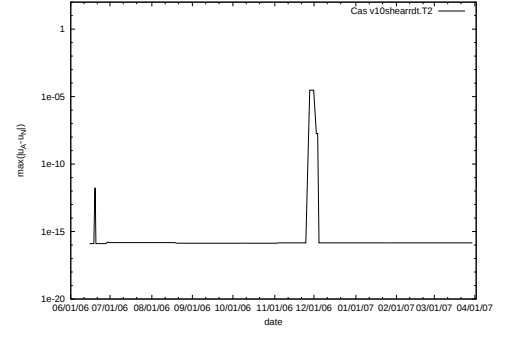
(a) au pas de temps 1999 pour la composante u_3



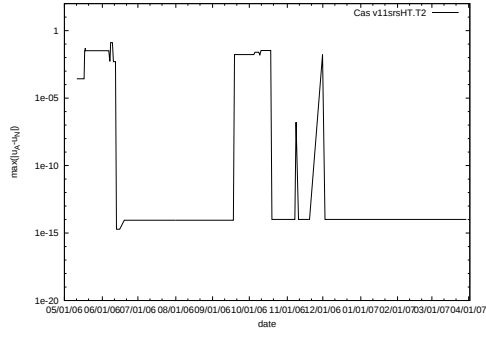
(b) condition initiales pour la composante u_3



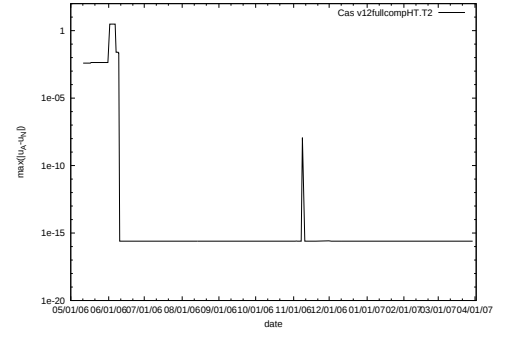
(a) Test **RotStratComp**



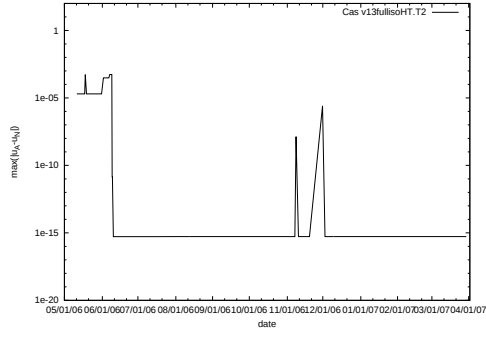
(b) Test **ShearRapidDistortion**



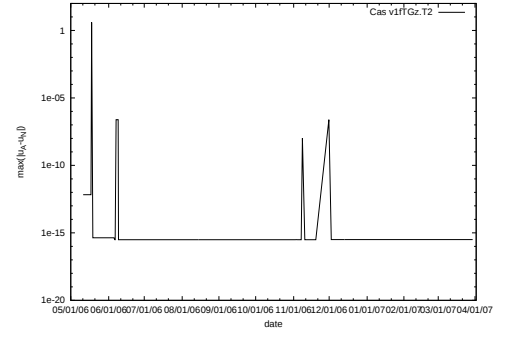
(c) Test **ShearRotStratIncomp**



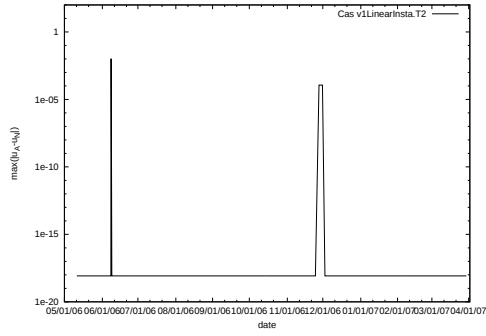
(d) Test **ShearRotStratComp**



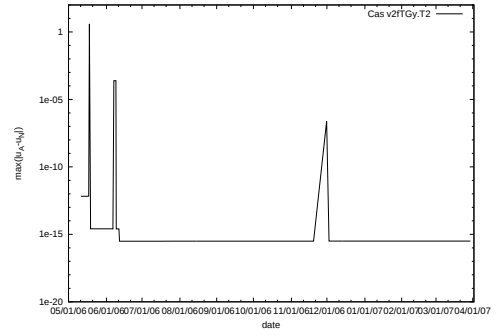
(e) Test **IsotropIncomp**



(f) Test **TaylorGreenZwisePhy**

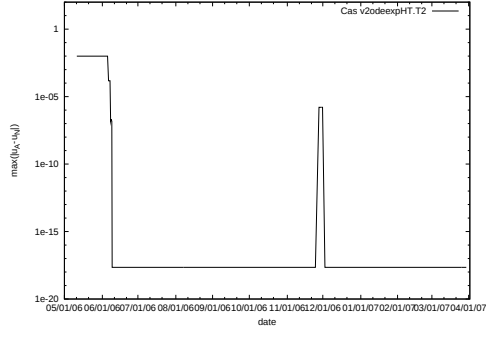


(g) Test **LinearInstaSpec**

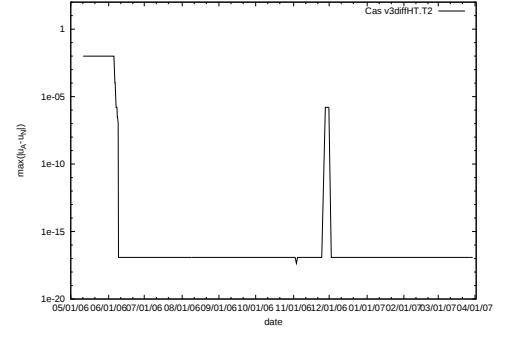


(h) Test **TaylorGreenYwisePhy**

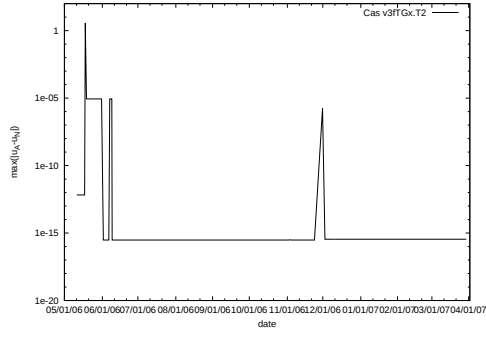
FIG. 69 – Collection de courbes (partie 1) présentant l'évolution de l'erreur en fonction de la date. En ordonnée est représenté l'erreur du maximum sur le cube $\mathcal{C}$ est le temps de la simulation numérique. En abscisse est représenté la date en mois/jours/année



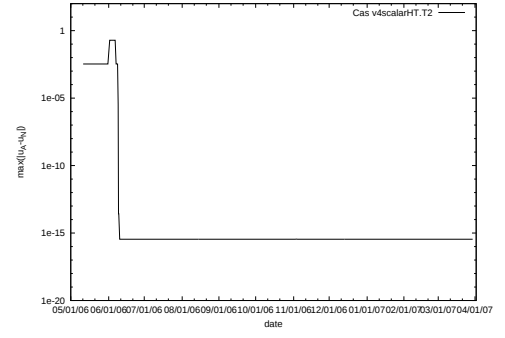
(a) Test **ExpInstPhys**



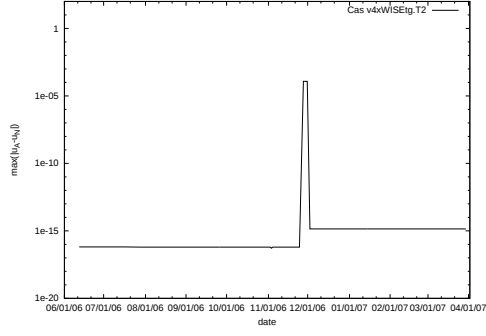
(b) Test **Diffusif**



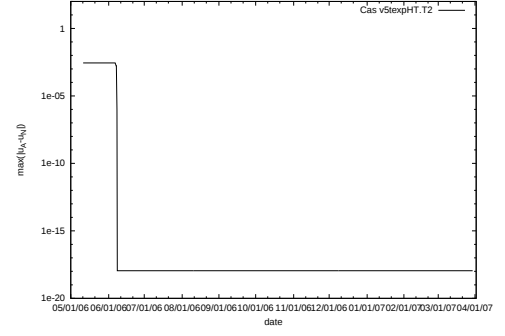
(c) Test **TaylorGreenXwisePhy**



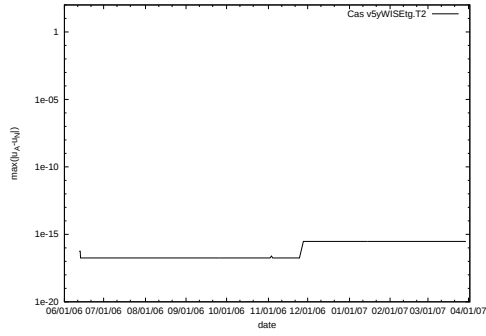
(d) Test **ScalarsWaves**



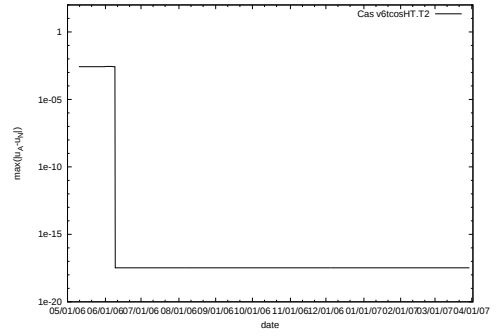
(e) Test **TaylorGreenXwiseSpec**



(f) Test **ExpInstSpec**

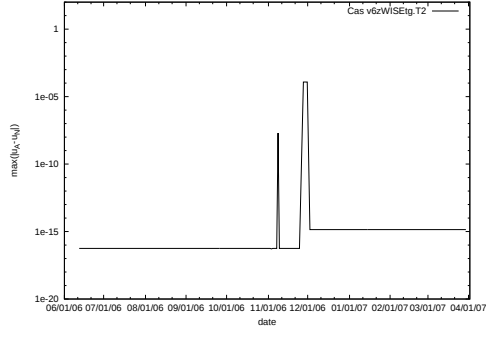


(g) Test **TaylorGreenYwiseSpec**

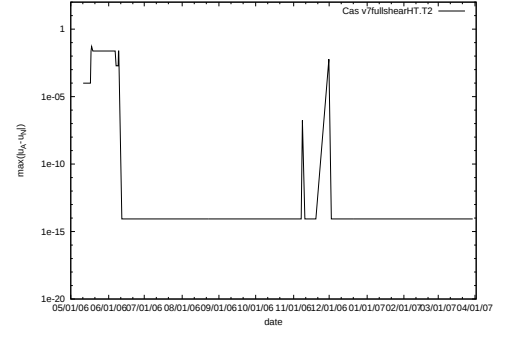


(h) Test **CosInstaPhys**

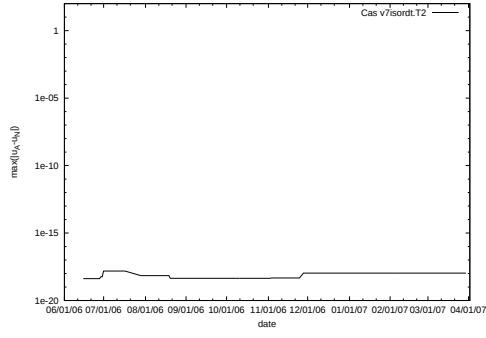
FIG. 70 – Collection de courbes (partie 2) présentant l'évolution de l'erreur en fonction de la date. En ordonnée est représenté l'erreur du maximum sur le cube $\mathcal{C}$ est le temps de la simulation numérique. En abscisse est représentée la date en mois/jours/année



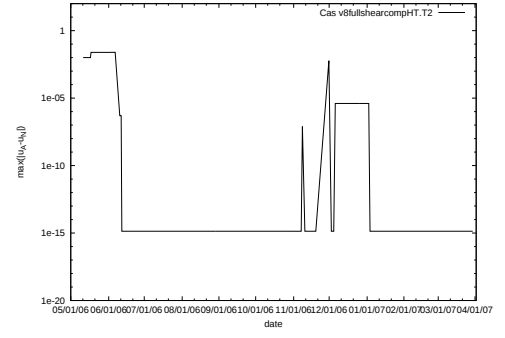
(a) Test **TaylorGreenZwiseSpec**



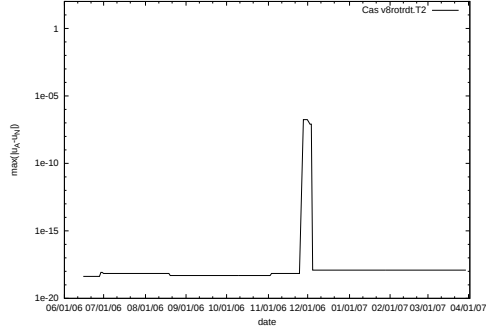
(b) Test **ShearIncomp**



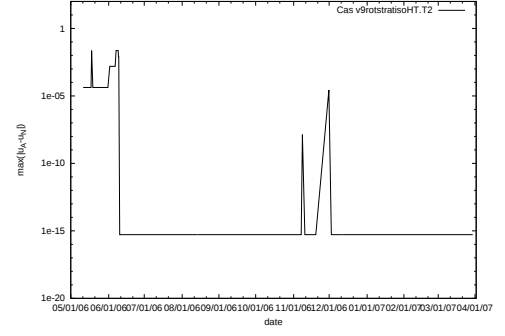
(c) Test **IsoRapidDistortion**



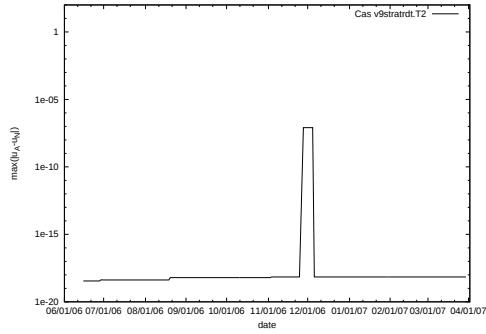
(d) Test **ShearComp**



(e) Test **RotRapidDistortion**



(f) Test **RotStratIncomp**



(g) Test **StratRapidDistortion**

FIG. 71 – Collection de courbes (partie 3) présentant l'évolution de l'erreur en fonction de la date. En ordonnée est représenté l'erreur du maximum sur le cube $\mathcal{C}$ et le temps de la simulation numérique. En abscisse est représentée la date en mois/jours/année

.3.2 Tests de cohérence

Dans cette section nous allons d'abord présenter le résumé des tests de cohérences ensuite nous regarderons plus en détail le test **ShearRotStratS4** pour finir par une présentation du test d'universalité de paramètre adimensionnelle de l'écoulement turbulent barocline.

Série de tests la plus récente en date

Le test de cohérences du code simulation numérique directe vérifie principalement que l'équation de continuité soit tel que $k_l.B_{lj}.\hat{u}_j < 10^{-14}$, la conservation de l'énergie par les Transformées de Fourier Rapide (différence entre différent espace inférieur à 10^{-14}) et que l'énergie sur le mode $(0, 0, 0)$ reste inférieur à 10^{-14} . Dans le tableau 13 est listé les simulations qui sont effectuer chaque soir en vue de la cohérence du code de calcul. La série présentée dans le tableau 13 date du 30/03/2007.

Cas	Résultat
HtCoherent_Iso	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoS2	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoS3	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoS4	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoS5	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoSNDA	succès le 30/03/2007
HtCoherent_IsoS	succès le 30/03/2007
HtCoherent_Rot	succès le 30/03/2007
HtCoherent_RotS2	succès le 30/03/2007
RotS3	succès le 30/03/2007
RotS4	succès le 30/03/2007
RotS5	succès le 30/03/2007
RotS	succès le 30/03/2007
RotStrat	succès le 30/03/2007
RotStratS2	succès le 30/03/2007
RotStratS3	succès le 30/03/2007
RotStratS4	succès le 30/03/2007

RotStratS	succès le 30/03/2007
Shear	succès le 30/03/2007
ShearRot	succès le 30/03/2007
ShearRotS2	succès le 30/03/2007
ShearRotS3	succès le 30/03/2007
ShearRotS4	succès le 30/03/2007
ShearRotS5	succès le 30/03/2007
ShearRotS	succès le 30/03/2007
ShearRotStrat	succès le 30/03/2007
ShearRotStratS2	succès le 30/03/2007
ShearRotStratS3	succès le 30/03/2007
ShearRotStratS4NDA	succès le 30/03/2007
ShearRotStratS4	succès le 30/03/2007
ShearRotStratS	succès le 30/03/2007
ShearS2	succès le 30/03/2007
ShearS3	succès le 30/03/2007
ShearS4	succès le 30/03/2007
ShearS5	succès le 30/03/2007
ShearS	succès le 30/03/2007
ShearStrat	succès le 30/03/2007
ShearStratS2	succès le 30/03/2007
ShearStratS3	succès le 30/03/2007
ShearStratS4	succès le 30/03/2007
ShearStratS	succès le 30/03/2007
Strat	succès le 30/03/2007

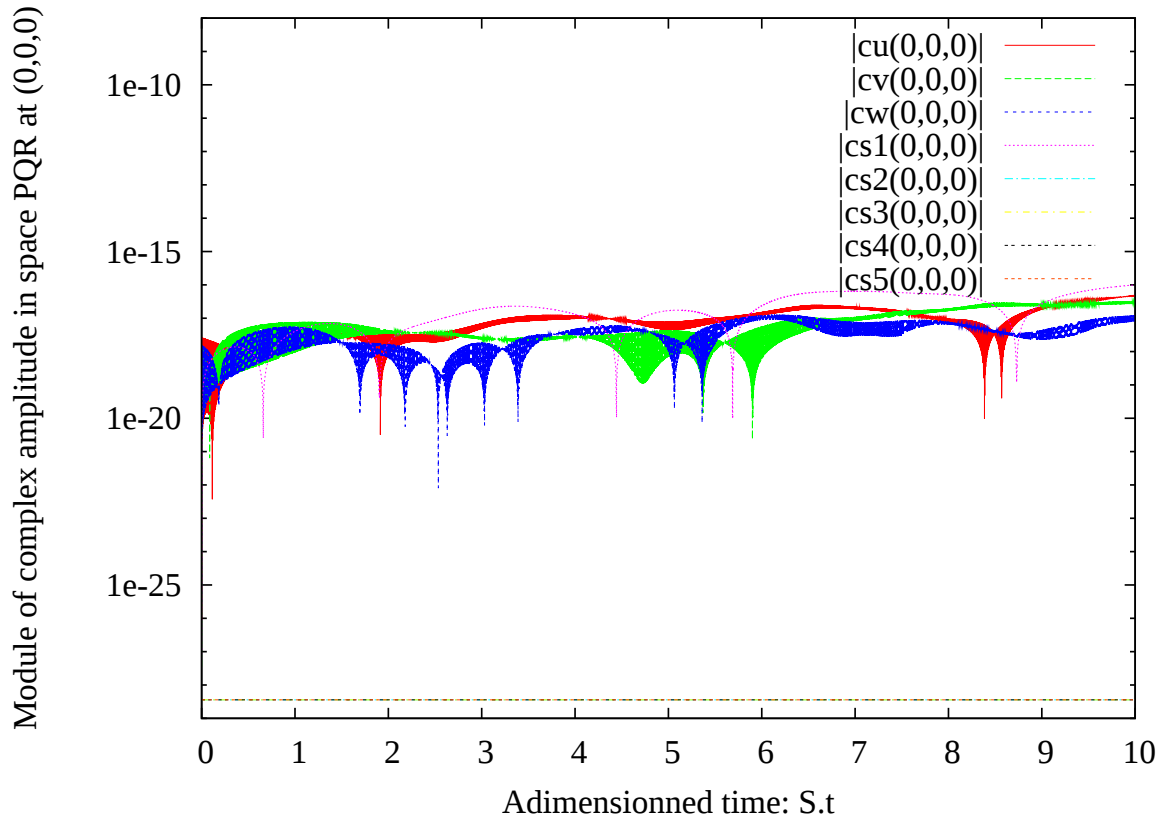
StratS2	succès le 30/03/2007
StratS3	succès le 30/03/2007
StratS4	succès le 30/03/2007
StratS	succès le 30/03/2007

TAB. 13: Récapitulatif des simulations automatiques pour vérifier les tests de cohérences. Le désignation utilisée corespond à : **Shear** lorsque le cisaillement est activée ; **Rot** lorsque la rotation est activée ; **Strat** lorque la stratification est activé ; **Sn** lorsque n scalaires passifs sont activés ; **NDA** lorsque le désaliasing est desactivé

Nous allons étudier plus précisément un test de cohérence du calcul **ShearRotStratS4**

Aperçu pour le cas **ShearRotStratS4**

On peut voir sur la figure 72 la valeur du mode $(0, 0, 0)$ pour la simulation **ShearRotStratS4**. Il à été observé pour les simulations numériques directes sous résolues que le mode $(0, 0, 0)$ avait tendance à croître. Dans beaucoup de code de calcul ce mode est mis à zéro. Il semble interessant de le laissé libre comme moyen de diagnostic de la bonne résolution de la simulation numérique. Maintenant nous allons vérifier l'universalité des paramètres adimensionnels.



(a) mode (0, 0, and 0)

FIG. 72 – La valeur du mode (0, 0, 0) est surveillée en fonction du temps pour le calcul **ShearRotStratS4**. De bas en haut en se déplaçant sur la ligne de cadre verticale droite : Les 4 scalaires passifs, la composante de vitesse méridionale, la composante de vitesse verticale, la composante de vitesse zonale et enfin la flotabilité.

Universalité des paramètres adimensionnels

Toujours sur 2000 *pas de temps* avec des paramètres pour les deux simulations résumées dans le tableau 14 pour des cas avec comme nombre adimensionnelle $Ri = 0.09$, $\epsilon = 0.1$ et $Re(t=0)_\lambda = 66$. Ce tests est exactement le même que celui effectué par F.G.

référence	redimensionné
$Ek(t=0) = 1$	$Ek^*(t=0) = 4$
$S = 1$	$S^* = 2$
$N = 0.3$	$N^* = 0.6$
$f = 0.009$	$f^* = 0.018$
$\nu = 100$	$\nu^* = 200$

TAB. 14 – Paramètres pour le test d’universalité

Jacobitz et al. (1997, [66],p260,fig21) à la différence près que les auteurs utilisaient ce test comme moyen, validation d’un code de simulation numérique directe d’une turbulence homogène cisailée-stratifié. Dans la présente étude la rotation verticale et le gradient transverse du scalaire actif sont ajoutés. On peut voir la figure 73 que l’universalité des paramètres adimensionnelles est parfaitement respectée. Maintenant que nous avons

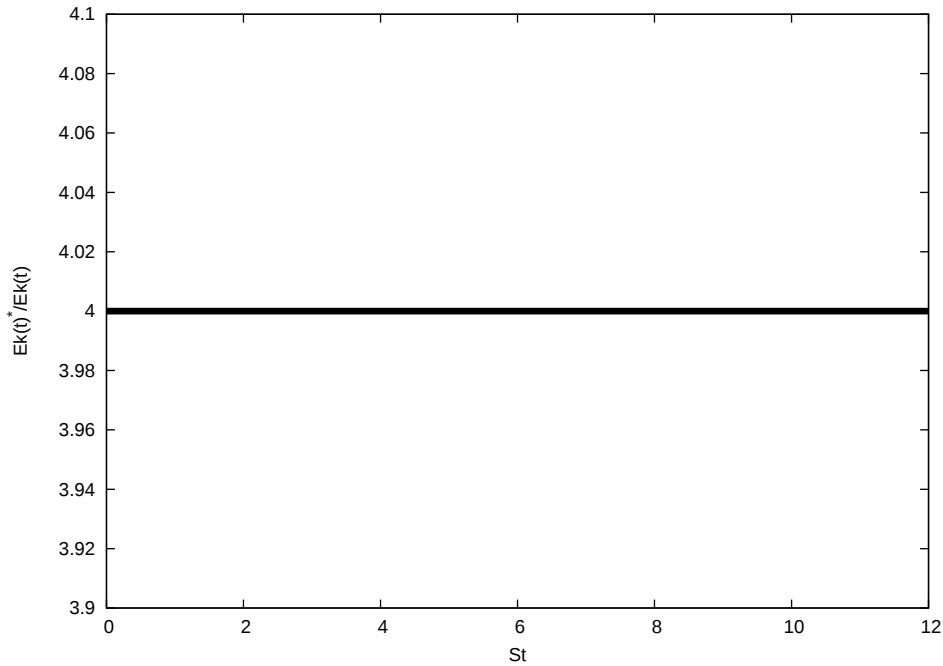


FIG. 73 – Test d’universalité des paramètres adimensionnel dans le cas barocline non-linéaire. En abscisse est représenté le rapport de l’énergie cinétique de la simulation avec les équations de références et l’énergie cinétique de la simulation avec les équations redimensionnées. En ordonnées est représenté le temps adimensionnelle St .

présenté le test d’universalité nous allons présenter le très classique test de du schéma numérique au pas de temps.

.3.3 Tests de dépendance

L'avance temporelle avec le RK3 utilisé dans les simulations numériques directes est testé sur $t = 2$ avec la solution analytique **RotStratIncomp** vue précédemment. Pour le détail du schéma numérique de type Rung-Kutta voir la thèse de G.A. Blaisdell (1991, [9]). On peut sur la figure 74 que l'on retrouve la dépendance attendu en $O(\Delta t^3)$, ce qui n'invalide pas l'avance temporelle. Maintenant nous allons présenter un test important

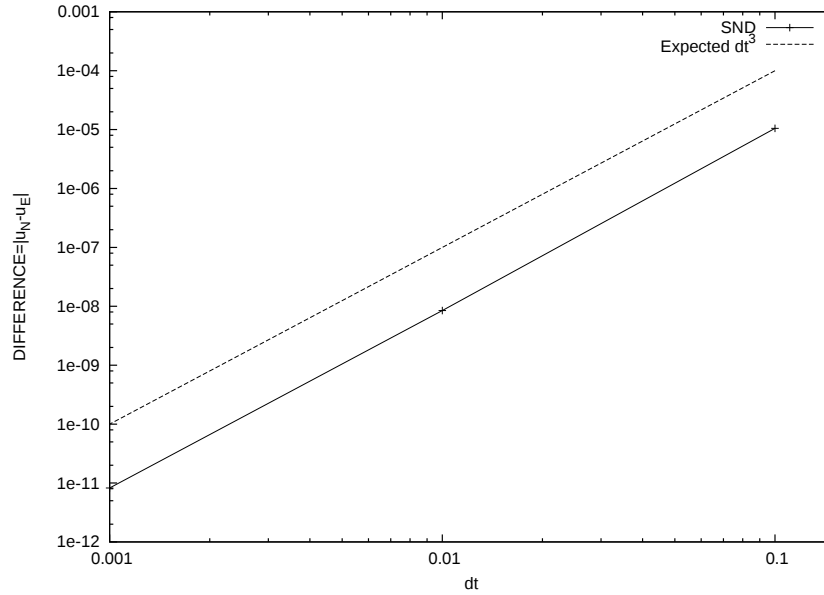


FIG. 74 – Dépendance de Rung-Kutta d'ordre 3 aux pas de temps.

qui est le test de bon fonctionnement des entrées-sorties

Erreur maximum sur le cube	1.942890293094024D-015			
Localisation	5	4	2	5

TAB. 15 – Test d’entrées-sorties. La ligne du haut représente l’erreur maximum trouvée sur le cube $\mathfrak{C}$ après 2000 pas de temps entre deux simulations dont l’une a effectué une sauvegarde. Dans la ligne du bas les trois premiers chiffres représentent la localisation de la différence maximum (i_X, i_Y, i_Z) et le quatrième chiffre est l’indice de la composante pour laquelle la différence est maximum. La numéro 5 correspond aux deuxième champs scalaires.

.3.4 Test d’entrée-sortie

Ce test consiste à exécuter deux fois la même simulation mais dans un des calculs nous nous arrêtons à la moitié de la simulation puis nous le relançons. Nous allons partir sur une base de 2000 pas de temps et un calcul de turbulence barocline avec 4 scalaires passifs et une initialisation aléatoire isotrope en repère de Craya-Herring pour la simulation que nous nommerons **A**. La simulation **B** aura les mêmes paramètres d’entrée et le même champ initial sauf que lorsque le calcul aura atteint 1000 pas de temps le champ sera sauvegardé sur le disque et le calcul arrêté. Ensuite nous la simulation **B** pour 1000 pas de temps. Après il suffit de comparé le champ à 2000 pas temps des simulations **A** et **B**. Le résultat est satisfaisant, il est récapitulé dans le tableau 15. Maintenant nous allons présenter quelques comparaisons avec des simulations numériques directes antérieures.

.3.5 Comparaison avec des simulations précédentes

Dans cette section nous allons comparer les résultats du présent code de simulation numérique directe à ceux de deux simulations novatrices. La première est celle de S.A. Orszag et G.S. Patterson en 1971 et la deuxième est celle de R.S. Rogallo en 1981.

Orszag et Patterson 1972 : la turbulence isotrope décroissante

S.A. Orszag et G.S. Patterson ont lancé l'utilisation de la méthode pseudo-spectrale pour l'étude de la turbulence. Dans leur article de 1972 ([101]) ils présentent les résultats obtenu avec une pseudo-spectrale avec 32^3 points de collocation. La même simulation à été effectuée et les résultats sont comparés avec ceux des deux auteurs. Comme on peut le voir sur la figure 75 les résultats correspondent remarquablement bien.

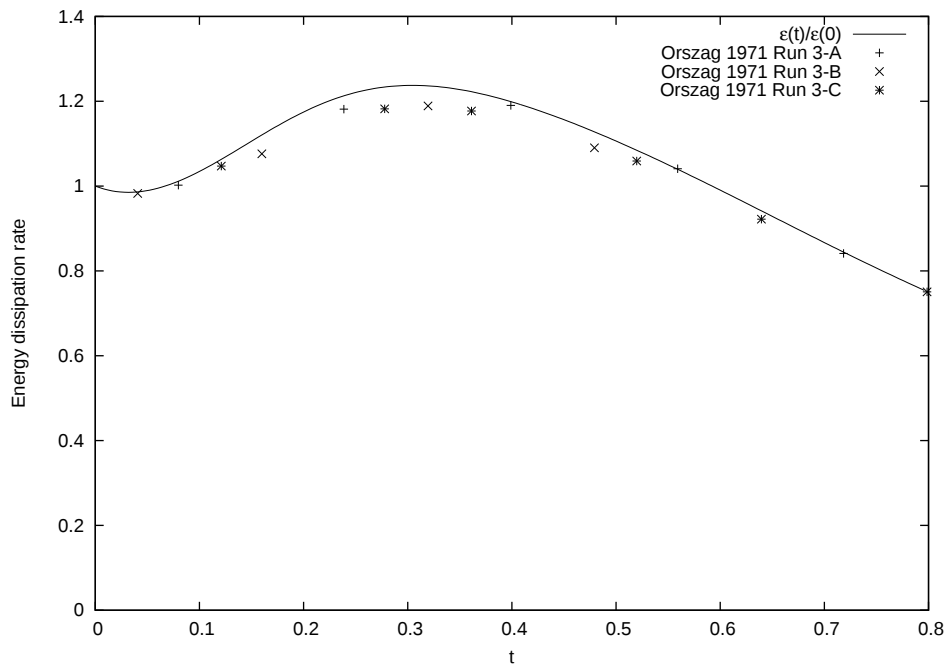


FIG. 75 – Comparaison des résultats de la simulation numérique directe de turbulence isotrope décroissante de S.A. Orszag et G.S. Patterson en 1972 [101] avec les résultats issus du présent code de simulation numérique directe

Rogallo 1981 la turbulence homogène cisailée

R.S. Rogallo est le premier à avoir effectué des simulations numériques directes de turbulence homogène avec une méthode pseudo-spectrale en mode de Fourier lagrangien (1981, [115]). Le cas BSH10 de R.S. Rogallo de turbulence homogène cisailée est comparé aux résultats du présent code de calcul. On peut voir que les résultats correspondent très bien. Les différences sont dues aux différentes méthodes d'initialisation (méthode potentielle, méthode du repère de Craya-Herring, chaîne de nombre aléatoire). Dans tous les cas ce test valide la bonne implémentation de terme linéaire comme le signe du cisaillement par exemple.

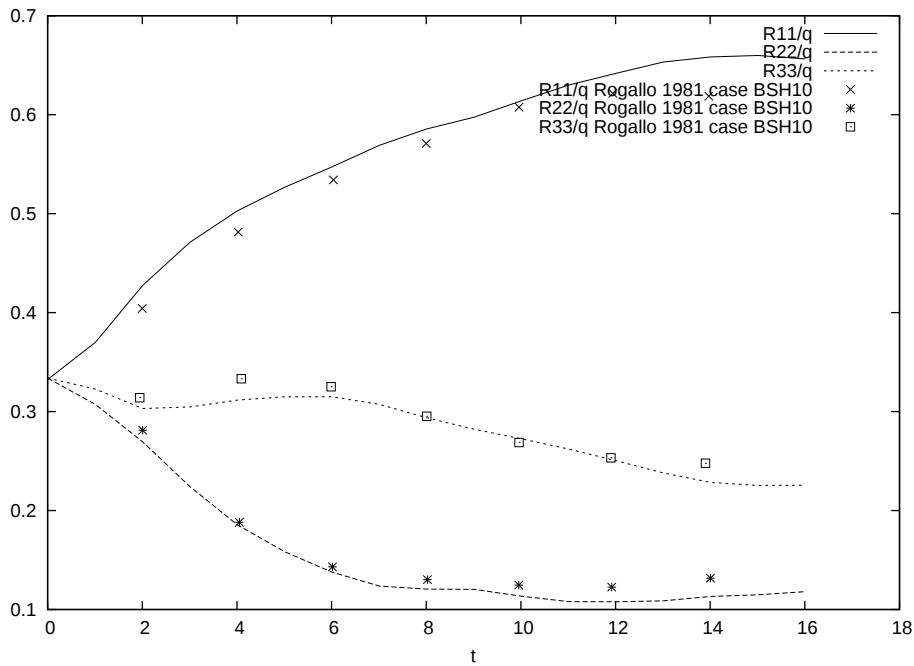


FIG. 76 – Comparaison des résultats de la simulation numérique directe de turbulence homogène cisailée de R.S. en 1981 [115] avec les résultats issus du présent code de simulation numérique directe

Maintenant nous allons vérifier rapidement que nous retrouvons bien les structures caractéristiques de la turbulence isotrope et anisotrope.

.3.6 Phénoménologie des structures turbulentes

Dans cette section nous allons vérifier que nous retrouvons bien d'une manière qualitative les structures caractéristiques de la turbulence homogène. Il ne s'agit pas de retrouver précisément la même forme des structures mais plutôt les orientations caractéristiques. Les visualisations du code **TR5** seront comparées à des visualisations obtenues avec d'autre code de calcul. D'abord nous regarderons les structures de la turbulence isotrope. Après nous présenterons les structures de la turbulence anisotrope cisailée puis tournante puis stratifiée. Nous finirons par une visualisation des 5 scalaires passifs dans une turbulence isotrope lorsque le nombre de Prandtl change. Commençons par vérifier que nous obtenons bien les structures de la turbulence isotrope.

Turbulence isotrope

La turbulence isotrope en décroissance investiguée par simulation numérique directe a été grandement étudiée depuis S.A. Orszag (quelques références sont S.A. Orszag, 1972, [101]; J.R. Herring et R.M. Kerr, 1993, [59]; N.N. Mansour et A.A. Wray, 1994, [84]; S.M. de Bruyn Kops et J.J. Riley, 1998, [30]; K.K. Nomura et G.K. Post, 1998, [100]; S. Kurien et M.A. Taylor, 2005, [75]). Les structures cohérentes de la turbulence isotrope ont une forme de “vermicelles”, ce sont des tubes vortex dont le diamètre est de l'ordre de quelque longueurs de l'échelle de Kolmogorov et quand à elle, la longueur est de l'ordre de l'échelle intégrale. Sur la planche 77 sont représentées des simulations obtenues avec différents codes de calcul des structures caractéristiques de la turbulence isotrope décroissante. Les structures de la turbulence isotrope décroissante sont retrouvées avec les présents codes **TR5** ce qui valide un peu plus l'implémentation du terme de non-linéaire.

Turbulence avec un cisaillement constant

Depuis R.S. Rogallo de nombreuses simulations de turbulence homogène cisailées ont été effectuées (R.S. Rogallo, 1981, [115]; M.M. Rogers et P. Moin, 1987, [117]; M.J. Lee et al., 1989, [77]; O. Iida et al., 2000, [62]; K.K. Nomura et P.J. Diamessis, 2000, [99]; T. Ishihara et al., 2002, [63]). Les structures caractéristiques de la turbulence cisailée ont une forme allongée dans la direction de l'écoulement moyen, ces structures sont appelées “streaks”. On peut voir sur la planche 78 les structures caractéristiques de la turbulence homogène cisailée obtenues avec différents codes de simulation numérique directe pseudo-spectrale. Dans tous les cas on retrouve des structures allongées dans la direction longitudinale et cela même avec des critères de visualisations différents ce qui est réconfortant pour la validation de l'implémentation du remaillage dans le nouveau code **TR5**.

Turbulence en rotation

Les structures cohérentes associées à la turbulence homogène en rotation sont allongées suivant la direction de l'axe de rotation. Ces structures caractéristiques sont visibles sur la planche 79. Le code **TR5** reproduit bien les structures en “cigares verticaux” que l'on peut obtenir avec les simulations numériques directes non-linéaire de la turbulence

homogène soumise à une rotation en bloque. Il existe de nombreuses études de turbulence homogène en rotation-pure sans forçage (par exemple J. Bardina et al., 1985, [4]; N.N. Mansour et al., 1991, [83]; M. Morinishi et al., 2001, [92], [91], [90]).

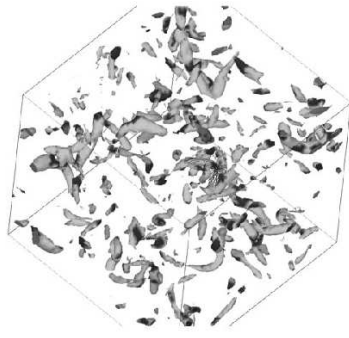
Turbulence stratifiée pure

Les structures caractéristiques de la stratification sont des “galettes” perpendiculaires à la gravité visible sur les figures de la planches .3.6. Depuis la première simulation de turbulence homogène stratifiée de J.J. Riley et alii en 1981, de nombreux chercheurs ont utilisé des simulations numériques directes de turbulence homogène stratifiée pour caractériser la turbulence en stratification-pure en décroissance (à titre d'exemple J.J. Riley et al., 1981, [113]; O. Métais et J.R. Herring, 1989, [95]; C. Staquet et F.S. Godeferd, 1998, [37]; Y. Kaneda and I. Takaki, 2000, [68]; F.S. Godeferd et C. Staquet [54]; J.J. Riley and S.M. de Bruyn Kops, 2003, [112]; Y. Kaneda et K. Yoshida, 2004, [69] et en double diffusion A.E. Gargett, 2003, [45]). On pourra constater en regardant les figures .3.6 que le code de simulation numérique directe de la turbulence homogène **TR5** reproduit bien les structures aplaties de la turbulence stratifiée. Maintenant nous allons visualiser les cas d'une turbulence isotrope avec 5 scalaires passifs et vérifier l'influence du nombre de Prandtl sur les structures.

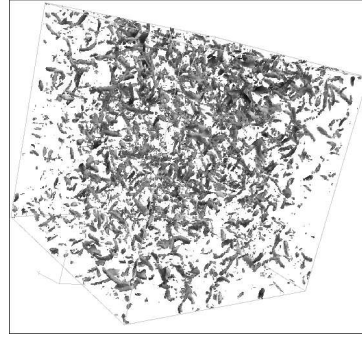
Turbulence isotrope avec 5 scalaires passifs

Le code **TR5** résout jusqu'à cinq scalaires simultanément car originellement le code de turbulence inhomogène de G.N. Coleman, résolvait cinq scalaires passifs. Les scalaires passifs avait été implémentés. Mais lors de la parallélisation ils n'avaient jamais été testés car ils n'étaient pas utilisés. Il s'est avéré qu'il y avait problème de passage d'arguments lors de l'appel de la sous-routine pour résoudre l'équation de transport des scalaires. Une fois fixé ce problème dans le code en canal la création du code homogène a pu débuter. Lors de la création du code tri-périodique les 5 scalaires passifs ont été gardées car cela ne demandait pas de surcoût de temps de programmation. Par contre il est nécessaire de tester la validité de l'implémentation des scalaires, de la même manière que la résolution de l'équation pour les vitesses, car étant présents ils pourraient introduire des bugs. Sur la planche 81 est visualisée la norme du champ de vitesses 81(a) ainsi que la valeur des 5 scalaires passifs. On vérifie que les structures du scalaire sont plus fines lorsque le nombre de Prandtl (Schmidt c'est équivalent dans la présente étude) augmente (Z. Warhaft, 2000, [134]).

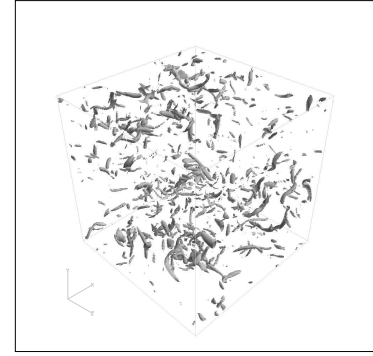
Précédemment nous avons vérifié qualitativement la bonne phénoménologie des structures cohérentes de la turbulence anisotrope et isotrope maintenant nous allons vérifier quantitativement la phénoménologie des ondes en présence dans les écoulements anisotropes.



(a) K.K. Nomura et G.K. Post 1998. Isosurfaces du critère d'anisotropie normalisé tel que $II = 1$ avec $N^3 = 64^3$. Sur les régions claire $III < 0$ et sur les régions foncé $III > 0$ tiré de [100] fig8a p82

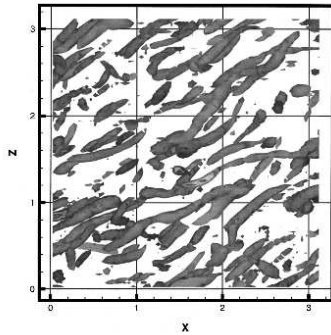


(b) L. Liechtenstein 2005. Surface iso-entrophie valant 2.48 à $t = 12$ tiré de [79] fig5.3c p119 $N^3 = 256^3$

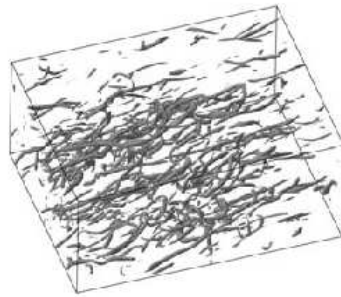


(c) Présent code **TR5**. Surfaces iso-entrophie à 13% du maximum pour une turbulence isotrope avec $N^3 = 128^3$

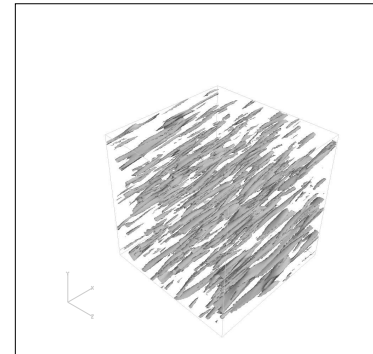
FIG. 77 – Comparaison des visualisations des structures d'une turbulence isotrope décroissante issue de différents codes de calculs



(a) K.K. Nomura et P.J. Diamessis 2000. Vue longitudinale-verticale des isosurfaces de II de forte rotation ($II > 0$) à $St = 3$ tiré de [99] avec $N^3 = 128^3$

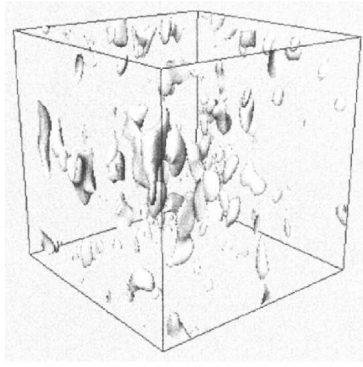


(b) G. Brethouwer 2005. Tourbillons identifié par les isosurfaces du critère $|\lambda_{ci}|$ à $St = 8$ et pour $\frac{|\lambda_{ci}|}{S} = 1.68$ tiré de [14] fig22a p328

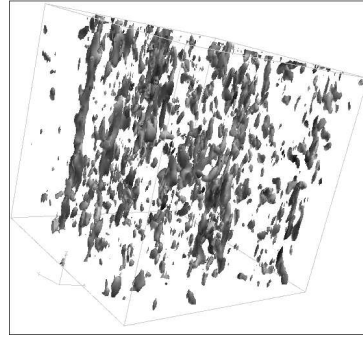


(c) Présent code **TR5**. Surfaces d'iso valeur de vitesse longitudinale avec $N^3 = 128$

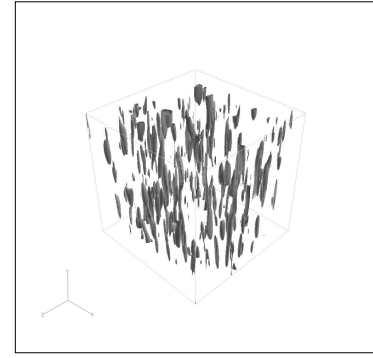
FIG. 78 – Comparaison des visualisations des structures d'une turbulence isotrope décroissante issue de différents codes de calculs



(a) Y. Kimura & J.R. Herring. Structure caractéristique de la turbulence dominé par la force de rotation tiré de [53] p42

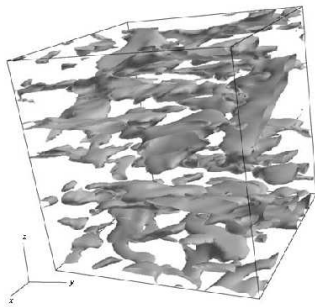


(b) L. Liechtenstein 2005. Surface iso-ensrophie valant 13.6 à $t = 12$ tiré de [79] fig5.1c p113 avec $N^3 = 256^3$

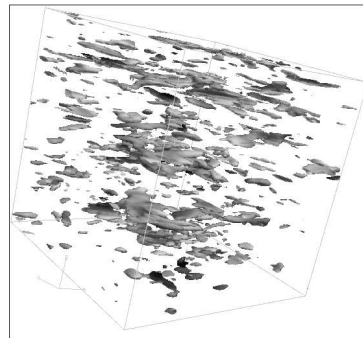


(c) Présent code **TR5**. Surfaces iso-ensrophie valant 32 pour un cas de rotation pure à $\Omega = 800$ avec $N^3 = 128^3$

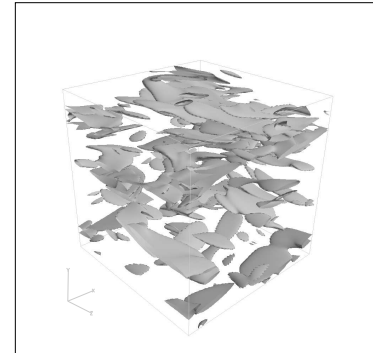
FIG. 79 – Comparaison des visualisations des structures d'une turbulence homogène en rotation issue de différents codes de calculs



(a) F.S. Godefert et C. Staquet 2003. Iso-surface de $\frac{\partial u_2}{\partial z}$ égale à 25% dans sa valeur maximum dans la boîte de calcul pour le calcul R1 à $\frac{t-t_0}{T_{BV}} = 6$ tiré de [54] fig9 p137 avec $N^3 = 256^3$

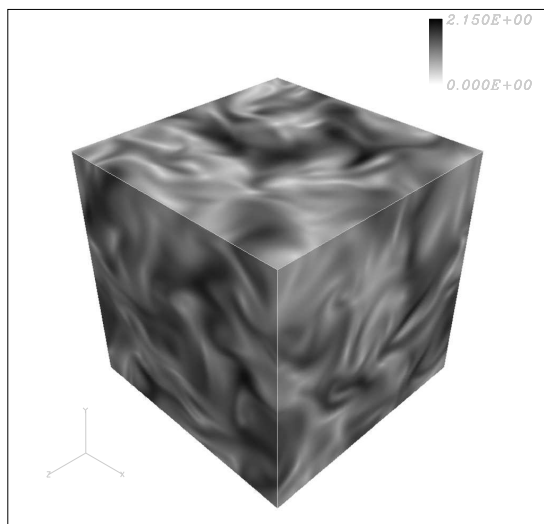


(b) L. Liechtenstein 2005. Surface iso-ensrophie valant 5.2 à $t = 12$ tiré de [79] fig5.1c p113 avec $N^3 = 256^3$

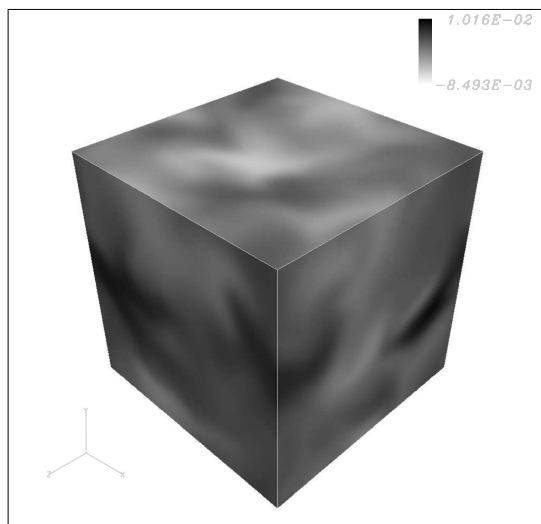


(c) Présent code **TR5**. Surfaces iso-ensrophie valant 20 pour un cas de rotation pure à $N = 600$ avec $N^3 = 128^3$

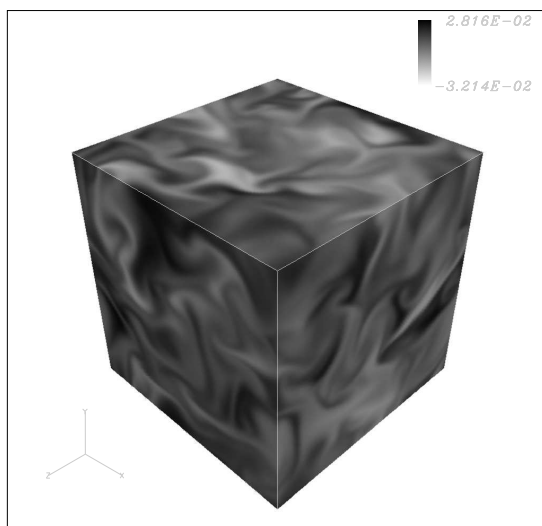
FIG. 80 – Comparaison de différentes visualisations de simulations numérique de turbulence homogène stratifiée



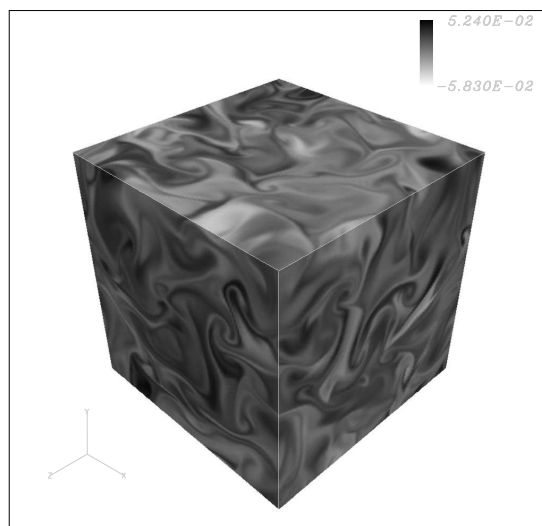
(a) Norme de la vitesse



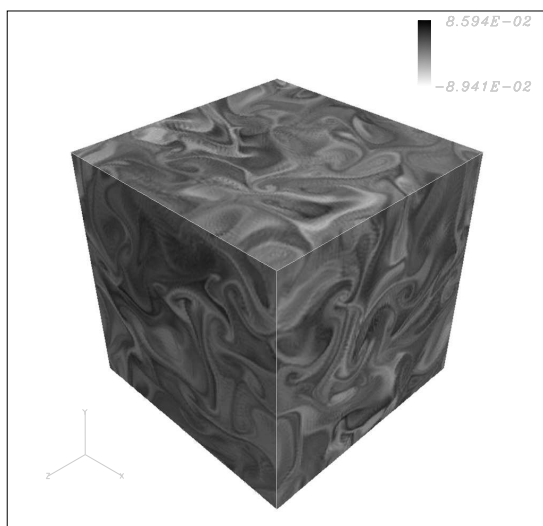
(b) Scalaire à $t = 2$ et $Pr = 0.01$



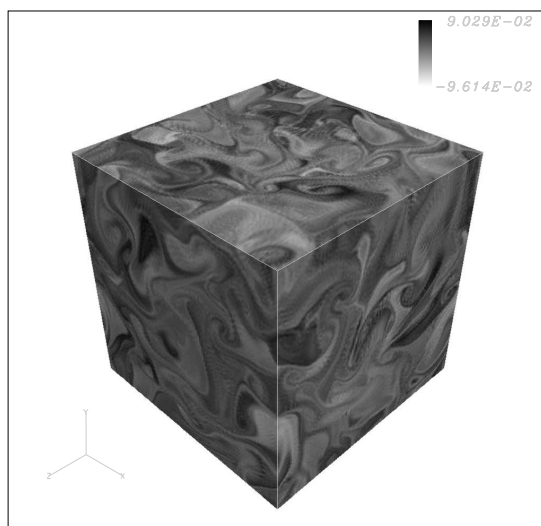
(c) Scalaire 2 à $t = 2$ et $Pr = 0.1$



(d) Scalaire 3 à $t = 2$ et $Pr = 1$



(e) Scalaire 4 à $t = 2$ et $Pr = 10$



(f) Scalaire 5 à $t = 2$ et $Pr = 100$

FIG. 81 – 5 scalaires passifs dans un champ de turbulence isotrope

.3.7 Phénoménologie des ondes

Le fluide en rotation ou le fluide stratifié est forcé ponctuellement en espace physique. Il en résultait des ondes d'inertie (rotation pure, visible sur la figure 82(a)) ou des ondes interne (stratification pure, visible sur la figure 82(b)). Les tests de visualisation des lignes de phases sont très satisfaisants, il y a moins de 1° d'écart entre les valeurs théoriques et numériques (résumé dans le tableau 16). L. Lollini (1997, [80],p41) trouvé entre 1 et 2 degré d'écart pour les ondes d'inertie et 2° d'écart pour les ondes de gravité (1997, [80],p43) avec un code bi-périodique. Ce test valide la partie linéaire, les différentes opérations avec les transformées de Fourier et le mécanisme de transposition de couche des données issus des communications parallèle du code **TR5**. Les résultats ainsi que les calculs de l'angle de propagation est résumé dans le tableau 16. Maintenant que les deux codes de calculs ont été validé séparément, dans la prochaine section nous allons faire une double validation des codes **LR5** et **TR5**

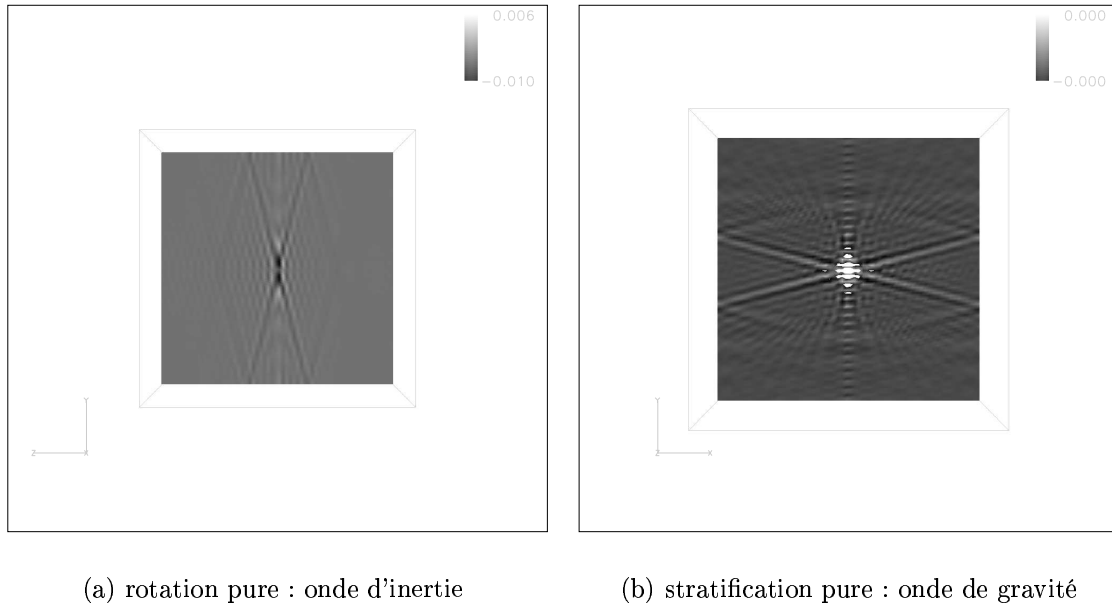


FIG. 82 – Les ondes : forçage ponctuel dans l'espace physique

.4 Double validation : comparaison des résultats du code **LF5** et **TR5**

Dans cette section on compare pour le cas barocline l'évolution du tenseur de Reynolds généralisé (ce qui fait 10 composantes) issus du code de distorsion rapide **LF5** et du code de simulation numérique direct **TR5** (avec le terme non-linéaire mis à zéro). Le cas barocline (linéaire) choisis à pour paramètres adimensionnelle :

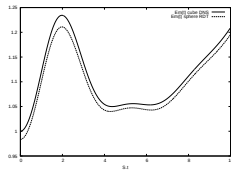
$$\begin{aligned}\epsilon &= 8 \\ Ri &= 6.25\end{aligned}$$

On remarquera en regardant la planche 83 que les calculs sur l'évolution des composantes du tenseur de Reynolds normalisé par l'énergie initiale correspond très bien. Bien que

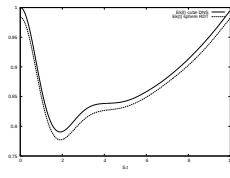
	Inertie	Gravité
Relation	$\omega = \pm 2\Omega \cos \theta$	$\omega = \pm N \sin \theta$
ω_0	$2\Omega = 2$	$N = 2$
$\frac{\omega_0}{\omega}$	4	4
ν	10^{-14}	10^{-14}
κ	10^{-14}	10^{-14}
A	0.1	0.1
$V_{max} = A\omega$	0.05	0.05
$Re_{Batteur} = \frac{V_{max}A}{\nu}$	5.10^{11}	5.10^{11}
Angle théorique	75.52°	14.47°
Angle mesuré	75.94°	14.27°

TAB. 16 – Comparaison des résultats numériques avec la théorie des ondes

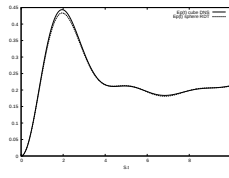
pour ce test le terme non-linéaire du code **TR5** soit mis à zéro, ce test est très important car aucun terme de forçage n'a été ajouté, c'est-à-dire que les équations sont identiques aux simulations baroclines qui seront effectuées par la suite (mis à part le terme non-linéaire bien sûr).



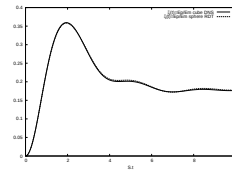
(a) Em mécanique



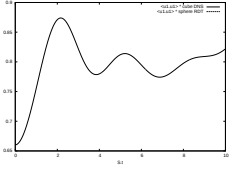
(b) Ek cinétique



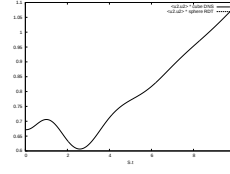
(c) Ep potentielle



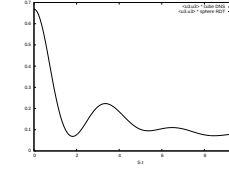
(d) $\xi = \frac{Ep}{Em}$ Ratio
d'énergie potentielle



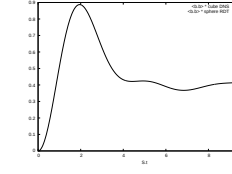
(e) $\frac{\overline{u_1 u_1}}{Em0}$ composante
longitudinale d'énergie



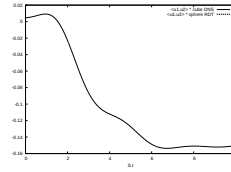
(f) $\frac{\overline{u_2 u_2}}{Em0}$ composante
transverse d'énergie



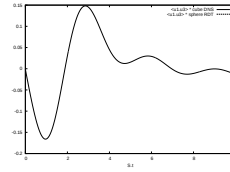
(g) $\frac{\overline{u_3 u_3}}{Em0}$ composante
verticale d'énergie



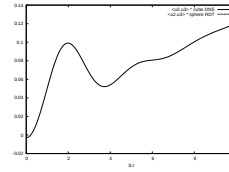
(h) $\frac{\overline{b\bar{b}}}{N^2 Em0}$ compo-
sante potentielle d'éner-
gie



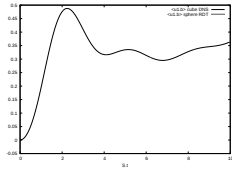
(i) $\frac{\overline{u_1 u_2}}{Em0}$ corrélation
longitudinal-transverse



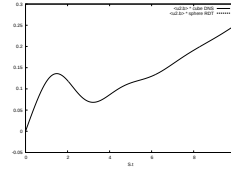
(j) $\frac{\overline{u_1 u_3}}{Em0}$ corrélation
longitudinale-verticale



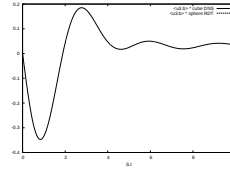
(k) $\frac{\overline{u_2 u_3}}{Em0}$ corrélation
transverse-verticale



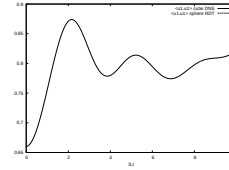
(l) $\frac{\overline{u_1 \bar{b}}}{Em0}$ flux de flo-
tabilité longitudinale



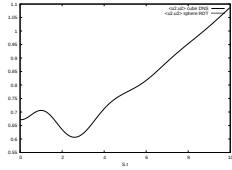
(m) $\frac{\overline{u_2 \bar{b}}}{Em0}$ flux de flo-
tabilité transverse



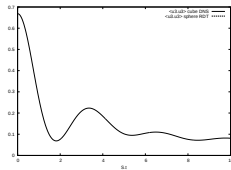
(n) $\frac{\overline{u_3 \bar{b}}}{Em0}$ flux de flo-
tabilité vertical



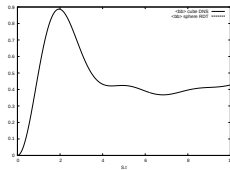
(o) $\overline{u_1 u_1}$ compo-
sante longitudinale
d'énergie



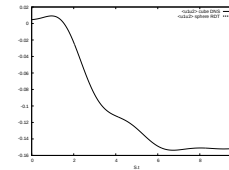
(p) $\overline{u_2 u_2}$ com-
posante transverse
d'énergie



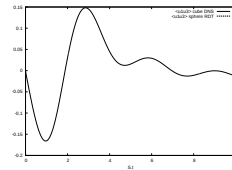
(q) $\overline{u_3 u_3}$ compo-
sante vertical d'énergie



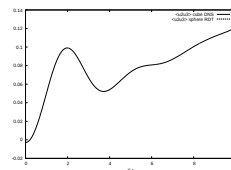
(r) $\overline{b\bar{b}}$ intensité du
scalaire



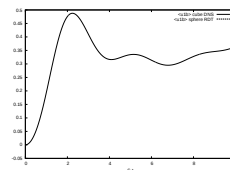
(s) $\overline{u_1 u_2}$ corrélation
longitudinal-transverse
d'énergie



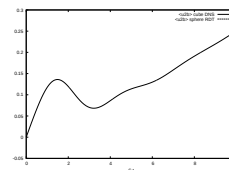
(t) $\overline{u_1 u_3}$ corrélation
longitudinal-verticale
d'énergie



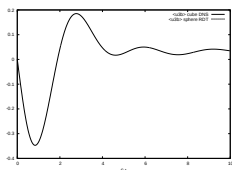
(u) $\overline{u_2 u_3}$ corréla-
tion transverse-verticale
d'énergie



(v) $\overline{u_1 \bar{b}}$ flux scalaire
longitudinale



(w) $\overline{u_2 \bar{b}}$ flux scalaire
transverse



(x) $\overline{u_3 \bar{b}}$ flux scalaire
vertical

FIG. 83 – Double validation

.5 Conclusion

Dans cette annexe nous avons entièrement validé les deux codes de calculs. Le code de distorsion rapide **LF5** à été validé avec des solutions analytiques ainsi que des tests de cohérence. Le code de simulation numérique directe **TR5** à été validé de nombreuse manière dont un résumé est présenté dans le tableau 17. Les tests sont pour la numérisation ce que la démonstration est et pour les mathématiques.

Partie non-linéaire	Tourbillons de Taylor-Green Fonction analytique et forçage Comparaison avec des publications classiques Structure cohérente isotrope et anisotrope
Partie linéaire	Solution TDR connu Comparaison avec le code purement spectrale Forçage d'ondes
Cohérence générale	Conservation de l'énergie par les TFR Mode (0, 0, 0) Continuité

TAB. 17 – Récapitulatif des tests du code SND

Bibliographie

- [1] Y.D. Afanasyev. Spontaneous emission of gravity waves by interacting vortex dipoles in a stratified fluid : laboratory experiments. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 2003. 169
- [2] Y.D. Afanasyev. Formation of vortex dipoles. *Physics of Fluids*, 18(3) :037103, 2006. 167
- [3] C. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*. CNRS éditions, 2003. 376 pages, 114 figures. 104, 180
- [4] J. Bardina, J.H. Ferziger, and R.S. Rogallo. Effect of rotation on isotropic turbulence computation and modeling. *Journal of Fluid Mechanics*, 154 :321–336, 1985. 263
- [5] M.E. Bastin and P.L. Read. A laboratory study of baroclinic waves and turbulence in an internally heated rotating fluid annulus with sloping endwalls. *Journal of Fluid Mechanics*, 339(01) :173–198, 1997. 176, 177
- [6] M.E. Bastin and P.L. Read. Experiments on the structure of baroclinic waves and zonal jets in an internally heated, rotating, cylinder of fluid. *Physics of Fluids*, 10 :374, 1998. 176
- [7] G.K. Batchelor. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge University Press, June 1982. 19
- [8] C. Baudelaire. Mon coeur mis à nu. (42), 1863. 88
- [9] G.A. Blaisdell. *Numerical simulation of compressible homogeneous turbulence*. Doctor of philosophy, Stanford University, January 1991. 14, 191, 258
- [10] G.J. Boer and T.G. Shepherd. Large-scale two-dimensional turbulence in the atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, 40(1) :164–184, 1983. 176
- [11] M. Bondarenko. Master-mode analysis of the genesis of organised structures in turbulent flows. Technical report, Aerodynamics and Flight Mechanics Research Group, SES, University of Southampton, 2005. Nine month report. 191, 192
- [12] P. Boroński. *Méthode des potentiels poloïdal-toroïdal appliquée à l'écoulement de von Kármán en cylindre fini*. PhD thesis, École Polytechnique, 2005. 35
- [13] W.J.T. Bos and J.-P. Bertoglio. Dynamics of spectrally truncated inviscid turbulence. *Physics of Fluids*, 18(7) :71701–71701, 2006. 95
- [14] G. Brethouwer. The effect of rotation on rapidly sheared homogeneous turbulence and passive scalar transport. linear theory and direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 542 :305–342, October 2005. 264

- [15] C. Cambon. *Modelisation spectrale en turbulence homogene anisotrope*. Thèse de troisième cycle, Université Lyon I, 1979. 44
- [16] C. Cambon. *Étude spectrale d'un champ turbulent incompressible, soumis à des effets couplés de déformation et de rotation imposés extérieurement*. Thèse de Doctorat d'État, Université Claude Bernard de Lyon, 1982. 22, 23, 85
- [17] C. Cambon, L. Jacquin, and J.L. Lubrano. Toward a new reynolds stress model for rotating turbulent flows. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4 :812, 1992. 133, 189
- [18] C. Cambon and A. Salhi. Advances in rapid distortion theory : From rotating shear flows to the baroclinic instability. Proceedings of FEDSM'03, July 2003. ASME, submitted. 199
- [19] C. Cambon, C. Teissedre, and D. Jeandel. Étude d'effets couplés de déformation et de rotation sur une turbulence homogène. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 4 :629–657, 1985. 33
- [20] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover publications, inc, 1981. 34
- [21] J.Y.-K. Cho and L.M. Polvani. The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere. *Physics of Fluids*, 8(6) :1531–1552, 1996. 143
- [22] K.T. Christensen and R.J. Adrian. Statistical evidence of hairpin vortex packets in wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 431(01) :433–443, 2001. 161
- [23] C.A. Church. *The Tornado : Its Structure, Dynamics, Prediction, and Hazards*, chapter Tornado Forecasting : A Review, pages 557–571. Geophysical Monograph 79. Amer. Geophys. Union, 1993. 181
- [24] C. Cichowlas, P. Bonaïti, F. Debbasch, and M. Brachet. Effective dissipation and turbulence in spectrally truncated euler flows. *Physical Review Letters*, 95(26) :264502, 2005. 95
- [25] D. Colson. Wave-cloud formation at denver. *Weatherwise*, 7 :34–35, 1954. 166
- [26] S.F. Corfidi. Some thoughts on the role of mesoscale features played in the 27 may 1997 central texas tornado outbreak. *Preprints, 19th Conf. on Severe Local Storms, Minneapolis, MN, Amer. Meteor. Soc*, pages 177–180, 2007. updated 2007. 182
- [27] A. Craya. *Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes - Techniques expérimentales pour l'étude de la turbulence*. Grade de docteur ès sciences, Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble, juin 1957. 34
- [28] F. Dalaudier, C. Sidi, M. Crochet, and J. Vernin. Direct evidence of "sheets" in the atmospheric temperature field. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51 :237–248, 1994. 183
- [29] S. Danilov and D. Gurarie. Scaling, spectra and zonal jets in beta-plane turbulence. *Physics of Fluids*, 16(7) :2592–2603, 2004. 161, 177
- [30] S.M. de Bruyn Kops and J.J. Riley. Direct numerical simulation of laboratory experiments in isotropic turbulence. *Physics Of Fluids*, 10(9), 1998. september. 262
- [31] G. de Moor. *Les théories de la turbulence dans la couche-limite atmospherique*. Cours et manuels. Météo-France, 1983. ISSN 0240 8996. 14, 183

- [32] P. Delorme. Numerical simulation of compressible homogeneous turbulence. Technical report, Note Technique - Office National d'études et de Recherches Aérospatiales, 1986. Ph. D. Thesis-Poitiers Univ., France. 201
- [33] INIST diffusion CNRS. Lettre de communication : document introuvable. 97
- [34] P.G. Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamics Stability*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge University Press, 1981. 29, 31, 166
- [35] E.T. Eady. Long waves and cyclonic waves. *Tellus*, 1 :33–52, 1949. 29
- [36] A. C. Eringen. Continuum Physics, Vol. 1. *Academic Press, New York*, 1971. 24
- [37] C. Staquet et F.S. Godeferd. Statistical modelling and direct numerical simulation of deaying stably stratified turbulence. part 1. flow energetics. *Journal of Fluid Mechanics*, 360 :295–340, 1998. 263
- [38] M. Farge, K. Schneider, G. Pellegrino, A.A. Wray, and R.S. Rogallo. CVS decomposition of 3D homogeneous turbulence using orthogonal wavelets. *Proceedings of the Summer Program*, page 305, 2000. 144
- [39] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of non linear problems. *The University of Chicago Press.*, 1955. 89
- [40] B. Galperin. Anisotropic turbulence and zonal jets in the ocean, giant planets and computer simulations. Columbia University, New York, 16-18 june 2004. 25th IUGG Conference on Mathematical Geophysics. 176
- [41] B. Galperin, H. Nakano, H.P. Huang, and S. Sukoriansky. The ubiquitous zonal jets in the atmospheres of giant planets and earth's oceans. *Geophys. Res. Lett.*, 31(13) :13303–13308, 2004. 177
- [42] B. Galperin, S. Sukoriansky, and H.P. Huang. Universal n^{-5} spectrum of zonal flows on giant planets. *Physics of Fluids*, 13 :1545, 2001. 176
- [43] B. Ganapathisubramani, E.K. Longmire, and I. Marusic. Characteristics of vortex packets in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 478 :35–46, 2003. 161
- [44] R. Ganesh and P. Angelino. A gyrokinetic stability code for finite- β tokamaks. *EPFL Supercomputing Review*, pages 23–27, january 2004. 45
- [45] A.E. Gargett, W.J. Merryfield, and G. Holloway. Direct Numerical Simulation of Differential Scalar Diffusion in Three-Dimensional Stratified Turbulence. *Journal of Physical Oceanography*, 33(8) :1758–1782, 2003. 263
- [46] E. Garnier. *Étude numérique des instabilités de jets baroclines*. Doctorat de troisième cycle, Institut National Polytechnique de Grenoble, mars 1996. 144
- [47] H.W. Gehman. Report of columbia accident investigation board. Technical report, NASA, Washington, 2003. 191
- [48] T. Gerz and U. Schumann. Direct simulation of homogeneous turbulence and gravity waves in sheared and unsheared stratified flows. *Turbulent Shear Flows*, 7 :27–45, 1991. 129
- [49] T. Gerz and U. Schumann. A possible explanation of countergradient fluxes in homogeneous turbulence. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 8(3) :169–181, 1996. 129

- [50] T. Gerz, U. Schumann, and S.E. Elghobashi. Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 200 :563–594, March 1989. 129
- [51] C.H. Gibson. Intermittency of internal wave shear and turbulence dissipation. In *Phys. Proc. in Lakes and Oceans*, number 54 in Coastal and Estuarine Studies, pages 363–376, 1998. 178
- [52] C.H. Gibson. Fossil turbulence revisited. *Journal of marine systems*, 21(1-4) :147–167, 1999. 188
- [53] F.S. Godeferd. Stratified turbulence with and without rotation. “Variable density flows” summer school, september 2003. 265
- [54] F.S. Godeferd and C. Staquet. Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably-stratified turbulence : Part 2 : Large and small scales anisotropy. *Journal of Fluid Mechanics*, 486 :115–150, 2003. 263, 265
- [55] T.M. Hamill and J.S. Whitaker. Accounting for the error due to unresolved scales in ensemble data assimilation : A comparison of different approaches. *Mon. Wea. Rev.*, 133 :3132–3147, 2005. 183
- [56] L. Hatton and A. Roberts. How accurate is scientific software? *IEEE Trans. Software Eng.*, pages 785–797, 1994. 190
- [57] J.R. Herring. Approach of axisymmetric turbulence to isotropy. *Physics of Fluids*, 1974. 34
- [58] J.R. Herring and R.M. Kerr. Comparison of direct numerical simulations with predictions of two-point closures for isotropic turbulence convecting a passive scalar. *Journal of Fluid Mechanics*, 118 :205–219, 1982. 139
- [59] J.R. Herring and R.M. Kerr. Development of enstrophy and spectra in numerical turbulence. *Physics of Fluids A*, 5(11) :2792–2798, November 1993. 262
- [60] S.E. Holt, J.R. Koseff, and J.H. Ferziger. A numerical study of the evolution and structure of homogeneous stably stratified sheared turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 237 :499–539, 1992. 97, 191
- [61] Y. Hsueh. Mesoscale turbulence spectra over Indian ocean. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 25 :1052–1057, november 1968. 176
- [62] O. Iida, M. Iwatsuki, and Y. Nagano. Vortical turbulence structure and transport mechanism in a homogeneous shear flow. *Physics of Fluids*, 12(11) :2895–2905, 2000. 119, 262
- [63] T. Ishihara, K. Yoshida, and Y. Kaneda. Anisotropic velocity correlation spectrum at small scales in a homogeneous turbulent shear flow. *Physical Review Letters*, 88(15), april 2002. 262
- [64] K. Itakura, A. Uno, M. Yokokawa, M. Saito, T. Ishihara, and Y. Kaneda. Performance tuning of a CFD code on the Earth Simulator. *NEC Research & Development*, 44, january 2003. 91
- [65] F.G. Jacobitz. The effect of rotation on turbulence and turbulent mixing in stably stratified shear flows. 2006 Ocean Sciences Meeting, 2006. 21, 95
- [66] F.G. Jacobitz, S. Sarkar, and C.W. van Atta. Direct numerical simulations of the turbulence evolution in a uniformly sheared and stably stratified flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 342 :231–261, 1997. 191, 192, 257

- [67] J.M. Jazequel and B. Meyer. Design by contract : the lessons of Ariane. *Computer*, 30(1) :129–130, 1997. 191
- [68] Y. Kaneda and I. Takaki. Suppression of vertical diffusion in strongly stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 402 :311–327, 2000. 263
- [69] Y. Kaneda and K. Yoshid. Small-scale anisotropy in stably stratified turbulence. *New Journal of Physics*, 6(34) :1–16, 2004. 263
- [70] Y. Kaspi and G.R. Flierl. Baroclinic instability as a source for Jupiter’s zonal jets. *American Astronomical Society, DPS meeting# 37, # 30.32; Bulletin of the American Astronomical Society*, 37 :1565, 2005. 177
- [71] S.C. Kassinos, B. Knaepen, and A. Wray. Statistical measures of structural anisotropy in MHD turbulence subjected to mean shear and frame rotation. *Journal of Turbulence*, 7(26) :1–14, 2006. 94
- [72] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, and M.M. Rogers. One-point turbulence structure tensors. *Journal of Fluid Mechanics*, 428 :213–248, 2001. 134, 189
- [73] Y. Kitamura and Y. Matsuda. Numerical experiments of two-level decaying turbulence on a rotating sphere. *Fluid Dynamics Research*, 2004. 143
- [74] N. Kukharkin and S.A. Orszag. Generation and structure of rossby vortices in rotating fluids. *Phys. Rev. E*, 54(5) :R4524–R4527, Nov 1996. 143
- [75] S. Kurien and M.A. Taylor. Direct numerical simulation of turbulence : data generation and statistical analysis. *Los Alamos Science*, (29) :142–151, 2005. 262
- [76] G. Lapeyre and I.M. Held. The role of moisture in the dynamics and energetics of turbulent baroclinic eddies. *Journal of Atmospheric Sciences*, 61(14) :1693–1710, 2004. 143
- [77] M.J. Lee, J. Kim, and P. Moin. Structure of turbulence at high shear rate. *Journal of Fluid Mechanics*, 216 :561–583, 1989. 119, 262
- [78] S. Legg and J.C. McWilliams. Convective modifications of a geostrophic eddy field. *Journal of Physical Oceanography*, 31(4) :874–891, 2001. 143, 145
- [79] L. Liechtenstein. *Dynamique eulérienne et lagrangienne des écoulements turbulents stratifiés tournants*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d’Acoustique, mai 2005. 52, 94, 95, 264, 265
- [80] L. Lollini. *Ondes et turbulence dans un écoulement confiné en rotation*. Doctorat de troisième cycle, École Centrale de Lyon, Octobre 1997. 267
- [81] H. Luce, S. Fukao, F. Dalaudier, and M. Crochet. Strong mixing events observed near the tropopause with the MU radar and high-resolution balloon techniques. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 59 :2885–2896, 2002. 183
- [82] A. Mahalov and B. Nicolaenko. Clear air and optical turbulence in airborne laser context. Navo msrc navigator, NAVal Oceanographic Major Shared Resource Center, 2003. 183
- [83] N.N. Mansour, T.H. Shih, and W.C. Reynolds. The effects of rotation on initially anisotropic homogeneous flows. *Physics of Fluids A*, 3 :2421–2425, 1991. 263
- [84] N.N. Mansour and A.A. Wray. Decay of isotropic turbulence at low reynolds number. *Physics of Fluids*, 6(2) :808–814, February 1994. 142, 262
- [85] P.S. Marcus. Vortex dynamics in a shearing zonal flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 215 :393–430, 1990. 161

- [86] P.S. Marcus, T. Kundu, and C. Lee. Vortex dynamics and zonal flows. *Physics of Plasmas*, 7(5) :1630–1640, 2000. 161, 176, 177
- [87] M.S. Miesch. Numerical Modeling of the Solar Tachocline. I. Freely Evolving Stratified Turbulence in a Thin Rotating Spherical Shell. *The Astrophysical Journal*, 562(2) :1058–1075, 2001. 189
- [88] M.S. Miesch. Numerical Modeling of the Solar Tachocline. II. Forced Turbulence with Imposed Shear. *The Astrophysical Journal*, 586(1) :663–684, 2003. 143, 189
- [89] F. Moisy and J. Sommeria. The cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence. *American Physical Society, 58th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics, November 20-22, 2005, abstract# FN. 005*, 2005. 143
- [90] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, and S.Q. Ren. Dynamics of anisotropy on decaying homogeneous turbulence subjected to system rotation. *Physics Of Fluids*, 13(10) :2912–2922, october 2001. 263
- [91] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, and S.Q. Ren. Effects of helicity and system rotation on decaying homogeneous turbulence. *JSME International Journal Serie B*, 44(3) :410–418, 2001. 263
- [92] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, and S.Q. Ren. A new dns algorithm for rotating homogeneous decaying turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 22(1) :30–38, 2001. 263
- [93] C. Morize, F. Moisy, and M. Rabaud. Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank. *Physics of Fluids*, 17(9) :095105–095105, 2005. 143
- [94] W.H. Munk and C.J.R. Garrett. Internal wave breaking and microstructure (the chicken and the egg). *Boundary-Layer Meteorology*, 4(1) :37–45, 1973. 178
- [95] O. Métais and J.R. Herring. Numerical simulations of freely evolving turbulence in stably stratified fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 117–148, 1989. 263
- [96] NAG. *D02BJF - NAG Fortran library routine document*. Mark 19. 45, 196, 197
- [97] G.D. Nastrom and F.D. Eaton. Persistent layers of enhanced c_n^2 in the lower stratosphere from VHF radar observations. *Radio Science*, 36 :137–149, 2001. 183
- [98] G.D. Nastrom and K.S. Gage. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft. *Journal of Atmospheric Sciences*, 42(9) :950–960, 1985. 176
- [99] K.K. Nomura and P.J. Diamessis. The interaction of vorticity and rate-of-strain in homogeneous sheared turbulence. *Physics of Fluids*, 12(4) :846–864, 2000. 262, 264
- [100] K.K. Nomura and G.K. Post. The structure and dynamics of vorticity and rate of strain in incompressible homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 377(01) :65–97, 1998. 262, 264
- [101] S.A. Orszag and G.S. Patterson. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Physical Review Letters*, 28(2) :76–79, 1972. 94, 192, 260, 262
- [102] R.L. Panetta. Zonal jets in wide baroclinically unstable regions : Persistence and scale selection. *Journal of Atmospheric Sciences*, 50(14) :2073–2106, 1993. 161, 177
- [103] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, second edition, 1987. 17, 29, 31

- [104] J. Piquet. *Turbulent Flow : Models and Physics*. Springer, 1999. 43, 104
- [105] D. E. Post and R. P. Kendall. Software project management and quality engineering practices for complex, coupled multi-physics, massively parallel computational simulations : lessons learned from ASCI. *J. High Perf. Comput. Appl.*, 18(4), 2004. 191
- [106] D. E. Post and G. Votta. Computational science demands a new paradigm. *Physics Today*, pages 35–41, January 2005. 190
- [107] A. Pumir. Turbulence in homogeneous shear flows. *Physics of Fluids*, pages 3112–3127, 1996. 119
- [108] A. Pumir and B.I. Shraiman. Persistent small scale anisotropy in homogeneous shear flows. *Physical Review Letters*, 75(17) :3114–3117, 1995. 143
- [109] E.N. Rasmussen, S. Richardson, J.M. Straka, P.M. Markowski, and D.O. Blanchard. The association of significant tornadoes with a baroclinic boundary on 2 june 1995. *Monthly weather review*, 128(1) :174–191, 2000. 181
- [110] C.R. Rehmann and J. Hwan Hwang. Small-scale structure of strongly stratified turbulence. *Journal of physical oceanography*, 32(2) :151–164, 2005. 18
- [111] W.C. Reynolds, S.C. Kassinos, C.A. Langer, and S.L. Haire. New directions in turbulence modeling. Japan, April 2000. Third International Symposium on Turbulence, Heat, and Mass Transfer Nagoya. 134, 135
- [112] J.J. Riley and S.M. de Bruyn Kops. Dynamics of turbulence strongly influenced by buoyancy. *Physics of Fluids*, 15(7) :2047–2059, July 2003. 166, 263
- [113] J.J. Riley, R.W. Metcalfe, and M.A. Weissman. Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density stratified fluids. In B.J. West, editor, *Non-linear properties of internal waves*, volume 76 of *AIP Conf. Proc.* 263
- [114] R.S. Rogallo. An ILLIAC program for the numerical simulation of homogeneous incompressible turbulence. Technical report, NASA Ames Research Center, 1977. 20, 89, 119
- [115] R.S. Rogallo. Numerical experiments in homogeneous turbulence. *NASA Technical Memorandum*, (81315), September 1981. 11, 15, 19, 23, 33, 41, 89, 90, 94, 261, 262
- [116] M.M. Rogers, N.N. Mansour, and W.C. Reynolds. An algebraic model for the turbulent flux of a passive scalar. *Journal of Fluid Mechanics*, 203 :77–101, 1989. 161
- [117] M.M. Rogers and P. Moin. The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :33–66, 1987. 262
- [118] N. Rott. Note on the history of the Reynolds number. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22 :1–11, 1990. 110
- [119] A. Salhi and C. Cambon. Advance in rapid distortion theory : From rotating shear flows to the baroclinic instability. *Journal of Applied Mechanics*, 73, March 2006. 11, 13, 32, 34, 36, 39, 41, 44, 87, 187
- [120] A. Salhi and A. el Bach. Effects of large scales motion in unstable stratified shear flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 20 :197–228, September 2006. 14, 42
- [121] M. Satoh. *Atmospheric circulation dynamics and general circulation models*. Springer, 2004. 29, 31, 32

- [122] U. Schneider. Baroclinic zonal currents in rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 238(1-2) :142–144, 1990. 161, 177
- [123] A. Simone. *Étude théorique et simulation numérique de la turbulence compressible en présence de cisaillement ou de variation de volume à grande échelle*. Doctorat de troisième cycle, École Centrale de Lyon, Octobre 1995. 33, 43, 44
- [124] B.A. Singer and R.D. Joslin. Metamorphosis of a hairpin vortex into a young turbulent spot. *Physics of Fluids*, 6(11) :3724–3736, 1994. 161
- [125] D. Stammer. Global characteristics of ocean variability estimated from regional TOPEX/POSEIDON altimeter measurements. *Journal of Physical Oceanography*, 27(8) :1743–1769, 1997. 176, 177
- [126] D. Stammer. On eddy characteristics, eddy transports, and mean flow properties. *American Meteorological Society*, April 1998. 22
- [127] A.G. Stephenson. Mars climate orbiter mishap investigation phase. Technical report, NASA, Washington, 1999. 191
- [128] P.H. Stone. On non-geostrophic baroclinic stability. *Journal of Atmospheric Sciences*, 23(4) :390–400, 1966. 39, 188
- [129] P.H. Stone. On non-geostrophic baroclinic stability : Part II. *Journal of Atmospheric Sciences*, 27(5) :721–726, 1970. 39
- [130] P.H. Stone. On non-geostrophic baroclinic stability : Part III. the momentum and heat transports. *Journal of Atmospheric Sciences*, 29(3) :419–426, 1972. 39
- [131] A.A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition edition, 1976. 134
- [132] University of California. *SLATEC3 (DACOSH through DS2Y)*, 1996. 45
- [133] G.K. Vallis. Atmospheric and oceanic fluid dynamics : Fundamentals and large-scale circulation. To be published by Cambridge University Press, 2005. Last updated on June 23, 2005. 180
- [134] Z. Warhaft. Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32 :203–240, 2000. 263
- [135] A.A. White and J.S.A. Green. A non-linear atmospheric long wave model incorporating parametrizations of transient baroclinic eddies. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 108 :55–85, January 1982. 183
- [136] A.A. White and J.S.A. Green. Transfer coefficient eddy flux parametrizations in a simple model of the zonal average atmospheric circulation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 110 :1035–1052, October 1984. 183
- [137] Wikipedia. Helicity (fluid mechanics) — wikipedia, the free encyclopedia, 2006. [Online ; accessed 27-October-2006]. 139
- [138] Z. Yin and T. Tang. Numerical investigations on the finite time singularity in two-dimensional boussinesq equations. *Arxiv preprint physics/0610053*, 2006. 169
- [139] M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, T. Ishihara, and Y. Kaneda. 16.4 Tflops direct numerical simulation of turbulence by Fourier spectral method on the Earth Simulator, 2002. 91
- [140] J. Zhou, R.J. Adrian, S. Balachandar, and T.M. Kendall. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 387(01) :353–396, 1999. 161

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur C. CAMBON

et les rapports de

Monsieur S. LEBLANC

Maître de Conférences HDR - LSEET - Université du Sud Toulon-Var - BP 20132
83957 LA GARDE cedex

Et de

Monsieur A. SALHI

Maître de Conférences Docteur d'Etat - Département de Physique - Faculté des Sciences de Tunis
1060 TUNIS - TUNISIE

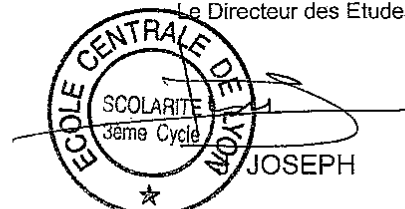
Monsieur SIMON Guillaume

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 18 octobre 2007

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes



Résumé

Dynamique multi-échelles en fluide stratifié tournant, instabilité de cisaillement et cyclone intense

Cette étude traite des fluctuations dans un écoulement de base cisailé, stratifié et tournant selon une condition d'admissibilité sur le mouvement moyen. Cette condition d'admissibilité est connue sous le nom de relation du vent thermique en météorologie et de relation thermo-haline en océanographie. Par rapport aux études classiques d'instabilités baroclines, qui sont souvent quasi-bidimensionnelles, la nouveauté est que l'écoulement est tridimensionnel et la dynamique est régie par les équations de Boussinesq tri-périodiques. Dans un tel écoulement la turbulence, les ondes et les instabilités sont entremêlées. Le problème linéaire sera étudié grâce à la Théorie de Distorsion Rapide (TDR) et l'aspect non-linéaire grâce à des Simulations Numériques Directes (SND) pseudo-spectrales.

La TDR a mis en évidence de fortes croissances transitoires qui s'atténuent lorsque le temps barocline $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ est dépassé. Les structures tourbillonnaires sont étudiées grâce au skewness de vorticité et à des visualisations tridimensionnelles, le skewness de vorticité verticale indique une prédominance des cyclones par rapport aux anticyclones. On observe des déferlements méridionaux dont la direction est proche des pentes iso-densité $\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$. Le spectre de la turbulence homogène barocline décroissante fait apparaître une brisure avec une pente locale proche de $k^{-5/3}$ sur les grands nombres d'ondes.

Mots clef : Turbulence, cisailé, stratifié, rotation, homogène, ondes, internes, gravité, inertie, instabilité, barocline, tourbillons, Théorie de Distorsion Rapide, TDR, Simulation Numérique Directe, SND

Abstract

Multi-scales dynamics in rotating stratified fluid, shear instability and extreme cyclone

This study is about turbulent fluctuations in sheared, stratified and rotating base flows with respect to the admissibility condition on the mean flow. This admissibility condition is known as thermal wind relation for meteorologists and thermohaline circulation for oceanographers. In comparison with the previous study on baroclinic instability, mainly quasi-two-dimensional, the novelty is that the flow is three-dimensional and the dynamics is given by the three-periodic Boussinesq equations. In such a flow, turbulences, waves and instability are interweaved. The linear problem will be tracked by the Rapid Distortion Theory (RDT) and the non-linear aspect by the pseudo-spectral Direct Numerical Simulation (DNS). The RDT predicts a transient growth that decreases when the baroclinic time $\tau_{B1} = \frac{4\pi^2 S}{Nf}$ is reached. The vortex structures are investigated by the vorticity skewness and with the three-dimensional visualisations. The vertical vorticity skewness indicates that cyclonic vortices are predominant over anticyclonic structures. Meridional breaking waves along isopycnal slope $\epsilon = \frac{Sf}{N^2}$ are found. The spectrum of decaying homogeneous baroclinic turbulence shows a break as well as a local slope near to $k^{-5/3}$ at large waves number.

Keywords : Turbulence, shear, stratification, rotation, homogenous, waves, internal, gravity, inertial, instability, baroclinic, vortex, Rapid Distortion Theory, RDT, Direct Numerical Simulation, DNS