



Année 2006 - N° d'ordre : 2006 – 07

CONFIDENTIEL - PSA Peugeot Citroën

MEMOIRE DE THESE

PRESENTÉ POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'ECOLE CENTRALE DE LYON
SPECIALITE : MECANIQUE

PAR

Toni AMADO

MODELISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE A JEU DU GROUPE MOTO-PROPULSEUR

Soutenu le 10 mars 2006 devant le jury composé de :

M. BERTHILLIER,	Professeur, LMARC	Président du jury
P. ARGOUL,	Chargé de recherche, ENPC/LAMI	Rapporteur
G. JACQUET-RICHARDET,	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
F. THOUVEREZ	Professeur, ECL	Directeur de thèse
Z. DIMITRIZEVIC	Ingénieur de recherche, PSA	Tuteur industriel

AVERTISSEMENT

A la demande de PSA Peugeot Citroën,
ce mémoire est strictement confidentiel
pour une durée de trois ans.

TABLE DES MATIERES

Avertissement	3
Table des matières	5
Table des illustrations	9
Liste des tableaux	11
Remerciements	13
Résumé	15
Abstract	17
Nomenclature.....	19
Abréviations.....	19
Notations	19
Introduction générale.....	21
Chapitre 1 : Problématique.....	25
1.1 Problèmes de contact dans le GMP	26
1.1.1 L'attelage mobile.....	26
1.1.2 L'entraînement de distribution et la distribution	28
1.1.3 L'entraînement des accessoires	30
1.1.4 Les contacts du GMP en dehors du moteur.....	31
1.2 Modélisations du contact	32
1.2.1 Généralités.....	32
1.2.1.1 La condition de non-interpénétration.....	32
1.2.1.2 Les lois de Signorini	34
1.2.1.3 Les lois de Coulomb : le frottement.....	35
1.2.2 Modèles sans condition de non-interpénétration	35
1.2.2.1 Modèle éléments finis avec pénalisation	35
1.2.2.2 Modèle éléments finis avec compliance	36
1.2.2.3 Théorie de Hertz	37
1.2.2.4 Modèles corps rigides avec raideur de contact	38
1.2.3 Modèles avec condition de non-interpénétration	41
1.2.4 La perte d'énergie liée aux chocs.....	44
1.2.4.1 Généralités.....	44
1.2.4.2 L'amortissement de contact	44
1.2.4.3 Comparaison raideur et amortissement de contact / restitution.....	45
1.3 Conclusion.....	46

Chapitre 2 : Outils d'analyse non linéaire	47
2.1 Les solutions non linéaires.....	48
2.1.1 Outils généraux	48
2.1.1.1 Définition des systèmes	48
i) Système autonome, ii) Système non autonome, iii) Système à évolution temporelle discrète	48
2.1.1.2 Attracteurs et bassins d'attraction.....	49
i) Ensemble invariant, ii) Ensemble attractant, iii) Attracteur, iv) Bassin d'attraction	49
2.1.1.3 Section de Poincaré	49
2.1.2 Les comportements asymptotiques	50
2.1.2.1 les points fixes	50
2.1.2.2 Les cycles limites : solutions périodiques.....	50
2.1.2.3 Les solutions quasi-périodiques.....	51
2.1.2.4 Les solutions chaotiques.....	52
2.1.2.5 Récapitulatif des attracteurs.....	52
2.1.3 Stabilité	53
2.1.3.1 Quelques définitions	53
i) Stabilité au sens de Lagrange.....	53
ii) Stabilité au sens de Poincaré.....	53
iii) Stabilité au sens de Lyapunov	53
iv) Stabilité asymptotique.....	53
v) Stabilité structurelle	53
2.1.3.2 Stabilité des points fixes	54
i) Linéarisation du système de départ.....	54
ii) Types d'états d'équilibre du système linéarisé	56
iii) Les sous-espaces propres et les variétés	57
2.1.3.3 Stabilité des cycles limites.....	58
i) Linéarisation du système continu.....	58
ii) Théorie de Floquet.....	59
iii) Cas d'un système non linéaire autonome.....	60
iv) Cas d'un système non linéaire non autonome	60
2.1.3.4 Exposants de Lyapunov.....	61
i) Cas d'une application unidimensionnelle	61
ii) Cas d'une application multi-dimensionnelle.....	62
2.1.4 Bifurcations	63
2.1.4.1 Bifurcations locales d'un point fixe.....	63
i) Généralités	63
ii) Bifurcations statiques.....	64
iii) Bifurcations de Hopf	64
iv) Récapitulatif.....	65
2.1.4.2 Bifurcations locales d'un cycle limite.....	66
i) Généralités	66
ii) Bifurcation nœud-col	66
iii) Bifurcation par dédoublement de période.....	66
iv) Bifurcation de Neimark ou bifurcation de Hopf secondaire.....	66
v) Bifurcations rasantes.....	67
vi) Récapitulatif.....	67
2.1.4.3 Transitions vers le chaos.....	67
i) Cascade de dédoublement de période	68
ii) Intermittences	68
iii) Transitions quasi-périodiques.....	69
2.2 La technique de continuation	70
2.2.1 La méthode de tir.....	70
2.2.1.1 Recherche d'une solution périodique.....	70
2.2.1.2 Procédure de Newton-Raphson	71
2.2.1.3 Le choix du point initial.....	72
i) Choix arbitraire.....	72
ii) Méthode incrémentale	72
iii) Méthode de tir multiple	72
2.2.2 Diverses techniques de continuation	73
2.2.2.1 Le principe de la technique de continuation	74
2.2.2.2 Continuation séquentielle	74
2.2.2.3 Continuation à paramétrisation sélective	75
2.2.2.4 Continuation de type « arclength » et « pseudo-arclength »	77
2.3 Conclusion.....	80

Chapitre 3 : Application au TOC (1 ddl)	81
3.1 La problématique	82
3.1.1 Description du système physique	82
3.1.2 Les limitations du modèle ADAMS	83
3.2 Les paramètres du modèle	84
3.2.1 Hypothèses de modélisation	84
3.2.2 Le pilotage en rotation de l'arbre à cames	84
3.2.3 Le couple résistant de la pompe à vide	85
3.2.4 La modélisation du contact	86
3.2.4.1 Paramétrage des solides	86
3.2.4.2 Calcul quasi-statique de la raideur de contact	86
3.2.4.3 Choix de l'amortissement de contact	88
3.2.5 Schéma général	88
3.3 La résolution semi-analytique	89
3.3.1 Mise en équation	89
3.3.1.1 Formulation générale	89
3.3.1.2 La phase de vol libre	90
3.3.1.3 Le contact : modèle avec durée de choc	90
3.3.2 Résolution sur chaque phase de mouvement	91
3.3.2.1 Sur la phase de vol libre	91
3.3.2.2 Pendant le contact	92
i) Equation sans second membre	92
ii) Equation avec second membre : solution particulière	92
iii) Solution générale	94
3.3.3 Solutions temporelles	97
3.3.3.1 Modèle avec loi de restitution	97
3.3.3.2 Modèle avec raideur de contact	99
3.3.4 Validation du modèle semi-analytique	101
3.3.4.1 Comparaison des 2 modèles	101
i) Cas d'une succession de rebonds	101
ii) Cas du collage	103
iii) Choix du modèle	104
3.3.4.2 Validation du modèle choisi	104
i) Avec ADAMS	104
ii) Avec l'intégration numérique	107
3.3.5 Introduction de la fonction de passage	108
3.3.6 Interface graphique	109
3.4 La technique de continuation utilisée	110
3.4.1 Stabilité des cycles limites obtenus	110
3.4.1.1 Ecriture de la matrice monodrome	110
3.4.1.2 Calcul semi-analytique de la matrice monodrome	111
3.4.1.3 Cas particulier d'un cycle limite sans perte de contact	112
3.4.1.4 Cas particulier d'un cycle limite avec une perte de contact	113
3.4.2 La gestion des algorithmes de prédiction/correction	114
3.5 Travaux exploratoires	115
3.5.1 Cas d'une excitation harmonique	115
3.5.2 Etude des bifurcations	117
3.5.3 Influence de la vitesse moyenne ω_{aac}	123
3.5.4 Cas d'une excitation multi-harmonique	124
3.6 Conclusion	126

Chapitre 4 : Extensions du modèle	127
4.1 Problématique générale	128
4.1.1 Modèle général.....	128
4.1.2 Système linéaire par morceaux	129
4.1.3 Résolution en bases modales.....	130
4.1.3.1 Passage en bases modales.....	130
4.1.3.2 Découplage des équations en base modale : hypothèse de Basile.....	131
4.1.3.3 Résolution semi-analytique temporelle.....	132
4.2 Approche multicorps : masses concentrées	133
4.2.1 Caractérisation de l'arbre à cames.....	133
4.2.2 Caractérisation des excitations	134
4.2.3 Résultats obtenus : comparaisons 1 ddl / 26 ddl	138
4.3 Applications moteurs	142
4.3.1 Application DV4TD	142
4.3.2 Application DV6	145
4.4 Expérimentation	147
4.4.1 Les limitations des mesures existantes sur GMP	147
4.4.1.1 Les mesures moteur	147
4.4.1.2 Les mesures BV.....	147
4.4.2 Description et caractéristiques principales du banc	148
4.4.2.1 Caractéristiques générales	148
4.4.2.2 La génération d'acyclisme.....	149
4.4.2.3 Les contraintes liées au jeu et aux chocs.....	150
4.4.2.4 La génération du couple de freinage.....	151
4.4.3 Description et performances du système de mesure	151
4.4.3.1 Systèmes de mesure des vitesses instantanées de rotation des arbres	151
4.4.3.2 Mesure de l'accélération angulaire.....	152
4.4.3.3 Mesure du couple de freinage.....	152
4.4.3.4 Système d'acquisition des mesures.....	152
4.4.4 Les résultats expérimentaux	153
4.4.4.1 Cas de référence : généralités	153
4.4.4.2 Résonances liées à la mesure de la vitesse amont.....	153
4.4.4.3 Les mesures de couple résistant et d'accélération d'arbre aval.....	156
4.5 Corrélation du modèle avec les essais.....	157
4.6 Conclusion.....	160
Conclusion générale	161
Bibliographie.....	165
Annexe A : Intégration temporelle	173
Annexe B : Démonstration de (3.53).....	178

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.1 : Attelage mobile d'un moteur 4 cylindres en ligne	26
Figure 1.2 : Le cycle d'un moteur thermique à 4 temps	27
Figure 1.3 : Exemple de régime de ralenti ($N_{\text{mot}} = 800$ tr/min).....	28
Figure 1.4 : Entraînement de distribution par courroie crantée.....	29
Figure 1.5 : Quelques dispositifs de commande de soupape.....	30
Figure 1.6 : Entraînement d'accessoires par courroie striée	31
Figure 1.7 : Entraînement par l'AAC	31
Figure 1.8 : Pénétration d'une poutre rigide impactant sur un demi-espace.....	33
Figure 1.9 : Condition exacte de contact (lois de Signorini).....	34
Figure 1.10 : Modèle de pénalisation	36
Figure 1.11 : Modèle de compliance.....	37
Figure 1.12 : Exemples de modèles de faible taille avec raideur de contact constante	40
Figure 1.13 : Exemples de modèles de faible taille avec loi de restitution de Newton	43
Figure 2.1 : Section de Poincaré	49
Figure 2.2 : Points fixes attracteurs.....	50
Figure 2.3 : Cycles limites	51
Figure 2.4 : Récapitulatif des attracteurs.....	52
Figure 2.5 : Les différents types d'états d'équilibre.....	56
Figure 2.6 : Variétés et sous-espaces propres.....	58
Figure 2.7 : Espace de contrôle d'état.....	63
Figure 2.8 : Cas de bifurcations de points fixes (-) branches stables, (--) branches instables	65
Figure 2.9 : Cas de bifurcations de cycles limites	67
Figure 2.10 : Evolution de la solution de $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$ en fonction de a.....	68
Figure 2.11 : Tir multiple	72
Figure 2.12 : Principe de la continuation séquentielle	75
Figure 2.13 : Continuation à paramétrisation sélective	77
Figure 2.14 : Continuation de type "arclength".....	79
Figure 2.15 : Continuation de type "pseudo-arclength"	79
Figure 3.1 : Système d'entraînement de pompe à vide.....	82
Figure 3.2 : Conséquences possibles des chocs dans l'entraînement de pompe à vide.....	83
Figure 3.3 : Contact d'entraînement et contact opposé.....	84
Figure 3.4 : Evolution de l'acyclisme en H4 AAC en fonction du régime moteur N_{mot}	85
Figure 3.5 : Paramétrage angulaire des pièces	86
Figure 3.6 : Représentation du calcul quasi-statique de la raideur de contact sous Abaqus.....	87
Figure 3.7 : Raideur de contact de TOC sur DW8 issue des calculs Abaqus.....	87
Figure 3.8 : Schéma général du modèle étudié	88
Figure 3.9 : Phase de vol libre à 3 instant initiaux t_i différents (on part du contact d'entraînement $\theta_i = -\varepsilon/2$)	91
Figure 3.10 : Evolution temporelle de θ et $\dot{\theta}$ (loi de restitution avec $r = 0,98$)	99
Figure 3.11 : Evolution temporelle de θ et $\dot{\theta}$ (raideur de contact $K = 7600$ Nm/rad)	100
Figure 3.12 : Evolution temporelle θ pour les 2 modèles ($r = 0,95056$, $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 500$ Nm.s/rad) 101	
Figure 3.13 : Evolution temporelle $\dot{\theta}$ pour les 2 modèles ($r = 0,95056$, $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 500$ Nm.s/rad) 102	
Figure 3.14 : Evolution temporelle θ pour les 2 modèles ($r = 0,7377$, $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 3000$ Nm.s/rad) 103	
Figure 3.15 : Evolution temporelle $\dot{\theta}$ pour les 2 modèles ($r = 0,7377$, $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 3000$ Nm.s/rad) 103	

Figure 3.16 : Comparaison du modèle semi-analytique et du modèle ADAMS pour un pas de stockage de 10^{-7} s (a), de $5 \cdot 10^{-8}$ s (b) et de 10^{-8} s (c)	105
Figure 3.17 : Comparaison du modèle semi-analytique et du modèle ADAMS avec deux pas de stockage (10^{-7} s et 10^{-9} s).....	106
Figure 3.18 : Comparaison du modèle semi-analytique et de l'intégration numérique à pas constant $h = 10^{-8}$ s (a) et avec 2 pas $h_1 = 10^{-8}$ s et $h_2 = 10^{-6}$ s (b)	107
Figure 3.19 : Interface graphique – Simulation temporelle, tracés de courbes, plans de phase et coupures de Poincaré	109
Figure 3.20 : Evolution des cycles limites 1T-périodiques en fonction de l'acyclisme adimensionné. Détail de quelques solutions temporelles 1T-périodiques stables.	116
Figure 3.21 : Tracé des points de bifurcation de solutions 1T-périodiques. Détail de quelques points de retournements par la représentation temporelle pré- et post-bifurcation.....	118
Figure 3.22 : Evolution du multiplicateur de Floquet de plus grand module en fonction de l'abscisse curviligne utilisée par la méthode de continuation. Mise en évidence des retournements brusques sur les points de bifurcation (a), (b), (c), (d) et (e) présentés en Figure 3.21.....	119
Figure 3.23 : Evolution des conditions initiales des solutions 1T-périodiques obtenues par continuation (– stables, – instables, – projections 2D) en fonction de l'acyclisme. Mise en évidence des variations de courbure du diagramme de bifurcation présenté en Figure 3.21.....	119
Figure 3.24 : Ajout d'une portion de branche 2T-périodique (– stables, – instables) au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21.....	120
Figure 3.25 : Tracé des branches de solutions 2T-périodiques stables, ajouté au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21.....	121
Figure 3.26 : Caractérisation complète des attracteurs de la zone correspondant au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21. Zoom sur une zone plus restreinte.....	122
Figure 3.27 : Evolution des vitesses maximales d'impact (côté entraînement et opposé) en fonction de la vitesse moyenne ω_{aac}	123
Figure 3.28 : Evolution des vitesses maximales d'impact (côté entraînement et opposé) en fonction de la vitesse moyenne ω_{aac} . Comparaison entre deux valeurs d'inertie $I_{pav} = 0,24 \text{ g.m}^2$ (a) et $I_{pav} = 0,42 \text{ g.m}^2$ (b) et calcul du plus grand exposant de Lyapunov pour le deuxième cas (c).....	125
Figure 4.1 : Modèle général	128
Figure 4.2 : Schéma du modèle multi-ddl en torsion	136
Figure 4.3 : Solution périodique du modèle à 1 degré de liberté.....	139
Figure 4.4 : Solution périodique du modèle à 26 degré de liberté.....	139
Figure 4.5 : Comparaison du modèle à 1 degré de liberté(en bleu) et du modèle à 26 degré de liberté (en noir) en terme de comportement vis-à-vis de l'évolution de la vitesse d'arbre à cames	140
Figure 4.6 : Exemple d'impact côté entraînement : vibrations induites	141
Figure 4.7 : Modification de l'embout d'arbre à cames DV4TD	142
Figure 4.8 : Fonctionnement normal et dégradé de l'entraînement de pompe à vide DV4TD.....	143
Figure 4.9 : Façade de distribution DV6 - problématique de l'entraînement de pompe à vide.....	145
Figure 4.10 : Comparaison de l'acyclisme transmis à 4000 tr/min à l'AAC échappement DV6.....	146
Figure 4.11 : Résultats comparatif des couples engendrés par les chocs sur l'entraînement de PAV DV6 pour un calage de la pompe à injection optimal (en bleu) et pour un calage au pire (en rouge)	146
Figure 4.12 : Photographie d'ensemble du banc d'essai à jeu simple.....	148
Figure 4.13 : Génération d'acyclisme – courbe théorique et photographies du dispositif de à cardan	149
Figure 4.14 : Jeu angulaire : vue assemblée et vue de la zone de contact (calotte sphérique)	150
Figure 4.15 : Frein à poudre du banc d'essai	151
Figure 4.16 : Mesure de vitesse instantanée.....	151
Figure 4.17 : Emplacement de l'accéléromètre.....	152
Figure 4.18 : Mesure de la vitesse de la ligne d'arbre amont sur 10 tours	153
Figure 4.19 : Décomposition harmonique de la vitesse de la ligne d'arbre amont mesurée	154
Figure 4.20 : Erreur de transmission et spectre du bruit de sirène sur un rapport à 23 dents	154
Figure 4.21 : Décomposition harmonique de la vitesse angulaire relative entre l'inertie entraînée (arbre aval) et la ligne d'arbre amont. Résultats tirés des mesures brutes des deux codeurs angulaires.	155
Figure 4.22 : Décomposition harmonique de la mesure brute du couple résistant de l'arbre aval.....	156
Figure 4.23 : Décomposition harmonique de la mesure de l'accéléromètre	156
Figure 4.24 : Comparaison de la vitesse relative entre un point de mesure avec un angle de cardan de 8° environs (en bleu) et des calculs numériques (en vert) avec comme excitations les harmoniques H2 et H20 uniquement (a), les harmoniques de H1 à H40 (b) et les harmoniques de H1 à H70 (c).....	158

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Equivalences r / ξ	45
Tableau 2 : Signature de Lyapunov.....	62
Tableau 3 : Temps de calcul pour le modèle semi-analytique et pour le modèle ADAMS... ..	106
Tableau 4 : Caractérisation par inerties concentrées de l'arbre à cames DV4TD	133
Tableau 5 : Caractérisation par inerties concentrées de l'arbre à cames échappement DV6 .	134
Tableau 6 : Acyclisme nominal.....	138
Tableau 7 : Couple pompe nominal	138
Tableau 8 : Résultats de calcul de couple de choc pour l'application DV4TD	144
Tableau 9 : Paramètres numériques utilisés pour la corrélation essais / calculs	157
Tableau 10 : Comparaison des principales caractéristiques (vitesse relative maximale, minimale, composantes en H2 et en H20) correspondant aux résultats numériques (a), (b) et (c) et au résultat expérimental de la Figure 4.24.	159

REMERCIEMENTS

Je souhaite faire part de ma gratitude envers Messieurs F. Thouverez, Z. Dimitrijevic et J. Dubost pour m'avoir guidé et soutenu tout au long de cette thèse. Je tiens également à faire part de ma reconnaissance envers les membres du jury, pour avoir accepté de donner de leur temps pour rapporter ce mémoire et pour assister à la soutenance.

Je remercie tout particulièrement Messieurs L. Jézequel et C. Savalle pour avoir été à l'origine de cette étude, avoir mis en place le cadre du sujet et donner l'impulsion de départ.

Je tiens également à remercier tous les collaborateurs PSA Peugeot Citroën du Département d'Architecture Mécanique des Motorisations et Transmissions pour leur disponibilité ainsi que tous ceux que j'ai été amené à solliciter dans le cadre de mes recherches.

Je souhaite encourager mes camarades doctorants de l'Ecole Centrale de Lyon et les remercier pour leur bonne humeur.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et mes amis pour m'avoir soutenu tout au long de mes travaux.

RESUME

Dans de nombreux systèmes mécaniques du groupe motopulseur automobile, les jeux sont à l'origine de pertes de contact. Les impacts générés entre les composants mènent dans le meilleur des cas à de la nuisance sonore et dans le pire des cas à de la rupture en fatigue.

Dans ce mémoire, nous avons étudié la dynamique non linéaire de l'entraînement de pompe à vide sur moteur diesel. Le système est excité par la rotation multi-harmonique de l'arbre à cames. Il est modélisé dans un premier temps par un degré de liberté, l'angle relatif entre la pompe à vide et la rotation imposée de l'arbre à cames. Ces deux composants présentent un jeu angulaire. Le contact bilatéral est représenté par une raideur de contact en torsion et un amortissement visqueux prenant en compte la dissipation d'énergie due à l'impact.

L'équation différentielle linéaire par morceaux obtenue est résolue de manière semi-analytique : la solution analytique est obtenue entre les instants de début et fin de contact qui sont déterminés numériquement. Les temps de simulations sont alors comparés à ceux obtenus par schémas d'intégration numérique explicite afin de démontrer l'efficacité et la rapidité de la méthode semi-analytique.

Les paramètres de l'équation du mouvement sont l'amplitude de l'acyclisme d'arbre à cames, la vitesse de rotation et le couple résistant de la pompe à vide. L'analyse de stabilité des orbites périodiques est alors déterminée à partir des coefficients de Floquets obtenus de manière semi-analytique. Une technique de continuation, basée sur une méthode de tir semi-analytique, est utilisée pour décrire ces orbites périodiques et leurs bifurcations (doublement de période, bifurcation nœud-col). Le comportement chaotique, obtenu sur une large plage de paramètres, est mis en évidence par le calcul des exposants de Lyapunov et par les coupures de Poincaré.

Ensuite, cette modélisation est étendue à une représentation avec plusieurs degrés de liberté. La résolution reste toujours semi-analytique avec des équations différentielles découplées (hypothèse de Basile) résolues analytiquement dans le domaine fréquentiel, à partir des instants de début et de fin de contact et de la base modale calculés numériquement.

Finalement, un banc expérimental a été réalisé, représentant de manière très simple l'entraînement de pompe à vide. Les résultats expérimentaux et numériques ont été confrontés afin de valider la modélisation et la procédure d'analyse. Malheureusement, les premiers résultats montrent des résonances qui perturbent les interprétations finales et qui indiquent que davantage de travaux expérimentaux doivent être menés pour poursuivre dans la validation et l'amélioration du modèle d'origine.

ABSTRACT

In many automobile power train systems, clearances cause contact losses. Existence of impacts between components leads for the best to noise pollution and for the worst to fatigue rupture.

In this document, we have studied the diesel engine vacuum pump drive non linear dynamics. The system is excited by a multi harmonic camshaft rotation displacement. It is first modelled by a 1 degree of freedom, the relative angle between the vacuum pump and the imposed camshaft rotation. An angular clearance is present between these two components. The involved double-sided contact is represented by a classical torsion stiffness and a viscous torsion damping taking into account impact energy dissipation.

The piecewise linear motion equation obtained is solved by a semi analytical method : the analytical solution is computed between crossing times (the beginning and the end of the contact) solved numerically. Time simulations are compared to the results of a numerical integration scheme, demonstrating the efficiency and the rapidity of the semi analytical method.

The motion equation parameters are the camshaft harmonic excitation amplitudes, the rotation velocity and the resistant pump torque. The periodic orbits stability analysis is performed by the semi analytical computed Floquet multipliers. A continuation technique, based on a semi analytical shooting method, is used to describe these periodic orbits and their bifurcations (period doubling, saddle node bifurcation). The chaotic behaviour, obtained for a wide range of parameters value, is revealed by the computed Lyapunov exponents and Poincaré applications.

Then, this model is extended to a representation with more than one degree of freedom. The resolution keeps still semi-analytical with uncoupled differential equations (Basile hypothesis) solved analytically in frequency domain, considering crossing times and modal basis numerically obtained.

Finally, an experiment idealizing the vacuum pump system has been performed. Experimental and computed results will be confronted to validate the model and the analysis procedure. Unfortunately, first results show undesired modal resonances which disrupt final interpretations and indicate that more experimental work needs to be done in order to proceed with the model validation and improvement.

NOMENCLATURE

Abréviations

ddl	degré de liberté
AAC	arbre à cames
AVT	type de poulie à amortissement des vibrations de torsion
BV	boîte de vitesses
GMP	groupe moto-propulseur
PAV	pompe à vide
VBQ	vilebrequin
TOC	joint de Oldham

Notations

N_{mot}	régime moteur moyen (tr/min)
H_n	ordre ou harmonique moteur (VBQ) d'amplitude A_{H_n} et de phase φ_{H_n}
h_n	ordre ou harmonique AAC d'amplitude A_{h_n} et de phase φ_{h_n}
t	temps (s)
Ω_{VBQ}	vitesse instantanée moteur (ou vitesse instantanée VBQ)
A_{H_n}	amplitude de l'harmonique moteur H_n
φ_{H_n}	phase de l'harmonique moteur H_n
Ω_{AAC}	vitesse instantanée arbre à cames
A_{h_n}	amplitude de l'harmonique moteur h_n
φ_{h_n}	phase de l'harmonique moteur h_n

d_n	distance d'interpénétration
χ	fonction d'appariement entre 2 surfaces
Γ_i	surface n° I
p_i	point de la surface Γ_i
S_i	solide n° i
\underline{R}	densité d'effort de contact
\underline{R}_t	composante tangentielle de \underline{R}
$R_n \underline{n}$	composante normale de \underline{R}
μ_f	coefficient de frottement de Coulomb
v_t	vitesse tangentielle relative entre 2 solides en contact
r	taux de restitution
K_p	raideur de pénalisation
K	raideur de contact
K_H	constante de Hertz
α_c	paramètre de compliançe
C	amortissement de contact
ξ	taux d'amortissement de contact
δx	interpénétration
F_{Heav}	fonction de Heavyside

$\ \cdot\ $	norme euclidienne
X, Y, Z	variables réelles
$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$	vecteurs de composantes X_i, Y_i, Z_i
$\dot{X}, \dot{\underline{X}}$	dérivée temporelle de la variable X et du vecteur \underline{X}
Φ_t	flot
\underline{F}	fonction vectorielle
\underline{H}	fonction vectorielle $\underline{H} = \Phi_t - \underline{Id}$ (où \underline{Id} est la fonction identité)
S_E	ensemble
U_E	voisinage de S_E
T	période
n	entier
Σ	section de Poincaré
\underline{X}_e	état d'équilibre
δ, ε	réels
\underline{J}_F	matrice jacobienne de F ($= \underline{D}_x F$)
λ_i	valeurs propres de \underline{J}_F
\underline{P}	matrice des vecteurs propres \underline{p}_i de \underline{J}_F
$\underline{\Delta}$	matrice $\text{diag}(\lambda_i)$ ou sous forme de Jordan
Re	partie réelle
Im	partie imaginaire
$\underline{\Phi}$	matrice monodrôme
λ_{Φ_i}	coefficients de Floquet
E^s, E^u, E^c	sous-espaces propres stable, instable et central
W^s, W^u, W^c	variétés stable, instable et centrale
μ	paramètre de continuation
θ_{TP}	angle de pompe à vide
θ_{aac}	angle d'arbre à cames
θ	angle relatif entre la pompe à vide et l'arbre à cames
ε	jeu angulaire entre la pompe à vide et l'arbre à cames
K	raideur de contact
C	amortissement de contact
ξ	taux d'amortissement de contact
I_{pav}	inertie de pompe à vide
Γ_{res}	couple résistant de pompe à vide
ω_{aac}	vitesse de rotation moyenne arbre à cames
Δ_0	discriminant de l'équation caractéristique issue de la phase de contact
β	solution particulière de l'équation différentielle de la phase de contact
\underline{M}	matrice de masse
\underline{C}	matrice d'amortissement
\underline{K}	matrice de raideur
\underline{P}	base de modes propres

INTRODUCTION GENERALE

La présence de jeux fonctionnels dans les systèmes mécaniques du groupe moto-propulseur (GMP) peut induire des pertes de contact qui sont parfois à l'origine de chocs répétés. Ces impacts sont alors source de nuisances sonores, de vibrations et de sollicitations dynamiques pouvant mener à la rupture des composants. Suite à l'augmentation du couple moteur vis-à-vis de leur cylindrée et donc à celle des niveaux d'excitation vibratoire, la mise au point du GMP est devenu plus critique. On cite parmi les systèmes dynamiques à jeux présents dans le GMP, les joints de Oldham (accouplement entre l'arbre à cames et la pompe à vide ou la pompe haute pression, appelé également TOC), les déphaseurs d'arbre à cames, les actionneurs électromécaniques de soupapes, les vannes EGR, les boîtiers papillon, le mécanisme interne des doubles volant amortisseur (DVA), la grenaille de boîte de vitesse (chocs entre pignons menant et pignons fous d'une boîte de vitesse (BV)), les dispositifs de synchronisation, ...

Les impacts sont des phénomènes non linéaires qui peuvent présenter de réelles difficultés en terme de modélisation. Avec les solveurs "classiques", l'intégration temporelle nécessite un pas de calcul très faible. Le niveau des efforts de contact ne se prédit alors de manière suffisamment précise que pour un temps de calcul CPU trop important. L'objectif de la thèse est de développer des modèles physiques et numériques permettant de prévoir plus précisément le comportement de systèmes dynamiques avec perte de contact, et cela avec des coûts de calcul plus modestes. La tâche requiert un développement de méthodologies d'analyse et d'études paramétriques de ces systèmes.

Dans le cadre de cette thèse, l'entraînement de pompe à vide par joints de Oldham (appelés TOC chez PSA), a été étudié. Placé en bout d'arbre à cames, la pompe à vide est entraînée en rotation via ce joint de Oldham dont la rupture à la fatigue, suite aux vibro-impacts répétés, conduit irrémédiablement à la perte d'assistance de freinage. Il s'agit d'un composant critique et sécuritaire, essentiel dans le dispositif de freinage véhicule.

Cet accouplement entre l'arbre à cames et la pompe à vide a été modélisé dans un premier temps avec un degré de liberté. La phénoménologie des chocs a été simulée avec une loi de restitution (de type loi de Newton), avec une raideur de contact linéaire par morceaux et finalement avec une raideur de Hertz. Dans chaque cas, les équations du mouvement ont été écrites en fonctions des paramètres du système. On distingue l'équation différentielle valable dans la phase de vol libre de celle valable lorsque les pièces sont en contact.

Le modèle retenu a été celui comportant une raideur de contact constante associée à un amortissement de contact pour prendre en compte les pertes d'énergie dues aux impacts. Les équations différentielles de chaque phase (contact / vol libre) écrites lors de la modélisation du système ont été résolues analytiquement. Les instants d'impact (et de décollement) sont quant à eux obtenus avec la précision désirée par la résolution numérique d'équations algébriques non linéaires (méthode de dichotomie). La comparaison des résultats temporels du modèle semi-analytique avec ceux de l'intégration numérique démontre la rapidité d'un tel modèle. Cette efficacité permet d'obtenir aisément les cycles limites par une méthode de tir (méthode balistique) basée sur le modèle semi-analytique. Le tir se fait de manière semi-analytique également puisqu'on sait écrire la matrice jacobienne du système en fonction des paramètres du système et des instants d'impact (et de décollement) obtenus quant à eux numériquement. La stabilité des orbites obtenues est déterminée à partir des valeurs propres de la matrice monodrome (coefficients de Floquet). Pour une prise en main plus agréable et conviviale, une interface graphique a également été développée.

Afin de réaliser une étude paramétrique et de suivre les bifurcations des solutions du système (perte de stabilité d'une orbite), une technique de continuation de type « arclength » a été implémentée, permettant de décrire l'évolution d'une valeur caractéristique en fonction d'un paramètre. C'est cette tâche qui a été la plus lourde au cours de l'étude. En raison de la richesse harmonique de l'excitation de l'arbre à cames, les courbes paramétriques obtenues ont présentées une réelle diversité de comportements avec des dédoublements de période, des bifurcations de type « retournement ». Il a été mis en évidence que ces bifurcations étaient liées à la modification du nombre d'impacts dans la solution périodique. Des zones chaotiques ont également été obtenues. Dans ces zones, des coupures de Poincaré ont été réalisées et le calcul des exposants de Lyapunov a validé la présence de zones chaotiques.

Puis nous avons souhaité étendre la représentativité du modèle d'entraînement de pompe à vide en bout d'arbre à cames. Pour cela, nous avons décrit l'arbre à cames par une succession d'inerties en série afin de prendre en compte ses modes de torsion, augmentant ainsi le nombre de degrés de liberté du modèle. Les vibrations de torsion de l'arbre à cames engendrées à chaque choc avec la pompe à vide modifient légèrement le comportement du système en comparaison avec une modélisation d'arbre à cames rigides et indéformable. Cette évolution permet de constater qu'il est nécessaire de moins d'acyclisme que celui prévu par le modèle 1 ddl pour déclencher des impacts entretenus au niveau du système à jeu. Cette conclusion est très importante car elle démontre que considérer l'arbre à cames comme indéformable n'est pas forcément suffisamment robuste pour anticiper les zones d'impact et leur niveau. Afin de confirmer cela et de corréler les résultats numériques, nous avons souhaité mettre en place un banc expérimental. Nous avons rencontré un certain nombre de difficultés dans le choix d'un dispositif adapté ainsi que dans le contrôle de l'acyclisme souhaité. Le banc qui a été monté s'est voulu être le plus simple possible et le générateur d'acyclisme retenu a été le dispositif à cardan. Malgré un phénomène de résonances hautes fréquences, non prévues au départ, les mesures ont pu être corrélées de manière tout à fait satisfaisantes grâce à la flexibilité du modèle semi-analytique.

L'étude réalisée dans le cadre de la thèse sera donc présentée ci-après au travers de quatre chapitres. Le premier chapitre présente le contexte de la thèse, c'est-à-dire d'une part, le vaste choix de systèmes dynamiques avec des interfaces de contact présents dans le GMP et d'autre part, le vaste choix de types de modélisations présents dans la littérature pour traiter cette sorte de sujets. Le second chapitre expose quant à lui les outils et les méthodologies nécessaires au traitement des comportements de systèmes non linéaires. Outre les généralités de base, il s'agit de définir les comportements asymptotiques et leur stabilité. Afin d'étudier l'influence des paramètres vis-à-vis de la stabilité des solutions obtenues, il est important de présenter la technique de continuation basée sur l'intégration temporelle, ce à quoi s'emploie également ce chapitre. Dans le troisième chapitre, c'est la résolution semi-analytique d'un cas concret qui sera présentée, le choix de système à modéliser s'étant porté sur l'entraînement de pompe à vide. Après une présentation du système et de sa mise en équation sous une forme à un degré de liberté avec une excitation multi-harmonique, celui-ci est résolu de manière semi-analytique. Son étude paramétrique est faite par une technique de continuation

spécifique et les zones chaotiques sont mises en évidence. Enfin, le quatrième chapitre, étend le modèle à un cas multi-ddl intégrant les vibrations de torsion de l'arbre à cames. Des résultats sont présentés et comparés au modèle à un degré de liberté. Ce dernier est alors confronté à des résultats expérimentaux obtenus à partir d'un banc d'essai de principe reproduisant des impacts en rotation. Malgré une résonance en harmonique d'ordre 20 qui vient fortement perturber le système, les calculs numériques permettent de reproduire, dans une certaine mesure, ces phénomènes d'impact avec les bons ordres de grandeur.

CHAPITRE 1

PROBLEMATIQUE

Ce premier chapitre est divisé en deux sous parties. Dans un premier temps, nous allons présenter différents problèmes de contact existants dans le groupe moto-propulseur ou GMP. En fait, chaque interface entre constituants peut-être sujette à des problèmes de contact. Les trois grands ensembles du GMP, à savoir le moteur, la boîte de vitesse et l’embrayage, sont impactés par ce type de phénomènes.

Cette présentation sera également l’opportunité de comprendre les bases du fonctionnement moteur. On notera qu’outre l’attention particulière accordée aux problématiques de contact tout au long de la description des constituant GMP, l’un des facteurs dimensionnant en conception présenté ci-après est l’acyclisme moteur. L’acyclisme moteur, c’est-à-dire les fluctuations du régime, est une particularité des moteurs thermiques. D’un point de vue dynamique et vibro-acoustique, il s’agit d’une véritable source d’énergie extrêmement influente sur la plupart des composants GMP. Non seulement les pièces mobiles (éléments tournants et masses alternatives) mais également les structures moteurs (carters, culasse, bloc cylindre, ...) sont excitées par l’acyclisme moteur qui sera une donnée très importante dans notre étude.

Après avoir abordé la richesse et la diversité des sujets sur des systèmes dynamiques avec des problématiques de contact, nous verrons dans un deuxième temps quelles sont les méthodes classiquement utilisées dans la modélisation numérique des problèmes de contact. Ce sera l’occasion de présenter les études bibliographiques qui ont inspiré ces travaux. Nous nous sommes focalisés alors essentiellement sur les choix qui ont été envisagés au départ durant la thèse et sur la modélisation des contact-impacts sans prendre en considération le frottement pour lequel il existe des formulations particulières (Laursen [LAU92]).

1.1 PROBLEMES DE CONTACT DANS LE GMP

Le comportement dynamique de nombreux systèmes mécaniques dépend notablement d'interactions dites de contact. Les problèmes rencontrés dans la pratique, au niveau du Groupe Moto-Propulseur (GMP), peuvent être très variés de même que les mécanismes mis en jeu dans ces interactions de contact. Il est assez naturel de distinguer les contacts lubrifiés des contacts secs et de séparer également les problèmes avec contact permanent (frottement) des contacts intermittents avec ou sans glissement (alternance de phases de vol libre et de phases de contact).

Le groupe moto-propulseur est constitué du moteur, de la boîte de vitesse (BV) et des accessoires qui permettent le fonctionnement de l'ensemble. On ne considèrera ici en particulier que les problèmes de contact rencontrés au niveau du moteur. Celui-ci a pour but de générer le mouvement de rotation qui sera fourni aux roues de l'automobile. Pour assurer cette fonction un certain nombre de mécanismes de transmission et d'accouplement sont présents. Les différentes problématiques de contact qui en découlent seront alors observées pour l'attelage mobile, la distribution, l'entraînement de distribution, l'entraînement des accessoires, ...

1.1.1 L'ATTELAGE MOBILE

Sous l'action de la combustion du mélange air-carburant, les pistons sont propulsés à tour de rôle. Cette poussée est transmise au vilebrequin (VBQ) par l'intermédiaire de la bielle supportée par des coussinets en bronze. Selon le principe de la manivelle, le mouvement rectiligne alternatif du piston qui coulisse dans le cylindre va être transformé en mouvement circulaire du vilebrequin (Swoboda [SWO84]).

Les principales études de contact sur l'attelage mobile (Figure 1.1) concernent les calculs d'étanchéité, de consommation d'huile au travers des segments de pistons, les pertes d'énergie par frottement ainsi que la tenue des coussinets de bielle au niveau du vilebrequin.

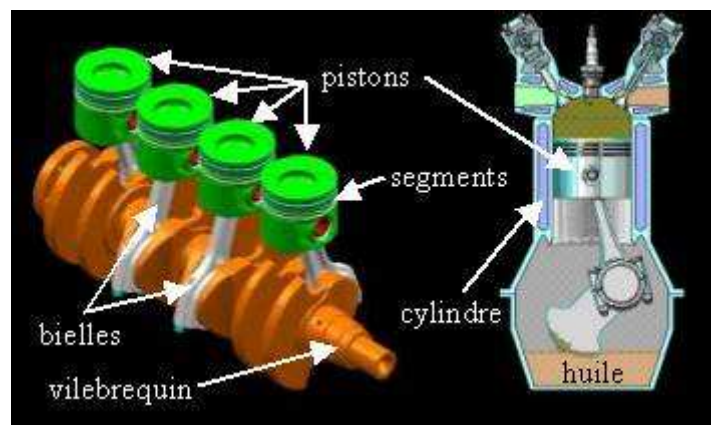


Figure 1.1 : Attelage mobile d'un moteur 4 cylindres en ligne

Le fonctionnement d'un moteur thermique à 4 temps décrit le cycle suivant à l'intérieur de chaque cylindre (Figure 1.2) :

- l'admission : La soupape d'admission est ouverte, celle d'échappement est fermée. Le piston descend, en aspirant ainsi dans la chambre de combustion le mélange air-essence (ou l'air frais dans le cas d'un moteur diesel) qui se trouve dans la tubulure d'admission.

- la compression : La soupape d'admission se ferme. Le mélange air-carburant (l'air seul dans le cas d'un moteur diesel) est comprimé dans la chambre de combustion. Il se produit un échauffement qui amène le mélange à une température favorisant l'explosion.

- l'explosion (ou la détente) : Pour un moteur essence, une étincelle vient amorcer la combustion du mélange. Dans le cas du diesel, c'est un injecteur qui projette du gasoil dans la chambre de combustion engendrant l'auto inflammation du mélange. L'explosion entraîne alors la détente du mélange avec une descente violente du piston.

- l'échappement : Arrivée en fin de détente et en bas du cylindre (« point mort bas »), le piston remonte. La soupape d'échappement s'ouvre pour permettre aux gaz brûlés d'être évacués par le collecteur d'échappement. Arrivé au sommet (« point mort haut »), le piston entame un nouveau cycle ...

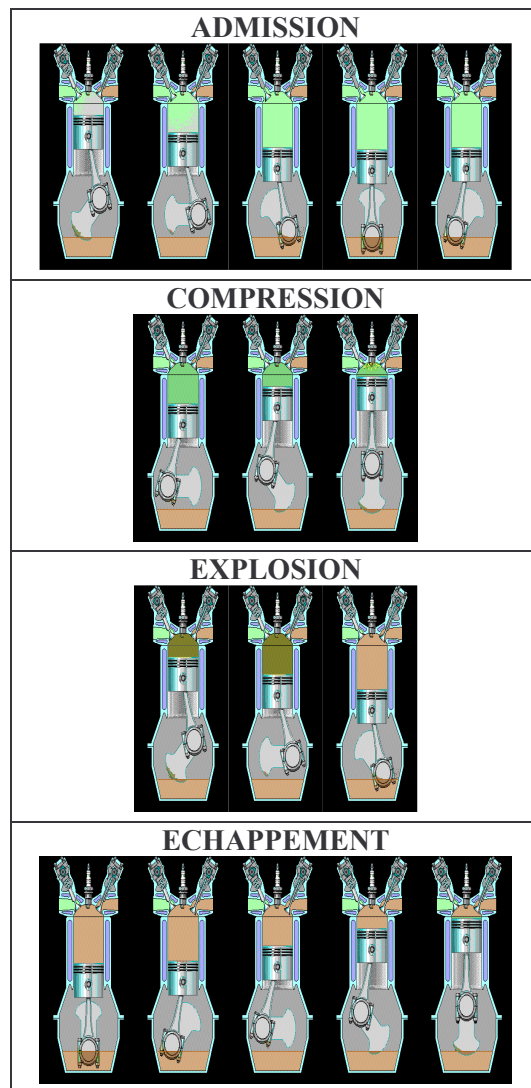


Figure 1.2 : Le cycle d'un moteur thermique à 4 temps

On remarque qu'un cycle complet pour un cylindre correspond à 2 tours de vilebrequin. Pour un moteur à 4 cylindres en ligne, les pistons sont calés en position angulaire à 180° par ordre d'allumage (ordre 1-3-4-2 d'allumage des cylindres). Par conséquent, le vilebrequin va subir 2 accélérations par tour (c'est-à-dire 4 explosions/combustions pour un cycle de 2 tours vilebrequins). Il en résulte un fonctionnement du moteur avec des irrégularités cycliques appelées acyclisme et à l'origine de nombreux problèmes de vibrations et d'acoustique dans le GMP (Ligier [LIG02a], [LIG02b]).

La vitesse moyenne du vilebrequin N_{mot} exprimée en tours par minute est appelée abusivement régime moteur. Le régime est en réalité constitué par la valeur moyenne N_{mot} autour de laquelle viennent s'ajouter des fluctuations dominées par les 2 explosions moteur par tour vilebrequin (Figure 1.3). L'acyclisme ainsi généré correspond donc à des oscillations de vitesse à une fréquence multiple du double de la fréquence moteur $N_{\text{mot}}/60$.

On définit ainsi l'acyclisme moteur par ses harmoniques notées H_n correspondant aux oscillations de vitesse moteur avec une fréquence égale à $2 \cdot n \cdot N_{\text{mot}}/60$. On appelle H_n également ordre moteur ou encore harmonique moteur à l'ordre n avec $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots$. Le niveau d'acyclisme prépondérant est celui de l'harmonique H_2 , mais les autres harmoniques d'ordre plus élevé ne sont pas négligeables, d'autant plus lorsque l'on augmente la vitesse moyenne N_{mot} du moteur.

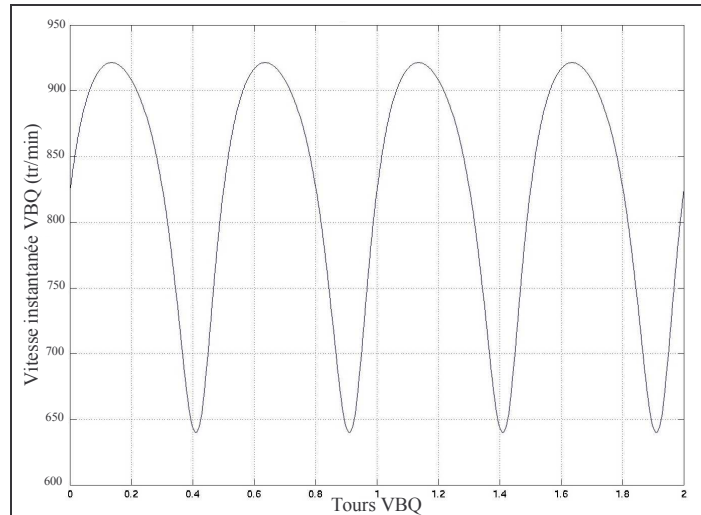


Figure 1.3 : Exemple de régime de ralenti ($N_{\text{mot}} = 800 \text{ tr/min}$)

La vitesse instantanée en rotation (tr/min) du vilebrequin $\Omega_{\text{VBQ}}(t)$ à l'instant t peut donc s'écrire en première approche (arbre considéré rigide) sous la forme suivante :

$$\Omega_{\text{VBQ}}(t) = N_{\text{mot}} + \sum_{n \geq 1} A_{H_n} \sin \left(2\pi \cdot 2n \cdot \frac{N_{\text{mot}}}{60} \cdot t + \varphi_{H_n} \right) \quad (1.1)$$

où A_{H_n} et φ_{H_n} désignent respectivement l'amplitude (tr/min) et la phase (rad) de l'harmonique moteur H_n .

Il s'agit d'une manière courante de caractériser l'acyclisme moteur lorsqu'on peut considérer le VBQ comme un arbre rigide. Les valeurs A_{H_n} et φ_{H_n} de la relation (1.1) dépendent de nombreux paramètres tels que la vitesse moyenne N_{mot} , le couple résistant vu par le vilebrequin (charge moteur), les pressions cylindres, la température, la viscosité de l'huile ... Néanmoins, les harmoniques moteurs peuvent être exprimées en variation angulaire (rad ou $^\circ$), en oscillations de vitesse comme nous venons de le voir (rad/s ou tr/min) ou encore en terme de fluctuations d'accélération angulaire (rad/s²).

L'attelage mobile et plus particulièrement le vilebrequin est par conséquent la pièce-maîtresse du moteur qui va transmettre ses vibrations à l'ensemble du GMP (arbres, poulies, transmissions, accessoires, ...). D'un côté, il est fixé sur le volant moteur (ou volant d'inertie), lourd plateau dont l'inertie atténue l'acyclisme moteur (Figure 1.4). De l'autre côté, il entraîne la distribution et les accessoires (Figure 1.6) comme nous allons le voir dans ce qui suit.

1.1.2 L'ENTRAÎNEMENT DE DISTRIBUTION ET LA DISTRIBUTION

Afin de garantir le fonctionnement synchronisé des soupapes d'admission et des soupapes d'échappement, et par conséquent d'assurer la « respiration moteur » (distribution), une partie du couple du vilebrequin sert à entraîner en rotation du ou des arbres à cames (AAC). Il s'agit d'un entraînement synchronisé qui peut se faire à l'aide d'une chaîne ou bien d'une courroie crantée comme chez PSA. Le système « entraînement de distribution » a également pour fonction d'entraîner certains composants. Il est constitué par :

- la courroie de distribution
- la poulie vilebrequin et les poulies des arbres à entraîner (AAC, pompes à eau, à injection, ...)
- le(s) support(s) des accessoires, les fixations des composants et l'éventuel batteur AAC
- le galet tendeur et le(s) galet(s) enrouleur(s)
- les accessoires : pompe à eau, pompe à injection, ...
- le capotage distribution

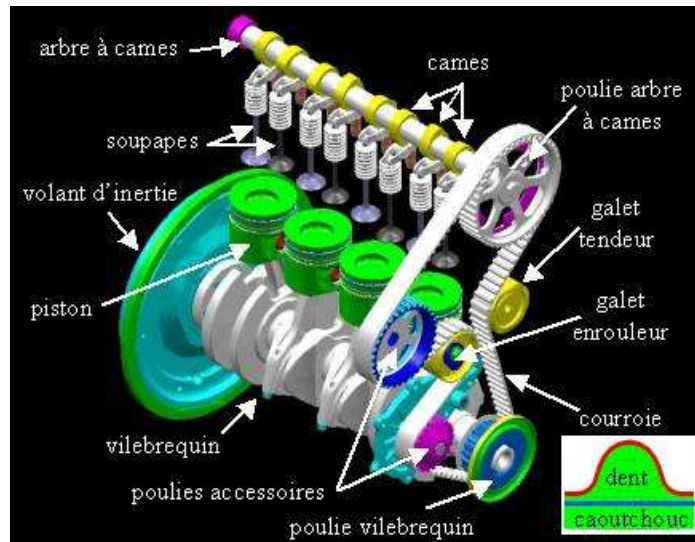


Figure 1.4 : Entraînement de distribution par courroie crantée

Les transmissions par courroie dentée ont été inventées par Richard Case en 1946. Le système présente de nombreux points de contact non lubrifiés le long de la courroie et qui aujourd'hui nécessitent d'être modélisés en conception moteur (Monernot [MON98]). On distingue d'une part la transmission synchrone par courroie crantée au niveau de chaque poulie (passage de couple par engrenement dents de courroie / dents de poulie) et d'autre part le contact frottant avec possibilité de glissement au niveau des galets sur le dos de la courroie.

Si on regarde la vitesse moyenne, pour un moteur à quatre temps, le(s) AAC tourne(nt) 2 fois moins vite que le vilebrequin (Figure 1.2). En effet, les soupapes d'admission et d'échappement ne s'ouvrent qu'une fois par cycle (qui représente 2 tours VBQ). La synchronisation entre VBQ et AAC est capitale pour le bon fonctionnement de la distribution voire même pour l'intégrité du moteur.

L'acyclisme de l'AAC est par conséquent constitué d'harmoniques h_n qui correspondent à des oscillations de vitesse à une fréquence multiple du quadruple de la fréquence de rotation de l'arbre à cames $(N/60)/2$. L'harmonique h_4 ou ordre 4 de la vitesse arbre à cames correspond à l'harmonique H_2 du moteur (celle du VBQ). La vitesse instantanée en rotation (tr/min) de l'arbre à cames $\Omega_{AAC}(t)$ à l'instant t peut donc s'écrire en première approche (arbre considéré rigide) sous la forme suivante :

$$\Omega_{AAC}(t) = \frac{N_{mot}}{2} + \sum_{n \geq 1} A_{h_n} \sin \left(2\pi \cdot 4n \cdot \frac{N_{mot}/60}{2} \cdot t + \varphi_{h_n} \right) \quad (1.2)$$

où A_{h_n} et φ_{h_n} désignent respectivement l'amplitude (tr/min) et la phase (rad) de l'harmonique arbre à cames h_n .

La relation (1.2) est similaire à la relation (1.1). En considérant la courroie comme un parfait réducteur de vitesse de manière instantanée, on a $\Omega_{AAC}(t) = \Omega_{VBQ}(t)/2$ pour $A_{h_n} = A_{H_n}/2$ et $\varphi_{h_n} = \varphi_{H_n}$. Cependant, les valeurs A_{h_n} et φ_{h_n} dépendent du comportement dynamique de la courroie qui peut augmenter, atténuer et déphaser l'acyclisme au niveau de la poulie AAC vis-à-vis de la poulie VBQ. En outre, dans la réalité il faut également tenir compte de la torsion de l'AAC et des vibrations acycliques introduites au niveau des cames tout au long de l'arbre à cames.

Afin de dimensionner les éléments de la distribution servant à l'ouverture/fermeture des soupapes, il est nécessaire de modéliser le contact lubrifié sur chaque élément du dispositif. Il existe de nombreuses technologies de commandes de soupapes (Figure 1.5).

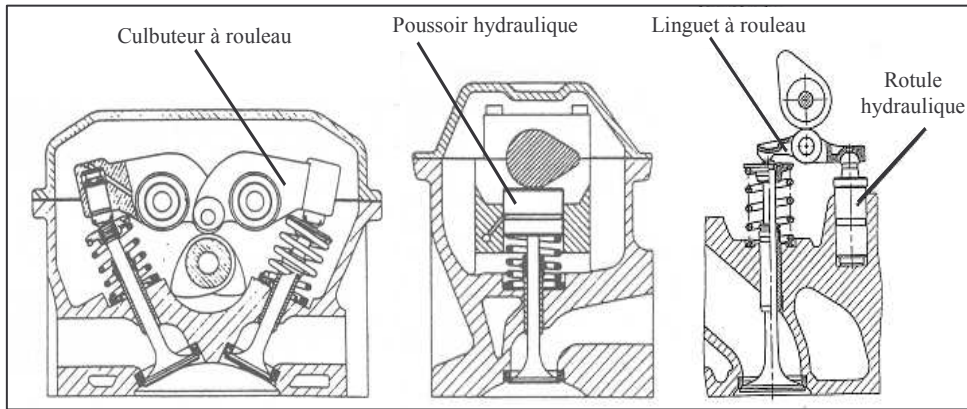


Figure 1.5 : Quelques dispositifs de commande de soupape

Les dispositifs de commande de soupape les plus classiques sont la commande par culbuteur (mécanique ou hydraulique) à rouleau ou à patin, l'attaque directe avec poussoir mécanique ou hydraulique, et la commande par linguet à rouleau ou à patin avec rotule (hydraulique ou non) dans la culasse. Les éléments hydrauliques permettent de rattraper les jeux inévitablement présents dans le dispositif mais apportent un surcoût financier. Notons que les constructeurs automobiles se tournent de plus en plus vers des solutions technologiques ne nécessitant pas d'arbre à cames (commandes de type électromagnétique ou hydromécanique avec actionneurs pilotés par le calculateur). Un tel choix permet notamment une grande flexibilité dans les lois de levée soupape et évite les problèmes d'acyclisme qu'on peut rencontrer sur un arbre à cames.

Pour une distribution classique (avec AAC), les calculs non linéaires évaluent la pression de Hertz au niveau des cames et prennent en compte l'épaisseur des films d'huile au niveau des contacts came/culbuteur, came/poussoir ou bien came/linguet selon le cas. Chez PSA, ces calculs permettent d'estimer en particulier les couples exercés sur l'AAC au niveau des cames par le dispositif de commande de soupape. Quelque soit le dispositif utilisé, lorsque la came déclenche l'ouverture de la soupape, cela se traduit par un couple résistant vis-à-vis de la rotation AAC. Mais une fois le sommet de la came passé, on a localement un couple moteur exercé sur l'arbre à cames. Enfin, une fois la soupape refermée, le couple imposé à l'AAC au niveau de la came considérée est nul aux frottements près.

1.1.3 L'ENTRAÎNEMENT DES ACCESSOIRES

Comme nous l'avons déjà dit, outre l'entraînement de distribution dont nous venons de parler, le rôle du vilebrequin est également de faire fonctionner plusieurs organes auxiliaires. Par conséquent, une partie du couple du vilebrequin permet d'entraîner en rotation différents accessoires à l'aide d'une chaîne ou bien d'une courroie Poly-V (ou dite striée) comme chez PSA ([DEB90]). Dans ce dernier cas, l'entraînement des accessoires » par courroie (Figure 1.6) comprend les éléments suivants :

- la courroie d'accessoires
- la poulie vilebrequin et les poulies accessoires
- le(s) support(s) des accessoires et les fixations des composants
- le galet tendeur et le(s) galet(s) enrouleur(s)
- les accessoires : alternateur, compresseur de climatisation, direction assistée, pompe tandem pour les véhicules Citroën et éventuellement pompe à eau, pompe à vide ...

La courroie striée longitudinalement a vu le jour vers le milieu des années 60 sur les moteurs diesel équipant des engins agricoles et n'a commencé à équiper les moteurs automobiles que vers les années 70. Les courroies d'accessoires sont rainurées dans le sens de la longueur par des dents de section triangulaire ou trapézoïdale afin d'avoir une surface de contact maximale. Contrairement à l'entraînement de la distribution, l'entraînement d'accessoires par courroie striée est non synchrone

(possibilité de glissement relatif entre courroie et accessoire). Aujourd'hui, le comportement dynamique de la courroie d'accessoire est étudié numériquement afin de limiter notamment le niveau de la tension dans la courroie ainsi que les risques de patinage (perte d'adhérence avec un niveau de glissement indésirable au niveau des poulies qui active l'échauffement et le processus d'usure de la courroie). En terme d'acoustique et de vibration on peut également regarder les effets du glissement (stick-slip, sprag-slip) intervenant dans le comportement de la courroie bien que plus connu pour les crissements de freins (Moirot [MOI98], Sinou [SIN02]) et pour l'embrayage (on parle de broutement).

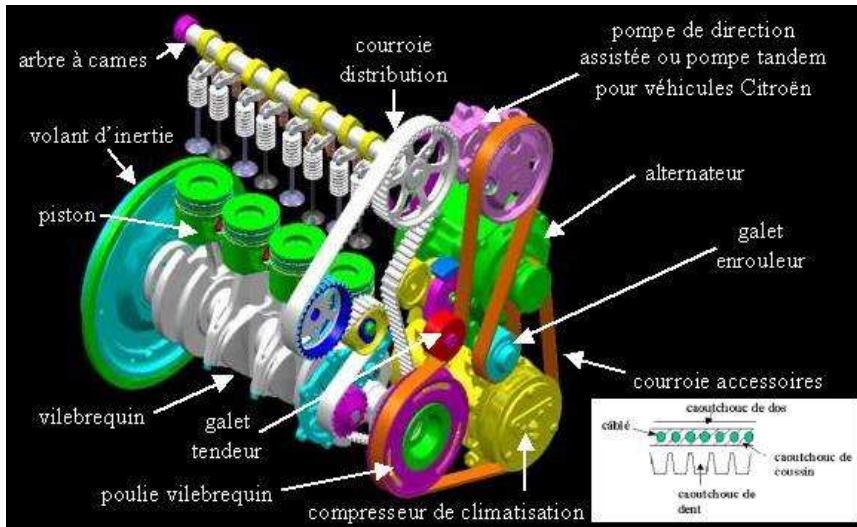


Figure 1.6 : Entraînement d'accessoires par courroie striée

Nous avons vu par conséquent que les accessoires étaient généralement entraînés par les courroies d'accessoires et de distribution mais ce ne sont pas là les seuls moyens utilisés. Devant le manque de place pour loger les accessoires de plus en plus nombreux, les constructeurs automobiles utilisent également le ou les arbres à cames pour entraîner de petits accessoires comme la pompe à vide (PAV) ou la pompe à injection ... A l'opposé de la poulie d'entraînement, en bout d'arbre à cames, on peut accoupler une PAV ou une pompe à injection par l'intermédiaire d'un joint de Oldham (Figure 1.7). Ce joint de Oldham, appelé TOC, sert à transmettre la rotation de l'AAC à la pompe malgré leur désalignement et ceci de manière homocinétique (même vitesse de rotation en amont et en aval). Ce type d'entraînement est au cœur de l'étude de cette thèse et sera par conséquent développé au chapitre 3.

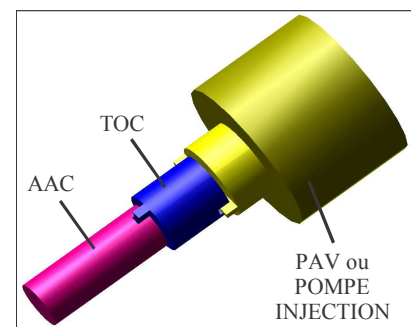


Figure 1.7 : Entraînement par l'AAC

1.1.4 LES CONTACTS DU GMP EN DEHORS DU MOTEUR

Les systèmes mécaniques du GMP présentant d'importants effets liés aux contacts, ne se limitent pas qu'au moteur. Dans le cadre de cette thèse, nous avons été amené à aborder dans la littérature les études traitant des problématiques de contact au niveau de l'embrayage, de la boîte de vitesse et des transmissions.

L'embrayage et la boîte de vitesse présentent un grand intérêt du point de vue de la problématique de contact dans l'étude des passages de vitesse (Derrien [DER99], Lamarque [LAM99]) et des bruyances de boîte de vitesse (Kahraman & Singh [KAH90b], Remond [REM93], Sabot [SAB98]).

Sur ce dernier point, on distinguera la sirène qui est un bruit global lié à l'engrènement des pignons sous couple (Rigaud [RIG98], [RIG00], Mayeux [MAY02], Vaishya & Singh [VAI01]) et le bruit de grenaille ou grailonnement caractérisé par une succession de claquements métalliques provenant des chocs entre dentures des pignons (Follea [FOL99], Kahraman [KAH90a], Nakai [NAK02], Padmanadhan [PAD94], [PAD95a], Parker [PAR00], Sarkar [SAR97], Szadkowski [SZA91], Theodossiades [THE00], [THE01], Wang [WAN78], [WAN81]). Dans la plupart des calculs de chocs entre engrenages, les impacts sont généralement modélisés par une raideur de contact, nulle lorsqu'il y a perte de contact. Les calculs se font généralement soit par des méthodes du type balance harmonique ([BLA95], [KAH96], [PAD92], [RAG99], [ROO95]) soit par intégration temporelle ([AZA77], [BLA95], [DEV00], [ENG01], [KAH91], [KAH92], [LIT03], [PAD92], [ROO95]). Les travaux associés à ce type de système ont permis de voir la pertinence et l'efficacité des méthodes de calcul disponibles dans la littérature.

Enfin, les transmissions présentent également des problématiques de contact ([COU98]) équivalentes à celles rencontrées dans les roulements et où le contact rotor/stator est multiple et généralement modélisé par des ressorts de support non linéaires (Cveticanin [CVE98], Ji [JI98], Wang [WAN97]), ou des raideurs discontinues prenant en compte la non linéarité de jeu radial (Azeez [AZE99], Demailly [DEM03], Ehrich [EHR88], Flowers [FLO93], Ganesan [GAN97], Kim [KIM91], Lawen [LAW97]).

Dans la partie qui va suivre, nous allons voir de manière générale, quelles sont les modélisations de contact connues de la littérature et que nous allons utiliser dans le cadre de cette thèse pour l'étude d'un système dynamique à jeu.

1.2 MODELISATIONS DU CONTACT

Comme nous venons de le voir en particulier pour le moteur, le GMP présente de nombreux problèmes mécaniques dus aux interactions de contact entre composants. Dans cette partie, on se propose de voir les modélisations du contact les plus rencontrées dans la littérature.

1.2.1 GENERALITES

Le principe classique de la mécanique du contact entre deux corps solides S_1 et S_2 consiste à exprimer d'une part, le contact unilatéral entre les deux solides et d'autre part, les phénomènes de frottement lorsque le contact est établi. Le premier aspect définit la possibilité pour ces deux corps de se toucher mais pas de s'interpénétrer (au moins à partir d'une certaine échelle d'observation). Le deuxième aspect indique quant à lui, que lorsque ces deux corps entrent en contact, ils opposent une résistance au glissement relatif.

1.2.1.1 LA CONDITION DE NON-INTERPENETRATION

Avant même de parler de la réaction de contact, il est d'abord nécessaire de définir une notion de proximité entre les deux solides S_1 et S_2 . Cette « proximité » ou encore « distance » doit nécessairement être caractérisée afin de détecter l'existence effective ou non de contact entre S_1 et S_2 . Plus largement, la formulation de la distance entre S_1 et S_2 permet d'écrire la condition exacte de non-interpénétration. Par exemple, dans le cas d'une barre rigide qui impacte un demi-espace sans angle d'incidence, on définit d_n comme étant la distance de la poutre au demi-espace, orientée selon la normale intérieure à la surface de la poutre (Figure 1.8).

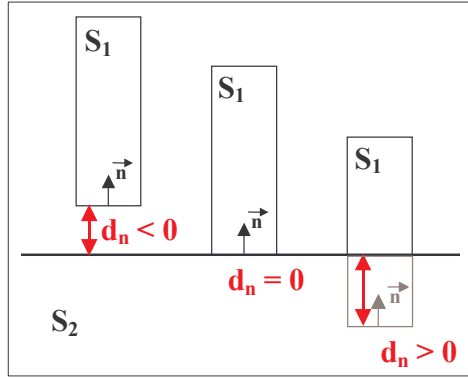


Figure 1.8 : Pénétration d'une poutre rigide impactant sur un demi-espace

Dans ce cas simple, la condition de non-interpénétration s'écrit simplement comme une inégalité imposant une « distance d'interpénétration » négative ou nul :

$$d_n \leq 0 \quad (1.3)$$

Dans un cadre général, cette condition de non-interpénétration est plus difficile à formuler. Si on considère deux solides déformables pour lesquels les surfaces sont discrétisées, on a déjà à ce niveau une limitation quant à « l'exactitude » des zones en contact par le passage de surfaces continues à des surfaces discrètes. Il est ensuite nécessaire de définir un appariement entre les deux surfaces susceptibles d'entrer en contact.

Dans l'approche « classique », on définit généralement une surface esclave Γ_1 pour l'un des solides noté S_1 et une surface maître Γ_2 pour l'autre solide S_2 . A chaque nœud p_1 de la surface esclave, on associe à chaque instant t un point de la surface maître $\chi(p_1, t)$ correspondant au point de Γ_2 situé à la distance minimale $D_n^{p_1}$ entre Γ_2 et p_1 . On se place dans des cas de convexité et de régularité suffisante pour que ce point soit unique et défini par les relations suivantes :

$$D_n^{p_1} = \min \{ \| p - p_1 \|_2 \mid p \in \Gamma_2 \} \quad (1.4)$$

$$\chi(p_1, t) \in \Gamma_2 \quad \text{et} \quad \| \chi(p_1, t) - p_1 \|_2 = D_n^{p_1}$$

Les surfaces des 2 solides susceptibles d'entrer en contact sont par conséquent appariées. A chaque instant t , pour chaque couple $(p_1(t), \chi(p_1(t), t)) \in (\Gamma_1, \Gamma_2)$ on associe la distance d_n orientée selon la normale intérieure unitaire \underline{n} à la surface Γ_2 en $\chi(p_1, t)$:

$$d_n = \underline{(p_1 - \chi(p_1, t))} \cdot \underline{n} \quad (1.5)$$

Là encore, le principe de non interpénétration matérielle s'écrit :

$$d_n \leq 0$$

Néanmoins, même en respectant l'inégalité ci-dessus, les nœuds de la surface maître ont la possibilité de traverser la surface esclave. On définit alors le gap comme étant la distance minimale de pénétration engendrée. Afin de limiter au mieux le gap, il est impératif de choisir la surface esclave comme étant celle qui possède le maillage le plus petit, ou bien celle du solide déformable dans le cas où un des solides en contact est indéformable.

Afin de respecter scrupuleusement la non interpénétration entre les solides, il est nécessaire de définir également, à chaque instant t , la distance minimale entre les nœuds p_2 de la surface maître et Γ_1 . L'inégalité imposée sur les distances orientées { nœud de Γ_1 / surface Γ_2 } et { nœud de Γ_2 / surface Γ_1 } permet alors d'assurer la non interpénétration en considérant chaque surface comme étant maître et esclave à la fois ([BOU00]). On parle alors d'appariement symétrique ou bien de codeur à gap nul. Toutefois, un appariement symétrique apporte un coût de calcul plus important qu'une approche classique. La question de la complémentarité des surfaces des solides susceptibles d'entrer en contact doit par conséquent être prise en compte avec attention aux vues de la précision requise et du coût de calcul toléré (Pfeiffer [PFE01]).

1.2.1.2 LES LOIS DE SIGNORINI

La condition cinématique de non interpénétration que nous venons de voir introduit une contrainte entre les deux solides en contact. Si on note \underline{R} , la densité d'effort de contact du solide S_2 sur S_1 , celle-ci peut être décomposée en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\underline{R} = R_n \underline{n} + \underline{R}_t \quad (1.6)$$

Les lois exactes de contact (Figure 1.9), appelées lois de Signorini ou conditions de Kuhn et Tucker ou encore loi de contact normal unilatéral de Hertz-Signorini-Moreau, qui relie la composante normale R_n de la densité d'effort de contact et la distance algébrique orientée d_n entre les deux solides sont les suivantes :

$$\begin{cases} d_n \leq 0 \\ R_n \leq 0 \\ d_n R_n = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

La première condition est celle de non interpénétration dont nous avons parlé précédemment. La deuxième relation signifie que l'effort de contact qui s'exerce entre les 2 solides est un effort de compression. Enfin, la dernière égalité exprime le principe de complémentarité (ou d'exclusion), autrement dit, si le contact n'est pas établi ($d_n < 0$) alors il n'y a pas d'effort de contact ($R_n = 0$), en revanche, s'il existe un effort de contact non nul ($R_n < 0$) alors c'est forcément que le contact est établi ($d_n = 0$). Le cas $R_n = 0$ et $d_n = 0$ correspond au cas limite de prise ou de perte de contact.

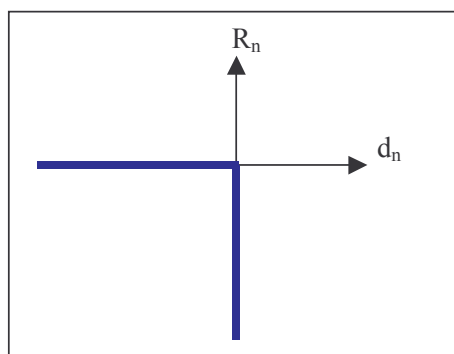


Figure 1.9 : Condition exacte de contact (lois de Signorini)

A ces trois lois, il convient d'ajouter une loi pour R_t dans le cas de contact frottant. Il s'agit de la loi suivante :

$$d_n \underline{R}_t = 0 \quad (1.8)$$

En cas de non contact ($d_n < 0$), cette loi assure la nullité de toutes les composantes de l'effort de contact \underline{R} (et pas seulement R_n). Néanmoins pour compléter ces lois d'interface, dans le cas d'un

contact frottant, il est nécessaire d'ajouter des lois de frottement telles que les lois de Coulomb que nous allons voir maintenant.

1.2.1.3 LES LOIS DE COULOMB : LE FROTTEMENT

C'est à Léonard De Vinci (1452-1519) que l'on doit les tous premiers travaux scientifiques sur le frottement, par l'étude de corps solides sur plan incliné. Ces recherches ont inspiré Amontons qui, au milieu du XVI^{ème} siècle, formula les premières lois de frottement de corps solides. Ces lois furent étendues par C. A. Coulomb dont l'ampleur des travaux lui valurent en 1779 le prix de l'Académie des Sciences. Depuis, de nombreux chercheurs ont développé de nouvelles lois de contact, la plupart du temps des lois empiriques, pour un type de matériau ou pour des conditions de température particulières, ...

Néanmoins, les lois de Coulomb sont couramment utilisées et suffisamment pertinentes pour représenter les phénomènes de frottement dans une certaine mesure. Ces lois présentent une condition de seuil sur la norme de la force de frottement $\| \underline{R}_t \|$ définie par l'effort normal $| R_n |$ et un coefficient de frottement μ_f dépendant des propriétés des solides (matériaux, état de surface) et de la température :

$$\| \underline{R}_t \| \leq \mu_f | R_n | \quad (1.9)$$

Plus précisément, on distingue le cas de l'adhérence pour laquelle la vitesse tangentielle entre les deux solides au niveau du contact v_t est nulle, du cas du glissement pour lequel v_t n'est pas nul :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \| \underline{R}_t \| < \mu_f | R_n | & \text{si } v_t = 0 \\ \| \underline{R}_t \| = \mu_f | R_n | & \text{si } v_t \neq 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Le frottement de Coulomb est donc défini par une fonction non linéaire, non régulière, multivoque et présentant un couplage entre R_t et R_n .

Dans un problème de contact frottant avec impact, apparaît alors tout un ensemble de configurations possibles selon que l'impact est oblique ou direct, selon qu'il y a ou non adhérence et à quelle phase de l'impact celle-ci se déclenche (Lankarani [LAN00]). En outre, on distingue le coefficient de frottement statique du coefficient de frottement dynamique qui est plus faible pour un même système.

1.2.2 MODELES SANS CONDITION DE NON-INTERPENETRATION

1.2.2.1 MODELE ELEMENTS FINIS AVEC PENALISATION

Dans cette partie, nous considérerons uniquement le choc sans frottement entre deux solides S_1 et S_2 , dont l'un au moins est déformable. Une des méthodes classiques est la méthode de pénalisation qui consiste à enlever la condition cinématique de non interpénétration et de la remplacer par la relation suivante portant sur la densité d'effort de contact :

$$R_n = -K_p \cdot F_{\text{Heav}}(d_n) \cdot d_n \quad (1.11)$$

où F_{Heav} est la fonction de Heavyside définie par :

$$F_{\text{Heav}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

K_p est le paramètre de pénalisation. Il est équivalent à une raideur de choc qui va lier les surfaces en contact. Par abus de langage, on parle de raideur de contact, ce terme étant plutôt destiné aux modélisations avec des corps rigides. La valeur de K_p n'a pas de sens physique. Elle n'est là que pour affranchir le solveur de la contrainte cinématique de non interpénétration. Le problème pénalisé est un problème approché ou encore « régularisé » (Figure 1.10) dont le cas limite $K_p = +\infty$ correspond au problème exact de Signorini (Figure 1.9).

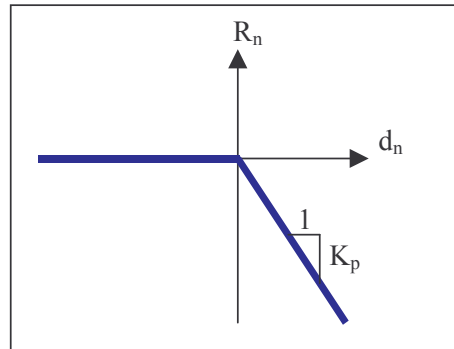


Figure 1.10 : Modèle de pénalisation

Barlam et Zahavi ([BAR99]) montrent pour plusieurs problèmes simples de contact sans frottement, qu'en augmentant le paramètre de pénalisation K_p , on diminue globalement les erreurs en terme de déplacement et d'énergie. Evidemment, la raideur de choc K_p est de valeur finie et un compromis doit être trouvé, pour chaque problème entre une valeur trop faible engendrant une violation trop importante de la condition de non interpénétration et une valeur trop importante générant des temps de calcul prohibitifs voire des difficultés de convergence de l'intégrateur (matrice de raideur mal conditionnée).

Une telle méthode est classiquement utilisée avec parfois des variantes telles que l'évolution du paramètre de pénalisation au cours de l'intégration afin de contrôler la valeur du gap (Chamoret [CHA04]), l'utilisation de la méthode « spinball » (Belytschko [BEL92]) ou encore une régularisation supplémentaire effectuée sur la loi de contact (Aggoune [AGG04]).

1.2.2.2 MODELE ELEMENTS FINIS AVEC COMPLIANCE

La régularisation la plus connue du modèle de pénalisation consiste à écrire la densité d'effort de contact sous la forme :

$$R_n = -K_p \cdot F_{\text{Heav}}(d_n) \cdot (d_n)^{\alpha_c} \quad (1.13)$$

On parle alors parfois d'un modèle de compliance avec $\alpha_c > 1$, le cas $\alpha_c = 1$ correspondant au modèle de pénalisation classique. Le modèle de compliance a été introduit par J.T. Oden, J.A.C. Martins et E. Pires en 1985. Outre les propriétés d'ordre numérique, ce type de considération permet de s'approcher d'un modèle « plus réaliste », en tentant de prendre en compte les aspérités, c'est-à-dire l'état de surface des solides non modélisé par les éléments finis. La valeur de α_c dépend du type d'interface et de la nature des solides : pour une interface entre métaux, on a généralement $1,5 < \alpha_c < 2,5$.

Toutefois, là encore la valeur de K_p est arbitraire et déterminée en regard des aspects numériques. Trop faible, elle autorise une violation trop élevée de la condition de non interpénétration. Trop importante, elle génère des temps de calculs trop élevés avec des problèmes de convergence.

Cette loi est non linéaire et continue (Figure 1.11), contrairement à la loi de pénalisation. La continuité facilite les propriétés de convergence de l'intégrateur numérique. Des problèmes peuvent néanmoins apparaître dès lors qu'on a des interpénétrations importantes générant des efforts de contact trop élevés.

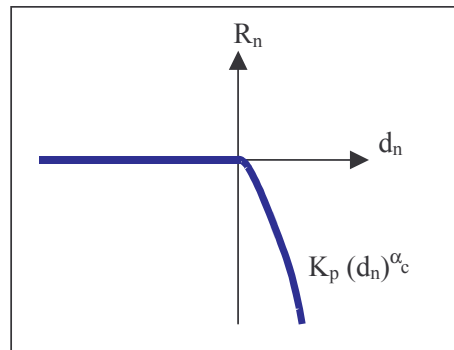


Figure 1.11 : Modèle de compliance

Cette approche est inspirée du modèle de Hertz que nous allons présenter ci-dessous.

1.2.2.3 THEORIE DE HERTZ

A la fin du XIX^{ème} siècle, H. Hertz a obtenu la solution analytique du problème particulier du contact sans frottement entre deux sphères élastiques. Hertz a stipulé comme hypothèses que les surfaces de contact déformées étaient des ellipsoïdes de révolution, que les dimensions de cette zone de contact devait rester faible devant les dimensions des solides et les rayons de courbure des surfaces, que les contraintes étaient suffisamment petites pour que les matériaux restent dans leur domaine linéaire élastique et enfin qu'on se place dans un cas de contact sans frottement de sorte que seule une pression de contact normale soit transmise (Adams [ADA00], Turner [TUR04]).

Il a montré que pour une ellipse de contact de demi-axes a et b dans le plan (yz), générée par une force normale F_c appliquée aux solides induisait une contrainte normale au niveau de l'ellipse de contact de la forme suivante :

$$\sigma_n = \sigma_{xx} = \frac{3F_c}{2\pi a b} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^2} \quad (1.14)$$

Dans le cas de deux sphères, la zone de contact est circulaire avec :

$$a = b = \left(\frac{3F_c R_{eq}}{4E_{eq}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.15)$$

où E_{eq} et R_{eq} désignent respectivement le module d'Young équivalent et le rayon équivalent définis par les relations suivantes :

$$\frac{1}{E_{eq}} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.16)$$

La pression de contact maximale (obtenue au centre de l'ellipse) est alors :

$$p_{max} = \left(\frac{6F_c E_{eq}^2}{\pi^3 R_{eq}^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.17)$$

Il a également démontré que la relation entre la force de contact F_c et la distance d'interpénétration des deux solides δx due à leur déformation élastique locale pouvait se mettre sous la forme :

$$F_c(\delta x) = K_H \delta x^{\frac{3}{2}} \quad (1.18)$$

La constante de Hertz K_H , est alors uniquement fonction des caractéristiques des matériaux et de la géométrie des solides au niveau du contact :

$$K_H = \frac{4}{3} E_{eq} \sqrt{R_{eq}} \quad (1.19)$$

Dans le cas général autre que celui de deux sphères élastiques, la relation de Hertz s'écrit :

$$F_c(\delta x) = K_H \delta x^{\alpha_H} \quad (1.20)$$

La constante de Hertz K_H et l'exposant α_H sont alors déterminés de manière plus complexe, toujours à partir des caractéristiques des matériaux et de la géométrie au voisinage du contact, généralement à l'aide d'abaques paramétrées sur les courbures des solides. Le terme $K_H \delta x^{\alpha_H-1}$ correspond à une raideur de contact qui varie avec la déformation élastique locale δx .

Une telle approche peut alors être utilisée pour un modèle multi-corps rigides. Les déformations locales n'étant pas prises en compte, le modèle de Hertz peut être considéré uniquement pour sa formulation globale de l'effort de contact (cf. relation (1.20)) à partir de la distance d'interpénétration δx . On adopte ainsi une représentation du contact sans considérer les déformations locales induites par celui-ci. On trouve également des applications avec solides flexibles pour lesquels on utilise un maillage très grossier, sans prise en compte des déformations locales dans la zone de contact, et où on adopte un modèle de Hertz pour rendre compte de l'effort de contact global (Escalona [ESC01]).

On peut noter l'analogie avec le modèle de compliance (cf. 1.2.2.2) pour des corps élastiques. Néanmoins dans un modèle de Hertz multi-corps rigides, la valeur de K_H dépend de la nature et de la géométrie des solides, tandis qu'avec une déformation locale prise en compte de manière fine, le paramètre de compliance K_c est sujet à des considérations purement numériques (condition de non-interpénétration / coût calcul / convergence).

De tels modèles multi-corps rigides sont courants dans la littérature (Bryant [BRY85], Foale [FOA94], Gonthier [GON04], Huang [HUA04], Narayanan [NAR98], Ravn [RAV98]) mais ils leurs sont généralement préférés des modèles approchés avec une raideur de contact constante comme nous allons le voir dans ce qui suit.

1.2.2.4 MODELES CORPS RIGIDES AVEC RAIDEUR DE CONTACT

Pour les modélisations multi-corps rigides, il est courant d'utiliser une raideur de contact constante. Cela revient à ne pas considérer les variations de la raideur de contact stipulées par le modèle de Hertz. La relation entre l'effort de contact et l'interpénétration δx s'écrit alors :

$$F_c(\delta x) = K \delta x \quad (1.21)$$

K est la raideur de contact. Elle dépend de la géométrie de la zone de contact et des propriétés des matériaux présents. Elle est généralement fixée à partir de calculs éléments finis ou bien à partir d'essais expérimentaux.

Là encore, on peut noter l'analogie avec le modèle de pénalisation (cf. 1.2.2.1) mais tout comme précédemment, lorsque les déformations locales de la zone de contact sont prises en compte par les éléments finis, la raideur de pénalisation K_p a une valeur définie par des considérations purement numériques.

Un modèle multi-corps rigides avec raideur de contact constante a l'avantage de ne présenter qu'une non linéarité du type « discontinuité » contrairement à la non linéarité polynomiale du modèle de Hertz. Il en résulte un système discontinu où les équations du mouvement sont linéaires en vol libre (pas de contact) et en contact. La difficulté réside dans le traitement du passage discontinu entre le contact et le vol libre.

Il existe dans la littérature de nombreuses applications, sur des modèles de faible taille notamment. Certains d'entre eux sont regroupés dans la figure qui suit (Figure 1.12). Sur cette figure, les auteurs non référencés correspondent à des articles cités par B. Blazejczyk-Okolewska, K. Czolczynski et T. Kapitaniak dans un récent papier ([BLA04]) classifiant les divers types de systèmes de faible taille avec chocs. L'ensemble des systèmes utilisant une raideur de contact constante tels que ceux présentés sur cette figure appartient à la famille des systèmes linéaires par morceaux. Nous adopterons ce type de modélisation pour réaliser l'étude qui nous intéresse et qui sera détaillée à partir du chapitre 3.

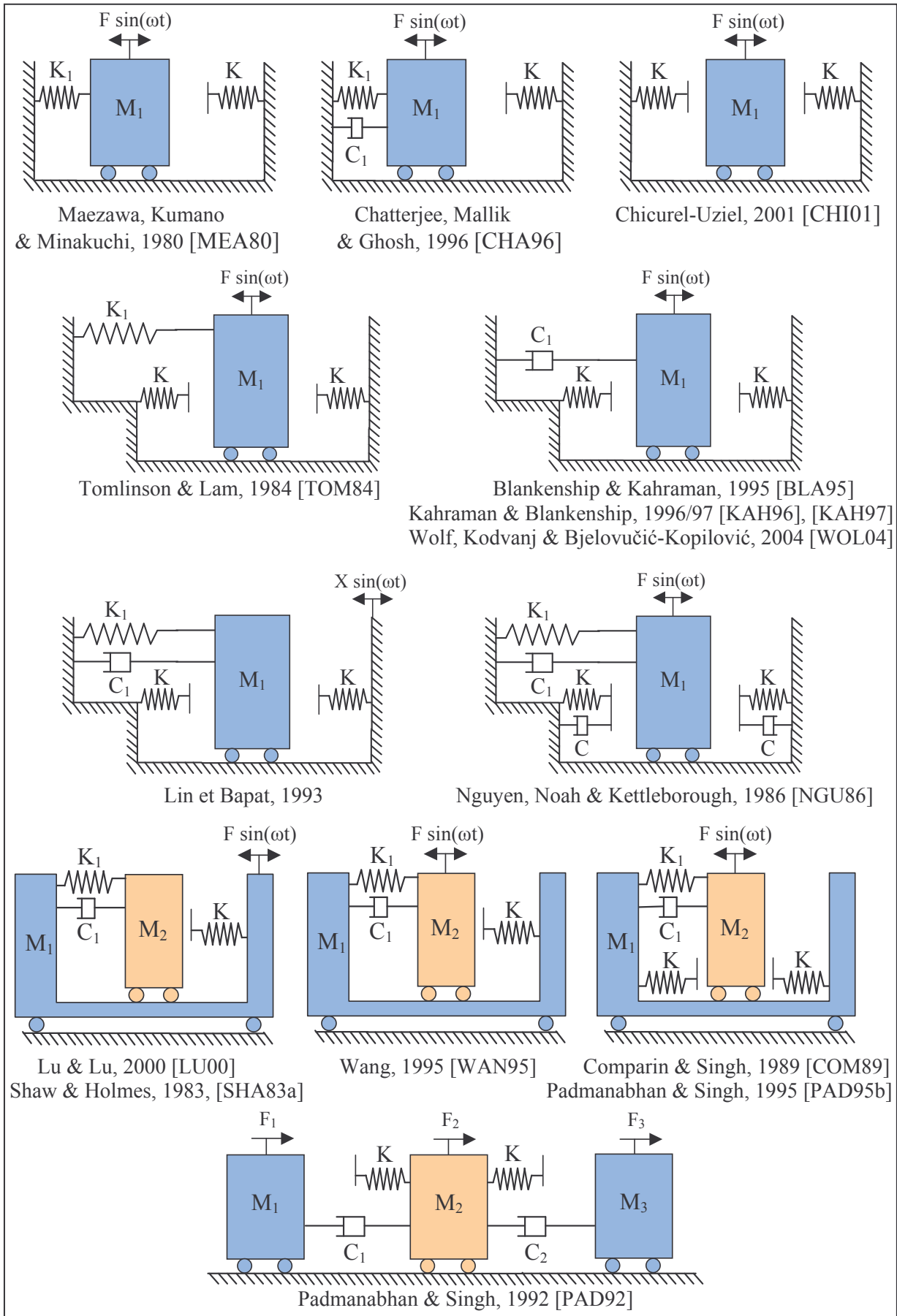


Figure 1.12 : Exemples de modèles de faible taille avec raideur de contact constante

1.2.3 MODELES AVEC CONDITION DE NON-INTERPENETRATION

Le modèle de choc instantané est souvent le modèle de choc le plus simple qu'on utilise au départ pour avoir une caractérisation assez globale de l'influence des impacts sur la dynamique d'ensemble du système.

Lors du contact entre les pièces, on fait l'hypothèse d'instantanéité du choc. De telles approches avec impacts instantanés sont régulièrement utilisées dans l'étude des milieux granulaires (Fortin [FOR04], Moreau [MOR00], Oviedo-Marlot [OVI01], Renouf [REN04], Zakhariiev [ZAK01]). Cette hypothèse est justifiée par le fait que la durée du choc est souvent extrêmement courte comparée aux périodes caractéristiques des mouvements des pièces. L'ensemble du phénomène peut ainsi être intégré et vu comme un changement brusque d'état entre l'instant précédent l'impact (noté t_c^-) et l'instant suivant celui-ci (noté t_c^+).

Il convient de souligner que ce modèle ne fait intervenir aucune considération relative à l'état dynamique du système pendant la collision. En conséquence, des concepts tels que force de choc et temps de choc lui sont totalement étrangers. Cette hypothèse forte est responsable de la perte d'une partie de l'information concernant le système mais elle permet néanmoins une manipulation rapide et facile des impacts : encore faut-il s'assurer que la durée des impacts est effectivement négligeable. De cette manière, l'étude des chocs peut se faire à travers l'utilisation d'une loi dite loi d'impact ou loi de restitution régissant le changement brusque des états précédant et succédant un choc. On peut trouver dans la littérature de très nombreux exemples d'étude tels que le pendule inversé limité par deux butées (Lenci et Rega [LEN00], [LEN03]), des barres impactant entre elles (Glocker [GLO04]) ou sur une butée rigide (Wagg [WAG02]), une balle rebondissant sur un plan (Holmes [HOL82], Ivanov [IVA94]) et le vaste domaine des oscillateurs à impacts (Bapat [BAP88], Budd [BUD95], Han [HAN95], Heiman [HEI88], Luo [LUO02], [LUO04], [LUO98], Nordmark [NOR91], Peterka [PET92], Popplexell [POP83], Shaw [SHA85a], [SHA85b], [SHA83c], Toulemonde [TOU97], [TOU98], Wen [WEN01]).

Ces lois ne sont pas nouvelles. On s'intéresse depuis longtemps aux phénomènes liés aux impacts. Déjà Huygens en 1656 examinait complètement le choc élastique entre deux points matériels à l'aide de la conservation des moments et de l'énergie cinétique. L'une des premières lois d'impact connues est la loi de restitution introduite par Isaac Newton dans son « Principia » en 1686. D'après cette loi, lors d'un choc entre deux pièces rigides, la vitesse relative entre les pièces s'inverse. Afin de rendre compte d'une perte d'énergie mécanique irréversible au cours de l'impact, Newton introduit un coefficient multiplicatif compris entre 0 et 1, appelé taux de restitution et noté r . Par conséquent, après le rebond, non seulement la vitesse relative entre les deux pièces impactant s'inverse, mais son amplitude est multipliée par r .

Dans le cas général d'un impact avec angle d'incidence, soit t_c l'instant du choc, P_1 le point d'impact entre les deux pièces et v_n la composante normale de la vitesse relative entre ces deux pièces au point P_1 , on a :

$$v_n(t_c^+) = -r v_n(t_c^-) \quad (1.22)$$

Cette relation montre bien le caractère discontinu de la collision induisant un changement brusque de la vitesse relative des pièces.

Selon la valeur de r , on retrouve deux cas particuliers qui sont :

- $r = 1$: Cas purement élastique ou « loi d'impact de Huygens » (pas de perte d'énergie) ;
- $r = 0$: Cas plastique, parfaitement inélastique ou « choc mou » (perte totale d'énergie) (cf. [LUO01], [SHA83b]).

On peut citer comme autres lois d'impact similaires connues :

- la loi de restitution énergétique qui lie l'énergie cinétique post-impact à l'énergie cinétique pré-impact par un taux de restitution énergétique r_E .
- la loi de restitution de Poisson qui tient à la théorie des percussions ([BRO97]) et qui lie l'impulsion post-impact à l'impulsion pré-impact par un taux de restitution dit de Poisson r_P .

D'après Glocker ([GLO04]), les 3 approches par loi de restitution dont nous venons de parler, à savoir, la loi de restitution énergétique, celle de Poisson et celle de Newton coïncident dans le cas d'un problème d'impact localisé unique (au contraire des problèmes de contacts multiples) et sans frottement. De tels modèles sont applicables tant dans le cas de multi-corps rigides que dans le cas de solides déformables, avec la possibilité de prendre en compte le frottement entre les solides (Cone [CON95], Glocker [GLO92], Han [HAN04], Marghitu [MAR01], Zakhariiev [ZAK01]).

Quelle que soit l'approche utilisée, le taux de restitution r est généralement une inconnue à déterminer et à mettre en relation avec des résultats expérimentaux (Bapat [BAP83], Fang [FAN94], Popplewell [POP83]). En effet, r permet la prise en compte des phénomènes dissipatifs liés au choc et dépend donc de la nature du choc et de l'amortissement des pièces. Néanmoins, r n'est pas forcément constant. Diverses expériences et études analytiques ont établi depuis longtemps que le coefficient de restitution est fonction de nombreuses variables des solides impactés, telles que la densité des matériaux, la masse des solides, la géométrie du contact ou encore la vitesse relative au moment de l'impact (Veluswami [VEL75a], [VEL75b]). En effet, de manière générale, la perte d'énergie augmente (donc r diminue) lorsque la vitesse relative à l'impact augmente. Pour des faibles vitesses d'impact entre deux solides en acier doux, Goldsmith ([GOL60]) donne la relation suivante pour le coefficient de restitution :

$$r = 1 - \beta_G \left| v_n(t_c^-) \right| \quad \text{où } \beta_G \text{ est une constante.} \quad (1.23)$$

Si $\left| v_n(t_c^-) \right|$ est exprimé en m/s, β_G vaut environ 0,2 jusqu'à une certaine valeur limite de $\left| v_n(t_c^-) \right|$.

Cette approximation n'est pas la seule connue. De nombreux travaux concernent l'obtention de formulations empiriques de lois d'impact sur des problèmes divers et variés. Les récents travaux de M. Frémond et de ses collaborateurs cherchent à identifier expérimentalement des lois d'impact généralisant celle de Newton.

Du point de vue numérique, les intégrateurs numériques classiques peuvent être mis à défaut à cause de l'importante sensibilité de la réponse vis à vis de la détermination précise des instants où se produisent les impacts (singularités). Par ailleurs, la méthode Schatzman-Paoli a été spécifiquement développée pour les problèmes de vibration avec contraintes unilatérales en déplacement (Paoli [PAO93]). Il s'agit d'un schéma numérique original de type schéma d'Euler à 2 pas qui ne nécessite pas d'approximation explicite des instants d'impact contrairement aux schémas classiques de Newmark ou de Runge-Kutta. Le schéma numérique Schatzman-Paoli a été confronté aux schémas numériques classiques pour un oscillateur à impact à 1 à 2 ddls (avec loi de restitution) par O. Janin et H. Lamarque ([JAN01], [LAM00]). D'un point de vue mathématique, le schéma de Schatzman-Paoli est le meilleur choix en raison de la non approximation sur les instants d'impact et des preuves de convergence établies par L. Paoli. En revanche, ce schéma est d'un ordre faible et le calcul numérique se fait très lentement dès lors qu'une précision élevée est requise.

Ce type de modélisation est largement rencontré dans la littérature, notamment pour des systèmes de faible taille. Certains d'entre eux sont regroupés dans la figure qui suit (Figure 1.13). On y trouve entre autres, les oscillateurs à impact et les systèmes du type « impact-pair ». Sur cette figure, les auteurs non référencés correspondent à des articles cités par B. Blazejczyk-Okolewska et al. dans un récent papier ([BLA04]) classifiant les divers types de systèmes de faible taille avec chocs.

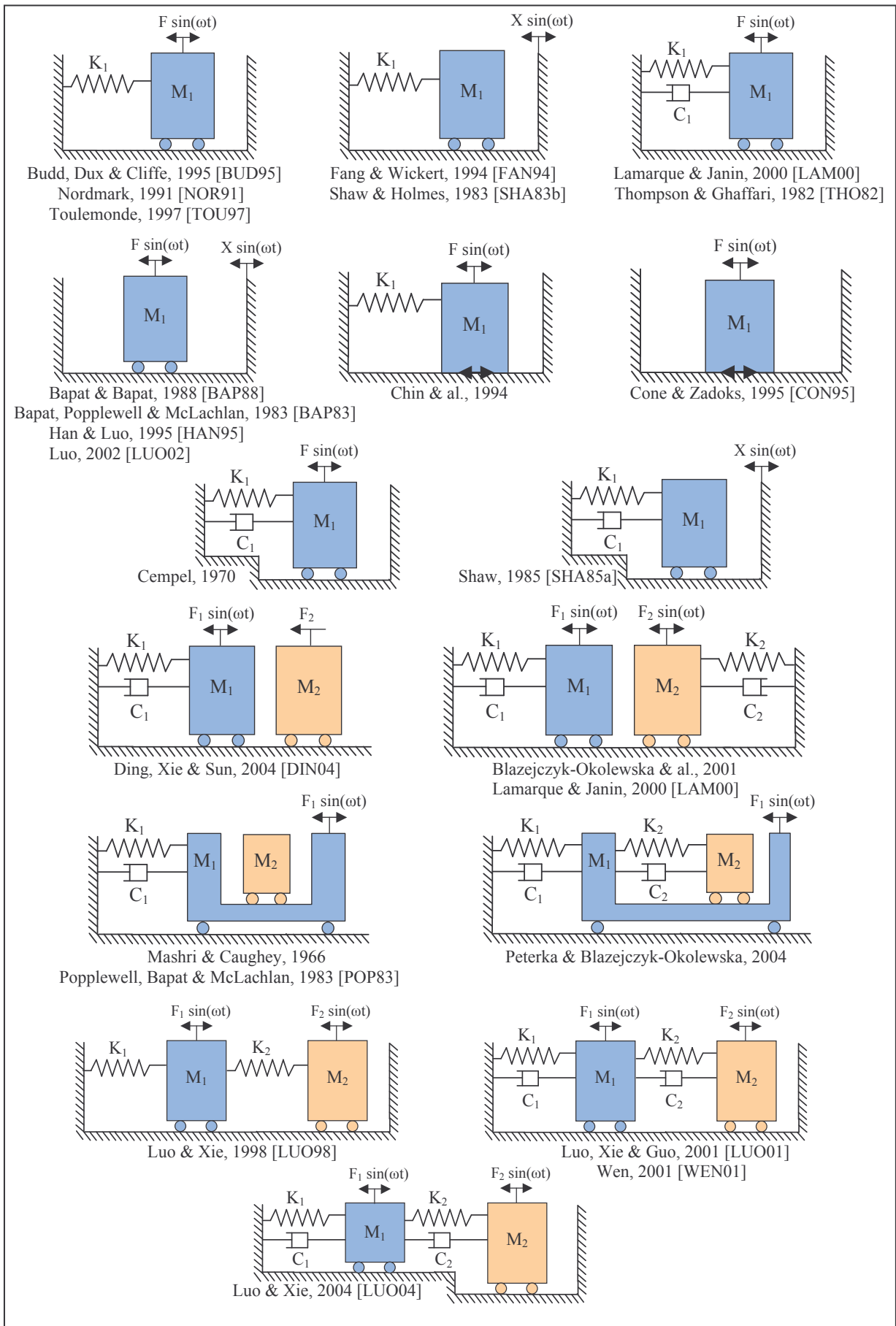


Figure 1.13 : Exemples de modèles de faible taille avec loi de restitution de Newton

1.2.4 LA PERTE D'ÉNERGIE LIÉE AUX CHOCS

1.2.4.1 GENERALITES

Lors du choc entre deux corps, on remarque généralement une perte d'énergie cinétique due à l'impact. En restant dans le domaine élastique, sans plastification au voisinage de la zone de contact, la vitesse normale relative entre les deux corps en sortie de choc est inférieure, en valeur absolue, à celle de la prise de contact. C'est typiquement ce qui est traduit par la loi de restitution de Newton avec un taux de restitution r inférieur strictement à 1.

Dans son récent article, Glocker ([GLO04]) montre que dans le cas de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 de vitesse relative v^- à la prise de contact en $t = t^-$ et de vitesse relative v^+ à la sortie du contact en $t = t^+$, la perte d'énergie cinétique s'écrit alors :

$$T^+ - T^- = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left((v^+)^2 - (v^-)^2 \right) \quad (1.24)$$

Cette relation est valable que le choc soit instantané ($t^+ = t^-$) ou non ($t^+ > t^-$). Pour un modèle avec loi de restitution, l'énergie cinétique n'est conservée que si $r = 1$. En revanche, pour un modèle avec raideur de contact, l'énergie cinétique est forcément conservée.

Nous allons voir, dans ce qui suit, comment en utilisant un amortissement de contact, on peut reproduire ce phénomène de perte d'énergie cinétique dans un modèle avec raideur de contact ou un modèle éléments finis de pénalisation. Enfin, dans le cas d'une approche multi-corps rigides que nous adopterons par la suite, nous allons montrer ici quelle relation lie les paramètres du modèle avec loi de restitution de Newton à ceux d'un modèle avec raideur de contact.

1.2.4.2 L'AMORTISSEMENT DE CONTACT

Pour simuler la perte d'énergie cinétique pendant le contact dans un modèle avec raideur de contact constante, on introduit un amortissement de contact. Tout comme la raideur de contact, l'amortissement de contact est nul dans le jeu. Pour un modèle avec raideur de contact constante dans le jeu, on utilise un amortissement de contact constant également dans le jeu. En revanche pour une raideur de contact qui est non linéaire continue (notamment à la frontière contact / vol libre) telle que pour un modèle de Hertz, on utilise un amortissement de contact qui est globalement non linéaire continu. Dans ce dernier cas on peut utiliser par exemple, une interpolation par un polynôme de degré 3 entre un amortissement nul à la prise de contact et qui vaut C à partir d'une distance d'interpénétration fixée à l'avance.

En terme de résolution numérique, l'utilisation d'un amortissement de contact facilite la convergence des schémas d'intégration temporelle, notamment lorsqu'on l'utilise dans un modèle de pénalisation. Dans notre cas, l'étude a été réalisée de manière semi-analytique comme nous le verrons plus tard (cf. 3.3). L'amortissement de contact que nous utiliserons n'aura pas comme conséquence une amélioration de la résolution. Au contraire, il s'agit d'une complexification de la résolution analytique des équations différentielles que certains auteurs évitent parfois d'aborder (Figure 1.12). C'est dans le souci de prendre en compte la perte d'énergie cinétique lors des chocs que cet amortissement a été introduit. En revanche, c'est le paramètre du modèle qui est le moins maîtrisé. Il est sujet à caution et doit être caractérisé de manière expérimentale. Dans la littérature, on trouve plusieurs sortes de valeur d'amortissement de contact utilisées avec des différences notables entre les modèles.

Enfin, tout comme le taux de restitution, l'amortissement de contact est en théorie influencé par les vitesses d'impact. Ceci se voit nettement en montrant l'équivalence entre le modèle avec raideur et amortissement de contact et celui avec loi de restitution de Newton.

1.2.4.3 COMPARAISON RAIDEUR ET AMORTISSEMENT DE CONTACT / RESTITUTION

Dans cette partie, nous allons mettre en relation les deux modèles que nous allons étudier dans nos travaux, à savoir, le modèle linéaire par morceaux avec raideur et amortissement de contact et le modèle de non-interpénétration avec loi de restitution de Newton. Cette dernière approche décrit le comportement asymptotique du système qui correspondrait à un modèle linéaire par morceaux avec une raideur de contact $K = +\infty$, empêchant ainsi l'interpénétration des solides.

On peut cependant trouver une relation approchée entre le taux de restitution r du modèle de non interpénétration et les paramètres K et C du modèle linéaire par morceaux. On considère une inertie I en rotation avec un jeu angulaire par rapport à une butée où le contact est modélisé par une raideur de contact en torsion K et un amortissement de contact en torsion C . On pose θ l'angle relatif entre les deux solides de sorte que $\theta = 0$ corresponde à la prise du contact. L'équation différentielle du système en interpénétration (contact) sans second membre (sans excitation) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}} & \text{(pulsation de choc)} \\ \xi = \frac{C}{2I\omega_0} = \frac{C}{2\sqrt{KI}} & \text{(taux d'amortissement de choc)} \end{cases} \quad (1.25)$$

ω_0 est la pulsation de choc qui est généralement très grande devant les autres pulsations des excitations du système (non prises en compte ici). Si on ne considère donc que l'équation sans second membre ci-dessus, la solution est pseudo-harmonique centrée sur 0 avec une pseudo-période :

$$T_{\text{pseudo}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.26)$$

Par conséquent, si on suppose qu'à l'instant $t_i = 0$, on a un choc (interpénétration) avec une vitesse angulaire relative $\dot{\theta}^- = \dot{\theta}(0)$, alors le contact cesse à $t = t_i + T_{\text{pseudo}} / 2$ avec un vitesse angulaire relative $\dot{\theta}^+$:

$$\dot{\theta}^+ = \dot{\theta}\left(\frac{T_{\text{pseudo}}}{2}\right) = \dot{\theta}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\exp(-\xi\pi)\dot{\theta}^- \quad (1.27)$$

En faisant tendre la rigidité de contact K , et donc la pulsation de choc ω_0 , vers l'infini, on se retrouve dans le cas de non interpénétration à impact instantané avec une loi de restitution du type :

$$\dot{\theta}^+ = -r\dot{\theta}^- \quad (1.28)$$

On en déduit finalement la relation d'équivalence entre les deux modèles étudiés :

$$r \equiv \exp(-\xi\pi) = \exp\left(-\frac{\pi C}{2\sqrt{KI}}\right) \quad (1.29)$$

Dans le tableau ci-dessous, on calcule différentes équivalences entre r et ξ . On remarque que l'ordre de grandeur de ξ est bien plus élevé que le taux d'amortissement interne d'une structure en acier qui est de l'ordre de 0,05 %.

r	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ξ	$+\infty$	73,3 %	51,2 %	38,3 %	29,2 %	22,1 %	16,3 %	11,4 %	7,1 %	3,4 %	0 %

Tableau 1 : Equivalences r / ξ

1.3 CONCLUSION

Par conséquent, bien que nous n'avons pas été exhaustifs, nous voyons déjà que nombreux sont les problèmes de contact présents dans le moteur et que nombreuses sont les méthodes connues de la littérature pour aborder ce type de problème.

Le système étudié par la suite est l'entraînement de pompe à vide sur moteur diesel (cf. 1.1.3). Ce choix a été fait en raison de l'absence de modèle pertinent chez PSA pour ce type d'entraînement et de l'importance de la tenue de ce composant dans le moteur. Il s'agit d'une pièce sécuritaire qui fournit l'assistance au freinage du véhicule. Ce système sera décrit plus longuement au chapitre 3.

Afin de représenter ce système, nous avons considéré dans un premier temps les principaux modèles exposés précédemment et prenant ou pas en compte la condition de non-interpénétration. Il s'agit du modèle avec loi de restitution et du modèle avec raideur de contact. Ces modèles nous ont rapidement donné de très bons résultats et c'est pourquoi nous n'avons pas développé les autres approches connues telles que les approches lagrangiennes et les formulations mixtes (Ben Dhia [BEN01]). Pour des modèles éléments finis, avec prise en compte fine de la déformation de la zone de contact ([MET00]), la formulation mixte la plus connue est l'approche par multiplicateurs de Lagrange augmentés. Ce type d'approche n'a pas été retenu en raison des exigences en éléments finis de maillages trop fins pour la prise en compte d'une excitation multi-harmonique à large spectre et pouvant atteindre des fréquences élevées.

Enfin, nous tenons à préciser qu'il existe encore bien d'autres approches méthodologiques pour bien d'autres types de systèmes à jeux possibles. Citons entre autres les problématiques d'auto-contact, de contacts multiples (Choi [CHO94], Kim [KIM90], Li [LI04], Saito [SAI85]), de contact avec écrasement d'un film d'huile, de chocs avec loi de déformation plastique (mise en forme, crash, ...) et enfin de théorie ondulatoire pour expliquer aisément par exemple les ondulations post-choc de deux barres métalliques.

CHAPITRE 2

OUTILS D'ANALYSE NON LINEAIRE

Ce deuxième chapitre présente l'ensemble des outils nécessaires à l'analyse de la stabilité dynamique de systèmes non linéaires tels que le TOC de pompe à vide. Il est également beaucoup plus ciblé sur les choix d'orientation de la thèse sur la modélisation numérique choisie. Le chapitre précédent a présenté en partie la diversité des problèmes dynamiques possibles d'être traités sur un GMP ainsi que l'ensemble des outils numériques les plus connus de la littérature pour traiter les systèmes à jeux. Ce chapitre-ci fige la démarche d'analyse que nous allons utiliser ainsi que les types d'études paramétriques qui seront utilisés sur le cas de l'entraînement de pompe à vide des moteurs diesel.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première partie traite des non linéarités. Elle présente les outils généraux en définissant le vocabulaire et les définitions nécessaires à l'étude. On décrit également les comportements asymptotiques possibles pour la réponse statique et dynamique d'un système non linéaire. Enfin, tous les éléments nécessaires à l'analyse de stabilité de ces comportements asymptotiques seront présentés ainsi que le type de bifurcations associées qui pourront apparaître lors de l'étude paramétrique.

Nous verrons dans le cas présenté au chapitre 3 qu'une démarche semi-analytique peut alors être très performante. L'étude du comportement d'un système ne se résumant pas à un seul point de fonctionnement, nous verrons dans cette deuxième partie comment nous pourrions suivre les variations paramétriques du système étudié grâce à une technique de continuation. Cette démarche permet d'obtenir l'ensemble des branches de solutions issues des différentes bifurcations rencontrées. Ce sera un important outil dans l'application qui sera traitée.

2.1 LES SOLUTIONS NON LINEAIRES

2.1.1 OUTILS GENERAUX

2.1.1.1 DEFINITION DES SYSTEMES

i) Système autonome

Soit \underline{F} une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n de classe C^1 . Un système autonome est un système dynamique d'évolution temporelle continue qui a une indépendance explicite du temps t :

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{F}(\underline{X}) \quad (2.1)$$

L'existence des solutions n'est assurée que si $\underline{F}(\underline{X})$ est C^0 . L'unicité est assurée en imposant une condition initiale $\underline{X}(t_0) = \underline{X}_0$ à $t = t_0$. On note alors $\underline{\phi}(t, \underline{X}_0, t_0)$ la solution de l'équation différentielle à l'instant t telle que $\underline{\phi}(t_0, \underline{X}_0, t_0) = \underline{X}_0$. Chaque solution est définie sur un intervalle de temps et décrit une trajectoire (ou orbite) dans l'espace des phases $(\underline{X}, \dot{\underline{X}})$. Ces trajectoires ne peuvent pas se croiser, ce qui donne une structure d'écoulement : le flot. L'application $\underline{\phi}$ est justement le flot de l'équation différentielle. L'ensemble de trajectoires représentatives du flot définit le portrait de phase. Celui-ci permet ainsi l'étude du comportement du système et donc de sa stabilité.

Dans un souci de simplification, en prenant $t_0 = 0$, on note $\underline{\phi}(t, \underline{X}_0, 0) = \underline{\phi}(t, \underline{X}_0) = \underline{\phi}_t(\underline{X}_0)$. L'application $\underline{\phi}$ vérifie alors la propriété $\underline{\phi}_{t+\tau}(\underline{X}_0) = \underline{\phi}_\tau(\underline{\phi}_t(\underline{X}_0))$. Cette définition du flot reste valable également pour un système non autonome que nous allons définir maintenant.

ii) Système non autonome

Soit \underline{F} une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n de classe C^1 . Un système non autonome est un système à évolution temporelle continue qui dépend explicitement du temps t :

$$\dot{\underline{X}}(t) = \underline{F}(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$

Comme précédemment, il définit également des trajectoires dans l'espace des phases mis à part que la propriété de non-croisement n'est plus respectée (les trajectoires sont paramétrées par le temps). Toutefois, il est possible d'obtenir le non-croisement des trajectoires en travaillant sur l'espace des phases augmenté de la variable temporelle (on a une nouvelle coordonnée t d'équation $\dot{t} = 0$, ce qui nous donne une représentation 3D du plan de phase).

iii) Système à évolution temporelle discrète

Soit \underline{F} une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n de classe C^1 . Un système à évolution temporelle discrète est décrit par :

$$\underline{X}_{k+1}(t) = \underline{F}(\underline{X}_k) \quad (2.3)$$

On obtient cette fois-ci dans l'espace des phases un ensemble de points correspondants aux itérées du vecteur des conditions initiales \underline{X}_0 .

2.1.1.2 ATTRACTEURS ET BASSINS D'ATTRACTION

i) Ensemble invariant

Considérons un flot ϕ , l'ensemble S_E (ouvert de \mathbb{R}^n) est invariant si $\forall \underline{X} \in S_E, \phi_t(\underline{X}) \in S_E \quad \forall t \geq 0$.

Un ensemble S_E est donc invariant si toute trajectoire amorcée (par des conditions initiales par exemple) dans S_E reste indéfiniment dans S_E .

ii) Ensemble attractant

Un ensemble invariant S_E (ouvert de \mathbb{R}^n) est de plus attractant si il existe un voisinage U_E de S_E tel que :

$$\forall \underline{X} \in U_E, \forall t \geq 0, \quad \phi_t(\underline{X}) \in U_E \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\underline{X}) = S_E$$

Autrement dit, toute trajectoire amorcée dans un voisinage U_E de S_E reste dans U_E et tend vers l'ensemble S_E .

iii) Attracteur

Un ensemble attractant S_E est attracteur si de plus il vérifie :

- la récurrence pour tout sous-ensemble de S_E (tout sous-ensemble de S_E est attractant) ;
- la propriété d'irréductibilité (il n'existe aucun sous-ensemble de S_E attracteur).

En d'autres termes, il ne peut être scindé en sous-ensemble de S_E (l'union de 2 attracteurs ne peut être considérée comme un attracteur) et ne possède pas de parties non-attractantes.

iv) Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur S_E est l'ensemble B_E qui comprend les conditions initiales \underline{X}_0 telles que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\underline{X}_0) \rightarrow S_E$$

2.1.1.3 SECTION DE POINCARÉ

Le principe de la section de Poincaré consiste à réduire un système dynamique à évolution temporelle continue défini dans un espace de dimension n en un système à évolution temporelle discrète dans un espace de dimension $n-1$. Pour cela, on définit une section dite de Poincaré, perpendiculaire au flot, et on génère une application de premier retour (ou de Poincaré) en prenant un point sur cette surface et son image après un premier retour du flot sur cette surface notée Σ .

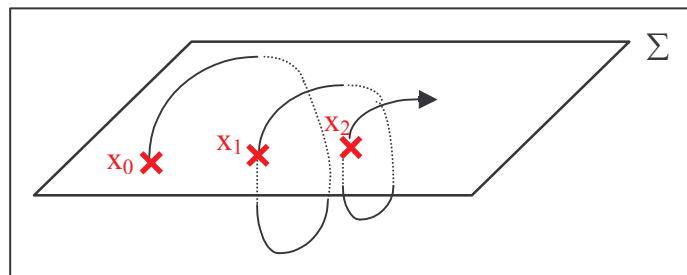


Figure 2.1 : Section de Poincaré

Il est possible de montrer qu'une telle application possède les mêmes propriétés de stabilité que celles du flot. En revanche, l'interprétation des résultats est beaucoup plus facile à réaliser puisqu'on a une dimension en moins. L'application de Poincaré est notamment très utile pour l'étude des solutions périodiques dites aussi cycles limites (cf. 2.1.2.2).

Pour un système dynamique excité par une force harmonique T-périodique, on peut définir une section de Poincaré (ce n'est pas la seule !) par l'intersection suivante :

$$\{\phi_t(\underline{X}_0) / t = 0 [T]\} = \{\underline{X}_0, \phi_T(\underline{X}_0), \phi_{2T}(\underline{X}_0), \phi_{3T}(\underline{X}_0), \dots\} \quad (2.4)$$

C'est l'exemple le plus couramment rencontré. L'application de Poincaré qui engendre une telle section par itérations successives est tout simplement définie à partir du flot par :

$$\underline{X}_0 \rightarrow \phi_T(\underline{X}_0) \quad (2.5)$$

Dans ce cas, l'application de Poincaré est dite application de premier retour. La section de Poincaré engendrée n'est autre qu'une carte stroboscopique du plan de phase obtenue par les itérées successives de l'application de Poincaré ϕ_T . On peut par exemple visualiser la solution tous les n.T (avec $n > 1$) et dans ce cas, l'application n'est plus une application de premier retour.

2.1.2 LES COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

2.1.2.1 LES POINTS FIXES

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (2.1) ou (2.2), un état d'équilibre est caractérisé par la relation suivante :

$$\underline{F}(\underline{X}_e) = 0 \quad (2.6)$$

Toute solution \underline{X}_e vérifiant cette relation est appelée position d'équilibre, point singulier, point fixe ou encore solution stationnaire. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes. Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés ci-après (Figure 2.2). L'étude de stabilité sera étudiée plus en détail au 2.1.3.2.

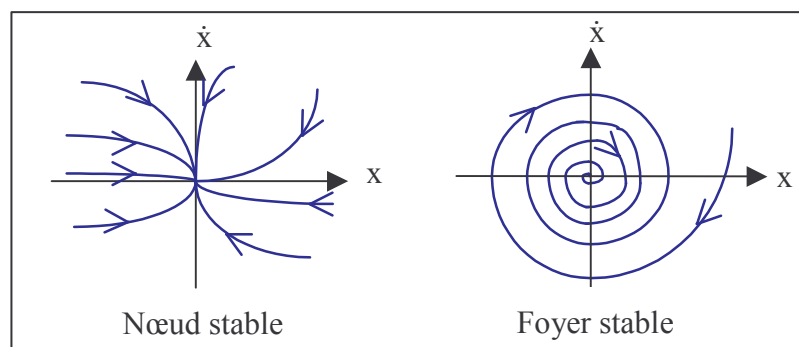


Figure 2.2 : Points fixes attracteurs

2.1.2.2 LES CYCLES LIMITES : SOLUTIONS PERIODIQUES

Soit un système autonome ou non, caractérisé par l'équation d'état (2.1) ou (2.2), une solution périodique $\underline{X}(t)$ est une solution telle qu'il existe un entier T pour lequel :

$$\text{Pour tout } t, \quad \underline{X}(t + T) = \underline{X}(t) \quad \text{et} \quad \underline{X}(t + \tilde{T}) \neq \underline{X}(t) \quad \text{pour } 0 < \tilde{T} < T \quad (2.7)$$

T est alors appelé la période de la solution. La représentation d'une telle solution dans le plan de phase nous donne une trajectoire fermée appelée cycle limite et telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche d'elle, ne soit également fermée.

Le cycle limite noté C_L est stable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de C_L , l'approche pour $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire, s'enroule elle-même sur le cycle limite C_L (cas (a)). Le cycle limite noté C_L est instable si toute trajectoire commençant suffisamment proche de C_L , l'approche pour $t \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire, se déroule à partir de C_L (cas (b)). Finalement, si les trajectoires approchent C_L d'un côté et de l'autre s'en éloignent, on dira que C_L est semi stable (en pratique instable). Ces trois cas (a), (b) et (c) sont représentés ci-dessous (Figure 2.3).

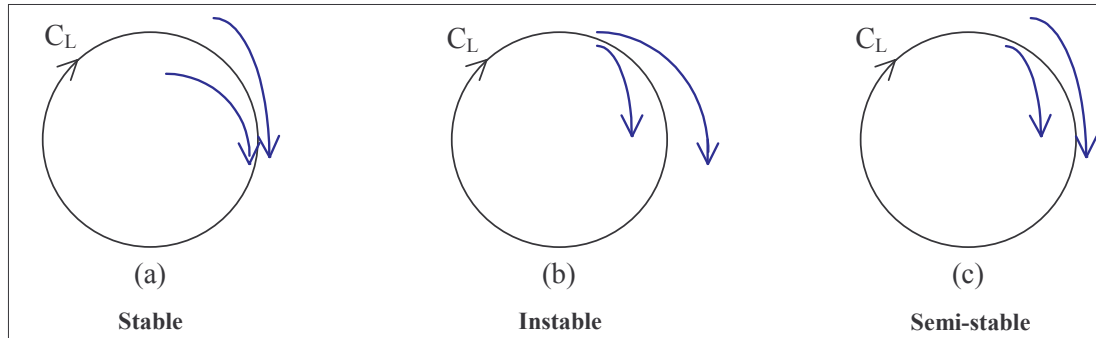


Figure 2.3 : Cycles limites

Un cycle limite stable est aussi ce qu'on appelle un **attracteur périodique**, ce qui se comprend aisément d'après 2.1.1.2. Par exemple, pour un système masse-ressort forcé, avec amortissement, le cycle limite correspond à l'état stationnaire (périodique) stable imposé par l'excitation après un régime transitoire dépendant des conditions initiales.

Plus généralement, les cycles limites représentent les états stationnaires d'oscillations. Les plus importantes applications de la théorie des cycles limites sont en relation avec :

- les « oscillations auto-entretenues » (pendule, horloge...);
- les oscillations libres d'un système conservatif (masse-ressort sans amortissement);
- le régime forcé (oscillations forcées);
- la bifurcation de Hopf (cf. 2.1.4.1).

Les trois premiers cas sont des situations bien connues que l'on rencontre fréquemment pour des systèmes linéaires. En revanche, la bifurcation de Hopf est un phénomène particulier qu'on ne peut rencontrer qu'en présence de non-linéarités. C'est pourquoi, nous dédions, plus en avant, une partie pour cette bifurcation.

2.1.2.3 LES SOLUTIONS QUASI-PÉRIODIQUES

Un comportement quasi-périodique peut être vu comme la somme d'un nombre fini de termes périodiques dont le rapport des périodes deux à deux n'est pas rationnel. Il existe des systèmes dont la solution orbitale en régime permanent (dans le plan de phase) oscille entre deux cycles limites relativement proches sans jamais passer deux fois de suite exactement sur la même trajectoire : on parle alors d'attracteur quasi-périodique.

Les systèmes quasi-périodiques les plus simples sont basés sur deux fréquences incommensurables ω_{q1} et ω_{q2} (on dit que le degré de quasi-périodicité est égal à 2). Le mouvement dans l'espace des phases s'inscrit alors sur un tore, une fréquence correspondant au mouvement selon l'axe du tore et l'autre fréquence correspondant au mouvement autour de l'axe du tore. La non-commensurabilité des fréquences d'un signal quasi-périodique implique que la trajectoire remplit complètement la surface du tore. Si le rapport ω_{q1}/ω_{q2} devient rationnel, on dit qu'on a accrochage des fréquences et on obtient un signal périodique (cycle limite) inscrit sur le tore.

Pour étudier les attracteurs quasi-périodiques, on a souvent recours aux sections de Poincaré pour s'assurer de la nature des solutions de manière à ne pas les confondre avec des attracteurs étranges que nous allons aborder maintenant.

2.1.2.4 LES SOLUTIONS CHAOTIQUES

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des solutions chaotiques. Un mouvement chaotique est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet, deux solutions chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écartier l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux solutions initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov (cf. 2.1.3.4) afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni un cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique autosimilaire avec une dimension fractale non entière (Botet [BOT01]). De ce fait, on ne peut pas réduire un mouvement chaotique à un point fixe ou un cycle limite comme pour les autres comportements asymptotiques. Néanmoins, les solutions chaotiques présentent des propriétés de périodicité dans l'espace non pas euclidien mais celui d'Hausdorff (Lu [LU00]).

2.1.2.5 RECAPITULATIF DES ATTRACTEURS

Dans la figure ci-dessous (Figure 2.4), on récapitule l'ensemble des attracteurs dont nous venons de parler, en indiquant leur nom, leur allure dans le plan de phase, la particularité obtenue par section de Poincaré, et en mentionnant un exemple d'application connu.

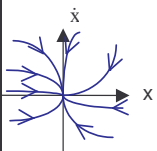
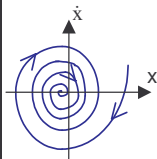
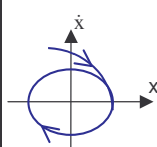
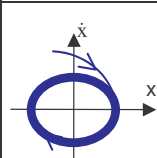


	Attracteur	Plan de phase	Remarques et / ou Section de Poincaré Σ	Exemple (si possible)
Systèmes non périodiques	Nœud (stable)		C'est un attracteur point. On le rencontre en statique. La section de Poincaré n'a donc pas vraiment d'intérêt ici pour nous.	(Nous ne citerons pas d'exemple ici.)
Systèmes pseudo-périodiques	Foyer (stable)		Attracteur point. La solution est dite pseudo-périodique. La section de Poincaré $\Sigma = \{ (x, t) / t = 0 [T] \}$ donne un ensemble de points qui convergent vers le point fixe (foyer).	Oscillateur linéaire amorti en régime libre.
Systèmes périodiques	Cycle limite (stable)		\times P La section de Poincaré $\Sigma = \{ (x, t) / t = 0 [T] \}$ donne un point P.	Oscillateur linéaire amorti en régime forcé (de période T).
Systèmes quasi-périodiques	Attracteur quasi-périodique		 La section de Poincaré $\Sigma = \{ (x, t) / t = 0 [T] \}$ est une courbe fermée cyclique	Oscillateur linéaire paramétrique
Systèmes chaotiques	Attracteur étrange	Pas d'attracteur « apparent », on peut avoir toutes sortes de trajectoires complexes.		Oscillateur non linéaire dans une configuration particulière

Figure 2.4 : Récapitulatif des attracteurs

Il est à noter que pour une configuration paramétrique donnée, un système dynamique non linéaire ne possède pas nécessairement une et une seule réponse asymptotique. Selon les cas, il peut présenter un seul, un nombre fini, ou encore une infinité d'attracteurs. La coexistence d'attracteurs est ce qui justifie le calcul des bassins d'attraction. En effet, selon la valeur des conditions initiales, le système pourra présenter un comportement dynamique qui sera attiré vers un attracteur différent.

En revanche, il est important de noter que dans les systèmes dynamiques non linéaires, tous les comportements stationnaires possibles ne sont pas forcément des attracteurs. Les frontières des bassins d'attraction sont généralement constituées de comportements stationnaires instables ou semi-stable.

C'est pourquoi, il est important de rechercher quelle est la stabilité des solutions stationnaires obtenues (points fixes et cycles limites) lors de toute étude dynamique ([BOL64], [NGU00]).

2.1.3 STABILITE

2.1.3.1 QUELQUES DEFINITIONS

Nous allons indiquer maintenant quels sont les différents sens possibles que l'on peut donner quant à la stabilité d'une solution.

i) Stabilité au sens de Lagrange

La solution $\underline{X}(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est bornée :

$$\exists L_s > 0 \text{ tel que } \forall t, \quad \|\underline{X}(t)\| \leq L_s$$

ii) Stabilité au sens de Poincaré

La solution $\underline{X}(t)$ de condition initiale \underline{X}_0 à $t = t_0$ est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flot initié avec $\underline{X}_0 + \delta \underline{X}_0$ à $t = t_0$ reste dans un tube de rayon ε_s autour de la trajectoire de $\underline{X}(t)$.

iii) Stabilité au sens de Lyapunov

La solution $\underline{X}(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon_s > 0$, il existe $\delta(\varepsilon_s) > 0$ tel que toute solution $\underline{Y}(t)$ vérifiant $\|\underline{Y}(t_0) - \underline{X}(t_0)\| < \delta$ implique que $\forall t \geq t_0, \|\underline{Y}(t) - \underline{X}(t)\| < \varepsilon_s$.

iv) Stabilité asymptotique

La solution $\underline{X}(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si elle est stable au sens de Lyapunov et si de plus on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\underline{Y}(t) - \underline{X}(t)\| = 0$.

La différence avec iii) réside dans le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point fixe stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors que ces dernières s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point fixe asymptotiquement stable.

Ce sont ces deux définitions iii) et iv) qui seront utilisées pour l'étude de stabilité.

v) Stabilité structurelle

On parle de stabilité structurelle si une petite perturbation des équations du système implique une topologie du flot équivalente. Un système structurellement stable est également dit robuste.

2.1.3.2 STABILITE DES POINTS FIXES

On considère le système autonome non linéaire, caractérisé par l'équation d'état (2.1). Les conclusions quant à la stabilité des points fixes sont identiques dans le cas d'un système non autonome d'équation (2.2).

i) Linéarisation du système de départ

Soit un point singulier \underline{X}_e du système non linéaire vérifiant la relation (2.6). On considère une perturbation \underline{Y} telle que :

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_e(t) + \underline{Y}(t) \quad (2.8)$$

En substituant (2.8) dans (2.1), on obtient :

$$\dot{\underline{Y}} = \underline{F}(\underline{X}_e + \underline{Y}) \quad (2.9)$$

La position d'équilibre $\underline{X} = \underline{X}_e$ est maintenant devenue $\underline{Y} = 0$, et en supposant la fonction \underline{F} est de classe C^1 , son développement en série de Taylor en \underline{X}_e à l'ordre 1 (en ne gardant que les termes linéaires) nous donne :

$$\dot{\underline{Y}} = \underline{F}(\underline{X}_e) + \underline{D}_X \underline{F}(\underline{X}_e) \underline{Y} + o(\|\underline{Y}^2\|) \quad (2.10)$$

soit

$$\dot{\underline{Y}} \approx \underline{D}_X \underline{F}(\underline{X}_e) \underline{Y} = \underline{J}_F \underline{Y} \quad (2.11)$$

\underline{J}_F est la matrice jacobienne du système. Soit la fonction \underline{F} se décomposant en (F_1, F_2, \dots, F_n) dans la base (X_1, X_2, \dots, X_n) , la matrice des premières dérivées partielles ou matrice jacobienne s'écrit :

$$\underline{J}_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Le problème (2.11) correspond au système (2.1) linéarisé au niveau du point fixe $\underline{X} = \underline{X}_e$. La solution obtenue avec \underline{Y}_0 comme vecteur des conditions initiales à $t = t_0$, s'écrit donc :

$$\underline{Y}(t) = e^{(t-t_0)\underline{J}_F} \underline{Y}_0 \quad (2.13)$$

Le système ainsi linéarisé, nous montre l'importance de \underline{J}_F pour la caractérisation des points d'équilibre en terme de stabilité locale. Comme nous le verrons plus tard, c'est notamment l'étude des valeurs propres de \underline{J}_F , notées λ_i ($i = 1, \dots, n$), qui nous permettra de conclure dans certains cas sur la stabilité du système au voisinage du point fixe. Les valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, n$) de \underline{J}_F sont également dites exposants caractéristiques du point fixe $\underline{Y} = 0$.

Pour le système linéarisé, on sait qu'il existe en effet une matrice $\underline{\underline{P}}$ inversible, telle qu'on ait :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{J}}_F \underline{\underline{P}} \quad (2.14)$$

où $\underline{\underline{P}}$ est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i ,

$$\underline{\underline{\Delta}} \text{ est : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ diagonale si toutes les valeurs propres } \lambda_i \text{ sont distinctes avec :} \\ \quad \underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{Diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ \bullet \text{ une matrice de Jordan dans le cas contraire, avec :} \\ \quad \underline{\underline{\Delta}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Delta}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\Delta}}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \underline{\underline{\Delta}}_k \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \underline{\underline{\Delta}}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Si tous les λ_i sont distincts 2 à 2, la solution $\underline{\underline{Y}}(t)$ est une combinaison linéaire de $e^{(t-t_0)\lambda_i}$. Dans le cas où au contraire, on utilise une décomposition sous la forme de Jordan où $\underline{\underline{\Delta}}_i$ est de dimension $k_i \times k_i$ avec k_i la multiplicité de la valeur propre associée λ_i . La solution $\underline{\underline{Y}}(t)$ au voisinage du point d'équilibre est alors une combinaison linéaire des $t^{l_i} e^{(t-t_0)\lambda_i}$ où $1 \leq i \leq n$ avec $0 \leq l_i \leq k_i - 1$.

Quoi qu'il en soit, on obtient le résultat bien connu qui est que pour que le système linéaire (2.11), si la matrice jacobienne $\underline{\underline{J}}_F$ au niveau du point singulier est à valeurs propres à partie réelle strictement négative, alors la position d'équilibre $\underline{\underline{Y}} = 0$ est asymptotiquement stable. Autrement dit :

$$\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{Y}} = 0 \text{ est un point fixe de } \dot{\underline{\underline{Y}}} = \underline{\underline{J}}_F \underline{\underline{Y}} \\ \text{asymptotiquement stable (au sens de Lyapunov)} \end{array} \right.$$

Il s'agit alors d'un attracteur (point attractif dit également puits).

En revanche, si l'une des valeurs propres λ_i (exposant caractéristique) est à partie réelle strictement positive, alors le point fixe n'est pas stable au sens de Lyapunov : il est dit instable. Autrement dit :

$$\exists i, \text{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Y}} = 0 \text{ est un point fixe de } \dot{\underline{\underline{Y}}} = \underline{\underline{J}}_F \underline{\underline{Y}} \text{ instable}$$

Le cas où tous les exposants caractéristiques du point fixe sont à partie réelle strictement positive correspond au cas particulier des répulseurs (point fixe répulsif dit encore source). Soit :

$$\forall i, \text{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Y}} = 0 \text{ est un point fixe de } \dot{\underline{\underline{Y}}} = \underline{\underline{J}}_F \underline{\underline{Y}} \text{ asymptotiquement instable}$$

Enfin, un point fixe est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, n$) n'ont pas de partie réelle nulle. En revanche, si l'une des valeurs propres a une partie réelle nulle, le point fixe est dit non hyperbolique. Un point fixe hyperbolique est soit asymptotiquement stable (attracteur), soit instable. Dans le cas où il est instable, c'est soit un répulseur, soit un point-selle. Un point fixe non hyperbolique peut quant à lui être stable, instable ou bien être un centre ($\forall i, \text{Re}(\lambda_i) = 0$). Tous ces cas sont regroupés dans la figure qui suit (Figure 2.5).

ii) Types d'états d'équilibre du système linéarisé

D'après ce qui vient d'être dit, nous allons maintenant définir les différents types de points d'équilibre en terme de stabilité que l'on peut obtenir pour le système linéarisé (2.11) au point d'équilibre $\underline{Y} = 0$, selon la nature des valeurs propres λ_i ($i = 1, \dots, n$) de \underline{J}_F . Nous verrons ensuite, dans quels cas on peut conclure quant à la stabilité effective du système non linéaire de départ (2.1) au point d'équilibre $\underline{X} = \underline{X}_e$.

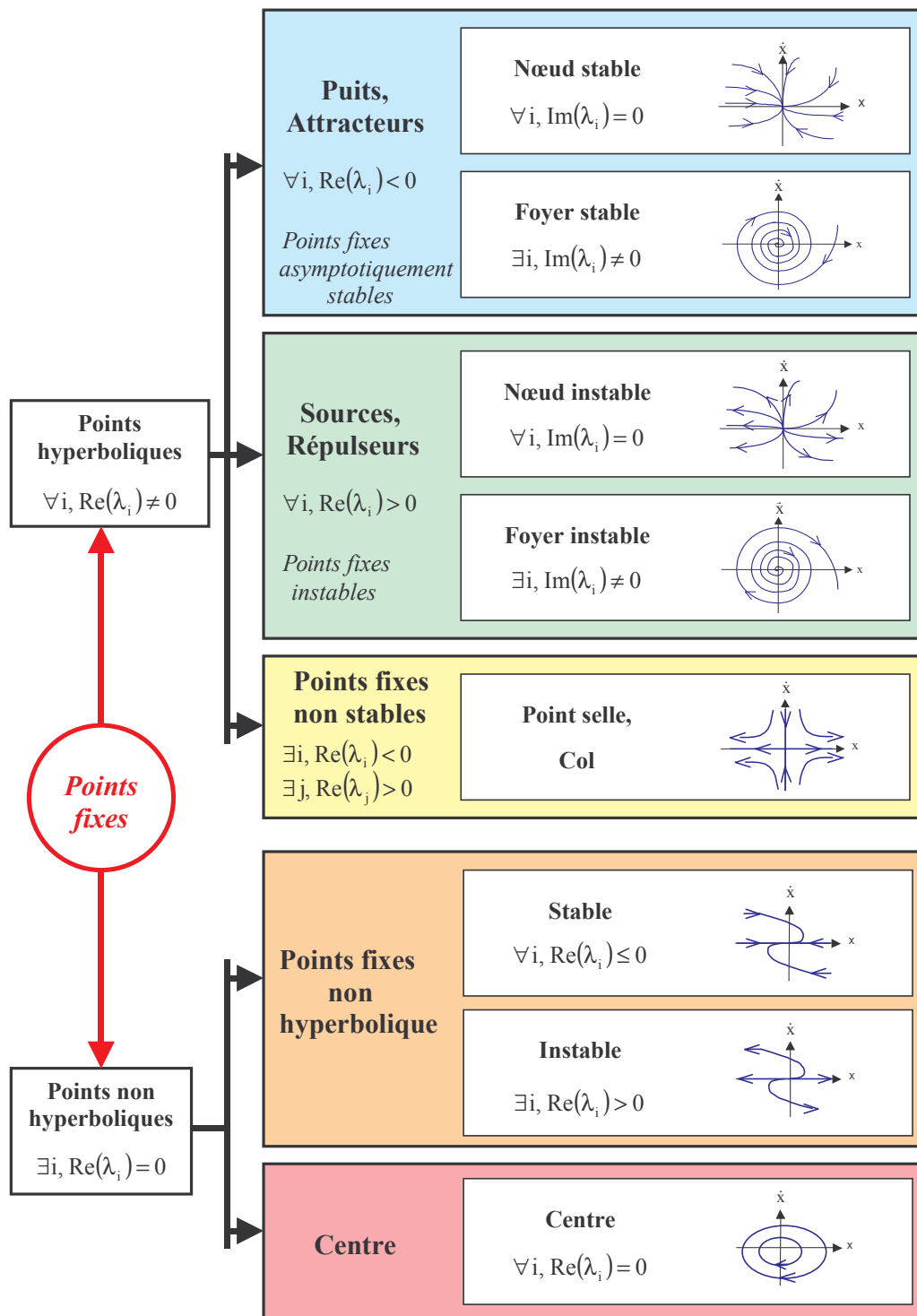


Figure 2.5 : Les différents types d'états d'équilibre

iii) Les sous-espaces propres et les variétés

Nous allons maintenant nous intéresser à la stabilité du système non linéaire de départ (2.1). Pour cela nous devons introduire les notions de sous-espaces propres et de variétés.

Pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq n$, à chaque valeur propre λ_i de \underline{J}_F , on associe un vecteur propre \underline{p}_i . On rappelle que la matrice \underline{P} évoquée précédemment n'est autre que la matrice des vecteurs propres \underline{p}_i telle que :

$$\underline{P} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \vdots & \underline{p}_n \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \underline{Y}(t) = \underline{P} \underline{\Delta} \underline{P}^{-1} \underline{Y}_0 \quad (2.15)$$

La famille $\{\underline{p}_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) est une base de l'espace des phases. Ce dernier peut être décrit par la somme de trois sous-espaces E^s , E^u et E^c associés au système linéarisé (2.11) et tels que :

$$\begin{aligned} E^s &= \left\{ \left\{ \underline{p}_i \right\} \text{tel que } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \right\} \\ E^u &= \left\{ \left\{ \underline{p}_i \right\} \text{tel que } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \right\} \\ E^c &= \left\{ \left\{ \underline{p}_i \right\} \text{tel que } \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les sous-espaces E^s , E^u et E^c sont respectivement stable, instable et central. Ces sous-espaces sont invariants par \underline{J}_F (cf. 2.1.1.2i)). Toute solution du système linéaire (2.11) initiée dans E^s (resp. E^u) s'approche asymptotiquement du point fixe $\underline{Y} = 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$) et toute solution initiée dans E^c reste dans E^c . On rappelle que si une solution s'approche d'un point fixe quand $t \rightarrow -\infty$, cela signifie qu'elle s'éloigne de ce point d'équilibre quand t croît.

Ces sous-espaces sont définis à partir des vecteurs propres \underline{p}_i , associés aux valeurs propres λ_i de \underline{J}_F , c'est-à-dire qu'ils sont définis pour le système linéarisé (2.11). On les appelle sous-espaces propres. Si le flot linéaire est hyperbolique, E^c est vide. Dans ce cas, \mathbb{R}^n peut être décomposé de manière unique en deux sous-espaces invariants par \underline{J}_F tels que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Le flot induit par le sous-espace propre E^s (respectivement E^u) correspond à une contraction (respectivement une dilatation).

Si on s'intéresse maintenant au système réel non linéaire de départ (2.1), on définit la variété stable W^s (resp. instable W^u) du point fixe $\underline{X} = \underline{X}_e$, l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les trajectoires s'approchent asymptotiquement de ce point quand $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). On définit également la variété centrale W^c comme étant l'ensemble des conditions initiales telles que les trajectoires ne s'approchent ni ne s'éloignent asymptotiquement de ce point fixe \underline{x}_e . Autrement dit, on définit :

$$\begin{aligned} W^s &= \left\{ \underline{X}_0 \in U \text{ tel que } \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) \rightarrow \underline{X}_e \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ et } \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) \in U, \forall t \geq 0 \right\} \\ W^u &= \left\{ \underline{X}_0 \in U \text{ tel que } \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) \rightarrow \underline{X}_e \text{ quand } t \rightarrow -\infty \text{ et } \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) \in U, \forall t \leq 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A partir de l'étude de stabilité du système linéarisé (2.11), on pourra réaliser l'étude de la solution de l'équation non linéaire (2.1) à l'aide du théorème de Hartman-Grobman écrit ci-dessous.

Théorème de Hartman-Grobman (Guckenheimer [GUC97]) :

Soient \underline{X}_e un point stationnaire de (2.1) et $\underline{D}_X F(\underline{X}_e)$ la matrice jacobienne de F en \underline{X}_e , si le système différentiel est hyperbolique en \underline{X}_e (i.e. $\underline{D}_X F(\underline{X}_e)$ n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle), il existe un homéomorphisme \underline{h} , défini dans un voisinage U de \underline{X}_e , tel que $\underline{h} \circ \underline{\phi}$, où $\underline{\phi}$ est le flot non linéaire, prenne les mêmes trajectoires que celles du flot linéaire $e^{t \underline{D}_X F(\underline{X}_e)}$. De plus, \underline{h} peut être choisi de sorte qu'il préserve le sens et la paramétrisation en temps des trajectoires.

On en déduit que les variétés stables W^s et instables W^u sont tangents en \underline{X}_e à E^s et E^u (Figure 2.6), sous-espaces propres de $\underline{D}_X F(\underline{X}_e)$, et on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème de la variété stable pour un point fixe hyperbolique :

On suppose \underline{X}_e un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle (2.1). Alors il existe des variétés locales stables et instables, de même dimension que celles définies par les sous-espaces propres du système linéarisé et tangentes à ces derniers en \underline{X}_e . Elles ont en outre la même régularité que la fonction \underline{F} .

Par conséquent, les variétés stable W^s et instable W^u du point fixe \underline{X}_e possèdent localement les mêmes propriétés que celles des sous-espaces stable E^s et instable E^u du point fixe $\underline{Y} = 0$ correspondant au système linéarisé. Ceci est un résultat important, puisque l'étude du système linéarisé permet de conclure quant à la stabilité des états d'équilibre du système non linéaire au voisinage du point fixe (dans le cas d'un point fixe hyperbolique uniquement). En résumé, si le point fixe $\underline{Y} = 0$ du système différentiel linéarisé est asymptotiquement stable (resp. asymptotiquement instable), alors le point fixe $\underline{X} = \underline{X}_e$ du système différentiel non linéaire de départ est stable (resp. instable).

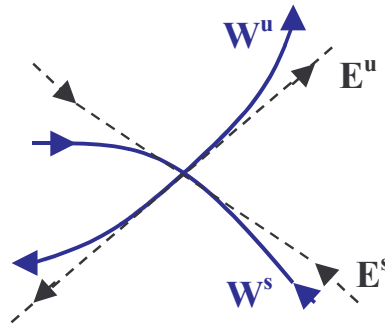


Figure 2.6 : Variétés et sous-espaces propres

Enfin, le cas de la stabilité des points fixes non hyperboliques ne peut pas être traité par la linéarisation des équations (théorème de Shoshitaishvili [NAY85]) mais en gardant les termes non linéaires du système, ce dont nous ne parlerons pas ici.

2.1.3.3 STABILITE DES CYCLES LIMITES

i) Linéarisation du système continu

Comme nous l'avons vu précédemment, la linéarisation d'un système permet de comprendre son comportement de manière qualitative vis-à-vis des points d'équilibres (nature des points fixes, stabilité, ...). Nous allons voir qu'il en est de même pour le comportement périodique d'un système.

Soit le système autonome défini en (2.1), et soit une solution $\underline{X}_e(t)$ de période T (vérifiant (2.7)). Si on considère une perturbation \underline{Y} ajoutée à \underline{X}_e telle que :

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_e(t) + \underline{Y}(t) \tag{2.18}$$

En substituant (2.18) dans (2.1), on obtient :

$$\dot{\underline{X}}_e + \dot{\underline{Y}} = \underline{F}(\underline{X}_e + \underline{Y}) \tag{2.19}$$

En supposant que la fonction \underline{F} est de classe C^1 , son développement en série de Taylor en \underline{X}_e à l'ordre 1 (en ne gardant que les termes linéaires) nous donne :

$$\dot{\underline{X}}_e + \dot{\underline{Y}} = \underline{F}(\underline{X}_e) + \underline{D}_{\underline{X}}\underline{F}(\underline{X}_e)\underline{Y} + o\left(\|\underline{Y}\|^2\right) \tag{2.20}$$

\underline{X}_e vérifiant (2.1), on a :

$$\underline{\dot{Y}} = \underline{\underline{D_x F}}(\underline{X}_e) \underline{Y} + o(\| \underline{Y}^2 \|) \quad (2.21)$$

Soit

$$\underline{\dot{Y}} \approx \underline{\underline{D_x F}}(\underline{X}_e) \underline{Y} = \underline{\underline{J_F}} \underline{Y} \quad (2.22)$$

$\underline{\underline{J_F}}$ est la matrice des dérivées (partielles) premières de \underline{F} . Du fait de la linéarisation du système, $\underline{\underline{J_F}}$ est une fonction qui dépend des degrés de liberté du système X_1, X_2, \dots, X_n et par conséquent du temps t (mais de manière implicite pour un système autonome et de manière explicite pour un système non autonome). On en déduit que $\underline{\underline{J_F}}$ est périodique avec une période T (celle de \underline{X}_e), même si celle-ci peut ne pas être sa période minimale ($\underline{\underline{J_F}}$ peut en effet être de période $T/2$ par exemple). Pour cette raison on notera $\underline{\underline{J_F}} = \underline{\underline{J_F}}(t)$.

ii) Théorie de Floquet

Le système différentiel linéaire (2.22) de taille n possède n solutions linéairement indépendantes, notées \underline{Z}_i avec $i = 1, 2, \dots, n$. Ces solutions peuvent être regroupées dans une matrice de taille $n \times n$ appelée matrice des solutions fondamentales :

$$\underline{\underline{Z}}(t) = [\underline{Z}_1(t) \quad \underline{Z}_2(t) \quad \dots \quad \underline{Z}_n(t)] \quad (2.23)$$

Cette matrice $\underline{\underline{Z}}$ vérifie l'équation :

$$\underline{\underline{\dot{Z}}}(t) = \underline{\underline{J_F}}(t) \underline{\underline{Z}}(t) \quad (2.24)$$

D'après (2.22), chaque $\underline{Z}_i(t+T)$ est une combinaison linéaire de $\underline{Z}_1(t), \underline{Z}_2(t), \dots, \underline{Z}_n(t)$, ce qui se traduit par :

$$\forall t, \quad \underline{\underline{Z}}(t+T) = \underline{\underline{Z}}(t) \underline{\underline{\Phi}} \quad (2.25)$$

En particulier pour $t = 0$, en posant $\underline{\underline{Z}}(0) = \underline{I}$, on obtient $\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{Z}}(T)$. Pour un système autonome, la matrice $\underline{\underline{\Phi}}$ est constante de taille $n \times n$ et appelée matrice monodrome. Pour un système non autonome, elle dépend en revanche de l'instant initial t_0 choisi pour le cycle limite, mais quel que soit l'instant t_0 , $\underline{\underline{\Phi}}$ présente les mêmes valeurs propres. Nous verrons ce point plus en détail plus tard.

De manière pratique, la matrice monodrome s'obtient à partir du système non linéaire (2.1) de départ. Soit $\underline{X}(t) = {}^t[X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]$ solution de (2.1) avec comme conditions initiales le vecteur $\underline{X}_0 = \underline{X}(t_0) = {}^t[X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)]$ à $t = t_0$, alors on a :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1(t_0)}(t_0+T) & \frac{\partial X_1}{\partial X_2(t_0)}(t_0+T) & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial X_n(t_0)}(t_0+T) \\ \frac{\partial X_2}{\partial X_1(t_0)}(t_0+T) & \frac{\partial X_2}{\partial X_2(t_0)}(t_0+T) & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial X_n(t_0)}(t_0+T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial X_1(t_0)}(t_0+T) & \frac{\partial X_n}{\partial X_2(t_0)}(t_0+T) & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial X_n(t_0)}(t_0+T) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

On notera que $\underline{\underline{\Phi}}$ n'est autre que la matrice jacobienne du flot $\underline{\phi}_t$ calculée en $t_0 + T$, où :

$$\underline{X}_0 \rightarrow \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) = \underline{X}(t) \quad (2.27)$$

N'oublions pas qu'un cycle limite n'est autre qu'un point fixe de l'application de Poincaré itérée dans l'espace des phases. Par conséquent, l'étude de stabilité des cycles limites est déterminée en utilisant le théorème de Hartman-Grobman (2.1.3.2) équivalent pour la stabilité des points fixes d'une application.

Soit λ_{Φ_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) les valeurs propres de la matrice monodrome $\underline{\Phi}$, chaque λ_{Φ_i} donne une mesure de la divergence (ou convergence) locale orbitale selon une direction particulière sur une période du cycle limite. Ces valeurs propres λ_{Φ_i} , appelées multiplicateurs de Floquet, sont à valeurs complexes. De la même façon que dans le cas de l'étude de stabilité des points fixes, selon les valeurs que prennent les multiplicateurs de Floquet, on pourra dans certains cas conclure quant à la stabilité du système non linéaire étudié. On distinguera néanmoins ici le cas où le système étudié est autonome et celui où le système est non autonome.

iii) Cas d'un système non linéaire autonome

Pour un système autonome, l'un des multiplicateurs de Floquet associé à la solution périodique (que nous noterons λ_{Φ_j}) est toujours réelle égale à 1. Ce résultat, dont nous ne ferons pas la démonstration ici, est l'un des points essentiels qui distingue les systèmes autonomes des systèmes non autonomes. Si un seul des λ_{Φ_i} est de module égal à 1 (c'est forcément $\lambda_{\Phi_j} = 1$), alors la solution périodique est dite hyperbolique. Dans le cas contraire, c'est-à-dire que plusieurs multiplicateurs de Floquet sont sur le cercle unité, alors la solution périodique est non hyperbolique.

Pour une solution périodique hyperbolique on a :

- Si $\forall i \neq j, |\lambda_{\Phi_i}| < 1$, la solution est asymptotiquement stable (attracteur périodique)
- Si $\exists i \neq j, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est instable
- Si $\forall i \neq j, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est asymptotiquement instable (répulsor périodique)

Pour une solution périodique non hyperbolique on a :

- Si $\exists i, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est instable
- Si $\forall i, |\lambda_{\Phi_i}| \leq 1$, une analyse non linéaire est nécessaire pour étudier la stabilité. On citera par exemple la méthode de réduction sur la variété centrale, la méthode de réduction sous forme normale, la méthode des échelles multiples, la méthode de Lyapunov-Schmidt, ... Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à Guckenheimer ([GUC97]) et Nayfeh ([NAY79], [NAY85]).

iv) Cas d'un système non linéaire non autonome

Dans ce cas, la matrice $\underline{\Phi}$ s'obtient de la même manière mais le raisonnement change légèrement car on n'a pas forcément $\lambda_{\Phi_j} = 1$ comme c'était le cas pour les systèmes autonomes. Si aucun multiplicateur de Floquet n'est sur le cercle unité, alors la solution est dite hyperbolique, et dans le cas contraire non hyperbolique.

Pour une solution périodique hyperbolique on a :

- Si $\forall i, |\lambda_{\Phi_i}| < 1$, la solution est asymptotiquement stable (attracteur périodique)
- Si $\exists i, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est instable
- Si $\forall i, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est asymptotiquement instable (répulsor périodique)

Pour une solution périodique non hyperbolique on a :

- Si $\exists i, |\lambda_{\Phi_i}| > 1$, la solution est instable
- Si $\forall i, |\lambda_{\Phi_i}| \leq 1$, une analyse non linéaire est nécessaire pour étudier la stabilité comme au iii).

2.1.3.4 EXPOSANTS DE LYAPUNOV

C'est une généralisation de l'analyse de stabilité autour d'un point fixe ou d'une orbite (cycle limite). L'extension au cas chaotique des notions d'instabilité et de taux de divergence conduit à la définition des exposants de Lyapunov. On étudie la sensibilité asymptotique d'une trajectoire solution de (2.1), (2.2) ou (2.3) issue d'une condition initiale \underline{X}_0 . Nous ne considérerons ici que les systèmes discrets définis par (2.3). Soit les petites variations $\underline{\delta X}_0$ de la condition initiale \underline{X}_0 telle que :

$$\tilde{\underline{X}}_0 = \underline{X}_0 + \underline{\delta X}_0 \quad (2.28)$$

i) Cas d'une application unidimensionnelle

Dans le cas discret, soit l'équation (2.3), $\dot{X}_{k+1} = F(X_k)$, on souhaite voir comment se comportent les trajectoires issues de \tilde{X}_0 et X_0 , c'est-à-dire, comment varie leur écart. δX_0 étant supposé infinitésimal, il vient :

$$\tilde{X}_1 = X_1 + \delta X_1 = F(X_0 + \delta X_0) = F(X_0) + F'(X_0) \delta X_0 \quad (2.29)$$

où $F'(X_0) = \frac{dF}{dX}(X_0)$ désigne la dérivée de F par rapport à X en X_0 .

La distance entre les deux trajectoires après une itération est donnée par :

$$|\delta X_1| = |F'(X_0) \delta X_0| = |F'(X_0)| |\delta X_0|$$

Et après deux itérations par : $|\delta X_2| = |F'(X_1)| |\delta X_1| = |F'(X_1)| |F'(X_0)| |\delta X_0|$

En utilisant la règle des itérations en chaîne, après k itérations, nous obtenons :

$$|\delta X_k| = \left(\prod_{j=0}^{k-1} |F'(X_j)| \right) |\delta X_0| \quad (2.30)$$

Au voisinage d'un point fixe X_e , par analogie avec la relation (2.13) dans le cas continu, nous aurions obtenu, au bout de k itérations, la relation $|\delta X_k| = \exp(k \mu_e) |\delta X_0|$ avec $\mu_e = F'(X_e)$, la stabilité se décidant d'après le signe de μ_e (cf. 2.1.3.2). Pour une trajectoire arbitraire ici, nous pouvons chercher de manière similaire, un taux μ tel qu'au bout de k itérations on ait :

$$|\delta X_k| = \exp(k \mu) |\delta X_0| \quad (2.31)$$

Ce qui revient à :

$$\ln \left(\frac{|\delta X_k|}{|\delta X_0|} \right) = \ln \left(\prod_{j=0}^{k-1} |F'(X_j)| \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \ln (|F'(X_j)|) = k \mu$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient finalement :

$$\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln (|F'(X_j)|) \quad (2.32)$$

Il existe une formulation équivalente dans le cas des systèmes continu (2.1) ou (2.2).

μ est appelé exposant de Lyapunov et se présente comme la moyenne temporelle du taux local de divergence $\ln(|F'(X)|)$ prise le long de la trajectoire de référence. Nous admettrons que la limite existe et qu'elle est indépendante de la trajectoire choisie. Si ce nombre est positif, il y a élongation et sensibilité aux conditions initiales. Si par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

ii) Cas d'une application multi-dimensionnelle

Considérons maintenant l'application \underline{F} définie par l'équation (2.3), $\underline{X}_{k+1} = \underline{F}(\underline{X}_k)$.

Le vecteur des n distances composante par composante entre les deux trajectoires après une itération est donné par :

$$\delta \underline{X}_1 = \underline{J}_0 \delta \underline{X}_0 \quad (2.33)$$

où \underline{J}_0 désigne la matrice jacobienne de \underline{F} , évaluée en \underline{X}_0 . Après k itérations, on obtient :

$$\delta \underline{X}_k = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \underline{J}_j \right) \delta \underline{X}_0 \quad (2.34)$$

Nous voyons se former le produit chronologique des matrices jacobiennes $\prod_{j=0}^{k-1} \underline{J}_j = \underline{J}_{k-1} \cdots \underline{J}_1 \underline{J}_0$.

Notons $\Lambda_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$) les valeurs propres de ce produit chronologique à k itérations. On définit alors les n exposants de Lyapunov μ_i ($i = 1, \dots, n$) de la manière suivante :

$$\mu_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \left| \Lambda_i^{(k)} \right| \quad (2.35)$$

Là encore, il existe une définition équivalente pour des systèmes continus (cf. Nayfeh [NAY85]). Les μ_i caractérisent selon qu'ils sont positifs ou négatifs, l'expansion ou la contraction de l'écoulement selon les directions propres. Leurs signes caractérisent la signature de Lyapunov (cf. Tableau 2). Ils mesurent les taux exponentiels de divergence (ou de convergence) de trajectoires initialement proches de sorte qu'en moyenne, un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp((\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) t) = V_0 \exp(\Sigma \mu t) \quad (2.36)$$

Un système conservatif sera donc tel que $\Sigma \mu = 0$, alors que s'il est dissipatif, on a $\Sigma \mu < 0$. En outre, on ne peut trouver aucun attracteur si $\Sigma \mu > 0$. Pour un système conservatif ou dissipatif, un attracteur chaotique est dès lors défini par l'existence d'au moins un exposant de Lyapunov positif (donc a fortiori si le plus grand exposant de Lyapunov est positif). On remarque par contre, qu'on ne peut pas avoir de chaos avec moins de 2 dimensions avec un système conservatif ou dissipatif. Dans la pratique, on peut approximer le plus grand exposant de Lyapunov à temps fini (pour k fini) et regarder son signe. Il existe cependant d'autres façons de déterminer ces exposants (Sprott [SPR03]).

Régime	Stationnaire	Périodique	P-périodique ou quasi-périodique	Chaotique
Temps continu ((2.1) ou (2.2))	----- ...	0 ----- ...	0 ... 0 ----- ... (P zéros)	(Au moins 1 +) + 0 ----- ... ou ++ 0 0 ----- ...
Temps discret ((2.3))	----- ...	----- ...	0 ... 0 ----- ... (P - 1 zéros)	(Au moins 1 +) + ----- ... ou ++ 0 ----- ...

Tableau 2 : Signature de Lyapunov

2.1.4 BIFURCATIONS

Le terme « bifurcation », introduit par Poincaré, est employé pour désigner un changement qualitatif du comportement du système (tel que le nombre ou le type de solutions) au cours de l'évolution d'un ou plusieurs paramètres dont dépend le système. Par bifurcation locale, on entend une modification du comportement du système au voisinage d'un point fixe (ou d'une solution périodique) : tout autre changement qualitatif sera désigné par le terme de bifurcation globale.

Pour les problèmes de bifurcation, on considère généralement l'espace formé des variables d'état (x, y, \dots) ainsi que des paramètres de contrôle μ_i . Dans cet espace, nommé espace de contrôle d'état, le point où se produit la bifurcation est appelé point de bifurcation ou encore point critique.



Figure 2.7 : Espace de contrôle d'état

La représentation des branches de points fixes dans cet espace, afin de localiser les bifurcations, permet d'établir ce qu'on nomme un diagramme de bifurcation. Le nombre de paramètres μ_i nécessaires à l'apparition d'une bifurcation s'appelle la codimension de la bifurcation.

On peut classer les bifurcations en bifurcations continues (subtiles) ou discontinues (catastrophiques). Une bifurcation est continue si elle est réversible sous une variation inverse des paramètres de contrôle concernés. Les bifurcations discontinues sont elles-mêmes sous-divisées en bifurcations dangereuses ou explosives selon que la réponse du système saute brusquement vers un autre attracteur non chaotique ou bien explose littéralement (vers le chaos par exemple).

2.1.4.1 BIFURCATIONS LOCALES D'UN POINT FIXE

i) Généralités

On prend à nouveau en compte le système autonome (3.1.1) où la matrice jacobienne \underline{J}_F et ses valeurs propres associées λ_i dépendent du vecteur μ regroupant l'ensemble des paramètres de contrôle. Alors qu'on fait évoluer lentement un ou plusieurs de ces paramètres, on suppose qu'un point fixe du système (point singulier) devient non hyperbolique à un certain point de l'espace de contrôle d'état. Alors, si de part et d'autre de ce point on observe un changement qualitatif, c'est que ce point est un point de bifurcation.

Si on démarre avec un ensemble de paramètres tels qu'on soit en présence d'un point fixe stable, la variation incrémentale d'un ou plusieurs paramètres peut faire perdre la stabilité de ce point fixe par le biais d'une des bifurcations suivantes :

- Bifurcation nœud-col (ou pli) ;
- Bifurcation fourche (sous-critique ou sur-critique) ;
- Bifurcation transcritique ;
- Bifurcation de Hopf (sous-critique ou sur-critique).

Les trois premiers types de bifurcations correspondent à des bifurcations statiques où le point de bifurcation sépare des branches de points fixes. Les bifurcations de Hopf sont des bifurcations

dynamiques où le point critique délimite dans l'espace de contrôle d'état des branches de points fixes et un cycle limite.

ii) Bifurcations statiques

On considère les bifurcations statiques du système autonome (2.1.1) sous la variation d'un unique paramètre de contrôle : le scalaire μ . Dans l'espace de contrôle d'état $x - \mu$, on observe une bifurcation statique d'un point fixe au point $(x_c ; \mu_c)$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\underline{F}(\underline{X}_c, \mu_c) = 0$; *(le point (\underline{X}_c, μ_c) est un point fixe)*
- $\underline{D}_x F$ a une valeur propre nulle et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de (\underline{X}_c, μ_c) .
(ce point fixe est non hyperbolique)

Ces conditions sont nécessaires mais non suffisantes. Néanmoins, si on se trouve en présence d'une bifurcation statique, on distinguera entre autres la bifurcation nœud-col pour laquelle les branches de solutions se rencontrent au point de bifurcation avec la même tangente contrairement aux bifurcations fourche ou transcritique.

Il y a plusieurs choses qui distinguent la bifurcation nœud-col des autres bifurcations statiques. Soit \underline{F}_μ le vecteur de taille $(n \times 1)$ dérivée partielle d'ordre 1 de \underline{F} par rapport à μ , on définit la matrice $[\underline{D}_x F \mid \underline{F}_\mu]$ de taille $(n \times (n+1))$. La particularité est que cette matrice est de rang n à un point de bifurcation nœud-col mais de rang $(n-1)$ pour tout autre type de point de bifurcation statique.

En outre, la bifurcations transcritique et la bifurcation fourche sur-critique sont des bifurcations continues (subtiles) tandis que la bifurcation nœud-col et la bifurcation fourche sous-critique sont des bifurcations catastrophiques.

iii) Bifurcations de Hopf

On considère les bifurcations de Hopf du système autonome (2.1.1) sous la variation d'un unique paramètre de contrôle : le scalaire μ . Dans l'espace de contrôle d'état $X - \mu$, on observe une bifurcation de Hopf au point (\underline{X}_c, μ_c) , si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\underline{F}(\underline{X}_c, \mu_c) = 0$; *(le point (\underline{X}_c, μ_c) est un point fixe)*
- $\underline{D}_x F$ a une paire de valeurs propres conjuguées purement imaginaires $(\pm i\omega_h)$ et toutes les autres valeurs propres à partie réelle non nulle au niveau de (\underline{X}_c, μ_c) .
(ce point fixe est non hyperbolique)
- Pour $\mu \approx \mu_c$, soit $\tilde{\lambda} \pm i\omega$ la valeur analytique de la paire de valeurs propres conjuguées telles que pour $\mu = \mu_c$ on ait $\tilde{\lambda} = 0$ et $\omega = \omega_h$ (d'après la condition précédente), alors $(d\tilde{\lambda}/d\mu) \neq 0$ pour $\mu = \mu_c$.
(condition de franchissement)

Quand les trois conditions précédentes sont satisfaites, une solution périodique de période $2\pi/\omega_h$ est engendrée au point (\underline{X}_c, μ_c) . C'est pourquoi les bifurcations de Hopf sont classées dans les bifurcations dynamiques.

iv) Récapitulatif

La figure suivante (Figure 2.8) permet de visualiser les différentes bifurcations possibles de points fixes.

<p>Cas représenté</p> <p>$\dot{x} = \mu - x^2$</p> <p>Points fixes :</p> $\begin{cases} x = +\sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$	<p>Bifurcation nœud-col</p>	<p>Cas représenté</p> <p>$\dot{x} = \mu x - x^2$</p> <p>Points fixes :</p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = \mu \end{cases}$	<p>Bifurcation transcritique</p>
<p>Cas représenté</p> <p>$\dot{x} = \mu x - x^3$</p> <p>Points fixes :</p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$	<p>Bifurcation fourche sur-critique</p>	<p>Cas représenté</p> <p>$\dot{x} = \mu x + x^3$</p> <p>Points fixes :</p> $\begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{-\mu} \\ x = -\sqrt{-\mu} \end{cases}$	<p>Bifurcation fourche sous-critique</p>
<p>Cas représenté</p> <p>$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = \omega + \beta r^2 \end{cases}$ $(\omega > 0, \beta > 0)$ $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$</p> <p>Point fixe : $(x, y) = (0, 0)$</p> <p>Cycle limite : $r = \sqrt{\mu}$</p>	<p>Bifurcation de Hopf sur-critique</p>	<p>Cas représenté</p> <p>$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 \\ \dot{\theta} = \omega + \beta r^2 \end{cases}$ $(\omega > 0, \beta > 0)$ $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$</p> <p>Point fixe : $(x, y) = (0, 0)$</p> <p>Cycle limite : $r = \sqrt{-\mu}$</p>	<p>Bifurcation de Hopf sous-critique</p>

Figure 2.8 : Cas de bifurcations de points fixes
 (-) branches stables, (--) branches instables

2.1.4.2 BIFURCATIONS LOCALES D'UN CYCLE LIMITE

i) Généralités

On prend en compte les systèmes autonomes et les systèmes non autonomes où la matrice monodrome $\underline{J}_H = \underline{\Phi}$ et ses valeurs propres associées λ_{Φ_i} (multiplicateurs de Floquet) dépendent du vecteur μ regroupant l'ensemble des paramètres de contrôle. Alors qu'on fait évoluer lentement un ou plusieurs de ces paramètres, on suppose qu'un cycle limite du système devient non hyperbolique à un certain point de l'espace de contrôle d'état. Alors, si de part et d'autre de ce point on observe un changement qualitatif, c'est que ce point est un point de bifurcation.

Si par exemple on démarre avec un ensemble de paramètres tels qu'on soit en présence d'un cycle limite stable, la variation incrémentale d'un ou plusieurs paramètres peut faire perdre la stabilité de ce cycle limite par le biais d'une des bifurcations suivantes :

- Bifurcation nœud-col ;
- Bifurcation par dédoublement de période ;
- Bifurcation de Neimark ou bifurcation de Hopf secondaire.

Dans chaque cas, la perte de stabilité au niveau du point de bifurcation correspond à la sortie d'au moins un des multiplicateurs de Floquet du cercle unité, et cela que le système soit autonome ou pas. Selon la façon dont cela se produit, on distingue le type de bifurcation dont il s'agit.

ii) Bifurcation nœud-col

Elle est analogue à celle décrite en 2.1.4.1.ii) pour les points fixes. Deux cycles limites, l'un stable, l'autre instable, se rapprochent, et caalescent. Il s'agit d'une bifurcation catastrophique. Le point de bifurcation est également appelé point de retournement dans ce cas.

Au niveau de l'évolution des multiplicateurs de Floquet, cela correspond à la sortie de l'une des valeurs propres λ_{Φ_i} en dehors du cercle unité par l'axe des réels positifs.

iii) Bifurcation par dédoublement de période

Un cycle limite stable de période T perd sa stabilité, engendrant au niveau du point de bifurcation un cycle limite de période double $2T$.

Au niveau de l'évolution des multiplicateurs de Floquet, cela correspond à la sortie de l'une des valeurs propres λ_{Φ_i} en dehors du cercle unité par l'axe des réels négatifs.

iv) Bifurcation de Neimark ou bifurcation de Hopf secondaire

Un mouvement le long d'un cycle limite de fréquence ω_{c1} , donne naissance à un mouvement sur un tore avec l'apparition d'une deuxième fréquence ω_{c2} . Selon que le rapport de ces deux fréquences est rationnel ou non (cf. 2.1.2.3), la solution engendrée au point de bifurcation sera un cycle limite ou bien un mouvement quasi-périodique.

Cela correspond à la sortie de 2 multiplicateurs de Floquet conjugués λ_{Φ_i} et $\lambda_{\Phi_j} = \overline{\lambda_{\Phi_i}}$ en dehors du cercle unité avec $\lambda_{\Phi_i} = \text{Re}(\lambda_{\Phi_i}) \pm i \omega_{c2}$.

D'après le théorème de Liouville ([PAD95b]), ce type de bifurcation ne peut pas être observé pour des systèmes à un seul degré de liberté (pour des systèmes continus autonomes ou non ou bien pour des systèmes discrets).

v) Bifurcations rasantes

La bifurcation rasante correspond à un cas de bifurcation particulière qui apparaît pour les systèmes à impact modélisés par une loi de restitution de Newton. Il s'agit d'une bifurcation qui se produit lorsque la vitesse d'impact sur la butée devient nulle (d'où le terme de bifurcation « rasante »). Pour plus de précisions, nous invitons le lecteur à se reporter aux références suivantes : Budd [BUD95], Foale et Bishop [FOA92], [FOA94], Nordmark [NOR91], Toulemonde [TOU97].

vi) Récapitulatif

La figure suivante (Figure 2.9) permet de visualiser les différentes bifurcations (autres que la bifurcation rasante) de cycles limites de période $T = T_c = 2\pi/\omega_{c1}$ et d'amplitude $Q = Q_c$ juste avant la bifurcation au point critique en $\mu = \mu_c$. Les diagrammes de bifurcation donnés en exemple correspondent à l'amplitude du cycle limite sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

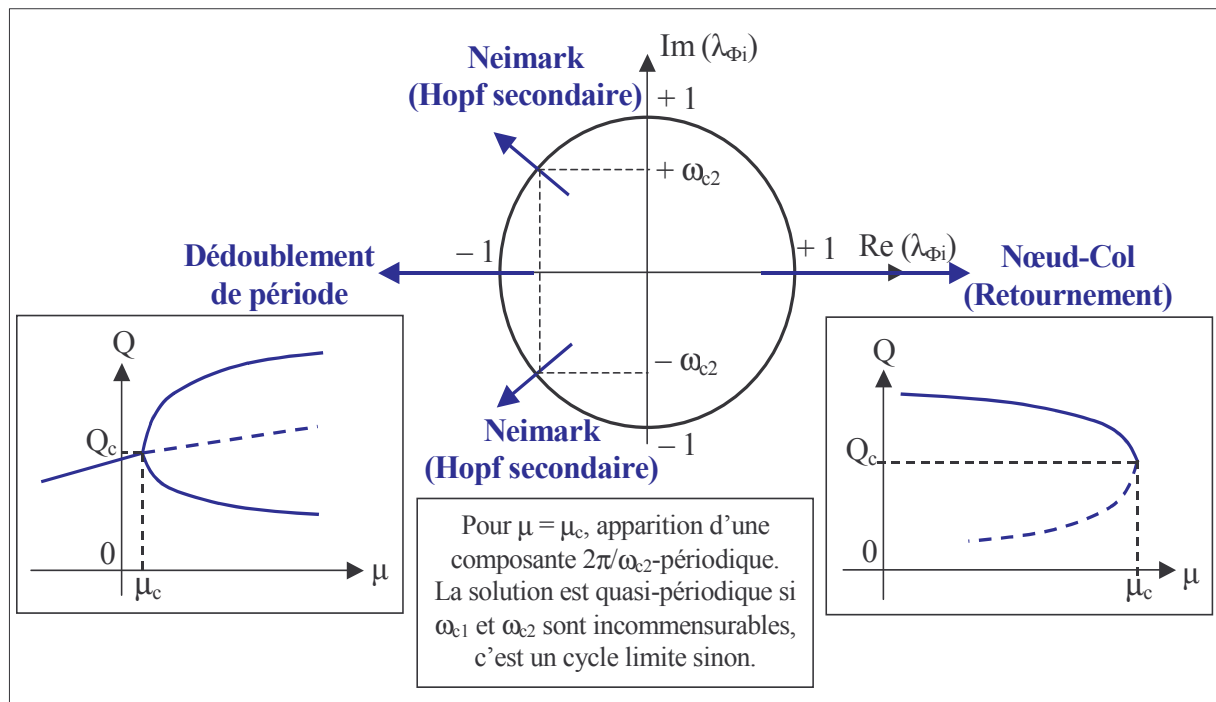


Figure 2.9 : Cas de bifurcations de cycles limites

On notera que sur cette figure seules sont représentées le dédoublement de période sur-critique et la bifurcation nœud-col. Le dédoublement de période sous-critique et la bifurcation de Hopf secondaire ne sont pas schématisés mais ils se comprennent aisément de manière similaire au cas d'un point fixe. En outre, comme précédemment, on distingue la bifurcation de Hopf secondaire sur-critique et sous-critique.

2.1.4.3 TRANSITIONS VERS LE CHAOS

Il existe plusieurs cheminements pour obtenir du chaos à partir d'une configuration paramétrique pour laquelle on n'observe pas de solution chaotique. Il s'agit de bifurcations qui vont engendrer les étapes qui conduisent au chaos.

Les transitions connues vers le chaos sont la cascade de dédoublement de période, les intermittences et la transition quasi-périodique.

i) Cascade de dédoublement de période

Egalement connue sous le nom de cascade sous-harmonique, la cascade de dédoublement de période est caractérisée par une succession de bifurcations du type dédoublement de période en faisant évoluer un paramètre de contrôle μ . A chaque franchissement d'une bifurcation, on trouve un régime de période double de celle du régime précédent. Cette série de bifurcations peut alors conduire à une période arbitrairement grande avant d'atteindre un point d'accumulation d'où émerge une solution chaotique. Plus on s'approche du comportement chaotique, et plus l'intervalle de paramètre $\mu_{i+1} - \mu_i$ est faible où les μ_i sont les points de bifurcations successifs. Le ratio de ces longueurs, c'est-à-dire le scalaire $((\mu_{i+1} - \mu_i)/(\mu_{i+2} - \mu_{i+1}))$ converge vers la constante de Feigenbaum, soit environ 4,6692016... (Feigenbaum [FEI78], Kahraman [KAH92], Sprott [SPR03], Thompson [THO82]).

Autrement dit :

$$\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+2} - \mu_{i+1}} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 4,6692016\dots$$

En guise d'illustration, nous avons tracé ci-contre (Figure 2.10) l'évolution de la solution de $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$ en fonction du paramètre a . On observe bien dans ce cas une cascade sous-harmonique qui conduit rapidement au chaos.

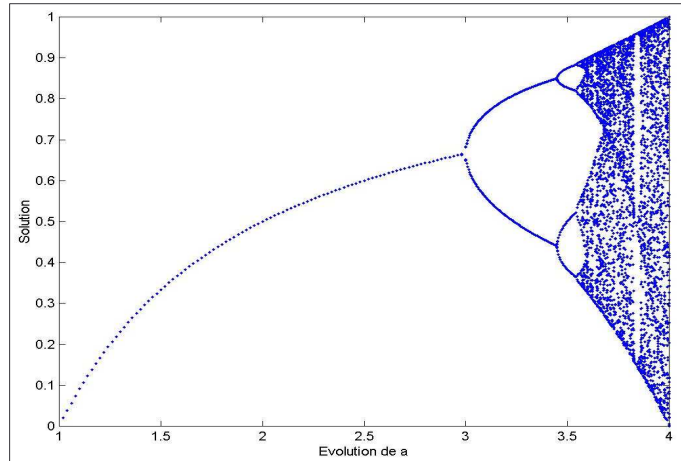


Figure 2.10 : Evolution de la solution de $x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$ en fonction de a

ii) Intermittences

Une intermittence est une sorte de régime périodique (ou quasi-périodique) avec des « bouffées chaotiques ». Ce type de phénomène est particulièrement étudié en mécanique des fluides où un écoulement laminaire peut être interrompu par des turbulences donnant lieu à une succession désordonnée de phases turbulentes et de phases de relaminarisation. Soit un système dynamique où μ désigne le paramètre de contrôle et qui possède un attracteur périodique pour μ inférieur à une valeur critique μ_c . Pour $\mu < \mu_c$, le système oscille de manière régulière et reste stable pour de faibles perturbations. En revanche si μ devient légèrement supérieur à μ_c , la réponse du système présente de longues phases avec des oscillations qui semblent régulières et proches du comportement obtenu avec $\mu < \mu_c$ (phase laminaire), mais ces oscillations sont perturbées de manière intermittente par des comportements chaotiques et cela à des intervalles irréguliers. En augmentant μ , les phases laminaires deviennent de plus en plus petites, difficiles à distinguer et peuvent éventuellement disparaître laissant place à un comportement complètement chaotique.

Dans le mécanisme d'intermittences, lorsque le paramètre de contrôle μ dépasse le point de bifurcation μ_c , la réponse du système explose en un attracteur chaotique qui remplace l'ancien attracteur périodique. Seul trois types de bifurcations de cycles limites décrites au 2.1.4.2 font disparaître un attracteur périodique au point de bifurcation. Il s'agit de la bifurcation nœud-col, de la bifurcation du type Hopf sous-critique et du dédoublement de période sous-critique. Selon le type de bifurcation rencontré en μ_c , on parlera respectivement d'intermittences de type I, II ou III. L'existence de telles bifurcations n'est cependant pas suffisante à l'obtention d'une intermittence car il faut, en outre, l'existence d'un mécanisme global de relaminarisation qui réinjecte de manière répétée la trajectoire de la solution dans un voisinage de l'orbite périodique de départ (orbite fantôme). Pour plus de détails sur ce type de route vers le chaos, nous invitons le lecteur à se référer à [NAY85].

iii) Transitions quasi-périodiques

- Scénario de Ruelle-Takens :

Le théorème de Ruelle-Takens stipule qu'un attracteur quasi-périodique à trois fréquences est structurellement instable vis-à-vis des perturbations de classe C^2 , produisant des attracteurs étranges. En d'autres termes, il faut s'attendre à un régime chaotique dès qu'un troisième mode fréquentiel devient dangereux. Ce troisième mode correspond à un rapport irrationnel incommensurable entre deux variables cycliques du cycle limite quasi-périodique de départ (obtenu par exemple par une bifurcation de Neimark d'un cycle limite). Ce troisième mode correspond à un régime complètement décroché. L'accrochage et le décrochage de fréquence, à la base de ce scénario, sont des phénomènes explicités par le modèle d'Arnold.

Ce scénario est en contraste avec le scénario proposé par Landau et Hopf, selon lequel un point fixe donnait naissance à un cycle limite par une bifurcation de Hopf sur-critique, qui fait apparaître un régime quasi-périodique à deux fréquences par une deuxième bifurcation de Hopf et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du chaos par une séquence infinie de bifurcations de Hopf. Le scénario de Ruelle-Takens montre au contraire que l'attracteur étrange peut apparaître dès l'apparition d'un régime quasi-périodique à trois fréquences.

- Dédoublément de tore :

Dans ce scénario, une solution quasi-périodique à deux fréquences incommensurables de pulsations ω_1 et ω_2 , c'est-à-dire un tore dans l'espace des phases, bifurque en chaos par dédoublement de tore. Le tore, obtenu par bifurcation de Hopf secondaire d'un cycle limite, subit alors une cascade de dédoublement de l'une de ces périodes caractéristiques, $2\pi/\omega_2$ par exemple, qui double à chaque bifurcation, conduisant ainsi au chaos.

- Rupture de tore :

Supposons qu'en faisant évoluer un paramètre μ , un point fixe bifurque en cycle limite par une bifurcation de Hopf sur-critique et qu'ensuite l'attracteur périodique bifurque en attracteur quasi-périodique à deux fréquences (ω_1 et ω_2) en raison d'une bifurcation de Hopf (secondaire) sur-critique. Si en faisant évoluer μ une nouvelle bifurcation se produit, plusieurs cas sont possibles quant à la solution après bifurcation. On peut avoir :

- un attracteur périodique dû au fait que le rapport ω_1/ω_2 devienne rationnel. On parle alors de synchronisation ou de « frequency locking ».
- un scénario d'intermittence sur un régime quasi-périodique tel que nous l'avons vu au ii).
- une solution chaotique due à l'apparition d'un troisième mode fréquentiel selon le scénario de Ruelle-Takens comme explicité précédemment.
- une solution quasi-périodique due à un dédoublement de tore comme explicité précédemment.
- une solution chaotique qui émerge suite à une rupture de tore.

Dans ce dernier cas, la section de Poincaré qui décrit un ensemble de points denses sur une orbite fermée avant bifurcation (attracteur quasi-périodique à deux fréquences) est déformée, repliée et transformée en fractale après bifurcation. On dit que le chaos apparaît par destruction ou rupture du tore. Pour plus de détails sur la rupture de tore, nous invitons le lecteur à se référer à [NAY85].

2.2 LA TECHNIQUE DE CONTINUATION

La technique de continuation consiste à suivre l'évolution d'une solution temporelle périodique [S] en fonction d'un paramètre μ . Il s'agit d'une technique classiquement rencontrée dans les études paramétriques de systèmes non linéaires (Allgower et Georg [ALL90], Dimitrijevic [DIM00], Hellweg [HEL98], Inayat-Hussain [INA01], Kouhia [KOU99], Narayanan [NAR98], Nayfeh [NAY85], Neto [NET99], Padmanabhan [PAD94] - [PAD95a] - [PAD96], Raghotama [RAG99], Raju [RAJ03]). Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à cette technique afin de réaliser une étude paramétrique sur un système non linéaire présentant des bifurcations (cf. 2.1.4).

La valeur observée Q de la solution périodique [S] est caractéristique du comportement vibratoire étudié : il s'agit d'un indicateur de la solution périodique tel que son amplitude, sa période fondamentale, sa valeur moyenne, son énergie, ... Le paramètre μ que l'on fait évoluer dans une plage de variation donnée $[\mu_0, \mu_F]$ est appelé paramètre de contrôle ou encore paramètre de bifurcation.

La technique de continuation s'appuie sur la réponse périodique [S] qui de manière pratique est obtenue par une méthode de tir. Nous allons décrire ci-dessous le principe de la méthode de tir, puis nous verrons les techniques de continuation les plus souvent rencontrées et les différentes stratégies qui peuvent être adoptées.

2.2.1 LA METHODE DE TIR

Soit le système différentiel non autonome suivant où \underline{X} représente le vecteur d'état (N composantes X_i avec $1 \leq i \leq N$) et \underline{F} est une fonction non linéaire qui dépend de \underline{X} et du temps t :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}, t) \quad (2.37)$$

\underline{F} peut être séparé en trois composantes : une partie purement linéaire « $A \underline{X}$ », une partie non-linéaire « $\underline{\eta}(\underline{X})$ » et l'excitation périodique « $\underline{F}_T(t)$ » de période T , soit

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = A\underline{X} + \underline{\eta}(\underline{X}) + \underline{F}_T(t) \quad (2.38)$$

2.2.1.1 RECHERCHE D'UNE SOLUTION PERIODIQUE

Les solutions périodiques de l'équation différentielle (2.37), si elles existent, auront forcément une période égal à T ou à un multiple ou sous-multiple de T , d'après (2.38). Nous avons vu précédemment (cf. 2.1.1.1) que si \underline{F} est une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n de classe C^1 alors (2.37) a une unique solution de condition initiale $\underline{X}_0 = [X_{01} \ X_{02} \ \dots \ X_{0N}]^t$ à $t = 0$, définie par :

$$\underline{X}_0 \rightarrow \underline{\phi}_t(\underline{X}_0) \quad \text{où } \underline{\phi}_t \text{ est le flot de (2.37)}$$

Rechercher une solution de (2.37) de période T revient donc à chercher les conditions initiales \underline{X} à $t = 0$ telles que $\underline{\phi}_T(\underline{X}) = \underline{X}$. Le principe de la méthode de tir consiste par conséquent à trouver le vecteur \underline{X} tel que l'intégration numérique du système différentiel (ou sa résolution semi-analytique : cf. 3.3) à partir de cette valeur initiale à $t = 0$ jusqu'à $t = T$ donne une valeur égale à \underline{X} .

Soit l'application $\underline{X} \rightarrow \underline{H}(\underline{X})$ définie par :

$$\underline{H}(\underline{X}) = \underline{\phi}_T(\underline{X}) - \underline{X} \quad (2.39)$$

La recherche d'une solution périodique de période T revient à la recherche d'une racine de \underline{H} . La méthode de tir ou méthode « balistique » consiste à rechercher par un algorithme la valeur de \underline{X} telle que l'on ait la relation $\underline{H}(\underline{X}) = \underline{\Phi}_T(\underline{X}) - \underline{X} = 0$. Cette résolution se fait généralement par une procédure de Newton-Raphson que nous allons décrire maintenant.

2.2.1.2 PROCEDURE DE NEWTON-RAPHSON

Soit \underline{X} , le vecteur des conditions initiales exactes recherchées tel que $\underline{H}(\underline{X}) = 0$. On débute avec un vecteur $\underline{X}^{(0)}$ proche de \underline{X} , tel que $\underline{X}^{(0)} = \underline{X} + \underline{\Delta X}$. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de \underline{H} conduit à :

$$\underline{H}(\underline{X}^{(0)}) = \underline{H}(\underline{X} + \underline{\Delta X}) \approx \underline{H}(\underline{X}) + \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(0)}) \cdot \underline{\Delta X} = \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(0)}) \cdot \underline{\Delta X} \quad (2.40)$$

$\underline{J}_H = \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(0)})$ n'est autre que la matrice jacobienne de l'application \underline{H} en $\underline{X}^{(0)}$.

\underline{J}_H est appelée matrice monodrome (c'est la même matrice que celle vue au 2.1.3.3). D'après la définition (2.39), on a la relation $\underline{J}_H = \underline{J} - \underline{I}_N$, où \underline{J} est la matrice jacobienne du système (i.e matrice jacobienne de la solution $\underline{\Phi}_T$) et \underline{I}_N la matrice identité $N \times N$. On notera que \underline{J}_H dépend tout comme \underline{J} de $\underline{X}^{(0)}$.

On a par conséquent, $\underline{H}(\underline{X}^{(0)}) \approx -\underline{J}_H \cdot (\underline{X} - \underline{X}^{(0)})$ avec \underline{X} la valeur que l'on cherche à atteindre. Le schéma de Newton-Raphson s'écrit alors à l'étape $i + 1$:

$$\underline{\Delta X}^{(i)} = -(\underline{J}_H)^{-1} \cdot \underline{H}(\underline{X}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \underline{\Delta X}^{(i)} = \underline{X}^{(i+1)} - \underline{X}^{(i)} \quad (2.41)$$

Ainsi, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X}^{(1)} = \underline{X}^{(0)} - (\underline{J}_{H(\underline{X}^{(0)})})^{-1} \cdot \underline{H}(\underline{X}^{(0)}) \\ \underline{X}^{(2)} = \underline{X}^{(1)} - (\underline{J}_{H(\underline{X}^{(1)})})^{-1} \cdot \underline{H}(\underline{X}^{(1)}) \\ \dots \\ \underline{X}^{(i+1)} = \underline{X}^{(i)} - (\underline{J}_{H(\underline{X}^{(i)})})^{-1} \cdot \underline{H}(\underline{X}^{(i)}) \end{array} \right.$$

Les itérations cessent quand on a convergence $\left(\text{i.e } \left\| \frac{\underline{X}^{(i+1)} - \underline{X}^{(i)}}{\underline{X}^{(i)}} \right\| \leq \varepsilon_1 \right)$ et qu'on a bien une racine de \underline{H} $\left(\text{i.e } \left\| \underline{H}(\underline{X}^{(i+1)}) \right\| \leq \varepsilon_2 \right)$ (ε_1 et ε_2 sont des critères de tolérance).

La méthode de tir est une méthode qui ne fait pas d'approximation sur la solution périodique recherchée : on ne pose aucune hypothèse sur la forme de la solution a priori (hormis sa période T).

Toutefois, on comprend bien l'importance des points suivant :

- L'évaluation de la jacobienne \underline{J} en fin de convergence permettra de réaliser l'étude de la stabilité de la solution périodique obtenue d'après la théorie de Floquet (cf. 2.1.3.3).
- A chaque itération, la perturbation $\underline{\Delta X}^{(i)}$ ne peut être évaluée que tant que \underline{J}_H est inversible, ce qui n'est pas vérifié pour des points de bifurcation du type retournement (cf. 2.1.4.2ii).
- Le choix initial de $\underline{X}^{(0)}$ est capital puisqu'il va influencer sur la convergence de la méthode de Newton-Raphson. Si le vecteur $\underline{X}^{(0)}$ choisi est trop éloigné de la solution recherchée, le processus ne convergera pas. Nous allons voir plus en détail ce point dans ce qui suit.

2.2.1.3 LE CHOIX DU POINT INITIAL

Selon la valeur prise au départ pour le point $\underline{X}^{(0)}$, on converge plus ou moins rapidement vers la solution, mais parfois, on ne réussit pas à atteindre le résultat. Pour trouver les conditions initiales pour le processus de Newton-Raphson, il y a plusieurs possibilités.

i) Choix arbitraire

Lorsque les non-linéarités ne sont pas trop importantes pour la configuration paramétrique étudiée, on choisit $\underline{X}^{(0)}$ arbitrairement. On effectue ensuite le processus itératif de Newton-Raphson pour déterminer une racine de \underline{H} . Cette approche est valable si l'effet des non-linéarités est négligeable. Dans le cas contraire, la convergence du processus peut être compromise et on doit se ramener à l'un des deux cas suivants.

ii) Méthode incrémentale

Lorsque la méthode précédente ne converge pas, ce qui se passe habituellement dans les régions où les effets des non-linéarités sont dominants, il faut adopter une démarche itérative. Pour ce faire, les relations (2.37) et (2.38) sont réécrites de la manière suivante :

$$\dot{\underline{X}} = \underline{F}(\underline{X}, t) \quad \text{où} \quad \underline{F}(\underline{X}, t) = \underline{A} \underline{X} + \zeta \underline{\eta}(\underline{X}) + \underline{F}_T(t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (2.42)$$

On démarre avec $\zeta = \zeta^{(0)} = 0$ (problème purement linéaire), et ensuite on adopte la démarche du i). Une fois la racine de \underline{H} calculée pour $\zeta^{(0)} = 0$, cette valeur est utilisée comme point initial du schéma de Newton-Raphson pour déterminer la racine de \underline{H} avec $\zeta^{(1)} = \Delta\zeta$. Ceci assure une convergence rapide du processus d'itération. Par incréments successives de $\zeta^{(i+1)} = \zeta^{(i)} + \Delta\zeta$ on atteint la valeur souhaitée $\zeta = 1$ où l'équation (2.42) correspond à l'équation (2.37) du système.

iii) Méthode de tir multiple

Pour i) et ii), la méthode de tir s'effectue sur le domaine temporel $[0 T]$ avec un seul pas. Ici, l'intervalle $[0 T]$ est divisé en M sous-intervalles $\Delta t_i = [t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 1, \dots, M$ avec $t_1 = 0$ et $t_{M+1} = T$. La méthode de tir multiple se définit à partir d'un ensemble de conditions initiales \underline{X}_i à $t = t_i$. L'équation du mouvement est ensuite intégrée sur chaque sous-intervalle. La solution à l'instant t appartenant au $i^{\text{ème}}$ intervalle est notée $\underline{\phi}(t, \underline{X}_i, t_i)$. Il s'agit de la fonction $\underline{\phi}$ présentée au 2.2.1.1 et définie sur chaque intervalle Δt_i (Figure 2.11).

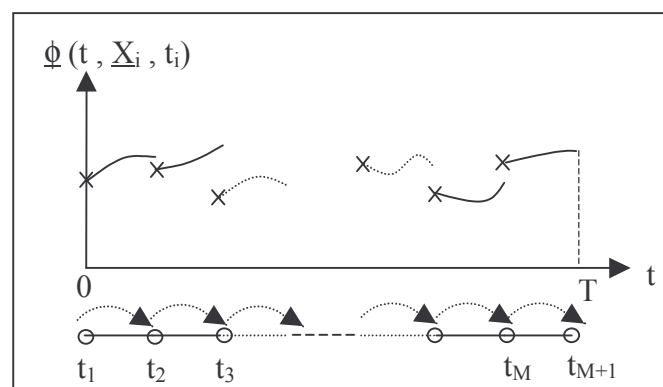


Figure 2.11 : Tir multiple

Pour avoir une solution périodique, l'état final obtenu par l'intégration sur le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle (i.e $\underline{\phi}(t_{i+1}, \underline{X}_i, t_i)$) doit être égal au vecteur des conditions initiales utilisées pour l'intégration

numérique du $(i+1)^{\text{ème}}$ sous-intervalle (i.e \underline{X}_{i+1}) pour $i = 1, \dots, M-1$ et bien sûr, l'état final obtenu par l'intégration sur le dernier sous-intervalle (i.e $\underline{\phi}(t_{M+1}, \underline{X}_M, t_M)$) doit être égal au vecteur des conditions initiales du premier intervalle (i.e \underline{X}_1).

On définit \underline{H} tel que :

$$\underline{H}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \underline{H}_1(\underline{X}) \\ \vdots \\ \underline{H}_M(\underline{X}) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{X} = (\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_M)^t \\ \underline{H}_i(\underline{X}) = \underline{\phi}(t_{i+1}; \underline{X}_i; t_i) - \underline{X}_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq M-1 \\ \underline{H}_M(\underline{X}) = \underline{\phi}(t_{M+1}; \underline{X}_M; t_M) - \underline{X}_1 \end{cases} \quad (2.43)$$

La condition de périodicité revient donc à annuler la fonction \underline{H} . Pour cela, comme précédemment, on utilise la méthode de Newton-Raphson, à partir d'un ensemble de vecteurs de départ rassemblés dans le vecteur $\underline{X}^{(0)}$ choisi arbitrairement :

$$\underline{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} \underline{X}_1^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{X}_i^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{X}_M^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_{11}^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{X}_{1N}^{(0)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{X}_{i1}^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{X}_{iN}^{(0)} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{X}_{M1}^{(0)} \\ \vdots \\ \underline{X}_{MN}^{(0)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$\underline{X}^{(0)}$ représente le vecteur de départ pour le processus. Il comporte $N \cdot M$ composantes. On utilise alors le schéma de Newton-Raphson de manière itérative par incréments de $\underline{\Delta X}^{(i)} = \underline{X}^{(i+1)} - \underline{X}^{(i)}$.

Chaque itération vérifie la relation suivante bien connue:

$$\underline{\Delta X}^{(i)} = -(\underline{J}_H(\underline{X}^{(i)}))^{-1} \cdot \underline{H}(\underline{X}^{(i)})$$

\underline{J}_H est la matrice jacobienne de \underline{H} : $\underline{J}_H = \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{H}_1}{\partial \underline{X}_1} & -\underline{I}_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \underline{H}_2}{\partial \underline{X}_2} & -\underline{I}_N & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \underline{H}_{M-1}}{\partial \underline{X}_{M-1}} & -\underline{I}_N \\ -\underline{I}_N & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \underline{H}_M}{\partial \underline{X}_M} \end{bmatrix}$$

Comme précédemment, chaque itération ne peut être effectuée que si \underline{J}_H est inversible pour chaque $\underline{X}^{(i)}$ rencontré au cours du processus. Cette façon de procéder par découpage de la période étudiée, augmente le domaine d'attraction de la méthode Newton – Raphson et améliore son efficacité en permettant une convergence plus rapide vers la réponse du système. Toutefois, la méthode de tir multiple entraîne un coût de calcul plus important et peut donc être limitée par la complexité du système. En effet, même si le tir multiple nécessite d'un moins grand nombre d'itérations, au lieu de résoudre un système algébrique de taille N (tir simple) à chaque itération, on a un système algébrique de taille $N \cdot M$.

2.2.2 DIVERSES TECHNIQUES DE CONTINUATION

La méthode de tir permet donc de déterminer une solution périodique d'un système forcé harmoniquement pour un point de fonctionnement, c'est-à-dire pour une configuration paramétrique donnée. Cependant, ce qui nous intéresse dans l'étude dynamique des systèmes non linéaires, c'est de réaliser une variation paramétrique afin de dégager l'influence des paramètres vis-à-vis de la réponse du système. C'est pourquoi on utilise une technique de continuation. On note μ le paramètre de contrôle.

2.2.2.1 LE PRINCIPE DE LA TECHNIQUE DE CONTINUATION

Quelle que soit la technique de continuation utilisée, celle-ci repose sur un même principe. Il s'agit de déterminer une solution périodique du système pour le paramètre μ compris entre μ_0 et μ_F afin de dégager une courbe de variation paramétrique. Bien entendu, cette courbe est obtenue à partir d'un nombre fini de solutions périodiques calculées en μ_p . C'est une courbe représentée point par point où chaque point correspond à une grandeur $Q = Q_p$ représentative de la solution périodique $[S_p]$ obtenue pour $\mu = \mu_p$. Cette grandeur Q peut par exemple désigner l'amplitude du signal ou sa valeur moyenne. Elle dépend implicitement du vecteur des conditions initiales \underline{X}_p de la solution $[S_p]$.

Soit Φ l'application représentant le flot associé à l'équation différentielle (2.37) du système, on a cette fois-ci une dépendance vis-à-vis de μ .

$(t, \underline{X}, t_0, \mu) \rightarrow \Phi(t, \underline{X}, t_0, \mu)$ représente la solution du système différentiel pour le paramètre μ , à l'instant t et comme condition initiale le vecteur \underline{X} à $t = t_0$. Par souci de simplification, on prendra $t_0 = 0$ et on notera $\Phi(t, \underline{X}, 0, \mu) = \Phi_t(\underline{X}, \mu)$. On définit alors l'application \underline{H} :

$$\underline{H}(\underline{X}, \mu) = \Phi_T(\underline{X}, \mu) - \underline{X} \quad (2.44)$$

La recherche des solutions périodiques consiste à résoudre l'équation :

$$\underline{H}(\underline{X}, \mu) = 0 \quad (2.45)$$

Le but de la méthode de continuation est donc de tracer une suite de points (μ_p, Q_p) où Q_p est un indicateur de la solution périodique $[S_p]$ obtenue à partir du vecteur des conditions initiales \underline{X}_p avec $\mu = \mu_p$. Il s'agit donc pour cela de déterminer une suite de points (\underline{X}_p, μ_p) qui sont racines de la fonction non linéaire \underline{H} à N composantes notées H_i ($1 \leq i \leq N$). Cela s'appuie en général sur des algorithmes de type prédicteur-correcteur.

Le prédicteur fournit une estimation $(\hat{\underline{X}}_{p+1}, \hat{\mu}_{p+1})$ de la solution recherchée $(\underline{X}_{p+1}, \mu_{p+1})$ et ceci à partir des solutions précédemment obtenues (\underline{X}_m, μ_m) avec $m < p$. Il existe de nombreux types d'algorithmes de prédiction tels que la prédiction tangente, la prédiction de type Adams-Bashforth, la prédiction par interpolation polynomiale, ... Certains d'entre eux seront détaillés dans ce qui suit.

Une fois l'estimation effectuée, celle-ci est utilisée comme point de départ pour l'algorithme de correction, c'est-à-dire $(\underline{X}_{p+1}^{(0)}, \mu_{p+1}^{(0)}) = (\hat{\underline{X}}_{p+1}, \hat{\mu}_{p+1})$. Le correcteur, généralement de type Newton-Raphson, améliore l'estimation jusqu'à l'obtention de la solution $(\underline{X}_{p+1}, \mu_{p+1})$ à un critère de tolérance ε près, c'est-à-dire lorsqu'on a k tel que :

$$\left\| \underline{H}(\underline{X}_{p+1}^{(k)}, \mu_{p+1}^{(k)}) \right\| \leq \varepsilon \quad (2.46)$$

2.2.2.2 CONTINUATION SEQUENTIELLE

Il s'agit de la méthode la plus simple mais elle n'est pratiquement pas exploitable pour des systèmes non linéaires. Soit (\underline{X}_m, μ_m) avec $0 \leq m \leq p$, un ensemble de points racines de \underline{H} qui sont connus, on cherche une solution périodique pour $\mu = \mu_{p+1}$ notée $(\underline{X}_{p+1}, \mu_{p+1})$.

L'estimation est quelconque mais la plus simple consiste à prendre le vecteur \underline{X}_p trouvé pour le point précédent, c'est-à-dire :

$$(\hat{\underline{X}}_{p+1}, \hat{\mu}_{p+1}) = (\underline{X}_p, \mu_{p+1}) \quad \text{soit} \quad (\underline{X}_{p+1}^{(0)}, \mu_{p+1}^{(0)}) = (\underline{X}_p, \mu_{p+1}) \quad (2.47)$$

La valeur du paramètre de contrôle μ_{p+1} est quant à elle choisie arbitrairement. On l'incrmente généralement à l'aide d'un pas $\Delta\mu$. Ensuite, le correcteur, de type Newton-Raphson par exemple, est utilisé mais sans corriger la valeur μ_{p+1} prise en compte au départ (Figure 2.12). Cela correspond exactement à une méthode de tir pour une configuration paramétrique donnée ($\mu = \mu_{p+1}$) où on cherche à déterminer $\underline{H}(\underline{X}, \mu_{p+1}) = 0$ avec le schéma de Newton-Raphson (2.41) ce qui nous permet d'évaluer Q_{p+1} par la suite.

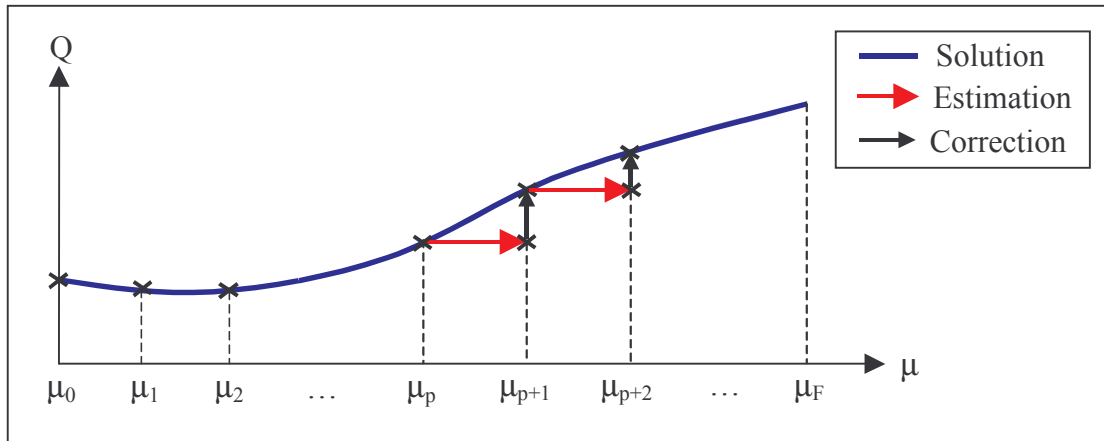


Figure 2.12 : Principe de la continuation séquentielle

Pependant, cette technique de continuation ne peut être appliquée que dans un cadre purement linéaire. En effet, si la courbe de continuation « revient en arrière », c'est-à-dire que si on a une bifurcation de type « retournement » (bifurcation courante en non linéaire), la méthode précédente ne permet pas de modifier le signe de $\Delta\mu$ et par conséquent le retournement ne peut pas être obtenu.

Pour cette raison, d'autres démarches telles que celles exposées ci-après, doivent être employées pour caractériser complètement l'évolution de Q en fonction de μ .

2.2.2.3 CONTINUATION A PARAMETRISATION SELECTIVE

L'une des méthodes de continuation permettant de palier le problème des points de retournement est l'utilisation d'une paramétrisation sélective. Comme nous l'avons vu au précédemment (2.44), on cherche à résoudre $\underline{H}(\underline{X}, \mu) = 0$ où \underline{X} est un vecteur à N composantes X_i ($1 \leq i \leq N$). Cela revient donc de la recherche d'une racine à $(N + 1)$ variables d'une fonction \underline{H} qui représente un vecteur à N composantes ($H_i(\underline{X}, \mu)$ où $1 \leq i \leq N$). La paramétrisation sélective consiste à ne prendre en compte que N variables dans la résolution de $\underline{H}(\underline{X}, \mu) = 0$ et à imposer la variable restante qui est fixée à une valeur ρ . Si on adopte la notation $X_{N+1} = \mu$, le système algébrique que l'on souhaite résoudre est le suivant :

$$\underline{H}(\underline{X}, \mu) = \underline{H}(X_1, \dots, X_{k-1}, \rho, X_{k+1}, \dots, X_{N+1}) = 0 \quad (2.48)$$

La valeur du coefficient ρ imposé peut être définie de plusieurs façons qui sont en réalité les moyens avec lesquels est réalisée l'estimation. Pour le calcul de la $(p+1)^{\text{ème}}$ solution dans la technique de continuation, soit $(\hat{X}_{(p+1)1}, \hat{X}_{(p+1)2}, \dots, \hat{X}_{(p+1)N})$ l'estimation obtenue par le prédicteur, la valeur de ρ n'est autre que $\hat{X}_{(p+1)k}$ (notée \hat{X}_k) soit $X_{(p+1)k}^{(0)}$ (notée $X_k^{(0)}$).

L'indice k de la variable sur laquelle le coefficient ρ s'applique varie. D'après ce que nous venons de dire, une fois l'estimation de \underline{X}_{p+1} (notée \underline{X}) effectuée, sa $k^{\text{ème}}$ composante n'est plus corrigée. C'est pourquoi, de manière générale, on choisit comme composante fixée, la variable pour laquelle la variation relative a été la plus importante au calcul du point précédent n° p . Ceci s'explique par le fait qu'il s'agit de la variable pour laquelle l'estimation risque le moins d'être trop éloignée de la solution recherchée. Autrement dit, on a :

$$\Delta X_{pk} = \max \{ \Delta X_{p1}, \dots, \Delta X_{p(N+1)} \} \quad \text{où} \quad \Delta X_{pj} = \frac{|X_{pj} - X_{(p-1)j}|}{|X_{(p-1)j}|} \quad (2.49)$$

Une fois l'indice k connu et une fois l'estimation $\underline{X}^{(0)}$ effectuée, on peut rechercher une racine de \underline{H} par le processus de Newton-Raphson (correcteur) sur les N variables restantes de $\underline{X}^{(r)}$. Le schéma (2.41) s'écrit ici à chaque itération r de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial X_1}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial X_{k-1}}(\underline{X}^{(r)}) & \frac{\partial H_1}{\partial X_{k+1}}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial X_{N+1}}(\underline{X}^{(r)}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_{k-1}}{\partial X_1}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_{k-1}}{\partial X_{k-1}}(\underline{X}^{(r)}) & \frac{\partial H_{k-1}}{\partial X_{k+1}}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_{k-1}}{\partial X_{N+1}}(\underline{X}^{(r)}) \\ \frac{\partial H_k}{\partial X_1}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_k}{\partial X_{k-1}}(\underline{X}^{(r)}) & \frac{\partial H_k}{\partial X_{k+1}}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_k}{\partial X_{N+1}}(\underline{X}^{(r)}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_N}{\partial X_1}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_N}{\partial X_{k-1}}(\underline{X}^{(r)}) & \frac{\partial H_N}{\partial X_{k+1}}(\underline{X}^{(r)}) & \dots & \frac{\partial H_N}{\partial X_{N+1}}(\underline{X}^{(r)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_1^{(r)} \\ \vdots \\ \Delta X_{k-1}^{(r)} \\ \Delta X_{k+1}^{(r)} \\ \vdots \\ \Delta X_{N+1}^{(r)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H_1(\underline{X}^{(r)}) \\ \vdots \\ H_{k-1}(\underline{X}^{(r)}) \\ H_k(\underline{X}^{(r)}) \\ \vdots \\ H_N(\underline{X}^{(r)}) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \Delta X_j^{(r)} = X_j^{(r+1)} - X_j^{(r)} & \text{pour } j \neq k \\ \Delta X_k^{(r)} = X_k^{(r+1)} - X_k^{(r)} = 0 & \text{(valeur non corrigée)} \end{cases} \quad (2.51)$$

On remarque que si $X_k = X_{N+1}$, soit $X_k = \mu$, il s'agit localement d'une technique de continuation séquentielle (où $p = \Delta\mu$). En revanche, lors d'un retournement, le paramètre μ ne sera pas la variable de plus grande variation relative et par conséquent la correction de la prédiction faite notamment sur μ permettra d'obtenir une inversion du sens de déplacement de μ au voisinage du point de retournement. La continuation par paramétrisation sélective nous permet donc de passer la difficulté des points de retournement à condition de pouvoir calculer les termes $(\partial \underline{H} / \partial \mu)$ c'est-à-dire $(\partial \underline{H} / \partial X_{N+1})$. La figure suivante (Figure 2.13) nous permet d'illustrer notre propos.

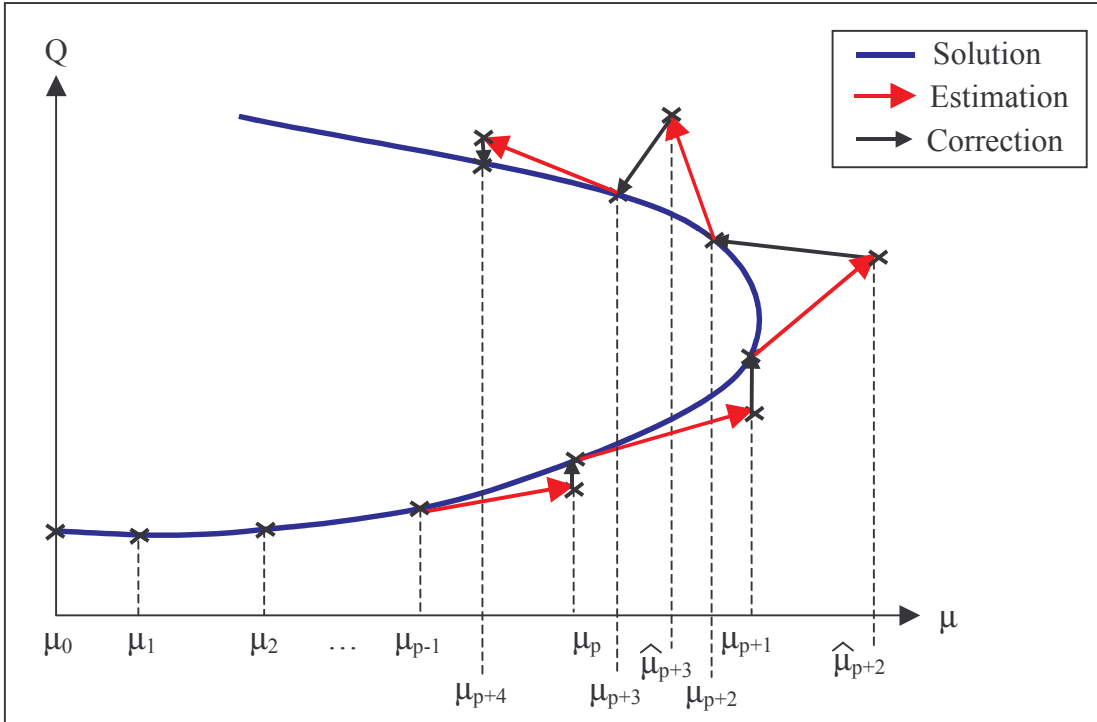


Figure 2.13 : Continuation à paramétrisation sélective

Sur la Figure 2.13, les points sont estimés par le prédicteur suivant :

$$\hat{\underline{X}}_{p+1} = \underline{X}_p + \Delta \hat{\underline{X}}_p = \underline{X}_p + (\underline{X}_p - \underline{X}_{p-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{X}_{(p+1)1} = X_{p1} + (X_{p1} - X_{(p-1)1}) \\ \vdots \\ \hat{X}_{(p+1)N} = X_{pN} + (X_{pN} - X_{(p-1)N}) \\ \hat{X}_{(p+1)(N+1)} = \mu_{p+1} = \mu_p + (\mu_p - \mu_{p-1}) \end{cases} \quad (2.52)$$

On remarque d'après la figure que pour les $p^{\text{ème}}$ et $(p+1)^{\text{ème}}$ points, on ne corrige pas μ (on se comporte comme en continuation séquentielle). En revanche pour les $(p+2)$ et $(p+3)^{\text{ème}}$ points, μ n'est plus la composante de plus grande variation relative. C'est un X_k avec $k < N+1$ qui n'est plus corrigé, ce qui permet de réaliser le retournement en obtenant en particulier Q_{p+2} . Enfin, à partir du $(p+4)^{\text{ème}}$ point, on repart en continuation séquentielle dans cet exemple.

Nous allons maintenant décrire deux techniques de continuation proches l'une de l'autre et pour lesquelles la correction se fait sur toutes les variables X_i ($1 \leq i \leq N$) et sur μ .

2.2.2.4 CONTINUATION DE TYPE « ARCLENGTH » ET « PSEUDO-ARCLENGTH »

Ces deux techniques de continuation nécessitent l'introduction de l'abscisse curviligne s de la courbe de réponse (\underline{X}, μ) . En réalité, cette abscisse curviligne sera approchée par la longueur de ligne brisée définie par l'ensemble des points (\underline{X}_p, μ_p) successivement calculés.

Celle-ci est alors définie par la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 0 \\ \text{Pour } p > 1, \\ s_p = s_{p-1} + \Delta s_p \\ \Delta s_p = \sqrt{\| \underline{X}_p - \underline{X}_{p-1} \|^2 + (\mu_p - \mu_{p-1})^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N (X_{pj} - X_{(p-1)j})^2 + (\mu_p - \mu_{p-1})^2} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

La continuation de type « arclength » consiste à rechercher la solution $(\underline{X}_{p+1}, \mu_{p+1})$ de sorte qu'elle soit à l'intersection de la courbe réponse et d'une hypersphère, de rayon Δs , centrée sur le dernier point trouvé (\underline{X}_p, μ_p) . L'estimation de départ $(\hat{\underline{X}}_{p+1}, \hat{\mu}_{p+1})$ doit vérifier l'équation de l'hypersphère E et le système augmenté à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{H}(\underline{X}, \mu) = \underline{H}(X_1, \dots, X_N, \mu) = 0 \\ E(\underline{X}, \mu) = \| \underline{X} - \underline{X}_p \|^2 + (\mu - \mu_p)^2 - \Delta s^2 = \sum_{i=1}^N (X_i - X_{pi})^2 + (\mu - \mu_p)^2 - \Delta s^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Pour la continuation de type « pseudo-arclength », l'idée est de rechercher la solution $(\underline{X}_{p+1}, \mu_{p+1})$ de sorte qu'elle soit à l'intersection de la courbe réponse et d'un hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe au point précédent (\underline{X}_p, μ_p) et situé à une distance Δl de ce dernier. La prédiction $(\hat{\underline{X}}_{p+1}, \hat{\mu}_{p+1})$ doit vérifier l'équation de l'hyperplan E et le système augmenté à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{H}(\underline{X}, \mu) = \underline{H}(X_1, \dots, X_N, \mu) = 0 \\ E(\underline{X}, \mu) = \dot{\underline{X}}_p \cdot (\underline{X} - \underline{X}_p) + \dot{\mu}_p (\mu - \mu_p) - \Delta l = \sum_{i=1}^N \dot{X}_{pi} (X_i - X_{pi}) + \dot{\mu}_p (\mu - \mu_p) - \Delta l = 0 \end{array} \right. \quad (2.55)$$

L'équation de l'hyperplan en (2.55) découle de la linéarisation de l'équation de l'hypersphère formulée en (2.54). Δs représente la distance entre deux points de la courbe solution tandis que Δl correspond à la distance entre un point et la projection du second sur la tangente du premier. A ce titre, la seconde méthode porte le nom de « pseudo-arclength ». Contrairement à la méthode de type « arclength », la technique de continuation « pseudo-arclength » doit utiliser une estimation ou prédiction qui a plus de contraintes liées à la vérification de l'équation E lors de la correction. En effet, la prédiction utilisée pour une méthode « pseudo-arclength » peut servir de prédiction à une méthode de continuation « arclength » avec $\Delta s = \Delta l$. L'inverse ne se vérifie pas forcément.

Néanmoins, dans un cas comme dans l'autre, l'introduction d'une équation supplémentaire E, permet de corriger chaque prédiction sur l'ensemble des variables X_i ($1 \leq i \leq N$) et sur le paramètre de continuation μ . Ainsi, le problème particulier des points de retournement peut être résolu, à condition de prendre certaines précautions comme nous allons le voir. Pour l'une ou l'autre des techniques de continuation, il est courant d'employer une prédiction tangente qui consiste à utiliser la tangente du dernier point trouvé comme prolongement local de la courbe. Par différentiation de la première équation de (2.54) (resp. (2.55)) combinée avec la deuxième équation, on obtient l'estimation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}_{p+1} = \mu_p + \Delta \hat{\mu}_p = \mu_p \pm \frac{\Delta s \text{ (resp. } \Delta l)}{\sqrt{\left\| \left(\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}_p, \mu_p) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \mu}(\underline{X}_p, \mu_p) \right\|^2 + 1}} \\ \hat{\underline{X}}_{p+1} = \underline{X}_p + \Delta \hat{\underline{X}}_p = \underline{X}_p - \left(\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}_p, \mu_p) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial \mu}(\underline{X}_p, \mu_p) \cdot \Delta \hat{\mu}_p \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Comme nous pouvons le voir, on a une incertitude sur la direction de la prédiction, ce qui est représenté sur les figures ci-dessous. Le choix de la direction (c'est-à-dire le signe de $\Delta\hat{\mu}_p$) doit préserver le sens de parcours de la courbe. A ce titre, on impose habituellement un produit scalaire positif entre les vecteurs directeurs tangents de deux points successifs :

$${}^t\Delta\hat{\underline{X}}_{p-1} \cdot \Delta\hat{\underline{X}}_p + \Delta\hat{\mu}_{p-1} \cdot \Delta\hat{\mu}_p > 0 \quad (2.57)$$

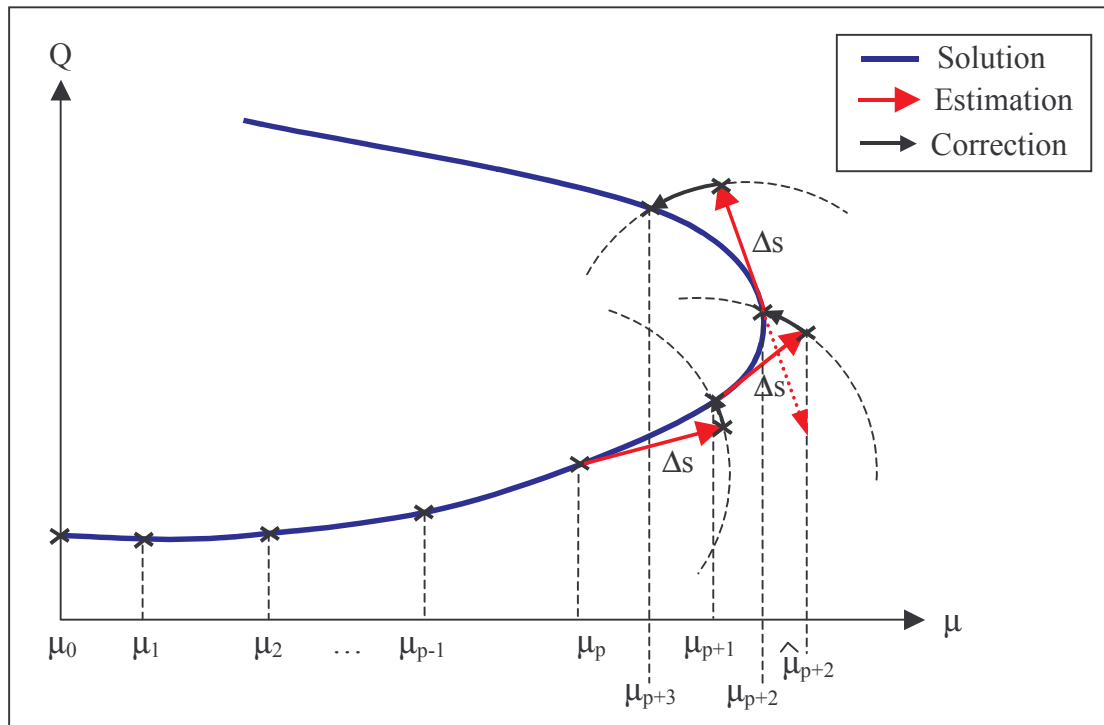


Figure 2.14 : Continuation de type "arclength"

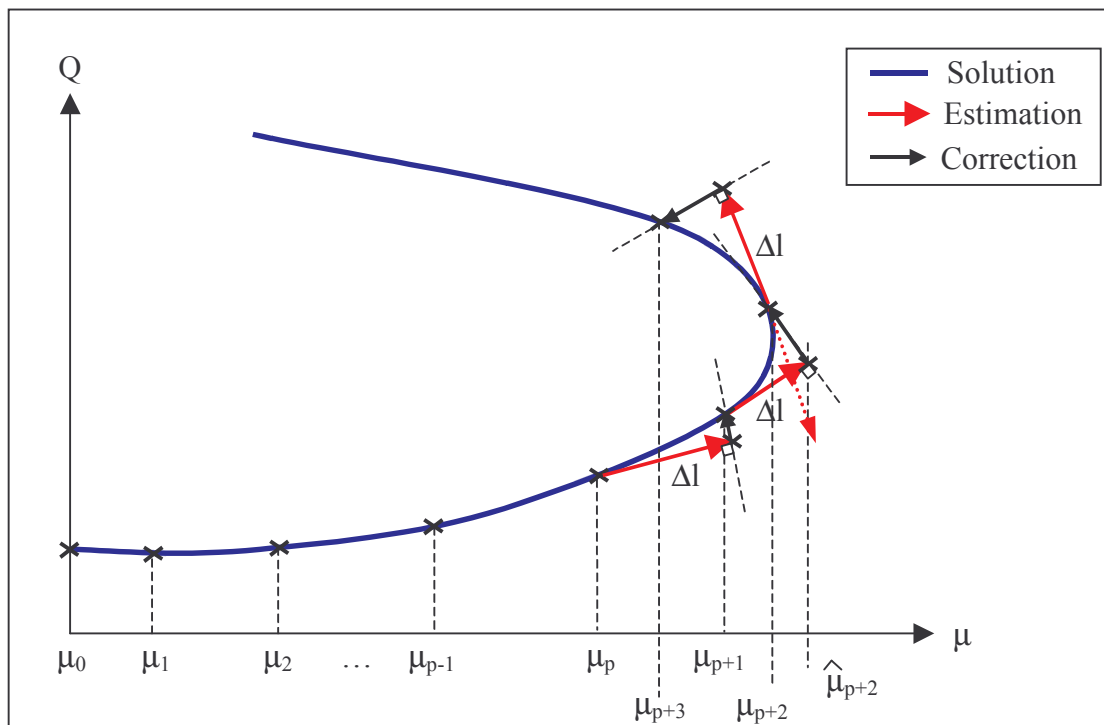


Figure 2.15 : Continuation de type "pseudo-arclength"

Sur ces figures, pour la prédiction $\hat{\mu}_{p+3}$ on a tracé en pointillés l'autre direction de prédiction qui ne vérifie pas la relation (2.57).

Pour la phase de correction, à partir de l'estimation, on applique la méthode de Newton-Raphson sur le système augmenté (2.54) ou (2.55) selon la technique utilisée. Le schéma de correction s'écrit à chaque itération r de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) & \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{\mu}}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) \\ \frac{\partial \underline{E}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) & \frac{\partial \underline{E}}{\partial \underline{\mu}}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}^{(r+1)} - \underline{X}^{(r)} \\ \underline{\mu}^{(r+1)} - \underline{\mu}^{(r)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \underline{H}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) \\ \underline{E}(\underline{X}^{(r)}, \underline{\mu}^{(r)}) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

On remarquera que dans le cas de la technique de continuation « arclength », lors de la phase de correction, la courbe solution et l'hypersphère ont toujours plus d'un point en commun tandis que dans le cas de la technique de continuation « pseudo-arclength », on peut se retrouver dans un cas où l'hyperplan utilisé ne croise jamais la courbe solution. Ce dernier cas se produit principalement pendant un retournement et pour lever cette difficulté, on est amené à diminuer le pas Δl . La gestion du pas est l'un des aspects pratiques des techniques de continuation.

2.3 CONCLUSION

Ce chapitre nous a donc permis de nous doter des éléments nécessaires pour traiter le cas pratique qui va suivre. Nous avons vu qu'on ne traitait pas les systèmes non linéaires comme des systèmes linéaires mais que la linéarisation était une étape qui permettait de tirer des conclusions sur la stabilité des points hyperboliques du système étudié.

En effet, comme nous le savons (cf. Annexe A), l'intégration temporelle peut être réalisée par un grand nombre de schémas numériques choisis pour leurs caractéristiques en terme de convergence, stabilité, précision et amortissement numérique. Néanmoins, pour connaître les comportements asymptotiques, plutôt que de réaliser une intégration temporelle prolongée avec de faibles pas de temps, nous avons vu dans ce chapitre toute l'utilité d'outils tels que la méthode de tir et la coupure de Poincaré. Mais cela n'était pas suffisant pour déterminer la stabilité des solutions obtenues et nous avons vu comment y parvenir par la détermination des coefficients de Floquet.

Enfin, un point de fonctionnement à lui tout seul n'a aucun intérêt et c'est bien sûr la sensibilité des cycles limites aux différents paramètres qui nous intéresse. C'est à ce titre que nous avons rappelé la définition des bifurcations et montré la performance des techniques dites de continuation et qui permettent de réaliser ce type d'étude paramétrique. Et nous allons donc dans ce qui suit, mettre tout cela en pratique pour le cas de l'entraînement de pompe à vide en bout d'arbre à cames.

CHAPITRE 3

APPLICATION AU TOC (1 DDL)

Nous allons maintenant mettre en application ce qui a été présenté précédemment. Le système considéré et abordé au premier chapitre est l'entraînement de la pompe à vide en bout d'arbre à cames. Le TOC est le nom donné chez PSA pour le joint de Oldham assurant l'accouplement entre l'arbre à cames et la pompe à vide. Comme nous l'avons vu (cf. Figure 1.6 et Figure 1.7), la pompe à vide a la particularité de se trouver en fin de chaîne cinématique (attelage mobile / entraînement de distribution / distribution) ce qui rend difficile la connaissance de l'acyclisme vu par celle-ci. Les spécifications demandées aux fournisseurs de pompe à vide sont d'autant plus difficiles à réaliser et c'est également pourquoi cette application a été choisie dans le cadre de cette étude.

Ce chapitre se découpe en cinq parties. La première partie présentera le système physique ainsi que la problématique qui a conduit à s'intéresser à ce système. Il s'agit d'un composant qui a rencontré des cas de rupture à la fatigue pour lesquels la connaissance phénoménologique était insuffisante avec des outils numériques mis en place pas suffisamment adaptés à la problématique. La deuxième partie de ce chapitre définira alors les hypothèses de modélisation prises en compte ainsi que les paramètres influents choisis. Ensuite dans une troisième partie, on décrira la résolution temporelle semi-analytique adoptée (Amado [AMA04a], [AMA04b]). A partir de là, on pourra réaliser dans la quatrième partie une étude paramétrique à l'aide d'une technique de continuation spécifiquement adaptée au cas étudié. Enfin, la dernière partie décrira les résultats obtenus lors de travaux exploratoires.

3.1 LA PROBLEMATIQUE

3.1.1 DESCRIPTION DU SYSTEME PHYSIQUE

Le système que nous allons étudier est l'entraînement des pompes à vides (PAV) par joint de Oldham (TOC). Le TOC est la pièce mécanique (« joint de Oldham ») qui réalise l'accouplement entre l'arbre à cames (AAC) et la pompe à vide présente uniquement sur les moteurs diesel. L'AAC est piloté par le vilebrequin via la courroie de distribution : il tourne 2 fois moins vite que le vilebrequin et sa rotation est acyclique comme celle du vilebrequin. Toutefois, l'AAC présente son propre acyclisme puisque, outre la démultiplication, la courroie de distribution introduit des modes de façade plus ou moins importants et sur une certaines plages du régime moteur. La pompe à vide est quant à elle fixée sur le carter moteur, en bout d'AAC (Figure 3.1). L'axe de la pompe et celui de l'AAC sont mésalignés : le TOC a pour rôle de transmettre la rotation de l'AAC à la pompe malgré ce mésalignement et ceci de manière homocinétique (même vitesse de rotation en amont et en aval).

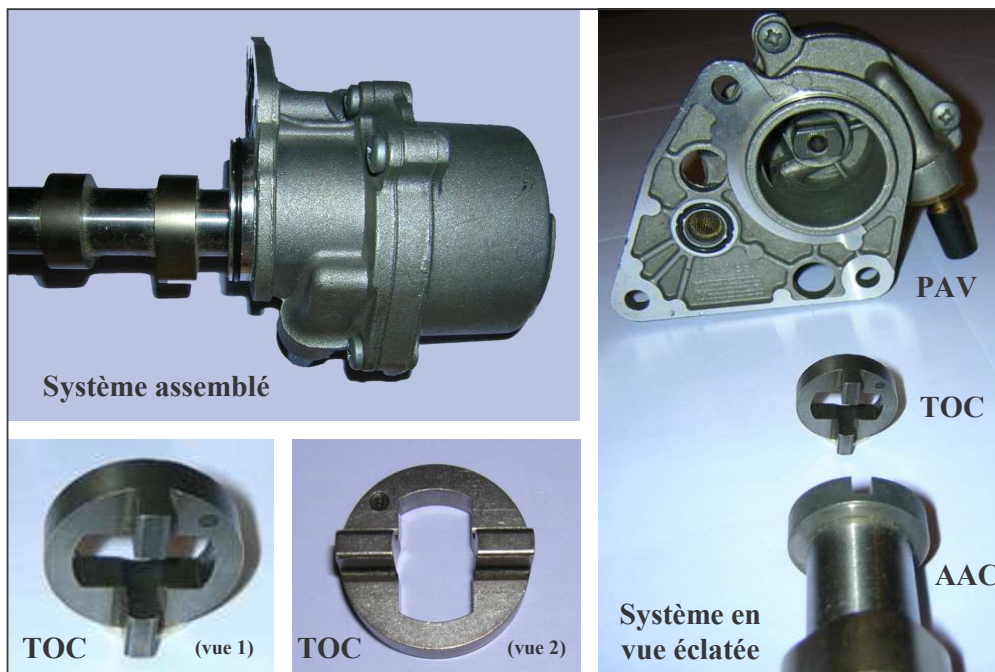


Figure 3.1 : Système d'entraînement de pompe à vide

Afin de pouvoir monter l'ensemble, des jeux fonctionnels sont présents de part et d'autre du TOC, c'est-à-dire entre le TOC et l'AAC et entre le TOC et la pompe. Ces jeux sont à l'origine de pertes de contact induisant des chocs plus ou moins importants et susceptibles d'endommager les pièces concernées. Les conséquences de ces chocs constatés sur des essais moteur sont l'usure des pièces du système avec en particulier un matage de l'arbre à cames responsable d'une augmentation des jeux fonctionnels pouvant aller jusqu'à la rupture en fatigue du TOC (Figure 3.2). En cas de rupture de l'entraînement de pompe à vide, celle-ci ne peut plus assurer son rôle principal qui est de fournir une assistance au freinage par la mise en dépression de l'amplificateur de freinage. Il s'agit alors d'un événement redouté de niveau 4 (niveau maximal car sécuritaire) selon le classement utilisé par PSA en terme de sûreté de fonctionnement. On notera que pour un moteur essence, la dépression nécessaire à l'assistance de freinage est prélevée au niveau du boîtier papillon.



Figure 3.2 : Conséquences possibles des chocs dans l'entraînement de pompe à vide

3.1.2 LES LIMITATIONS DU MODELE ADAMS

Un modèle numérique d'entraînement de pompe à vide a été réalisé sous le logiciel ADAMS, en tenant compte des hypothèses de modélisation décrites dans ce qui suit (cf. 3.2). ADAMS est un logiciel multi-corps rigides qui traite l'intégration numérique via plusieurs types de solveurs ([LAI00]). Dans ADAMS, on n'écrit pas les équations différentielles du système, seules les géométries, les inerties, la rotation imposée de l'arbre à cames et les efforts extérieurs sont implémentés. Le calcul se fait ensuite de manière transparente pour l'utilisateur.

Sous ADAMS, nous n'avons pas accès au pas de temps de calcul mais uniquement au pas de stockage (pour la représentation graphique). La valeur maximale du pas de calcul est imposée par ce pas de stockage mais on ignore comment se fait le calcul. Pour des raideurs de contact importantes, les premiers résultats ont montré que la réponse était très sensible à la valeur choisie pour le pas de stockage, dès lors que celui-ci n'est pas suffisamment petit. Autrement dit, la précision des résultats nécessite un pas de stockage petit qui accroît considérablement le coût en temps de calcul (cf. 3.3.4.2). De tels résultats nous incitent à développer des modèles spécifiques sous Matlab (cf. 3.3) qui seront mieux maîtrisés et qui présenteront des temps de calcul moins prohibitifs pour une étude paramétrique.

3.2 LES PARAMETRES DU MODELE

3.2.1 HYPOTHESES DE MODELISATION

Le modèle qui va être décrit ci-dessous est un modèle simplifié. Nous considérons que les pièces sont parfaitement alignées et nous ne prenons en compte que le jeu présent entre le TOC et l'AAC. Pour cela, on suppose que le TOC est solidaire de la pompe et que l'on a un seul et même solide noté $TP = \{TOC + PAV\}$. Dans ce cas, l'unique jeu résultant (entre TP et l'AAC) est un jeu purement angulaire noté ϵ .

Le contact entre TP et l'AAC a lieu sur une ligne parallèle à l'axe commun de l'AAC et de TP à une distance de celui-ci égale au rayon r_{aac} de l'arbre à cames (Figure 3.3). Le contact est donc de type plan/cylindre mais on remarquera que si on a une géométrie parfaite, pour des raisons de symétrie, le contact se fait simultanément sur deux lignes diamétralement opposées.

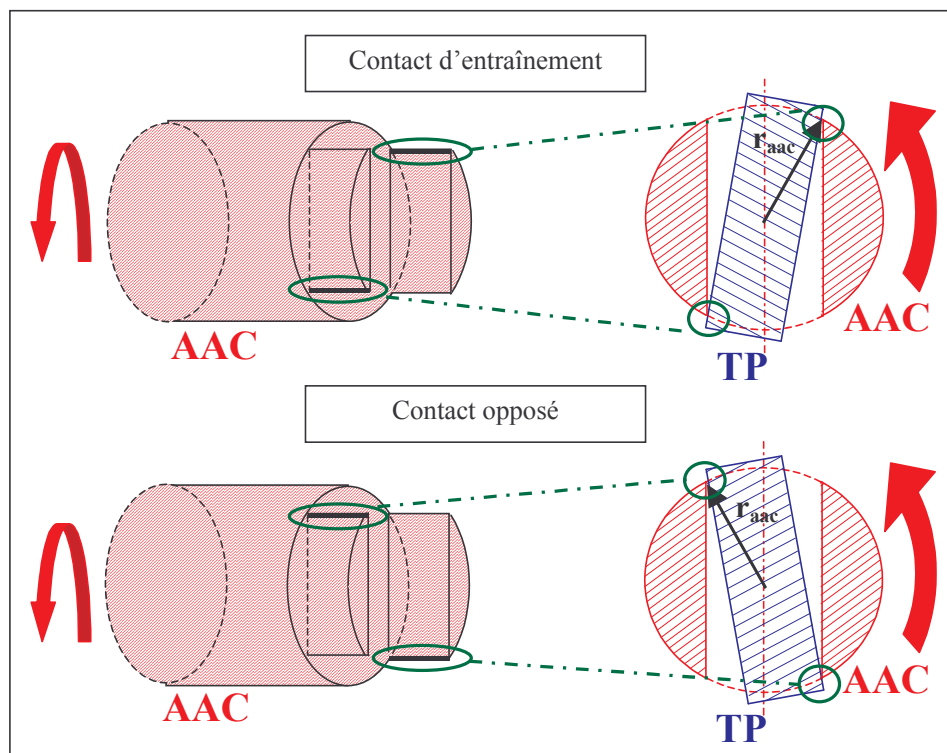


Figure 3.3 : Contact d'entraînement et contact opposé

3.2.2 LE PILOTAGE EN ROTATION DE L'ARBRE A CAMES

On suppose, dans un premier temps, que l'AAC présente un comportement découplé vis-à-vis du système étudié. En effet, il est naturel de penser que les chocs au niveau du TOC vont modifier notablement la cinématique de l'arbre.

On considère l'arbre à cames comme étant une pièce rigide. Sa rotation, paramétrée par son angle de rotation θ_{aac} , est par conséquent imposée. Sa vitesse angulaire est constituée d'une composante continue ω_{aac} ($\omega_{aac} = N_{mot}/2 =$ vitesse de rotation moyenne ou pulsation AAC (rad/s)) ainsi que des composantes harmoniques représentant l'acyclisme.

De manière générale, l'acyclisme AAC décroît en fonction du régime moteur avec néanmoins parfois une remontée d'acyclisme (pic d'acyclisme) correspondant à un mode de la façade de

distribution. L'amplitude et l'étendue (sur la plage de régime) de ce pic d'acyclisme dépend bien évidemment du moteur étudié. Pour chaque moteur, des mesures d'acyclisme AAC sont effectuées pour plusieurs valeurs du régime moteur, en distinguant chaque harmonique. On peut ainsi déterminer, par interpolation, une valeur d'acyclisme pour n'importe quelle valeur du régime (Figure 3.4).

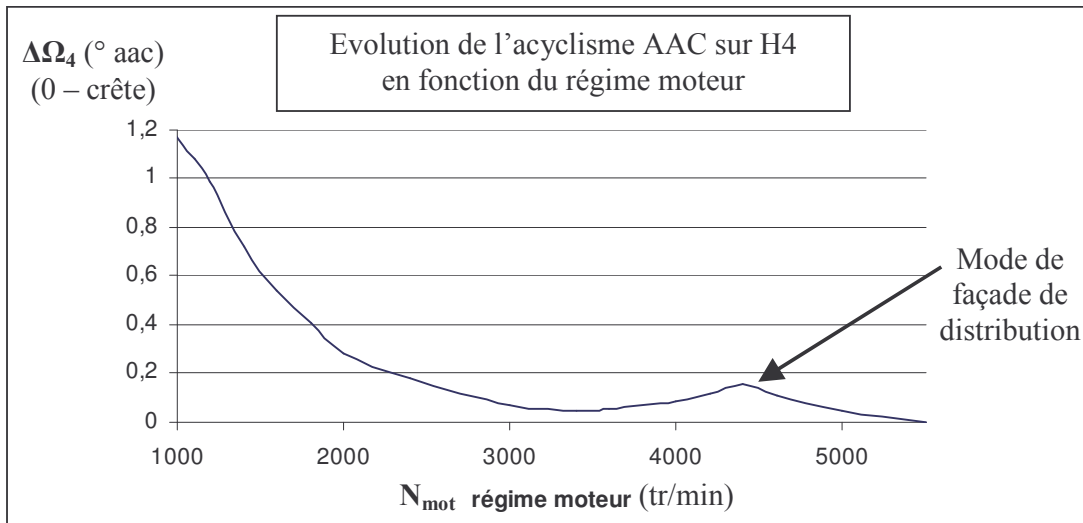


Figure 3.4 : Evolution de l'acyclisme en H4 AAC en fonction du régime moteur N_{mot}

Par conséquent, la vitesse de rotation de l'AAC d'angle θ_{aac} à un régime moteur moyen $N_{mot} = 2\omega_{aac}$ donné peut facilement être exprimée au cours du temps t par :

$$\Omega_{AAC}(t) = \frac{N_{mot}}{2} + \sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \Delta\Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \quad (3.1)$$

3.2.3 LE COUPLE RESISTANT DE LA POMPE A VIDE

La pompe à vide fournit un couple résistant $\Gamma_{res}(t)$ qui s'oppose au mouvement de rotation de l'ensemble. Dans le cadre de notre modèle simplifié, on suppose que ce couple agit sur l'ensemble du système TP défini précédemment. Il en est de même pour les aspects inertiels : l'inertie du TOC étant négligeable devant celle de la pompe à vide notée I_{pav} , c'est cette dernière qui sera prise en compte pour le système TP.

Comme pour l'acyclisme AAC, on ne connaît pas à l'avance la valeur de $\Gamma_{res}(t)$. Chaque pompe fournit un couple résistant qui dépend du régime moteur et qui est différent d'un modèle à l'autre. On ne peut connaître $\Gamma_{res}(t)$ qu'en réalisant des mesures pour plusieurs valeurs de régime moteur N_{mot} et en interpolant entre chaque mesure.

Toutefois, pour une valeur de régime moteur fixée, $\Gamma_{res}(t)$ n'est pas constant au cours du temps : on distingue en effet d'une part un couple résistant moyen constant Γ_0 et d'autre part un couple alternatif sur plusieurs harmoniques. Ceci est dû au fait qu'au cours de la rotation de la pompe, afin de faire du vide, on a un certain nombre de palettes qui vont balayer des volumes de chambres différents, et qui, au fur et à mesure de leur passage, vont créer des variations de pression au sein de ces chambres. Cela va induire des variations au niveau du couple résistant que nous supposons ici sinusoïdales.

$$\Gamma_{res}(t) = \Gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \Delta\Gamma_j \sin(\delta_j \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) \quad (3.2)$$

3.2.4 LA MODELISATION DU CONTACT

Pour décrire les chocs entre le système TP et l'AAC, plusieurs modélisations sont possibles. Dans un premier temps, on envisage de comparer un modèle de contact instantané utilisant une loi de restitution avec un modèle utilisant une raideur de contact et un amortissement de contact.

3.2.4.1 PARAMETRAGE DES SOLIDES

Si on note θ l'angle relatif entre TP (paramétré par θ_{TP}) et l'arbre à cames (paramétré par θ_{aac}), on veut que :

$$\begin{aligned} \theta = \theta_{TP} - \theta_{aac} = -\varepsilon/2 & \quad \text{correspondre à la prise de contact côté entraînement.} \\ \theta = \theta_{TP} - \theta_{aac} = +\varepsilon/2 & \quad \text{correspondre à la prise de contact côté opposé.} \end{aligned}$$

La position du système dans le jeu (sans contact) correspondrait donc au cas :

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \theta_{TP} - \theta_{aac} < +\frac{\varepsilon}{2} \quad (3.3)$$

soit

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \theta < +\frac{\varepsilon}{2} \quad (3.4)$$

A cet égard, le paramétrage des pièces se fait aisément après avoir pris soin de choisir un sens de rotation pour l'arbre à cames (Figure 3.5). Nous prendrons comme sens de rotation le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre). L'origine du système est bien évidemment choisie sur l'axe de rotation commun de TP et de l'AAC. Ces deux solides sont paramétrés par rapport à un même axe du repère de référence qui est fixe.

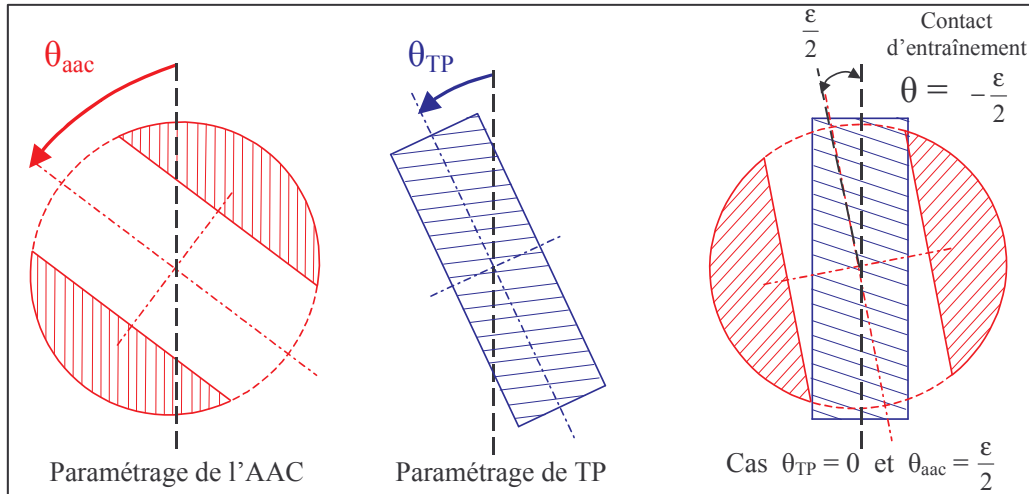


Figure 3.5 : Paramétrage angulaire des pièces

3.2.4.2 CALCUL QUASI-STATIQUE DE LA RAIDEUR DE CONTACT

Dans le cas du modèle avec une raideur de contact notée K , nous avons vu (cf. 1.2.2.4) qu'il est nécessaire de déterminer la valeur de K tenant compte des déformations locales dues aux chocs et non prises en compte dans un modèle de corps rigides.

Par conséquent, on réalise un calcul quasi-statique 2D avec les propriétés de symétrie du système. Le calcul a été réalisé sous ABAQUS implicite avec utilisation des multiplicateurs de Lagrange et un

coefficient de frottement de Coulomb égal à 0,1. Les configurations au repos et en déformation sont représentées dans la figure ci-dessous (Figure 3.6). Le matériau utilisé pour l'arbre à cames est de l'acier fritté SI10F isotrope élastique (en vert). Le TOC de pompe à vide est celui du moteur DW8. Il est considéré comme rigide et indéformable (en bleu). On impose à ce dernier un angle de rotation tous les $0,1 \cdot 10^{-3}$ rad, entre 0 (prise de contact) et $2 \cdot 10^{-3}$ rad. A chaque pas quasi-statique de chargement, on calcule le couple engendré sur l'arbre à cames en tenant compte des symétries géométriques du problème. Le temps CPU pour l'ensemble des configurations est de 8 834 secondes.

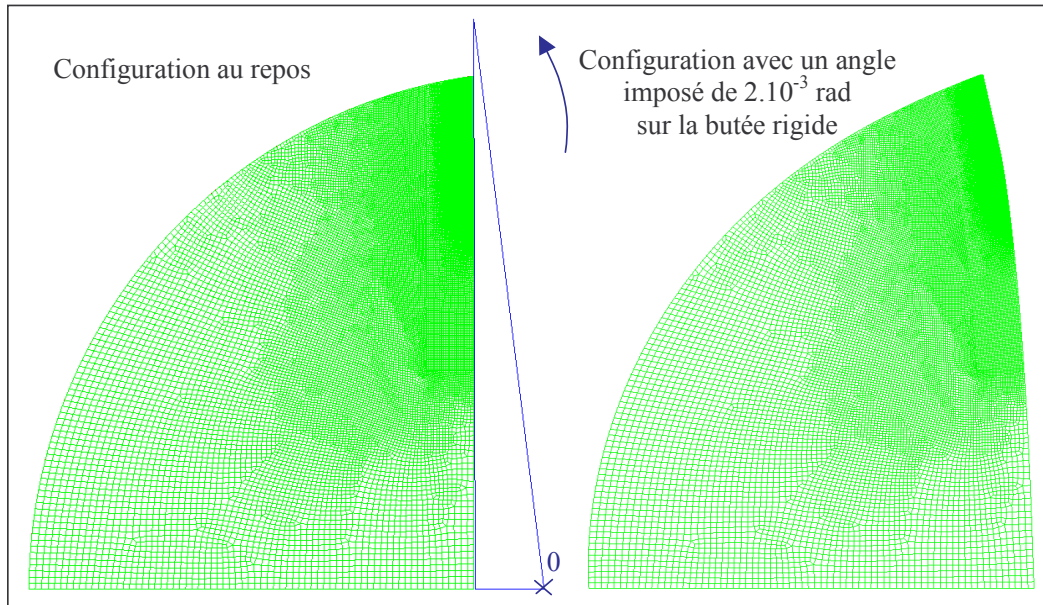


Figure 3.6 : Représentation du calcul quasi-statique de la raideur de contact sous Abaqus

Les résultats obtenus nous permettent de tracer ci-dessous la loi théorique qui lie l'angle de déformation (pour notre modèle, ce sera l'angle d'interpénétration) au couple engendré. En minimisant par les moindres carrés, on remarque que cette loi est régie par une loi de Hertz de la forme :

$$C_{\text{contact}} = 26\,400 (\delta\theta)^{1,2}$$

Afin d'adopter un modèle avec une raideur de contact constante, on utilisera finalement la valeur $\mathbf{K} = 7\,600 \text{ Nm/rad}$ pour modéliser le contact.

Les calculs obtenus sous Abaqus, la loi de Hertz associée et la loi avec une raideur de contact qui soit constante sont tous trois représentés ci-contre.

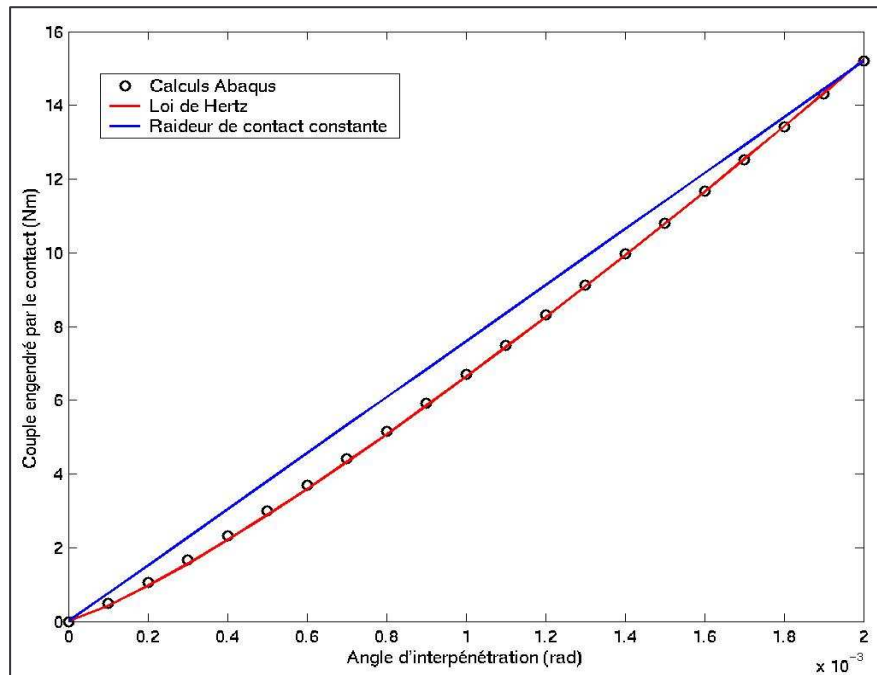


Figure 3.7 : Raideur de contact de TOC sur DW8 issue des calculs Abaqus

3.2.4.3 CHOIX DE L'AMORTISSEMENT DE CONTACT

Comme nous l'avons dit au 1.2.4.2, l'amortissement de contact est un paramètre difficile à évaluer et soumis à des corrélations expérimentales si possible. Dans un premier temps, nous utiliserons pour notre modèle, un amortissement de contact tel que $\xi = 15\%$, ce qui correspond à un taux de restitution conforme à ce que l'on rencontre dans la littérature ([TOU97]) et équivalent $r = 0,62$ (cf. 1.2.4.3).

3.2.5 SCHEMA GENERAL

On trace ci-dessous (cf. Figure 3.8) le schéma général, récapitulatif du système étudié. La pompe à vide est représentée en bleu tandis que l'arbre à cames est en rouge. La vue en coupe permet notamment de distinguer le contact du côté entraînement (contact « naturel » correspondant au bon fonctionnement théorique de l'entraînement de pompe à vide) du contact côté opposé (contact correspondant à la traversée complète du jeu angulaire ε par la pompe à vide après s'être détachée de son entraînement).

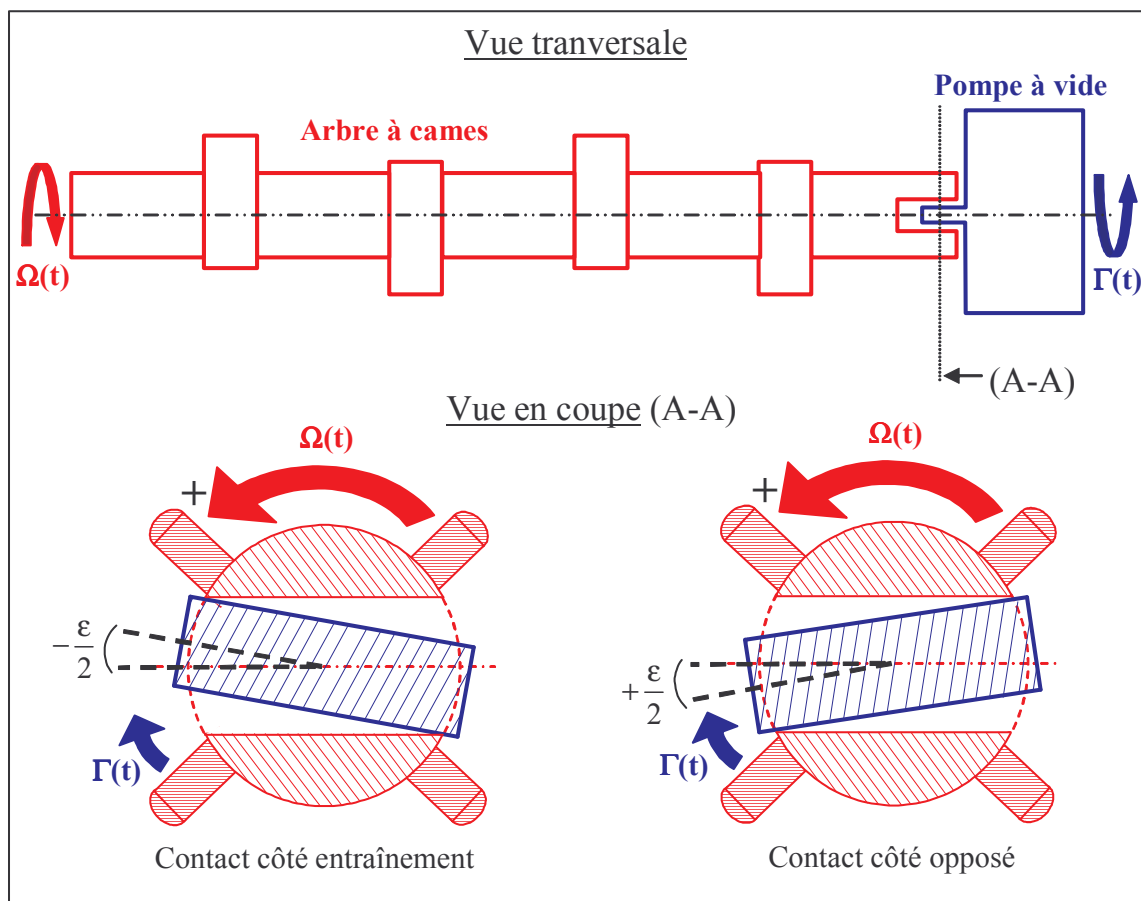


Figure 3.8 : Schéma général du modèle étudié

3.3 LA RESOLUTION SEMI-ANALYTIQUE

3.3.1 MISE EN EQUATION

Nous allons dans ce qui suit, mettre en équation le modèle simplifié que nous traitons dans ce chapitre. Après avoir exprimé la formulation générale du problème, nous écrirons les équations différentielles du mouvement dans chaque phase : le vol libre et le contact.

3.3.1.1 FORMULATION GENERALE

Le problème à étudier ici est un système différentiel non autonome (cf. 2.1.1.1ii) et non linéaire à un degré de liberté qui est l'angle relatif θ entre TP et l'arbre à cames.

Soit θ_{TP} l'angle décrit par l'inertie de TP, notée I_{pav} , celle-ci est soumise au couple résistant Γ_{res} et au couple engendré par les chocs $C_{contact}$. On a :

$$I_{pav} \ddot{\theta}_{TP}(t) = -\Gamma_{res}(t) - C_{contact}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \quad (3.5)$$

Or on a :

$$\theta(t) = \theta_{TP}(t) - \theta_{aac}(t) \quad (3.6)$$

où θ_{aac} est complètement piloté par l'acyclisme (cf. 3.2.2).

L'équation différentielle s'écrit alors sous sa forme générale :

$$I_{pav} \ddot{\theta}(t) = -I_{pav} \ddot{\theta}_{aac}(t) - \Gamma_{res}(t) - C_{contact}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \quad (3.7)$$

où

$$\begin{cases} C_{contact}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = 0 & \text{si } -\frac{\varepsilon}{2} \leq \theta(t) \leq +\frac{\varepsilon}{2} \\ C_{contact}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = K \left(\theta(t) + \frac{\varepsilon}{2} \right) + C \dot{\theta}(t) & \text{si } \theta(t) < -\frac{\varepsilon}{2} \\ C_{contact}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = K \left(\theta(t) - \frac{\varepsilon}{2} \right) + C \dot{\theta}(t) & \text{si } \theta(t) > +\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Le caractère non autonome du système provient des expressions de l'acyclisme au niveau de l'arbre à cames (3.1) et de celles du couple résistant de pompe à vide (3.2). En revanche, le caractère non linéaire du système provient de la discontinuité apportée par le couple généré par le contact et défini en 3.2.4.

Nous allons voir maintenant que la formulation générale peut être subdivisée en deux équations différentielles linéaires : celle gérant la phase de mouvement en vol libre (cf. 3.3.1.2) et celle décrivant la phase de contact (cf. 3.3.1.3).

3.3.1.2 LA PHASE DE VOL LIBRE

Lorsque TP est dans le jeu, l'équation différentielle régissant son mouvement est facile à mettre en place et peut se résoudre analytiquement comme nous allons le voir. Notons, d'autre part, que dans cette configuration (phase de vol libre) pour laquelle on a $-\varepsilon/2 \leq \theta \leq +\varepsilon/2$, les résultats sont communs aux deux modèles (loi de restitution, raideur de contact avec amortissement de contact). On a tout simplement $C_{\text{contact}}(t) = 0$.

Dans le jeu, TP n'est qu'une simple inertie I_{pav} en rotation qui subit un couple résistant C_{res} . Dans ce cas, l'équation différentielle régissant la rotation θ_{TP} de TP est tout simplement :

$$I_{\text{pav}} \ddot{\theta}_{\text{TP}}(t) = -\Gamma_{\text{res}}(t) \quad (3.9)$$

$$\text{soit} \quad I_{\text{pav}} \ddot{\theta}_{\text{TP}}(t) = -\Gamma_0 - \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \Delta\Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Gamma_j}) \quad (3.10)$$

ou encore

$$I_{\text{pav}} \ddot{\theta}(t) = -\Gamma_0 - \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \Delta\Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Gamma_j}) + I_{\text{pav}} \sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{\text{aac}}^2 \Delta\Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Omega_j}) \quad (3.11)$$

On note les conditions initiales à $t = t_i$:

$$\begin{cases} \theta(t_i) = \theta_i \\ \dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}_i \end{cases} \quad (3.12)$$

3.3.1.3 LE CONTACT : MODELE AVEC DUREE DE CHOC

On note respectivement K et C , la raideur angulaire de contact et l'amortissement angulaire de contact (de type visqueux). K et C sont des constantes réelles positives. L'équation différentielle régissant le mouvement de TP dans le contact est donc :

$$I_{\text{pav}} \ddot{\theta}_{\text{TP}}(t) + C(\dot{\theta}_{\text{TP}}(t) - \dot{\theta}_{\text{aac}}(t)) + K(\theta_{\text{TP}}(t) - \theta_{\text{aac}}(t) + \delta_{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2}) = -\Gamma_{\text{res}}(t) \quad (3.13)$$

avec $\begin{cases} \delta_{\varepsilon} = +1 & \text{si contact côté entraînement} \\ \delta_{\varepsilon} = -1 & \text{si contact côté opposé} \end{cases}$

En injectant l'expression de $\ddot{\theta}_{\text{aac}}(t)$ et $\Gamma_{\text{res}}(t)$, on obtient l'équation différentielle :

$$I_{\text{pav}} \ddot{\theta}(t) + C\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = -\Gamma_0 - K\delta_{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \Delta\Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Gamma_j}) \quad (3.14)$$

$$+ I_{\text{pav}} \sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{\text{aac}}^2 \Delta\Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Omega_j})$$

3.3.2 RESOLUTION SUR CHAQUE PHASE DE MOUVEMENT

3.3.2.1 SUR LA PHASE DE VOL LIBRE

Nous savons que Γ_0 et Γ_j ($1 \leq j \leq N_\Gamma$) dépendent de ω_{aac} . On se place par conséquent à un régime moteur fixé (ω_{aac} constant) de sorte que l'équation différentielle (3.11) puisse s'intégrer de la manière suivante :

Pour $-\frac{\varepsilon}{2} \leq \theta(t) \leq +\frac{\varepsilon}{2}$ et $t \geq t_i$, soit $\theta_i = \theta(t_i)$ et $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(t_i)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \theta_i + \left(\dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \frac{\Delta\Gamma_j}{\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} I_{pav}} \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Gamma_j}) + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \delta_{\Omega_j} \omega_{aac} \Delta\Omega_j \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Omega_j}) \right) (t - t_i) \\ \quad - \frac{\Gamma_0}{2 I_{pav}} (t - t_i)^2 + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \frac{\Delta\Gamma_j}{\delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}} (\sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) - \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Gamma_j})) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N_\Omega} \Delta\Omega_j (\sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) - \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Omega_j})) \\ \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_i - \frac{\Gamma_0}{I_{pav}} (t - t_i) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \frac{\Delta\Gamma_j}{\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} I_{pav}} (\cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) - \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Gamma_j})) \\ \quad - \sum_{j=1}^{N_\Omega} \delta_{\Omega_j} \omega_{aac} \Delta\Omega_j (\cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) - \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Omega_j})) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

On connaît donc parfaitement la solution temporelle du système en phase de vol libre à partir des conditions initiales (Figure 3.9). On remarque qu'on obtient dans l'expression analytique de θ un polynôme du second degré en t ainsi que des termes supplémentaires en « $\sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j})$ » apportés par l'acyclisme AAC et des termes en « $\sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j})$ » apportés par le couple résistant variable du système TP. Si on cherche, par exemple, à déterminer l'instant t_c tel que $|\theta(t_c)| = \varepsilon/2$, on obtient alors une équation algébrique non linéaire qu'on ne peut résoudre analytiquement. Il sera néanmoins possible d'approcher la valeur de t_c numériquement.

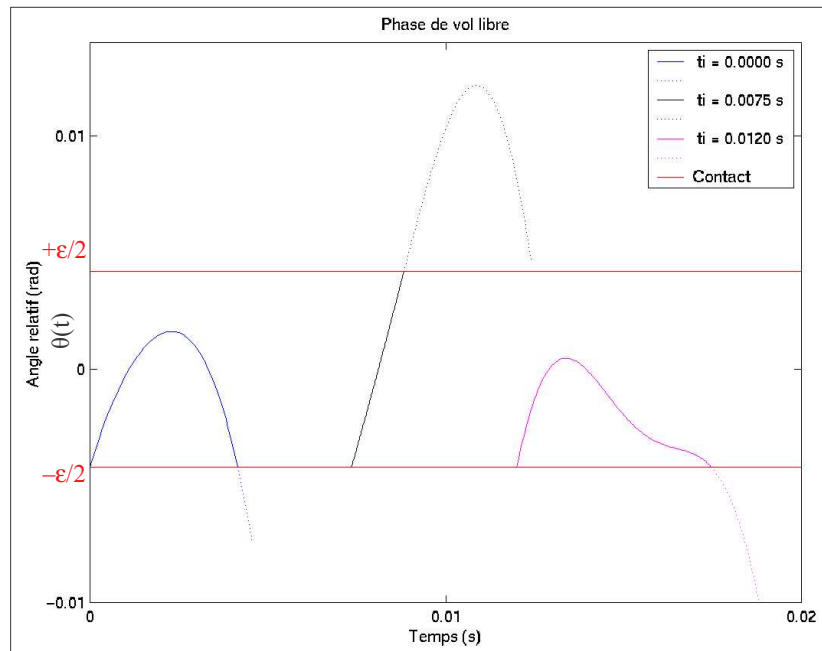


Figure 3.9 : Phase de vol libre à 3 instant initiaux t_i différents
(on part du contact d'entraînement $\theta_i = -\varepsilon/2$)

3.3.2.2 PENDANT LE CONTACT

Pour résoudre l'équation différentielle (3.14), on résout tout d'abord l'équation du second ordre sans second membre, puis on recherche une solution particulière avec la prise en compte du second membre de l'équation.

i) Equation sans second membre

L'équation (3.14) sans second membre s'écrit :

$$I_{pav} \ddot{\theta}(t) + C \dot{\theta}(t) + K \theta(t) = 0 \quad (3.16)$$

On note Δ_0 le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta_0 = C^2 - 4I_{pav} K \quad (3.17)$$

Une telle équation a une solution analytique de la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_{-}(t) = \left(A_{-} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_0}}{2I_{pav}} t\right) + B_{-} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_0}}{2I_{pav}} t\right) \right) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} t\right) & \text{si } \Delta_0 < 0 \\ \alpha_{+}(t) = A_{+} \exp\left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} t\right) + B_{+} \exp\left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} t\right) & \text{si } \Delta_0 > 0 \\ \alpha_{\Delta_0}(t) = (A_{\Delta_0} t + B_{\Delta_0}) \exp\left(\frac{-C}{2I_{pav}} t\right) & \text{si } \Delta_0 = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

où A_{-} , A_{+} , A_{Δ_0} , B_{-} , B_{+} et B_{Δ_0} sont des constantes réelles.

ii) Equation avec second membre : solution particulière

L'équation (3.14) avec second membre peut s'écrire :

$$\begin{cases} I_{pav} \ddot{\theta}(t) + C \dot{\theta}(t) + K \theta(t) = F_{Ex}(t) \\ F_{Ex}(t) = -\Gamma_0 - K \delta_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \Delta \Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) + I_{pav} \sum_{j=1}^{N_\Omega} \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 \Delta \Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \end{cases} \quad (3.19)$$

On cherche une solution particulière $\beta(t)$, de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \beta(t) = & C_\beta + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} (A_{\Gamma_j} \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) + B_{\Gamma_j} \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j})) \\ & + \sum_{j=1}^{N_\Omega} (A_{\Omega_j} \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) + B_{\Omega_j} \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j})) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En écrivant $F_\beta(t) = I_{pav} \ddot{\beta}(t) + C \dot{\beta}(t) + K \beta(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
F_\beta(t) = & K C_\beta \\
& + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \left[+\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C B_{\Gamma_j} + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) A_{\Gamma_j} \right] \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) \\
& + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \left[-\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C A_{\Gamma_j} + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) B_{\Gamma_j} \right] \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) \\
& + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \left[+\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C B_{\Omega_j} + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) A_{\Omega_j} \right] \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \\
& + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \left[-\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C A_{\Omega_j} + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) B_{\Omega_j} \right] \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En identifiant $F_\beta(t)$ (3.21) avec $F_{Ex}(t)$ (3.19), on obtient le système algébrique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
K C_\beta = -\Gamma_0 - K \delta_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2} & \\
\left[+\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C B_{\Gamma_j} + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) A_{\Gamma_j} \right] = 0 & \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Gamma \\
\left[-\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C A_{\Gamma_j} + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) B_{\Gamma_j} \right] = -\Delta\Gamma_j & \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Gamma \\
\left[+\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C B_{\Omega_j} + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) A_{\Omega_j} \right] = 0 & \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Omega \\
\left[-\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C A_{\Omega_j} + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}) B_{\Omega_j} \right] = \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav} \Delta\Omega_j & \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Omega
\end{array} \right. \tag{3.22}$$

La solution de ce système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_\beta = -\frac{\Gamma_0}{K} - \delta_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2} \\
\forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Gamma : \left\{ \begin{array}{l}
A_{\Gamma_j} = + \frac{\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C}{(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C)^2 + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})^2} \Delta\Gamma_j \\
B_{\Gamma_j} = - \frac{K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}}{(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} C)^2 + (K - \delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})^2} \Delta\Gamma_j
\end{array} \right. \\
\forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N_\Omega : \left\{ \begin{array}{l}
A_{\Omega_j} = - \frac{(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C)(\delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})}{(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C)^2 + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})^2} \Delta\Omega_j \\
B_{\Omega_j} = + \frac{(K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})(\delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})}{(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} C)^2 + (K - \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav})^2} \Delta\Omega_j
\end{array} \right.
\end{array} \right. \tag{3.23}$$

iii) Solution générale

L'évolution temporelle de θ pendant la phase de contact a par conséquent la forme suivante :

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_-(t) = \alpha_-(t) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 < 0 \\ \theta(t) = \theta_+(t) = \alpha_+(t) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 > 0 \\ \theta(t) = \theta_{\Delta_0}(t) = \alpha_{\Delta_0}(t) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

soit

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_-(t) = \left(A_- \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t\right) + B_- \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t\right) \right) \exp\left(-\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} t\right) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 < 0 \\ \theta(t) = \theta_+(t) = A_+ \exp\left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t\right) + B_+ \exp\left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t\right) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 > 0 \\ \theta(t) = \theta_{\Delta_0}(t) = (A_{\Delta_0} t + B_{\Delta_0}) \exp\left(\frac{-C}{2 I_{\text{pav}}} t\right) + \beta(t) & \text{si } \Delta_0 = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

où A_- , A_+ , A_{Δ_0} , B_- , B_+ et B_{Δ_0} sont des constantes réelles et $\beta(t)$ est la solution particulière déterminée précédemment au ii).

Il reste maintenant à déterminer les constantes A_- , A_+ , A_{Δ_0} , B_- , B_+ et B_{Δ_0} à partir des conditions initiales $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$ de la phase de contact à $t = t_i$ notées comme pour la phase de vol libre (3.12) :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \theta_i &= \left(A_- \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + B_- \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) \right) \exp\left(-\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \beta(t_i) \\ \dot{\theta}_i &= \left[\left(\frac{-C A_- + \sqrt{|\Delta_0|} B_-}{2 I_{\text{pav}}} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{-C B_- - \sqrt{|\Delta_0|} A_-}{2 I_{\text{pav}}} \right) \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) \right] \exp\left(-\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \dot{\beta}(t_i) \end{aligned} \right. & \text{si } \Delta_0 < 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \theta_i &= A_+ \exp\left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + B_+ \exp\left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \beta(t_i) \\ \dot{\theta}_i &= \frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} A_+ \exp\left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \\ &\quad \frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} B_+ \exp\left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \dot{\beta}(t_i) \end{aligned} \right. & \text{si } \Delta_0 > 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \theta_i &= (A_0 t_i + B_0) \exp\left(\frac{-C}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \beta(t_i) \\ \dot{\theta}_i &= \left(\frac{-C A_0}{2 I_{\text{pav}}} t_i + \left(A_0 - \frac{C B_0}{2 I_{\text{pav}}} \right) \right) \exp\left(\frac{-C}{2 I_{\text{pav}}} t_i\right) + \dot{\beta}(t_i) \end{aligned} \right. & \text{si } \Delta_0 = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \beta(t) &= C_\beta + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} (A_{\Gamma_j} \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) + B_{\Gamma_j} \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_\Omega} (A_{\Omega_j} \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) + B_{\Omega_j} \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j})) \\ \dot{\beta}(t) &= \sum_{j=1}^{N_\Gamma} (\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} B_{\Gamma_j} \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) - \delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} A_{\Gamma_j} \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_\Omega} (\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} B_{\Omega_j} \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) - \delta_{\Omega_j} \omega_{aac} A_{\Omega_j} \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j})) \end{aligned} \right. \quad (3.27)$$

Après résolution du système (3.26), on trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} A_- &= \frac{2 I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \left[\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} t_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \frac{C}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} t_i \right) \right] \exp \left(\frac{C}{2 I_{pav}} t_i \right) \\ B_- &= \frac{2 I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \left[\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} t_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \frac{C}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{pav}} t_i \right) \right] \exp \left(\frac{C}{2 I_{pav}} t_i \right) \\ A_+ &= -\frac{I_{pav}}{\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{pav}} t_i \right) \\ B_+ &= +\frac{I_{pav}}{\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C + \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{C - \sqrt{\Delta_0}}{2 I_{pav}} t_i \right) \\ A_{\Delta_0} &= \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \frac{C}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{C}{2 I_{pav}} t_i \right) \\ B_{\Delta_0} &= \left(-(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) t_i + \frac{C}{2 I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \left(\frac{2 I_{pav}}{C} - t_i \right) \right) \exp \left(\frac{C}{2 I_{pav}} t_i \right) \end{aligned} \right. \quad (3.28)$$

En injectant les expressions de A_- , A_+ , A_{Δ_0} , B_- , B_+ et B_{Δ_0} dans la relation (3.25), on obtient l'expression analytique complète de la phase de contact à partir des conditions initiales $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$.

Pour $|\theta(t)| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $t \geq t_i$, soit $\theta_i = \theta(t_i)$, $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(t_i)$ et $\Delta_0 = C^2 - 4I_{pav} K < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \beta(t) + \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \left[\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \right. \\ \quad \left. + \left((\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) + \frac{C}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \\ \dot{\theta}(t) = \dot{\beta}(t) + \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \left[\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{\Delta_0 + C^2}{4I_{pav}^2} (\theta_i - \beta(t_i)) + \frac{C}{2I_{pav}} (\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \right] \exp \left(\frac{-C}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Pour $|\theta(t)| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $t \geq t_i$, soit $\theta_i = \theta(t_i)$, $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(t_i)$ et $\Delta_0 = C^2 - 4I_{pav} K > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \beta(t) - \frac{I_{pav}}{\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C - \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \\ \quad + \frac{I_{pav}}{\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C + \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \\ \dot{\theta}(t) = \dot{\beta}(t) + \frac{C + \sqrt{\Delta_0}}{2\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C - \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{-C - \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \\ \quad + \frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2\sqrt{\Delta_0}} \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \left(\frac{C + \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} \right) (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \exp \left(\frac{-C + \sqrt{\Delta_0}}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Pour $|\theta(t)| > \frac{\varepsilon}{2}$ et $t \geq t_i$, soit $\theta_i = \theta(t_i)$, $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(t_i)$ et $\Delta_0 = C^2 - 4I_{pav} K = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = \beta(t) + \left((\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i))(t - t_i) + \frac{C}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \left(\frac{2I_{pav}}{C} + t - t_i \right) \right) \exp \left(\frac{-C}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \\ \dot{\theta}(t) = \dot{\beta}(t) - \frac{C}{2I_{pav}} \left[\left((\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) + \frac{C}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) (t - t_i) - \frac{2I_{pav}}{C} (\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i)) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t - t_i) \right) \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Quel que soit le signe de Δ_0 , les expressions (3.29), (3.30) et (3.31) s'écrivent en fonction de la même solution particulière β définie par (3.27) et (3.23).

3.3.3 SOLUTIONS TEMPORELLES

Une fois l'expression analytique connue dans la phase de contact ((3.29), (3.30) et (3.31)) et connaissant l'expression analytique de la phase de vol libre (3.15), nous allons maintenant déterminer la solution complète des modèles étudiés. Qu'il s'agisse du modèle avec loi de restitution ou bien du modèle avec raideur et amortissement de contact, la résolution du problème linéaire par morceaux se fait de manière semi-analytique par raccordement des phases de mouvement.

3.3.3.1 MODELE AVEC LOI DE RESTITUTION

Pour le modèle avec loi de restitution, on comprend bien que, connaissant l'expression analytique de la phase de vol libre, il suffit de déterminer les instants auxquels ont lieux les chocs. La solution générale peut ainsi être obtenue de manière itérative où chaque impact donne, via la loi de restitution, les nouvelles conditions initiales pour la phase de vol libre suivante.

Soit t_i l'instant initial de la phase de vol libre avec les conditions initiales données par (3.12). Si on note t_{i+1} l'instant d'impact correspondant à la fin de la phase de vol libre, d'après (3.15), celui-ci vérifie :

$$\theta(t_{i+1}) = \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.32)$$

soit

$$\begin{aligned} \theta_i + \left(\dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\Delta \Gamma_j}{\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} I_{pav}} \cos(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_{i+1} + \varphi_{\Gamma_j}) + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \delta_{\Omega_j} \omega_{aac} \Delta \Omega_j \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_{i+1} + \varphi_{\Omega_j}) \right) (t_{i+1} - t_i) \\ - \frac{\Gamma_0}{2 I_{pav}} (t_{i+1} - t_i)^2 + \sum_{j=1}^{N_r} \frac{\Delta \Gamma_j}{\delta_{\Gamma_j}^2 \omega_{aac}^2 I_{pav}} \left(\sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_{i+1} + \varphi_{\Gamma_j}) - \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Gamma_j}) \right) \\ - \sum_{j=1}^{N_\Omega} \Delta \Omega_j \left(\sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_{i+1} + \varphi_{\Omega_j}) - \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t_i + \varphi_{\Omega_j}) \right) = \pm \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

t_{i+1} est la solution d'une équation algébrique non linéaire (3.33) qu'on ne peut pas résoudre analytiquement. En revanche, cette équation peut être résolue numériquement avec la précision que l'on souhaite. Pour se faire, soit h_t un réel suffisamment petit, on pose le vecteur $\underline{T}_{ht}(t_i)$:

$$\underline{T}_{ht}(t_i) = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i + h_t \\ t_i + 2h_t \\ \vdots \\ t_i + 10h_t \end{pmatrix}$$

A l'aide de l'expression analytique (3.15), on détermine les vecteurs $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(t_i, h_t)$ et $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(t_i, h_t)$:

$$\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht}(t_i)) = \begin{pmatrix} \theta(t_i) + \varepsilon/2 \\ \theta(t_i + h_t) + \varepsilon/2 \\ \theta(t_i + 2h_t) + \varepsilon/2 \\ \vdots \\ \theta(t_i + 10h_t) + \varepsilon/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht}(t_i)) = \begin{pmatrix} \theta(t_i) - \varepsilon/2 \\ \theta(t_i + h_t) - \varepsilon/2 \\ \theta(t_i + 2h_t) - \varepsilon/2 \\ \vdots \\ \theta(t_i + 10h_t) - \varepsilon/2 \end{pmatrix}$$

On détecte ensuite s'il y a un changement de signe dans les composantes de chacun des vecteurs $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht}(t_i))$ et $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht}(t_i))$. Si pour chaque vecteur les composantes ont le même signe, alors on détermine $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht}(t_i + 10h_t))$ et $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht}(t_i + 10h_t))$ puis $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht}(t_i + 20h_t))$ et $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht}(t_i + 20h_t))$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une inversion de signe dans au moins l'un des deux vecteurs.

Supposons que le changement de signe intervient au moins dans l'un des 2 vecteurs $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht}(t_i))$ et $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht}(t_i))$. S'il existe, on note $n_{\varepsilon j}$ ($1 \leq n_{\varepsilon j} \leq 10$ et $j = 1$ ou 2) le numéro de la composante du vecteur $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon j}(\underline{T}_{ht}(t_i))$ juste avant le changement de signe et par conséquent tel que :

$$\begin{cases} \theta(t_i + (n_{\varepsilon 1} - 1)h_t) + \frac{\varepsilon}{2} \geq 0 & \text{et} & \theta(t_i + n_{\varepsilon 1}h_t) + \frac{\varepsilon}{2} < 0 \\ \theta(t_i + (n_{\varepsilon 2} - 1)h_t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq 0 & \text{et} & \theta(t_i + n_{\varepsilon 2}h_t) + \frac{\varepsilon}{2} > 0 \end{cases}$$

Si seul $n_{\varepsilon 1}$ existe ou bien que $n_{\varepsilon 1} < n_{\varepsilon 2}$, alors on sait que le prochain impact à t_{i+1} a lieu sur le contact d'entraînement entre les instants t_{\min} et t_{\max} tels que $t_{\min} = t_i + (n_{\varepsilon 1} - 1)h_t \leq t_{i+1} \leq t_i + n_{\varepsilon 1}h_t = t_{\max}$. Si seul $n_{\varepsilon 2}$ existe ou bien que $n_{\varepsilon 2} < n_{\varepsilon 1}$, alors on sait que le prochain impact à t_{i+1} a lieu sur le contact opposé entre les instants t_{\min} et t_{\max} tels que $t_{\min} = t_i + (n_{\varepsilon 2} - 1)h_t \leq t_{i+1} \leq t_i + n_{\varepsilon 2}h_t = t_{\max}$. On connaît donc la valeur de t_{i+1} avec une précision h_t (grossière au départ). Afin d'avoir une meilleure précision, on itère le processus décrit précédemment à partir de $\underline{T}_{ht/10}(t_{\min})$ en ne considérant, selon le côté du contact, que le vecteur $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 1}(\underline{T}_{ht/10}(t_{\min}))$ ou $\underline{\Delta\theta}_{\varepsilon 2}(\underline{T}_{ht/10}(t_{\min}))$. A chaque étape n de ce processus du type dichotomie, on obtient la valeur de t_{i+1} avec une précision de $h_t/10^n$. Le nombre d'étapes est par conséquent assez restreint et la convergence se fait rapidement avec des calculs vectorisés. Pour notre étude, on caractérise t_{i+1} en prenant la valeur par défaut avec une précision de 10^{-9} s.

Une fois t_{i+1} déterminé numériquement, la phase de vol libre suivante est connue analytiquement d'après (3.15) à partir des conditions initiales $(\theta_{i+1}, \dot{\theta}_{i+1})$ à $t = t_{i+1}$ définies par la loi de restitution :

$$\begin{cases} \theta_{i+1} = \theta(t_{i+1}) \\ \dot{\theta}_{i+1} = -r \dot{\theta}(t_{i+1}) \end{cases}$$

La solution temporelle débutant à $t = t_0$ se construit de manière semi-analytique par raccordement aux instants t_i ($i > 0$) des phases de vol libre successives. On remarque alors que la solution temporelle est complètement caractérisée par la matrice des instants t_i et des conditions initiales $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$ correspondantes :

$$\begin{pmatrix} t_0 & \theta_0 & \dot{\theta}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_i & \theta_i & \dot{\theta}_i \\ t_{i+1} & \theta_{i+1} & \dot{\theta}_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Cette matrice suffit ensuite à tracer l'évolution temporelle $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ grâce aux expressions analytiques des phases de vol libre. On voit ici apparaître la solution discrétisée aux points de changement de phase t_i . Ces points correspondent aux points itérés par les fonctions de passage qui seront définies plus tard au 3.3.5. Un exemple d'évolution temporelle est donné sur les tracés qui suivent (Figure 3.10).

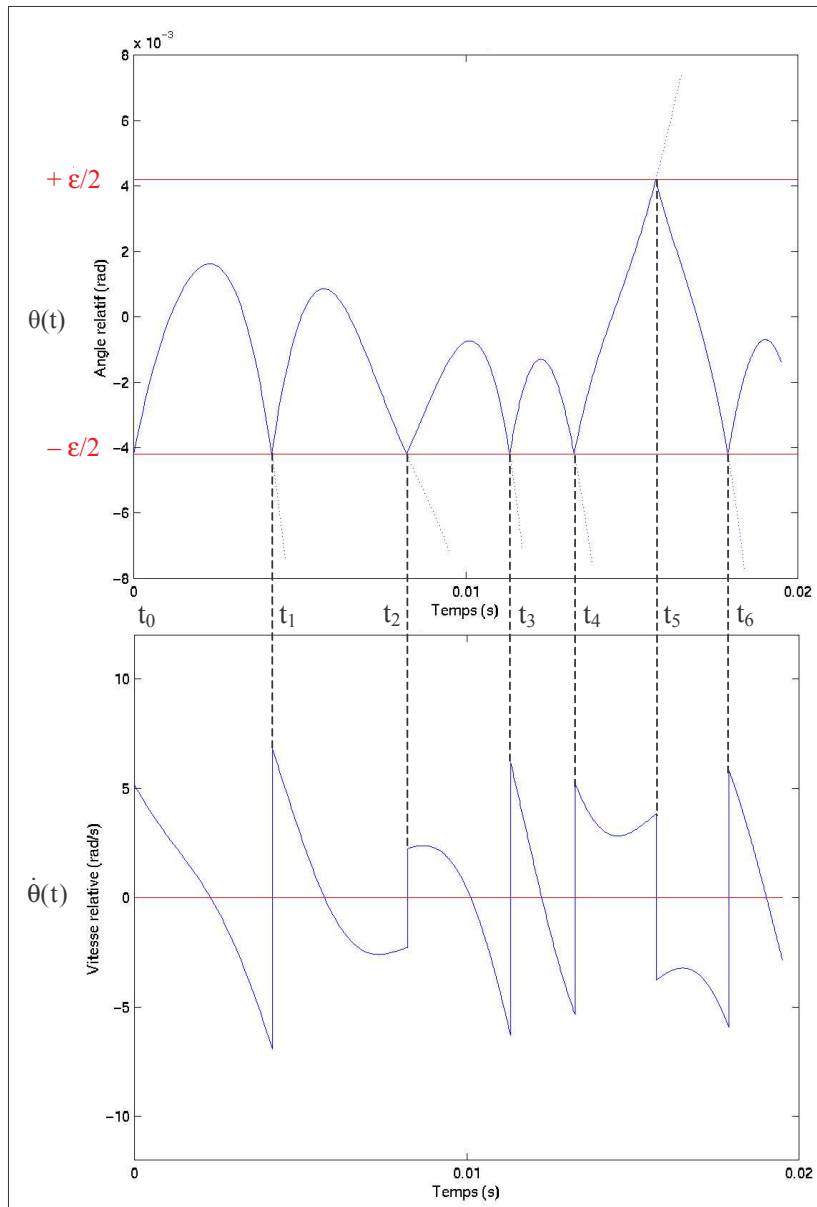


Figure 3.10 : Evolution temporelle de θ et $\dot{\theta}$
(loi de restitution avec $r = 0,98$)

3.3.3.2 MODELE AVEC RAIDEUR DE CONTACT

Pour le modèle avec raideur de contact et amortissement de contact, la méthode semi-analytique est similaire à celle du modèle précédent, à ceci près qu'on a alternance entre phase de vol libre et phase de contact. Soit t_{i-1} l'instant qui initie une phase de vol libre, nous avons vu précédemment (3.3.3.1) comment déterminer numériquement l'instant de prise de contact t_i . Pour ce modèle, les instants de prise de contact sont en revanche déterminés par excès à 10^{-9} s près, afin de s'assurer du début effectif du contact avec $(\theta_i, \dot{\theta}_i) = (\theta(t_i), \dot{\theta}(t_i))$ déterminés par (3.15). La phase suivante est une phase de contact définie, selon le signe de Δ_0 , par (3.29), (3.30) ou (3.31). Le contact cesse alors à l'instant t_{i+1} défini par :

$$\theta(t_{i+1}) = \text{sign}(\theta_i) \frac{\varepsilon}{2}$$

soit en supposant uniquement le cas $\Delta_0 < 0$:

$$\beta(t_{i+1}) + \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \left[\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) + \left(\dot{\theta}_i - \dot{\beta}(t_i) + \frac{C}{2I_{pav}} (\theta_i - \beta(t_i)) \right) \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) = \text{sign}(\theta_i) \frac{\varepsilon}{2}$$

t_{i+1} est la solution d'une équation algébrique non linéaire qu'on ne peut pas résoudre analytiquement. C'est la même chose pour $\Delta_0 \geq 0$. En revanche, cette équation peut être résolue numériquement avec la précision que l'on souhaite d'une manière similaire à celle décrite au 3.3.3.1. Dans notre cas, on estime t_{i+1} par excès à 10^{-9} s près. La solution temporelle complète se construit alors par raccordement comme au 3.3.3.1. On représente ci-dessous (Figure 3.11) un exemple d'évolution temporelle du modèle avec raideur de contact où l'angle et la vitesse sont cette fois-ci continus.

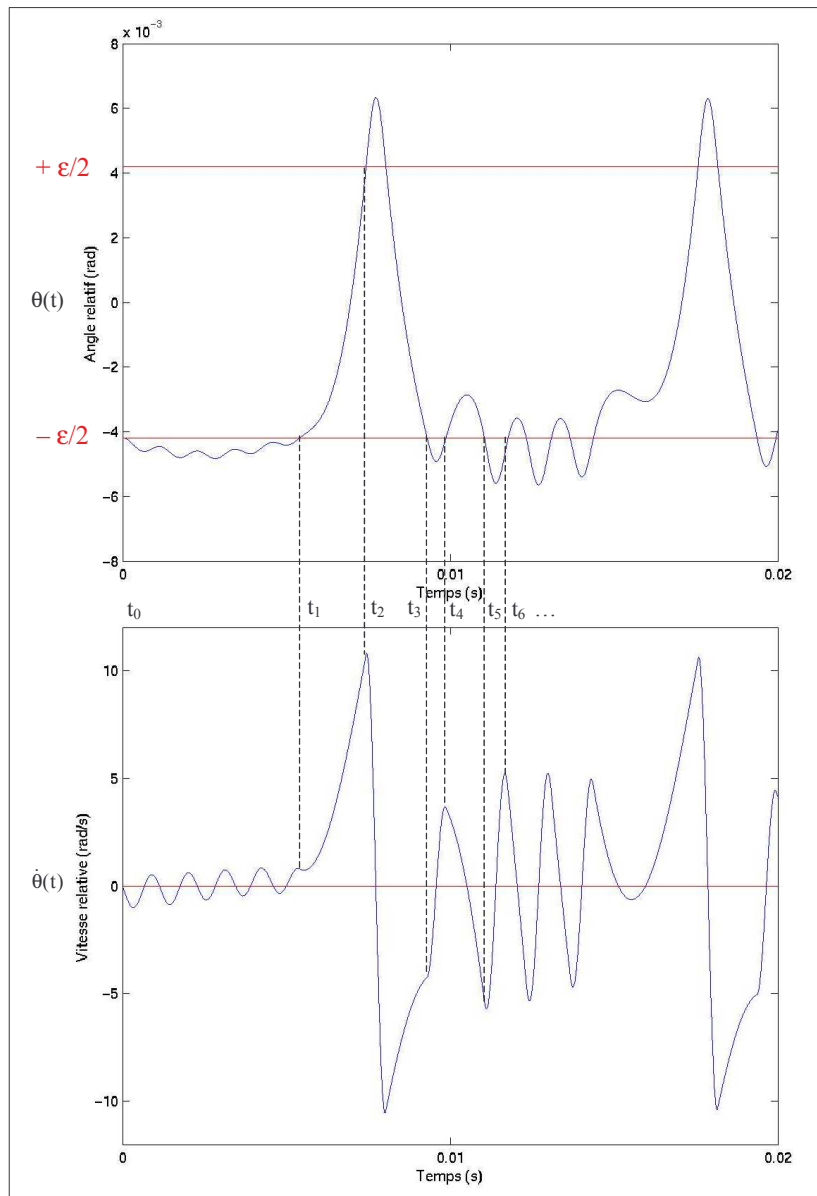


Figure 3.11 : Evolution temporelle de θ et $\dot{\theta}$
(raideur de contact $K = 7600$ Nm/rad)

3.3.4 VALIDATION DU MODELE SEMI-ANALYTIQUE

3.3.4.1 COMPARAISON DES 2 MODELES

Afin de pouvoir corréliser les deux modèles entre eux, nous avons tracé ci-dessous la solution de chacune des approches avec des conditions initiales identiques et en utilisant la relation d'équivalence déterminée précédemment. Nous avons distingué deux cas : l'un sans et l'autre avec prise de contact de manière durable. Le premier cas correspond à une succession de rebonds, le second cas à un collage temporaire du système sur l'un des côtés. Cette étude nous permettra de retenir un seul de ces deux modèles.

i) Cas d'une succession de rebonds

On se place dans un cas où il n'y a pas de prise de contact, c'est-à-dire lorsqu'on n'observe que des « rebonds ». De manière pratique, il suffit de choisir un taux de restitution r important afin de diminuer les pertes d'énergies au niveau des chocs. Nous avons tracé ci-après l'évolution temporelle de l'angle relatif (Figure 3.12) et de la vitesse relative (Figure 3.13) avec les mêmes conditions initiales pour chacun des modèles.

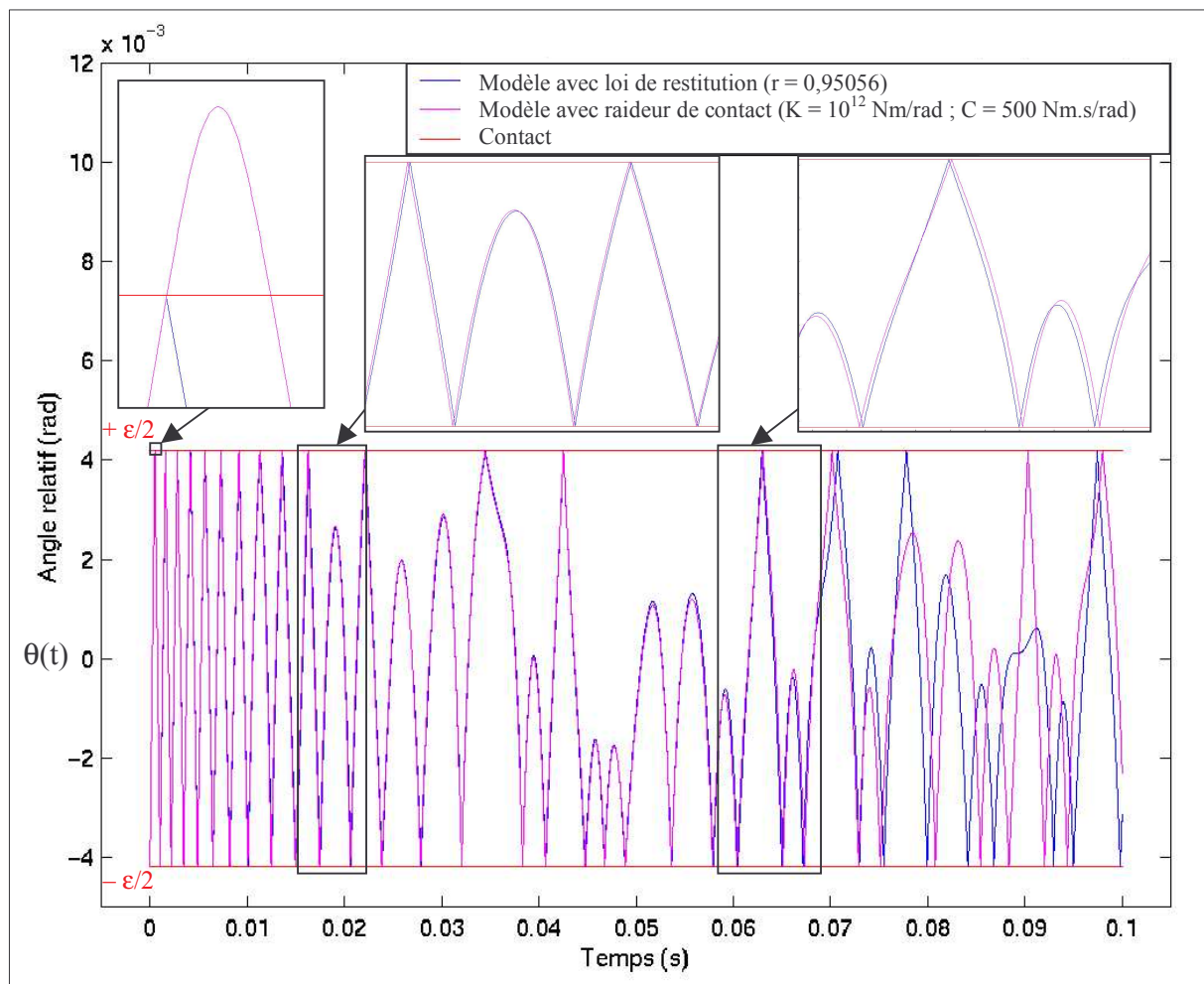


Figure 3.12 : Evolution temporelle de θ pour les deux modèles
($r = 0,95056$ | $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 500$ Nm.s/rad)

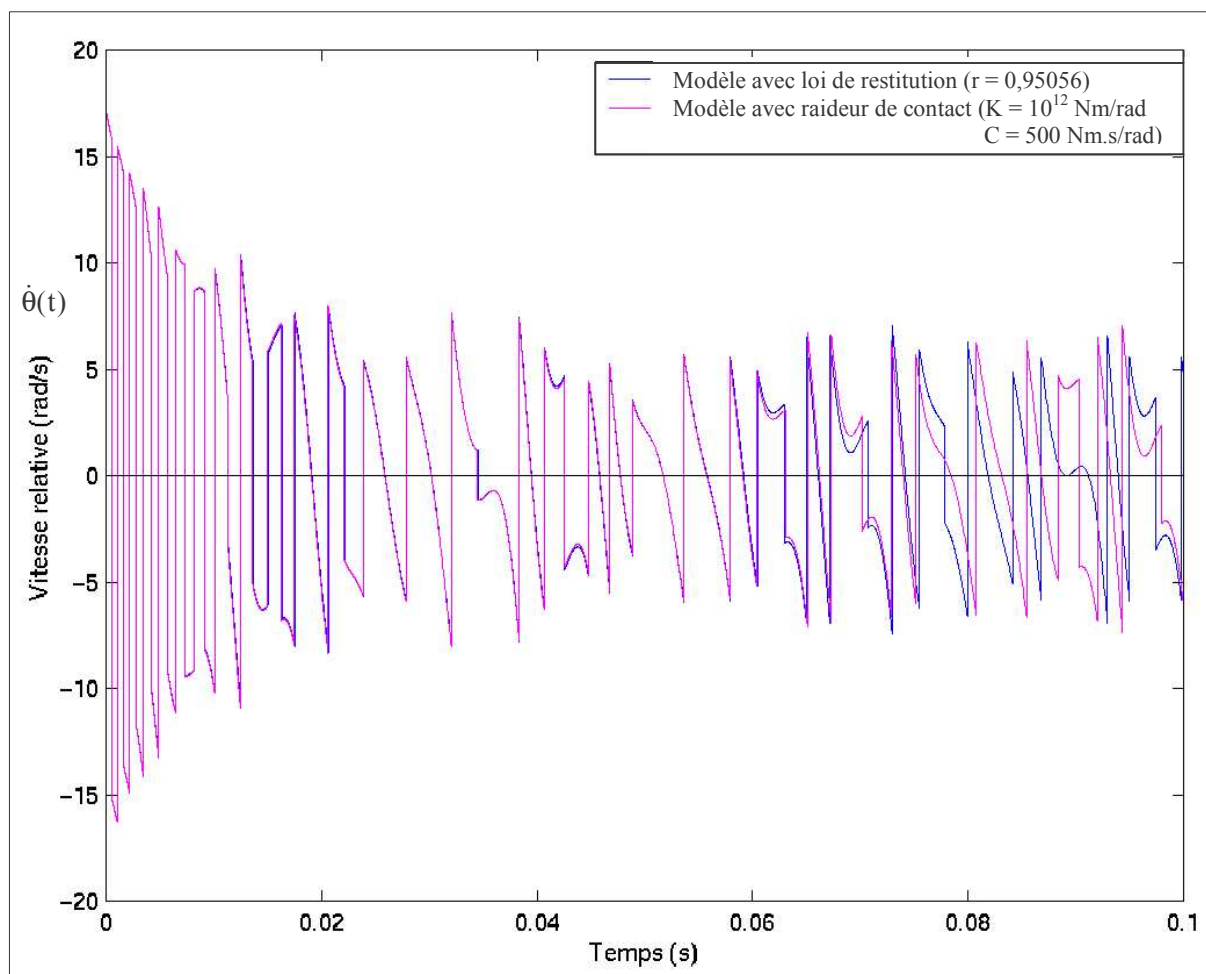


Figure 3.13 : Evolution temporelle de $\dot{\theta}$ pour les deux modèles
 ($r = 0,95056$ | $K = 10^{12}$ Nm/rad et $C = 500$ Nm.s/rad)

Le modèle avec loi de restitution correspond à un comportement asymptotique du modèle avec raideur de contact pour $K \rightarrow +\infty$. C'est pourquoi nous avons utilisé une raideur élevée ($K = 10^{12}$ Nm/rad) pour comparer les deux modèles qui vérifient la relation (1.29).

On remarque bien ici que ces deux modèles concordent relativement bien. Néanmoins les 2 courbes s'écartent l'une de l'autre au fur et à mesure du temps. Ceci s'explique facilement car chaque impact est traité différemment selon la méthode utilisée, comme on peut le voir sur le premier impact (Figure 3.12). Cet écart, dû à la prise en compte ou non de la non-interpénétration, va s'accroître avec l'accumulation du nombre de chocs rencontrés. On remarque que, pour $t \approx 0,09$ s, on traverse entièrement le jeu dans un cas et pas dans l'autre. Toutefois, le comportement du système à étudier ne présente pas nécessairement une succession de rebonds. Nous allons donc considérer le cas où la prise de contact se fera de manière plus durable. Il suffit pour cela de diminuer la valeur de r afin d'augmenter les pertes d'énergie pendant les chocs, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

ii) Cas du collage

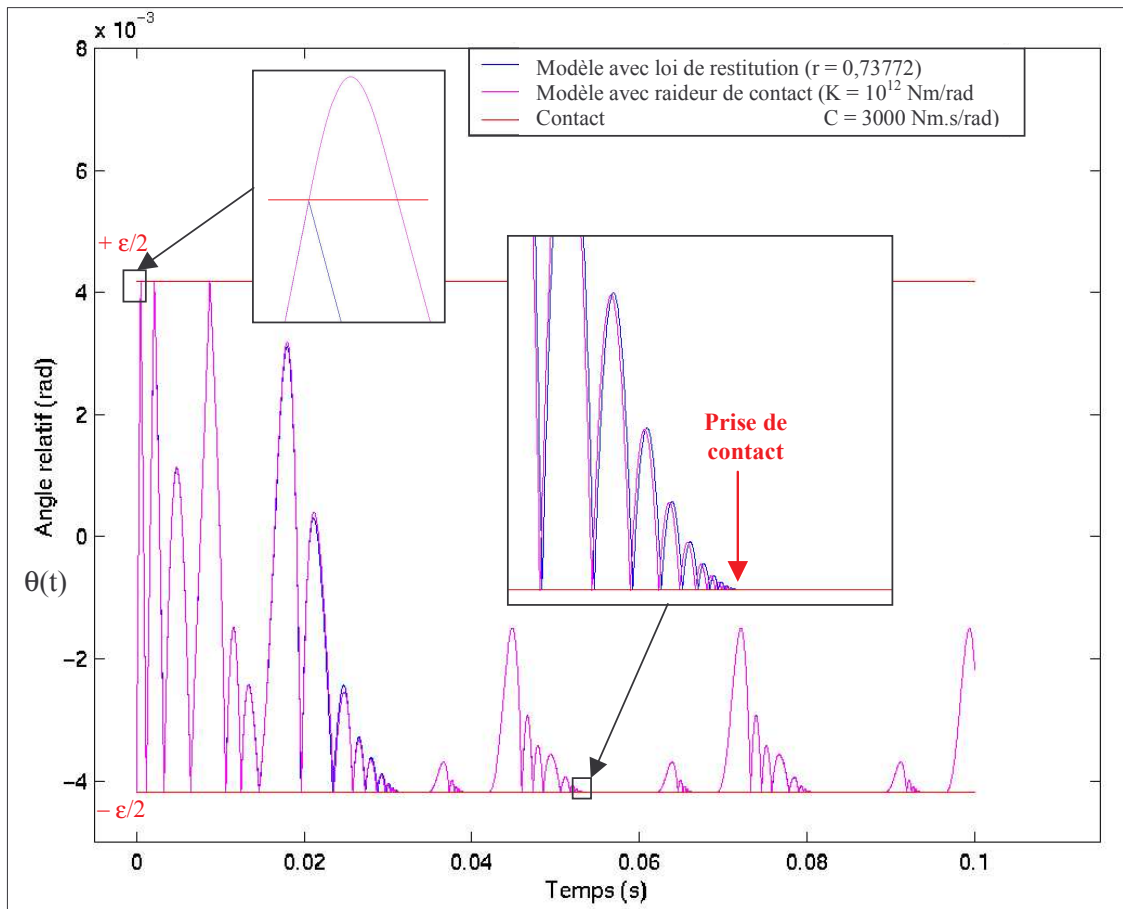


Figure 3.14 : Evolution temporelle de θ pour les deux modèles
 ($r = 0,73772 \mid K = 10^{12} \text{ Nm/rad}$ et $C = 3000 \text{ Nm.s/rad}$)

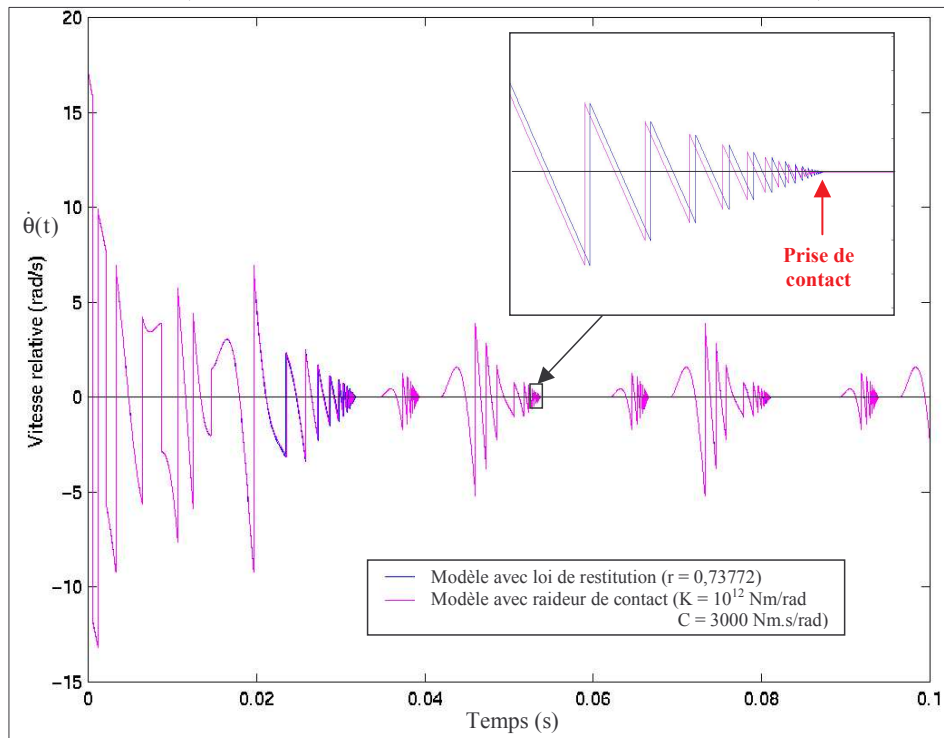


Figure 3.15 : Evolution temporelle de $\dot{\theta}$ pour les deux modèles
 ($r = 0,73772 \mid K = 10^{12} \text{ Nm/rad}$ et $C = 3000 \text{ Nm.s/rad}$)

Là encore les deux modèles concordent. Les déplacements angulaires (Figure 3.14) sont relativement proches. Ils s'écartent l'un de l'autre au fur et à mesure des impacts comme pour le cas précédent. Néanmoins, la prise de contact « remet à zéro » ces écarts. On voit très clairement les points de prise de contact où la vitesse relative « converge » vers 0 (Figure 3.15). Ces prises de contact font que les deux modèles ont un comportement plus semblable que dans le cas d'une succession de rebonds.

Toutefois, un tel comportement n'est pas sans conséquences quant au coût de calcul au cours de la prise de contact. Pour le modèle avec raideur de contact, on a une succession de rebonds de courte durée et de faible amplitude jusqu'à ce que le système oscille de manière durable sur la raideur de contact. En revanche, pour le modèle avec loi de restitution, chaque prise de contact correspond dans ce cas à un collage qui est la conséquence d'une succession infinie d'impact jusqu'à un point dit « d'accumulation » [TOU97]. Le calcul d'une infinité d'impact n'est bien évidemment pas sérieux et il est nécessaire d'introduire dans le code de calcul une amplitude de rebond minimale au dessous de laquelle on considère que le système est collé. C'est ce qui a été réalisé pour obtenir la solution du modèle avec loi de restitution dans les figures précédentes. Malgré cela, les temps de calcul avec la loi de restitution de Newton sont relativement plus importants dans ce cas que ceux du modèle utilisant une raideur de contact.

iii) Choix du modèle

Compte tenu de ce que nous venons de dire concernant le cas du collage, il apparaît naturellement préférable d'utiliser le modèle avec raideur de contact. En outre, ce dernier permet d'avoir directement accès aux efforts de contact contrairement au modèle avec loi de restitution. Enfin, ces deux modèles ont été comparés avec une forte raideur de contact qui réduit considérablement les durées de choc pour s'approcher du choc instantané représenté avec la loi de restitution. En utilisant une raideur de contact plus modérée, on pourra simuler un comportement avec des durées de chocs de l'ordre de grandeur de celles que l'on observe expérimentalement.

Par conséquent, le modèle retenu que nous allons utiliser est le modèle avec raideur de contact (et amortissement de contact). Reste encore à montrer l'efficacité de sa résolution semi-analytique vis-à-vis d'une résolution purement numérique...

3.3.4.2 VALIDATION DU MODELE CHOISI

Afin de démontrer la précision et la rapidité de la méthode semi-analytique, on confronte le modèle choisi à deux modèles numériques : le premier résolu sous ADAMS (cf. 3.1.2) et le second par intégration numérique directe des équations différentielles sous Matlab.

i) Avec ADAMS

En ce qui concerne l'effort de contact F_c utilisé sous ADAMS, ce dernier est selon la direction tangente à l'arbre à cames et est calculé par la fonction « bistop ». Cette fonction bistop apporte quelques particularités dont la principale est que le coefficient d'amortissement utilisé est non linéaire continu. Un polynôme de degré 3 est utilisé pour interpoler les valeurs intermédiaires entre un amortissement nul dans le jeu et la valeur constante C en contact après une interpénétration très faible. Cette régularisation permet d'éviter les discontinuités au niveau de l'effort de contact en introduisant progressivement et continûment l'effet de la vitesse dans la gestion de la force de contact. Pour cette raison, nous ne comparerons le modèle ADAMS avec le modèle semi-analytique que dans le cas où on n'a pas d'amortissement ($C = 0$ soit $\xi = 0$).

Nous allons donc tracer ci-dessous les résultats obtenus sous ADAMS et les comparer à ceux du modèle semi-analytique sans amortissement, et ceci, dans la même configuration paramétrique. Si on regarde les périodes caractéristiques théoriques, nous avons pour la configuration choisie :

- dans la phase de vol libre, la plus petite période est celle liée à la rotation de l'arbre à cames en $4\omega_{aac}$, ce qui nous donne, pour $N_{mot} = 4400$ tr/min un temps caractéristique de $6,8 \cdot 10^{-3}$ s.
- dans le contact, la fréquence la plus élevée est la fréquence propre de choc (à cause de la raideur de contact K élevée) de pulsation $\sqrt{K/I_{pav}}$, ce qui nous donne un temps caractéristique $(2\pi\sqrt{I_{pav}/K})$ d'environ $5 \cdot 10^{-6}$ s.

La valeur maximale du pas de calcul est donc déjà imposée par ce dernier temps caractéristique. Nous avons donc d'abord pensé qu'un pas de stockage de 10^{-7} s serait suffisant (en espérant que le pas de calcul diminuerait, si nécessaire, au niveau de la frontière vol libre / contact). Hélas, les résultats ne correspondent pas comme nous pouvons le voir et il est nécessaire de diminuer le pas de stockage (Figure 3.16).

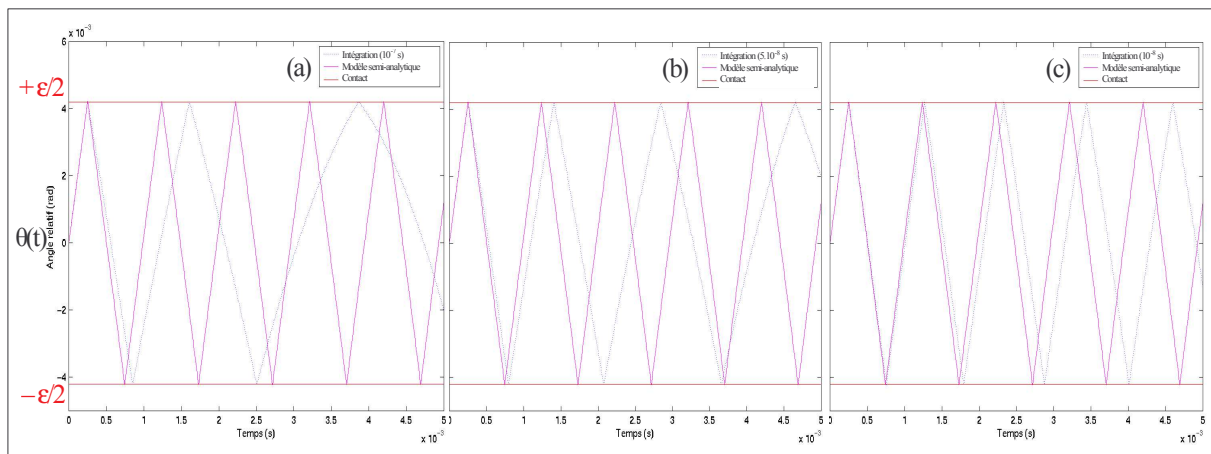


Figure 3.16 : Comparaison du modèle semi-analytique et du modèle ADAMS pour un pas de stockage de 10^{-7} s (a), de $5 \cdot 10^{-8}$ s (b) et de 10^{-8} s (c)

On n'a pas de concordance entre les modèles mais il semble que plus on diminue le pas de stockage (et par conséquent le pas de calcul maximal utilisé par ADAMS) et plus la solution numérique se rapproche de la solution semi-analytique. En outre, nous n'avons pas pu descendre en dessous d'un pas de stockage de 10^{-8} s car nous avons été limité par la mémoire de la station. En effet, avec un pas de 10^{-9} s sur une durée de 0,005 s, cela revient à écrire un vecteur colonne de 5 millions de composantes.

En revanche, nous savons d'après les périodes caractéristiques, que c'est la phase de contact qui nécessite un pas de calcul minimal. Nous avons décidé, par conséquent, d'utiliser 2 pas de stockage différents. Le premier à 10^{-7} s pour une grande partie de la phase de vol libre, et le deuxième à 10^{-9} s en s'assurant que toute la phase de contact se fait avec ce dernier pas. Les instants de basculement entre les 2 pas sont arbitraire et on s'aide de la solution analytique pour avoir l'ordre de grandeur de ces instants. On intègre numériquement étape par étape et on visualise à chaque fois la solution afin de décider si on change ou non de pas de stockage. Cette procédure (notée « Pas spécial ») n'est pas exploitable aisément mais elle nous permet de valider le modèle semi-analytique (Figure 3.17).

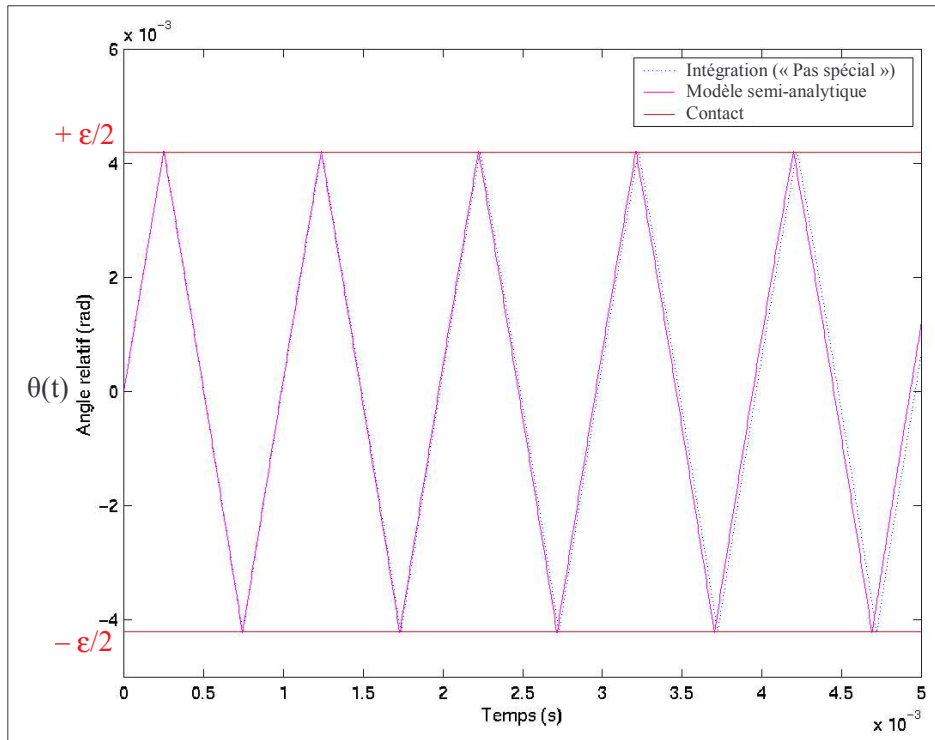


Figure 3.17 : Comparaison du modèle semi-analytique et du modèle ADAMS avec deux pas de stockage (10^{-7} s et 10^{-9} s)

Comme nous pouvons le voir le modèle semi-analytique (implémenté sous MATLAB) et les résultats du modèle ADAMS concordent sur cette dernière figure. Afin de comprendre l'intérêt pratique du modèle semi-analytique pour le système étudié, nous avons indiqué ci-dessous (Tableau 3) les temps de simulation nécessaires à l'obtention des courbes précédentes sur l'intervalle de temps $[0 ; 0,005]$ avec la même configuration paramétrique (Figure 3.16 et Figure 3.17) :

		Temps de calcul
Modèle de pénalisation (MATLAB)		2 s
Modèle ADAMS	Pas = 1.10^{-7} s	5 min
	Pas = 5.10^{-8} s	10 min
	Pas = 1.10^{-8} s	45 min
	Pas = "Spécial"	+ de 3 h

Tableau 3 : Temps de calcul pour le modèle semi-analytique et pour le modèle ADAMS

Les écarts sont conséquents, sans même tenir compte du fait que seule la dernière procédure (Pas = « Spécial ») est valable et que cette dernière se fait de manière très archaïque en stoppant arbitrairement la simulation pour permuter le pas de temps lorsque qu'on s'approche de la frontière. Toutefois, nous nous sommes placés dans un cas contraignant avec une importante raideur de contact. Avec une raideur de contact plus faible, on obtient de meilleurs résultats avec ADAMS mais le temps de calcul le plus faible est de loin celui obtenu par la résolution semi-analytique. Enfin, dans le but de comparer le modèle semi-analytique avec une intégration numérique plus facile à manier, nous avons réalisé plusieurs intégrateurs « simples », implémentés sous Matlab, et que nous allons tester maintenant.

ii) Avec l'intégration numérique

Pour le problème qui nous intéresse, l'intégration numérique avec un schéma numérique classique tel que celui de Runge-Kutta à l'ordre 4 (cf. Annexe A) s'est révélé assez décevant. Nous avons donc réalisé un intégrateur mieux adapté au problème défini par les équations (3.11) et (3.14). Le schéma de résolution utilisé est du type « point milieu » modifié. Soit z_n la solution calculée numériquement pas à pas (valeur approchée de la solution exacte $y_n = y(t_n)$) et avec la condition initiale $z_0 = y_0$, le schéma d'intégration utilisé est le suivant :

Soit $n \geq 0$,

$$\begin{cases} z_n^* = z_n + \frac{h}{2} f_n^* \\ f_{n+1}^* = f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n^*\right) \\ t_{n+1} = t_n + h \\ z_{n+1} = z_n + h f_{n+1}^* \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_0^* = f(t_0, z_0) \\ h \text{ est le pas du schéma} \end{cases}$$

On distingue alors deux approches pour l'intégration numérique. La première est une résolution à pas constant. Il s'agit donc d'un calcul direct, sans contrôle du pas de temps h . Afin d'assurer la stabilité et la convergence de la solution, on est amené à utiliser un pas de temps très faible ($h = 10^{-8}$ s), ce qui induit un coût de calcul conséquent. La deuxième approche consiste à utiliser 2 valeurs de pas de calcul différents, $h_1 = 10^{-8}$ s et $h_2 = 10^{-6}$ s. Ces pas de calcul h_1 et h_2 seront respectivement utilisés sur la phase de contact et sur celle de vol libre. Tant que la solution calculée z_n correspond à la phase de vol libre, on utilise le pas h_2 . Par contre, dès qu'on arrive à une itération $n = m$ telle que z_m corresponde à une solution en contact, alors on revient un pas de calcul en arrière pour $n = m - 1$ et on utilise le pas de calcul h_1 , afin d'obtenir l'instant d'impact et l'ensemble de la phase de contact de manière suffisamment précise. Dès lors qu'on repasse dans la phase de vol libre, on bascule le pas de temps à nouveau sur h_2 . Ce processus permet de gagner énormément de temps de calcul, tout en gardant une bonne corrélation avec le modèle semi-analytique comme le montrent les courbes ci-dessous (Figure 3.18).

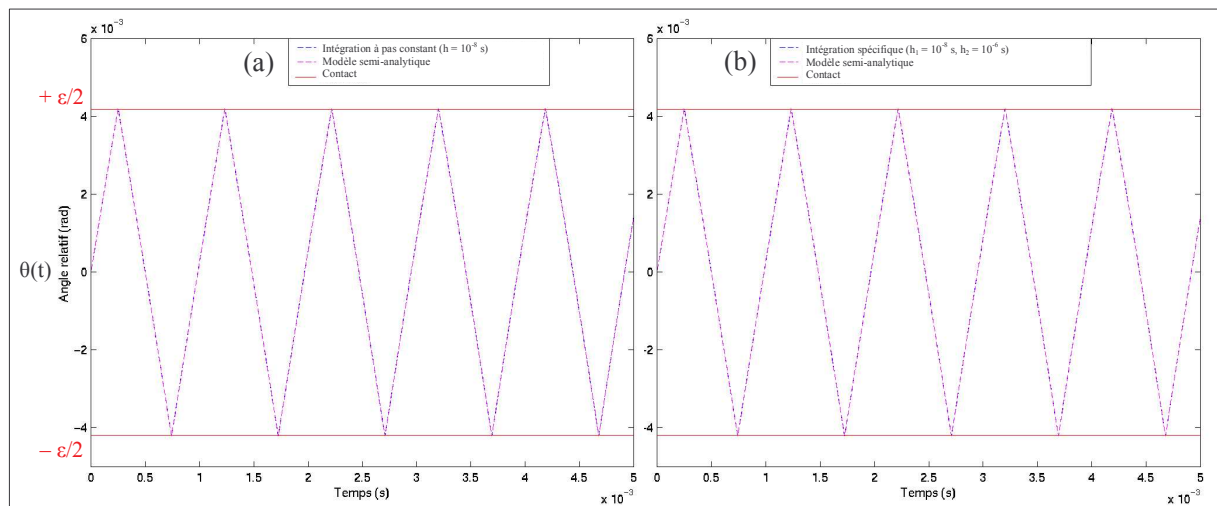


Figure 3.18 : Comparaison du modèle semi-analytique et de l'intégration numérique à pas constant $h = 10^{-8}$ s (a) et avec 2 pas $h_1 = 10^{-8}$ s et $h_2 = 10^{-6}$ s (b)

3.3.5 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE PASSAGE

Maintenant que nous avons choisi le modèle que nous allons utiliser, à savoir le modèle avec raideur et amortissement de contact, nous allons dans ce qui suit introduire la fonction de passage \underline{F}_P . Cette fonction est nécessaire à la bonne compréhension du calcul temporel et du calcul des matrices jacobiniennes nécessaires à l'étude des solutions périodiques.

Soit $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ les conditions initiales en angle relatif et en vitesse relative à l'instant $t = t_0 = 0$ pour le système défini par l'équation (3.7) au 3.3.1.1. Si $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ correspond à une phase de vol libre (respectivement phase de contact), on note $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ l'angle relatif et la vitesse relative solution de l'équation (3.7) à l'instant $t = t_1$ correspondant à la fin de la phase initiée à t_0 et donc au début de la phase de contact (respectivement de vol libre). On introduit alors la fonction de passage $\underline{F}_{P[t_0, t_1]}$ qui à $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ à t_0 associe la solution $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ à t_1 . On a :

$$\underline{F}_{P[t_0, t_1]} : (\theta_0, \dot{\theta}_0) \rightarrow (\theta_1, \dot{\theta}_1) \quad (3.34)$$

On définit alors les composantes de la fonction vectorielle $\underline{F}_{P[t_0, t_1]} = {}^t(F_{P1[t_0, t_1]}, F_{P2[t_0, t_1]})$ par :

$$F_{P1[t_0, t_1]} : (\theta_0, \dot{\theta}_0) \rightarrow \theta_1 \quad (3.35)$$

et

$$F_{P2[t_0, t_1]} : (\theta_0, \dot{\theta}_0) \rightarrow \dot{\theta}_1 \quad (3.36)$$

Si $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ correspond à une phase de vol libre alors $\underline{F}_{P[t_0, t_1]}$ est complètement défini par les relations analytiques (3.15) en connaissant t_0 et une fois que l'instant t_1 a été déterminé numériquement (cf. 3.3.3.2). En revanche, si $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ correspond à une phase de contact alors $\underline{F}_{P[t_0, t_1]}$ est complètement défini par les relations analytiques (3.26) en connaissant t_0 et une fois déterminé numériquement l'instant t_1 (cf. 3.3.3.2).

On définit ainsi par récurrence les fonctions de passages $\underline{F}_{P[t_0, t_1]}, \underline{F}_{P[t_1, t_2]}, \dots, \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}$. Connaissant les instants t_i et t_{i+1} , la fonction $\underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}$ est connue à partir des relations (3.15) ou (3.26) selon la phase de mouvement effective. Enfin, soit l'instant t_f auquel on souhaite arrêter la résolution temporelle, on définit de manière analogue la fonction de passage $\underline{F}_{P[t_{f-1}, t_f]}$ qui à $(\theta_{f-1}, \dot{\theta}_{f-1})$ obtenue en t_{f-1} (dernier instant où la solution change de phase de mouvement) associe la solution $(\theta_f, \dot{\theta}_f)$ obtenue en un instant arbitraire t_f (qui n'est pas forcément un instant de basculement d'une phase de mouvement à une autre).

Finalement, on introduit la fonction globale $\underline{F}_{P[t_0, t_f]}$ qui est la composée des fonctions de passage $\underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}$ rencontrées au cours de la résolution temporelle. On note donc :

$$\underline{F}_{P[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (\theta_f, \dot{\theta}_f) = \underline{F}_{P[t_{f-1}, t_f]} \circ \dots \circ \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]} \circ \underline{F}_{P[t_{i-1}, t_i]} \circ \dots \circ \underline{F}_{P[t_1, t_2]} \circ \underline{F}_{P[t_0, t_1]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)$$

soit

$$\underline{F}_{P[t_0, t_f]} = \underline{F}_{P[t_{f-1}, t_f]} \circ \dots \circ \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]} \circ \underline{F}_{P[t_{i-1}, t_i]} \circ \dots \circ \underline{F}_{P[t_1, t_2]} \circ \underline{F}_{P[t_0, t_1]} \quad (3.37)$$

et on introduit également les composantes de $\underline{F}_{P[t_0, t_f]}$ de sorte que :

$$\underline{F}_{P[t_0, t_f]} = {}^t(F_{P1[t_0, t_f]}, F_{P2[t_0, t_f]}) \quad , \quad F_{P1[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0) = \theta_f \quad \text{et} \quad F_{P2[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0) = \dot{\theta}_f \quad (3.38)$$

Nous verrons notamment plus tard l'intérêt d'introduire une telle fonction dans la recherche et l'étude de stabilité des solutions périodiques qui rentrent dans le cadre de l'étude menée par technique de continuation.

3.3.6 INTERFACE GRAPHIQUE

Afin de faciliter la manipulation du modèle semi-analytique, une interface graphique a été réalisée pour effectuer les simulations temporelles, les différents tracés de courbes et les coupures de Poincaré (Figure 3.19).

SIMULATION TEMPORELLE

Moteur

Acyclisme AAC : DW8_PC_ht_20

Régime moteur : 4000 tr/min

Pompe

Type Pompe à vide : Magneti M. FV (DW8)

Phase par rapport à la rotation AAC : 0 rad

Contact

Epaisseur Embout TOC : 4.4 mm

Rayon Embout AAC : 12.225 mm

Jeu angulaire TOC/AAC : 0.48 deg

Raideur de contact k : 1e8 N/m

Taux d'amortissement : 0.5

Simulation

Temps initial : 0 s Temps final : 0.09 s

Position relative initiale : 0 rad

Vitesse relative initiale : 0 rad/s

Niveau précision : -4 1 7

Affichage

Angle relatif (A) Couple Entraînement

Vitesse relative (V) Plan de phase (A,V)

Accélération relative Critère décollement

Coupure Poincare : non

LANCER SIMULATION

AFFICHAGE COURBES

7 type(s) de courbe(s) demandee(s)

<input checked="" type="checkbox"/> Angle relatif (A)	<input checked="" type="checkbox"/> Couple Entraînement	Prendre l'angle relatif en : rad
<input checked="" type="checkbox"/> Vitesse relative (V)	<input checked="" type="checkbox"/> Plan de phase (A,V)	Prendre la vitesse relative en : rad/s
<input checked="" type="checkbox"/> Accélération relative	<input checked="" type="checkbox"/> Critère décollement	Afficher le couple d'entraînement : total
<input checked="" type="checkbox"/> Coupure Poincare		Debuter le plan de phase pour t = 0 s
		Debuter Coupure Poincare a t = 0 s

- Toutes les configurations sur 1 figure.

Figure 3.19 : Interface graphique – Simulation temporelle, tracés de courbes, plans de phase et coupures de Poincaré

3.4 LA TECHNIQUE DE CONTINUATION UTILISEE

Après avoir présenté la résolution semi-analytique temporelle (cf. 3.3), nous allons maintenant traiter l'étude des cycles limites en fonction d'un paramètre μ ainsi que leur stabilité. Pour ce faire, nous avons vu dans le chapitre précédent (cf. 2.1.3.3) qu'il était nécessaire de déterminer la matrice monodrome du système. Nous verrons que cette matrice est déterminée également de manière semi-analytique. Enfin, pour suivre l'évolution des cycles limites, nous allons décrire la technique de continuation spécifiquement développée dans le cadre de notre étude. Nous supposons par la suite que le contact est tel que $\Delta_0 < 0$.

3.4.1 STABILITE DES CYCLES LIMITES OBTENUS

On considère une solution T-périodique $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$, solution de (3.7) et telle que :

$$\begin{cases} \theta(t_0 + T) = \theta(t_0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t_0 + T) = \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \quad (3.39)$$

3.4.1.1 ECRITURE DE LA MATRICE MONODROME

Comme il a été vu au 2.1.3.3, pour étudier la stabilité d'un cycle limite, il faut calculer les valeurs propres de la matrice monodrome $\underline{\Phi}$ (2.26) qui dans notre cas s'écrit :

$$\underline{\Phi} = \frac{\partial \phi_t}{\partial (\theta_0, \dot{\theta}_0)}(t_0 + T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}(t_0 + T) & \frac{\partial \theta}{\partial \dot{\theta}_0}(t_0 + T) \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta_0}(t_0 + T) & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}_0}(t_0 + T) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

En introduisant la fonction $\underline{F}_{P[t_0, t_f]}$ (3.37) définie en 3.3.5, composée des fonctions de passages $\underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}$ ($0 \leq i \leq f-1$), avec $t_f = t_0 + T$, il vient :

$$\underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{F}_{P[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial (\theta_0, \dot{\theta}_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{F}_{P1[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial \underline{F}_{P1[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial \dot{\theta}_0} \\ \frac{\partial \underline{F}_{P2[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial \theta_0} & \frac{\partial \underline{F}_{P2[t_0, t_f]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial \dot{\theta}_0} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Comme on peut le voir, $\underline{\Phi}$ n'est autre que la matrice jacobienne de l'application $\underline{F}_{P[t_0, t_f]}$. A partir de la relation de composition (3.37), on peut écrire $\underline{\Phi}$ comme étant le produit chronologique des matrices jacobienes des fonctions de passages $\underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}$ ($0 \leq i \leq f-1$) :

$$\underline{\Phi} = \prod_{i=0}^{f-1} \frac{\partial \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}(\theta_i, \dot{\theta}_i)}{\partial (\theta_i, \dot{\theta}_i)} = \frac{\partial \underline{F}_{P[t_{f-1}, t_f]}(\theta_{f-1}, \dot{\theta}_{f-1})}{\partial (\theta_{f-1}, \dot{\theta}_{f-1})} \cdots \frac{\partial \underline{F}_{P[t_1, t_2]}(\theta_1, \dot{\theta}_1)}{\partial (\theta_1, \dot{\theta}_1)} \cdot \frac{\partial \underline{F}_{P[t_0, t_1]}(\theta_0, \dot{\theta}_0)}{\partial (\theta_0, \dot{\theta}_0)} \quad (3.42)$$

Nous allons voir dans ce qui suit, comment se calcule cette matrice monodrome $\underline{\Phi}$ à partir de la relation (3.42) de manière semi-analytique.

3.4.1.2 CALCUL SEMI-ANALYTIQUE DE LA MATRICE MONODROME

Nous allons dans cette partie montrer comment se calcul de manière semi-analytique la matrice monodrome $\underline{\Phi}$ pour une solution périodique de période T initiée à t_0 avec comme conditions initiales $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$.

Nous avons vu au 3.3 comment s'obtenait de manière semi-analytique les instants de passage d'une phase de mouvement à une autre t_i ($1 \leq i \leq f-1$) ainsi que les conditions initiales de chaque phase associées $(\theta_i, \dot{\theta}_i)$. A partir de ces valeurs, il nous reste à déterminer les matrices jacobiennes des fonctions de passage $\underline{E}_{P[t_i, t_{i+1}]}$.

Si entre t_i et t_{i+1} , la solution se trouve dans une phase de vol libre, d'après (3.15), on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(t_{i+1})}{\partial \theta_i} = 1 \\ \frac{\partial \theta(t_{i+1})}{\partial \dot{\theta}_i} = t_{i+1} - t_i \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_{i+1})}{\partial \theta_i} = 0 \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_{i+1})}{\partial \dot{\theta}_i} = 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

En revanche, si entre t_i et t_{i+1} , la solution se trouve dans une phase de contact, d'après les relations suivantes (3.26), (3.25), (3.23) et (3.20) pour $\Delta_0 < 0$, il vient après calcul :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(t_{i+1})}{\partial \theta_i} = \left[\cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) + \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \\ \frac{\partial \theta(t_{i+1})}{\partial \dot{\theta}_i} = \left[\frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_{i+1})}{\partial \theta_i} = \left[\frac{-2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \\ \frac{\partial \dot{\theta}(t_{i+1})}{\partial \dot{\theta}_i} = \left[\cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) - \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \right] \exp \left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \end{cases} \quad (3.44)$$

Afin d'alléger l'écriture, on pose :

$$\begin{cases} CS_i = \cos \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \\ SN_i = \sin \left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} (t_{i+1} - t_i) \right) \end{cases} \quad (3.45)$$

On obtient finalement :

$$\text{Si } \forall t \text{ tel que } t_i \leq t \leq t_{i+1} \text{ on a } -\frac{\varepsilon}{2} \leq \theta(t) \leq +\frac{\varepsilon}{2}, \text{ alors } \frac{\partial \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}(\theta_i, \dot{\theta}_i)}{\partial (\theta_i, \dot{\theta}_i)} = \begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} - t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Si $\forall t$ tel que $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ on a $|\theta(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\text{alors } \frac{\partial \underline{F}_{P[t_i, t_{i+1}]}(\theta_i, \dot{\theta}_i)}{\partial (\theta_i, \dot{\theta}_i)} = \begin{pmatrix} CS_i + \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_i & \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_i \\ \frac{-2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_i & CS_i - \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_i \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}}(t_{i+1} - t_i)\right) \quad (3.47)$$

On remarque que ces matrices jacobiniennes des fonctions de passage peuvent être complètement déterminées de manière semi-analytique au cours de la résolution temporelle. Les phases de mouvement (vol libre / contact) apparaissant en alternance, la matrice monodrome $\underline{\Phi}$ est par conséquent le produit chronologique alterné des matrices élémentaires définies ci-dessus.

3.4.1.3 CAS PARTICULIER D'UN CYCLE LIMITE SANS PERTE DE CONTACT

Supposons ici, que le cycle limite corresponde à une solution T-périodique en contact permanent entre l'instant t_0 et l'instant $t_f = t_1 = t_0 + T$. D'après (3.47), la matrice monodrome correspondante s'écrit donc :

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} CS_0 + \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 & \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \\ \frac{-2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 & CS_0 - \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) \quad (3.48)$$

avec, dans ce cas précis, $CS_0 = \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right)$ et $SN_0 = \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right)$.

L'équation caractéristique de $\underline{\Phi}$ qui doit être vérifiée par les valeurs propres $\lambda_{\Phi 1}$ et $\lambda_{\Phi 2}$ est :

$$\lambda^2 + \text{tr}(\underline{\Phi})\lambda + \det(\underline{\Phi}) = 0 \quad (3.49)$$

or

$$\begin{cases} \text{tr}(\underline{\Phi}) = 2 CS_0 \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) \\ \det(\underline{\Phi}) = \left(CS_0^2 - \frac{C^2}{|\Delta_0|} SN_0^2 + \frac{4KI_{pav}}{|\Delta_0|} SN_0^2 \right) \exp\left(-\frac{C}{I_{pav}} T\right) = \exp\left(-\frac{C}{I_{pav}} T\right) \end{cases} \quad (3.50)$$

ce qui donne :

$$\lambda^2 + 2 CS_0 \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) \lambda + \exp\left(-\frac{C}{I_{pav}} T\right) = 0 \quad (3.51)$$

Cette équation a un discriminant positif (car $\Delta_0 < 0$ et $T > 0$) ce qui donne :

$$\begin{cases} \lambda_{\Phi_1} = (CS_0 - SN_0) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right)\right) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) \\ \lambda_{\Phi_2} = (CS_0 + SN_0) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) = \left(\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2I_{pav}} T\right)\right) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} T\right) \end{cases} \quad (3.52)$$

Il est facile de démontrer (cf. Annexe B) que quelle que soit la configuration paramétrique choisie, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$|\lambda_{\Phi_1}| < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_{\Phi_2}| < 1 \quad \text{pour } T > 0 \quad (3.53)$$

Autrement dit, d'après la théorie de Floquet (cf. 2.1.3.3), on en déduit que tout cycle limite qui ne présente pas de perte de contact est forcément asymptotiquement stable.

3.4.1.4 CAS PARTICULIER D'UN CYCLE LIMITE AVEC UNE PERTE DE CONTACT

Supposons ici, que le cycle limite corresponde à une solution T-périodique avec une seule perte de contact par période. Quel que soit l'instant initial choisi pour décrire le cycle limite, nous savons que la matrice monodrome, bien que dépendante explicitement de ce temps initial (cf. 2.1.3.3), présente les mêmes valeurs propres (coefficients de Floquet). L'expression la plus simple pour une des matrices monodromes possibles est obtenue pour un instant initial t_0 choisi en début de phase de vol libre, t_1 désignant le début de la phase de contact et $t_2 = t_0 + T$ étant la fin de celle-ci, ce qui donne :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} \left(CS_0 + \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \right) & \left(CS_0 + \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \right) (t_1 - t_0) + \frac{2I_{pav}}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \\ -\frac{2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 & \left(CS_0 - \frac{C}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 \right) - \frac{2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 (t_1 - t_0) \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_2 - t_1)\right) \quad (3.54)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \text{tr}(\underline{\underline{\Phi}}) = \left(-\frac{2K}{\sqrt{|\Delta_0|}} SN_0 (t_1 - t_0) + 2CS_0 \right) \exp\left(-\frac{C}{2I_{pav}} (t_2 - t_1)\right) \\ \det(\underline{\underline{\Phi}}) = \exp\left(-\frac{C}{I_{pav}} (t_2 - t_1)\right) \end{cases} \quad (3.55)$$

Ceci ne permet pas de conclure de manière systématique quant à la stabilité du cycle limite. Par conséquent, dès qu'on aura une ou plusieurs pertes de contact, la détermination de la stabilité devra se faire au cas par cas, par le calcul semi-analytique des coefficients de Floquet.

3.4.2 LA GESTION DES ALGORITHMES DE PREDICTION/CORRECTION

Après avoir traité la détermination de la stabilité pour une solution périodique, nous allons maintenant décrire comment la technique de continuation va nous permettre d'obtenir ces cycles limites en fonction de l'évolution d'un paramètre noté μ avec un maximum d'efficacité.

En règle générale, pour une technique de continuation classique (cf. 2.2.2), on définit un seul algorithme de prédiction/estimation et un seul algorithme de correction. On part d'un pas initial d'abscisse curviligne donné $\Delta s = \Delta s_i$ qui, s'il ne permet pas à l'algorithme de correction de converger vers la solution ou que cette convergence nécessite un nombre d'itérations élevé, doit être diminué. Sa valeur est ensuite augmentée sur les points suivants si elle permet une convergence avec un nombre très faible d'itérations. Cette gestion du pas Δs n'a pas été évidente à réaliser dans le cas présent. En effet, comme nous le verrons dans ce qui suit (cf. Figure 3.21) nous allons observer des bifurcations du type retournement en très grand nombre et avec des variations de courbure extrêmement importantes. Avec une technique de continuation « classique », nous avons rencontré de réelles difficultés pour obtenir un diagramme de bifurcation avec des temps de calcul non prohibitifs. Plusieurs algorithmes de prédiction et de correction ont été testés afin de déterminer celui qui était le plus adapté à l'application modélisée. Selon le type de technique de continuation utilisée (séquentielle, à paramétrisation sélective, pseudo-arclength, arclength), les difficultés de convergence de l'algorithme n'ont pas lieu sur les mêmes points.

Suite à cela, une technique de continuation a été spécifiquement programmée en prenant en compte plusieurs algorithmes de prédiction/correction. Ainsi, lorsque pour un pas d'abscisse curviligne donné, l'algorithme de correction ne converge pas, avant de réduire le pas, on change d'algorithme de prédiction/correction parmi plusieurs possibilités. Cela permet de ne baisser le pas Δs que si aucune des techniques utilisées ne fonctionne. Pour la plupart des points calculés, cette augmentation des itérations due à un changement d'algorithmes est néanmoins payante en terme de coût de calcul et d'efficacité en comparaison à une diminution systématique du pas Δs .

En outre, l'une des autres spécificités de la technique de continuation employée est également la vérification systématique de la conformité des points obtenus avant stockage de leur valeur. Par conformité, j'entends l'adéquation du signe de la variation de paramètre $\Delta\mu$ obtenue avec l'évolution des multiplicateurs de Floquet caractérisant la stabilité de la solution. En effet, lors des premières simulations réalisées, il arrivait qu'au voisinage des bifurcations nœud-col, la continuation reparte en arrière par la même branche de cycles limites que celle par laquelle elle était arrivée. Dès lors, pour éviter ce type d'erreur, avant de confirmer que le point sur lequel l'algorithme de correction a convergé est valable, on calcule ses coefficients de Floquet. Si le nouveau point induit une variation de paramètre négative (inversion de sens d'évolution), alors ce point n'est stocké que si ses coefficients de Floquet confirment la bifurcation nœud-col en sortant ou entrant dans le cercle unité par la valeur réelle +1 (cf. 2.1.4.2). Si ce n'est pas le cas, la procédure se poursuit comme si l'algorithme de correction n'avait pas convergé.

Par conséquent, on n'obtient pas de nouveau point pour l'étude paramétrique dès lors que l'une des conditions suivantes est réalisée :

- il n'y a pas de convergence avérée au bout d'un nombre d'itérations fixé à l'avance ;
- il y a divergence de l'algorithme en cours (écart prédéfini à l'avance) ;
- la solution obtenue présente des coefficients de Floquet qui ne sont pas conformes avec le sens d'évolution de la branche de cycle limite suivie.

3.5 TRAVAUX EXPLORATOIRES

Avant de passer aux applications moteurs, plusieurs étapes ont été nécessaires pour comprendre la phénoménologie mise en jeu et comprendre la complexité du problème étudié. Nous allons voir comment évolue le comportement de la solution selon qu'on considère une excitation purement harmonique ou bien une excitation du système riche en harmoniques.

3.5.1 CAS D'UNE EXCITATION HARMONIQUE

Dans un premier temps, on ne prend en compte qu'une excitation harmonique avec un acyclisme AAC en h4 uniquement et un couple résistant de pompe à vide constant égal à Γ_0 . Par conséquent, la période d'excitation du système est :

$$T = \frac{1}{4} \frac{60}{N_{\text{mot}}/2} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_{\text{aac}}} \quad (3.56)$$

En augmentant $\Delta\Omega_4$, l'amplitude de l'acyclisme AAC, on va déclencher des vibro-impacts dont les vitesses d'accostage vont évoluer avec l'acyclisme. Le prochain graphique (Figure 3.20) représente l'évolution de la vitesse d'impact maximale (côté entraînement et côté opposé) en fonction de l'acyclisme adimensionné $(\Delta\Omega_4/4\omega_{\text{aac}})/(\varepsilon/2)$. Au départ de la courbe, pour un acyclisme nul, le système reste en permanence en contact et on obtient une solution périodique stable sans impact. En augmentant légèrement le niveau d'acyclisme, on finit par provoquer le décollement de la pompe à vide (TP) entraînée par son inertie lors de la décélération de l'arbre à cames, puis rattrapée par celui-ci générant un impact du côté entraînement. Le point (a) sur la figure montre une solution périodique stable à un impact par période sur le côté d'entraînement. Dans un premier temps, plus on augmente l'amplitude d'acyclisme et plus le nombre d'impact et la vitesse maximale d'accostage côté entraînement augmente (Figure 3.20 : points (a), (b), (c) et (d) avec respectivement 1, 2, 3 et 4 impacts par période côté entraînement).

Puis, le niveau d'acyclisme fait perdre la stabilité de la solution périodique observée (tracé rouge). Il s'en suit une succession de bifurcations que nous détaillerons plus loin. Lorsque la solution T-périodique redevient stable (Figure 3.20 : points (e) et (f)), celle-ci présente plusieurs impacts du côté entraînement et un seul impact du côté opposé avec une vitesse d'impact plus grande en valeur absolue que la vitesse d'accostage maximale côté entraînement. Si on continue à augmenter l'acyclisme, on arrive à nouveau dans une zone où la solution T-périodique est particulièrement instable.

Globalement, sur la plage d'acyclisme observée (Figure 3.20), on observe 5 zones de perte de stabilité de la solution T-périodique. Dans la figure suivante (Figure 3.20), seules quelques solutions temporelles T-périodiques stables sont tracées, avec à chaque fois le nombre d'impact indiqué de chaque côté du contact. Les points (a) à (t) permettent de suivre l'évolution globale du comportement du système. A partir du point (m), on ne trouve plus de solution instable. L'énergie apportée par l'acyclisme augmente jusqu'à ce qu'à partir du point (r) le niveau d'acyclisme (converti en couple) soit très grand devant la valeur du couple résistant, ce qui a pour conséquence un comportement quasi-symétrique en terme de vitesses d'impact entre le contact côté entraînement et le contact côté opposé. Enfin, à partir du point (t), le niveau d'acyclisme (en débattement angulaire) est très grand devant le jeu angulaire qui ne fait que limiter l'amplitude de débattement du système qui est complètement piloté par l'acyclisme : on a de chaque côté un impact par période définie par l'acyclisme avec des temps de vol libre extrêmement courts. Notons que de manière pratique, ce niveau d'acyclisme n'est jamais atteint sur les moteurs étudiés.

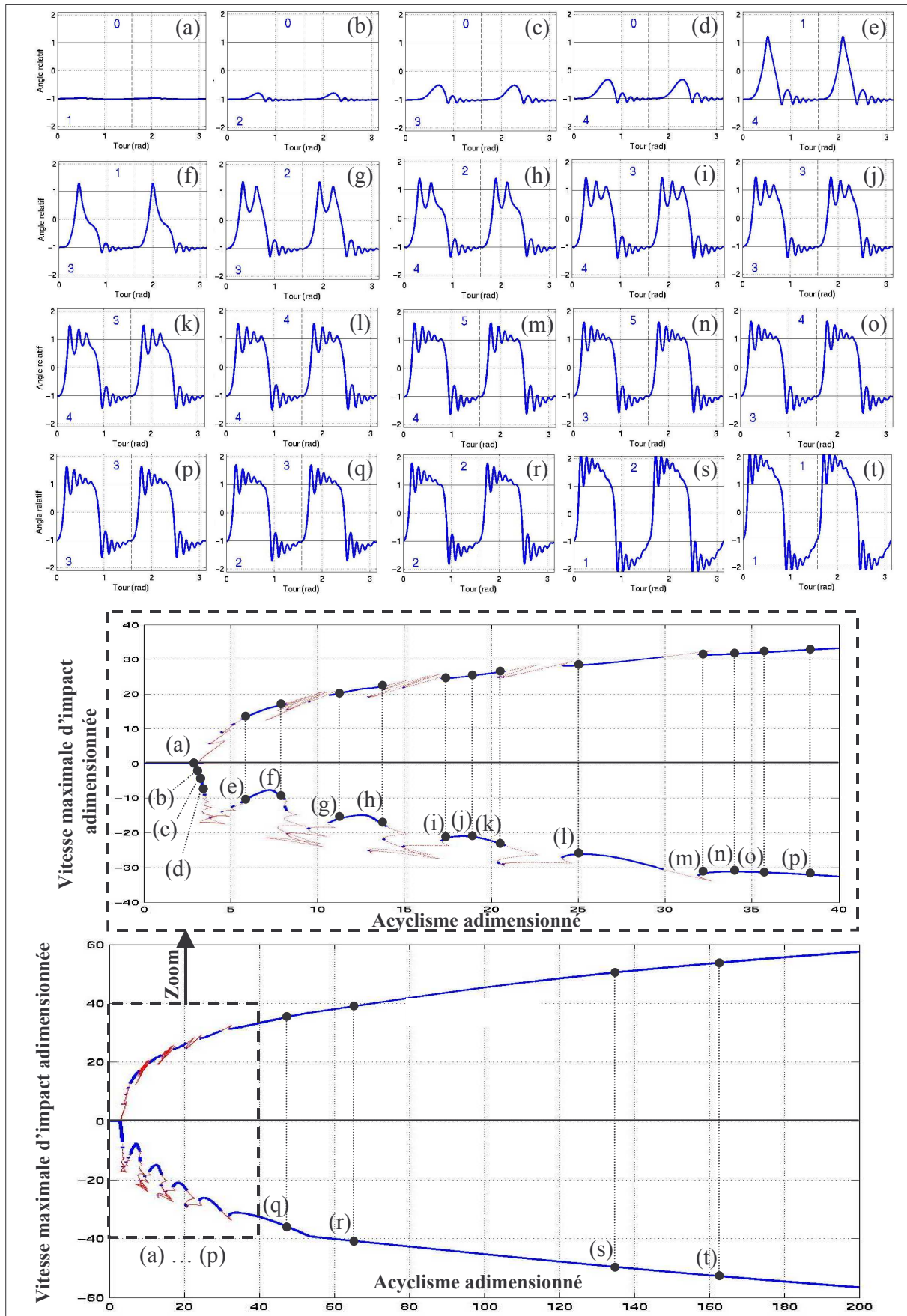


Figure 3.20 : Evolution des cycles limites 1T-périodiques en fonction de l'acyclisme adimensionné. Détail de quelques solutions temporelles 1T-périodiques stables.

3.5.2 ETUDE DES BIFURCATIONS

On souhaite maintenant se focaliser sur la première zone d'instabilité. Par souci de simplification, on ne considère que les vitesses d'impacts côté entraînement. La zone considérée est représentée Figure 3.21. On remarque entre autre la présence de plusieurs points de bifurcation nœud-col du type « retournement » (cf. 2.1.4.2) où la solution 1T-périodique change de nature (stable / instable) et de direction dans le diagramme de bifurcation (sens croissant ou décroissant du paramètre de contrôle).

Sur cette figure, la solution 1T-périodique est tout d'abord stable. En augmentant l'acyclisme, la solution devient instable suite à une bifurcation du type dédoublement de période. C'est le début d'une série de bifurcations diverses qui définissent ce qui est appelé la première zone d'instabilité (sur les 5 zones vues précédemment). Dans la figure suivante (Figure 3.21), quelques points de retournement notés (a) à (h) ont été sélectionnés. A chaque point choisi, correspondent sur la figure deux courbes : l'une avant la bifurcation, l'autre après la bifurcation. A chaque fois, il s'agit d'une solution 1T-périodique instable pré- et post- bifurcation nœud-col brutale avec changement du nombre d'impact par période et changement de direction vis-à-vis de l'acyclisme. La solution 1T-périodique repart « en arrière » avec un acyclisme décroissant avant de rencontrer à nouveau un point de bifurcation du type nœud-col mais où cette fois-ci la solution 1T-périodique retrouve sa stabilité de manière moins brusque et sans changement du nombre d'impact contrairement aux points de retournement détaillés dans la figure suivante (Figure 3.21). On obtient ainsi de suite une succession de bifurcations dans l'ordre suivant :

- perte de stabilité de la solution 1T-périodique par dédoublement de période. Un des multiplicateurs de Floquet sort du cercle unité par la valeur réelle -1 ;
- bifurcation nœud-col brutale : avec le pas de discrétisation de la technique de continuation utilisée, on ne détecte pas forcément la solution stable. Le multiplicateur de Floquet incriminé (cf. 2.1.4.2) passe brutalement d'une valeur réelle négative inférieure à -1 à une valeur positive supérieure à $+1$ comme on peut le voir plus loin (cf. Figure 3.22). C'est le cas par exemple des points (a), (b), (c) et (d) de la Figure 3.21. La solution évolue ensuite avec un acyclisme décroissant. Ce type de bifurcation est accompagné d'un changement du nombre d'impacts côté entraînement par période dans la solution (de 7 à 6 en (a), de 6 à 5 en (b), de 5 à 4 en (c) et de 4 à 3 en (d)). Ce type de bifurcation est à rapprocher des bifurcations rasantes qui apparaissent dans les modèles de contact avec loi de restitution (cf. 2.1.4.2v)). Il est probable qu'avec un modèle avec loi de restitution, on obtiendrait des bifurcations rasantes.
- bifurcation nœud-col classique. La solution 1T-périodique redevient stable et change de sens de variation relativement à l'acyclisme. Cela correspond à l'entrée du multiplicateur de Floquet dans le cercle unité (par la valeur réelle $+1$).

Cet enchaînement s'interrompt au point (e) de la figure qui correspond à une bifurcation nœud-col brusque pour laquelle le changement de nombre d'impacts intervient du côté opposé. Pour le point (e), on passe d'une solution 1T-périodique instable à 3 impacts par période côté entraînement à une solution 1T-périodique instable avec le même nombre d'impact côté entraînement mais avec 1 impact par période du côté opposé. A partir de ce point, sur la Figure 3.21, la solution 1T-périodique présente un et un seul impact du côté opposé. Le diagramme de bifurcation suit ensuite le même type d'enchaînement de bifurcation que précédemment :

- bifurcations nœud-col brusques avec changement du nombre d'impacts côté entraînement (points (f), (g) et (h) de la figure) ;
- bifurcation nœud-col classique avec gain de stabilité locale du cycle limite ;
- perte de stabilité de la solution 1T-périodique par dédoublement de période (sauf pour la dernière solution stable représentée sur la figure).

Toute la zone d'instabilité représentée ci-après (cf. Figure 3.21) montre donc la coexistence de solution 1T-périodique (stables / instables) et de nombreuses bifurcations (nœud-col / dédoublement) pour une plage de paramètre de contrôle relativement restreinte.

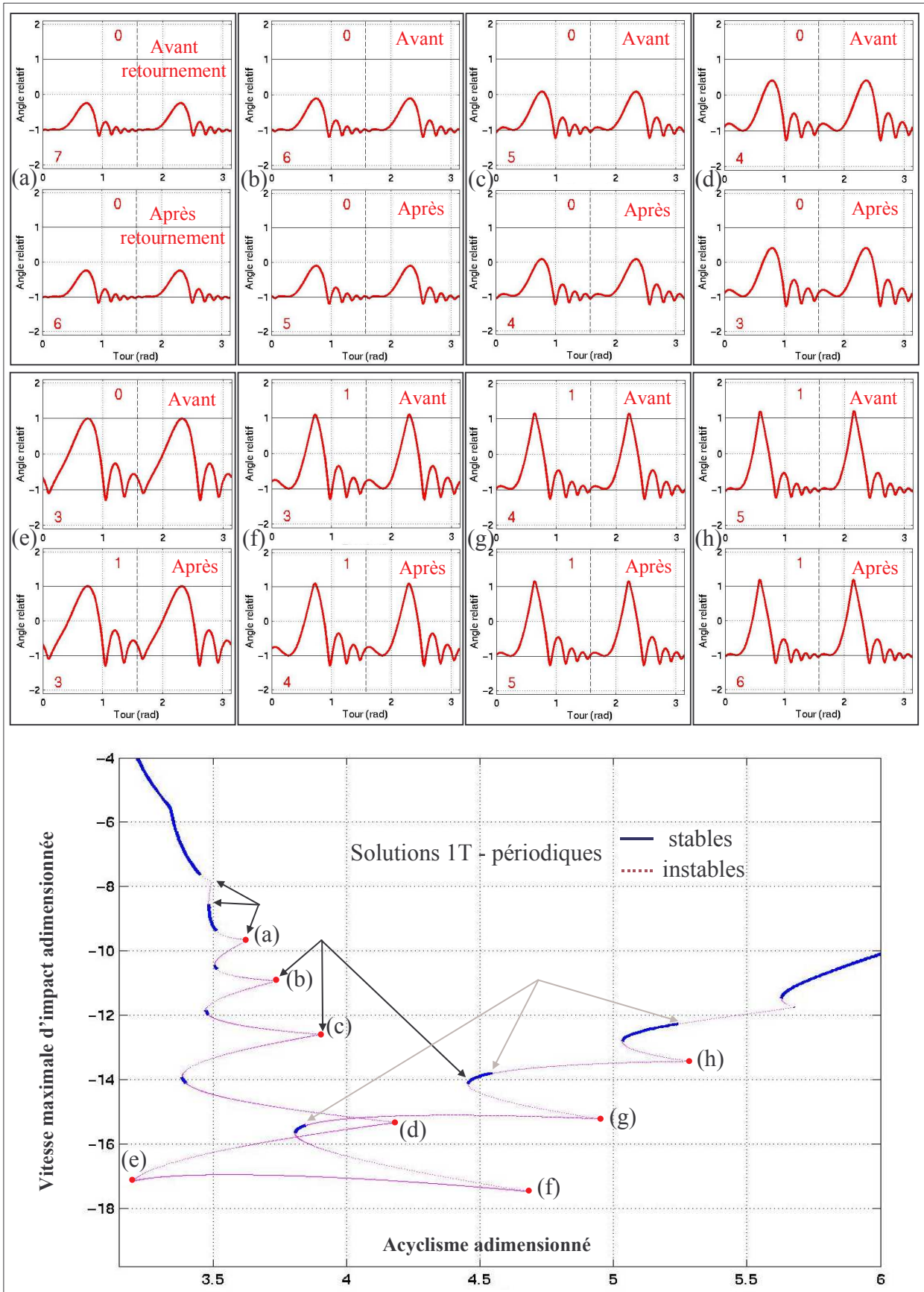


Figure 3.21 : Tracé des points de bifurcation de solutions $1T$ -périodiques. Détail de quelques points de retournements par la représentation temporelle pré- et post-bifurcation.

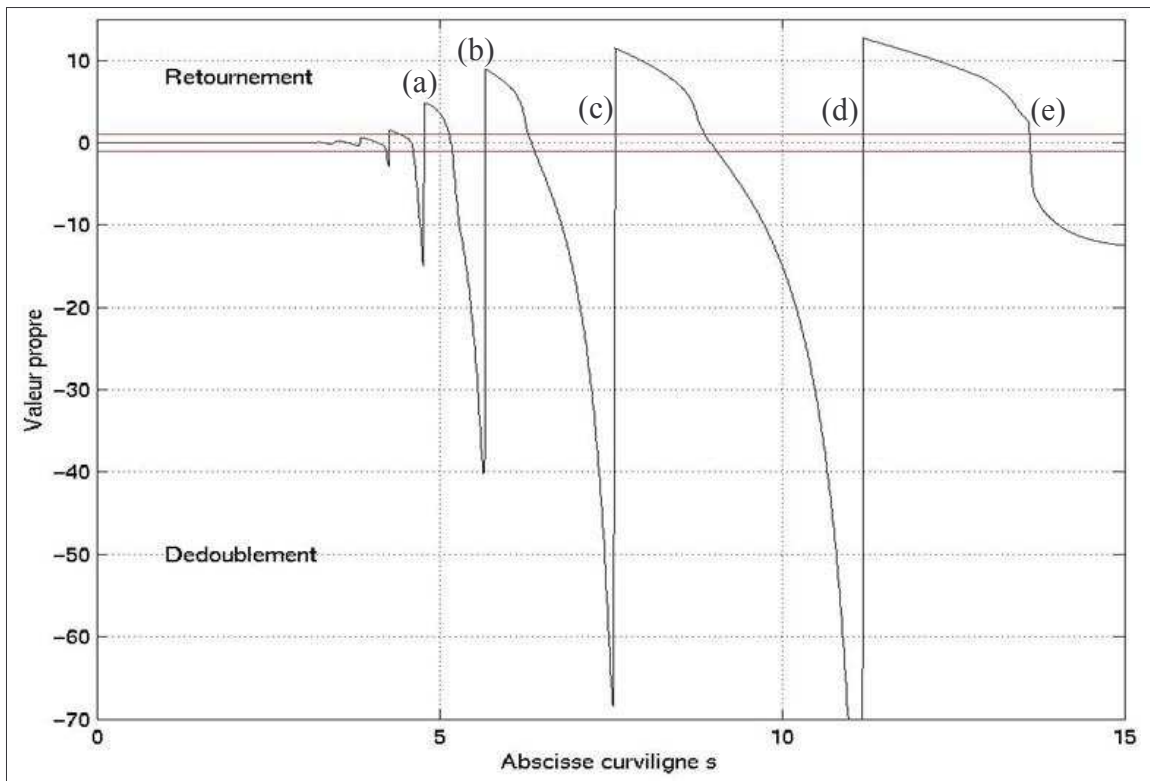


Figure 3.22 : Evolution du multiplicateur de Floquet de plus grand module en fonction de l'abscisse curviligne utilisée par la méthode de continuation. Mise en évidence des retournements brusques sur les points de bifurcation (a), (b), (c), (d) et (e) présentés en Figure 3.21.

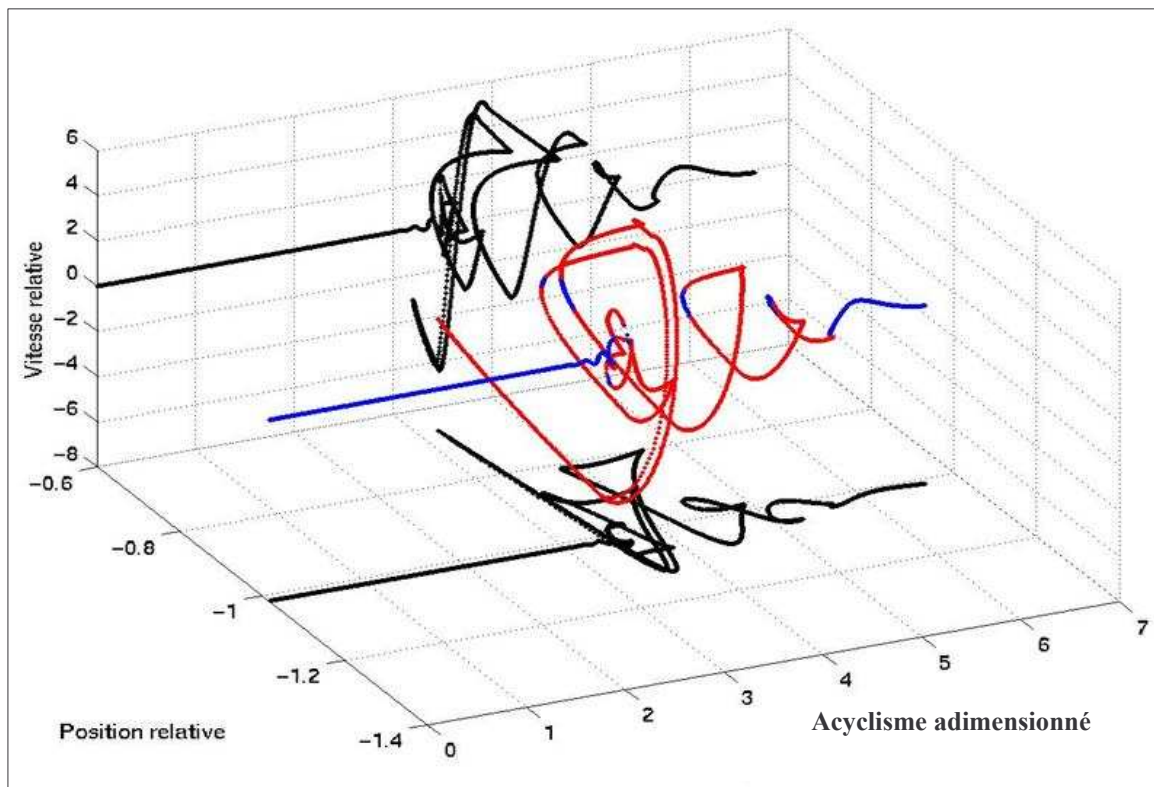


Figure 3.23 : Evolution des conditions initiales des solutions 1T-périodiques obtenues par continuation (– stables, – instables, – projections 2D) en fonction de l'acyclisme. Mise en évidence des variations de courbure du diagramme de bifurcation présenté en Figure 3.21.

En outre, on se rend bien compte des variations brusques des cycles limites au cours de la technique de continuation en traçant l'évolution des conditions initiales à t_0 (angle relatif θ_0 , vitesse relative θ_0) des cycles limites obtenus en fonction de l'acyclisme (Figure 3.23). Sur certains des retournements tracés précédemment, on n'arrive même pas à distinguer sur la figure les branches de cycles limites avant et après bifurcation. Lorsqu'on projette la courbe 3D en 2D (traits noirs) pour n'observer que l'évolution de l'angle relatif initial ou de la vitesse relative initiale, on mesure bien à quel point les variations de courbure sont importantes sur le diagramme. Une grande partie du travail de thèse a été de mettre au point une technique de continuation, décrite précédemment, et qui ne soit pas mise en défaut lors des points de retournement brusques que nous venons de voir.

Attachons nous maintenant à l'étude des bifurcations de solutions 1T-périodiques par dédoublement de période et donc à l'apparition de solutions 2T-périodiques. Ce type de bifurcation intervient lorsqu'en augmentant l'acyclisme, la solution 1T-périodique perd sa stabilité. La solution 2T-périodique stable qui apparaît alors peut être obtenue à son tour par technique de continuation. Dans la figure ci-dessous (Figure 3.24), nous avons choisi de tracer la solution 2T-périodique engendrée par un dédoublement de période.

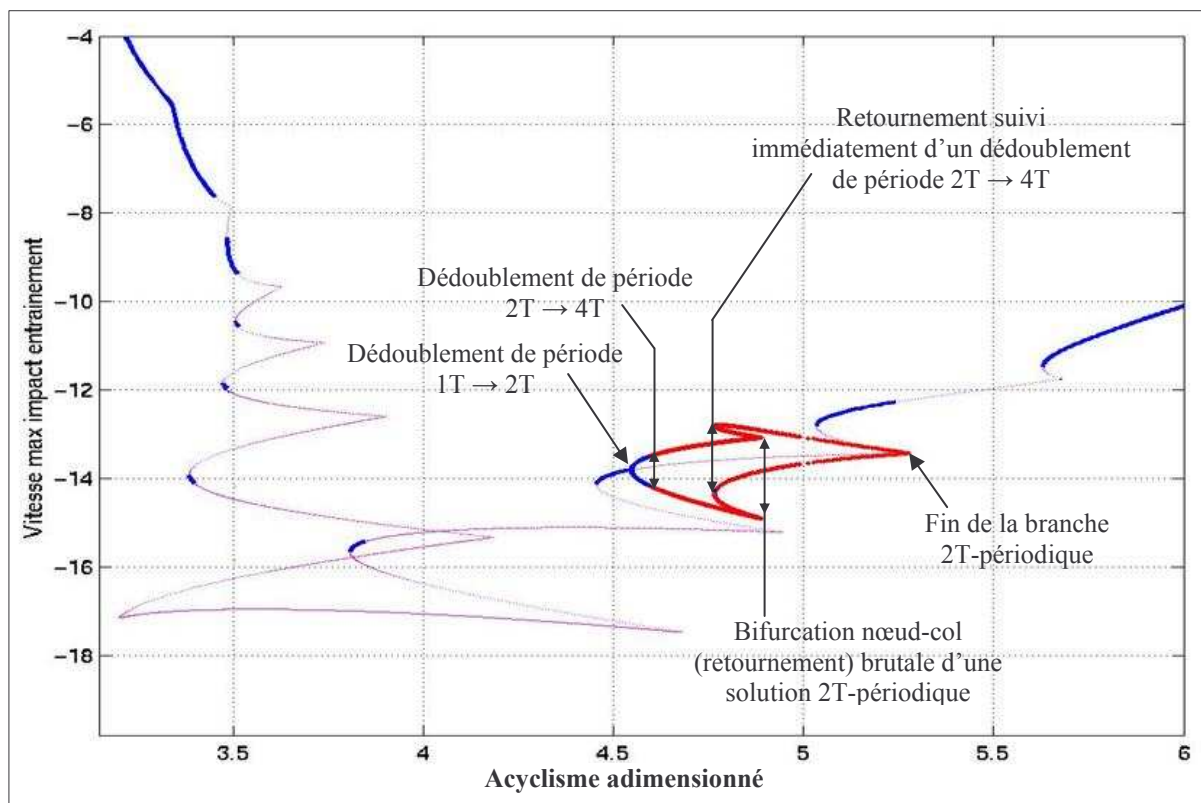


Figure 3.24 : Ajout d'une portion de branche 2T-périodique (– stables, – instables) au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21.

Sur cette figure, on remarque bien que l'on retrouve la même difficulté sur les branches 2T-périodiques, à savoir des points de retournement brusques qui peuvent mettre à défaut les techniques de continuation classiques rencontrées dans la littérature. Sur la plage d'acyclisme où ont été tracées les branches 2T-périodiques ci-dessus, les zones stables sont relativement faibles en raison des dédoublements de période ($2T \rightarrow 4T$) qui interviennent rapidement. C'est également le cas pour les autres branches 2T-périodiques pour lesquelles nous avons uniquement tracé les cycles limites stables dans la figure qui suit (Figure 3.25). Comme on peut le constater les cycles limites 2T périodiques stables sont peu étendus et nécessitent d'un long temps de calcul CPU lors de la technique de continuation.

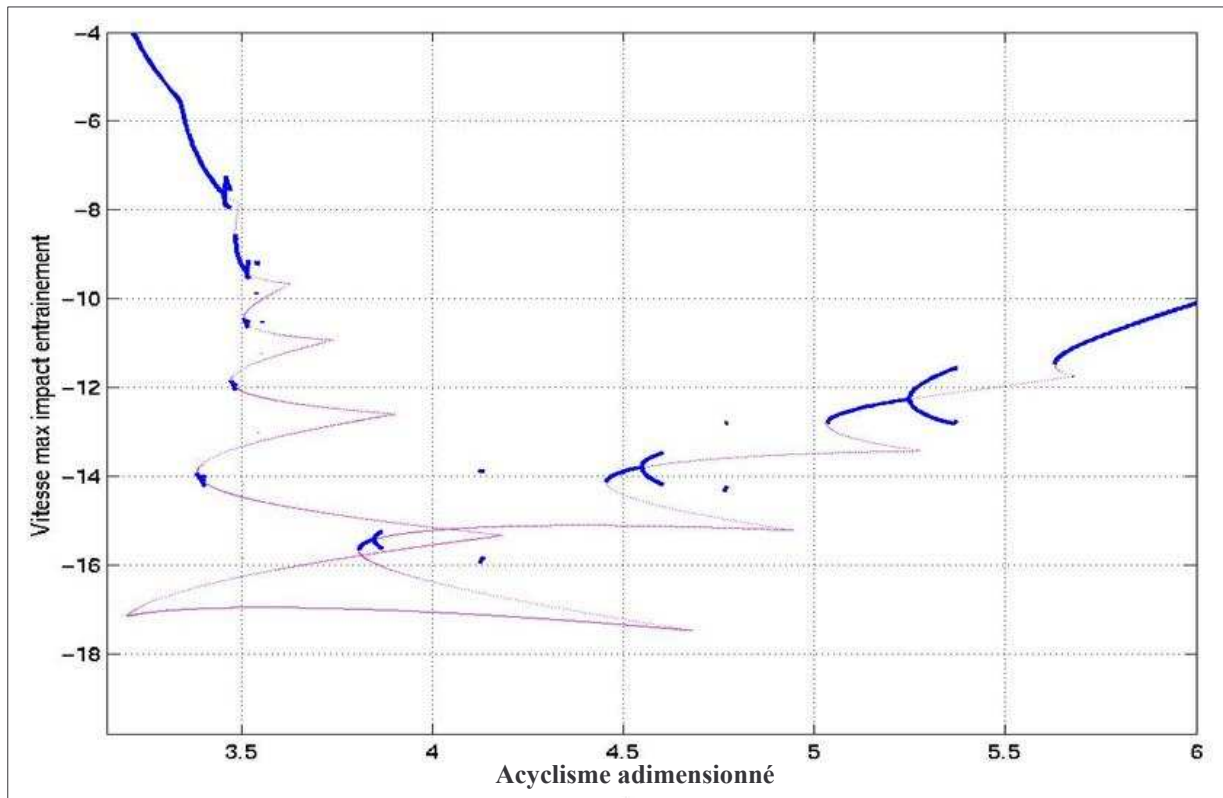


Figure 3.25 : Tracé des branches de solutions $2T$ -périodiques stables, ajouté au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21.

Afin de caractériser cette zone, c'est-à-dire de déterminer tous les attracteurs, avec des temps de calcul raisonnables, on décide d'utiliser la résolution semi-analytique temporelle (cf. 3.3) sur les branches de cycles limites $1T$ -périodiques instables. Ainsi, pour chaque plage d'acyclisme adimensionné où la solution $1T$ -périodique est instable (et ne correspond pas à une branche de retournement), on effectue une simulation semi-analytique sur $[0, 200T]$ en ne conservant que les 100 dernières périodes pour lesquelles on trace sur la figure qui suit (Figure 3.26) la vitesse maximale d'impact (côté entraînement et côté opposé). Ainsi, de la même façon qu'avec une section de Poincaré (cf. 2.1.1.3), on peut distinguer les cycles limites stables des attracteurs chaotiques. On remarque que sur la figure, les régions chaotiques apparaissent par une cascade de dédoublement de période (cf. 2.1.4.3). Par contre, aux vues de la rapidité avec laquelle la cascade se déclenche, il ne nous a pas été possible de calculer le ratio permettant de savoir si cette cascade vérifie ou non le scénario avec la constante de Feigenbaum.

Comme on pouvait le prévoir à partir de la Figure 3.25, on voit bien sur la Figure 3.26 que la zone d'instabilités (avec les nombreuses bifurcations que nous avons vues) est largement dominée par des comportements chaotiques. La partie agrandie sur la figure permet entre autres de voir un comportement $3T$ -périodique stable apparaissant subitement après une zone chaotique et dégénérant à nouveau en comportement chaotique par cascade sous-harmonique.

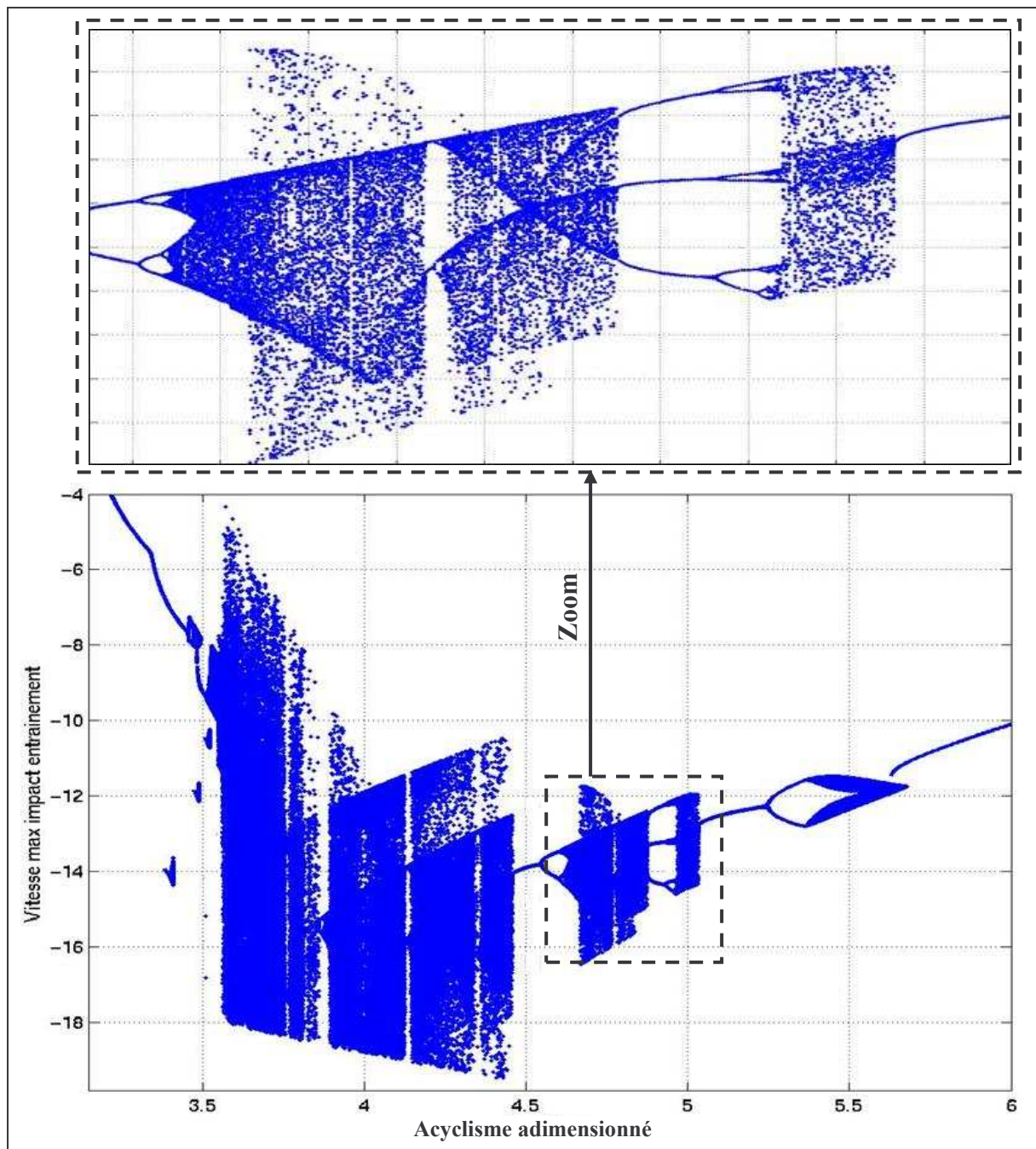


Figure 3.26 : Caractérisation complète des attracteurs de la zone correspondant au diagramme de bifurcation représenté en Figure 3.21. Zoom sur une zone plus restreinte.

3.5.3 INFLUENCE DE LA VITESSE MOYENNE ω_{aac}

Si on considère maintenant les variations de la vitesse moyenne de l'arbre à cames (avec un acyclisme en vitesse qui reste constant), on retrouve naturellement le même type de comportement que précédemment (cf. Figure 3.27).

En effet, d'après les équations de chaque phase de mouvement (cf. 3.3.1.2 et 3.3.1.3), la vitesse moyenne de l'arbre à cames ω_{aac} intervient dans le membre de droite des équations différentielles sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_r} \Delta \Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Gamma_j}) + I_{pav} \sum_{j=1}^{N_\Omega} \delta_{\Omega_j}^2 \omega_{aac}^2 \Delta \Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \quad (3.57)$$

Pour le deuxième membre ci-dessus, on remarque qu'au niveau de l'amplitude dynamique fournie au système (équivalente à une accélération), une augmentation de l'ensemble des acyclismes $\Delta \Omega_j$ ($1 \leq j \leq N_\Omega$) est équivalente à l'augmentation seule de la vitesse moyenne AAC au carré (ω_{aac})².

A faible vitesse, le système reste en contact permanent. A partir d'environ 2000 tr/min, la pompe à vide commence à perdre contact, générant ainsi des chocs périodiques côté entraînement avec des vitesses d'impact qui augmentent en valeur absolue au fur et à mesure que la vitesse moyenne augmente. Enfin, à partir d'un certain seuil (≈ 2700 tr/min), la pompe à vide impacte des deux côtés (traversée complète du jeu), faisant apparaître un comportement chaotique qui disparaît et réapparaît au fur et à mesure que l'on augmente la vitesse moyenne de l'arbre à cames. On distingue bien sur la figure ci-dessous l'alternance des zones chaotiques et des zones périodiques stables. Globalement, en augmentant la vitesse moyenne ω_{aac} , le niveau moyen des vitesses relatives d'impact augmente (en valeur absolue). Enfin, au-delà de 4000 tr/min, le système reste T-périodique stable de la même façon que ce que l'on avait observé précédemment au-delà d'un certain seuil d'acyclisme (cf. 3.5.1).

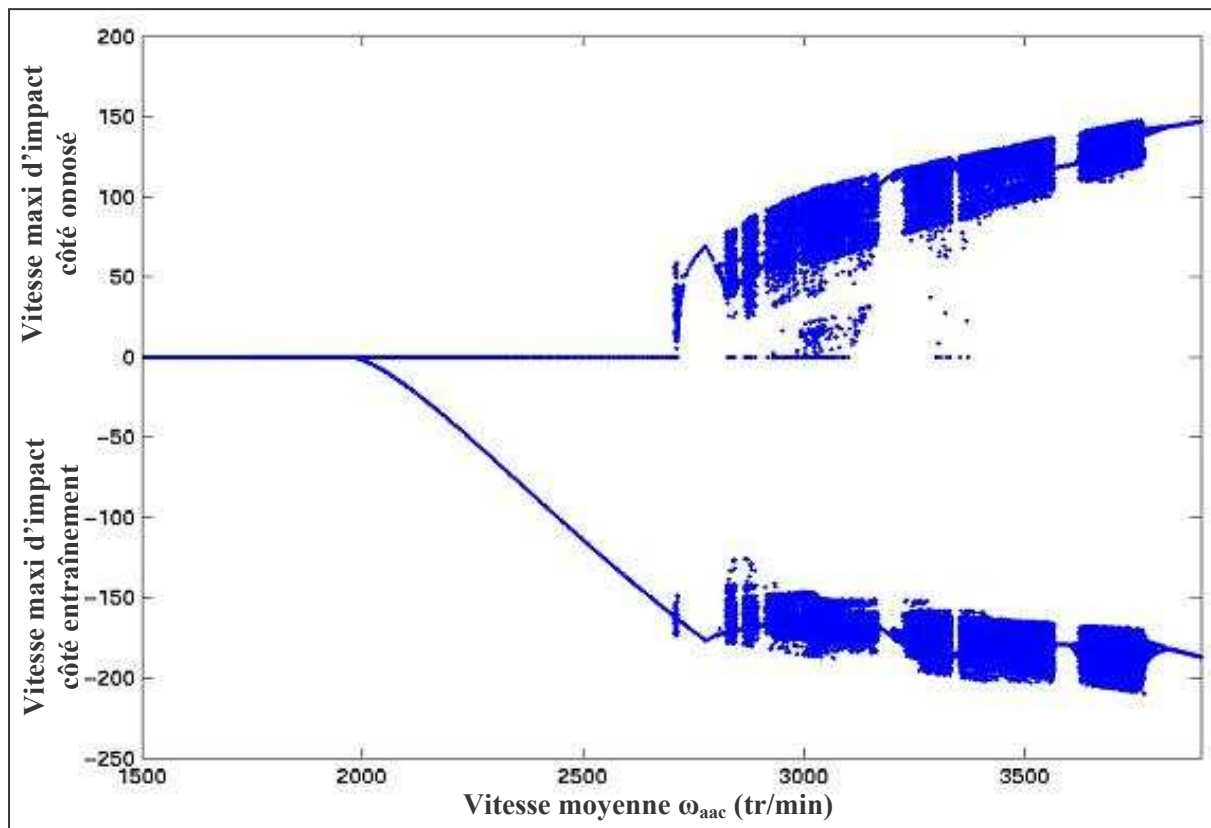


Figure 3.27 : Evolution des vitesses maximales d'impact (côté entraînement et opposé) en fonction de la vitesse moyenne ω_{aac} .

3.5.4 CAS D'UNE EXCITATION MULTI-HARMONIQUE

Nous savons que l'arbre à cames est soumis à l'acyclisme moteur et que ce dernier comporte de nombreuses harmoniques en Hn moteur (n = 2, 4, 6, ...) ce qui donne des harmoniques en hn (n = 4, 8, 12, ...) à l'arbre à cames. Il est donc nécessaire pour nous, de prendre en compte toute cette richesse harmonique pour voir quels effets cela induit sur le comportement du modèle réalisé.

On considère donc les excitations suivantes :

- Acyclisme (5 premières harmoniques) par le biais de la vitesse instantanée de l'arbre à cames sous la forme :

$$\Omega_{AAC}(t) = \omega_{aac} + \Delta\Omega_1 \sin(4\omega_{aac}t + \varphi_{\Omega 1}) + \Delta\Omega_2 \sin(8\omega_{aac}t + \varphi_{\Omega 2}) + \dots \\ \Delta\Omega_3 \sin(12\omega_{aac}t + \varphi_{\Omega 3}) + \Delta\Omega_4 \sin(16\omega_{aac}t + \varphi_{\Omega 4}) + \Delta\Omega_5 \sin(20\omega_{aac}t + \varphi_{\Omega 5}) \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta\Omega_1 = 36 \text{ tr/min}, & \Delta\Omega_2 = 15 \text{ tr/min}, & \Delta\Omega_3 = 9 \text{ tr/min}, & \Delta\Omega_4 = 8 \text{ tr/min} & \text{et} & \Delta\Omega_5 = 4 \text{ tr/min} \\ \varphi_{\Omega 1} = +160^\circ, & \varphi_{\Omega 2} = -70^\circ, & \varphi_{\Omega 3} = -175^\circ, & \varphi_{\Omega 4} = +70^\circ & \text{et} & \varphi_{\Omega 5} = -10^\circ \end{cases}$$

- Couple résistant multi-harmonique sous la forme suivante :

$$\Gamma_{res}(t) = \Gamma_0 + \Delta\Gamma_1 \sin(\omega_{aac}t + \varphi_{\Gamma 1}) + \Delta\Gamma_2 \sin(2\omega_{aac}t + \varphi_{\Gamma 2}) + \dots \\ \Delta\Gamma_3 \sin(3\omega_{aac}t + \varphi_{\Gamma 3}) + \Delta\Gamma_4 \sin(6\omega_{aac}t + \varphi_{\Gamma 4}) \quad (3.59)$$

avec

$$\Gamma_0 = 1,890 \text{ Nm} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta\Gamma_1 = 0,140 \text{ Nm}, & \Delta\Gamma_2 = 0,190 \text{ Nm}, & \Delta\Gamma_3 = 0,490 \text{ Nm} & \text{et} & \Delta\Gamma_4 = 0,045 \text{ Nm} \\ \varphi_{\Gamma 1} = -175^\circ, & \varphi_{\Gamma 2} = -25^\circ, & \varphi_{\Gamma 3} = -10^\circ & \text{et} & \varphi_{\Gamma 4} = -70^\circ \end{cases}$$

Le paramètre de contrôle que l'on fait varier reste la vitesse moyenne de l'arbre à cames ω_{aac} . Les résultats sont présentés dans la figure ci-après (cf. Figure 3.28). Comme avec une excitation en h4, à partir d'une valeur de vitesse AAC critique, des pertes de contact apparaissent du côté entraînement pour des vitesses d'impact en valeur absolue croissante. En revanche, dès qu'il ya contact sur les deux côtés, une zone chaotique apparaît. Le calcul du plus grand exposant de Lyapunov le prouve dans le deuxième cas présenté. Cette zone chaotique arrive de manière très brutale et on n'arrive pas à distinguer les bifurcations qui y conduisent. Cela s'explique par le fait que, comme nous l'avons vu précédemment (Figure 3.21), les bifurcations nœud-col dans les zones chaotiques surviennent lorsque le nombre d'impact par période change. En prenant en compte ici les harmoniques jusqu'au h20 AAC (hautes fréquences), ce changement de nombre d'impact intervient à la moindre augmentation de la vitesse AAC. C'est pourquoi, la zone chaotique survient si brutalement et sur une si grande plage de vitesse AAC (jusqu'à 4000 tr/min AAC, on ne retrouve pas de cycle limite stable impactant des 2 côtés du jeu).

De plus, l'augmentation de l'inertie de la pompe à vide I_{pav} fait décroître la vitesse critique d'apparition des impacts et des zones chaotiques. Cependant, l'allure générale des diagrammes (a) et (b) reste très similaire.

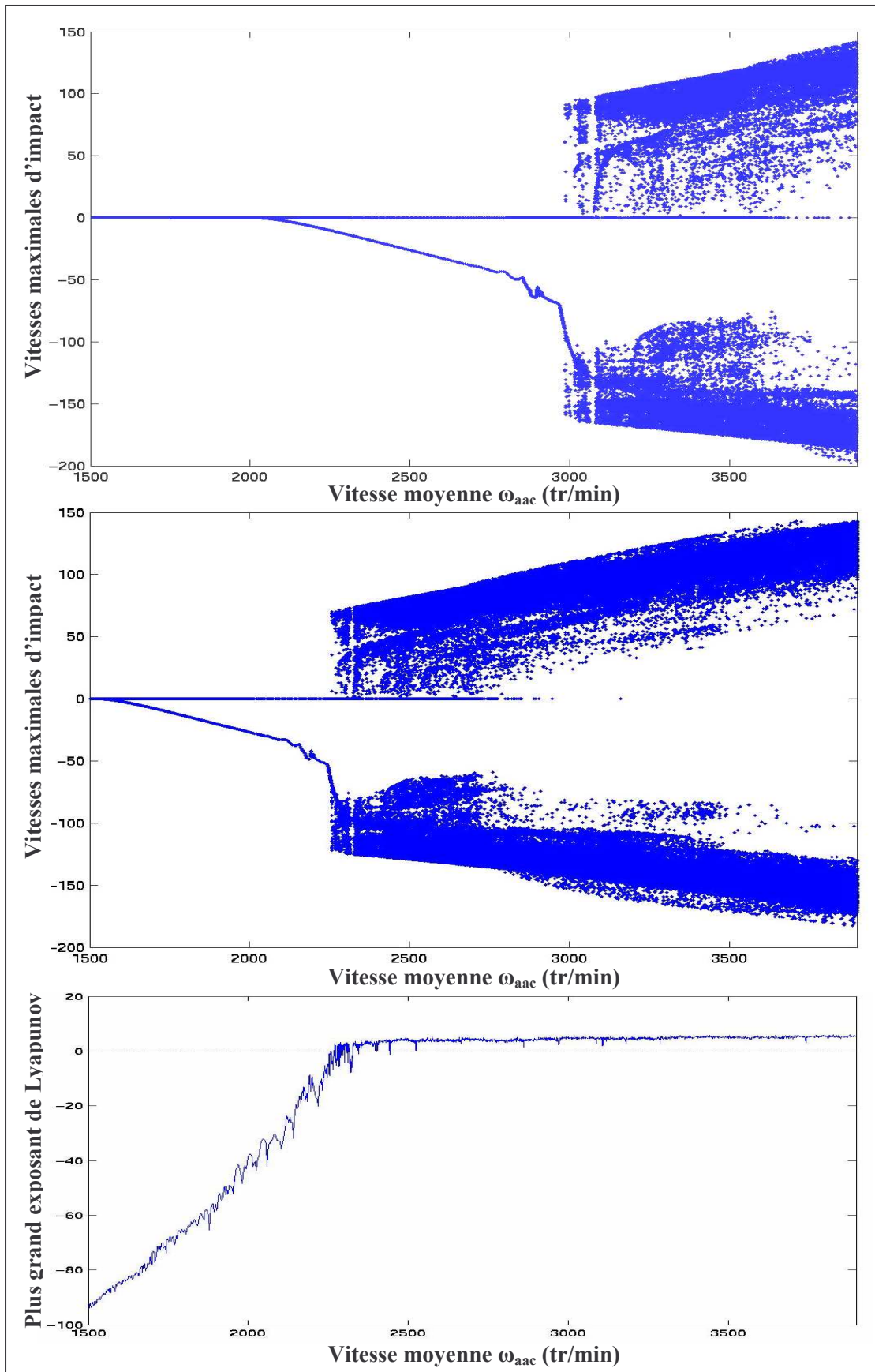


Figure 3.28 : Evolution des vitesses maximales d'impact (côté entraînement et opposé) en fonction de la vitesse moyenne ω_{aac} . Comparaison entre deux valeurs d'inertie $I_{pav} = 0,24 \text{ g.m}^2$ (a) et $I_{pav} = 0,42 \text{ g.m}^2$ (b) et calcul du plus grand exposant de Lyapunov pour le deuxième cas (c).

3.6 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté une résolution semi-analytique sur un modèle à un degré de liberté des équations dynamiques non linéaires de l'entraînement de pompe à vide. Les résultats se sont révélés performants en terme de précision et de rapidité de résolution (en particulier en comparaison avec les résultats purement numériques pour la partie temporelle). La méthodologie exposée ci-dessus est dédiée au problème de TOC, bien qu'elle reprenne en majeure partie des modèles et des outils d'analyse connus de la littérature et présentés dans les deux premiers chapitres de ce mémoire.

L'étude réalisée se veut néanmoins originale par l'application industrielle utilisée avec la prise en considération d'un grand nombre d'harmoniques de l'acyclisme moteur, ce qui se rencontre beaucoup moins dans la littérature dédiée à ce type de systèmes à jeu. Même pour l'étude les chocs de denture de boîte de vitesses (sujet souvent rencontré), les auteurs se contentent souvent de prendre en considération que le premier harmonique (en H2) de l'acyclisme moteur. Or, dans notre cas, nous avons vu qu'avec la prise en compte de plusieurs harmoniques, en augmentant le nombre et la valeur des fréquences excitatrices introduites dans le système, on modifie notablement le comportement du système. Dans ce cas, les transitions entre solutions périodiques stables et solutions chaotiques se font de manière brutale.

Dans la partie qui suit nous allons de manière logique étendre la portée du modèle. Il s'agira dans un premier temps de ne plus se limiter à un seul degré de liberté. Puis, nous tenterons de corréler le modèle, d'abord de manière qualitative avec des cas applicatifs pratiques, puis de manière quantitative à l'aide d'un banc expérimental.

CHAPITRE 4

EXTENSIONS DU MODELE

Dans ce dernier chapitre, nous allons étendre l'étude réalisée précédemment en prenant en compte la déformation des pièces concernées. Jusqu'à présent, nous avons étudié l'entraînement de pompe à vide par une modélisation ramenée à un seul degré de liberté. Nous avons vu que, malgré cela, nous avons pu mettre en exergue la richesse et la complexité des comportements dynamiques du modèle analysé. Après avoir considéré la multiplicité des fréquences d'excitations représentant les différents harmoniques moteurs, nous allons maintenant enrichir la représentativité du système par la prise en compte de plusieurs degrés de liberté. Nous comparerons le précédent modèle à un degré de liberté avec le modèle multi-ddl développé. Afin de corréler la modélisation choisie, un banc expérimental suffisamment représentatif a été mis en place.

Le chapitre qui suit est par conséquent séparé en quatre parties. La première partie montre de manière générale, la problématique multi-ddl et décrit la méthodologie qui permet de traiter cela de manière similaire à celle utilisée pour le cas à un degré de liberté. Ensuite, nous considérerons dans la seconde partie, une distribution du type masses concentrées. Il s'agira de prendre en compte les modes de torsion de l'arbre à cames qui entraîne la pompe à vide en le représentant par une succession d'inerties en série. Ensuite, dans la troisième partie, le modèle initial sera testé succinctement et de manière qualitative sur des applications moteurs PSA (DV4TD et DV6). La quatrième partie enfin, abordera le banc expérimental réalisé pour corréler le modèle. Cette dernière partie traitera entre autres des difficultés expérimentales liées à la maîtrise de l'acyclisme et à la reproduction de vibro-impacts périodiques entretenus.

4.1 PROBLEMATIQUE GENERALE

4.1.1 MODELE GENERAL

Soit Ω^I et Ω^{II} , deux solides couplés par une non linéarité du type jeu bilatéral définissant le contact entre ces deux solides. On note $\underline{u}^I = {}^t[u_1^I, u_2^I, \dots, u_n^I]$, $\underline{u}^{II} = {}^t[u_1^{II}, u_2^{II}, \dots, u_m^{II}]$ et $\underline{u} = {}^t[\underline{u}^I \ \underline{u}^{II}] = {}^t[u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}]$ respectivement les champs de déplacement des systèmes Ω^I , Ω^{II} et $\Omega = \{\Omega^I + \Omega^{II}\}$. Ω^I et Ω^{II} sont respectivement soumis aux efforts extérieurs $\underline{F}^I(t) = {}^t[F_1^I(t), F_2^I(t), \dots, F_n^I(t)]$ et $\underline{F}^{II}(t) = {}^t[F_1^{II}(t), F_2^{II}(t), \dots, F_m^{II}(t)]$.

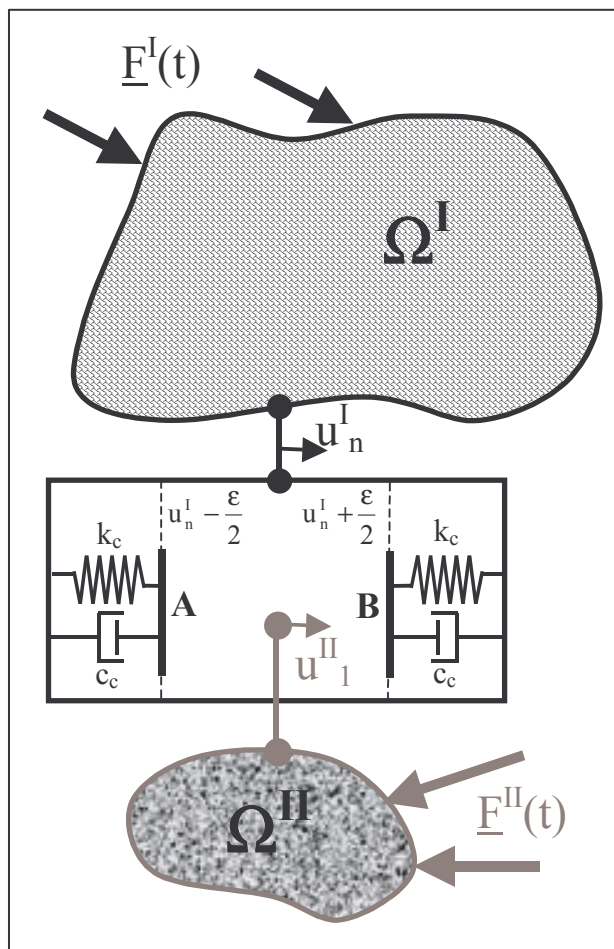


Figure 4.1 : Modèle général

On suppose que la non linéarité de contact est localisée entre les degrés de liberté $u_n = u_n^I$ et $u_{n+1} = u_{n+1}^{II}$ (Figure 4.1). On distingue ainsi la phase de vol libre dans le jeu ϵ entre les deux solides et la phase de contact sur l'un des côtés (côté A dit d'entraînement ou côté B dit opposé) :

Contact en A	Vol libre	Contact en B
$u_{n+1} \leq u_n - \epsilon/2$	$u_n - \epsilon/2 < u_{n+1} < u_n + \epsilon/2$	$u_n + \epsilon/2 \leq u_{n+1}$

Le contact est modélisé par une raideur de contact avec un amortissement de contact. Le vecteur $\underline{F}_{\text{CONTACT}}$ effort de contact linéaire par morceaux engendré s'écrit alors :

$$\underline{F}_{\text{CONTACT}} = {}^t[0, \dots, 0, f_{\text{I/I}}, f_{\text{I/II}}, 0, \dots, 0] \quad (4.1)$$

où

$$f_{\text{I/I}} = -f_{\text{I/II}} = \begin{cases} k_c \left(u_{n+1} - u_n + \frac{\varepsilon}{2} \right) + c_c (\dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n), & \text{si } u_{n+1} \leq u_n - \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{si } u_n - \frac{\varepsilon}{2} < u_{n+1} < u_n + \frac{\varepsilon}{2} \\ k_c \left(u_{n+1} - u_n - \frac{\varepsilon}{2} \right) + c_c (\dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n), & \text{si } u_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n+1} \end{cases} \quad (4.2)$$

où k_c et c_c sont respectivement la raideur de contact et l'amortissement de contact.

Les équations différentielles décrivant le système complet s'écrivent alors :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{C}}^{1,II} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{K}}^{1,II} \underline{u}(t) = \underline{F}(t) + \underline{F}_{\text{CONTACT}} \quad (4.3)$$

$$\text{avec } \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}^I & 0 \\ 0 & \underline{\underline{M}}^{II} \end{pmatrix}, \underline{\underline{C}}^{1,II} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^I & 0 \\ 0 & \underline{\underline{C}}^{II} \end{pmatrix}, \underline{\underline{K}}^{1,II} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^I & 0 \\ 0 & \underline{\underline{K}}^{II} \end{pmatrix}, \underline{F}(t) = \begin{pmatrix} \underline{F}^I(t) \\ \underline{F}^{II}(t) \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}^I$, $\underline{\underline{C}}^I$ et $\underline{\underline{K}}^I$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de Ω^I .
 $\underline{\underline{M}}^{II}$, $\underline{\underline{C}}^{II}$ et $\underline{\underline{K}}^{II}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement, de raideur de Ω^{II} .

4.1.2 SYSTEME LINEAIRE PAR MORCEAUX

Le système différentiel à résoudre est linéaire par morceaux. Il peut en effet être écrit sur les deux phases de mouvement qui sont le vol libre et le contact.

Pendant la phase de vol libre, le mouvement des solides Ω^I et Ω^{II} est décrit par le système différentiel linéaire suivant :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{C}}^{1,II} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{K}}^{1,II} \underline{u}(t) = \underline{F}(t) \quad (4.4)$$

Pendant la phase de contact, le mouvement des solides Ω^I et Ω^{II} est décrit par le système différentiel linéaire suivant :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{\underline{K}} \underline{u}(t) = \underline{F}(t) + \underline{F}_e \quad (4.5)$$

$$\text{où } \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^{1,II} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ {}^t\underline{\underline{0}} & +c_c & -c_c & {}^t\underline{\underline{0}} \\ {}^t\underline{\underline{0}} & -c_c & +c_c & {}^t\underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}, \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{1,II} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ {}^t\underline{\underline{0}} & +k_c & -k_c & {}^t\underline{\underline{0}} \\ {}^t\underline{\underline{0}} & -k_c & +k_c & {}^t\underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\text{et} \quad F_\varepsilon = \text{sign}(u_{n+1} - u_n) \cdot k_c \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} & +\frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$\text{avec} \quad \text{sign}(u_{n+1} - u_n) = \begin{cases} +1 & \text{si } u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{côté B}) \\ -1 & \text{si } u_n < u_{n+1} \quad (\text{côté A}) \end{cases}$$

Finalement le problème à résoudre est un système différentiel linéaire par morceaux régi par :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}}^{I,II} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}}^{I,II} \underline{u} = \underline{\underline{F}}(t), & \text{si } u_n - \frac{\varepsilon}{2} < u_{n+1} < u_n + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{vol libre}) \\ \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{F}}(t) + \underline{\underline{F}}_\varepsilon, & \text{si } u_{n+1} \leq u_n - \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } u_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq u_{n+1} \quad (\text{contact}) \end{cases} \quad (4.8)$$

4.1.3 RESOLUTION EN BASES MODALES

4.1.3.1 PASSAGE EN BASES MODALES

Soit $\underline{\underline{P}}^I = [\underline{\underline{P}}_1^I \underline{\underline{P}}_2^I \dots \underline{\underline{P}}_n^I]$ base des modes propres réels (de pulsations propres ω_i^I ($i = 1, \dots, n$)) du système Ω^I non amorti composée des vecteurs propres $\underline{\underline{P}}_i^I$ vérifiant la relation $(-\omega_i^{I^2} \underline{\underline{M}}^I + \underline{\underline{K}}^I) \underline{\underline{P}}_i^I(\omega_i^I) = \underline{\underline{0}}$.

Soit $\underline{\underline{P}}^{II} = [\underline{\underline{P}}_1^{II} \underline{\underline{P}}_2^{II} \dots \underline{\underline{P}}_m^{II}]$ base des modes propres réels (de pulsations propres ω_j^{II} ($j = 1, \dots, m$)) du système Ω^{II} non amorti composée des vecteurs propres $\underline{\underline{P}}_j^{II}$ vérifiant la relation $(-\omega_j^{II^2} \underline{\underline{M}}^{II} + \underline{\underline{K}}^{II}) \underline{\underline{P}}_j^{II}(\omega_j^{II}) = \underline{\underline{0}}$.

Soit $\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{P}}_2 \dots \underline{\underline{P}}_{n+m}]$ base des modes propres réels (de pulsations propres ω_k ($k = 1, \dots, n+m$)) du système global en contact $\Omega = \{\Omega^I + \Omega^{II}\}$ non amorti composée des vecteurs propres $\underline{\underline{P}}_k$ vérifiant la relation $(-\omega_k^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{P}}_k(\omega_k) = \underline{\underline{0}}$.

Ces bases de vecteurs propres et leurs pulsations propres associées sont calculées numériquement en prenant en compte les relations d'orthogonalité :

Pour $\Omega^{I,II} = \{\Omega^I\} + \{\Omega^{II}\}$ (système en vol libre) :

$$\begin{cases} {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}}^{I,II} = \underline{\underline{I}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{P}}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{P}}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \end{pmatrix} \\ {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{K}}^{I,II} \underline{\underline{P}}^{I,II} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{P}}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}^I & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{P}}^{II} \end{pmatrix} = \text{diag}((\omega_1^I)^2, \dots, (\omega_n^I)^2, (\omega_1^{II})^2, \dots, (\omega_m^{II})^2) \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour $\Omega = \{ \Omega^I + \Omega^{II} \}$ (système en contact) :

$$\begin{cases} {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}} \\ {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{P}} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n+m}^2) \end{cases} \quad (4.10)$$

La solution $\underline{u}(t)$ peut donc être projetée dans ces bases modales en tenant compte de la phase de mouvement considérée :

$$\begin{cases} \underline{u}(t) = \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{a}(t) & \text{en vol libre (système } \Omega^{I,II} = \{ \Omega^I \} + \{ \Omega^{II} \} \text{)} \\ \underline{u}(t) = \underline{\underline{P}} \underline{a}(t) & \text{en contact (système } \Omega = \{ \Omega^I + \Omega^{II} \} \text{)} \end{cases} \quad (4.11)$$

En introduisant l'amortissement du système, $\underline{a}(t)$ vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \text{En vol libre} \\ \ddot{\underline{a}}(t) + {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{C}}^{I,II} \underline{\underline{P}}^{I,II} \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag} \left((\omega_1^I)^2, \dots, (\omega_n^I)^2, (\omega_1^{II})^2, \dots, (\omega_m^{II})^2 \right) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{F}}^{I,II}(t) \\ \text{En contact} \\ \ddot{\underline{a}}(t) + {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}} \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag} (\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n+m}^2) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}} (\underline{\underline{F}}(t) + \underline{\underline{F}}_\varepsilon) \end{cases} \quad (4.12)$$

On remarque que les matrices $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{C}}^{I,II}$ introduisent un couplage des équations différentielles dans chaque cas (vol libre et contact).

4.1.3.2 DECOUPLAGE DES EQUATIONS EN BASE MODALE : HYPOTHESE DE BASILE

On se place dans l'hypothèse de Basile, hypothèse classique qui consiste à ignorer ce couplage, c'est-à-dire à supposer que les matrices d'amortissements $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{C}}^{I,II}$ sur chaque phase sont diagonales sur la base des modes propres non amortis. On introduit alors un amortissement proportionnel, dit également amortissement diagonal qui vérifie :

$$\begin{cases} {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{C}}^{I,II} \underline{\underline{P}}^{I,II} = \text{diag}(2\xi_1^I \omega_1^I, \dots, 2\xi_n^I \omega_n^I, 2\xi_1^{II} \omega_1^{II}, \dots, 2\xi_m^{II} \omega_m^{II}) \\ {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}} = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_{n+m} \omega_{n+m}) \end{cases} \quad (4.13)$$

Comme on le conçoit bien, cette simplification se justifie, globalement, dans le cas de faibles couplages par l'amortissement. Celui-ci jouant principalement son rôle aux niveaux des résonances, on regarde généralement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- les termes diagonaux de $({}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{C}}^{I,II} \underline{\underline{P}}^{I,II})$ et $({}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}})$ sont faibles (amortissements modaux faibles) ;
- les termes hors-diagonaux de $({}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{\underline{C}}^{I,II} \underline{\underline{P}}^{I,II})$ et $({}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}})$ sont petits devant les termes diagonaux (diagonale dominante) ;
- les fréquences propres sont suffisamment espacées entre elles (densité modale faible).

Les conditions ne sont en moins pas suffisantes pour garantir la légitimité du découplage. L'hypothèse de Basile ne repose sur aucune justification a priori et il faudra vérifier a posteriori sa validité.

Toutefois, nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse de Basile, de sorte que le système différentiel s'écrive dans la base des modes propres de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{En vol libre:} \\ \ddot{\underline{a}}(t) + 2\text{diag}(\xi_1^I \omega_1^I, \dots, \xi_n^I \omega_n^I, \xi_1^{II} \omega_1^{II}, \dots, \xi_m^{II} \omega_m^{II}) \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag}\left((\omega_1^I)^2, \dots, (\omega_n^I)^2, (\omega_1^{II})^2, \dots, (\omega_m^{II})^2\right) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{F}(t) \\ \text{En contact} \\ \ddot{\underline{a}}(t) + 2\text{diag}(\xi_1 \omega_1, \dots, \xi_{n+m} \omega_{n+m}) \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{n+m}^2) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}} (\underline{F}(t) + \underline{F}_\varepsilon) \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Il s'agit d'un système différentiel linéaire par morceaux. La solution temporelle $\underline{a}(t)$ sur base modale peut être déterminée analytiquement sur chaque phase. De manière similaire à celle utilisée pour le problème à un degré de liberté, nous allons ici résoudre le problème général de manière semi-analytique.

4.1.3.3 RESOLUTION SEMI-ANALYTIQUE TEMPORELLE

On se propose ici de décrire le processus complet de résolution semi-analytique du problème décrit au 4.1.1. Les bases modales $\underline{\underline{P}}^{I,II}$ et $\underline{\underline{P}}$ et leurs valeurs propres associées $(\omega_1^I, \dots, \omega_n^I, \omega_1^{II}, \dots, \omega_m^{II})$ et $(\omega_1, \dots, \omega_{n+m})$ sont calculées numériquement à partir des paramètres du systèmes. Soit le vecteur des conditions initiales $\underline{u}_0 = \underline{u}(0) = [u_1(0) \ u_2(0) \ \dots \ u_{n+m}(0)]$ à $t = t_0 = 0$, nous allons décrire ci-dessous les différentes étapes de la résolution temporelle du problème :

- Détection de la phase de départ à $t = t_0 = 0$ à partir de la valeur de \underline{u}_0 .
- Résolution analytique du système différentiel linéaire en base modale correspondant à la phase de mouvement concernée.
 - o S'il s'agit d'une phase de vol libre : Résolution analytique de l'équation suivante avec comme condition initiale à $t = t_0 = 0$, $\underline{a}(0) = (\underline{\underline{P}}^{I,II})^{-1} \underline{u}(0)$:

$$\ddot{\underline{a}}(t) + 2\text{diag}(\xi_1^I \omega_1^I, \dots, \xi_n^I \omega_n^I, \xi_1^{II} \omega_1^{II}, \dots, \xi_m^{II} \omega_m^{II}) \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag}\left((\omega_1^I)^2, \dots, (\omega_n^I)^2, (\omega_1^{II})^2, \dots, (\omega_m^{II})^2\right) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{F}(t)$$
 - o S'il s'agit d'une phase de contact : Résolution analytique de l'équation suivante avec comme condition initiale à $t = t_0 = 0$, $\underline{a}(0) = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{u}(0)$:

$$\ddot{\underline{a}}(t) + 2\text{diag}(\xi_1 \omega_1, \dots, \xi_{n+m} \omega_{n+m}) \dot{\underline{a}}(t) + \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_{n+m}^2) \underline{a}(t) = {}^t \underline{\underline{P}} (\underline{F}(t) + \underline{F}_\varepsilon)$$
- Détermination de la solution analytique de la phase considérée sur base naturelle $\underline{u}(t)$ à partir de la solution analytique sur base modale $\underline{a}(t)$ déterminée précédemment.
 - o S'il s'agit d'une phase de vol libre par la projection $\underline{u}(t) = \underline{\underline{P}}^{I,II} \underline{a}(t)$
 - o S'il s'agit d'une phase de contact par la projection $\underline{u}(t) = \underline{\underline{P}} \underline{a}(t)$
- Résolution numérique de l'instant t_1 de fin de phase : $t_1 = \min_{t > t_0} \left(t \text{ tel que } |u_{n+1}(t) - u_n(t)| = \frac{\varepsilon}{2} \right)$
- Utilisation du vecteur $\underline{u}(t_1)$ comme conditions initiales à $t = t_1$ de la phase suivante...

Par itérations successives, on génère ainsi la solution temporelle du système étudié avec raccordement numérique réalisé aux instants t_i de changement de phase de mouvement (vol libre ou contact).

4.2 APPROCHE MULTICORPS : MASSES CONCENTREES

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement dynamique de l'entraînement de la pompe à vide par un arbre à cames modélisé en torsion par une approche du type « masses concentrées ». Les arbres à cames considérés seront ceux qui équipent les moteurs diesel DV4 ou DV6 du groupe PSA Peugeot Citroën. Etant donné le peu d'informations dont on dispose concernant la pompe à vide, celle-ci sera assimilée comme précédemment à une inertie $I = I_{pav}$ soumise à un couple résistant instantané - $\Gamma_{res}(t)$ connu.

4.2.1 CARACTERISATION DE L'ARBRE A CAMES

On considère les arbres à cames échappement des moteurs diesel DV4TD et DV6. Il s'agit de moteurs 4 cylindres en ligne avec un AAC pour l'admission et un AAC pour l'échappement. C'est ce dernier qui entraîne la pompe à vide. Le DV4TD est un moteur 2 soupapes par cylindre (4 cames par AAC) tandis que le DV6 est un moteur 4 cylindres en ligne (donc 8 cames par AAC). Afin de réduire la taille du modèle à étudier, on prend en compte uniquement la torsion de l'arbre à cames. Celui-ci est considéré comme un ensemble d'inerties I_j ($j = 1$ à n) en série reliées par des raideurs de torsion et un amortissement visqueux interne. Les inerties I_j sont obtenues en tronçonnant l'arbre à cames. Les raideurs de torsion sont quant à elles obtenues en considérant la torsion entre chaque paire d'inertie concentrées en un point matériel. Il s'agit d'une approche du type « masses concentrées », appliquée en torsion. Les inerties et raideurs de torsion utilisées sont regroupées dans les tableaux qui suivent (cf. Tableau 4 et Tableau 5).

Raideurs de torsion (Nm/rad)		Inertie / axe rotation (*10 ⁻⁶ kg.m ²)		Raideurs de torsion (Nm/rad)		Inertie / axe rotation (*10 ⁻⁶ kg.m ²)	
k ₁	99 097	l ₁	2,81	k ₁₅	29 044	l ₁₅	6,57
k ₂	33 743	l ₂	2,38	k ₁₆	29 008	l ₁₆	10,12
k ₃	25 261	l ₃	4,55	k ₁₇	168 308	l ₁₇	1,30
k ₄	43 167	l ₄	10,12	k ₁₈	47 585	l ₁₈	2,38
k ₅	168 308	l ₅	1,30	k ₁₉	47 585	l ₁₉	1,30
k ₆	47 585	l ₆	10,31	k ₂₀	169 182	l ₂₀	10,31
k ₇	47 585	l ₇	6,57	k ₂₁	29 044	l ₂₁	6,57
k ₈	169 182	l ₈	10,12	k ₂₂	29 008	l ₂₂	10,12
k ₉	29 044	l ₉	1,30	k ₂₃	168 308	l ₂₃	1,30
k ₁₀	29 008	l ₁₀	2,38	k ₂₄	47 585	l ₂₄	2,38
k ₁₁	168 308	l ₁₁	1,30	k ₂₅	49 946	l ₂₅	1,13
k ₁₂	47 585	l ₁₂	2,38	k ₂₆	196 763	l ₂₆	10,31
k ₁₃	47 585	l ₁₃	1,30	k ₂₇	57 964	l ₂₇	3,47
k ₁₄	169 182	l ₁₄	10,31				

Tableau 4 : Caractérisation par inerties concentrées de l'arbre à cames DV4TD

Raideurs de torsion (Nm/rad)		Inertie / axe rotation (*10 ⁻⁶ kg.m ²)		Raideurs de torsion (Nm/rad)		Inertie / axe rotation (*10 ⁻⁶ kg.m ²)	
k ₁	318 388	l1	1,35	k14	132 653	l14	14,79
k ₂	207 241	l2	14,79	k15	65 814	l15	4,14
k ₃	65 814	l3	4,14	k16	65 814	l16	14,79
k ₄	65 814	l4	14,79	k17	138 593	l17	2,04
k ₅	137 850	l5	2,05	k18	40 969	l18	2,77
k ₆	40 951	l6	2,76	k19	40 969	l19	2,04
k ₇	41 064	l7	2,03	k20	138 593	l20	14,79
k ₈	138 848	l8	14,79	k21	65 814	l21	4,14
k ₉	65 814	l9	4,14	k22	65 814	l22	14,79
k10	65 814	l10	14,79	k23	169 817	l23	1,66
k11	131 735	l11	2,14	k24	36 189	l24	3,61
k12	41 906	l12	2,60	k25	26 954	l25	3,91
k13	42 023	l13	2,13				

Tableau 5 : Caractérisation par inerties concentrées de l'arbre à cames échappement DV6

Pour chaque cas, le premier mode de torsion de l'arbre à cames échappement se situe légèrement au-delà de 1000 Hz. Nous allons maintenant voir quelles excitations sont subies par le système. On ne considèrera ici que le DV6, l'étude du DV4TD étant équivalente.

4.2.2 CARACTERISATION DES EXCITATIONS

Les excitations soumises au système et représentées ci-après (cf. Figure 4.2) sont de trois types de source :

- l'acyclisme multi-harmonique provenant du moteur et qui impose en entrée de l'arbre à cames (côté poulie de distribution) une vitesse instantanée $\Omega(t)$ sous la forme suivante :

$$\Omega_{AAC}(t) = \omega_{aac} + \sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \Delta\Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \quad (4.15)$$

Une fois la composante continue retirée (correspondant à la vitesse moyenne ω_{aac}), cet acyclisme imposé se traduit par un couple alternatif $C_{\Omega}(t)$ appliqué sur l'inertie I_1 et qui s'écrit :

$$C_{\Omega}(t) = k_1 \left(\sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \frac{-\Delta\Omega_j}{\delta_{\Omega_j} \omega_{aac}} \cos(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \right) + c_1 \left(\sum_{j=1}^{N_{\Omega}} \Delta\Omega_j \sin(\delta_{\Omega_j} \omega_{aac} t + \varphi_{\Omega_j}) \right) \quad (4.16)$$

où c_1 est l'amortissement qui relie la butée (poulie AAC) à l'inertie I_1 (i.e. élément (1,1) de la matrice d'amortissement $\underline{\underline{C}}^{I,II}$ ou $\underline{\underline{C}}$) obtenu à partir de l'amortissement diagonal choisi ξ .

On écrit ce couple C_{Ω} , sous la forme :

$$C_{\Omega}(t) = \sum_{h=1}^N (\Delta_S C_{\Omega h} \sin(h \omega_{aac} t) + \Delta_C C_{\Omega h} \cos(h \omega_{aac} t)) \quad (4.17)$$

Afin de résoudre le système, on sépare le couple provenant de l'entraînement de distribution en une partie en « sin » et une partie en « cos ». On a les inégalités suivantes entre nombres entiers $1 \leq \delta_{\Omega_1}$ et $\delta_{\Omega_{N_{\Omega}}} \leq N$ ainsi que les relations :

$$\forall 1 \leq h \leq N, \forall 1 \leq j \leq N_{\Omega}, \begin{cases} \text{Si } h \neq \delta_{\Omega_j}, & \begin{cases} \Delta_S C_{\Omega h} = 0 \\ \Delta_C C_{\Omega h} = 0 \end{cases} \\ \text{Si } h = \delta_{\Omega_j}, & \begin{cases} \Delta_S C_{\Omega h} = k_1 \frac{\Delta \Omega_j}{\delta_{\Omega_j} \omega_{aac}} \sin \varphi_{\Omega_j} + c_1 \Delta \Omega_j \cos \varphi_{\Omega_j} \\ \Delta_C C_{\Omega h} = -k_1 \frac{\Delta \Omega_j}{\delta_{\Omega_j} \omega_{aac}} \cos \varphi_{\Omega_j} + c_1 \Delta \Omega_j \sin \varphi_{\Omega_j} \end{cases} \end{cases} \quad (4.18)$$

- le couple des cames (au nombre de 8 par arbre pour le DV6) noté C_{Camek} où k désigne le couple de la came prise en compte ($1 \leq k \leq 8$). Les couples C_{Came1} , C_{Came2} , ..., C_{Came8} sont respectivement associées (dans le cas du moteur DV6 par exemple) aux inerties I_2 , I_4 , I_8 , I_{10} , I_{14} , I_{16} , I_{20} et I_{22} .

$$\text{Pour } 1 \leq k \leq 8, \quad C_{Camek}(t) = C_{0k} + \sum_{j=1}^{N_C} \Delta C_{jk} \sin(\delta_{Cjk} \omega_{aac} t + \varphi_{Cjk}) \quad (4.19)$$

Les cames (1 et 2), (3 et 4), (5 et 6) et (7 et 8) correspondent respectivement aux cylindres moteur n° 1, 2, 3 et 4 (d'où $C_{Came1}(t) = C_{Came2}(t)$, $C_{Came3}(t) = C_{Came4}(t)$, $C_{Came5}(t) = C_{Came6}(t)$ et $C_{Came7}(t) = C_{Came8}(t)$). L'ordre d'allumage étant 1-3-4-2, le couple des cames sur chaque cylindre est tout simplement déphasé de $\pi/2$ selon cet ordre d'allumage. Les propriétés qui en découlent sont donc les suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{01} = C_{02} = C_{03} = C_{04} = C_{05} = C_{06} = C_{07} = C_{08} \\ \Delta C_{j1} = \Delta C_{j2} = \Delta C_{j3} = \Delta C_{j4} = \Delta C_{j5} = \Delta C_{j6} = \Delta C_{j7} = \Delta C_{j8} \\ \delta_{Cj1} = \delta_{Cj2} = \delta_{Cj3} = \delta_{Cj4} = \delta_{Cj5} = \delta_{Cj6} = \delta_{Cj7} = \delta_{Cj8} \\ \varphi_{Cj1} = \varphi_{Cj2}, \quad \varphi_{Cj3} = \varphi_{Cj4}, \quad \varphi_{Cj5} = \varphi_{Cj6} \quad \text{et} \quad \varphi_{Cj7} = \varphi_{Cj8} \\ \varphi_{Cj5} = \varphi_{Cj1} - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{Cj7} = \varphi_{Cj1} - \pi \quad \text{et} \quad \varphi_{Cj3} = \varphi_{Cj1} - 3\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

De la même façon que pour l'acyclisme, pour chaque couple de came, on préférera écrire celui-ci sous la forme suivante ($1 \leq \delta_{C1k}$ et $\delta_{CN_Ck} \leq N$) :

$$\text{Pour } 1 \leq k \leq 8, \quad C_{Camek}(t) = C_{0k} + \sum_{h=1}^N (\Delta_S C_{hk} \sin(h \omega_{aac} t) + \Delta_C C_{hk} \cos(h \omega_{aac} t)) \quad (4.21)$$

avec,

$$\text{Pour } 1 \leq k \leq 8, \forall 1 \leq h \leq N, \forall 1 \leq j \leq N_C, \begin{cases} \text{Si } h \neq \delta_{C_{jk}}, & \begin{cases} \Delta_S C_{hk} = 0 \\ \Delta_C C_{hk} = 0 \end{cases} \\ \text{Si } h = \delta_{C_{jk}}, & \begin{cases} \Delta_S C_{hk} = \Delta C_{jk} \cos \varphi_{C_{jk}} \\ \Delta_C C_{hk} = \Delta C_{jk} \sin \varphi_{C_{jk}} \end{cases} \end{cases} \quad (4.22)$$

- le couple résistant instantané de la pompe à vide, appliqué à l'inertie I_{n+1} et qui s'oppose à la rotation de l'arbre à cames :

$$\Gamma_{\text{res}}(t) = \Gamma_0 + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \Delta \Gamma_j \sin(\delta_{\Gamma_j} \omega_{\text{aac}} t + \varphi_{\Gamma_j}) \quad (4.23)$$

Là encore, on écrit ce couple de la manière suivante :

$$\Gamma_{\text{res}}(t) = -C_{\Gamma 0} - \sum_{h=1}^N (\Delta_S C_{\Gamma h} \sin(h \omega_{\text{aac}} t) + \Delta_C C_{\Gamma h} \cos(h \omega_{\text{aac}} t)) \quad (4.24)$$

avec les relations $1 \leq \delta_{\Gamma 1}, \delta_{\Gamma N_\Gamma} \leq N$, $C_{\Gamma 0} = -\Gamma_0$ et :

$$\forall 1 \leq h \leq N, \forall 1 \leq j \leq N_\Gamma, \begin{cases} \text{Si } h \neq \delta_{\Gamma_j}, & \begin{cases} \Delta_S C_{\Gamma h} = 0 \\ \Delta_C C_{\Gamma h} = 0 \end{cases} \\ \text{Si } h = \delta_{\Gamma_j}, & \begin{cases} \Delta_S C_{\Gamma h} = -\Delta \Gamma_j \cos \varphi_{\Gamma_j} \\ \Delta_C C_{\Gamma h} = -\Delta \Gamma_j \sin \varphi_{\Gamma_j} \end{cases} \end{cases} \quad (4.25)$$

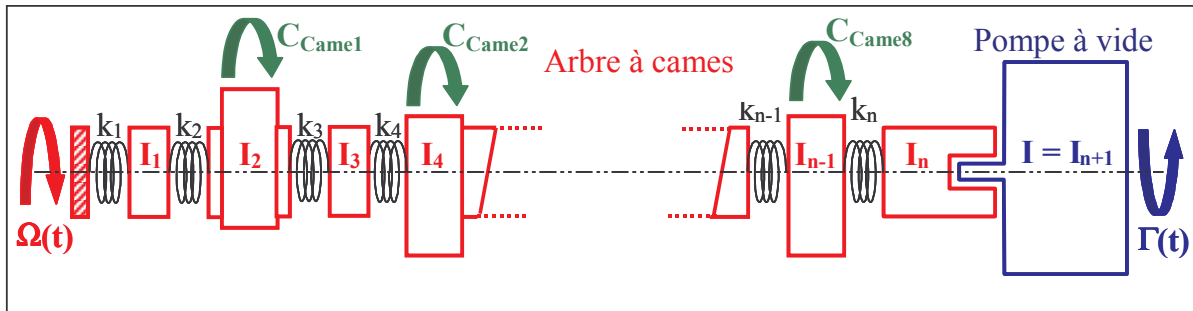


Figure 4.2 : Schéma du modèle multi-ddl en torsion

On peut notamment comparer le schéma ci-dessus (cf. Figure 4.2) avec le modèle à un degré de liberté utilisé dans le chapitre précédent (cf. Figure 3.8). Dans la base naturelle de l'ensemble des rotations angulaires des inerties I_1 à I_{n+1} (avec $n = 27$ pour le DV4TD d'après Tableau 4 et $n = 25$ pour le DV6 d'après Tableau 5), nous pouvons écrire le vecteur effort (ici couple) $\underline{\Gamma}(t)$ mentionné au paragraphe 4.1 d'après les trois sources d'excitation que nous venons de voir.

Pour le DV6 par exemple, on obtient donc :

(4.26)

$$\underline{F}(t) = \begin{pmatrix} C_{\Omega}(t) \\ C_{Came1}(t) \\ 0 \\ C_{Came2}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{Came3}(t) \\ 0 \\ C_{Came4}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{Came5}(t) \\ 0 \\ C_{Came6}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{Came7}(t) \\ 0 \\ C_{Came8}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Gamma_{res}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{01} \\ 0 \\ C_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{03} \\ 0 \\ C_{04} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{05} \\ 0 \\ C_{06} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{07} \\ 0 \\ C_{08} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{\Gamma 0} \end{pmatrix} + \sum_{h=1}^N \begin{pmatrix} \Delta_S C_{\Omega h} \\ \Delta_S C_{h1} \\ 0 \\ \Delta_S C_{h2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_S C_{h3} \\ 0 \\ \Delta_S C_{h4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_S C_{h5} \\ 0 \\ \Delta_S C_{h6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_S C_{h7} \\ 0 \\ \Delta_S C_{h8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_S C_{\Gamma h} \end{pmatrix} \sin(h\omega_{aac}t) + \sum_{h=1}^N \begin{pmatrix} \Delta_C C_{\Omega h} \\ \Delta_C C_{h1} \\ 0 \\ \Delta_C C_{h2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_C C_{h3} \\ 0 \\ \Delta_C C_{h4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_C C_{h5} \\ 0 \\ \Delta_C C_{h6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_C C_{h7} \\ 0 \\ \Delta_C C_{h8} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_C C_{\Gamma h} \end{pmatrix} \cos(h\omega_{aac}t)$$

On distingue par conséquent dans le vecteur $\underline{F}(t)$, une partie constante, une partie constituée d'une somme de N harmoniques (dont certaines possiblement nulles) en « $\sin(h\omega_{aac}t)$ » et de N harmoniques (dont certaines également possiblement nulles) en « $\cos(h\omega_{aac}t)$ ». A partir de ce vecteur excitation, on pourra, comme présenté au 4.1, calculer de manière semi-analytique la solution temporelle recherchée.

Nous allons maintenant dans la partie qui suit présenter quelques résultats obtenus avec ce modèle en « inerties concentrée » et le comparer au modèle initial à un degré de liberté.

4.2.3 RESULTATS OBTENUS : COMPARAISONS 1 DDL / 26 DDL

Afin de mettre en évidence, l'intérêt du modèle à inerties concentrées vis-à-vis du modèle à un degré de liberté, une comparaison a été réalisée avec les mêmes jeux de paramètres. C'est volontairement qu'on ne prend pas en compte de couple résistant au niveau des cames de manière à fournir la même énergie au système dans les deux cas. Cette énergie fournie se résume à l'acyclisme moteur (imposé comme condition aux limites au niveau de l'arbre à cames) et au couple résistant de la pompe à vide. La configuration d'excitation de base en terme d'acyclisme et de couple résistant de pompe à vide est décrite dans les tableaux suivants (Tableau 6 et Tableau 7) :

Harmonique	Amplitude (tr/min)	Phasage (degré)
h4	$\Omega_1 = 36$	$\varphi_1 = + 160$
h8	$\Omega_2 = 15$	$\varphi_2 = - 70$
h12	$\Omega_3 = 9$	$\varphi_3 = - 175$
h16	$\Omega_4 = 8$	$\varphi_4 = + 70$
h20	$\Omega_5 = 4$	$\varphi_5 = - 10$

Tableau 6 : Acyclisme nominal

Harmonique	Amplitude (Nm)	Phasage (degré)
h0	$\Gamma_0 = 1,890$	X
h1 \ \gamma ₁ = 1	$\Gamma_1 = 0,140$	$\phi_1 = - 175$
h2 \ \gamma ₂ = 2	$\Gamma_2 = 0,190$	$\phi_2 = - 25$
h3 \ \gamma ₃ = 3	$\Gamma_3 = 0,490$	$\phi_3 = - 10$
h6 \ \gamma ₄ = 6	$\Gamma_4 = 0,045$	$\phi_4 = - 70$

Tableau 7 : Couple pompe nominal

Ces valeurs font partie des données d'entrée des simulations que nous avons réalisées. Dans le cas 1 ddl, l'acyclisme d'arbre à cames est imposé à l'ensemble de l'AAC. Pour le cas multi-ddl en revanche, on introduit la flexibilité en torsion de l'arbre à cames par l'utilisation d'inerties concentrées ce qui nous conduit à 26 ddls pour le système complet. La pompe à vide reste ramenée à une simple inertie. L'acyclisme, identique à celui du cas 1 ddl, est ici introduit au niveau de la première inertie d'AAC à l'extrême opposé de l'emplacement de la pompe à vide. Les paramètres de contact (raideur, amortissements et jeu) sont les mêmes dans les deux cas.

Ne serait-ce déjà que sur les figures tracées dans ce qui suit (Figure 4.3 et Figure 4.4), on note déjà la différence de comportement sur les solutions temporelles obtenues par simulation dans les cas 1 ddl et 26 ddls. Comme nous allons le voir plus tard, en prenant en compte la flexibilité de l'arbre à cames en rotation, on génère des pertes de contact et donc des chocs pour des vitesses de rotation plus faibles que dans le cas d'un arbre à cames rigides soumis aux mêmes acyclismes. Dans l'exemple représenté à 3500 tr/min, dans le cas 1 ddl, on ne traverse complètement le jeu angulaire qu'une fois par tour AAC alors qu'en prenant en compte la torsion de l'arbre à cames, le jeu est traversé 8 fois par tour. De même en terme de vitesses d'impact, on atteint des valeurs près de 10 fois plus élevées en considérant ces degrés de liberté supplémentaires.

Néanmoins, du point de vue comportemental, on peut se poser la question s'il y a tant d'écarts que cela. Nous allons nous rendre compte que pas du tout. En réalisant une technique de continuation sur les deux modèles avec la vitesse arbre à cames $\omega = \omega_{aac}$ comme paramètre de variation, on se rend compte que globalement on retrouve les mêmes phénomènes mais à des niveaux différents. Sur la Figure 4.5, on se place cette fois-ci dans la configuration déjà présentée sur le premier cas de la Figure 3.28. Nous représentons en bleu le cas à 1 degré de liberté et en noir le cas à 26 degrés de liberté.

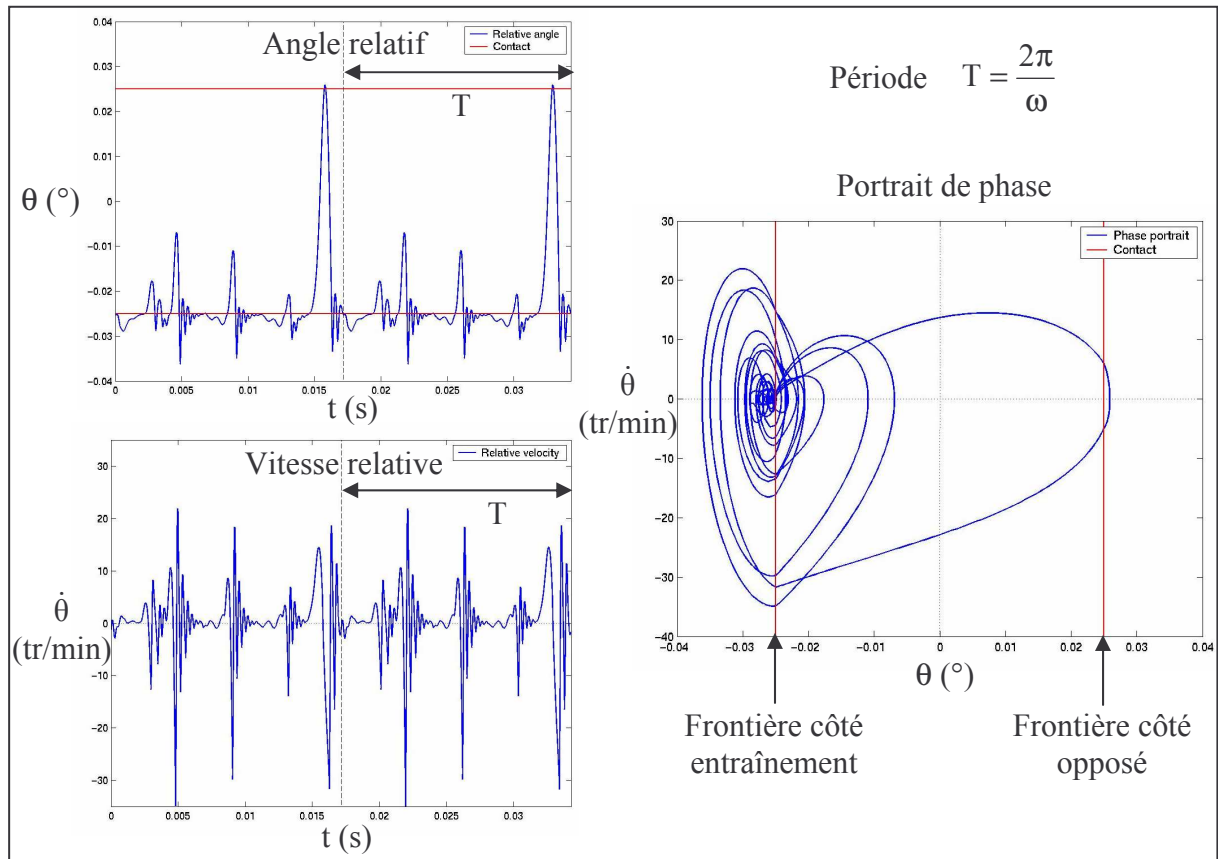


Figure 4.3 : Solution périodique du modèle à 1 degré de liberté avec $\omega = 3500$ tr/min, $I = 0,24$ g.m², $\varepsilon = 0,05^\circ$, $k = 10^5$ N.m.rad⁻¹ et $\xi_c = 0,15$.

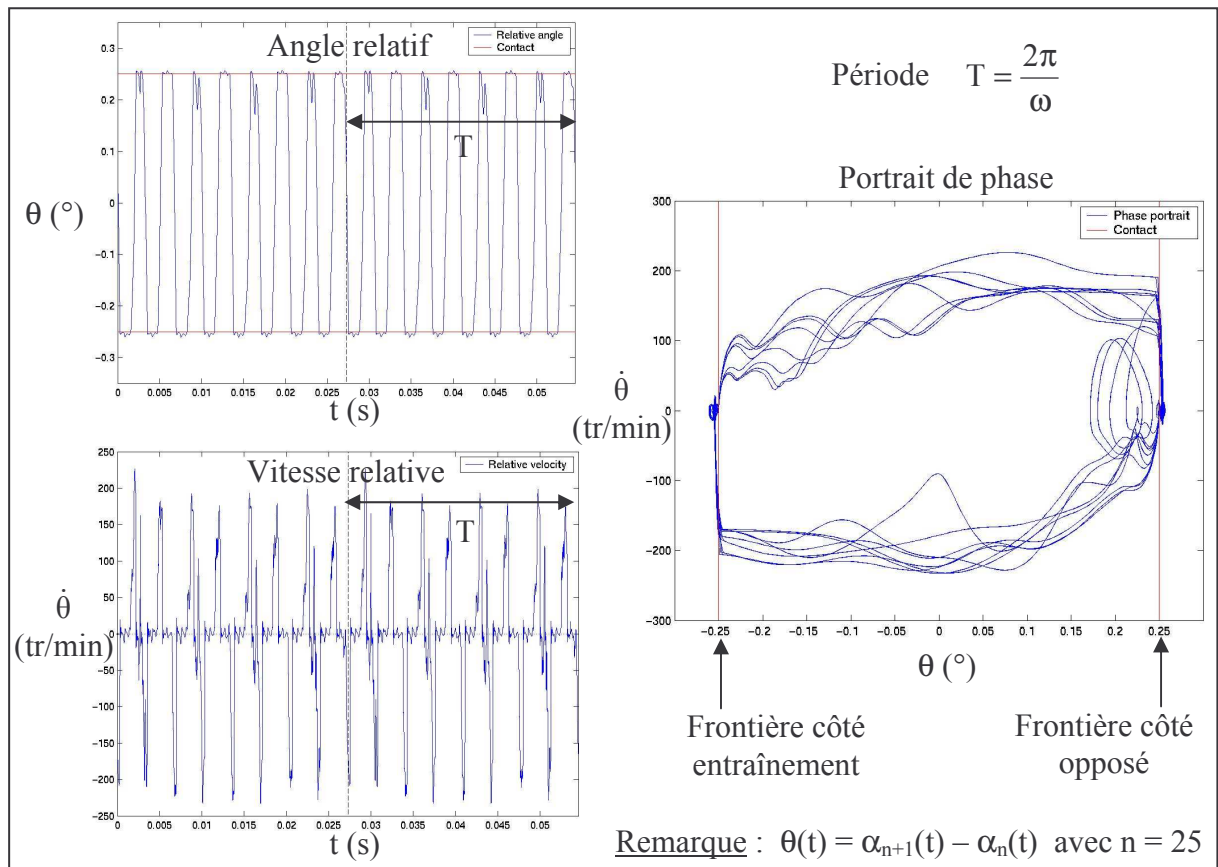


Figure 4.4 : Solution périodique du modèle à 26 degré de liberté avec $\omega = 3500$ tr/min, $I = 0,24$ g.m², $\varepsilon = 0,05^\circ$, $k = 10^5$ N.m.rad⁻¹ et $\xi_c = 0,15$.

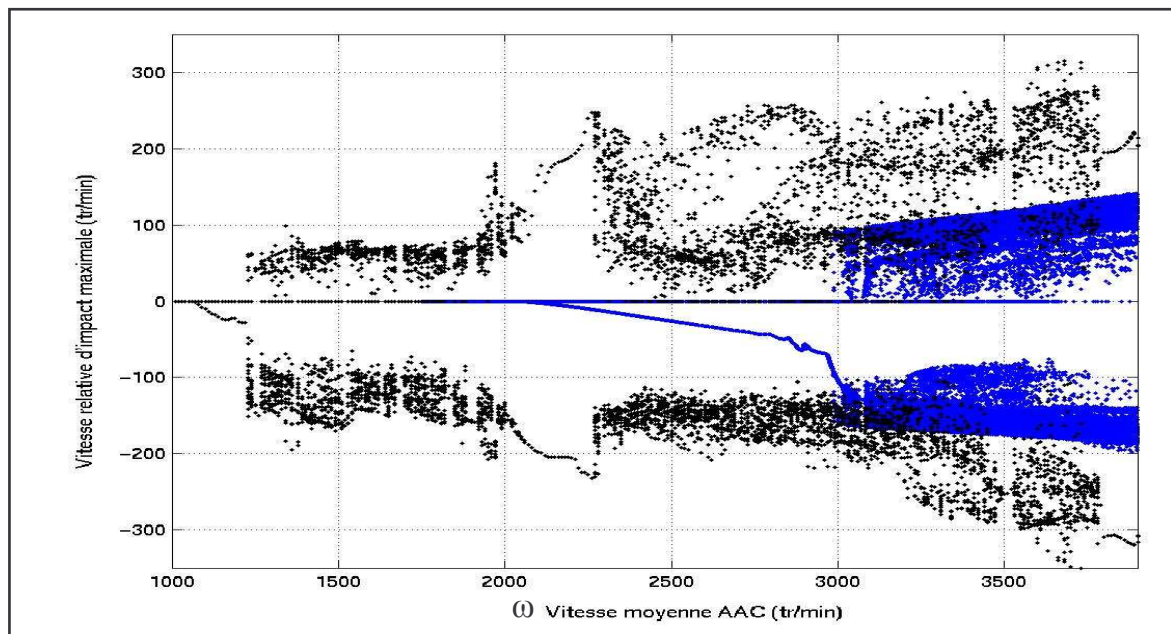


Figure 4.5 : Comparaison du modèle à 1 degré de liberté (en bleu) et du modèle à 26 degrés de liberté (en noir) en terme de comportement vis-à-vis de l'évolution de la vitesse d'arbre à cames

En passant au modèle à 26 degrés de libertés, on remarque tout d'abord un changement important dans les valeurs de ω qui déclenchent les impacts sur le côté d'entraînement et qui délimitent le début de comportements chaotiques. Il s'en suit ainsi des niveaux d'impacts plus importants. Ces phénomènes apparaissent pour des valeurs de ω plus faibles. En outre, une fois le comportement chaotique déclenché, on retrouve des solutions périodiques stables avec traversée de jeu et impact des deux côtés.

Ce type de résultat est très important puisqu'on comprend bien qu'à partir du modèle à un degré de liberté, dans le cas présent, on conclut qu'avant 2000 tr/min de vitesse moyenne d'arbre à cames, on n'a pas le moindre problème d'impact. En revanche, en considérant la flexibilité de l'AAC, on remarque que très rapidement après 1000 tr/min, on a des chocs au niveau de l'entraînement de la pompe à vide.

Comme on le voit, il ne suffit pas de connaître la valeurs de l'acyclisme du côté de la poulie AAC (valeurs que l'on mesure sur moteur) pour déterminer les zones de chocs. L'AAC se déforme en torsion sous l'effet des chocs au niveau de la pompe à vide, de l'acyclisme de la poulie AAC issus de l'attelage mobile via la courroie de distribution et des couples résistants des cames en contact permanent sur les dispositifs mécaniques de commandes de soupapes. Avec les résultats numériques du modèle multi-ddl, en représentant à chaque instant la position angulaire de chaque inertie qui constitue l'AAC, on peut visualiser les oscillations vibratoires qui sont transférées le long de l'arbre à la suite des chocs. C'est le cas de la figure suivante qui montre l'évolution dynamique du système pour le cas d'un choc sur le côté entraînement (Figure 4.6). Chaque inertie de l'arbre à cames est représentée par sa position angulaire en bleue par rapport à la vitesse moyenne avec à l'extrémité gauche la poulie AAC et à l'extrémité droite le bout d'arbre à cames qui « voit » la pompe à vide. Cette dernière est représentée en noir par sa position angulaire par rapport à l'extrémité de l'AAC. Les traits rouges représentent les limites du jeu angulaire au niveau de l'accouplement. Enfin, si ces vibrations se voient bien sur la figure suivante, c'est encore mieux de visualiser ce mouvement à partir de séquences enchaînées (du type vidéo), ce qui a été réalisé très simplement à partir de l'ensemble des images obtenues par le calcul.

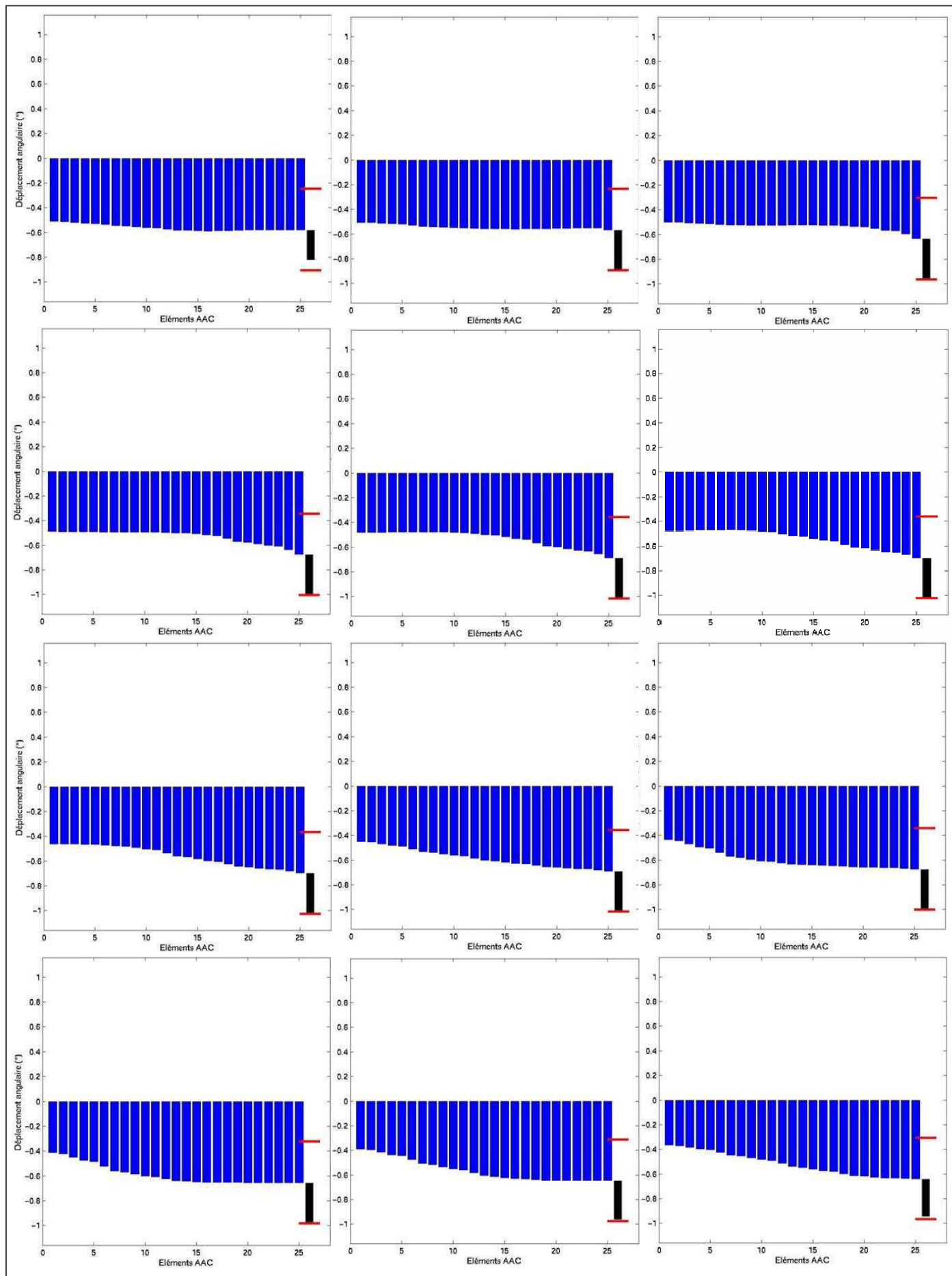


Figure 4.6 : Exemple d'impact côté entraînement : vibrations induites

4.3 APPLICATIONS MOTEURS

Dans cette partie, nous allons décrire deux cas d'application de pompes à vide entraînées sur moteur diesel et pour lesquelles les résultats numériques ont été conformes aux attentes. Il s'agit pour le premier cas de l'application DV4 (cylindrée de 1,4 L) et pour le deuxième cas de l'application DV6 (cylindrée de 1,6 L).

4.3.1 APPLICATION DV4TD

La pompe à vide DV4TD a connu des problèmes de perte d'accouplement avec l'arbre à cames. La problématique est légèrement différente de ce dont nous avons parlé jusqu'à présent. Le problème était celui d'une usure latérale de butée d'arbre à cames sur la culasse. Cette usure avait pour conséquence de décaler l'arbre à cames de sorte que l'on perdait l'entraînement de la pompe à vide. Pour y remédier, des modifications ont dû être apportées entre autres au niveau de l'embout de l'arbre à cames et du TOC. L'embout d'AAC a vu sa gorge d'accouplement plus importante puis évidée de manière cylindrique en fond de gorge comme représenté sur la figure ci-dessous (Figure 4.7). Cet évidement a eu pour but non seulement de lubrifier la zone de contact mais également d'atténuer les couples engendrés par les impacts dont nous avons déjà parlé. Le TOC de pompe à vide a quant à lui été rallongé de manière légèrement biseautée (Figure 4.8).

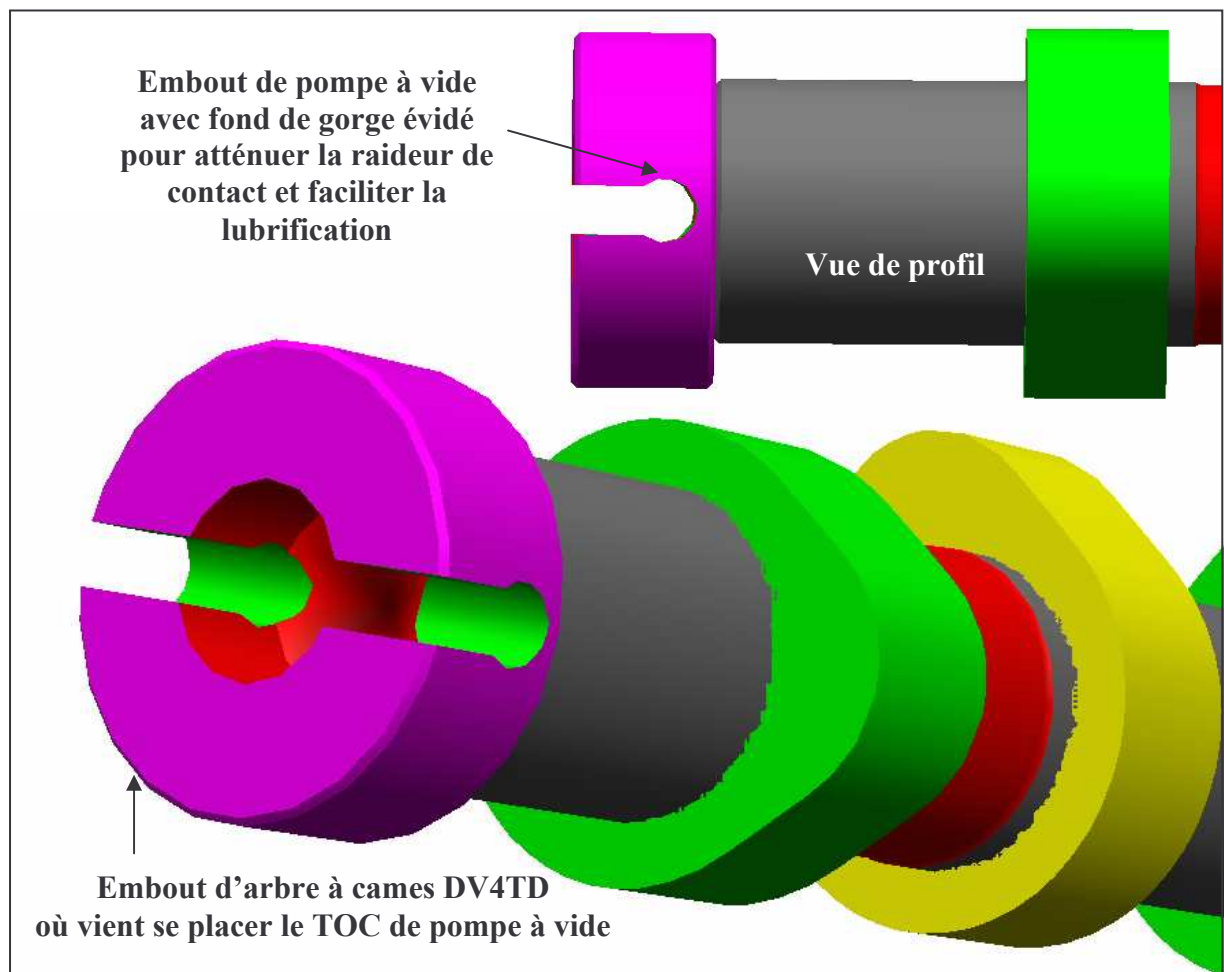


Figure 4.7 : Modification de l'embout d'arbre à cames DV4TD suite à la problématique d'entraînement de pompe à vide

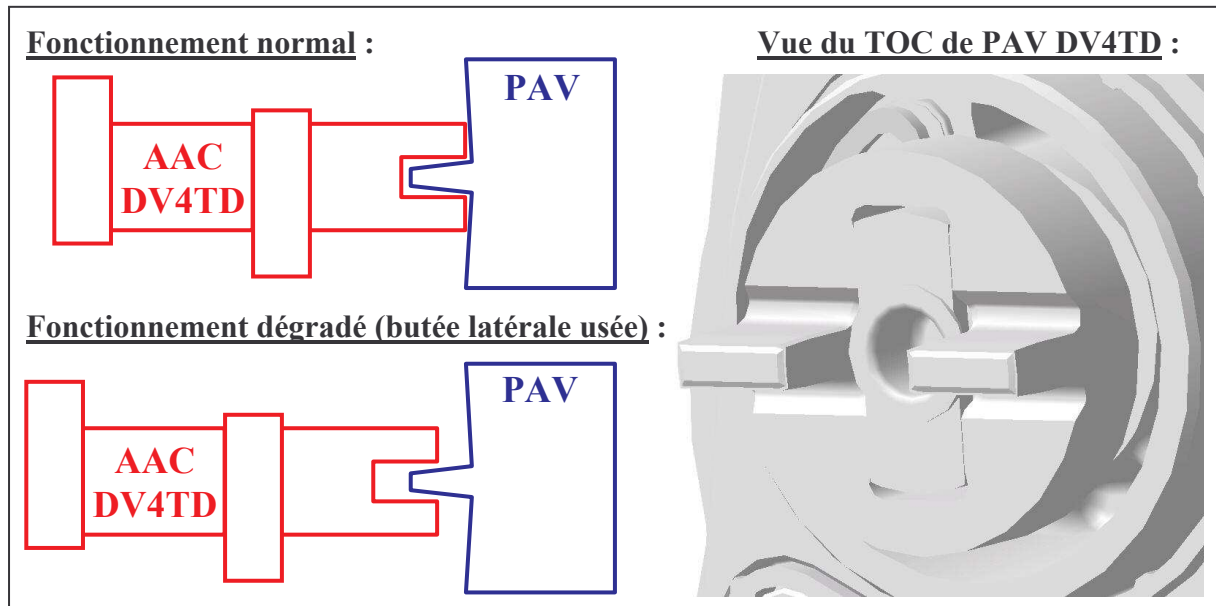


Figure 4.8 : Fonctionnement normal et dégradé de l'entraînement de pompe à vide DV4TD

Pour valider cette modification en terme de tenue du TOC de pompe à vide vis-à-vis des chocs, outre les essais réalisés sur moteur, des calculs ont été effectués par le département de modélisation et de validation de l'architecture mécanique à partir du modèle développé dans le cadre de cette thèse. Bien que les principales difficultés aient été liées à des efforts longitudinaux (usure latérale de butée culasse/AAC), ces calculs ont également servis à s'assurer qu'on n'aggravait pas la situation sur les chocs d'accouplement de pompe à vide même en fonctionnement dégradé avec un jeu angulaire plus important.

Le but de ces calculs était la détermination des niveaux de choc avec trois types d'embouts d'arbre à cames DV4, à savoir :

- l'entraînement de pompe à vide DV4TD de départ, le cas série (réf. 9645956180) à l'origine des problèmes de perte d'accouplement de pompe à vide ;
- l'entraînement de pompe à vide avec un arbre à cames à embout allongé (réf. 9658404880) (gorge plus profonde) et le TOC de pompe à vide plus long ;
- l'entraînement de pompe à vide DV4TD finalement retenu avec l'arbre à cames proposé par le fournisseur MAHLE (réf. AA33049788) avec un embout allongé (gorge plus profonde) et un évidement cylindrique supplémentaire en fond de gorge (abaissant ainsi la valeur de la raideur de contact de l'accouplement).

Pour chacun des cas, afin de déterminer la raideur de contact, on détermine par éléments finis le déplacement obtenu sous une charge de 6 Nm sur l'embout d'arbre à cames. Cela se fait de manière similaire à ce qui a été présenté au 3.2.4.2, mais pour un seul cas de charge (couple de 6 Nm). Cette valeur de raideur de contact est ensuite utilisée dans le modèle semi-analytique.

Les résultats de calcul sont alors regroupés dans le tableau suivant (Tableau 8). Les calculs sont réalisés en fonctionnement normal mais aussi en fonctionnement dégradé avec une butée latérale AAC usée ce qui diminue la surface de contact entre le TOC et l'arbre à cames et augmente le jeu angulaire au niveau de l'entraînement.

	Déplacement sous 6Nm (en mm)	Raideur de contact angulaire (Nm/rad)	Couple de choc maxi AAC/TOC côté entraînement (Nm)		Couple de choc maxi AAC/TOC côté opposé (Nm)	
			Fonctionnement normal	Fonctionnement butée latérale usée	Fonctionnement normal	Fonctionnement butée latérale usée
Cas série de départ 9645956180	0,011	9016	18,5	29,5	20,0	22,0
Cas allongé (gorge AAC) 9658404880	0,021	4722	13,5	20,0	14,0	19,5
Proposition MAHLE AA33049788	0,028	3542	12,0	15,5	12,0	15,5

Tableau 8 : Résultats de calcul de couple de choc pour l'application DV4TD

On constate qu'en terme de couples encaissés les évolutions réalisées, cas série → cas allongé → proposition MAHLE, sont progressivement meilleures du fait d'un assouplissement du contact (raideur de contact plus faible). Cette diminution de la valeur des couples issus des chocs se voit tant sur le côté d'entraînement du TOC et de la pompe à vide que sur le côté opposé (après traversée complète du jeu angulaire).

En outre, avec la proposition MAHLE, même en mode de fonctionnement dégradé, on atteint des valeurs de couples maximaux issus des chocs (15,5 Nm) inférieurs aux valeurs que l'on avait au départ en mode de fonctionnement normal (18,5 Nm et 20 Nm). Le cas allongé (gorge AAC profonde), même s'il résolvait partiellement le cas de déplacement latéral AAC, présentait néanmoins des valeurs de couple de choc plus élevé en mode dégradé que le cas précédent en fonctionnement normal. C'est par conséquent la troisième possibilité qui a été retenue. Il s'est avéré par la suite, qu'effectivement nous n'avons pas connu de problème de tenue de TOC de pompe à vide DV4TD avec l'application de la proposition MAHLE.

Nous n'avons pas pu corréler le modèle sur ce cas d'application. Bien que l'ordre de grandeur des couples de chocs obtenus (une vingtaine de Nm) soit conforme aux valeurs attendues, nous n'avons pas pu mesurer ces couples de choc sur moteur. En revanche, si on ne peut pas encore se prononcer du point de vue de la prédictibilité du modèle, en terme d'outil comparatif entre plusieurs solutions proposées, il nous a donné dans ce cas là des résultats satisfaisants. Nous allons voir maintenant dans la partie qui suit comment il se comporte sur l'application moteur DV6.

4.3.2 APPLICATION DV6

Pour l'application DV6, en revanche, nous avons connu des problèmes de casse de TOC tels ceux mentionnés au chapitre 3. Dans notre cas, l'architecture du moteur est plus particulière puisque la courroie de distribution entraîne la rotation de l'arbre à cames admission, qu'on a un relais chaîne entre les deux AAC qui assure la rotation de l'arbre à cames échappement, ce dernier entraînant à son extrémité la pompe à vide (inertie de $83e-6 \text{ kg.m}^2$) par l'intermédiaire d'un TOC (Figure 4.9).

Pour cette application, le niveau d'acyclisme au niveau de la poulie de l'AAC admission est principalement dépendant de l'acyclisme moteur provenant de l'attelage mobile, de celui provenant de la pompe à injection et de l'architecture de la façade de distribution. Le mode de façade de distribution, à environ 135 Hz, est excité à 4000 tr/min par l'harmonique H2 du vilebrequin (et qui se retrouve en harmonique h4 au niveau des AAC).

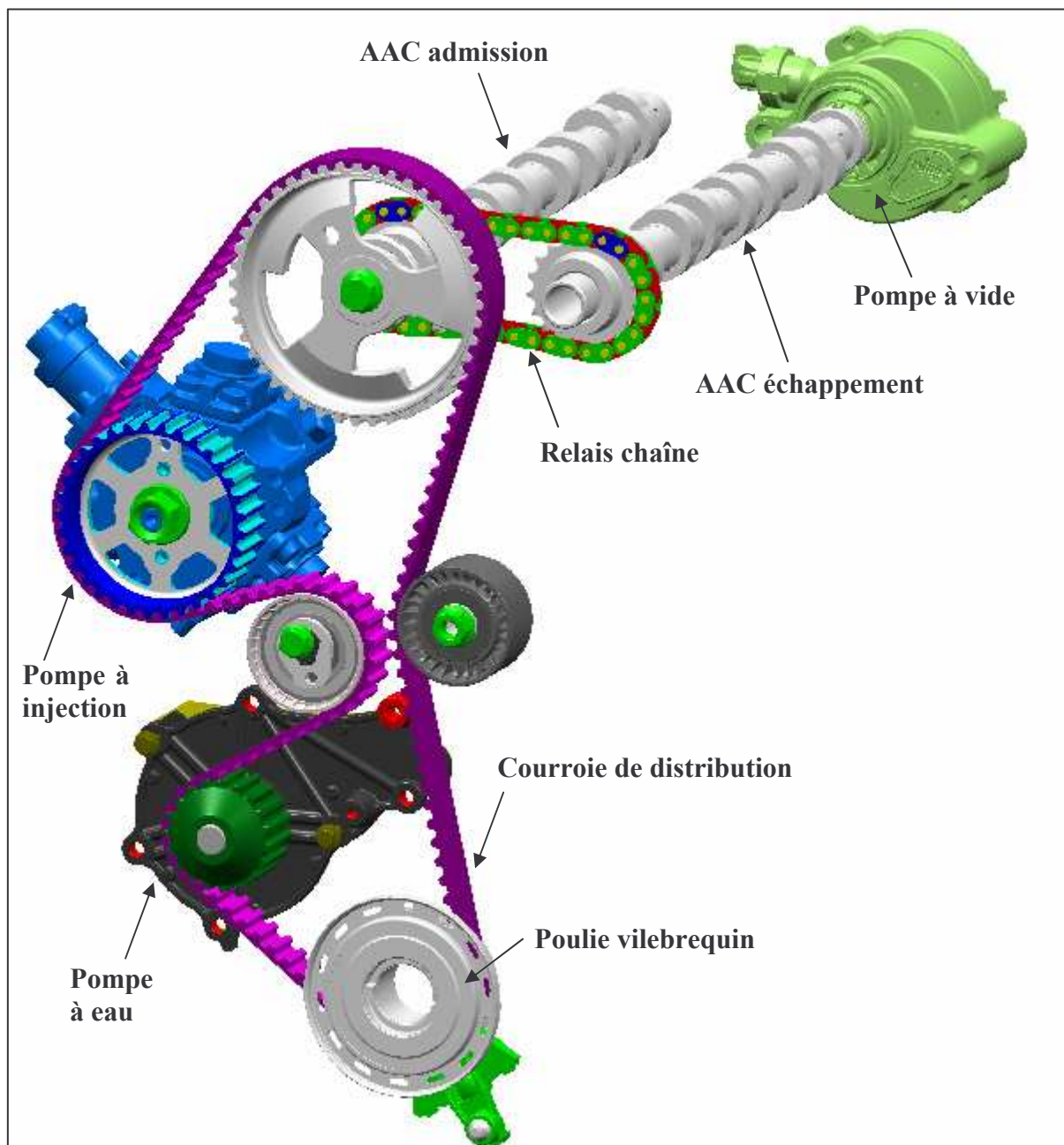


Figure 4.9 : Façade de distribution DV6 - problématique de l'entraînement de pompe à vide

Pour cette application, les principales variations de vitesse proviennent du vilebrequin et de la pompe à injection. En calant cette dernière par rapport à la rotation vilebrequin, on peut à partir de ce phasage, additionner ou soustraire les sollicitations de la façade en H2 moteur et donc le niveau de l'harmonique en h4 au niveau des AAC. Dans la figure suivante, on visualise après traitement (Figure 4.10), la décomposition harmonique de deux relevés d'acyclisme AAC obtenus expérimentalement avec deux valeurs de calage de la pompe à injection : l'un pour une valeur maximale de l'harmonique h4 AAC (cas « PIRE » en rouge) et l'autre pour une valeur minimale de cette même harmonique (cas « OPTI » en bleu). On remarque que ce type de phasage optimal de la pompe à injection permet de diviser par plus de 4 le niveau de l'harmonique h4 au niveau des AAC (l'une des principales contribution) en impactant de manière très minimale sur les harmoniques plus élevées.

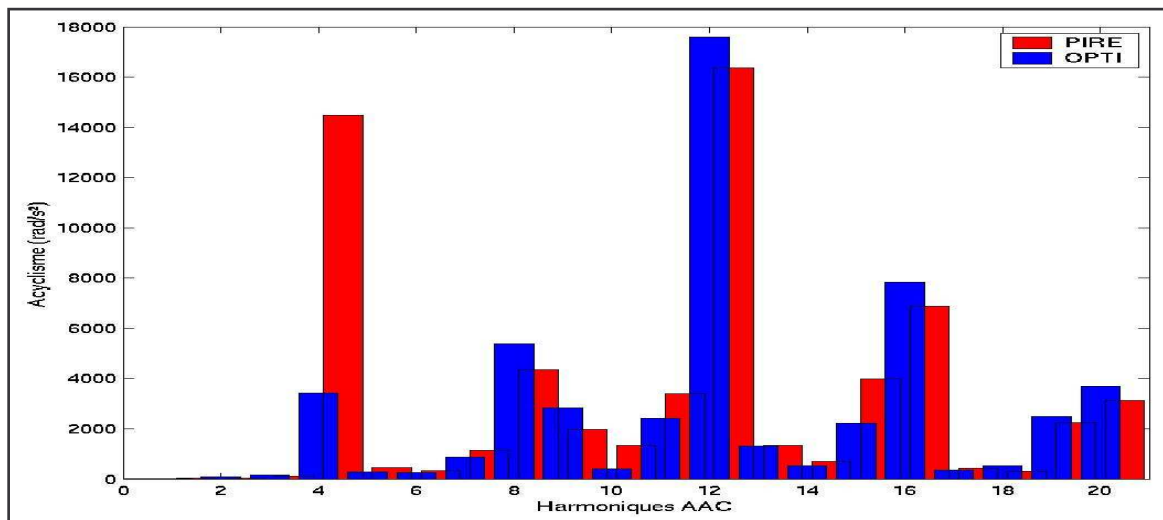


Figure 4.10 : Comparaison de l'acyclisme transmis à 4000 tr/min à l'AAC échappement DV6 entre un calage de la pompe à injection optimal (en bleu) et un calage au pire (en rouge)

Des calculs temporels ont alors été réalisés avec le modèle semi-analytique et à partir des données obtenues expérimentalement (acyclisme AAC, couple de caractérisation de la pompe à vide). L'allure des couples d'impact (Figure 4.11) obtenus numériquement à 4000 tr/min montre un meilleur comportement du calage optimal qui est cohérent avec les essais d'endurance PSA qui ont validé la tenue du TOC DV6. Pour la configuration optimale, on peut observer en effet dans les tracés qui suivent un nombre d'impact moindre avec des valeurs maximales plus faibles et cela des 2 côtés du jeu (valeurs de couple d'entraînement instantané négatives et positives).

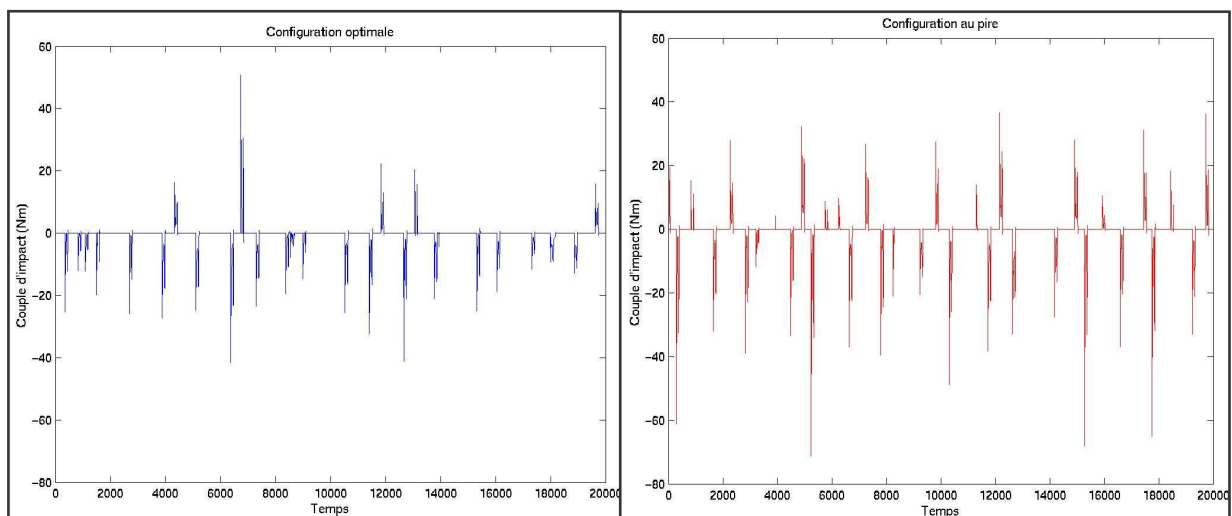


Figure 4.11 : Résultats comparatif des couples engendrés par les chocs sur l'entraînement de PAV DV6 pour un calage de la pompe à injection optimal (en bleu) et pour un calage au pire (en rouge)

4.4 EXPERIMENTATION

Afin de valider la fiabilité des résultats numériques obtenus par le modèle semi-analytique, nous avons souhaité réaliser un banc expérimental simple et dédié à cela, qui reproduise le phénomène de vibro-impact. Nous allons dans cette partie dégager la problématique inhérente au montage que nous avons voulu réaliser. Après avoir expliqué les limitations des mesures faites sur moteur PSA qui justifient l'utilisation d'un banc expérimental adapté, nous décrirons le dispositif du banc, présenterons les résultats obtenus et les confronterons au modèle semi-analytique.

4.4.1 LES LIMITATIONS DES MESURES EXISTANTES SUR GMP

4.4.1.1 LES MESURES MOTEUR

Suite à l'apparition des problèmes de tenue de l'entraînement de pompe à vide sur moteurs diesel, PSA a fait réaliser un banc d'essai sur le moteur incriminé. Cependant, ces essais ne permettent pas de validation du modèle numérique pour les raisons suivantes :

- L'acyclisme de l'arbre à cames ne peut pas être, pour l'instant, mesuré côté pompe à vide (manque de place à cause de la pompe). En outre, on ne peut pas prendre comme entrée dans le modèle l'acyclisme de l'arbre à cames mesuré du côté « distribution » car alors on ne tient pas compte de la torsion de l'arbre et de l'excitation provenant des couples sur les cames.
- Le couple résistant de la pompe à vide est caractérisé sur un banc à part, avec la pompe seule et pour quelques vitesses de rotation. Celui-ci présente plusieurs composantes harmoniques qui ne sont pas précisément connues puisque le couple résistant de la pompe n'est pas mesuré en fonctionnement.
- Les mesures dont nous disposons se font sur une lente montée en rampe de régime moteur. Aucune mesure n'est faite à régime stabilisé pour l'instant.
- La mesure du couple d'entraînement dont nous disposons a été réalisée via un couple maître (barreau de torsion) placé en bout d'arbre à cames. La première conséquence est que l'on n'a strictement aucune information pendant les phases de vol libre. En outre, le barreau de torsion a été mal dimensionné puisqu'il présente un mode de torsion sur la plage d'essai, ce qui fausse certains résultats.

En outre, l'excitation de l'arbre à cames est trop riche en harmoniques et mal maîtrisée. Il est en effet, plus facile de corréliser le modèle avec une seule harmonique pilotée plutôt qu'avec toutes les harmoniques d'un moteur complet. Malgré cela, il n'est pas pour autant plus simple de générer un acyclisme à une seule harmonique.

4.4.1.2 LES MESURES BV

Les autres mesures qui ont été envisagées pour corréliser le modèle sont les mesures de grenaille sur boîte de vitesse. Là encore, nous avons dû renoncer à cette voie. En effet, la grenaille de BV est la conséquence de vibro-impacts entre les pignons d'entraînement et les pignons fous associés. Il s'agit donc d'un phénomène similaire, néanmoins beaucoup plus complexe. Les premières études réalisées montrent un fort comportement chaotique ainsi qu'une méconnaissance des efforts de couple appliqués aux pignons fous (barbotage et traînée du pignon fou sur son arbre). En outre, les mesures sont des mesures d'acyclisme et essentiellement des mesures acoustiques qui ne peuvent pas être exploitées dans le cadre d'une validation du modèle de choc. Enfin le jeu inter-denture n'a pas été mesuré précisément. Pour ces raisons, nous avons abandonné l'utilisation de ces résultats expérimentaux et nous sommes tourné vers un dispositif expérimental spécifiquement dédié au modèle.

4.4.2 DESCRIPTION ET CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU BANC

Le problème du TOC et celui des chocs de pignons fous soulèvent la même problématique : des vibro-impacts sur un système tournant à grande vitesse et présentant un jeu angulaire. C'est pourquoi, devant les difficultés rencontrées sur système réel, nous avons estimé qu'un essai de principe sur un système à jeu angulaire le plus simple possible permettrait de valider le modèle numérique qui pourra alors être utilisé de manière plus confiante pour le TOC, voire pour d'autres applications par la suite. Néanmoins, un tel dispositif doit être soumis à un certain nombre de contraintes (besoins) liées au phénomène que l'on souhaite reproduire ainsi qu'aux informations que l'on souhaite mesurer, et tout ceci de la manière la plus simple possible. Nous allons voir dans ce qui suit quelles sont les caractéristiques principales du banc d'essai.

4.4.2.1 CARACTERISTIQUES GENERALES

Le banc d'essai réalisé est un montage qui a été spécialement conçu pour les besoins PSA. Il s'agit de l'entraînement en rotation d'un arbre de faible inertie par une chaîne cinématique en rotation à l'aide d'un système à jeu angulaire simple. On applique sur cet arbre entraîné, à l'aval de ce jeu angulaire, un couple de freinage, variable entre 0 et 2 Nm. En amont du jeu angulaire, la chaîne cinématique est entraînée avec une vitesse moyenne de rotation comprise entre 1000 et 3500 tr/min avec un acyclisme en h2 (variation de la vitesse de rotation au rythme de 2 cycles de variation par tour) fourni par un moteur électrique et un dispositif à cardan. Les paramètres que l'on souhaite pouvoir régler sont le régime moteur, le niveau d'acyclisme en h2, le couple résistant de l'arbre entraîné et la valeur du jeu angulaire (les essais se feront avec une valeur de jeu qui sera ensuite agrandie sur une autre valeur fixe). La photographie ci-dessous (Figure 4.12) montre le banc d'essai dans son ensemble.

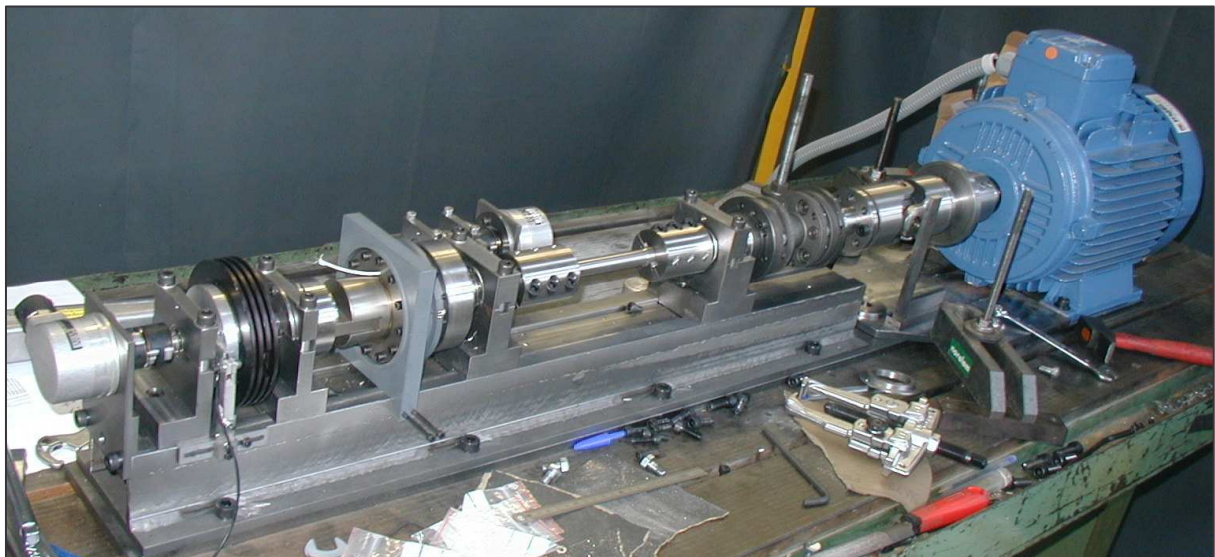


Figure 4.12 : Photographie d'ensemble du banc d'essai à jeu simple

4.4.2.2 LA GENERATION D'ACYCLISME

L'étude et la réalisation de ce banc d'essai est, à premier abord, un travail de conception et de construction d'un système mécanique constitué d'une ligne d'arbre en rotation. Dans le cas de l'entraînement de pompe à vide, nous avons vu précédemment que l'excitation majeure responsable des pertes de contact (et par conséquent des vibro-impacts) était l'acyclisme moteur que l'on retrouve au niveau de l'arbre à cames. Il a donc été nécessaire de reproduire des variations de vitesse acyclique pour ce banc de principe. Par conséquent, la particularité de ce banc d'essai est que les lignes d'arbres sont animées d'une vitesse moyenne qui peut être élevée (plus de 3000 tr/min) sur lesquelles vont être provoquées des variations importantes de vitesses de rotation qui vont selon le jeu de paramètre utilisé provoquer ou non des chocs au niveau du jeu angulaire.

L'acyclisme est obtenu par un cardan placé en sortie d'un moteur électrique asynchrone de 5,5kW. Le réglage de cet acyclisme en angle est obtenu en faisant varier l'angle d'inclinaison du cardan (angle entre le moteur et l'axe de l'arbre en sortie de cardan). La courbe ci-dessous (Figure 4.13) montre l'évolution théorique de l'amplitude des oscillations acycliques en H2 en fonction de l'angle donné au cardan.

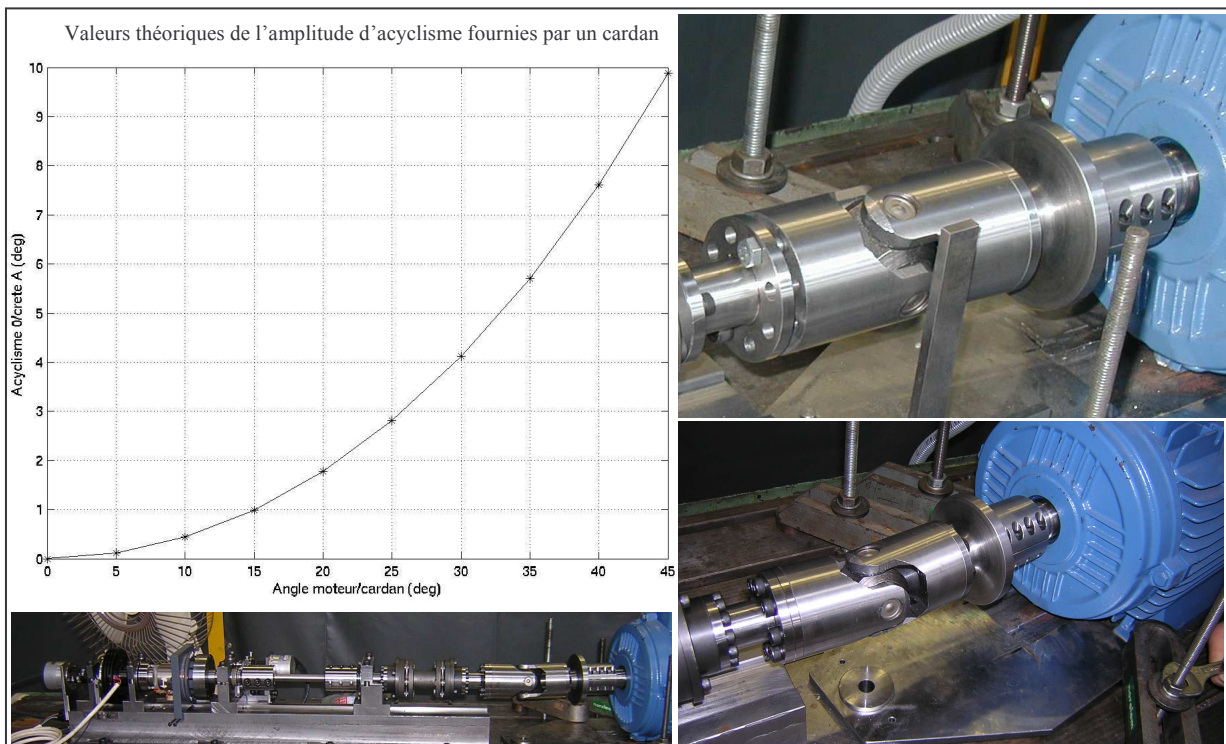


Figure 4.13 : Génération d'acyclisme – courbe théorique et photographies du dispositif de à cardan

4.4.2.3 LES CONTRAINTES LIEES AU JEU ET AUX CHOCS

Le phénomène que l'on souhaite observé est complexe et les chocs peuvent se révéler violents lorsqu'on tourne à 3000 tr/min. Afin de minimiser les perturbations éventuelles sur les mesures que l'on va réaliser, un certain nombre de précautions et de règles de construction ont été adoptées.

Les guidages en rotation ont été réalisés à l'aide de pièces usinées avec grande précision (à quelques microns) de manière à ce que les axes des paliers soient alignés au $1/100^{\text{ème}}$ de mm ou moins et que le jeu dans les roulements soit limité à quelques microns au maximum. Pour obtenir cela, d'une part les roulements utilisés sont des roulements de précision à faibles jeux, et, d'autre part, les tolérances d'usinage des pièces dans lesquelles sont montés les roulements sont calculées de manière à ce que le jeu résiduel interne au roulement après montage soit compris entre un jeu de quelques microns et un léger serrage (non gênant si maîtrisé avec de très faibles déformations des billes sur les pistes de roulement dans le domaine élastique).

En outre, la transmission des couples au niveau des accouplements rigides entre pièces est réalisée par adhérence entre les surfaces en contact et non par cisaillement des vis ou de clavettes. Si des clavettes doivent tout de même être installées (pour avoir un indexage angulaire par exemple), elles sont installées par paire, diamétralement opposées et le couple n'est pas transmis par les clavettes. La transmission des couples est donc réalisée à l'aide de brides ou de manchons en deux parties fortement serrées les uns contre les autres à l'aide de vis hautes résistances précontraintes avec des efforts déterminés par calculs et appliqués en mesurant les couples de serrage au moment du montage.

Une fois ces précautions prises au niveau de la ligne d'arbre vis-à-vis de vibrations parasites indésirables pouvant masquer les signaux liés aux chocs, il a fallu considérer la zone proche du contact. Ces zones d'impacts doivent résister aux chocs sans se mâter ou du moins de manière extrêmement limitée. Pour cela, les deux pièces en contact sont réalisées avec un acier 35 NCD 16 traité pour avoir une résistance à la rupture de 1500 MPa. Par ailleurs, pour que les chocs aient toujours lieu dans la même zone et pour limiter la dispersion des points de contact, une forme spéciale a été donnée à cette zone. Il s'agit d'une calotte sphérique dont le rayon de courbure est de 56,5 mm (Figure 4.14).

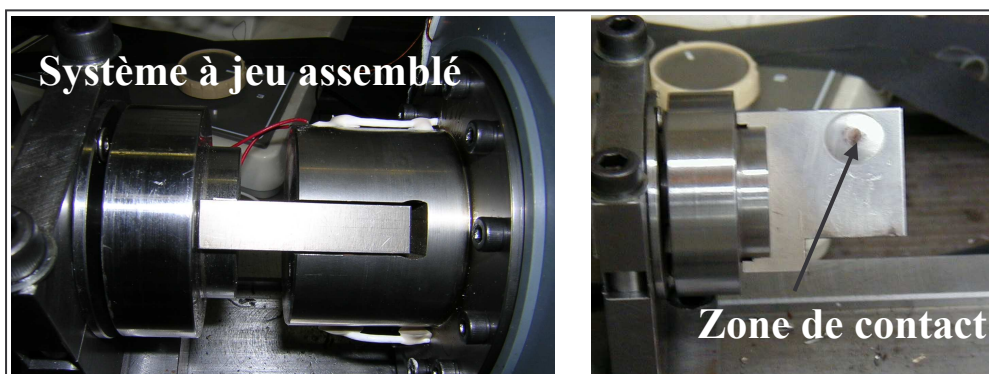


Figure 4.14 : Jeu angulaire : vue assemblée et vue de la zone de contact (calotte sphérique)

Enfin, pour mesurer la vitesse de la ligne d'arbre en amont du jeu, nous avons placé un codeur angulaire sur un arbre parallèle entraîné par courroie. La courroie utilisée est une courroie crantée à armature métallique ayant une raideur en traction élevée et tendue par deux galets tendeurs en milieu de brin à 100 N (valeur mesurée avec capteur d'effort au moment du montage). De cette manière, la fréquence naturelle de battement de la courroie est approximativement de 1300 Hz et la fréquence du mode d'oscillation de torsion d'environ 1700 Hz. En revanche, cette courroie est entraînée par un pignon à 20 dents qui peut générer a priori une résonance très perturbante pour les mesures.

4.4.2.4 LA GENERATION DU COUPLE DE FREINAGE

Nous allons voir maintenant comment est généré le couple qui va freiner l'arbre entraîné et permettre de se placer dans des conditions ou non d'impact. Sans ce freinage, le moindre acyclisme va faire perdre le contact au niveau du jeu angulaire sur la ligne d'arbres et engendrer systématiquement des impacts. Le frein est un frein électromagnétique à poudre pouvant développer un couple de freinage de 2 Nm à une vitesse comprise entre 60 et 3000 tr/min à condition que l'énergie thermique dissipée soit correctement évacuée (Figure 4.15). La température du stator du frein doit rester inférieure à 100°C. Un ventilateur est d'ailleurs mise en marche pendant les phases d'essais et diriger vers le frein pour favoriser une température limitée.

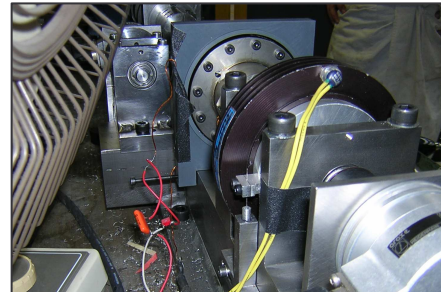


Figure 4.15 : Frein à poudre du banc d'essai

4.4.3 DESCRIPTION ET PERFORMANCES DU SYSTEME DE MESURE

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter brièvement les systèmes de mesure mis en place dans le cadre de ce banc d'essai. Nous distinguerons la mesure des vitesses instantanées de rotation des arbres, la mesure de l'accélération angulaire de l'arbre entraîné, la mesure du couple de freinage de l'arbre entraîné et enfin le système d'acquisition de mesures.

4.4.3.1 SYSTEMES DE MESURE DES VITESSES INSTANTANÉES DE ROTATION DES ARBRES

Pour la vitesse en amont et en aval du jeu angulaire, on dispose dans chaque cas d'un codeur incrémental Heidenhain de 5000 divisions par tour et un top par tour (Figure 4.16) ainsi qu'un convertisseur fréquence tension avec trois gammes de mesure.

Lorsque l'arbre sur lequel est monté le codeur tourne, ce dernier fournit un signal en forme de créneau dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse instantanée de rotation de l'arbre. Ces signaux sont difficiles à exploiter directement car ils ont une fréquence élevée en particulier si la vitesse de rotation est élevée (300 kHz lorsque l'arbre tourne à 3600 tr/min). Aussi, il a été décidé de convertir le signal fréquentiel de sortie codeur en une tension électrique analogique proportionnelle à sa fréquence à l'aide d'un convertisseur fréquence tension étalonné avant essai.

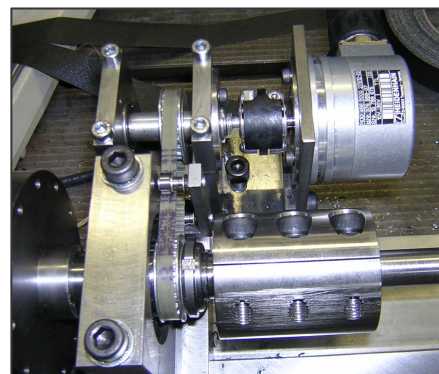


Figure 4.16 : Mesure de vitesse instantanée

4.4.3.2 MESURE DE L'ACCELERATION ANGULAIRE

La mesure de l'accélération angulaire n'est quant à elle réalisée que du côté de l'arbre à cames entraîné. C'est un accéléromètre à jauges de 15,3 grammes, spécialement conçu et réalisé pour ces essais, et comprenant une masse sismique reliée à une embase de fixation par deux bras sur lesquels sont collées les jauges. Il est placé sur la tranche opposée aux 2 zones de contact.

Au cours des essais, l'accéléromètre étant animé d'un mouvement de rotation, la transmission du signal électrique fourni par les jauges est assurée par un système de télémesure. Pour pouvoir fonctionner, l'émetteur doit être alimenté en courant électrique. Ceci est réalisé à l'aide d'une boucle d'induction.

Enfin, l'accéléromètre a été étalonné. Les résultats de l'opération d'étalonnage montrent que l'accéléromètre possède une fréquence propre voisine de 5000 Hz.

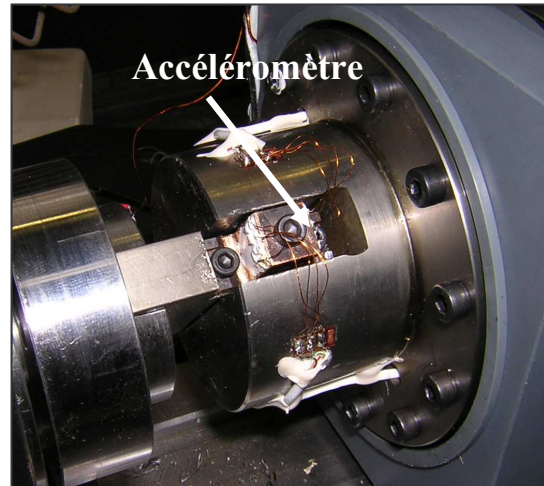


Figure 4.17 : Emplacement de l'accéléromètre

4.4.3.3 MESURE DU COUPLE DE FREINAGE

La fixation du stator du frein a été conçue et réalisée de manière à être utilisée non seulement pour assurer l'arrêt en rotation du stator mais aussi pour permettre la mesure du couple de freinage. Pour cela un flasque a été monté sur le stator. Ce flasque est relié au bâti du banc d'essai par deux leviers horizontaux diamétralement opposés. L'un des leviers est muni de jauges de déformations mécaniques, l'autre est relié à un amortisseur d'oscillations. L'extrémité du levier muni de jauges de déformation est reliée au bâti du banc d'essai par l'intermédiaire d'une bielle de très grande raideur axiale mais très souple dans le sens radial. Les jauges mesurent les déformations mécaniques engendrées par l'effort appliqué par le levier sur le stator du frein pour empêcher ce dernier de tourner. Le signal électrique qu'elles fournissent est ainsi proportionnel au couple de freinage.

La fréquence propre de l'oscillation de rotation autour de l'axe de banc du système constitué par le stator du frein, le flasque, les leviers, la bielle et l'amortisseur est de 230 Hz. Cette fréquence n'est pas très élevée, et pour prendre en compte le risque d'excitation de cette fréquence, le système de mesure de couple a été doté d'un amortisseur visqueux.

4.4.3.4 SYSTEME D'ACQUISITION DES MESURES

Enfin, tous les signaux de mesure qui sont des tensions électriques variant entre -2,5 et +2,5 Volts pour l'accélération angulaire et entre 0 et 10 Volts pour tous les autres signaux, sont envoyés sur les cinq premières voies d'un enregistreur graphique. Celui-ci est doté d'un disque dur informatique de grande capacité qui permet de faire de l'acquisition numérique de mesures et de sauvegarder les résultats obtenus dans des fichiers informatiques. Pour chaque configuration, l'acquisition est déclenchée par l'apparition du signal de top tour. 5% du contenu des fichiers de mesure correspondent à des mesures acquises avant l'apparition du top tour. Les mesures sont numérisées à la cadence de 20 000 mesures par seconde et par signal mesuré. La durée des acquisitions est comprise entre 0,6 et 2 secondes, ce qui correspond à une dizaine de tours de rotation des arbres.

4.4.4 LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous allons maintenant présenter les résultats de ce banc expérimental. Comme nous allons le voir, nous avons eu un important problème de résonance au niveau de l'entraînement du codeur angulaire pour la mesure de la vitesse angulaire de l'arbre amont. Pour bien expliquer le problème rencontré, nous allons présenter pour un cas de référence avec impacts bilatéraux, les résultats de mesure sur les différents capteurs utilisés.

4.4.4.1 CAS DE REFERENCE : GENERALITES

La configuration considérée comme cas de référence représente une acquisition effectuée sur 10 tours de rotation avec une vitesse moyenne de l'ordre de 2100 tr/min, un angle de cardan entre le moteur asynchrone et la ligne d'arbre d'environ 8° et un couple résistant de l'ordre de 0,5 Nm. Dans cette configuration, on a des chocs des deux côtés du jeu angulaire. En réalité, contrairement à ce que l'on aurait voulu observer, sur toutes les configurations testées, on retrouve ces doubles impacts de part et d'autre du jeu angulaire. Ceci est très fâcheux car cela limite énormément la corrélation du modèle numérique. En effet, on n'arrive pas à délimiter des conditions avec et sans impacts, bien que lors de la conception du banc, on souhaitait pouvoir observer les deux types de comportement. Comme nous allons le voir par la suite, ceci est dû à une résonance d'ordre élevé qui apparaît systématiquement sur tous les relevés expérimentaux. Le cas dit « de référence » que nous allons présenter est représentatif des autres points de fonctionnement mesurés.

4.4.4.2 RESONANCES LIEES A LA MESURE DE LA VITESSE AMONT

Voici ci-dessous (Figure 4.18) un exemple de tracé brut de la vitesse de rotation de l'arbre amont donnée par le codeur angulaire, entraîné en parallèle de la ligne principale par une courroie crantée comme le montre la Figure 4.16.

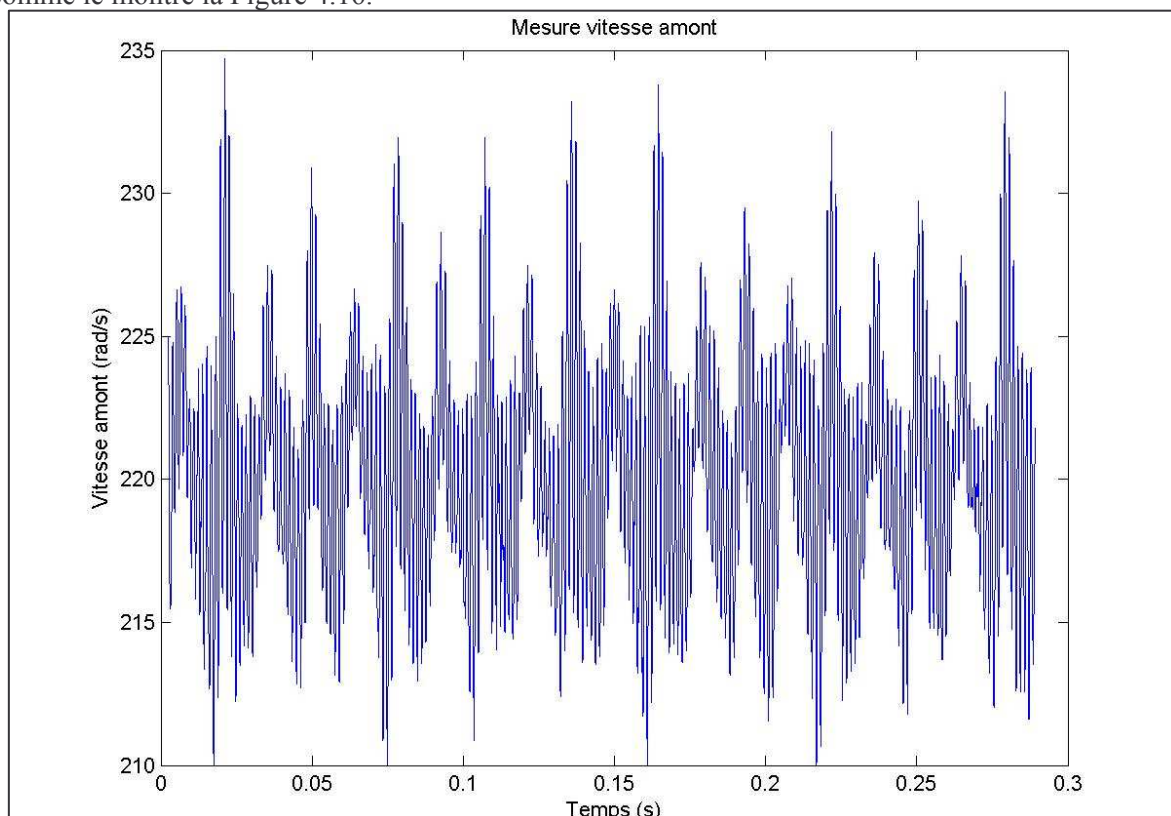


Figure 4.18 : Mesure de la vitesse de la ligne d'arbre amont sur 10 tours

Si on passe dans le domaine fréquentiel (par FFT), on obtient alors le spectre (auquel on a retiré la composante continue) tracé ci-dessous (Figure 4.19). On n'observe bien le pic en ordre 2 généré par le dispositif de cardan ainsi que les harmoniques successives en H4, H6 qui s'atténuent rapidement. Ceci s'explique par le fait que le cardan ne produit pas un sinus parfait mais qu'également, même avec un sinus parfait en H2, les chocs produisent l'apparition de pics en H4, H6, etc.

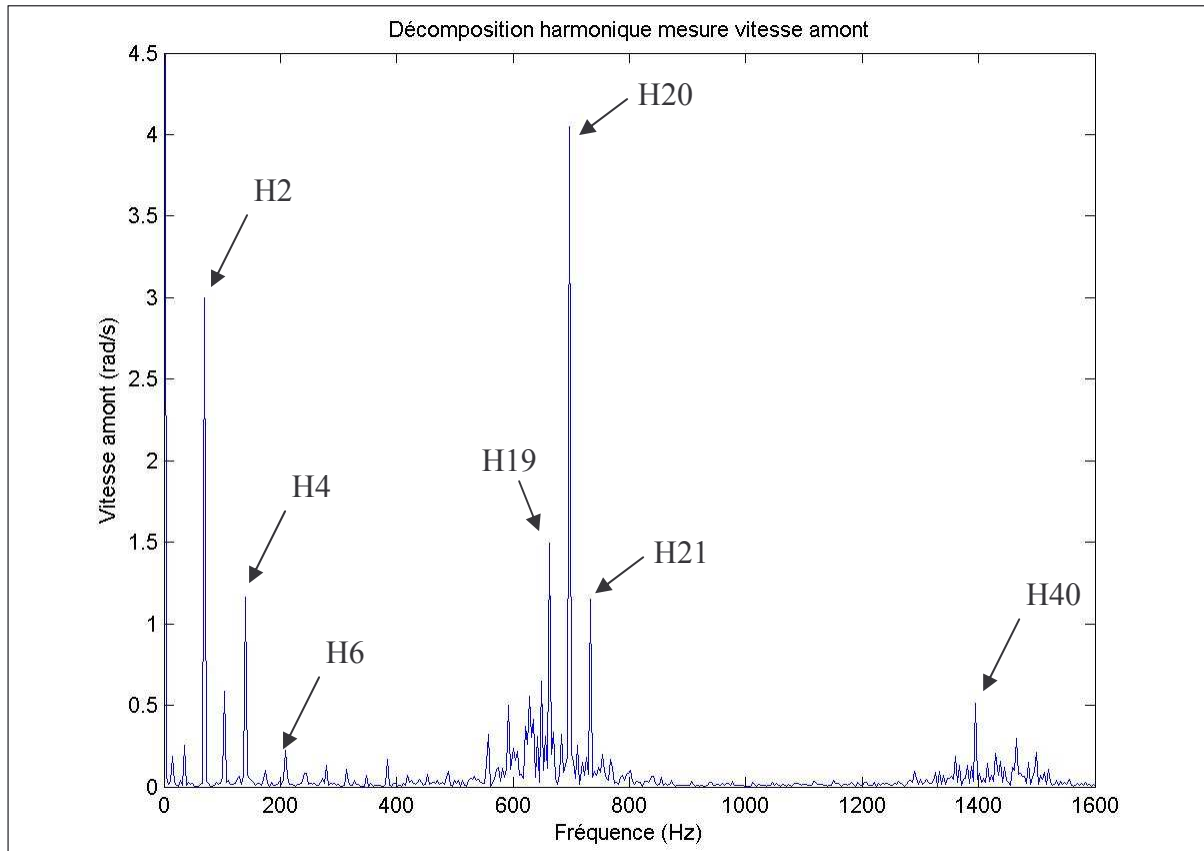


Figure 4.19 : Décomposition harmonique de la vitesse de la ligne d'arbre amont mesurée

En revanche, ce qui frappe en premier lieu, ce sont les pics aux alentours de 700 Hz et 1400 Hz. Il s'agit de pics qui correspondent aux harmoniques H20 et H40 de la rotation de la ligne d'arbres. En fait, il s'agit du même phénomène que celui qui se produit dans la sirène de courroie de distribution et dans la sirène de boîte de vitesse. En effet, notre codeur angulaire est mis en rotation par une courroie tendue, engrenée par une poulie à 20 dents. L'erreur de transmission engendre alors des résonances systématiques en H20 et H40 ainsi que des pics secondaires de part et d'autre de chaque résonance comme le montre l'exemple suivant d'une mesure de sirène d'engrenages de boîte de vitesse (Figure 4.20).

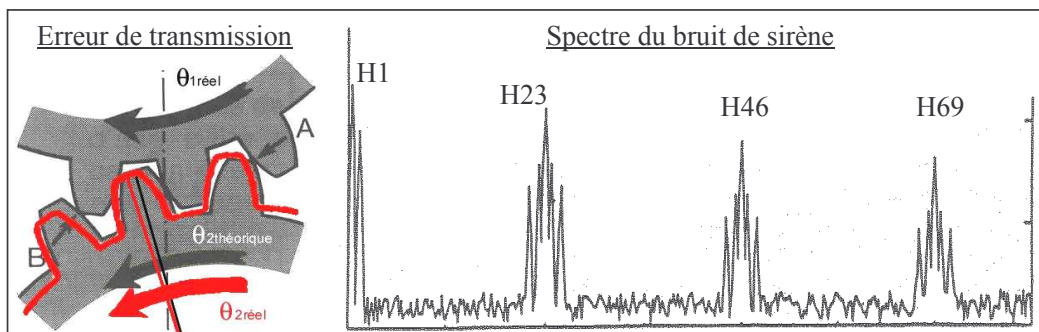


Figure 4.20 : Erreur de transmission et spectre du bruit de sirène sur un rapport à 23 dents

Comme on peut aisément l'imaginer, ces résonances deviennent l'excitation principale du système. En effet, en raison d'une certaine flexibilité de la ligne d'arbre amont, il ne s'agit pas uniquement d'erreurs de mesure du codeur car ces fréquences de 700 et 1400 Hz se retrouvent également au niveau de l'arbre aval. Il s'agit donc bien de vibrations qui se répercutent sur l'ensemble du banc et qu'il faut donc prendre en considération car elles sont de premier ordre dans la réponse du système. Cela permet de comprendre par la même occasion pourquoi, il n'a pas été possible d'obtenir des configurations expérimentales sans choc. En effet, ces résonances sont d'un niveau d'amplitude important qui va systématiquement provoquer le décollement de l'accouplement au niveau du jeu angulaire. En effet, l'accélération angulaire étant proportionnelle au produit de l'amplitude d'acyclisme en vitesse, de la vitesse de rotation et de l'ordre de l'harmonique considérée, on peut très rapidement obtenir des niveaux de décélération instantanée de l'arbre amont tels que même la faible inertie de $2,46.10^{-4}$ kg.m² de l'arbre aval décolle systématiquement étant donné la limite de couple résistant à 2 Nm qu'on ne peut dépasser sur le banc.

Par ailleurs, la figure ci-dessous (Figure 4.21) montre la décomposition harmonique de la vitesse relative issue des mesures des deux codeurs angulaires. On remarque bien que les harmoniques autour du H20 (700 Hz dans ce cas) viennent apporter de la complexité sur un banc qu'on voulait au départ le plus simple possible pour effectuer les corrélations d'usage. Aujourd'hui, avec du recul, on peut affirmer qu'il aurait été préférable d'utiliser une courroie en poly-V au lieu d'une courroie crantée pour entraîner le premier codeur.

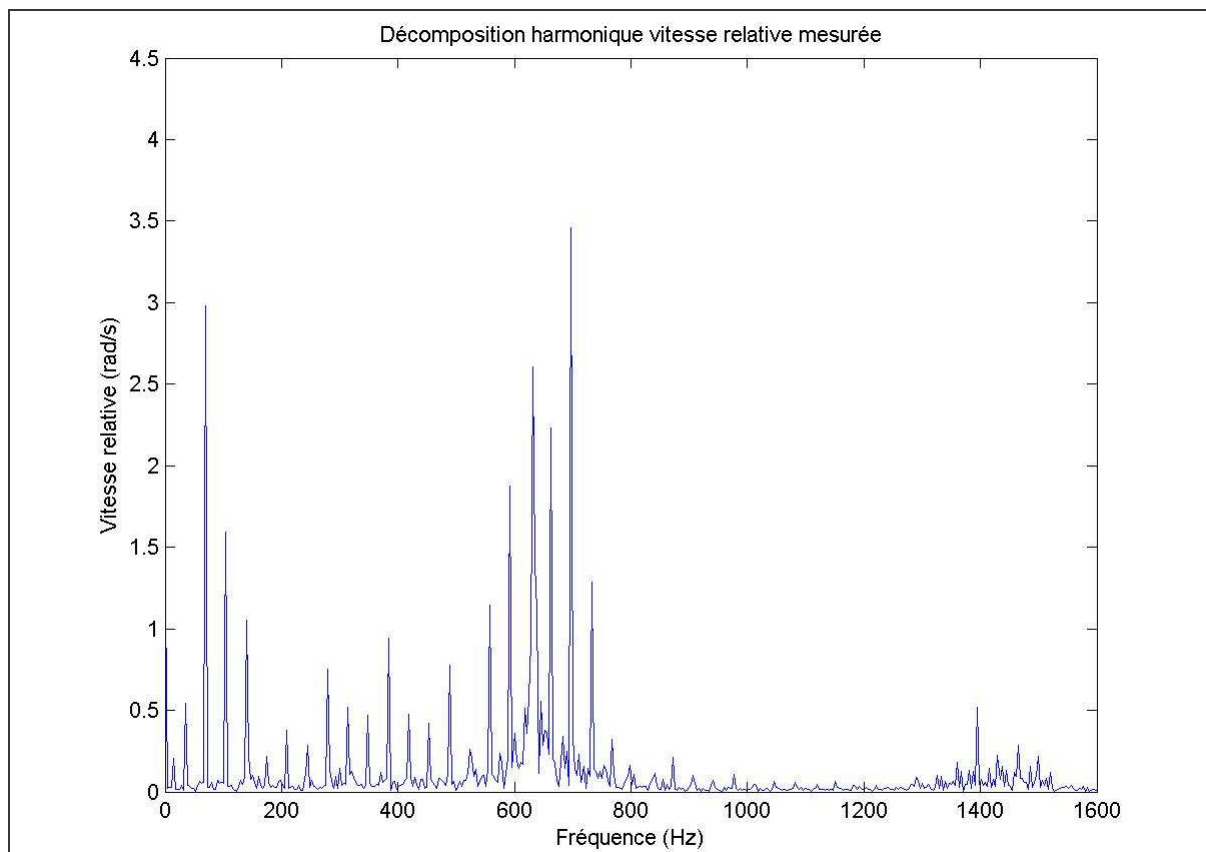


Figure 4.21 : Décomposition harmonique de la vitesse angulaire relative entre l'inertie entraînée (arbre aval) et la ligne d'arbre amont. Résultats tirés des mesures brutes des deux codeurs angulaires.

4.4.4.3 LES MESURES DE COUPLE RESISTANT ET D'ACCELERATION D'ARBRE AVAL

En ce qui concerne le couple résistant de l'arbre entraîné, celui-ci s'est révélé être relativement constant comme on le souhaitait dès le départ. La décomposition harmonique ci-dessous (Figure 4.22) provenant des mesures réalisées sur 10 tours de rotation peut en témoigner. Les harmoniques présentes sont bien négligeables vis-à-vis de la composante continue.

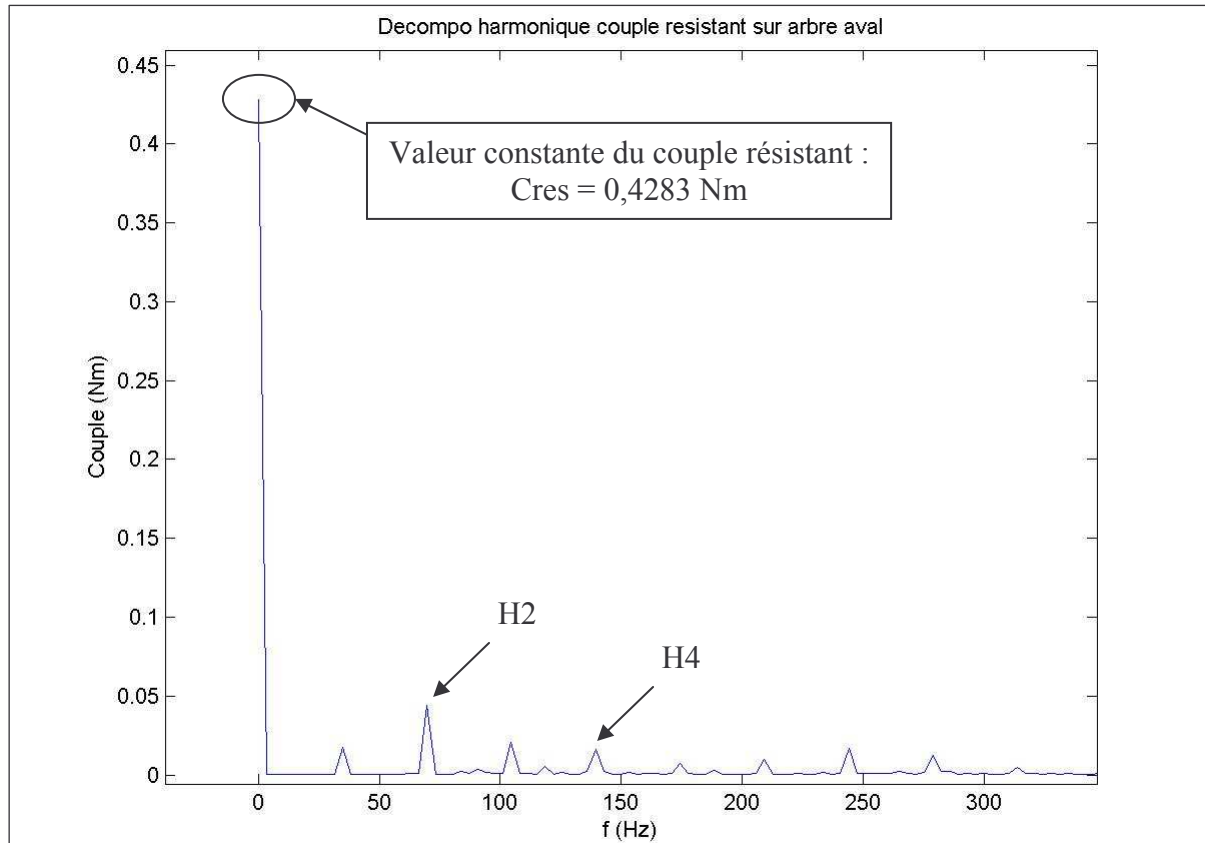


Figure 4.22 : Décomposition harmonique de la mesure brute du couple résistant de l'arbre aval

En revanche, pour les acquisitions de l'accéléromètre, cela s'est révélé être une véritable déception comme on peut le voir sur l'allure de la décomposition harmonique des signaux ci-contre (Figure 4.23). La mesure est perturbée par des signaux de relaxation en hautes fréquences (près de 4 et 5 kHz). Ceci est dû au fait de l'accélération centripète ou radiale qui vient bruite la mesure de l'accélération souhaitée, à savoir, l'accélération angulaire. En outre, on a un spectre très large qui ne correspond pas avec ce que donnent les codeurs angulaires.

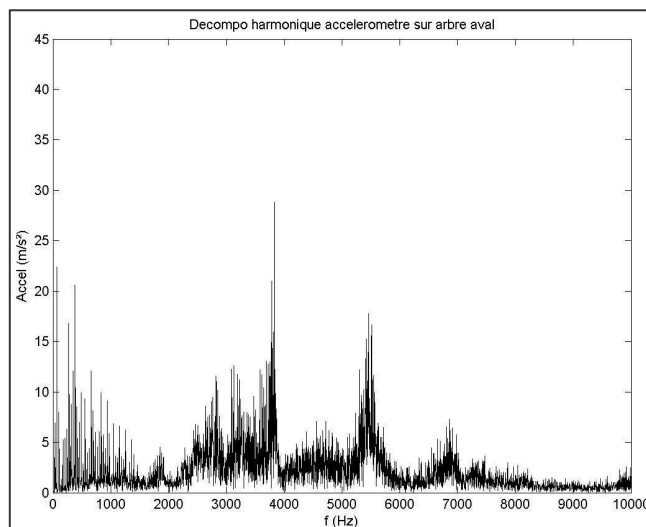


Figure 4.23 : Décomposition harmonique de la mesure de l'accéléromètre

4.5 CORRELATION DU MODELE AVEC LES ESSAIS

Compte tenu de l'écart d'inertie entre la partie amont très inerte (comprenant le moteur asynchrone) et la faible inertie entraînée en aval du jeu angulaire, nous allons pouvoir corrélérer le modèle numérique à un degré de liberté à partir des résultats expérimentaux. Cette configuration a été préalablement souhaitée avant la réalisation du banc d'essai afin de pouvoir faire ce type d'hypothèse pour la corrélation numérique. Nous considérerons donc la mesure du premier codeur angulaire (celui entraîné par une courroie crantée en amont du jeu), comme donnée d'entrée du modèle sur une ligne d'arbre supposée rigide (hormis l'inertie aval de $2,46 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$).

La corrélation présentée ci-dessous se fait sur la configuration expérimentale avec laquelle ont été obtenues les courbes suivantes déjà vues précédemment : Figure 4.18, Figure 4.19, Figure 4.21, Figure 4.22 et Figure 4.23. Il s'agit d'une configuration pour laquelle l'angle donné par le cardan est d'environ 8° . Les paramètres que nous nous sommes autorisé à faire varier au niveau du modèle semi-analytique sont uniquement la raideur de contact et le taux d'amortissement de contact : autrement dit les paramètres de contact. Les paramètres utilisés dans le modèle numérique sont regroupés dans le tableau suivant (cf. Tableau 9).

Items	Valeurs	Commentaires
Vitesse de rotation moyenne (composante en H0 de la ligne d'arbre en amont du jeu)	2 103 tr/min	Valeur obtenue à partir de la décomposition harmonique des mesures du codeur (cf. Figure 4.21).
Acyclismes (amplitudes et phasages) de la ligne d'arbres en amont du jeu (composantes en Hn avec n entier naturel)	Valeurs obtenues à partir de la décomposition harmonique des mesures du codeur angulaire (cf. Figure 4.21).	
Jeu angulaire	0,012 rad	Obtenu au préalable en mesurant le déplacement angulaire butée à butée.
Raideur de contact k	$3 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad}$	Obtenus par corrélation du modèle numérique avec les résultats expérimentaux
Amortissement de contact ξ_c	0,7	
Inertie de l'arbre entraîné équivalente à celle d'une pompe à vide I_{pav}	$2,46 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$	Dimensionnement du banc
Couple résistant moyen appliqué à l'inertie entraînée en aval du jeu	0,428 Nm	Valeur obtenue à partir des mesures de couple résistant (cf. Figure 4.22)

Tableau 9 : Paramètres numériques utilisés pour la corrélation essais / calculs sur un point de mesure avec un angle de cardan d'environ 8° .

A partir de ces valeurs, nous avons réalisé des calculs numériques par la méthode semi-analytique présentée au chapitre précédent. Les résultats sont présentés en vert dans la figure suivante (cf. Figure 4.24). Nous distinguons 3 cas notés (a), (b) et (c) qui diffèrent par le nombre d'harmoniques prises en considération comme valeurs d'entrée sur l'acyclisme de la ligne d'arbres rigide en amont du jeu. Ces cas correspondent respectivement à la prise en compte des deux harmoniques principales, c'est-à-dire celles en H2 et H20 uniquement (a), puis à la prise en compte de toutes les harmoniques de H1 à H40 (b) puis enfin à celle des harmoniques de H1 à H70 (c). Pour information, les harmoniques H40 et H70 correspondent tout de même à des fréquences respectives d'environ 700 Hz et 1230 Hz.

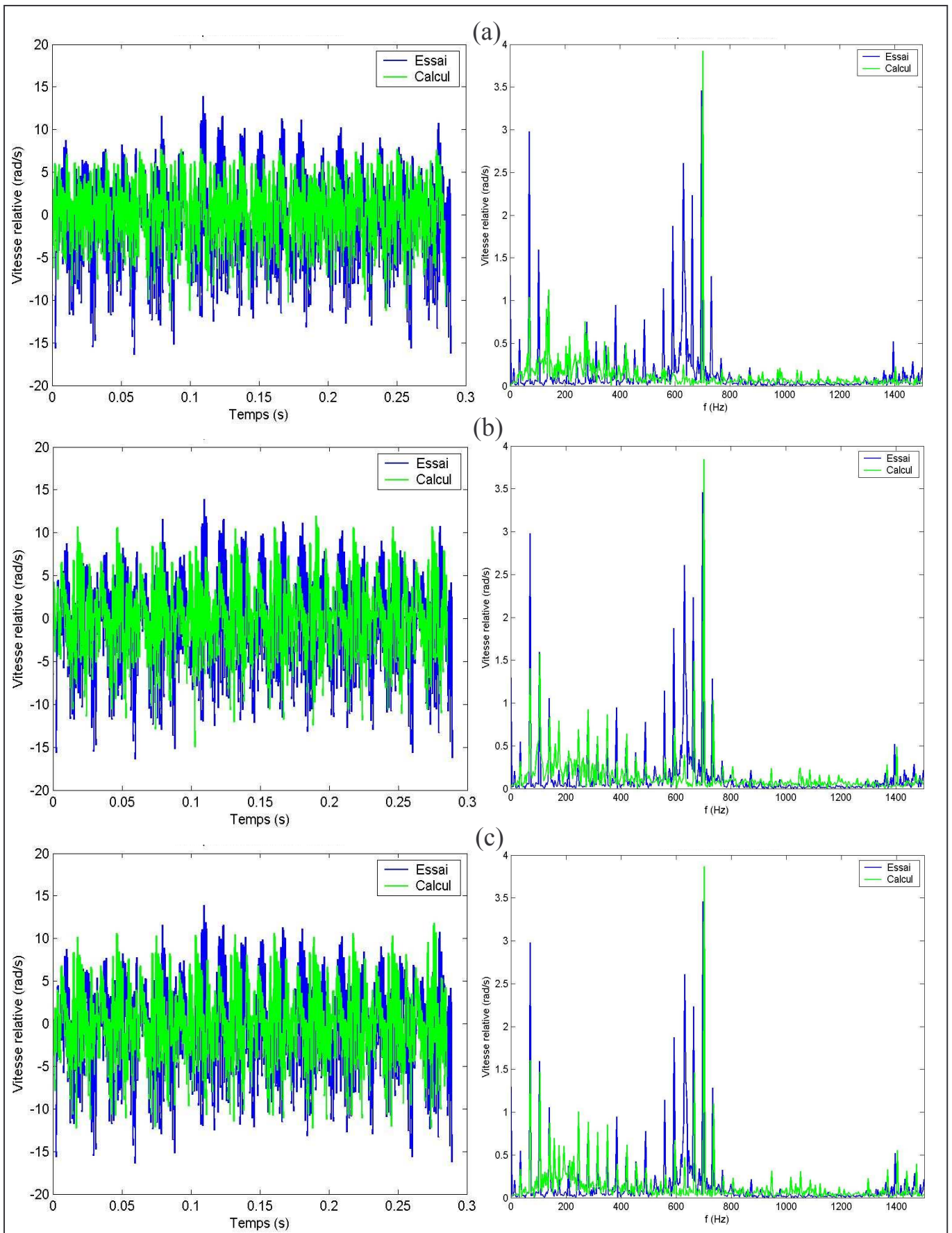


Figure 4.24 : Comparaison de la vitesse relative entre un point de mesure avec un angle de cardan de 8° environs (en bleu) et des calculs numériques (en vert) avec comme excitations les harmoniques H2 et H20 uniquement (a), les harmoniques de H1 à H40 (b) et les harmoniques de H1 à H70 (c)

Les résultats obtenus sont très satisfaisants et les principales valeurs caractéristiques ont été regroupées dans le tableau ci-dessous (cf. Tableau 10). Comme on peut le voir, la dynamique principale est celle en harmonique H20 non prévue au préalable et due à la courroie crantée. Cela correspond à une dynamique en 350 Hz que le modèle semi-analytique arrive à reproduire avec une erreur de l'ordre de 10% quel que soit le cas (a), (b) ou (c) considéré. Le signal temporel de la vitesse relative est très similaire à celui mesuré sur le banc, avec des valeurs extrémales du même ordre de grandeur bien que sous-estimées. Ceci est dû à l'erreur plus importante obtenue au niveau de la composante en H2, celle qu'on voulait mettre au premier plan par l'utilisation d'un cardan. On obtient une valeur de composante en H2 plus importante et plus proche de la mesure en prenant en compte plus d'harmoniques dans l'excitation, mais au-delà de H70, il n'y a plus aucun gain sur cette composante.

	Vitesse relative maximale sur 10 tours (rad/s)	Vitesse relative minimale sur 10 tours (rad/s)	Composante harmonique en H2 (rad/s)	Composante harmonique en H20 (rad/s)
Résultats numériques avec acyclisme H2 & H20	07,76	- 11,24	1,04	3,92
Résultats numériques avec acyclisme H1 à H40	11,94	- 14,92	1,40	3,84
Résultats numériques avec acyclisme H1 à H70	11,80	- 12,29	1,60	3,86
Résultats expérimentaux	13,91	- 16,34	2,98	3,46

Tableau 10 : Comparaison des principales caractéristiques (vitesse relative maximale, minimale, composantes en H2 et en H20) correspondant aux résultats numériques (a), (b) et (c) et au résultat expérimental de la Figure 4.24.

L'explication de cet écart sur la composante en H2 réside dans le fait que la corrélation des paramètres de contact (raideur et amortissement) a été réalisée sur le phénomène principal, à savoir la courroie crantée qui impose une dynamique en H20 (à 350 Hz ici) et par conséquent, bien loin de l'acyclisme en H2 engendré par le dispositif à cardan. C'est notamment l'amortissement de contact ξ_c qui pris à 0,70 atténue excessivement la composante en H2. Cette valeur de 0,70 est d'ailleurs relativement élevée, comparée à ce que l'on peut trouver dans la littérature. Cela parce qu'elle est le résultat d'une corrélation vis-à-vis d'un phénomène en H20 à près de 2000 tr/min. Etant donné que l'amortissement de contact (tout comme le taux de restitution) est variable selon la vitesse d'impact, il serait naturel de penser que 0,70 est une valeur trop élevée pour la composante en H2. Plus l'excitation est à hautes fréquences et plus celles-ci sont amorties et inversement, plus elle est lente et moins elle est amortie. Malheureusement, le modèle semi-analytique présenté ne permet pas d'affecter un taux d'amortissement différent par fréquence d'excitation.

Dans notre exemple, si on utilise un amortissement de contact de l'ordre de 0,10 à 0,30, l'énergie du système se retrouve alors de manière plus importante dans les fréquences plus basses mais de manière continue, caractéristique d'un comportement chaotique. Le chaos apparaît alors en raison des hautes fréquences (H20) qui ne sont pas suffisamment amorties.

4.6 CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous avons vu que les démarches présentées au chapitre 3 pouvaient être généralisées avec un système de taille plus importante. En effet, nous avons montré que la démarche semi-analytique ne se limitait pas simplement à des études de systèmes à un degré de liberté. Cette extension du modèle permet d'envisager d'autres applications susceptibles d'être modélisées et présentant le même type de problématique. Dans le cas de l'entraînement de pompe à vide, nous avons vu que le fait de prendre en compte la torsion de l'arbre à cames modifie sensiblement les résultats numériques obtenus. Outre les niveaux de réponse qui diffèrent avec le modèle à un seul degré de liberté, le modèle multi-ddl en torsion permet de mettre en évidence les vibrations induites par les impacts.

Ensuite, nous avons testé le modèle semi-analytique sur deux types d'applications PSA : l'entraînement de pompe à vide sur motorisation DV4TD et sur motorisation DV6. Les résultats obtenus sont qualitativement conformes à ce qui a été observé sur moteur. Sur l'application DV4TD, nous avons pu vérifier par calcul que l'assouplissement du contact (raideur de contact plus faible) obtenu par la modification géométrique de l'interface permettait de diminuer le niveau des impacts de l'entraînement de pompe à vide. Ainsi, le fonctionnement dégradé de l'entraînement de pompe à vide DV4TD avec la butée latérale d'arbre à cames usée, n'engendre pas des chocs conduisant à la rupture du TOC. Sur DV6, les calculs du modèle semi-analytique ont permis de corroborer le fait que le calage de la pompe HP au niveau de la façade de distribution avait un impact direct sur le niveau des couples d'impact de la pompe à vide en bout de l'arbre à cames d'échappement.

Les tendances ont été confirmées de manière qualitative sur ces deux applications mais afin de corréler le modèle numérique de manière quantitative, nous avons voulu reproduire expérimentalement le phénomène de vibro-impact en rotation de manière simple et maîtrisée. Pour cela, nous avons eu besoin de reproduire une rotation acyclique dont l'amplitude de fluctuation de vitesse pouvait être modifiée. Le dispositif retenu a été une ligne d'arbre entraînée par un moteur électrique via un cardan formant un angle réglable influant directement sur le niveau d'acyclisme engendré. En bout de ligne, une très faible inertie est accouplée via un jeu angulaire et est soumise à un couple résistant fourni par un frein à poudre. Les vitesses en amont et en aval du jeu ont été mesurées par des codeurs angulaires qui ont mis en évidence un phénomène de résonance haute fréquence non prévu au départ. Cette perturbation correspond à la réponse de la courroie crantée entraînant le codeur angulaire mesurant la vitesse amont.

Malgré cela, le modèle semi-analytique a montré de bons résultats de corrélation en ajustant les paramètres de contact. Compte tenu de l'important écart d'inertie volontairement mis entre la partie amont et la partie avale du jeu, nous avons utilisé le modèle à un degré de liberté. Les harmoniques de la vitesse amont mesurées sont directement utilisées comme entrée du modèle numérique. Nous avons vu qu'on obtenait déjà un bon niveau de prédiction en utilisant uniquement les 2 principales harmoniques observées (H2 et H20). L'augmentation du nombre d'harmoniques prises en compte permet d'affiner le niveau de H2. Enfin, nous avons expliqué l'écart par le fait que le modèle utilise un amortissement de contact constant et indépendant de la vitesse d'impact. Des améliorations restent à réaliser sur cette voie et la prise en compte du frottement entre les pièces reste un élément à ajouter.

CONCLUSION GENERALE

L'étude présentée dans le cadre de cette thèse a permis une certaine avancée sur la compréhension des phénomènes de vibro-impacts au sein du groupe PSA Peugeot Citroën, en particulier quant au dimensionnement en fatigue des TOC de pompes à vide et de manière générale quant à l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. Après avoir présenté les différentes problématiques de contact/impact susceptibles d'être étudiées au sein du groupe motopropulseur, nous avons présenté les diverses techniques de modélisation les plus rencontrées dans la littérature. Cette présentation du moteur, par le biais des impacts, a permis d'aborder la notion essentielle d'acyclisme moteur et la compréhension de la transmission de ces vibrations tout au long de la chaîne cinématique qui constitue entre autres le groupe motopropulseur.

Le type de modélisation retenu pour représenter le contact a été celui d'une raideur de contact discontinue (constante par morceaux) associée à un amortissement de contact discontinue (constant par morceaux). Il ne s'agit pas du modèle le plus courant rencontré dans la littérature. On utilise de manière privilégiée soit des modélisations de contact les plus simples possibles sans amortissement de contact (raideur de contact seule) ou avec une loi de restitution, soit des approches Lagrangiennes associées à des maillages éléments finis plus fins. Le modèle retenu nous a semblé un bon compromis compte tenu de l'approche temporelle choisie pour résoudre le système. Très rapidement, la représentation du contact par raideur et amortissement de contact s'est montré beaucoup plus pertinente que l'utilisation d'une loi de restitution, cette dernière présentant des réels coûts de temps CPU pour des cas de prise de contact de la solution (collage suite à une succession infinie d'impacts jusqu'à un point dit « d'accumulation »).

Afin de pouvoir analyser en particulier les phénomènes engendrés par la non-linéarité de contact, nous avons présenté les outils indispensables pour l'interprétation des résultats. Il s'agissait de pouvoir identifier le type de comportement asymptotique obtenu, connaître sa stabilité et l'évolution de celle-ci dans le temps à travers l'étude des bifurcations. Pour ce dernier point, combiné à une résolution temporelle, la technique de continuation apparaît de loin comme la plus adaptée à une étude paramétrique d'un système non linéaire. Dans la pratique, compte tenu des grandes variations observées au niveau des bifurcations, il a fallu adapter une technique de continuation spécifique, basée sur les techniques classiques connues, mais avec une stratégie propre privilégiant le changement d'algorithme de prédiction/correction avant la réduction du pas de continuation.

De cette façon, la modélisation réalisée pour l'entraînement de pompe à vide a permis de mettre en évidence des différences de comportement du système selon les jeux de paramètres utilisés (réponse sans perte de contact, avec impacts d'un seul côté ou des deux côtés). Outre ces différences, nous avons pu constater également des changements du comportement plus radicaux avec d'un côté des zones de chocs entretenus de manières périodiques et stables et de l'autre côté des zones d'instabilités avec des comportements chaotiques. En outre, nous avons pu mettre en exergue l'importance de l'utilisation de l'ensemble des harmoniques présentes dans l'acyclisme moteur (qui agissent dans la brutalité du passage entre orbite stable et zone chaotique) ainsi que l'importance de prendre en considération la flexibilité de l'arbre à cames en rotation (apparition des chocs plus tôt c'est-à-dire avec moins d'énergie apportée au système).

Comme nous l'avons vu, les modélisations disponibles issues de ce travail de thèse ne se limitent pas à une étude à un degré de liberté (bien que celles-ci mettent déjà en évidence la complexité des phénomènes non linéaires observés). De manière générale, pour un cas avec plusieurs degrés de liberté, la résolution numérique est similaire dans le sens où le problème est résolu de manière semi-analytique, en distinguant les phases de mouvement où la pompe à vide est en vol libre des phases de mouvement où celle-ci est en contact avec l'arbre à cames. Les pulsations et vecteurs propres du système pour chacune des phases sont calculés numériquement. Les équations différentielles sont alors projetées sur chaque base modale concernée : on obtient un système différentiel linéaire découplé qui peut être résolu analytiquement à partir des paramètres du système. La solution modale obtenue sur chaque phase est alors projetée sur la base naturelle initiale. Finalement, comme dans le cas à 1 degré de liberté, les instants de changement de phase de mouvement définis par la valeur de jeu angulaire sont déterminés numériquement afin d'obtenir la solution temporelle globale.

La prise en compte de plusieurs degrés de liberté a notamment permis de visualiser les vibrations au niveau de l'arbre à cames qui proviennent des chocs répétés entre celui-ci et la pompe à vide. Compte tenu de l'inertie de l'arbre à cames qui est équivalente à celle de la pompe à vide, la différence observée entre le modèle à un degré de liberté et le modèle multi-ddl se comprend aisément. Il est naturel qu'en modélisant la flexion de l'arbre à cames, on apporte plus d'énergie au système qui engendre des vibro-impacts avec des niveaux d'acyclisme ou de régime moteur plus faibles que ceux théoriquement nécessaires avec le modèle à un degré de liberté. Enfin, cette généralisation permet également de prendre en compte les couples exercés au niveau des cames (issus du contact permanent entre la came et la commande de soupapes).

Du point de vue qualitatif, le modèle semi-analytique développé a jusqu'à présent répondu parfaitement aux attentes pour comparer par exemple deux types de solutions différentes envisagées. C'est ce que nous avons vu avec les applications moteur diesel PSA DV4TD et DV6. Dans le premier cas, nous avons vérifié le gain apporté par la correction géométrique apportée au niveau du TOC. Cette diminution des couples d'entraînement, liés aux chocs, a pu être confirmée tant en fonctionnement normal qu'en fonctionnement dégradé avec la butée latérale d'arbre à cames usée. Dans le deuxième cas, le modèle semi-analytique a permis de vérifier que l'architecture de la façade de distribution (calage de la pompe HP) avait une influence importante sur le niveau des chocs générés sur la pompe à vide en bout de l'arbre à cames échappement.

Du point de vue quantitatif, il a fallu valider les performances du modèle semi-analytique proposé, par une corrélation sur une étude expérimentale. Ce travail est nécessaire si l'on veut pouvoir être prédictif et agir très tôt en pré-dimensionnement lors de la définition des spécifications demandées aux fournisseurs de pompes à vide. Afin de simplifier au maximum le banc expérimental, nous avons mis en place un essai de principe, les mesures sur moteur complet étant plus complexes, plus coûteuses et moins flexibles en terme de variations paramétriques. Le système retenu a consisté en un entraînement d'arbres alignés avec un jeu angulaire en bout de ligne. Pour reproduire les impacts, un moteur électrique et un joint de cardan permettent de générer un acyclisme, c'est-à-dire des fluctuations de vitesses de rotation, en amont du jeu. Pour maîtriser le niveau des chocs, l'inertie en aval du jeu est freinée par un frein à poudre. Le grand écart d'inertie qui existe volontairement entre l'entraînement (comprenant l'inertie moteur) et le petit arbre de très faible inertie entraîné en bout de ligne (après le jeu) permet de se concentrer sur la corrélation du modèle à un seul degré de liberté sans prendre en compte la flexibilité de la ligne en amont du jeu angulaire.

Pour comparer les résultats numériques avec les résultats expérimentaux, nous avons mesuré en particulier le couple résistant et les vitesses angulaires en amont et en aval du jeu. Malheureusement pour la partie amont, l'utilisation d'une courroie crantée pour entraîner le codeur angulaire à l'aide d'un pignon à 20 dents a apporté au système une composante harmonique haute fréquence en H20 : soit 20 fois la fréquence de rotation de l'ensemble. Cette fréquence, non prévue au départ, s'est avérée être la composante majeure des vibrations de la ligne d'arbre (supérieure à la composante en H2 générée par le cardan). Néanmoins, les résultats du modèle semi-analytique ont été très satisfaisants.

Cette composante haute fréquence est bien prédite et l'écart qui existe sur la composante en H2 peut se comprendre aisément par les hypothèses initiales du modèle : amortissement de contact constant, pas de modélisation des frottements ...

Malgré cet état d'avancement prometteur, aujourd'hui encore, des améliorations du modèle sont en cours de réalisation. Les évolutions recherchées sont notamment le choix de l'amortissement de contact (dépendant de la fréquence ou de la vitesse d'impact) ou bien la prise en compte des frottements entre les pièces en contact. Bien évidemment, ces éventuelles évolutions doivent tenir compte des hypothèses du modèle semi-analytique. Une autre variante réalisée consiste à modéliser le contact par une raideur de Hertz. Le modèle devient alors numérique-analytique alternant des phases de vol libre déterminées de manière semi-analytique et des phases de contact résolues entièrement numériquement. Même si une partie de l'intégration est modifiée, l'approche reste la même ...

Enfin, du point de vue expérimental, un banc acyclique de caractérisation de façade (et d'entraînement de pompe à vide est en cours d'élaboration. Le banc de principe à cardan présenté dans cette thèse permet de voir l'influence des différents paramètres qui sont l'acyclisme, la vitesse, le jeu et le couple résistant sur l'entraînement à jeu d'une simple inertie. Un moteur instrumenté permet de connaître les couples d'entraînement engendrés par les chocs d'entraînement de pompe à vide. Le banc acyclique de caractérisation de façade a pour but d'avancer encore dans la validation de la tenue des pompes à vide en permettant de tester les pompes à vide avec des niveaux d'acyclismes paramétrables. Cette dernière étape permettra de connaître les limites de tenue des pompes à vides vis-à-vis de leur entraînement.

BIBLIOGRAPHIE

- [ADA00] ADAMS G.G. & NOSONOVSKY M. Contact Modeling – Forces. *Tribology International*, 33, 431-442, 2000.
- [AGG04] AGGOUNE W., ZAHROUNI H. & POTIER-FERRY M. High-Order Prediction-Correction Algorithms for Unilateral Contact Problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 1-9, 2004.
- [ALL90] ALLGOWER E.L. & GEORG K. *Numerical Continuation Methods. An Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [AMA04a] AMADO T., THOUVEREZ F., DIMITRIJEVIC Z. & DUBOST J. Non Linear Dynamics of a Vacuum Pump Driving. *EUROMECH 457 : Non Linear Modes of Vibrating Systems*, 187-190, 2004.
- [AMA04b] AMADO T., THOUVEREZ F., DIMITRIJEVIC Z. & DUBOST J. Etude d'un Système Mécanique Non Linéaire Présentant un Jeu Angulaire et Excité de Manière Acyclique. *XIVème Colloque Vibrations, Chocs et Bruit*, Ecully, 2004.
- [AZA77] AZAR R.C. & CROSSLEY F.R.E. Digital Simulation of Impact Phenomenon in Spur Gear Systems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 99, 792-798, 1977.
- [AZE99] AZEEZ M.F.A. & VAKAKIS A.F. Numerical and Experimental Analysis of a Continuous Overhung Rotor Undergoing Vibro-Impacts. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34, 415-435, 1999.
- [BAP83] BAPAT C.N., POPPLEWELL N. & MCLACHLAN K. Stable Periodic Motions of an Impact Pair. *Journal of Sound and Vibration*, 87, 19-40, 1983.
- [BAP88] BAPAT C.N. & BAPAT C. Impact Pair under Periodic Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 120, 53-61, 1988.
- [BAR99] BARLAM D. & ZAHAVI E. The Reliability of Solutions in Contact Problems. *Computers and Structures*, 70, 35-45, 1999.
- [BAR03] BARTHOD M., TEBEC J.-L. & GIZARD M. Etude du Bruit de Graillonnement dans les Boîtes de Vitesses Automobiles. *Mécanique & Industries*, 4, 99-106, 2003.
- [BEL92] BELYTSCHKO T. & YEH I.S. The Splitting Pinball Method for General Contact. *Proceedings of the 10th International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Paris, 1992.
- [BEN01] BEN DHIA H. *Mécanique du contact*. Cours de DEA, Ecole Centrale Paris, 2001.
- [BLA95] BLANKENSHIP G.W. & KAHRAMAN A. Steady State Forced Response of a Mechanical Oscillator with Combined Parametric Excitation and Clearance Type Non-linearity. *Journal of Sound and Vibration*, 185 (5), 743-765, 1995.
- [BLA04] BLAZEJCZYK-OKOLEWSKA B., CZOLCZYNSKI K. & KAPITANIAK T. Classification Principles of Types of Mechanical Systems with Impacts - Fundamental Assumptions and Rules. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23, 517-537, 2004.
- [BOL64] BOLOTIN V.V. *The Dynamic Stability of Elastic System*. Holden-Day, Inc, 1964.
- [BOT01] BOTET R. Les Fractales en Physique. *Techniques de l'Ingénieur*, AF 4500, 1-18, 2001.
- [BOU00] BOUCHER F. Mise en Oeuvre du Contact Pair dans Abaqus Standard. *Note interne PSA*, 2000.
- [BRO97] BROSSARD J.-P. Mécanique Générale. Dynamique : Théorie Classique du Choc. *Techniques de l'Ingénieur*, A 1668, 1-20, 1997.

- [BRY85] BRYANT M.D. Non-linear Forced Oscillation of a Beam Coupled to an Actuator via Hertzian Contact. *Journal of Sound and Vibration*, 99 (3), 403-414, 1985.
- [BUD95] BUDD C., DUX F. & CLIFFE A. The Effect of Frequency and Clearance Variations on Single-Degree-of-Freedom Impact Oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 184 (3), 475-502, 1995.
- [CHA04] CHAMORET D., SAILLARD P., RASSINEUX A. & BERGHEAU J.M. New Smoothing Procedures in Contact Mechanics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 107-116, 2004.
- [CHA96] CHATTERJEE S., MALLIK A.K. & GHOSH A. Periodic Response of Piecewise Non-Linear Oscillators under Harmonic Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 191 (1), 129-144, 1996.
- [CHI01] CHICUREL-UZIEL E. Exact, Single Equation, Closed-Form Solution of Vibrating Systems with Piecewise Linear Springs. *Journal of Sound and Vibration*, 245 (2), 285-301, 2001.
- [CHO92] CHOI S.K. & NOAH S.T. Response and Stability of Piecewise-Linear Oscillator under Multi-Forcing Frequency. *Nonlinear Dynamics*, 3, 105-121, 1992.
- [CHO94] CHOI S.-K. & NOAH S.T. Mode-Locking and chaos in a Jeffcott Rotor with Bearing Clearances. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 61, 131-138, 1994.
- [CHO88] CHOI Y.S. & NOAH S.T. Forced Periodic Vibration of Unsymmetric Piecewise-Linear Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 121, 117-126, 1988.
- [COM89] COMPARIN R.J. & SINGH R. Non-linear Frequency Response Characteristics of an Impact Pair. *Journal of Sound and Vibration*, 134 (2), 259-290, 1989.
- [CON95] CONE K.M. & ZADOKS R.I. A Numerical Study of an Impact Oscillator with the Addition of Dry Friction. *Journal of Sound and Vibration*, 188, 659-683, 1995.
- [COU98] COUDERC P., CALLENAERE J., DER HAGOPIAN J., FERRARIS G., KASSAI A., BORJESSON Y., VERDILLON L. & GAIMARD S. Vehicule Driveline Dynamic Behaviour : Experimentation and Simulation. *Journal of Sound and Vibration*, 218 (1), 133-157, 1998.
- [CVE98] CVETICANIN L. Analytical Methods for Solving Strongly Non-Linear Differential Equations. *Journal of Sound and Vibration*, 214 (2), 325-338, 1998.
- [DEB90] DEBBABI C. *Contribution à l'Etude Dynamique des Courroies de Transmission Soumises aux Irrégularités Cycliques de Vitesse des Moteurs*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- [DEM03] DEMAILLY D. *Etude du Comportement Non-Linéaire dans le Domaine Fréquentiel : Application à la Dynamique Rotor*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 2003.
- [DEM91] DEMAILLY J.-P.. *Analyse Numérique et Equations Différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, 1991.
- [DER99] DERRIEN D. *Oscillations Transitoires dans les Chaînes Cinématiques Automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [DEV00] DEVELAY C. *Etude et Réduction du Bruit de Graillonnement des Boîtes de Vitesses Automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole INSA Lyon, 2000.
- [DIM00] DIMITRIJEVIC Z. *Détermination des Bifurcations de Hopf et des Cycles Limites d'une Structure Non Linéaire Soumise à un Ecoulement Transsonique d'un Fluide Parfait*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2000.
- [DIN04] DING W.-C., XIE J.H. & SUN Q.G. Interaction of Hopf and Period Doubling Bifurcations of a Vibro-Impact System. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 27-45, 2004.
- [EHR88] EHRICH F.F. High Order Subharmonic Response of High Speed Rotors in Bearing Clearance. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110, 9-16, 1988.
- [ENG01] ENGELVIN O. *Comportement Dynamique des Chaînes de Transmission Automobiles*. Rapport de DEA, Ecole INSA Lyon, 2001.
- [ESC01] ESCALONA J.L., MAYO J. & DOMINGUEZ J. Influence of Reference Conditions in the Analysis of the Impact of Flexible Bodies. *Proceedings of DETC'01*, Pittsburgh, 2001.
- [FAN94] FANG W. & WICKERT J.A. Response of a Periodically Driven Impact Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 170 (3), 397-409, 1994.
- [FEI78] FEIGENBAUM M.J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19, 25-52, 1978.

- [FLO93] FLOWERS G.T. & WU F.S. A Study of the Influence of Bearing Clearance on Lateral Coupled Shaft/Disk Rotordynamics. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 115, 279-286, 1993.
- [FOA92] FOALE S. & BISHOP S.R. Dynamical Complexities of Forced Impacting Systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A338, 547-556, 1992.
- [FOA94] FOALE S. & BISHOP S.R. Bifurcations in Impact Oscillations. *Nonlinear Dynamics*, 6, 285-299, 1994.
- [FOL99] FOLLEA A. La Grenaille ou Graillonnement "Gear Rattle". *Note interne PSA*, 1999.
- [FOR04] FORTIN J. & COOREVITS P. Selecting Contact Particles in Dynamics Granular Mechanics Systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 207-213, 2004.
- [GAN97] GANESAN R., Nonlinear Vibrations and Stability of a Rotor-Bearing System with Nonsymmetric Clearances. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119, 418-424, 1997.
- [GLO92] GLOCKER C. & PFEIFFER F. Dynamical Systems with Unilateral Contacts. *Nonlinear Dynamics*, 3, 245-259, 1992.
- [GLO04] GLOCKER C. Concepts for Modeling Impacts without Friction. *Acta Mechanica*, 168, 1-19, 2004.
- [GOL60] GOLDSMITH W. *Impact, The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. Arnold, London, 1960.
- [GON04] GONTHIER Y., MCPHEE J., LANGE C. & PIEDBŒUF J.-C. A Regularized Contact Model with Asymmetric Damping and Dwell-Time Dependent Friction. *Multibody System Dynamics*, 11, 209-233, 2004.
- [GUC97] GUCKENHEIMER J. & HOLMES P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. *Springer-Verlag*, 1977.
- [HAN95] HAN R.S.P., LUO A.C. & DENG W. Chaotic Motion of a Horizontal Impact Pair. *Journal of Sound and Vibration*, 181 (2), 231-250, 1995.
- [HAN04] HAN W., JIN D.P. & HU H.Y. Dynamics of an Oblique-Impact Vibrating System of Two Degrees of Freedom. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 795-822, 2004.
- [HEI88] HEIMAN H.S., BAJAJ A.K. & SHERMAN P.J. Periodic Motions and Bifurcations in Dynamics of an Inclined Impact Pair. *Journal of Sound and Vibration*, 124, 55-58, 1988.
- [HEL98] HELLWEG H.-B. & CRISFIELD M.A. A New Arc-Length Method for Handling Sharp Snap-Backs. *Computers & Structures*, 66, 705-709, 1998.
- [HOL82] HOLMES P. The Dynamics of Repeated Impact with a Sinusoidally Vibrating Table. *Journal of Sound and Vibration*, 84, 173-189, 1982.
- [HUA04] HUANG Z.L., LIU Z.H. & ZHU W.Q. Stationary Response of Multi-Degree-of-Freedom Vibro-Impact Systems under White Noise Excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 223-240, 2004.
- [INA01] INAYAT-HUSSAIN J.I., KANKI H. & MUREITHI N.W. Bifurcations and Chaos in the Response of a Rigid Rotor Supported by Eccentric Squeeze-film Dampers. *Proceedings of DETC'01*, Pittsburgh, PA, September 9-12-2001, 2001.
- [IVA94] IVANOV A.P. Impact Oscillations : Linear Theory of Stability and Bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 178 (3), 361-378, 1994.
- [JAN01] JANIN O. & LAMARQUE C.H. Comparison of Several Numerical Methods for Mechanical Systems with Impacts. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, 1101-1132, 2001.
- [JI98] JI Z. & ZU J.W. Method of Multiple Scale for Vibration Analysis of Rotor-Shaft Systems with Non-linear Bearing Pedestal model. *Journal of Sound and Vibration*, 218 (2), 293-305, 1998.
- [KAH90a] KAHRAMAN A. *Non-linear Dynamic Analysis of Geared Systems*. Thèse de doctorat, The Ohio State University, 1990.
- [KAH90b] KAHRAMAN A. & SINGH R. Non-Linear Dynamics of a Spur Gear Pair. *Journal of Sound and Vibration*, 142, 49-75, 1990.
- [KAH91] KAHRAMAN A. & SINGH R. Interactions between Time-varying Mesh Stiffness and Clearance Non-linearities in a Geared System. *Journal of Sound and Vibration*, 146 (1), 135-156, 1991.

- [KAH92] KAHRAMAN A. On the Response of a Preloaded Mechanical Oscillator with a Clearance : Period-Doubling and Chaos. *Nonlinear Dynamics*, 3, 183-198, 1992.
- [KAH96] KAHRAMAN A. & BLANKENSHIP G.W. Interactions between Commensurate Parametric and Forcing Excitations in a System with Clearance. *Journal of Sound and Vibration*, 194 (3), 317-336, 1996.
- [KAH97] KAHRAMAN A. & BLANKENSHIP G.W. Experiments on Nonlinear Dynamic Behavior of an Oscillator with Clearance and Periodically Time-varying Parameters. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 64, 217-226, 1997.
- [KIM90] KIM Y.B. & NOAH S.T. Bifurcation Analysis for a Modified Jeffcott Rotor with Bearing Clearances. *Nonlinear Dynamics*, 1, 221-241, 1990.
- [KIM91] KIM Y.B., NOAH S.T. & CHOI Y.S. Periodic Response of Multi-Disk Rotors with Bearing Clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 144 (3), 381-395, 1991.
- [KNE03] K'NEVEZ J.-Y. & MARIOT J.-P. Joint Tripode Fixe d'une Transmission Automobile. Modèle de Chocs et Essais Industriels. *Mécanique & Industries*, 4, 93-97, 2003.
- [KOU99] KOUHIA R. & MIKKOLA M. Some Aspects on Efficient Path-Following. *Computers & Structures*. 72, 509-524, 1999.
- [LAI00] LAIK S. & WITTEMAN H. Modeling of impact dynamics : a literature survey. *International ADAMS User Conference*, 1-11, 2000.
- [LAM99] LAMARQUE C.-H. & JANIN O. Etude du grésillement dans une boîte de vitesse. *Rapport du contrat PSA Peugeot-Citroën*, 1999.
- [LAM00] LAMARQUE C.-H. & JANIN O. Modal Analysis of Mechanical Systems with Impact Non-Linearities : Limitations to a Modal Superposition. *Journal of Sound and Vibration*, 235 (4), 567-609, 2000.
- [LAN00] LANKARANI H.M. A Poisson-Based Formulation for Frictional Impact Analysis of Multibody Mechanical Systems with Open or Closed Kinematic Chains. *ASME Journal of Mechanical Design*, 122, 489-497, 2000.
- [LAU92] LAURSEN T.A. *Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements*. Thèse de doctorat, Stanford University, 1992.
- [LAW97] LAWEN J.L. & FLOWERS G.T. Synchronous Dynamics of a Coupled Shaft/Bearing/Housing System with Auxiliary Support from a Clearance Bearing : Analysis and Experiment. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119, 430-435, 1997.
- [LEN00] LENCI S. & REGA G. Numerical Control of Impact Dynamics of Inverted Pendulum through Optimal Feedback Strategies. *Journal of Sound and Vibration*, 236 (3), 505-527, 2000.
- [LEN03] LENCI S. & REGA G. Regular Nonlinear Dynamics and Bifurcations of an Impacting System under General Periodic Excitation. *Nonlinear Dynamics*, 34, 249-268, 2003.
- [LI04] LI D. & XU J. A Method to Determine the Periodic Solution of the Non-Linear Dynamics System. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 1-16, 2004.
- [LIG02a] LIGIER J.-L. & BARON E. *Acyclisme et Vibrations. Applications aux moteurs thermiques et aux transmissions. Volume 1 : Notions de base*. Publications de l'Institut Français du Pétrole, Editions Technip, Paris, 2002.
- [LIG02b] LIGIER J.-L. & BARON E. *Acyclisme et Vibrations. Applications aux moteurs thermiques et aux transmissions. Volume 2 : Analyses avancées et expérimentales*. Publications de l'Institut Français du Pétrole, Editions Technip, Paris, 2002.
- [LIT03] LITAK G. & FRISWELL M. I. Vibrations in Gear Systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 16, 795-800, 2003.
- [LU00] LU L.Y. & LU Z.H. The Periodicity of Chaotic Impact Oscillators in Hausdorff Phase Spaces. *Journal of Sound and Vibration*, 235 (1), 105-116, 2000.
- [LUO02] LUO A.C.J. An Unsymmetrical Motion in a Horizontal Impact Oscillator. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 420-426, 2002.
- [LUO98] LUO G.W. & XIE J.-H. Hopf Bifurcation of a Two-Degree-of-Freedom Vibro-Impact System. *Journal of Sound and Vibration*, 213 (3), 391-408, 1998.

- [LUO04] LUO G.W. & XIE J.H. Stability of Periodic Motion, Bifurcations and Chaos of a Two-Degree-of-Freedom Vibratory System with Symmetrical Rigid Stops. *Journal of Sound and Vibration*, 273, 543-568, 2004.
- [LUO01] LUO G.W., XIE J.H. & GUO S.H.L. Periodic Motions and Global Bifurcations of a Two-Degree-of-Freedom System with Plastic Vibro-Impact. *Journal of Sound and Vibration*, 240 (5), 837-858, 2001.
- [MAH90] MAHFOUZ A. & BADRAKHAN F. Chaotic Behaviour of some Piecewise-Linear Systems. Part II : Systems with Clearance. *Journal of Sound and Vibration*, 143 (2), 289-328, 1990.
- [MAR01] MARGHITU D.B. & STOENESCU E.D. Dynamics of Mechanisms with Slider Joints and Clearance. *Proceedings of DETC'01*, Pittsburgh, 2001.
- [MAY02] MAYEUX F., PERRET-LIAUDET J. & RIGAUD E. Coupled Computation of Meshing and Bearings Stiffnesses : Effect on Radiated Gearbox Noise. *The 2002 International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, 2002.
- [MEA80] MEAZAWA S., KUMANO H. & MINAKUCHI Y. Forced Vibrations in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by a General Periodic Force Function. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23, 68-75, 1980.
- [MET00] METALLIDIS P. & NATSIAVAS S. Vibration of a Continuous System with Clearance and Motion Constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35, 675-690, 2000.
- [MOI98] MOIROT F. *Etude de la stabilité d'un équilibre en présence du frottement de Coulomb. Application au crissement des freins à disque*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1998.
- [MON98] MONTERNOT C. *Comportement Dynamique des Transmissions de Puissance par Courroie Dentée*. Thèse de doctorat, Ecole INSA Lyon, 1998.
- [MOR00] MOREAU J.-J. Contact et Frottement en Dynamique des Systèmes de Corps Rigides. *Revue Européenne des Eléments finis*, 9, 9-28, 2000.
- [NAK02] NAKAI M., MURATA S. & HAGIO S. Analysis of Piecewise Linear Systems with Boundaries in Displacement and Time. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 124, 527-536, 2002.
- [NAR98] NARAYANAN S. & SEKAR P. A Frequency Domain Based Numeric-Analytical Method for Non-linear Dynamical Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 211 (3), 409-424, 1998.
- [NAY79] NAYFEH A.H. & MOOK D.T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, NY, 1979.
- [NAY85] NAYFEH A.H. & BALACHADRAN B. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley-Interscience, NY, 1985.
- [NET99] NETO E.A.S. & FENG Y.T. On the Determination of the Path Direction for Arc-Length Methods in the Presence of Bifurcations and Snap-Backs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, 81-89, 1999.
- [NGU86] NGUYEN D.T., NOAH S.T. & KETTLEBOROUGH C.F. Impact Behaviour of an Oscillator with Limiting Stops, part I : A Parametric Study. *Journal of Sound and Vibration*, 109, 293-307, 1986.
- [NGU00] NGUYEN Q.-S. *Stabilité et Mécanique Non Linéaire*. Hermes Sciences Publications, Paris, 2000.
- [NOR91] NORDMARK A.B.. Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 145, 279-297, 1991.
- [OVI01] OVIEDO-MARLOT X. *Etude du Comportement du Ballast par un Modèle Micromécanique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [PAD92] PADMANABHAN C. & SINGH R. Spectral Coupling Issues in a Two-degree-of-freedom System with Clearance Non-linearities. *Journal of Sound and Vibration*, 155 (2), 209-230, 1992.
- [PAD94] PADMANABHAN C. *Analysis of Periodically Excited Systems with Clearances*. Thèse de doctorat, The Ohio State University, 1994.
- [PAD95a] PADMANABHAN C., ROOK T.E. & SINGH R. Modeling of Automotive Gear Rattle Phenomenon : State of the Art. *SAE transactions*, 104 (6), 2332-2343, 1995.
- [PAD95b] PADMANABHAN C. & SINGH R. Analysis of Periodically Excited Non-linear Systems by a Parametric Continuation Technique. *Journal of Sound and Vibration*, 184, 35-58, 1995.
- [PAD96] PADMANABHAN C. & SINGH R. Analysis of Periodically Forced Nonlinear Hill's Oscillator with Application to a Geared System. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99 (1), 324-334, 1996.

- [PAO93] PAOLI L. *Analyse Numérique de Vibrations avec Contraintes Unilatérales*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I, 1993.
- [PAR00] PARKER R.G., VIJAYAKAR S.M. & IMAJO T. Non-Linear Dynamic Response of a Spur Gear Pair : Modelling and Experimental Comparisons. *Journal of Sound and Vibration*, 237 (3), 435-455, 2000.
- [PET92] PETERKA F. & VACIK J. Transition to Chaotic Motion in Mechanical Systems with Impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 154 (1), 95-115, 1992.
- [PFE01] PFEIFFER F. The Idea of Complementarity in Multibody Dynamics. *Proceedings of DETC'01*, Pittsburgh, 2001.
- [POP83] POPPLEWELL N., BAPAT C.N. & MCLACHLAN K. Stable Periodic Vibroimpact of an Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 87, 41-59, 1983.
- [RAG99] RAGHOTHAMA A. & NARAYANAN S. Bifurcation and Chaos in Geared Rotor Bearing System by Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Sound and Vibration*, 226 (3), 469-492, 1999.
- [RAJ03] RAJU M.R. Arc-Length Continuation Method for Solving a set of Non-Linear Equations in n-Unknowns and a Single Parameter, ??, 2003.
- [RAV98] RAVN P. A Continuous Analysis Method for Planar Multibody Systems with Joint Clearance. *Multibody System Dynamics*, 2, 1-24, 1998.
- [REM93] REMOND D., VELEX P. & SABOT J. *Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages*. Synthèse bibliographique. Centre Technique des Industries Mécaniques, 1993.
- [REN04] RENOUF M., DUBOIS F. & ALART P. A Parallel Version of the Non Smooth Contact Dynamics Algorithm Applied to the Simulation of Granular Media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 375-382, 2004.
- [RIG98] RIGAUD E. *Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 1998.
- [RIG00] RIGAUD E., SABOT J. & PERRET-LIAUDET J. Approche Globale pour l'Analyse de la Réponse Vibratoire d'une Transmission par Engrenages. *Revue Européenne des Eléments finis*, 9, 315-330, 2000.
- [ROO95] ROOK T.E. & SINGH R. Dynamic Analysis of a Reverse-Idler Gear Pair with Concurrent Clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 182 (2), 303-322, 1995.
- [SAB98] SABOT J. & PERRET-LIAUDET J. Vibroacoustique des Engrenages. Phénomènes de Vibroimpacts entre Dentures. *4ème Colloque du GRD Vibroacoustique*, Nevers, 1998.
- [SAI85] SAITO S. Calculation of Nonlinear Unbalance Response of Horizontal Jeffcott Rotors Supported by Ball Bearings with Radial Clearances. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107, 416-420, 1985.
- [SAR97] SARKAR N., ELLIS R. & MOORE T.N. Backlash Detection in Geared Mechanisms : Modeling, Simulation and Experimentation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11 (3), 391-408, 1997.
- [SHA83a] SHAW S.W. & HOLMES P.J. A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 90 (1), 129-155, 1983.
- [SHA83b] SHAW S.W. & HOLMES P.J. A Periodically Forced Impact Oscillator with Large Dissipation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50, 849-857, 1983.
- [SHA83c] SHAW S.W. & HOLMES P.J. A Periodically Forced Linear Oscillator with Impacts : Chaos and Long-Period Motions. *Physical Review Letters*, 51, 623-626, 1983.
- [SHA85a] SHAW S.W. Dynamics of Harmonically Excited Systems Having Rigid Amplitude Constraints. Part I : Subharmonic Motions and Local Bifurcations. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 453-458, 1985.
- [SHA85b] SHAW S.W. Dynamics of Harmonically Excited Systems Having Rigid Amplitude Constraints. Part II : Chaotic Motions and Global Bifurcations. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 459-464, 1985.
- [SIN02] SINOU J.-J. *Synthèse Non-Linéaire des Structures Vibrantes. Application aux Systèmes de Freinage*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Lyon, 2002.
- [SPR03] SPROTT J.C. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford university Press, 2003.
- [SWO84] SWOBODA B. *Mécanique des Moteurs Alternatifs*. Editions Technip, Paris, 1984.

- [SZA91] SZADKOWSKI A. Mathematical Model and Computer Simulation of Idle Gear Rattle. *SP854 Automotive Transmission Advancements*, 910641, 81-106, 1991.
- [THE00] THEODOSSIADES S. & NATSIAVAS S. Non-linear Dynamics of Gear-pair Systems with Periodic Stiffness and Backlash. *Journal of Sound and Vibration*, 229 (2), 287-310, 2000.
- [THE01] THEODOSSIADES S. & NATSIAVAS S. Periodic and Chaotic Dynamics of Motor-Driven Gear-Pair Systems with Backlash. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12, 2427-2440, 2001.
- [THO82] THOMPSON J.M.T. & GHAFARI R. Chaos after Period-Doubling Bifurcations in the Resonance of an Impact Oscillator. *Physics Letters* 91A, 5-8, 1982.
- [TOM84] TOMLINSON G.R. & LAM J. Frequency Response Characteristics of Structures with Single and Multiple Clearance-Type Non-Linearity. *Journal of Sound and Vibration*, 96, 111-125, 1984.
- [TOU97] TOULEMONDE C. *Dynamique des Oscillateurs à Impacts*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 1997.
- [TOU98] TOULEMONDE C. & GONTIER C. Sticking Motions of Impact Oscillators. *European Journal of Mechanics*, 17 (2), 339-366, 1998.
- [TUR04] TURNER J.A. Non-Linear Vibrations of a Beam with Cantilever-Hertzian Contact Boundary Conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 177-191, 2004.
- [VAI01] VAISHYA M. & SINGH R. Analysis of Periodically Varying Gear Mesh Systems with Coulomb Friction Using Floquet Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 243 (3), 525-545, 2001.
- [VEL75a] VELUSWAMI M.A. & CROSSLEY F.R.E. Multiple Impacts of a Ball between Two Plates. Part 1 : Some Experimental Observations. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 97, 820-827, 1975.
- [VEL75b] VELUSWAMI M.A., CROSSLEY F.R.E. & HORVAY G. Multiple Impacts of a Ball between Two Plates. Part 2 : Mathematical Modelling. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 97, 828-835, 1975.
- [WAG02] WAGG D.J. & BISHOP S.R. Application of Non-Smooth Modelling Techniques to the Dynamics of a Flexible Impacting Beam. *Journal of Sound and Vibration*, 256 (5), 803-820, 2002.
- [WAN78] WANG C.C. Rotational Vibration with Backlash : Part 1. *ASME Journal of Mechanical Design*, 100, 363-373, 1978.
- [WAN81] WANG C.C. Rotational Vibration with Backlash : Part 2. *ASME Journal of Mechanical Design*, 103, 387-397, 1981.
- [WAN95] WANG Y. Dynamics of Unsymmetric Piecewise-linear / Non-linear Systems using Finite Elements in Time. *Journal of Sound and Vibration*, 185 (1), 155-170, 1995.
- [WAN97] WANG Y. Prediction of Periodic Response of Rotor Dynamics Systems with Nonlinear Supports. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 119, 346-353, 1997.
- [WEN01] WEN G.-L. Codimension-2 Hopf Bifurcation of a Two-Degree-of-Freedom Vibro-Impact System. *Journal of Sound and Vibration*, 242 (3), 475-485, 2001.
- [WHI87a] WHISTON G.S. Global Dynamics of a Vibro-Impacting Linear Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 118, 395-429, 1987.
- [WHI87b] WHISTON G.S. The Vibro-Impact Response of a Harmonically Excited and Preloaded One-Dimensional Linear Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 115, 303-319, 1987.
- [WOL04] WOLF H., KODVANJ J. & BJELOVUCIC-KOPILOVIC S. Effect of Smoothing Piecewise-Linear Oscillators on their Stability Predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 270, 917-932, 2004.
- [ZAK01] ZAKHARIEV E.V. A Numerical Method for Multibody System Frictional Impact Simulation, *Proceedings of DETC'01*, Pittsburgh, 2001.

ANNEXE A : INTEGRATION TEMPORELLE

A.1) PRINCIPE

Soit l'équation d'équilibre suivante :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{q} = \underline{F} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dim(\underline{q}) = \dim(\underline{F}) = n \\ \underline{F}(t) \text{ connues } \forall t \geq 0 \\ \underline{q}(t) \text{ inconnues } \forall t > 0 \\ \underline{q}(0) \text{ et } \dot{\underline{q}}(0) \text{ connues} \end{cases} \quad (5.1)$$

La réponse sur base naturelle de discrétisation correspond à une discrétisation temporelle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{q}(t_1) = \underline{q}_1 \\ \dot{\underline{q}}(t_1) = \dot{\underline{q}}_1 \\ \underline{q}(t_2) = \underline{q}_2 \\ \dot{\underline{q}}(t_2) = \dot{\underline{q}}_2 \\ \vdots \\ \underline{q}(t_m) = \underline{q}_m \\ \dot{\underline{q}}(t_m) = \dot{\underline{q}}_m \end{cases} \quad (n*2m) \text{ inconnues}$$

Il s'agit de réaliser un schéma d'intégration temporelle, généralement après avoir effectué un passage à un système du 1^{er} ordre (équation d'état) de la forme suivante :

$$\underline{\underline{D}} \dot{\underline{y}} + \underline{\underline{K}} \underline{y} = \underline{F} \quad (5.2)$$

La discrétisation temporelle peut alors être écrite par exemple de la manière : (5.3)

$$\begin{array}{ccc} \underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \Delta t \dot{\underline{y}}_{n+1} & & \underline{y}_{n+1} = \underline{y}_n + \Delta t \dot{\underline{y}}_n \\ \text{(schéma implicite)} & \text{ou} & \text{(schéma explicite)} \end{array}$$

Dans la pratique, les schémas implicites sont particulièrement adaptés à la dynamique lente avec une matrice de masse consistante et pour laquelle le traitement des non linéarités sera plus délicat. En revanche, les schémas explicites sont particulièrement adaptés à la dynamique rapide (crash, impact, explosion) pour laquelle le traitement des non linéarités (matérielles, géométriques, contact /

frottement) est plus facile avec néanmoins des limitations sur le pas de calcul apportées par la finesse nécessaire de maillage (stabilité conditionnelle).

De manière générale, on a :
$$\underline{y}_{n+1} = \underline{A} \underline{y}_n + \underline{L}_n \quad \text{où } \underline{A} \text{ est la matrice d'amplification.}$$

Ces schémas d'intégration sont accompagnés d'un certain nombre de propriétés que nous allons voir dans ce qui suit.

A.2) PROPRIETES DES SCHEMAS TEMPORELS

A.2.1) Convergence

Si on considère un pas de temps Δt constant ($t_n = n \Delta t$), alors le schéma est convergent si et seulement si, pour tout t_n fixe, on a :
$$\underline{y}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{y}(t_n).$$

A.2.2) Précision

La relation $\underline{y}_{n+1} = \underline{A} \underline{y}_n + \underline{L}_n$ vue précédemment est équivalente à la relation suivante
$$\underline{y}(t_{n+1}) = \underline{A} \underline{y}(t_n) + \underline{L}_n + \Delta t \cdot \underline{\tau}(t_n)$$
 où $\underline{\tau}(t_n)$ est l'erreur de troncature locale. Cette valeur n'est généralement pas accessible (sinon on connaîtrait la solution exacte !). En revanche, si on peut écrire
$$\|\underline{\tau}(t)\| \leq c \cdot \Delta t^k, \forall t \in [0, T]$$
 avec $k > 0$, alors le schéma est cohérent et précis à l'ordre k .

A.2.3) Stabilité

Si on considère un système 1 ddl autonome ($L_n = 0$), alors $y_{n+1} = A^n y_0$. Si on a $|y_{n+1}|$ borné $\forall n$, alors $|A| \leq 1$ et le schéma est donc stable. De manière générale, on peut avoir une limitation éventuelle sur le pas Δt , c'est-à-dire qu'on a une stabilité conditionnelle en fonction de la valeur de Δt .

Pour un système matriciel, on étudie les valeurs propres $\lambda_i(\underline{A})$ de \underline{A} . On définit $\rho(\underline{A}) = \text{Max} |\lambda_i(\underline{A})|$, le rayon spectral qui doit être inférieur à 1 pour que le schéma soit stable. On notera que si on a la stabilité et la cohérence alors le schéma est forcément convergent.

A.2.4) Amortissement numérique et déphasage

Soit l'équation différentielle à 1 ddl suivante, $\ddot{q} + 2\omega\xi \dot{q} + \omega^2 q = 0$ avec q_0 et \dot{q}_0 , la solution exacte bien connue est :

$$q(t) = e^{-\xi\omega t} (q_0 \cos(\varpi t) + b \sin(\varpi t)) \quad \text{où } \varpi = \sqrt{1 - \xi^2} \omega \text{ et } b = (\dot{q}_0 + \xi\omega q_0) / \varpi$$

La solution algorithmique a , quant à elle, la forme suivante :

$$q_n = e^{-\xi'\omega' t_n} (q_0 \cos(\varpi' t_n) + b' \sin(\varpi' t_n))$$

où ξ' est l'amortissement algorithmique ($\neq \xi$) et ω' est la pulsation propre algorithmique ($\neq \omega$).

Par conséquent, outre l'imprécision sur l'amplitude de la réponse, le schéma d'intégration introduit un amortissement numérique ainsi qu'un déphasage numérique.

Le choix du schéma numérique pour résoudre un problème doit tenir compte de ces propriétés. De manière générale, on émet des hypothèses sur les variations temporelles des grandeurs et sur la satisfaction des équations différentielles. Nous allons voir ci-après les différentes méthodes de construction de schémas d'intégration.

A.3) METHODES DE CONSTRUCTION D'UN SCHEMA

Dans le but d'alléger les notations, on se place dans le cas 1 ddl. On souhaite résoudre l'équation suivante découlant de (A1) :

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F \quad (5.4)$$

A.3.1) Méthode des résidus pondérés

Pour $\tau \in [0, \Delta t]$, on a l'approximation :

$$q(\tau) \approx q_n + \dot{q}_n \tau + \ddot{q}_n \frac{\tau^2}{2!} + \dots + q_n^{(p-1)} \frac{\tau^{p-1}}{(p-1)!} + \alpha_n^{(p)} \frac{\tau^p}{p!} \quad (5.5)$$

On détermine $\alpha_n^{(p)}$ par pondération de (5.4) :

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) [M \ddot{q} + C \dot{q} + K q - F] d\tau = 0 \quad (5.6)$$

Le choix de p et de W est pris en tenant compte de critères de précision et de stabilité. En pratique, on choisit p = 2, d'où $\alpha_n^{(2)}$, noté α_n , correspond à une accélération moyenne et est donnée par :

$$M \alpha_n + C \left[\dot{q}_n + \theta_1 \Delta t \alpha_n \right] + K \left[q_n + \theta_1 \Delta t \dot{q}_n + \theta_2 \frac{\Delta t^2}{2} \alpha_n \right] = \bar{F} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_i = \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \cdot \tau^i \cdot d\tau}{\Delta t^i \cdot \int_0^{\Delta t} W(\tau) \cdot d\tau} \\ \bar{F} = \frac{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \cdot F(\tau) \cdot d\tau}{\int_0^{\Delta t} W(\tau) \cdot d\tau} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Une fois α_n obtenu, on a le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{n+1} = q_n + \dot{q}_n \cdot \Delta t + \alpha_n \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \alpha_n \cdot \Delta t \end{array} \right. \quad (5.7)$$

A.3.2) Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta consistent à discrétiser chaque pas $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ en une subdivision temporelle $t_n = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,k} = t_{n+1}$. L'idée est de calculer par récurrence les points (q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) en t_n à l'aide des points intermédiaires $(q_{n+1,j}, \dot{q}_{n+1,j})$ en $t_{n,j}$ ($1 \leq j \leq k$) avec :

$$t_{n,j} = t_n + c_j \Delta t_n, \quad 1 \leq j \leq k, \quad c_j \in [0,1]$$

Le schéma d'intégration s'écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} q_{n,j} = q_n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} \dot{q}_{n,j} \\ \dot{q}_{n,j} = \dot{q}_n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} \ddot{q}_{n,j} \\ M \ddot{q}_{n,j} + C \dot{q}_{n,j} + K q_{n,j} = F \end{array} \right] \quad 1 \leq i \leq k \\ q_{n+1} = q_n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j \leq k} b_j \dot{q}_{n,j} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j \leq k} b_j \ddot{q}_{n,j} \\ M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = F \end{array} \right. \quad (5.8)$$

On représente conventionnellement la méthode de Runge-Kutta par le tableau suivant :

c_1	0	0	...	0	0
c_2	a_{21}	0	...	0	0
.
.
c_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kk}	0
	b_1	b_2	...	b_{k-1}	b_k

avec les propriétés $\sum_{1 \leq j < i} a_{ij} = c_i$ et $\sum_{1 \leq j \leq k} b_j = 1$.

Les méthodes de Runge-Kutta sont d'ordre au moins égal à k .

Pour $k = 1$, le seul choix possible est $b_1 = 1$, ce qui donne le schéma d'Euler, rarement utilisé car diverge facilement. Pour $k = 2$, on peut avoir la méthode du point milieu ou la méthode de Heun par exemple. La méthode de Runge-Kutta « classique » correspond à $k = 4$.

Pour notre étude, nous validerons plus tard la résolution semi-analytique effectuée à l'aide d'un schéma d'intégration numérique du type point milieu modifié (cf. 3.3.4.2ii)).

Toutes les méthodes de Runge-Kutta restent néanmoins des méthodes à un pas, contrairement à celles que nous allons décrire dans ce qui suit.

A.3.3) Schémas à plusieurs pas

Pour $\tau \in [0, \Delta t]$, on écrit :

$$q(\tau) \approx \sum_{j=0}^p N_j(\tau) q_{n+1-j} \quad \text{où } q_{n+1} \text{ est l'inconnue à chercher} \quad (5.9)$$

q_{n+1} est déterminé par pondération de (5.4), éventuellement sur plusieurs pas. Ainsi on peut obtenir par exemple un schéma à 3 pas de Houbolt :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_{n+1} = \frac{2 q_{n+1} - 5 q_n + 4 q_{n-1} - q_{n-2}}{\Delta t^2} \\ \dot{q}_{n+1} = \frac{11 q_{n+1} - 18 q_n + 9 q_{n-1} - 2 q_{n-2}}{6 \Delta t} \\ M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = F_{n+1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(schéma précis au 2}^{\text{nd}} \text{ ordre et} \\ \text{inconditionnellement stable)} \end{array} \quad (5.10)$$

Parmi les schémas à pas multiples les plus connus, on distingue la méthode de Nyström (ordre 2), la méthode de Milne (ordre 4), les méthodes d'Adams-Bashforth, les méthodes d'Adams-Moulton et les méthodes de prédiction-corrrection. Pour plus de détails sur ces méthodes, nous invitons le lecteur à se reporter à [DEM91].

A.3.4) Développements en séries de Taylor

On fait les approximations suivantes

$$\begin{cases} q_{n+1} \approx q_n + \Delta t \dot{q}_n + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} [(1-\beta_1)q_n^{(p)} + \beta_1 q_{n+1}^{(p)}] \\ \dot{q}_{n+1} \approx \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n + \dots + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} [(1-\beta_2)q_n^{(p)} + \beta_2 q_{n+1}^{(p)}] \\ \vdots \\ q_{n+1}^{(p-1)} \approx q_n^{(p-1)} + \Delta t [(1-\beta_p)q_n^{(p)} + \beta_p q_{n+1}^{(p)}] \end{cases} \quad (5.11)$$

$q_{n+1}^{(p)}$ est déterminé en écrivant (5.4) à t_{n+1} : $M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = F_{n+1}$

En pratique, on choisit $p = 2$, ce qui donne le schéma de Newmark :

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1}] \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}] \\ M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = F_{n+1} \end{cases} \quad (\beta_1 = 2\beta, \beta_2 = \gamma) \quad (5.12)$$

En version explicite, avec M et C diagonales, $\beta = 0, \gamma = 1/2$, on obtient le schéma des différences centrées qui est précis au second ordre. En version implicite, avec $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, on a le schéma de l'accélération moyenne (formule du trapèze) qui est précis au second ordre et inconditionnellement stable.

ANNEXE B : DEMONSTRATION DE (3.53)

Dans cette partie, nous nous proposons de démontrer le relation (3.53). Soit $\Delta_0 = C^2 - 4 I_{\text{pav}} K < 0$, $I_{\text{pav}} > 0$, $K > 0$, $C > 0$ et $T > 0$, il faut démontrer que :

$$\left| \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T\right) \right| < \exp\left(\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} T\right) \quad (5.13)$$

et

$$\left| \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T\right) \right| < \exp\left(\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} T\right) \quad (5.14)$$

Puisque $\Delta_0 = C^2 - 4 I_{\text{pav}} K$, on en déduit que $\sqrt{|\Delta_0|} < C$, d'où $\exp\left(\frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T\right) < \exp\left(\frac{C}{2 I_{\text{pav}}} T\right)$

Ainsi, pour démontrer (5.13) et (5.14), il suffit de démontrer $\left(x = \frac{\sqrt{|\Delta_0|}}{2 I_{\text{pav}}} T \right)$ que :

$$\forall x > 0, \quad |\cos(x) - \sin(x)| < \exp(x) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad |\cos(x) + \sin(x)| < \exp(x) \quad (5.15)$$

Ce qui est équivalent, en passant au carré à :

$$\forall x > 0, \quad (\cos(x) - \sin(x))^2 < \exp(2x) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad (\cos(x) + \sin(x))^2 < \exp(2x) \quad (5.16)$$

soit

$$\forall x > 0, \quad 1 - \sin(2x) < \exp(2x) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad 1 + \sin(2x) < \exp(2x) \quad (5.17)$$

On pose :

$$\forall x, \quad f_1(x) = 1 - \sin(2x), \quad f_2(x) = 1 + \sin(2x) \quad \text{et} \quad g(x) = \exp(2x) \quad (5.18)$$

Il vient :

$$\forall x, \quad f_1'(x) = -2 \cos(2x), \quad f_2'(x) = 2 \cos(2x) \quad \text{et} \quad g'(x) = 2 \exp(2x) \quad (5.19)$$

De manière évidente, on a :

$$\forall x > 0, \quad f_1'(x) \leq 2 < g'(x) \quad \text{et} \quad f_2'(x) \leq 2 < g'(x) \quad (5.20)$$

Pour démontrer la relation (5.17), il nous faut maintenant utiliser le théorème suivant.

Théorème des accroissements finis :

Soient deux fonctions f et g à valeurs dans \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R} , et soit f' et g' leur dérivée respective, on note U un ouvert de \mathbb{R} .

Si $\forall u \in U, f'(u) < g'(u)$, alors $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $]a, b[\subset U, f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$

A l'aide du théorème des accroissements finis, énoncé ci-dessus, appliqué à f_1 et g ainsi qu'à f_2 et g , en prenant $U =]0, +\infty[$, $a = 0$ et $b = x$ et d'après (5.20), il vient :

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) - f_1(0) < g(x) - g(0) \quad \text{et} \quad f_2(x) - f_2(0) < g(x) - g(0) \quad (5.21)$$

soit

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) - 1 < g(x) - 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) - 1 < g(x) - 1$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) < g(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) < g(x) \quad (5.22)$$

de sorte que la relation (5.17) et à fortiori les relations (5.13) et (5.14) sont démontrées.